

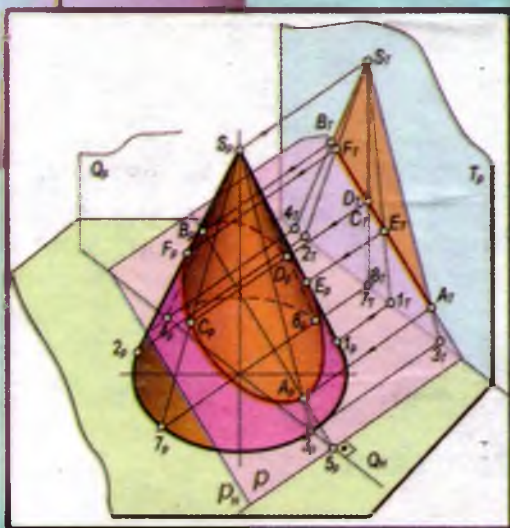
513 (075)
Ch-56

+

Sh. Murodov, L. Hakimov,
A. Xolmurzayev, M. Jumayev, A. To'xtayev

CHIZMA GEOMETRIYA

Oliy o'quv yurtlari uchun darslik



- Proyeksiyalash asoslari
- Geometrik shakllarning proyeksiyalash va ularning o'zaro vaziyatlari
- Proyeksiyalarni qayta qurish usullari
- Egri chiziqlar va sirtlarning hosil bo'lishi
- Sirtlarga urinma tekisliklar va sirtlarning yoyilmalari
- Aksonometrik proyeksiyalar

513 (045)
Ch-56

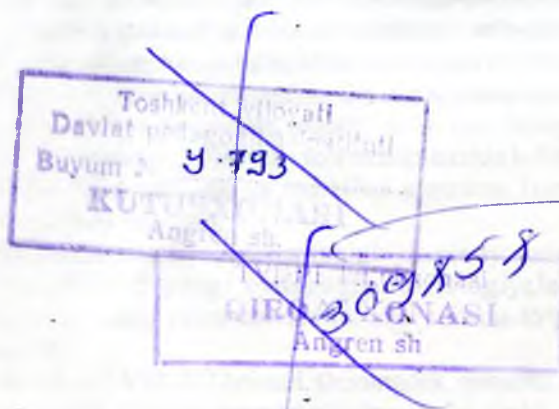
**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**Sh. Murodov, L. Hakimov, A. Xolmurzayev,
M. Jumayev, A. To'xtayev**

CHIZMA GEOMETRIYA

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan
oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan*

Professor Sh. Murodovning umumiy tahriri ostida



**TOSHKENT
«IQTISOD – MOLIYA»
2006**

514.18
22.151.3
Ch-56

Taqrizchilar: **R. Ismatullayev** – texnika fanlari nomzodi.

Toshkent davlat pedagogika
universiteti professori

R. Azimov – texnika fanlari nomzodi,

Toshkent davlat texnika universiteti
«Chizma geometriya va muhandislik grafikasi»
kafedra mudiri, dotsent

Sh.Murodov va boshqalar. Chizma geometriya: Oliy o'quv yurtlari talabalari
uchun darslik. — T.: «Iqtisod – Moliya» nashriyoti, 2006. – 296 b.

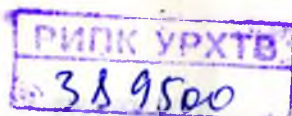
Mazkur darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan
texnika oliy o'quv yurtlari uchun tasdiqlangan «Chizma geometriya va muhandislik grafikasi»
fani namunaviy dasturi asosida yozilgan.

Darslikda nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashning
nazariy asoslari, shuningdek, egri chiziq va sirtlarning hosil bo'lishi va chizmada tasvirlanish usullari
bayon etilgan. Geometrik shakllarning o'zaro va proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari
bilan bog'liq pozitsion va metrik masalalarni yechish, sirlarga urinma tekisliklar o'tkazish, sirtlarning
yoyilmalarini yasashga oid nazariy va amaliy masalalar ko'rilgan. Aksonometrik proyeksiyalar va
ularni turli pozitsion masalalarni yechishda qo'llash keng yoritilgan.

Darslik oliy o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undan loyiha-konstruktorlik
tashkilotlari xodimlari ham foydalanishlari mumkin.

UDK 514.18 (075.8)

BBK 22.151.3 я 73



© «Iqtisod – Moliya» nashriyoti,

© «Ezgulik manbai nashriyoti», 2006

SO'ZBOSHI

O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimi oldida turgan asosiy vazifalardan biri «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»da belgilangan talablar asosida fanlar bo'yicha davlat ta'lim standartlari va namunaviy dasturlarga mos zamonaviy darslik va o'quv qo'llanmalari yaratish va shu asosda talabalarga chuqur nazariy bilimlar berib, ularni yetuk mutaxassis qilib tayyorlashdir.

Texnik bilimlarni mukammal egallashning shartlaridan biri grafik savodxonlikni oshirish, ya'ni chizmalarni o'qish va bajarishni bilishdir. Shu boisdan chizmalar chizishning asosi bo'lgan chizma geometriya fanini chuqur o'rganish talab etiladi.

Chizma geometriya matematikaning bir tarmog'i hisoblanib, uch o'lchamli fazodagi obyektlarning tekislikdagi grafik modelini qurish asoslarini o'rganadi. Shu tufayli chizmani fazodagi geometrik shaklning tekislikdagi grafik modeli deb qarash mumkin. Bu esa oliy texnik ta'lim tizimida chizma geometriyaning o'rni naqadar muhimligini belgilaydi.

Mazkur darslikda fanni o'qitishda uning nazariy asoslarini texnika va qurilishda qo'llash bilan bog'liq ko'pgina masalalar yoritilgan.

Darslikda barcha materiallar, jumladan, geometrik shakllarni proyeksiyalash va ularning o'zaro vaziyatlarini aniqlashga doir pozitsion va metrik masalalar hozirgi zamon geometriyasi taraqqiyoti nuqtai nazaridan bayon etilgan.

Axborot va kompyuter texnologiyalari keng qo'llanilayotganligi hisobga olinib, darslikda chizmalar grafik usul bilan bir qatorda, analitik usulda ham berilgan.

Fanning asosiy qonun-qoidalari ta'riflar yoki teoremlar tarzida keltirilgan.

Chizmalarining hosil bo'lish jarayoni va bajarilish algoritmi fazoda va proyeksiyalarda bir xil tartibda berilgan.

Darslikni tayyorlashda chizma geometriya fanining nazariy, amaliy va uslubiy yutuqlari, o'qitishning yangi pedagogik texnologiyalaridan, shuningdek, mualliflarning uzoq yillar davomida shu sohada to'plagan tajribalaridan foydalanildi.

Darslikning kirish bo'limi, I, VIII, XII boblari, shuningdek, qisqacha tarixiy ma'lumotlar, asosiy geometrik o'rinar, atama va tushunchalar izohli lug'ati professor Sh.K.Murodov (TDPU), III, IV va V boblari TAYI professori L.Q.Hakimov, VI, VII va XI boblari dotsent A.A.Xolmurzayev (FarPI), II, IX, X boblari katta o'qituvchilar M.J.Jumayev va A.T.To'xtayev (TAYI) hamda XIII bob M.J.Jumayev va Sh.K.Murodovlar tomonidan yozilgan.

QABUL QILINGAN SHARTLI BELGILAR

Belgilanishi	Nomlanishi
H, V, W	gorizontal, frontal, profil proyeksiyalar tekisliklari
$H_1, H_2, \dots$ $V_1, V_2, \dots$	gorizontal, frontal va profil proyeksiyalar tekisliklarining bir va ikki marta almashtirilgan vaziyatlari
$A, B, C, D, E, \dots$ va $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$	fazodagi nuqtalar
$A', B', \dots$, $A'', B'', \dots$, $A''', B''', \dots$	fazodagi $A, B, \dots$ nuqtalarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
$A_p, B_p, C_p, \dots$	fazodagi $A, B, C, \dots$ nuqtalarning P tekislikdagi proyeksiyalari
$a, b, c, d, e, \dots$ k, m, n	fazodagi to'g'ri yoki egri chiziqlar
$a', b', n', \dots$ $a'', b'', n'', \dots$ $a''', b''', n''', \dots$	fazodagi $a, b, n, \dots$ to'g'ri yoki egri chiziqlarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
h	gorizontal to'g'ri chiziqlar
f	frontal to'g'ri chiziqlar
p	profil to'g'ri chiziqlar
$P, Q, T, G, F, \dots$	fazodagi umumiy vaziyatdagi tekisliklar
$H_1, H_2, H_3, \dots$	gorizontal tekisliklar
$V_1, V_2, V_3, \dots$	frontal tekisliklar
$W_1, W_2, W_3, \dots$	profil tekisliklar
P_H, Q_H , P_V, Q_V , P_W, Q_W	fazodagi P va Q tekisliklarning gorizontal, frontal, profil izlari
$(AVC); a b; c \cap d$	geometrik elementlar bilan berilgan tekisliklar
$\Delta, \theta, \Phi, \Omega, \Gamma, \dots$	grek alfavitining bosh harflari bilan belgilangan fazodagi sirtlar

QABUL QILINGAN SIMVOLLAR

Belgilanishi	Nomlanishi	Misol
$\in (\notin)$	tegishli (tegishli emas)	Masalan, $A \in \Phi$ ($A \notin \Phi$) – A nuqta Φ shaklga tegishli (tegishli emas) yoki Φ shakl A nuqta orqali o'tadi (o'tmaydi)
$\equiv (\neq)$	ustma-ust tushgan (ustma-ust tushmagan)	Masalan, $A \equiv B - A$ va B nuqtalar ustma-ust tushadi ($\Phi_1 \neq \Phi_2 - \Phi_1$ va Φ_2 shakllar ustma-ust tushmaydi)
$\cap$	kesishgan	Masalan, $a \cap b - a$ va b to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi
$\nmid$	ayqash to'g'ri chiziqlar	Masalan, $a \nmid b - a$ va b to'g'ri chiziqlar o'zaro ayqash
$\parallel (\nparallel)$	parallel (parallel emas)	Masalan, $a \parallel b$ ($a \nparallel b$) – a va b to'g'ri chiziqlar parallel (parallel emas)
$\perp$	perpendikulyar	Masalan, $a \perp b - a$ va b to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar
$\angle$	tekis yoki ikkiyoqli burchak	Masalan, $\angle BAC - AB$ va AC to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak
$a \wedge b$	ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak	Masalan, $a \wedge b - a$ va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak
$a \wedge P$	to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak	Masalan, $a \wedge P - a$ to'g'ri chiziq va P tekislik orasidagi burchak
$P \wedge Q$	tekisliklar orasidagi ikkiyoqli burchak	Masalan, $P \wedge Q - P$ va Q tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchak
 yoki 	to'g'ri burchak belgisi	

KIRISH

1-§. Chizma geometriya fanining maqsadi va vazifalari

Chizma geometriya umumiy geometriyaning bir shoxobchasi bo'lib, narsalarni tasvirlash usullari yordamida ularning shakllari, o'lchamlari va o'zaro joylashishlariga tegishli pozitsion va metrik masalalarni yechishni o'rganadi.

Chizma geometriya matematika fanlari bilan uzviy bog'liq bo'lib, umumtexnika fanlaridan hisoblanadi. Chizma geometriya boshqa geometriyalardan o'zining asosiy usuli, ya'ni tasvirlash usuli bilan farq qiladi. U tasvirlash usullari yordamida o'quvchining fazoviy tasavvurini kengaytiradi, tasvirlarni yasash va oldindan yasalgan tasvirlarni o'qiy bilish hamda amaliyotdagi turli muhandislik masalalarini yechishga yordam beradi. Chizma geometriya qonun-qoidalari bilan nafaqat mavjud narsalarni, balki tasavvur qilinadigan narsalarni ham tasvirlash mumkin.

Fazodagi shakllarning tekislikdagi chizmalari chizma geometriya usullari bilan ma'lum qonun-qoidalar asosida hosil qilinadi. Bu chizmalar orqali buyumning fazoviy shaklini chizish va o'lchamlarini aniqlash mumkin. Chizmalar yordamida geometrik shakllarga tegishli stereometrik masalalar yechiladi. Chizmalarsiz fan va texnika taraqqiyotini tasavvur qilib bo'lmaydi. Arxitektor va muhandislar ijodiy fikrlarini faqat chizmalar yordamida to'liq bayon eta oladilar. Chizmalar asosida barcha muhandislik inshootlari quriladi, mashinalar, mashina qismlari, meditsina asboblari va hokazolar ishlab chiqariladi.

Shakllarning bizga ma'lum bo'lgan barcha geometrik xossalari ularning chizmalaridan olingan ma'lumotlardan ham aniqlasa bo'ladi. Shuning uchun ham buyumlarning chizmalarini ularning geometrik xususiyatlarini o'zida aks ettiruvchi tekis geometrik modellar deb atash mumkin.

Chizma geometriya fani quyidagilarni o'rganadi:

- fazoviy shakllarning tekislikdagi tasvirlari, ya'ni tekis modellari (chizmalari)ni yasash;
- tekis chizmada geometrik masalalarni grafik yo'l bilan yechish;
- shakllarning berilgan tekis chizmalari bo'yicha ularning fazoviy ko'rinishi va vaziyatini tasavvur qilish hamda yaqqol tasvirlarini yasash;
- geometrik shakllarning chizmalarini bajarish va o'qish orqali o'quvchining fazoviy tasavvurini rivojlantirish.

Ma'lumki, geometrik shaklning xossalari analitik va grafik usullarda tekshirish mumkin. Shakllarning grafik modeliga asosan ularning analitik

usulda berilishini va aksincha, shakllarning analitik ko'rinishidan ularning chizmalarini yasash usullarini chizma geometriyada ham ko'rish mumkin.

Loyihalanadigan buyumlarni faqatgina grafik usulda tasvirlash hozirgi zamon ishlab chiqarish talablarini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun chizmalarni bajarishda grafik usullar bilan birga analitik usullardan ham foydalaniladi.

Keyingi yillarda buyumlarning chizmalarini kompyuter grafikasi vositalari yordamida tayyorlashda avtomatlashtirilgan loyihalash sistemalarining kirib kelishi chizma geometriya fanining rivojlanishida yangicha mazmun kasb etmoqda.

2-§. Asosiy geometrik tushunchalar

Geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri shakl (figura)dir.

Ta'rif. Har qanday tartibda joylashgan nuqtalar to'plami geometrik shakl (figura) deyiladi.

Geometrik shakllarni tashkil qiluvchi nuqtalar to'plami bir nechta va cheksiz ko'p nuqtalardan tuzilgan bo'lishi mumkin.

Geometrik shakllar juda ko'p. Ammo shulardan eng asosiylari to'g'ri chiziq va tekislikdir. Nuqtalar, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasida ma'lum munosabat o'rnatilgan bo'lib, bu *yotishlilik* yoki *tegishlilik* deb yuritiladi. Masalan, A nuqta a to'g'ri chiziqqa tegishli – $A \in a$; A nuqta P tekislikka tegishli – $A \in P$; a to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli – $a \in P$ va hokazo.

2.1. Nuqta. Nuqta eng boshlang'ich geometrik tushuncha bo'lib, u hajmsiz, yuzasiz, uzunlikka ega bo'lmagan geometrik element deb qabul qilingan. Nuqta chizmalarda shartli ravishda kichkina aylanacha ko'rinishida belgilanadi.

2.2. To'g'ri chiziq. Berilgan ikki nuqtadan o'tgan yagona geometrik shakl faqat to'g'ri chiziq bo'ladi. To'g'ri chiziqni bitta nurda yotuvchi nuqtalar to'plami deb ham qarash mumkin. To'g'ri chiziqning uzunligini haqiqiy miqdor bilan o'lchash mumkin emas. To'g'ri chiziq uzunligi cheksiz (∞) miqdordir. To'g'ri chiziq ikki nuqta bilan chegaralansa, to'g'ri chiziq kesmasi hosil bo'ladi. To'g'ri chiziq kesmasi haqiqiy miqdor o'lchoviga egadir.

To'g'ri chiziq ustidagi nuqtalar to'plamini ikki qismga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz) nuqtalarga ajratish mumkin:

- xos $A_1, A_2, A_3, \dots$ nuqtalarni berilgan a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'ladi (1-rasm);
- cheksiz uzoqlikda joylashgan xosmas A_∞ nuqtani a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'lmaydi;
- har bir to'g'ri chiziqda faqat bitta xosmas nuqta mavjud.

2.3. Tekislik. Tekislik ustida cheksiz ko'p nuqtalar va to'g'ri chiziqlar mavjuddir. Shunga ko'ra, tekislikni nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar to'plamidan

iborat deb qarash mumkin. Aniq sonli nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar berilganda tekislik berilgan hisoblanadi.

Tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqlarni ham ikki turga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz)ga ajratish mumkin:

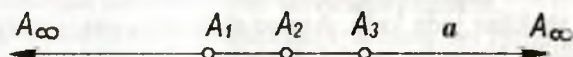
- xos to'g'ri chiziqlarni tekislikda chizish va vaziyatini belgilash mumkin (2-a rasm);

- tekislikka tegishli bo'lgan har qanday ikki to'g'ri chiziq umuman kesishadi. Agar bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa, u holda ular xosmas nuqtada (2-b rasm), agar parallel bo'lmasa, xos nuqtada (2-a rasm) kesishadi;

- tekislikning xosmas chizig'i tekislikda yotuvchi ikki ixtiyoriy to'g'ri chiziqning xosmas nuqtalarini tutashtirish bilan hosil qilinadi (2-v rasm).

Ma'lumki, tekislikdagi har bir to'g'ri chiziq bitta xosmas nuqtaga ega.

Tekislikdagi to'g'ri chiziqlarning xosmas nuqtalari geometrik o'rni tekislikning *xosmas chizig'i* deyiladi (2-v rasmdagi m_x chiziq). Tekislikning istalgan to'g'ri chizig'i uning xosmas chizig'i bilan bir nuqtada kesishadi. Tekislikdagi parallel to'g'ri chiziqlar bitta xosmas nuqtada kesishadi (2-b rasmdagi



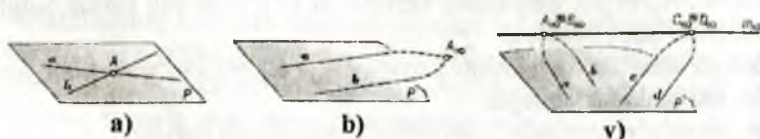
1-rasm.

A_x nuqta). To'g'ri chiziq va tekisliklarning xosmas elementlari nazariy masalalarni talqin qilishda va perspektiv tasvirlarni yasashda qo'llaniladi.

2.4. Geometrik fazo. Geometriyada bir jinsli (bir xil) obyektlarning to'plami *geometrik fazo* deb yuritiladi.

Geometrik fazoni nuqtalar, chiziqlar yoki sirtlar to'plamlaridan tuzilgan deb qarash mumkin. Ma'lumki, chiziqlar va sirtlar nuqtalardan tashkil topadi. Nuqta esa birinchi va boshlang'ich geometrik tushunchadir. Demak, geometrik fazoni shakl deb qarash mumkin.

Real obyektlarni o'rganish xossalariga qarab geometrik fazolar ham turlicha bo'ladi. Masalan, real obyekt Yevklid aksiomalari sistemasi bo'yicha o'rganilsa, Yevklid fazosi hosil bo'ladi. Yevklid fazosi uch o'lchamli (R_3)

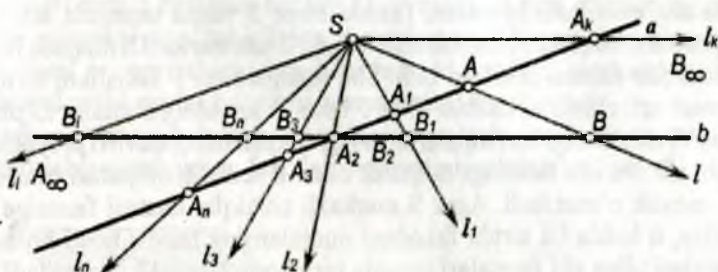


2-rasm.

fazodir. Tekislik Yevklid fazosida ikki o'ldhamli (R_2) bo'ladi. Biz o'rganayotgan geometriya Yevklid geometriyasi deb yuritiladi. Yevklid fazosining kengaytirilgan modelini birinchi bo'lib ulug' rus geometri N.I.Lobachevskiy (1792–1856) yaratdi. Bu model *Lobachevskiy geometriyasi* deb yuritiladi va bu geometriyaning o'ziga xos aksiomalar sistemasi mavjud.

3-§. Geometrik shakllarda o'zaro bir qiymatli moslik

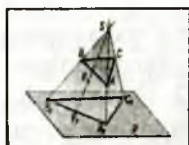
Biror tekislikda a va b to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin (3-rasm). Bu tekislikda ixtiyoriy S nuqtani olamiz. Bu nuqtadan ixtiyoriy l to'g'ri chiziq o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqni A va b to'g'ri chiziqni B nuqtada kesadi. Xuddi shuningdek, S nuqtadan $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, unda ular a to'g'ri chiziqni $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ nuqtalarda va b to'g'ri chiziqni $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bunda a to'g'ri chiziqning har bir nuqtasiga b to'g'ri chiziqning nuqtalari mos keladi. a va b to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishgan A_2 nuqtasi o'z-o'ziga mos keladi.



3-rasm.

Shunday qilib, a va b to'g'ri chiziqlarga tegishli nuqtalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. a va b to'g'ri chiziqlarda shunday nuqtalar mavjudki, bir to'g'ri chiziqning xos nuqtasiga ikkinchi to'g'ri chiziqning xosmas nuqtasi mos keladi va aksincha. Masalan, a to'g'ri chiziqning A_k nuqtasiga b to'g'ri chiziqning B_∞ xosmas nuqtasi, b to'g'ri chiziqning B_i nuqtasiga a to'g'ri chiziqning A_∞ xosmas nuqtasi mos keladi.

Xuddi shuningdek, to'g'ri chiziq bilan tekislik yoki ikki tekislik uchun ham o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish mumkin. Bu xulosalarni turli geometrik masalalarni yechishdagi grafik yasashlarda qo'llash mumkin.



I BOB. TASVIRLASH USULLARI

1.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Muhim geometrik tushunchalardan biri shakllarni tasvirlashdir. Geometrik tasvirlash biror Φ shaklning nuqtalari bilan ikkinchi Φ_1 shaklning nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatishdir.

Chizma geometriyada uch o'lchamli R_3 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasini ikki o'lchamli R_2 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasiga aniq grafik qoidalar asosida mos keltirib, bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shuning uchun chizma geometriyani fazoni tekislikda aks ettiruvchi grafik tasvirlash geometriyasi deb yuritish mumkin.

Geometrik fazo nuqtalar to'plami deb qaralib, proyeksiyalash yo'li bilan tekislikda aks ettiriladi. Masalan, fazoda biror S nuqta tanlanib, shu nuqta fazoning hamma nuqtalari bilan birlashtiriladi. Unda markazi S nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Shu fazoga biror P tekislikni kiritamiz. Unda S markazli chiziqlar dastasi bilan P tekislik kesishib, nuqtalar to'plamini hosil qiladi. Tekislikdagi bu nuqtalar fazodagi nuqtalarning tasviri (proyeksiyasi) deb yuritiladi. Bunda fazodagi nuqtalar bilan P tekislik nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Agar S markazli chiziqlar dastasi fazosiga biror sirt kiritilsa, u holda bu sirtida fazodagi nuqtalarning tasviri hosil bo'ladi va fazo nuqtalari bilan sirt nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Chizma geometriyada fazodagi shakllar markaziy yoki parallel proyeksiyalash usullari bilan biror tekislikda tasvirlanadi. Bu tekislik proyeksiyalar tekisligi deb yuritiladi. Shakllarning proyeksiyalar tekisligidagi tasvirini yasash esa ma'lum qonun-qoidalarga asoslanib bajariladi.

1.2-§. Markaziy proyeksiyalash usuli va uning xossalari

Markaziy proyeksiyalash usuli geometrik shakllarni tekislikda proyeksiyalashning umumiy holdidir.

Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalar markazi S va proyeksiyalar tekisligi P beriladi (1.1-rasm). S va P sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtani S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Buning uchun S markaz bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtirib, uni davom ettiramiz. Hosil bo'lgan SA proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligi P bilan A_p nuqtada kesishadi, ya'ni $A_p = SA \cap P$. Bunda A_p nuqta A nuqtaning S markaz bo'yicha P proyeksiyalar tekisligidagi *markaziy proyeksiyasi* deb yuritiladi.

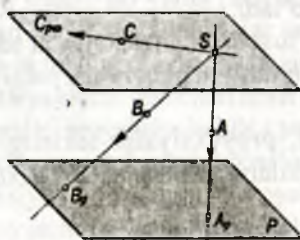
Fazodagi ikkinchi biror ixtiyoriy B nuqta ham A nuqta singari proyeksiyalanib, $SB \cap P = B_p$ nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi vaziyati aniqlanadi. Agar biror C nuqtani P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi SC nur P tekislikka parallel bo'lsa ($SC \parallel P$), u holda bu nur P tekisligi bilan cheksiz uzoqlikda kesishib, $C_{p\infty}$ xosmas nuqtani hosil qiladi. SA, SB, SC, ... to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* deb yuritiladi.

Fazodagi biror nuqtalar to'plami proyeksiyalash markazi S orqali P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanganda S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Bu dastaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami fazodagi ma'lum bir nuqtalar to'plamining tasviri bo'ladi. Masalan, ABD uchburchakning markaziy proyeksiyasi $A_p B_p D_p$ uchburchak bo'ladi (1.2-rasm).

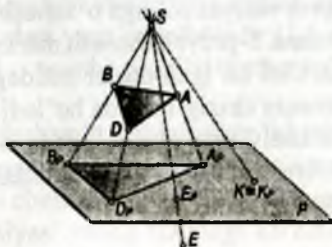
Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan E nuqtaning E_p proyeksiyasi $SE \cap P = E_p$ bilan aniqlanadi. Proyeksiyalar tekisligida yotgan K nuqtaning K_p markaziy proyeksiyasi nuqtaning o'zi bilan ustma-ust ($K = K_p$) tushadi.

Markaziy proyeksiyalash konusli yoki qutbli proyeksiyalash, yoxud *perspektiva* deb ham yuritiladi. Masalan, markaziy proyeksiyalash apparatida biror m egri chiziq berilgan bo'lsin (1.3-rasm). m egri chiziqning nuqtalar to'plami proyeksiyalar tekisligiga S markaz orqali proyeksiyalansa, uning proyeksiyasi m_p egri chiziq hosil bo'ladi. U holda S markazdan o'tuvchi proyeksiyalovchi nurlar to'plami konus sirtini hosil qiladi.

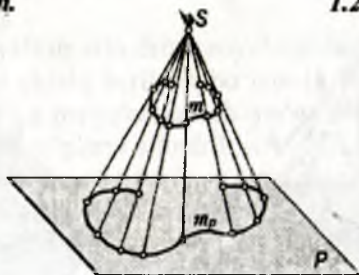
Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalash markazi va buyumning proyeksiyasiga qarab uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi.



1.1-rasm.



1.2-rasm.



1.3-rasm.

Markaziy proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud:

1-xossa. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. SA nurda yotuvchi $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A_p nuqta bilan ustma-ust tushadi (1.4- rasm).

3-xossa. Proyeksiyalash markazidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi kesma bo'ladi.

Biror a to'g'ri chiziq BC kesmasi orqali berilgan bo'lsin (1.4-rasm). BC kesma S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda SBC proyeksiyalovchi tekislik hosil bo'ladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik P bilan $B_p C_p$ kesma bo'yicha kesishadi. $BC \in a$ bo'lgani uchun $B_p C_p \in a_p$ bo'ladi.

Proyeksiyalash markazi S dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi. Masalan, DE to'g'ri chiziq kesmasining markaziy proyeksiyasi $D_p \equiv E_p$ nuqta bo'ladi (1.4-rasm).

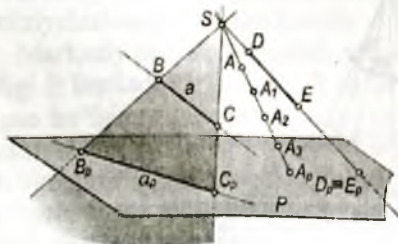
4-xossa. S markazdan o'tmaydigan tekislikning markaziy proyeksiyasi tekislik bo'ladi. Masalan, ABC uchburchak tekisligining nuqtalar to'plami S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda (1.5-rasm) SABC proyeksiyalovchi piramida hosil bo'ladi. Bu piramidaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan $A_p B_p C_p$ uchburchak hosil bo'ladi.

S markazdan o'tuvchi tekislik va unga tegishli geometrik shakllarning markaziy proyeksiyalari bitta to'g'ri chiziqqa proyeksiyalanadi. Masalan, SAB tekisligi va unga tegishli F nuqtaning proyeksiyasi $A_p F_p B_p$ kesmada bo'ladi (1.5-rasm).

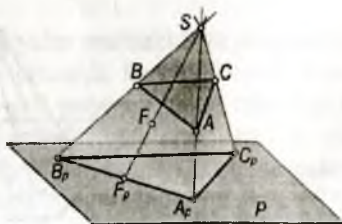
5-xossa. Agar biror tekis shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasi o'ziga o'xshash shakl bo'ladi.

6-xossa. S proyeksiyalash markazidan o'tuvchi va proyeksiyalar tekisligi P ga parallel bo'lgan nurlar ustidagi nuqtalarning markaziy proyeksiyasi P ning xosmas chizig'i ustida bo'ladi.

Markaziy proyeksiyalashda S markaz, proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalanuvchi shaklning o'zaro vaziyatlariga ko'ra quyidagi xossani keltirish mumkin:



1.4-rasm.



1.5-rasm.

7-xossa. Proyeksiyalanuvchi shaklning proyeksiyalar markazi bilan proyeksiyalar tekisligiga nisbatan joylashuviga qarab uning proyeksiyasi o'ziga nisbatan katta yoki kichik bo'lishi mumkin.

1.3-§. Parallel proyeksiyalash usuli va uning xossalari

Markaziy proyeksiyalashdagi S markazni biror yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, u holda $SA, SB, \dots$ proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'ladi (1.6-rasm). Bunday proyeksiyalash *parallel proyeksiyalash* deb yuritiladi. Demak, parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin.

Parallel proyeksiyalashda proyeksiyalar tekisligi P va s proyeksiyalash yo'nalishi beriladi. P va s sistemada fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin (1.6-rasm). Bu nuqtaning proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan s yo'nalishga parallel qilib nur o'tkaziladi. Bu nurning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishgan nuqtasi A_p bo'ladi. A_p nuqta fazodagi A nuqtaning s yo'nalish bo'yicha P dagi parallel proyeksiyasi deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan fazodagi ixtiyoriy biror B nuqtaning s yo'nalish bo'yicha parallel proyeksiyasi B_p bo'ladi. Bunda B va A nuqtalarning proyeksiyalovchi nurlari o'zaro parallel bo'lib, faqat ularning yo'nalishlari qarama-qarshidir. AA_p, BB_p to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligi P ga tegishli C nuqtaning proyeksiyasi shu nuqtaning o'zida bo'ladi. Fazodagi ixtiyoriy d to'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisligi P ga s yo'nalish bo'yicha proyeksiyalash uchun shu to'g'ri chiziq ustidagi istalgan ikki D va E nuqtalar proyeksiyalari yasalsa kifoyadir (1.6-rasm). Bunda d to'g'ri chiziq nuqtalari orqali o'tuvchi parallel nurlar to'plami proyeksiyalovchi tekislikni hosil qiladi.

Parallel proyeksiyalashda s proyeksiyalash yo'nalishining berilishi shartdir. Chunki s proyeksiyalash yo'nalishi berilmagan holda ixtiyoriy A nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi proyeksiyasini cheksiz ko'p hosil qilish mumkin.

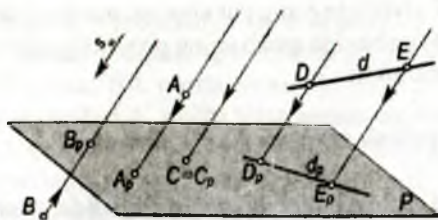
Buyumning birgina parallel proyeksiyasi uning fazodagi ko'rinishi va o'lchamlari haqida to'liq ma'lumot bera olmaydi. Buning uchun qo'shimcha shartlar berilishi lozim.

Parallel proyeksiyalash silindrik proyeksiyalash deb ham yuritiladi. Masalan, biror m egri chiziq berilgan bo'lsin (1.7-rasm). Bu egri chiziq nuqtalaridan o'tuvchi s proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan proyeksiyalovchi nurlar to'plami silindrik sirt hosil qiladi. Bu silindrik sirt proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishib, m_p egri chiziqni hosil qiladi.

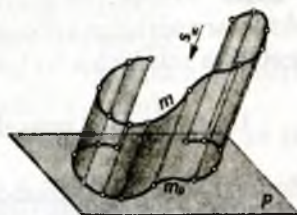
Parallel proyeksiyalash ikki xil bo'ladi:

1. *Qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash*. Bunda s_z proyeksiyalash yo'nalishi P proyeksiyalar tekisligi bilan o'tkir yoki o'tmas burchak taslikil qiladi.

2. *To'g'ri burchakli parallel proyeksiyalash*. Bunda proyeksiyalash yo'nalishi s_z proyeksiyalar tekisligi P ga perpendikulyar bo'ladi.



1.6-rasm.



1.7-rasm.

Geometrik shakllarni parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud:

1-xossa. Nuqtaning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. Proyeksiyalovchi narda yotuvchi barcha nuqtalarning proyeksiyalari bitta nuqtada bo'ladi.

3-xossa. Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqlarning proyeksiyasi to'g'ri chiziq bo'ladi. Masalan, 1.8-rasmda s proyeksiya yo'nalishiga parallel bo'lmagan AB to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligi P ga parallel proyeksiyalangan. Bunda AB kesma nuqtalaridan o'tuvchi nurlar proyeksiyalovchi Q tekislikni hosil qiladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik bilan P proyeksiyalar tekisligi $A_p B_p$ kesma bo'yicha kesishadi.

Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi. 1.8-rasmda CD to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiya yo'nalishi s ga parallel. Uning P dagi proyeksiyasi $C_p \equiv D_p$ nuqta bo'ladi.

4-xossa. AB to'g'ri chiziq kesmasiga tegishli E nuqtaning parallel proyeksiyasi E_p shu to'g'ri chiziq proyeksiyasi $A_p B_p$ kesmaning ustida bo'ladi (1.8-rasm).

5-xossa. Agar nuqta to'g'ri chiziq kesmasini biror nisbatda bo'lsa, bu nuqtaning proyeksiyasi ham kesma proyeksiyasini shunday nisbatda bo'ladi.

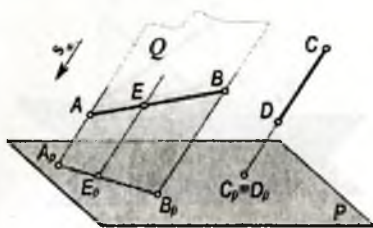
Biror C nuqta AB kesmani $AC:CB=r:q$ nisbatda bo'lsa, unda C_p nuqta $A_p B_p$ kesmani ham $A_p C_p:C_p B_p=r:q$ nisbatda bo'ladi (1.9-rasm).

AB to'g'ri chiziq kesmasini s yo'nalish bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi tekislik bilan proyeksiyalar tekisligi P kesishib, $A_p B_p$ kesmani hosil qiladi. Unda 4-xossaga asosan $C \in AB$ bo'lgani uchun $C_p \in A_p B_p$ bo'ladi.

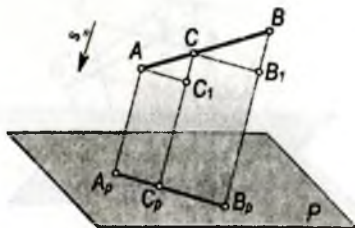
AB kesmaning proyeksiyalovchi tekislikdagi A va C nuqtalaridan $AC_1 \parallel A_p B_p$ va $CB_1 \parallel A_p B_p$ kesmalarni o'tkazamiz. Unda hosil bo'lgan ACC_1 va CBB_1 uchburchaklar o'zaro o'xshash bo'ladi. Bu uchburchaklarning o'xshashligidan $AC:AC_1=CB:CB_1$ yoki $AC:CB=AC_1:CB_1$ bo'ladi. $AC_1=A_p C_p$ va $CB_1=C_p B_p$ bo'lgani uchun $AC:CB=A_p C_p:C_p B_p=r:q$ bo'ladi.

6-xossa. To'g'ri chiziqlarning kesishuv nuqtasi proyeksiyasi ularning proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi, ya'ni $AB \cap SD=E$ bo'lsa, $A_p B_p \cap C_p D_p=E_p$ bo'ladi (1.10-rasm).

Proyeksiyalash yo'nalishi bo'yicha AB va CD kesmalarning $A_p B_p$ va $C_p D_p$ proyeksiyalarining proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyalarini yasaymiz.



1.8-rasm.



1.9-rasm.

Kesmalarni proyeksiyalovchi tekisliklar o'zaro EE_p to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi, bunda $EE_p \parallel C$ bo'lib, u E nuqtaning proyeksiyalovchi nuri bo'ladi. AB va CD kesmalarining kesishuvidan hosil bo'lgan E nuqtaning proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyasi E_p bo'ladi. 3-xossaga asosan $E \in AB$ va $E \in CD$ bo'lgani uchun $E_p \in A_p B_p$ va $E_p \in C_p D_p$ bo'lishi shart. Demak, E_p nuqta $A_p B_p$ va $S_p D_p$ kesmalar uchun umumiy nuqtadir.

7-xossa. Parallel to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo'ladi. Agar $AB \parallel CD$ bo'lsa, $A_p B_p \parallel C_p D_p$ bo'ladi. 1.11-rasmda s_x yo'nalish bo'yicha AB va CD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalar tekisligidagi $A_p B_p$ va $C_p D_p$ proyeksiyalari yasalgan. Hosil bo'lgan AB va CD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklari proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishganda $A_p B_p \parallel C_p D_p$ kesmalar hosil bo'ladi.

8-xossa. Parallel to'g'ri chiziq kesmalarining nisbati bu kesmalar proyeksiyalarining nisbatiga teng bo'ladi, ya'ni $AB \parallel CD$ bo'lib, $AB:CD=q$ bo'lsa, $A_p B_p:C_p D_p=q$ bo'ladi (1.11-rasm). Bunda 3-xossaga asosan $A_p B_p \parallel C_p D_p$ hosil bo'ladi. AB va CD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklarida AE ($AE \parallel A_p B_p$) va CF ($CF \parallel C_p D_p$) kesmalarni o'tkazamiz. U holda ABE va CDF uchburchaklarning parallelligi va o'xshashligidan $AB:AE=CD:CF$ yoki $AB:CD=AE:CF=q$ kelib chiqadi. Demak, $AB:CD=A_p B_p:C_p D_p=q$ bo'ladi.

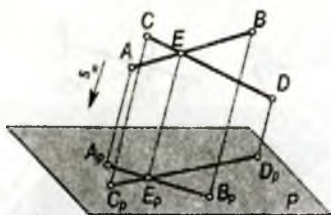
Parallel proyeksiyalashning yuqorida keltirilgan xossalardan darslikning keyingi boblarida keng foydalaniladi.

1.4-§. To'g'ri burchakli proyeksiyalash

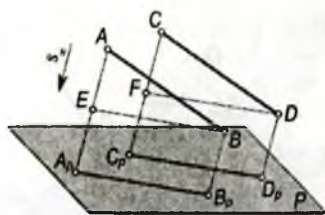
Ta'rif. Proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, bunday parallel proyeksiyalash to'g'ri burchakli proyeksiyalash deyiladi.

To'g'ri burchakli proyeksiyalash *ortogonal proyeksiyalash* deb ham yuritiladi.

Ortogonal proyeksiyalashda proyeksiyalovchi nur yo'nalishi ko'rsatilmaydi. Masalan, proyeksiyalar tekisligi P va fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin (1.12-rasm). A nuqtani P tekislikka ortogonal proyeksiyalash uchun A nuqtadan



1.10-rasm.



1.11-rasm.

perpendikulyar tushiriladi. Bu perpendikulyarning P tekislikdagi asosi A_p nuqta fazodagi A nuqtaning ortogonal proyeksiyasi bo'ladi.

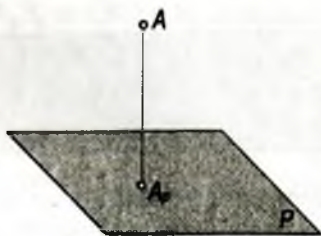
To'g'ri burchakli proyeksiyalashda geometrik shakl fazoda proyeksiyalar tekisligiga nisbatan ixtiyoriy holatda joylashgan bo'lsa, uning proyeksiyasida shaklning metrik (uzunligi, burchagi va boshqa) o'lchamlari o'zgaradi. Masalan, ortogonal proyeksiyalashda to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o'zidan kichik yoki teng bo'ladi:

- agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasining uzunligi kesmaning fazodagi uzunligiga teng bo'ladi (1.13-rasm);
- agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lmasa, uning proyeksiyasining uzunligi o'zidan kichik bo'ladi, ya'ni $A_pB_p < AB$ bo'lib, $AB = A_pB_p / \cos \alpha$ bo'ladi. Bunda $\alpha = \angle ABP$ (1.14-rasm).

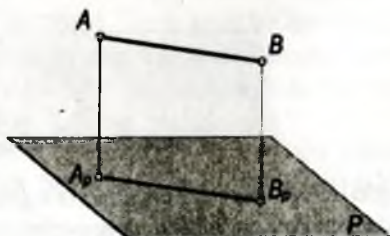
Fazoda berilgan biror ABCD trapetsiya (1.15-rasm) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lmasa, uning burchaklari va tomonlarining haqiqiy o'lchamlari saqlanib qolmaydi. Lekin trapetsiyaning $A_pB_pC_pD_p$ proyeksiyasi orasidagi ayrim xususiyatlari o'zgarmaydi. Masalan, trapetsiyaning bir-biriga parallel bo'lgan AB va CD asoslarining A_pB_p va C_pD_p proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi. Geometrik shakllarning proyeksiyalanish jarayonida o'zgarmagan xususiyatlari ularning **invariant xossalari** deb yuritiladi.

1.3-§ da keltirilgan parallel proyeksiyalarning barcha xossalari ortogonal proyeksiyalar uchun ham o'rinalidir.

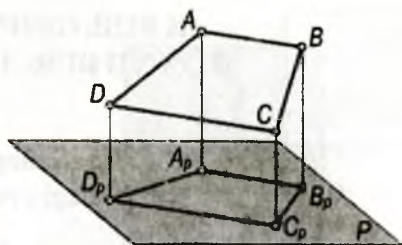
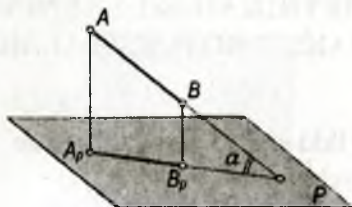
Ortogonal proyeksiyalashda biror shaklning barcha nuqtalaridan o'tuvchi nurlar o'zaro parallel bo'lib, berilgan geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalaydi. Buyumning bitta ortogonal proyeksiyasi bilan



1.12-rasm.



1.13-rasm.



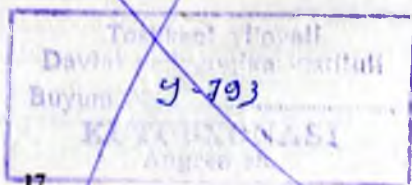
uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Buning uchun biror ko'shimcha shart kiritish zarur. Bunday qo'shimcha shart sifatida buyumning birinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikkinchi tekislikdagi tasvirini olish mumkin. Bu ikki proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar buyumning fazodagi vaziyatini aniqlaydi.

Ortogonal proyeksiyalash usuli texnik chizmalarni chizishda, inshootlarni loyihalashda ko'p qo'llaniladi. Bu usul tasvirning yaqqoliligini bermasa ham, grafik ishlarning aniq bajarilishini ta'minlaydi va buyumlarning tekislikdagi tasvirlari orqali ularning o'lchamlarini oson va qulay aniqlaydi.

Texnik chizmalarni tuzishda proyeksiyalanuvchi buyumni o'zaro perpendikulyar tekisliklarga nisbatan shunday joylashtirish kerakki, unda buyumning asosiy o'lchamlari va elementlari qulay holda tasvirlansin. Faqat shundagina buyum tasvirlariga qarab uning fazodagi ko'rinishini tasayyur etish mumkin.

Nazorat savollari

1. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi qanday yasaladi?
2. Qanday holda to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
3. Markaziy proyeksiyalashda nimalar berilgan bo'ladi?
4. Parallel proyeksiyalash usuli qanday bajariladi?
5. Parallel proyeksiyalashda nimalar berilgan bo'ladi?
6. To'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi qanday yasaladi?
7. Parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?
8. Qanday holda to'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
9. «Ortogonal» so'zi nimani anglatadi?
10. To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo'ladi?





II BOB. GEOMETRIK SHAKLLARNING TO'G'RI BURCHAKLI PROYEKSIYALARI

2.1-§. Nuqtaning ikki o'zaro perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyalari

Biror buyumning tasviriga qarab uning o'qilishini ikkita o'zaro parallel bo'lgan proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash orqali ta'minlash mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyar vaziyatda tanlab olinishi buyum tasviri o'qilishini osonlashtiradi.

O'zaro perpendikulyar bo'lgan ikki tekislik bir-biri bilan kesishib, fazoni to'rt qismga – kvadrantlarga (choraklarga) bo'ladi. Fazoda gorizontal vaziyatda joylashgan (2.1-rasm) H tekislik *gorizontal proyeksiyalar tekisligi*, vertikal joylashgan V tekislik *frontal proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. H va V proyeksiyalar tekisliklari o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning kesishgan Ox chizig'ini *proyeksiyalar o'qi* deyiladi. Bunda H va V tekisliklar proyeksiyalar tekisliklari sistemasini hosil qiladi.

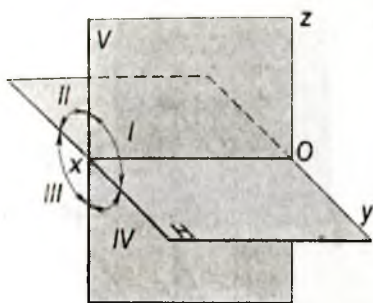
Proyeksiyalar tekisliklari sistemasining bunday fazoviy modelida turli geometrik shakllar, shuningdek, detallar, mashina va inshootlarni joylashtirib, so'ngra ularning chizmalarini yasash katta noqulayliklar tug'diradi va zaruriyati ham bo'lmaydi.

Buyumlarning chizmalarini bajarishda bu tekisliklarning bir tekislikka joylashtirilgan (jipslashtirilgan) tekis tasvirlaridan foydalaniladi. Shu maqsadda V proyeksiyalar tekisligi qo'zg'almasdan, H gorizontal proyeksiyalar tekisligini Ox proyeksiyalar o'qi atrofida pastga 90° ga aylantirib, V tekislik bilan ustma-ust tushirib jipslashtiradi (2.2-rasm). Natijada H va V tekisliklarda bajarilgan barcha yasasilar asosiy chizma tekisligi sifatida qabul qilingan V frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtiriladi. Bunda nuqta yoki geometrik shaklning bitta tekislikda joylashtirilgan ikki – gorizontal va frontal tasvirlari tekis chizma yoki kompleks chizma – epyur hosil qiladi. Bu usulni birinchi marta fransuz geometri Gaspar Monj (1746–1818) tavsiya etgan. Shuning uchun bu tekis chizma *Monj chizmasi* deb ham yuritiladi.

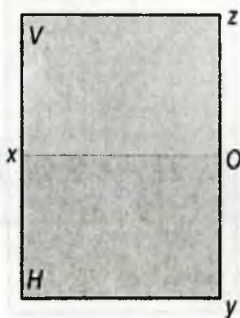
Amalda geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashda asosan proyeksiyalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarining konturini tasvirlash shart emas (2.3-rasm).

Ma'lumki, barcha buyumlar nuqtalar to'plamidan tashkil topgan. Shuning uchun proyeksiyalashni nuqtadan boshlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Biror nuqta yoki geometrik shakl fazoning turli choraklarida joylashishi mumkin.

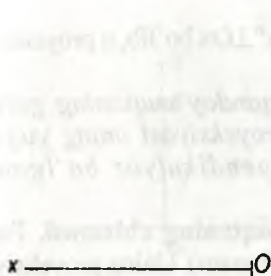
2.1.1. Birinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi A nuqta I chorakda joylashgan bo'lsin (2.4-rasm). Uning H va V tekisliklardagi



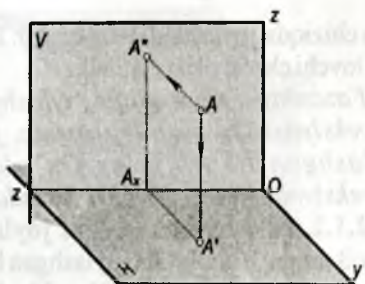
2.1-rasm.



2.2-rasm.



2.3-rasm.

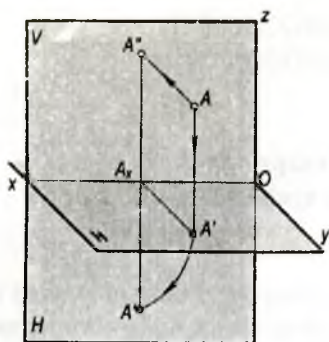


2.4-rasm.

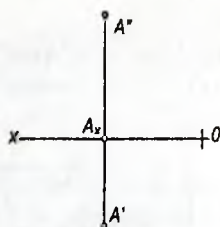
proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan mazkur tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning bu tekisliklar bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' bo'lsin. A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A'' ni aniqlash uchun A' dan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz va A_x nuqtani aniqlaymiz. V tekislikka tushirilgan perpendikulyarlar bilan Ox o'qidagi A_x nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyarni kesishtirib, A'' nuqtani topamiz.

A nuqtadan H va V tekisliklarga o'tkazilgan perpendikulyarlarning A' va A'' asoslari A nuqtaning *to'g'ri burchakli proyeksiyalari* deb yuritiladi. Bu yerda, A' – A nuqtaning *gorizontal proyeksiyasi*, A'' – uning *frontal proyeksiyasi* deb ataladi va $A(A', A'')$ ko'rinishda yoziladi. Shakldagi AA' va AA'' chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* yoki *proyeksiyalovchi chiziqlar* deyiladi.

A nuqtaning chizmasini tuzish uchun tekisliklarning fazoviy modelini yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jipslashtiramiz (2.5-rasm). Bunda A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontal A' proyeksiyasi H tekislik bilan Ox o'qi atrofida pastga 90° ga buriladi va V tekislik davomida jipslashadi. Natijada A nuqtaning A' gorizontal hamda A'' frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan



2.5-rasm.



2.6-rasm.

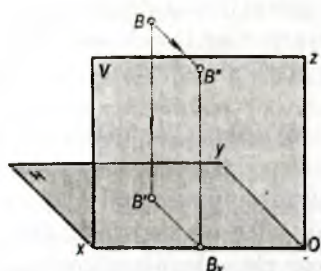
bitta chiziqda joylashadi (2.6-rasm). Bunda $A'A'' \perp Ox$ bo'lib, u proyeksiyalarni bog'lovchi chiziq deb yuritiladi.

Fazoning I choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qining ostida, frontal proyeksiyasi uning yuqorisida joylashgan bo'lib, ular Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi.

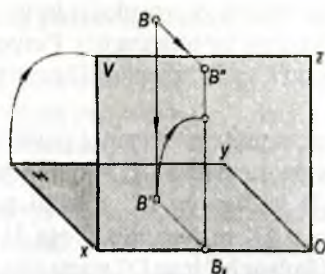
2.1.2. Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror B nuqta II chorakda joylashgan bo'lsin (2.7-rasm). Uning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H va V tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' va B'' asoslari B nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni 2.8-rasmda ko'rsatilganidek V tekislikka jipslashtiramiz. Bunda B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasi vaziyati o'zgarmay qoladi. Uning H tekislikdagi B' gorizontal proyeksiyasi esa V tekislikning yuqori qismi bilan jipslashadi va Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan $B''B_x$ proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda bo'ladi (2.9-rasm).

Fazoning II choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda va Ox o'qining yuqorisida joylashadi.

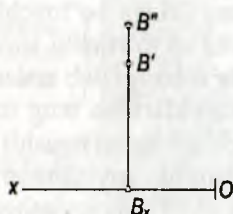
2.1.3. Uchinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror C nuqta III chorakda joylashgan bo'lsin (2.10-rasm). Bu nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalarini yasash uchun H va V tekisliklarga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning H va V tekisliklardagi C' va C'' asoslari C nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H tekislikni V tekislikning davomida jipslashtiramiz (2.11-rasm). Bunda C nuqtaning C'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun o'z vaziyatini o'zgartirmaydi. Uning C' gorizontal proyeksiyasi esa H tekislik bilan birga V tekislikning yuqori qismida jipslashadi va 2.12-rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.



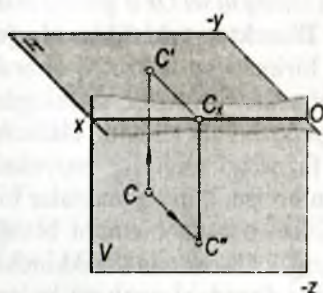
2.7-rasm.



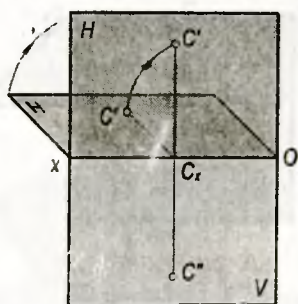
2.8-rasm.



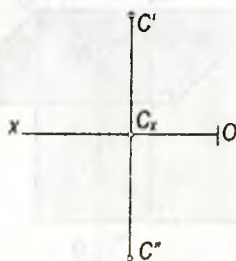
2.9-rasm.



2.10-rasm.



2.11-rasm.



2.12-rasm.

Fazoning III choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qining yuqorisida, frontal proyeksiyasi esa uning ostida, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi.

2.1.4. To'rtinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror D nuqta fazoda IV chorakda joylashgan bo'lsin (2.13-rasm). Uning H

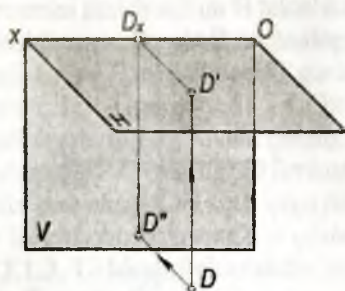
va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun D nuqtadan bu tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Perpendikulyarlarning H va V tekisliklar bilan kesishgan D' va D'' asoslari D nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo'ladi.

D nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni Ox o'qi atrofida pastga 90° ga aylantiramiz va V tekislik davomi bilan jipslashtiramiz (2.14-rasm). Bunda D nuqtaning D'' frontal proyeksiyasining vaziyati o'zgarmaydi. Gorizontaal D' proyeksiyasi esa H tekislik bilan harakatlanib, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan D'' nuqta bilan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda yotadi (2.15-rasm).

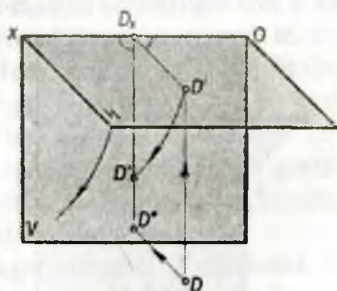
Fazoning IV choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda va Ox o'qining ostida bo'ladi.

2.1.5. Bissektor tekisliklarida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoning birinchi va uchinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *birinchi bissektor tekisligi*, shuningdek, ikkinchi va to'rtinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *ikkinchi bissektor tekisligi* deb ataladi.

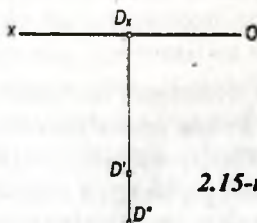
Agar fazodagi nuqtalar proyeksiyalar tekisliklaridan teng uzoqlikda joylashgan bo'lsa, bunday nuqtalar bissektor tekisliklariga tegishli nuqtalar bo'ladi. 2.16-rasmda birinchi bissektor tekisligida joylashgan K va L nuqtalarning, 2.18-rasmda esa ikkinchi bissektor tekisligida joylashgan E va F nuqtalarning fazodagi vaziyati ko'rsatilgan. Chizmada birinchi bissektor tekisligida joylashgan K va L nuqtalarning proyeksiyalari (K', K'' va L', L'') Ox o'qidan baravar uzoqlikda joylashadi (2.17-rasm). Ikkinchi bissektor



2.13-rasm.



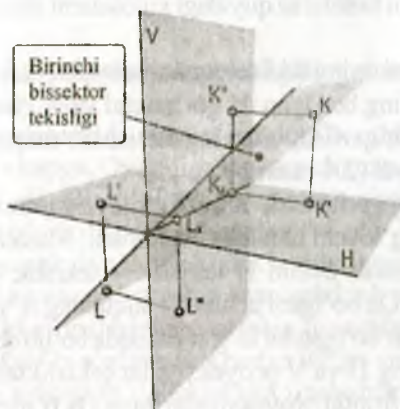
2.14-rasm.



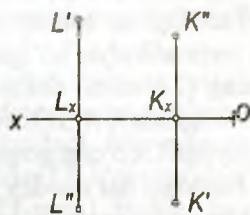
2.15-rasm.

tekisligida joylashgan E va F nuqtalarning proyeksiyalari (E' , E'' va F' , F'') chizmada ustma-ust tushadi (2.19-rasm).

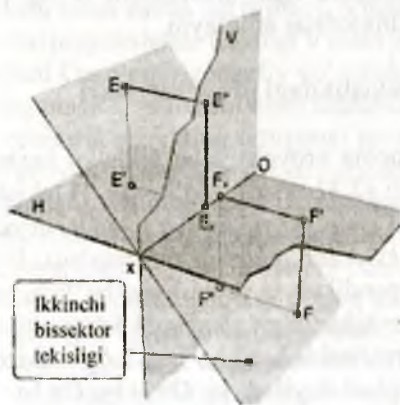
2.1.6. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinatalar o'qida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoda biror nuqta proyeksiyalar tekisligida yoki proyeksiyalar o'qida joylashishi mumkin. Masalan, $A \in H$ bo'lsin (2.20-rasm). Bunda A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A' nuqtaning o'ziga ($A \equiv A'$), frontal proyeksiyasi A'' esa Ox o'qiga proyeksiyalanadi (2.21-rasm). Shuningdek, nuqta Ox proyeksiyalar o'qida ham joylashishi mumkin. Masalan, $B \in Ox$ bo'lsa, bu nuqtaning B' gorizontal va B'' frontal proyeksiyalari shu B nuqtaning o'ziga proyeksiyalanadi, ya'ni $B \equiv B' \equiv B''$ bo'ladi (2.21-rasm).



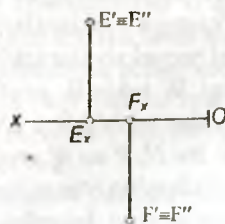
2.16-rasm.



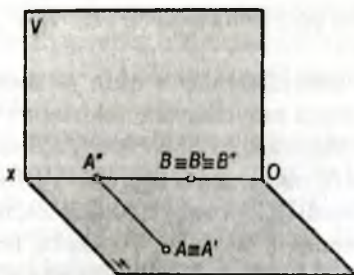
2.17-rasm.



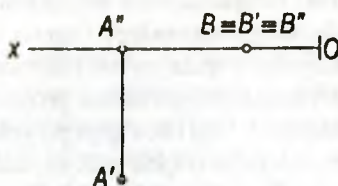
2.18-rasm.



2.19-rasm.



2.20-rasm.



2.21-rasm.

Turli choraklarda joylashgan nuqtalarni H va V proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va ularning chizmalarini tuzishdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

- Nuqtaning fazodagi vaziyatini uning ikki ortogonal proyeksiyasi to'la aniqlaydi. Haqiqatan ham, A nuqtaning berilgan A' gorizontal va A'' frontal proyeksiyalaridan perpendikulyar chiqarilsa, ularning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlaydi (2.4-rasm).

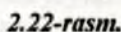
- Fazodagi har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi. Masalan, A nuqtaning (2.6-rasm) chizmasini yasash uchun H tekislik V tekislik bilan jipslashtirilganda $A'A_x \perp Ox$ va $A''A_x \perp Ox$ bo'lgani uchun bu nuqtaning A' va A'' proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir to'g'ri chiziqda bo'lib qoladi.

- Fazodagi har qanday nuqtaning H va V proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqliklarini shu nuqta gorizontal va frontal proyeksiyalarining Ox o'qigacha bo'lgan masofalari aniqlaydi. Haqiqatan, A nuqtadan H tekislikkacha bo'lgan masofa (2.4-rasm) $AA' = A'A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofa $AA'' = A'A_x$. Demak, A nuqtaning H tekislikkacha bo'lgan masofasini $A''A_x$ va V tekislikkacha bo'lgan masofani $A'A_x$ masofalar aniqlaydi.

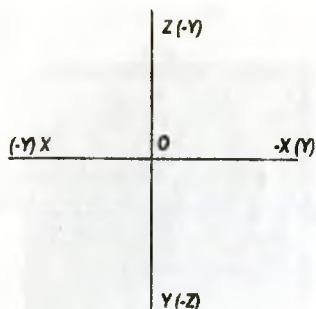
2.2-§. Nuqtaning uchta tekislikdagi proyeksiyalari

O'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta proyeksiyalar tekisligi kesishib, fazoni 8 qismga – oktantlarga bo'ladi (2.22-rasm). Ma'lumki, H tekislik – gorizontal proyeksiyalar tekisligi, V – frontal proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Tasvirdagi W tekislik *profil proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. Uchta proyeksiyalar tekislikligi o'zaro perpendikulyar joylashgan bo'ladi, ya'ni $H \perp V \perp W$. Bu H, V va W *proyeksiyalar tekisliklari sistemasi* deb yuritiladi.

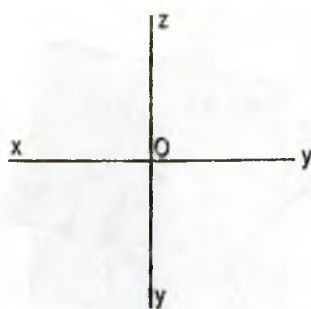
Tekisliklarning o'zaro kesishishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalar* yoki *koordinatalar o'qlari* deyiladi va Ox, Oy, Oz harflari bilan belgilanadi. Proyeksiyalar o'qlarini tashkil qiluvchi Ox – *abssissalar o'qi*, Oy – *ordinatalar o'qi* va Oz – *applikatalar o'qi* deb ataladi.



Amaliyotda nuqta va geometrik shakllarning fazoviy vaziyati va ularning ortogonal proyeksiyalariga oid masalalarni asosan I–IV oktantlarda yechish bilan chegaralaniladi. Nuqtaning proyeksiyalari fazoning qaysi oktantida joylashuviga qarab proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan turlicha joylashadi.



2.24-rasm.



2.25-rasm.

2.2.1. Birinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazoning I oktantida joylashgan A nuqta va o'zaro perpendikulyar H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi berilgan (2.26-a rasm). A nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz.

Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' bo'lsin. Mazkur nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini aniqlash uchun A' dan Ox ga perpendikulyar o'tkazamiz va bu o'qda A_x ni, so'ngra A_x dan Ox ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqlarning A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A'' nuqtasini topamiz.

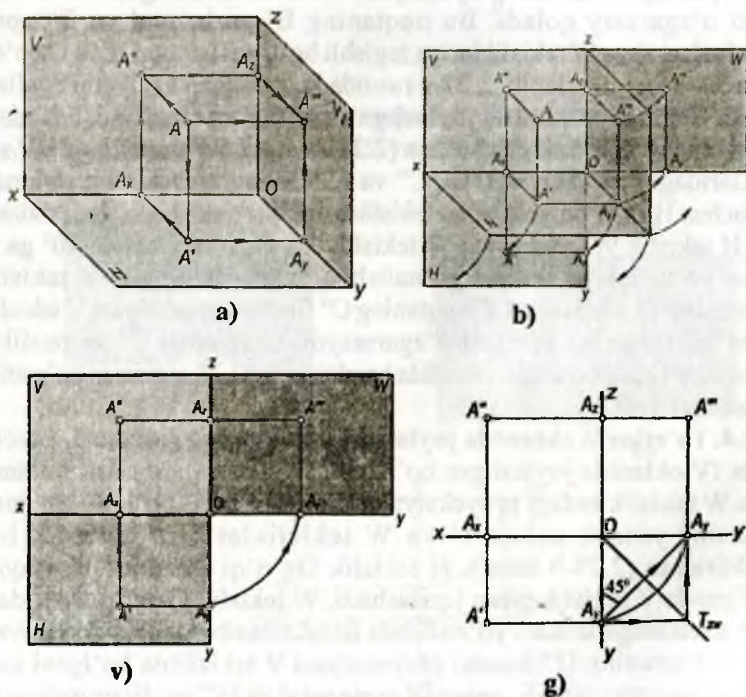
A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini (2.26-a rasm) aniqlash uchun A' dan Oy o'qiga tushirilgan perpendikulyar o'tkazamiz va A_y ni belgilaymiz. So'ngra A_y dan Oy ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqlarning A nuqtadan W ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A''' nuqtasini topamiz. A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A''' ni A'' dan Oz o'qigacha o'tkazilgan perpendikulyar orqali ham aniqlash mumkin.

A nuqtadan H, V va W tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning asoslari A', A'' va A''' nuqtaning ortogonal proyeksiyalari deyiladi. Bunda A' – nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi, A'' – frontal proyeksiyasi va A''' – profil proyeksiyasi deyiladi va A (A', A'', A''') ko'rinishida yoziladi. A nuqtaning chizmasini tuzish uchun V tekislikni qo'zg'atmasdan H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislikka jipslashtiramiz (2.26-b rasm). A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikka tegishli bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontaal A' va profil A''' proyeksiyalar H va W tekisliklariga mos ravishda tegishli bo'lgani uchun bu tekisliklar Ox va Oz o'qlari atrofida pastga va o'ngga 90° ga buriladi va 2.26-b, v rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi. A nuqtaning hosil bo'lgan chizmasida uning A' va A'' proyeksiyalari Ox ga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksion chiziqda, frontal A'' va A''' profil proyeksiyalari esa Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan ikkinchi proyeksion chiziqda joylashadi.

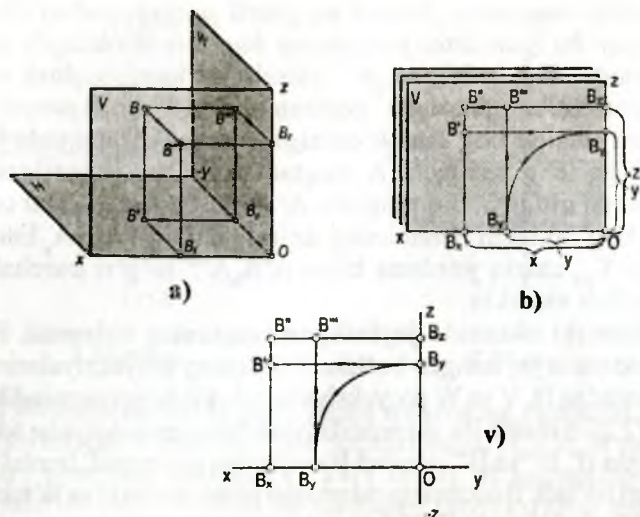
Har qanday nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan bitta proyeksiyon bog'lovchi chiziqda yotadi.

2.26-rasmdan $A_x A' = O A_y = A_z A'''$ ekanligini ham aniqlash mumkin. Demak, chizmada A nuqtaning A' gorizontal va A''' profil proyeksiyalari orasidagi proyeksiyon bog'lanish chizig'i markazi O nuqtada bo'lgan, radiusi $O A_y$ ga teng yoy yoki A_y nuqtadan 45° da o'tkazilgan chiziq yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, A' va A''' proyeksiyalar orasidagi proyeksiyon bog'lanishni chizmaning doimiy chizig'i $A_y O A_y$ burchak A_y bissektrisasi T_{xy} chiziq yordami bilan $A' A_0 A'''$ to'g'ri burchak orqali ham hosil qilish mumkin.

2.2.2. Ikkinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi B nuqta II oktantda joylashgan bo'lsin. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz (2.27-a rasm). Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' , B'' va B''' asoslari B nuqtaning gorizontal, frontal va profil proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H va W tekisliklarni V tekislikka jipslashtiramiz (2.27-b rasm).



2.26-rasm.

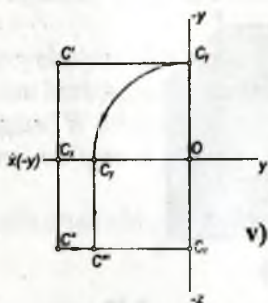
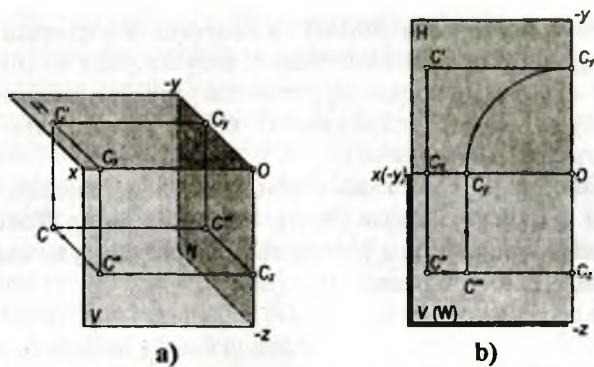


2.27-rasm.

B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Bu nuqtaning B' gorizont va B''' profil proyeksiyalari H va W tekisliklariga tegishli bo'lgani uchun Ox va Oz o'qlari atrofida 90° ga harakatlanib, 2.27-v rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.

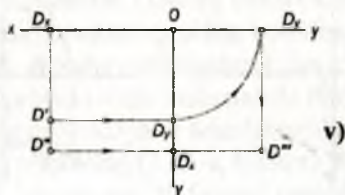
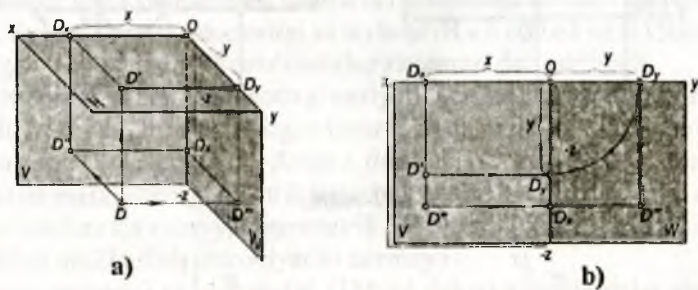
2.2.3. Uchinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi C nuqta III oktantda joylashgan bo'lsin (2.28-a rasm). Bu nuqtaning H, V va W tekisliklaridagi proyeksiyalari C' , C'' va C''' bo'ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz. Bunda H tekislik 90° yuqoriga, W tekislik esa Oz o'qi atrofida 90° ga soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda harakatlantirilib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.28-b rasm). C nuqtaning C'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Gorizont C' va profil C''' proyeksiyalar Ox va Oz o'qlari atrofida harakatlanib, 2.28-v rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.

2.2.4. To'rtinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi D nuqta IV oktantda joylashgan bo'lsin (2.29-a rasm). Mazkur nuqtaning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari D' , D'' va D''' bo'ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz (2.29-b rasm). H tekislik Ox o'qi atrofida 90° yuqoriga ko'tarilganda V tekislik bilan jipslashadi, W tekislik Oz o'qi atrofida 90° ga soat strelkasiga teskari yo'nalishda harakatlanib, V tekislik vaziyatiga keladi. D nuqtaning D'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun vaziyati o'zgarmay qoladi, uning D' gorizont va D''' profil proyeksiyalari Ox va Oz o'qlari bo'yicha harakatlanib, 2.29-b rasmda tasvirlangan vaziyatni



2.28-rasm.

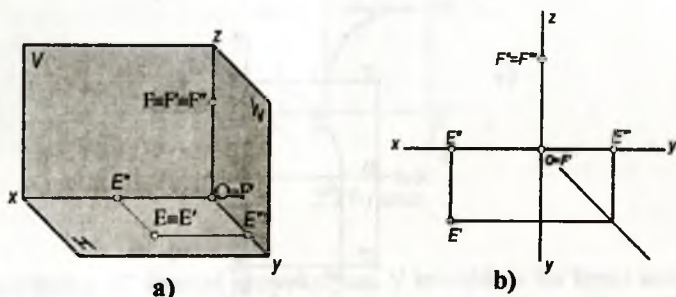
egallaydi. IV oktantda joylashgan D nuqta proyeksiyalarining koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan joylashuvi 2.29-v rasmda tasvirlangan.



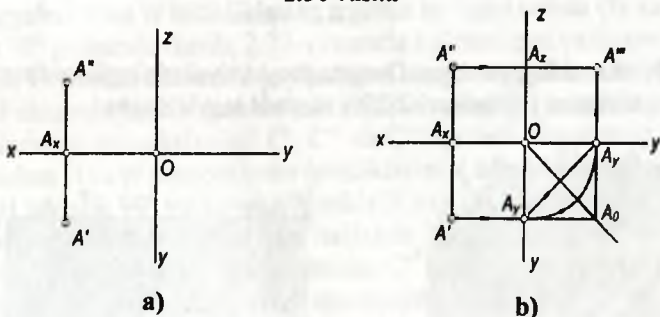
2.29-rasm.

2.2.5. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o'qlarida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Biror E nuqta H proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lsin (2.30-a rasm). Bu nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi mazkur nuqtada ($E \equiv E'$), qolgan ikkita proyeksiyasi esa proyeksiyalar o'qlariga proyeksiyalanadi (2.30-a, b rasm).

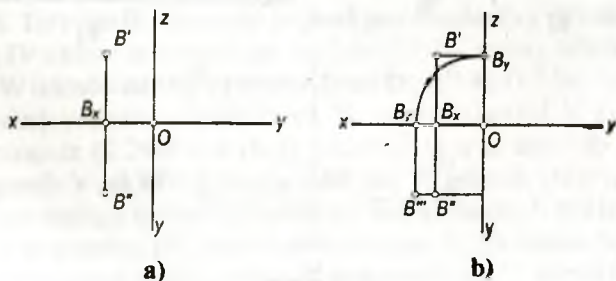
Shuningdek, nuqta koordinata o'qlaridan birida, masalan, E nuqta Oz koordinatalar o'qida joylashgan bo'lsa, chizmada uning frontal va profil proyeksiyalari shu nuqtaning o'zida, gorizontaal proyeksiyasi esa koordinata boshida bo'ladi (2.30-a, b rasm).



2.30-rasm.



2.31-rasm.



2.32-rasm.

Shunday qilib, nuqtani H , V va W proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va uning tekis chizmasini tuzishdan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

Fazoda berilgan har qanday nuqtaning:

- gorizontaal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqli joylashadi;
- gorizontaal va profil proyeksiyalari Oy o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqli joylashadi;
- frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqli joylashadi.

Nuqtaning berilgan har qanday ikki ortogonal proyeksiyasi orqali uning uchinchi proyeksiyasini yasash mumkin.

Masalan, biror $A(A', A'')$ nuqtaning (2.31-a, b rasm) A''' proyeksiyasini yasash uchun:

- nuqtaning gorizontaal proyeksiyasidan Ox ga parallel qilib chiziqli o'tkaziladi va uning Oy o'qi bilan kesishgan A_y nuqtasi aniqlanadi;
- OA_y ni radius qilib, A_y nuqtasi W tekislikning aylanish harakatiga mos ravishda 90° ga buriladi va hosil bo'lgan A_y ning yangi vaziyatidan Oz ga parallel chiziqli chiqariladi;
- A'' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqarilib, ularning o'zaro kesishuvi A''' nuqta belgilanadi.

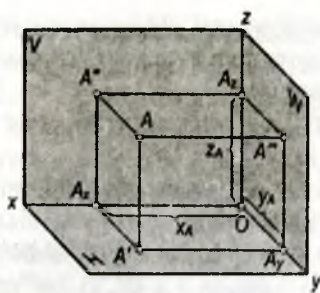
2.3-§. Nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog'lanish

Geometriyada har qanday nuqta va shaklning fazodagi vaziyatini o'zaro perpendikulyar uchta koordinatalar tekisliklari sistemasiga nisbatan aniqlash qabul qilingan. Bu usul fransuz matematigi va faylasufi $Rene\ Dekart$ (1506–1650) ixtiro qilgani uchun **dekart koordinatalar sistemasi** deb yuritiladi.

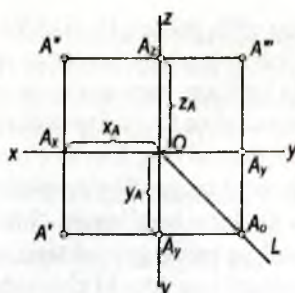
Bu sistemada nuqtaning fazodagi vaziyatini uning x , y va z koordinatalari aniqlaydi. Masalan, fazoda berilgan biror A nuqtaning koordinatalari x_A , y_A va z_A bo'ladi (2.33-a rasm). Ammo dekart koordinatalar sistemasida stereometrik masalalarni geometrik yasashlar fikran bajariladi, bu esa chizma asboblari yordamida muayyan geometrik shakllarni yasash va ularni grafik usullar bilan tahlil qilish imkoniyatini bermaydi.

Fransuz geometri va muhandisi $G.Monj$ dekart koordinatalar sistemasi asosida fazodagi har qanday nuqtaning uchta koordinatasini proyeksiyalar tekisliklari sistemasida ortogonal proyeksiyalari bilan o'zaro grafik bog'ladi.

Haqiqatan, ortogonal proyeksiyalar sistemasida biror nuqtaning berilgan koordinatalari orqali uning proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqligini aniqlash mumkin. Masalan, biror A nuqtaning (2.33-a, b rasm) W profil proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini z_A abssissasi, V frontal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini y_A ordinatasi va H gorizontaal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini x_A applikatasi kabi koordinatalari aniqlaydi.



a)



b)

2.33-rasm.

Biror nuqta berilgan koordinatalariga asosan fazoning turli oktantlaridan birida joylashgan bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun takror koordinata o'qlarining yo'nalishi (2.22-rasm) ishoralariga asosan quyidagi jadvalni keltiramiz:

1-jadval

Oktantlar	Koordinatalar		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Bu jadvaldan foydalanib, nuqtaning berilgan koordinatalari ishoralari orqali uning qaysi oktantda joylashganligini aniqlash mumkin. Quyida koordinatalari bilan berilgan nuqtalarning fazodagi vaziyati va chizmasini yasashni ko'rib chiqamiz:

1-masala. $A(50, 30, 60)$ nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha uning fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Yechish. A nuqta koordinatalari ishoralariga asosan I oktantda joylashgan (1-jadvalga qarang). Shuning uchun I oktantning proyeksiyalar tekisliklari fazoviy modelini va proyeksiyalar o'qlari sistemasini chizamiz (2.34-a rasm). Koordinata boshi O dan Ox o'qiga $x_A = 50$ mm, Oy o'qiga $y_A = 30$ mm va Oz o'qiga $z_A = 60$ mm o'lchab qo'yamiz va A_x , A_y va A_z nuqtalarni belgilaymiz. A nuqtaning gorizontaal A' proyeksiyasini yasash uchun A_x va A_y nuqtalardan Ox va Oy o'qlariga

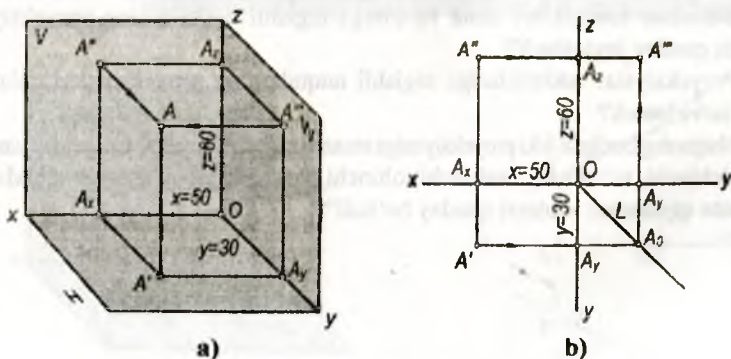
perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A' bo'ladi. Xuddi shuningdek, A_x va A_z nuqtalardan Ox va Oz o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A'' uning frontal proyeksiyasi A_y va A_z nuqtalardan Oy va Oz o'qlarga o'tkazilgan. Perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning profil proyeksiyasi A''' bo'ladi. A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlash uchun uning A' , A'' va A''' proyeksiyalaridan H, V va W tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi o'qi bo'ladi. Umuman, A nuqtaning har qanday ikki proyeksiyasidan o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazoviy o'qini aniqlaydi.

A nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasida (2.34-b rasm) Ox o'qiga 40 mm, Oy o'qiga 30 mm va Oz o'qiga 60 mm o'lchamlarni qo'yamiz va A_x , A_y va A_z nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalardan Ox, Oy va Oz proyeksiyalar o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtalari A nuqtaning A' , A'' va A''' proyeksiyalarini beradi, ya'ni A (A' , A'' , A''').

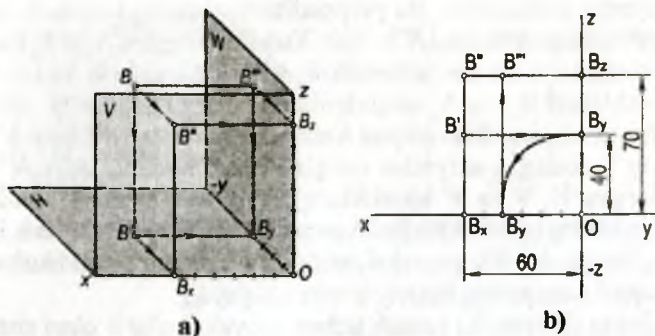
2-masala. B(60, -40, 70) nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Yechish. B nuqta koordinatalari ishoralariga asosan II oktantda joylashgan. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelida (2.35-a rasm) koordinata o'qlariga berilgan $x_B=60$, $y_B=-40$, $z_B=70$ qiymatlarni qo'yamiz va hosil bo'lgan nuqtalarni B_x , B_y va B_z bilan belgilaymiz. So'ngra B_x va B_y nuqtalardan Ox va Oy o'qlarga, B_x va B_z dan Ox va Oz o'qlarga, B_y va B_z dan Oy va Oz o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning kesishgan B' , B'' va B''' proyeksiyalaridan tegishli H, V va W tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi izlangan B nuqta bo'ladi.

Nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasini (koordinatalarning ishoralarini nazarda tutgan holda) chizamiz (2.35-b rasm).



2.34-rasm.



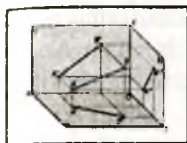
2.35-rasm.

Koordinata boshi O nuqtadan Ox o'qi bo'ylab $x_y = 60$ mm, Oy o'qi bo'ylab $y_y = 40$ mm va Oz o'qi bo'ylab $z = 70$ mm masofalarni o'lchab qo'yib, B_x , B_y va B_z nuqtalarga ega bo'lamiz. So'ngra yuqorida qayd qilingan tartibda B_x va B_y dan Ox va Oy o'qiga, B_y va B_z dan Oy va Oz o'qiga, B_x va B_z dan Ox va Oz o'qiga perpendikulyarlar o'tkazib, B' va B'' proyeksiyalarini aniqlaymiz.

Nuqtaning profil B''' proyeksiyasini yasash uchun B_y nuqtani Oz o'qiga jipslashgan Oy o'qidan Ox o'qiga jipslashgan Oy o'qiga ko'chiramiz. Bu B_y nuqtadan Oy o'qiga va B_z nuqtadan Oz o'qiga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi B''' bo'ladi. Shunday qilib, B nuqtaning berilgan koordinatalariga ko'ra uning ortogonal proyeksiyasi yasaldi, ya'ni $B (B', B'', B''')$.

Nazorat savollari

1. Fazo kvadrantlari yoki choraklari nima?
2. Tekis yoki kompleks chizma nima?
3. Nuqtaning gorizont va frontal proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
4. Nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
5. Bissekto tekisliklari nima va ularga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
6. Proyeksiyalar tekisliklariga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday tasvirlanadi?
7. Nuqtaning berilgan ikki proyeksiyasiga asosan uchinchi proyeksiyasi qanday yasaladi?
8. Uchinchi, to'rtinchi, beshinchi, oltinchi oktantlarda joylashgan nuqtalarning koordinata qiymatlari ishorasi qanday bo'ladi?



III BOB. TO'G'RI CHIZIQLAR ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

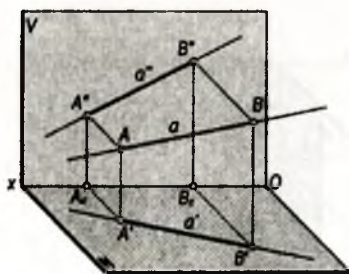
3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari

To'g'ri chiziq eng oddiy geometrik shakl hisoblanadi. Bir-biridan farqli ikki nuqta orqali faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Agar fazodagi bir-biridan farqli ikkita A va B nuqtalarni o'zaro tutashtirib, ikki qarama-qarshi tomonga cheksiz davom ettirilsa, a to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (3.1-rasm).

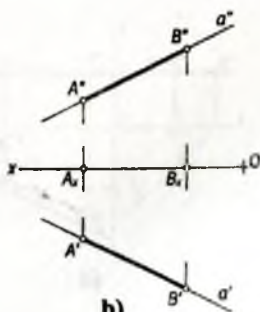
To'g'ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi shu *to'g'ri chiziq kesmasi* deyiladi.

To'g'ri chiziqlar a, b, c kabi yozma harflar bilan belgilanadi. Agar to'g'ri chiziqlar chegaralangan bo'lsa, u holda $AB, CD, EF, \dots$ tarzida belgilanadi. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklaridagi proyeksiyalari holatini uning ikki ixtiyoriy nuqtasining proyeksiyalari aniqlaydi. Masalan, 3.1-a rasmda berilgan a to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu chiziqqa tegishli ikki A va B nuqtalarning ortogonal A', A'' va B', B'' proyeksiyalari yasalanadi. Bu ikki nuqtaning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiruvchi a' va a'' chiziqlar fazoda berilgan a to'g'ri chiziqning gorizont va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Shuningdek, AB kesma va uning $A'B'$ va $A''B''$ proyeksiyalari a to'g'ri chiziqning fazodagi vaziyatini va uning a', a'' proyeksiyalarini aniqlaydi (3.1-b rasm).

Ta'rif. Proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziq umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.



a)



b)

3.1-rasm.

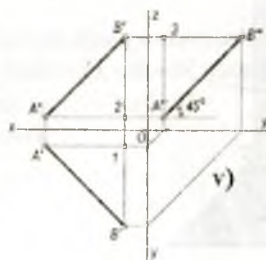
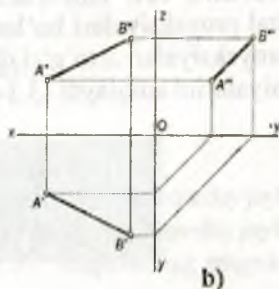
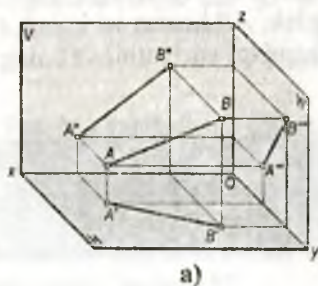
To'g'ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalariga asosan uning profil proyeksiyasini ham yasash mumkin. Buning uchun uning yuqorida tanlab olingan A va B nuqtalarining profil proyeksiyalari yasaladi va ular o'zaro tutashtiriladi (3.2-a, b, v rasm).

To'g'ri chiziq proyeksiyalari faqat uning kesmasi proyeksiyalari orqaligina emas, balki ixtiyoriy qismi bilan ham berilishi mumkin. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va ular proyeksiyalar o'qlariga nisbatan ixtiyoriy burchaklarni tashkil etadi. Bu burchaklar α , β , γ harflari bilan belgilanadi.

Bu α , β , γ burchaklar AB kesmaning H , V , W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklaridir, ya'ni $\alpha = AB \wedge H$, $\beta = AB \wedge V$, $\gamma = AB \wedge W$.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi. Uning haqiqiy uzunligini aniqlash keyingi paragraflarda ko'riladi.

Proyeksiya tekisliklari bilan bir xil burchak tashkil qilgan to'g'ri chiziqlar. Agar biror to'g'ri chiziq fazoda H , V va W lar bilan bir xil burchak hosil qilib joylashgan bo'lsa, uning AB kesmasining uchala proyeksiyalari o'zaro teng, ya'ni $AB \wedge H = AB \wedge V = AB \wedge W$ bo'lsa, $A'B' = A''B'' = A'''B'''$ bo'ladi. Bunda $A'B' = B''A''$ teng yonli trapetsiyadan $1B' = 2B'' = 3A'''$ va $1B' = 3B'''$, demak, $3A''' = 3B'''$ bo'lgani uchun $\angle 3A''B'' = 45^\circ$ bo'ladi. Shu bilan birga $A'''B''' \parallel A''B''$ bo'lib, $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ bo'ladi.



3.2-rasm.

3.2-§. Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari

Ta'rif. Proyeksiyalar tekisligiga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.

3.2.1. Proyeksiyalar tekisligiga parallel to'g'ri chiziqlar.

Gorizontal to'g'ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel to'g'ri chiziq *gorizontal chiziq* (yoki *gorizontal*) deb ataladi (3.3-a, b rasm).

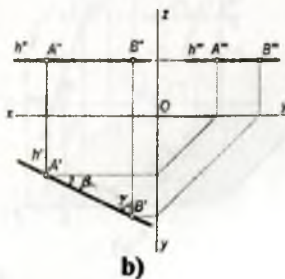
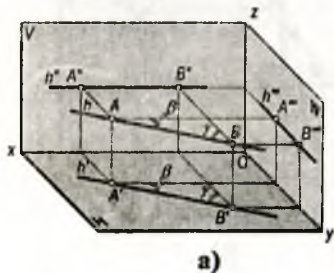
Gorizontalning barcha nuqtalari H tekislikdan baravar masofada ($AA' = BB'$) bo'lgani uchun chizmada uning h'' frontal proyeksiyasi Ox o'qiga, h''' profil proyeksiyasi esa Oy o'qiga parallel bo'ladi. Gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo'ladi. Bu chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi β va γ burchaklar h gorizontalning V va W tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$h \parallel H \Rightarrow h'' \parallel Ox \text{ va } h''' \parallel Oy, A'B' = |AB|, \beta = h \wedge V \text{ va } \gamma = h \wedge W.$$

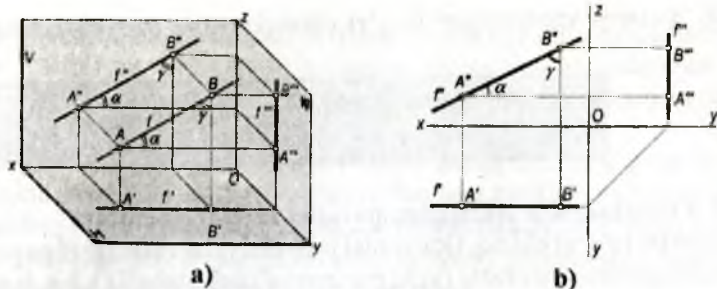
Frontal to'g'ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel to'g'ri chiziq *frontal to'g'ri chiziq* (yoki *frontal*) (3.4-a, b rasm) deb ataladi. Frontalning barcha nuqtalari V tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning f' gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga, f''' profil proyeksiyasi esa Oz o'qiga parallel bo'ladi. Frontalning frontal f'' proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo'ladi.

Mazkur chiziq kesmasining frontal proyeksiyasi uning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi α va β burchaklar f frontalni H va W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$f \parallel V \Rightarrow f'' \parallel Ox \text{ va } f''' \parallel Oz, A''B'' = |AB|, \alpha = f \wedge H \text{ va } \beta = f \wedge W.$$



3.3-rasm.



3.4-rasm.

Profil to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq *profil to'g'ri chiziq* (yoki *profil*) deb ataladi (3.5, a, b-rasm). Profilning barcha nuqtalari W tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning gorizontal proyeksiyasi Oy o'qiga parallel, frontal proyeksiyasi Oz o'qiga parallel bo'ladi.

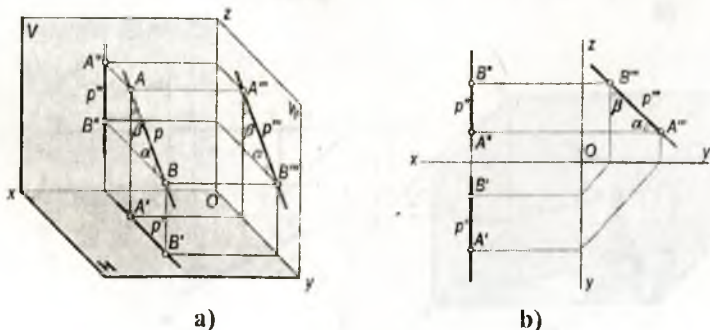
Profilning profil proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda joylashgan bo'ladi. Mazkur chiziq kesmasining profil proyeksiyasi o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

Chizmadagi α va β burchaklar profil chiziqlarning H va V tekisliklar bilan mos ravishda tashkil etgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

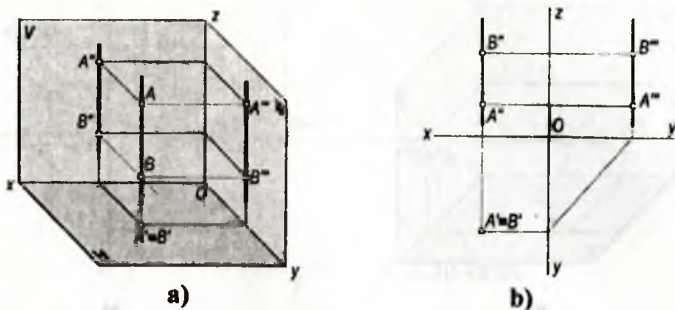
$$p \parallel W \Rightarrow p' \parallel Oy \text{ va } p'' \parallel Oz, A'''B''' = |AB|, \alpha = p^H \text{ va } \beta = p^V.$$

3.2.2. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq* deb ataladi (3.6-a, b rasm). Bu to'g'ri chiziq H tekislikka nuqta bo'lib



3.5-rasm.



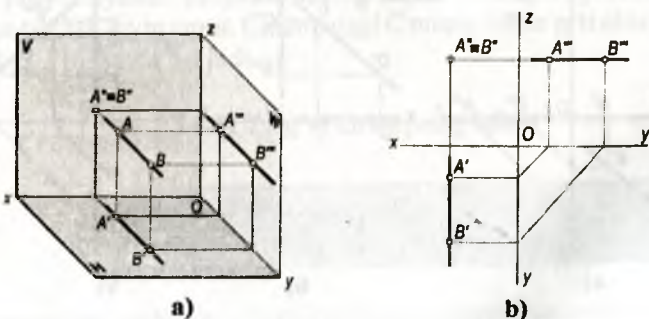
3.6-rasm.

proyeksiyalanadi. Uning frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqli kesmasi V va W ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

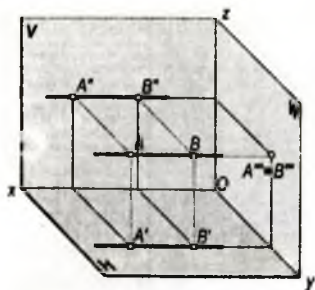
Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqli *frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqli* deb ataladi (3.7-a, b rasm). Bunday to'g'ri chiziqli kesma V tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontaal va profil proyeksiyalari Oy o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqli kesmasi H va W proyeksiyalar tekisliklariga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqli *profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqli* deb ataladi (3.8-a, b rasm). Bu to'g'ri chiziqli kesmalar profil tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontaal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqli kesmasi H va V ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.

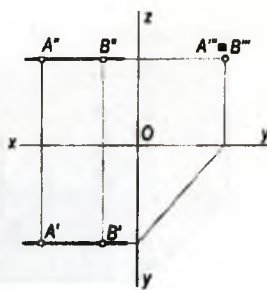
3.2.3. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o'qlariga tegishli to'g'ri chiziqlar. To'g'ri chiziqli kesmalar H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga va Ox, Oy, Oz proyeksiyalar o'qlariga tegishli bo'lishi mumkin.



3.7-rasm.



a)



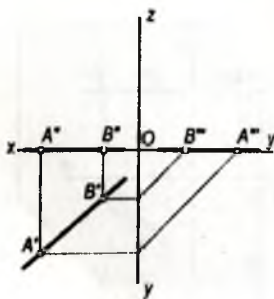
b)

3.8-rasm.

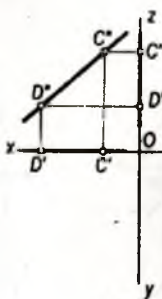
Agar to'g'ri chiziq biror proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning bir proyeksiyasi bevosita to'g'ri chiziqning o'ziga, qolgan ikki proyeksiyasi esa koordinatalar o'qiga proyeksiyalanadi. Masalan, CD ($C'D'$, $C''D''$) to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalar tekisligi V ga tegishli bo'lgani uchun (3.9-b rasm), uning $C''D''$ frontal proyeksiyasi mazkur to'g'ri chiziqqa, gorizontal $C'D'$ proyeksiyasi Ox o'qiga, profil $C'''D'''$ proyeksiyasi esa Oz o'qiga proyeksiyalanadi.

Shuningdek, 3.9-a rasmda H tekislikka tegishli AB ($A'B'$, $A'''B'''$) to'g'ri chiziqning, 3.9-v rasmda esa W tekislikka tegishli EF ($E'F'$, $E'''F'''$) to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining joylashishi ko'rsatilgan.

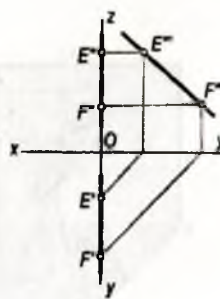
To'g'ri chiziq koordinata o'qlariga tegishli bo'lsa, uning ikki proyeksiyasi shu o'qning o'ziga proyeksiyalanadi, bir proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Masalan, $l \in Ox$ to'g'ri chiziqning l' gorizontal, l'' frontal proyeksiyalari Ox o'qida, uning l''' profil proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga proyeksiyalanadi (3.10- rasm).



a)

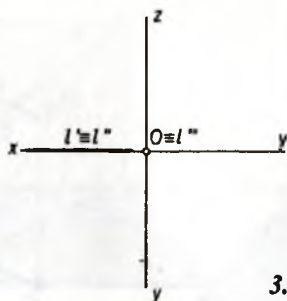


b)



v)

3.9-rasm.



3.10-rasm.

3.3-§. To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish

Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan biror nuqta fazodagi to'g'ri chiziq kesmasini qanday nisbatda bo'lsa, uning bir nomli proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini ham shunday nisbatlarda bo'ladi.

3.11-a, b rasmda berilgan chizmaga asosan C nuqta AB kesmani $AC:CB$ nisbatda bo'lgan, deb qabul qilinsin. Yuqoridagi xossaga binoan, C nuqtaning proyeksiyalari AB kesmaning proyeksiyalarini xuddi shunday nisbatlarda bo'ladi, ya'ni $AC:CB=A'C':C'B'=A''C'':C''B''$.

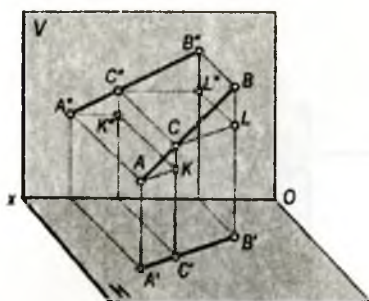
To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning bunday xususiyatidan foydalanib, har qanday to'g'ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan, 3.12-rasmda berilgan AB ($A'B'$, $A''B''$) to'g'ri chiziq kesmasini teng 5 bo'lakka bo'lish uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontal proyeksiyasining A' uchidan ixtiyoriy burchakda yordamchi α to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqqa ixtiyoriy o'lchamli teng kesmalar besh marta qo'yib chiqiladi. So'ngra 5 va B' nuqtalar o'zaro tutashtirilib, 4, 3, 2 va 1 nuqtalardan $5B'$ chiziqqa parallel chiziqlar o'tkaziladi.

Natijada $A'B'$ kesma 5 ta teng bo'lakka bo'linadi. To'g'ri chiziq kesmasining gorizontal $A'B'$ proyeksiyasidagi bu nuqtalardan foydalanib, kesmaning $A''B''$ frontal proyeksiyasini proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida teng 5 bo'lakka bo'lish qiyin emas. Chizmadagi C nuqta AB to'g'ri chiziq kesmasini $AC:CB=3:2$ nisbatda bo'ladi.

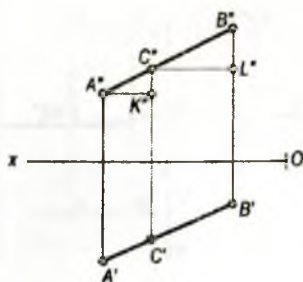
3.4-§. To'g'ri chiziqning izlari

Ta'rif. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari to'g'ri chiziqning izlari deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o'tadi. Biror α to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan

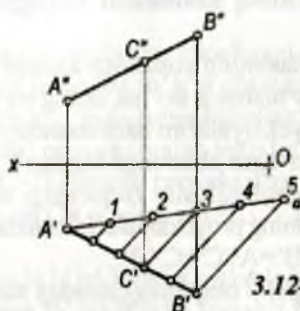


a)



b)

3.11-rasm.



3.12-rasm.

nuqtasi uning *gorizontal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to'g'ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H, a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W$$

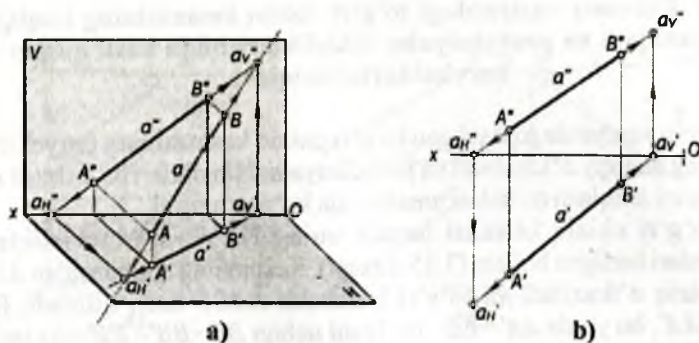
3.13-a rasmda a to'g'ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziqning gorizontal izi proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (3.13-a, b rasm):

- to'g'ri chiziq frontal a'' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a_H'' = a'' \cap Ox$ topiladi;
- a_H'' nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to'g'ri chiziq gorizontal izining gorizontal proyeksiyasi $a'_H = a_H$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- to'g'ri chiziq gorizontal a' proyeksiyasining Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V = a' \cap Ox$ topiladi;



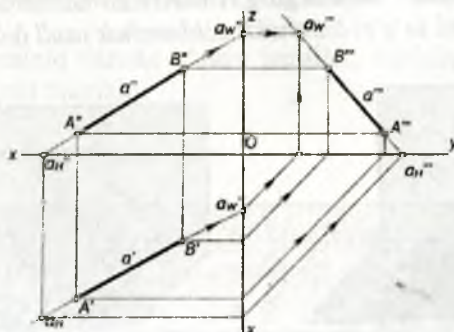
3.13-rasm.

- bu nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqlarning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_v'' \equiv a_v'$ bo'ladi.

To'g'ri chiziqlarning profil izini yasash uchun (3.14-rasm):

- uning frontal proyeksiyasi Oz o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi;
- hosil bo'lgan a_w'' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi;
- to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $a_w'' \equiv a_w'''$ aniqlanadi yoki to'g'ri chiziqlarning a' gorizontall proyeksiyasi Oy o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi;
- hosil bo'lgan nuqtadan Oy o'qiga perpendikulyar chiqariladi;
- uning a_w''' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi a to'g'ri chiziqlarning profil izining profil proyeksiyasi bo'ladi.

Shakldagi a_w', a_w'' nuqtalar mazkur a to'g'ri chiziqlarning profil izining gorizontall va frontal proyeksiyalari bo'ladi. a_w''' nuqta a to'g'ri chiziqlarning profil izining profil proyeksiyasidir.



3.14-rasm.

3.5-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqli kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziqli kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

AB to'g'ri chiziqli kesmasi hamda uning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsin (3.15-a rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \parallel A'B'$ to'g'ri chiziqli o'tkaziladi va to'g'ri burchakli $\triangle ABE$ hosil qilinadi. Bunda $BE = BB' - AA'$, bu yerda $AA' = EB'$ bo'lgani uchun $BE = BB' - EB' = \Delta z$ bo'ladi.

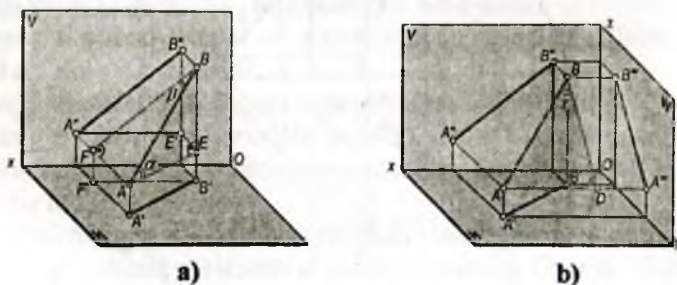
To'g'ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

To'g'ri chiziqli kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarning V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AF = AA'' - BB''$ bo'lib, $BB'' = FA''$ bo'lgani uchun $AF = AA'' - FA'' = \Delta y$ bo'ladi.

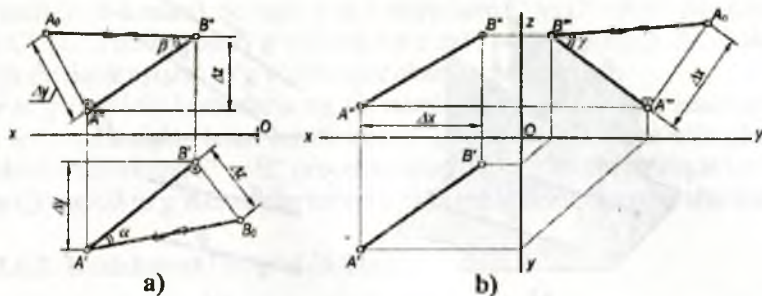
To'g'ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan β burchak AB kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo'ladi.

3.15-b rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko'rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\triangle ABF$ dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti AB kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AD kateti A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AD = AA''' - BB'''$ bo'lib, $BB''' = DA'''$ bo'lgani uchun $AD = AA''' - DA''' = \Delta x$ bo'ladi.

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to'g'ri burchakli uchburchaklar yasiladi. Shuning uchun bu usul *to'g'ri burchakli uchburchak usuli* deb yuritiladi.



3.15-rasm.



3.16-rasm.

Masalan, AB kesmaning $A'B'$, $A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalariga asosan uning (3.16-a rasm) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontaal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlari applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o'lchami $A'B_0 = AB$ bo'lib, $AB \cdot H = \angle B'A'B_0 = \alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\Delta A''B''A_0$ yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0 = AB$ bo'lib, $AB \cdot V = \angle A''B''A_0 = \beta$ bo'ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan burchagini aniqlash uchun esa to'g'ri burchakli $\Delta A'''B'''A_0$ ni yasaymiz (3.16-b rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarning W tekislikdan uzoqliklarining absissalar ayirmasi Δx bo'ladi. Hosil bo'lgan $B'''A_0 = AB$ bo'lib, $AB \cdot W = \angle A'''B'''A_0 = \gamma$ teng bo'ladi.

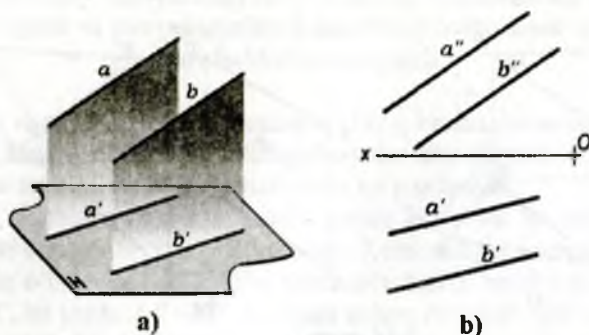
3.6-§. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesishuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

3.6.1. Parallel to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo'lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo'lsa), ular parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (3.17-a, b rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.



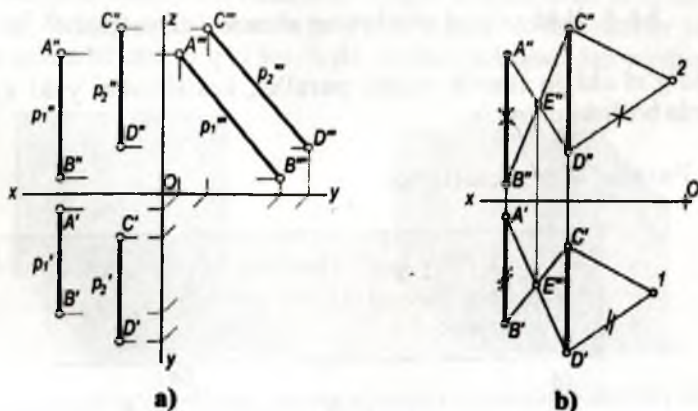
3.17-rasm.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli gorizontal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2)ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (3.18-a rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1''' \parallel p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Agar $p_1''' \cap p_2'''$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.

Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalari bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D' , D'' nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir



3.18-rasm.

burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, $D'1=A'B'$ va $D''2=A''B''$ kesmalar qo'yiladi (3.18-b rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar $C'1 \parallel C''2$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash to'g'ri chiziqlar ekanligi isbotlanadi;

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.18-b rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda CD va AB to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.

3.6.2. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo'lsa, ular kesishuvchi to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Fazodagi to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi (3.19-rasm). Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o'zaro kesishadi va kesishish nuqtasi proyeksiyalari bir proyeksion bog'lovchi chiziqda bo'ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.

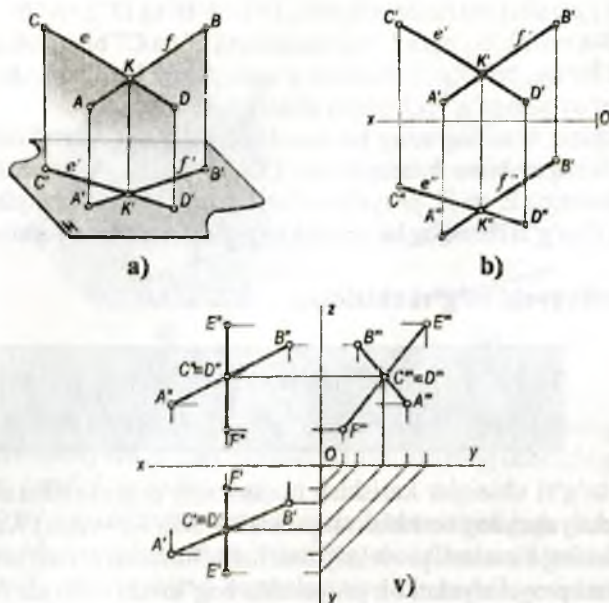
Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, AB va EF to'g'ri chiziq kesmalarining biri EF kesma W tekislikka parallel joylashgan (3.19-v rasm). Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

3.6.3. Ayqash to'g'ri chiziqlar.

Ta'rif. Ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa, ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (3.20-a, b rasm). Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 3.20-rasmda AB ($A'B'$, $A''B''$) va EF ($E'F'$, $E''F''$) uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining $1' \equiv 2'$ va $3'' \equiv 4''$ kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, $1 \in EF$, $2 \in AB$ va $3 \in EF$, $4 \in AB$ bo'ladi.



3.19-rasm.

3.7-§. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari

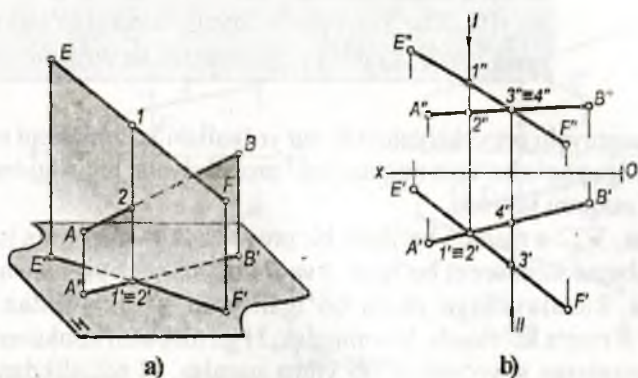
Teorema. Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo'lmasa, mazkur to'g'ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

Bu teoremani isbotlash uchun 3.21-a rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC = 90^\circ$ ga teng va uning ikki tomoni H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontaal proyeksiyasining qiymati o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi, ya'ni $\angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi.

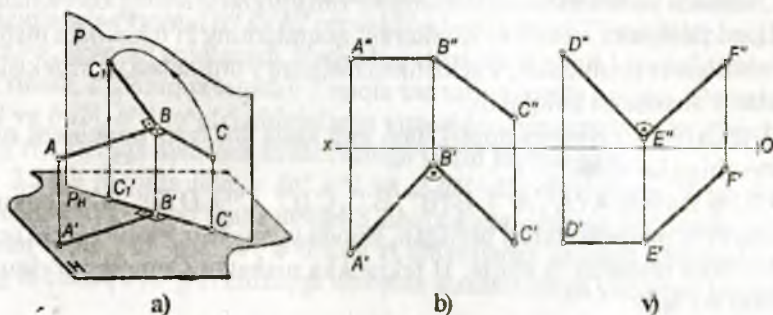
To'g'ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib P tekislik o'tkazamiz. U holda $AB \perp P$ bo'lib, $H \cap P = P_H$ hosil bo'ladi. Agar to'g'ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi P_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko'ra, $\angle ABC_1 = \angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak,

$$\angle ABC = 90^\circ \text{ bo'lib, } AB \parallel H \text{ va } BC \parallel H \text{ bo'lsa, } \angle A'B'C' = 90^\circ$$

bo'ladi.



3.20-rasm.



3.21-rasm.

Chizmada $\angle ABC (AB \parallel H)$ va $\angle DEF (DE \parallel V)$ to'g'ri burchaklarning tasvirlanishi 3.21-b, v rasmlarda keltirilgan.

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalaniladi.

3.8-§. Chizmalarda ko'rinishlikni aniqlash

Geometrik shaklning fazodagi o'zaro vaziyatlariga oid masalalar yechishda tasvirlarni yaqqollashtirish maqsadida ularning ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlarini aniqlashga to'g'ri keladi.

Faqat birinchi oktantda joylashgan geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan yaqin turgan elementlari ko'rinadi, uning orqasidagi elementlari ko'rinmaydi. Boshqa oktantlarda joylashgan shakl yoki uning tarkibiy qismi ko'rinmas deb hisoblanadi.

Geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan chizmada ko'rinishligi konkurent nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

Ta'rif. Bitta proyeksiyalovchi nurda (to'g'ri chiziqda) joylashgan nuqtalar konkurent nuqtalar deyiladi.

Agar kuzatuvchi proyeksiyalovchi nur yo'nalishida konkurent nuqtalarga qarasa, u o'ziga yaqin bo'lgan nuqtani yoki proyeksiyalar tekisligidan uzoqroq joylashgan nuqtani ko'radi.

Masalan, 3.22-a rasmda berilgan bir proyeksiyalovchi nurda joylashgan va V ga nisbatan konkurent bo'lgan A va B nuqtalarga s yo'nalish bo'yicha qaralganda, kuzatuvchiga yaqin bo'lgan yoki V tekislikdan uzoqroq joylashgan B nuqta ko'rinadi. Shuningdek, H ga nisbatan konkurent bo'lgan C va D nuqtalarga s_1 yo'nalish bo'yicha qaralsa, H tekislikdan uzoqroq joylashgan C nuqta ko'rinadi.

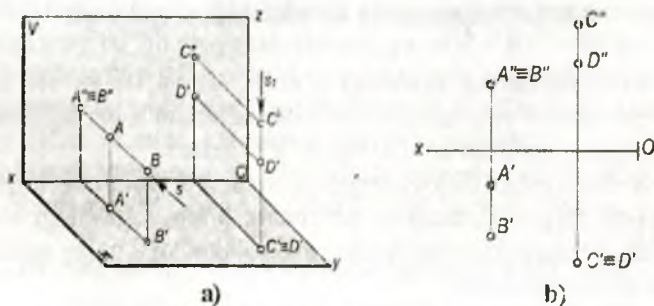
Chizmada konkurent nuqtalarning ko'rinishligini ularning koordinatalari orqali aniqlash ham mumkin. Konkurent nuqtalarning H tekislikka nisbatan ko'rinishligini z applikatasi, V tekislikka nisbatan y ordinatasi va W tekislikka nisbatan x absissasi aniqlaydi.

H tekislikka nisbatan applikatasi eng katta bo'lgan konkurent nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi.

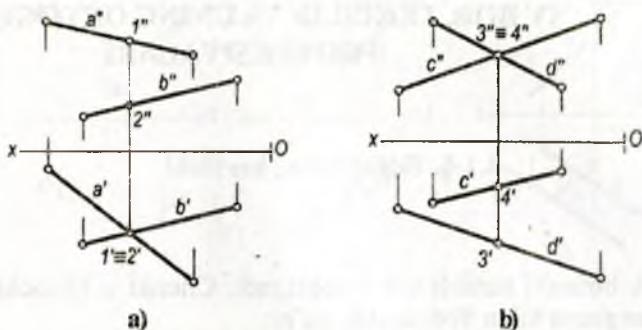
3.22-b rasmda $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$, $D(D', D'')$ konkurent nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Bunda $y_A < y_B$ va $z_C > z_D$ bo'lgani uchun V tekislikka nisbatan B nuqta, H tekislikka nisbatan C nuqta ko'rinuvchi nuqtalar bo'ladi.

Fazoda turli vaziyatlarda joylashgan geometrik shakllarning chizmada ko'rinishligi ularga tegishli bo'lgan ayrim konkurent nuqtalarning ko'rinishligini tekshirish yo'li bilan aniqlanadi.

3.22 va 3.23-a rasmda $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ uchrashmas to'g'ri chiziqlar berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar gorizontal proyeksiyalarning o'zaro kesishgan va H ga nisbatan konkurent bo'lgan nuqtalari $1' \equiv 2'$ ustma-ust proyeksiyalangan. Bu nuqtalardan qaysi biri ko'rinishligini aniqlash uchun



3.22-rasm.



3.23-rasm.

ularning gorizontal proyeksiyasidan proyeksiyalovchi chiziq o'tkazib, to'g'ri chiziqlarning frontal a'' va b'' proyeksiyalarida $1''$ va $2''$ nuqtalar belgilanadi va $z_1 > z_2$ ekanligi aniqlanadi. Natijada a chiziqqa tegishli 1 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi, b chiziqqa tegishli 2 nuqta esa uning ostida bo'ladi. Demak, a (a' , a'') va b (b' , b'') to'g'ri chiziqlarga yuqoridan qaraganda, a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqin joylashgan.

3.23-b rasmda ham c (c' , c'') va d (d' , d'') chiziqlarga V ga nisbatan qaraganda $y_3 > y_4$ bo'lgani uchun 3 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun c (c' , c'') va d (d' , d'') to'g'ri chiziqlarga oldidan qaraganimizda d to'g'ri chiziq c to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqinroq joylashgan.

Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil bo'ladi?
2. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq nima?
3. To'g'ri chiziqning izlari nima?
4. Qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
5. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
6. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?
7. Kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
8. To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.
9. Ko'rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?



IV BOB. TEKISLIK VA UNING ORTOGONAL PROYEKSIYALARI

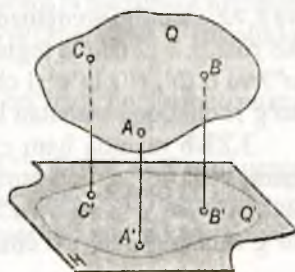
4.1-§. Tekislikning berilishi

Tekislik birinchi tartibli sirt hisoblanadi. Chunki u birinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanadi, ya'ni:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ortogonal proyeksiyalarda tekislikning fazodagi vaziyati uning berilishini ta'minlovchi elementlarning proyeksiyalari orqali aniqlanadi. Umumiy holda tekislikning fazoviy vaziyatini bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta aniqlaydi. Haqiqatan, 4.1-rasmdagi A, B va C nuqtalar fazoda biror Q tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Bu nuqtalardan har birining fazoviy o'qi o'zgarishi bilan tekislikning vaziyati ham fazoda o'zgaradi.

Uchta nuqtaning ikkitasi orqali hamma vaqt bir to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Shuningdek, uchta nuqta yordamida ikki parallel va kesishuvchi chiziqlar o'tkazish yoki tekis geometrik shakl (masalan, uchburchak) hosil qilish mumkin.



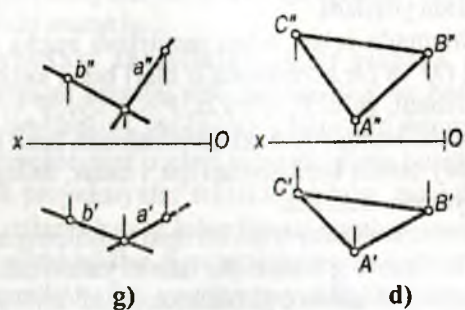
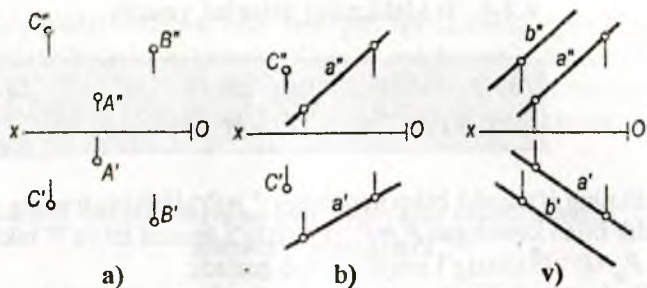
4.1-rasm.

Chizma geometriyada tekisliklar quyidagi hollar bilan beriladi:

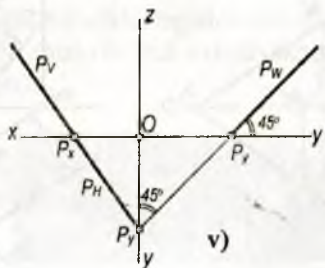
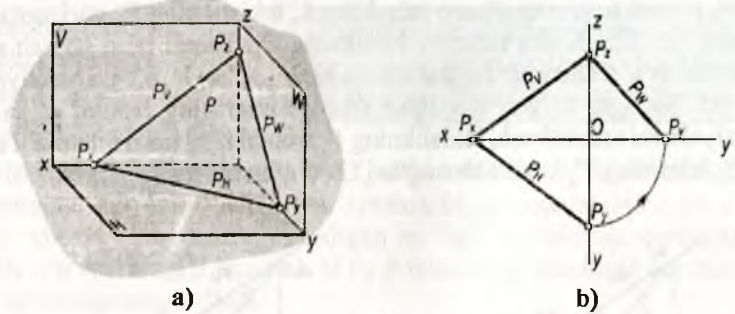
- bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2-a rasm);
- bir to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2-b rasm);
- ikki parallel to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2-v rasm);
- ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2-g rasm);
- tekis geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalari orqali (4.2-d rasm).

Shuningdek, tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlari orqali berilishi ham mumkin. Masalan, 4.3-rasmda P tekislik H, V va W proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan P_H, P_V, P_W chiziqlar orqali berilishi ko'rsatilgan.

Agar biror tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil og'ish burchagi hosil qilsa, uning ikkita izi bir to'g'ri chiziqda yotadi. Uchinchi izi esa proyeksiyalarining o'qi bilan 45° burchak hosil qiladi (4.3-v rasm).



4.2-rasm.



4.3-rasm.

4.2-§. Tekislikning izlarini yasash

Ta'rif. Tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari tekislikning izlari deyiladi.

P tekislikning H tekislik bilan kesishgan $P_H = P \cap H$ chizig'i uning *gorizontal izi*, V tekislik bilan kesishgan $P_V = P \cap V$ chizig'i *frontal izi* va W tekislik bilan kesishgan $P_W = P \cap W$ chizig'i *profil izi* deb ataladi.

Tekislik shu tarzda berilsa, *izlari bilan berilgan tekislik* deb yuritiladi va $P(P_H, P_V, P_W)$ tarzida yoziladi.

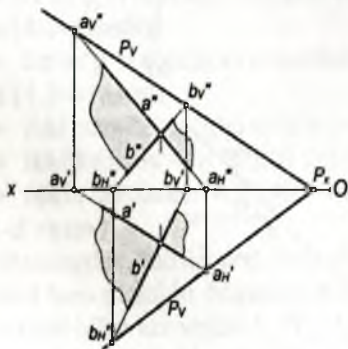
Tekislikni chizmada izlari bilan tasvirlash ancha qulay va afzaldir. Tekislikning Ox , Oy va Oz koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari P_x , P_y , P_z bilan belgilanadi, ya'ni $P = P \cap Ox$, $P = P \cap Oy$, $P = P \cap Oz$.

Bu nuqtalar tekislikning ikkita izi kesishishidan hosil bo'ladi.

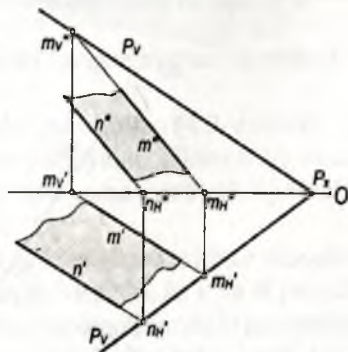
Tekislik qanday tarzda berilishidan qat'i nazar, uning izlarini ortogonal proyeksiyalarda yasash mumkin.

Har qanday geometrik shakllar orqali berilgan tekislikning izlarini yasash mazkur tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqlar izlarini yasash bilan bajariladi. Buning uchun to'g'ri chiziqlarning tekislikka tegishlilik xususiyatidan foydalaniladi.

4.4-rasmda $a \cap b$ kesishuvchi chiziqlar bilan berilgan tekislikning gorizontal izini yasash uchun to'g'ri chiziqlar gorizontal izlarining a'_H, a''_H va b'_H, b''_H proyeksiyalarini topamiz. Agar to'g'ri chiziqlar gorizontal izlarining gorizontal a'_H va b'_H proyeksiyalarini o'zaro tutashtirsak, tekislikning P_H gorizontal izini hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda tekislikning P_V frontal izini yasash uchun kesishuvchi to'g'ri chiziqlar frontal izlarining a'_V, a''_V va b'_V, b''_V proyeksiyalarini yasaymiz. So'ngra to'g'ri chiziqlar frontal izlarining frontal a''_V va b''_V proyeksiyalarini tutashtirsak, tekislikning P_V frontal izini hosil qilamiz. Tekislik P_H va P_V izlarining P_x kesishish nuqtasi Ox o'qida bo'lishi shart.



4.4-rasm.



4.5-rasm.

Ikki $m||n$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikning P_H va P_V izlari ham to'g'ri chiziqlarining izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi (4.5-rasm). Umuman, turli geometrik shakllar bilan berilgan tekisliklarning izlari mazkur shaklga tegishli bo'lgan ikki kesishuvchi yoki parallel chiziqlarning izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi.

4.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin.

Umumiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmasa, *umumiy vaziyatdagi tekislik* deyiladi (4.3-a rasm). Chizmada umumiy vaziyatdagi tekislikning izlari proyeksiyalar o'qlari bilan ixtiyoriy burchak hosil qiladi. Agar biror P tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, uning P_H va P_V izlari Ox o'qi bilan bir xil burchak hosil qiladi.

Xususiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisligining biriga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, *xususiy vaziyatdagi tekislik* deb ataladi.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar *proyeksiyalovchi tekisliklar* deyiladi.

**Gorizontal
proyeksiyalovchi
tekislik**

Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik gorizontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

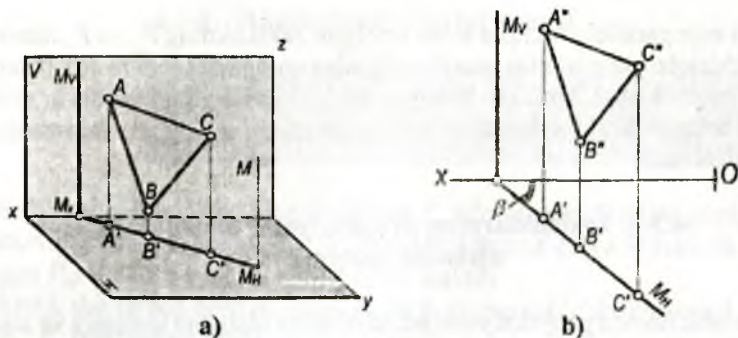
Gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislikning M_V frontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (4.6-a, b rasm), M_H gorizontal izi esa Ox o'qiga nisbatan ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Bu tekislik gorizontal izi M_H va Ox o'q orasidagi β burchak M va V tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo'ladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli tekis geometrik shakllarning gorizontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.6-b rasm).

**Frontal
proyeksiyalovchi
tekislik**

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik frontal proyeksiyalovchi tekislik deyiladi.

Frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizontal N_H izi Ox o'qiga perpendikulyar (4.7-a, b rasm), frontal N_V izi esa ixtiyoriy burchakda joylashgan



4.6-rasm.

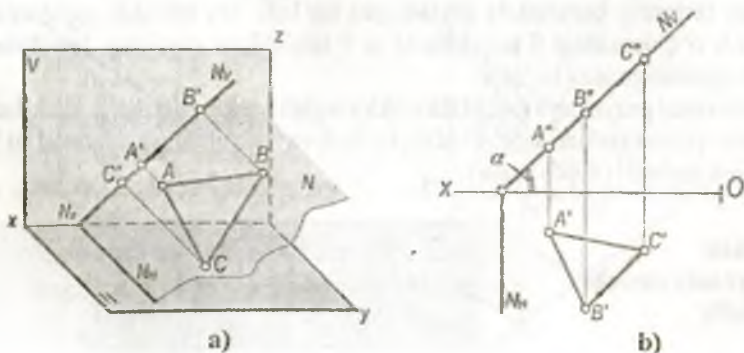
bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislik frontal N_V izining Ox o'qi bilan hosil qilgan α burchagi N va H tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng. Frontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi.

Profil
proyeksiyalovchi
tekislik

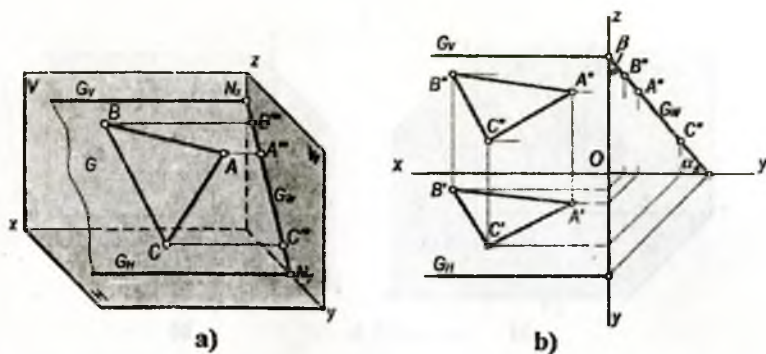
Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligi perpendikulyar tekislik profil proyeksiyalovchi tekislik deb ataladi.

Bu tekislikning gorizonttal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qiga parallel bo'ladi (4.8-a rasm).

G profil proyeksiyalovchi tekislikning H va V tekisliklar bilan hosil qilgan α va β burchaklari 4.8-b rasmda ko'rsatilganidek haqiqiy kattalikda proyeksiyanadi.



4.7-rasm.



4.8-rasm.

Shuningdek, profil proyeksiyalovchi tekislik proyeksiyalar o'qi Ox dan ham o'tishi mumkin (4.9-a rasm). U holda G tekislikning gorizonttal G_h va frontal G_v izlari Ox o'qida bo'ladi va tekislikning fazoviy vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda mazkur tekislikning profil izi yoki shu tekislikka tegishli bo'lgan biror A (A' , A'') nuqtaning ikki proyeksiyasi beriladi (4.9-b rasm). Bu nuqtaning A''' proyeksiyasi orqali tekislikning profil izini yasash mumkin (4.10-rasm).

Proyeksiyalovchi tekislikning ikkita izini chizmada tasvirlash shart emas. Tekislikning bitta izi, aynan gorizonttal proyeksiyalovchi tekislikning gorizonttal izi M_h , frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi N_v , profil proyeksiyalovchi tekislikning profil izi G_w orqali ham ularning vaziyatini aniqlash mumkin (4.11-rasm).

Proyeksiyalar tekisligiga parallel tekisliklar.

Gorizonttal tekislik

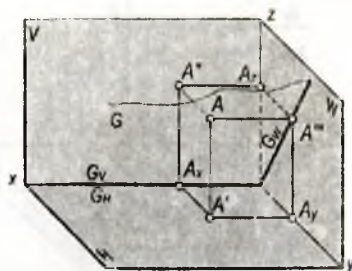
Ta'rif. Gorizonttal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik gorizonttal tekislik deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda V va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal H_v izi aniqlaydi (4.12-a, b rasm).

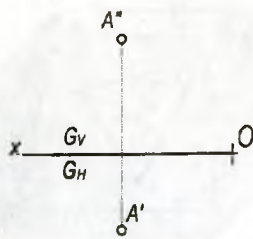
Frontal tekislik

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik frontal tekislik deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda H va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal V_w izi aniqlaydi (4.12-a, b rasm).

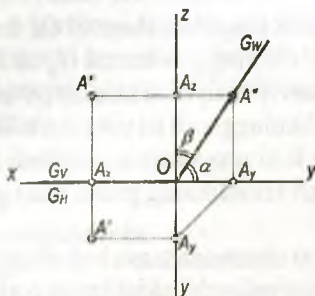


a)

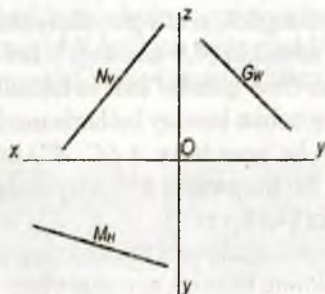


b)

4.9-rasm.



4.10-rasm.



4.11-rasm.

Profil tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik profil tekislik deyiladi.

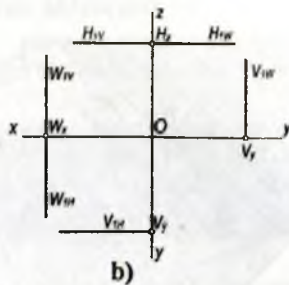
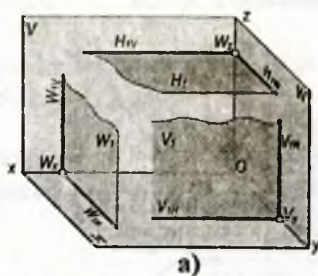
Profil W_1 tekislik bir vaqtda H gorizontal va V frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning fazoviy vaziyatini uning W_{III} gorizontal va $W_{II'}$ frontal izlari aniqlaydi (4.12-a, b rasm).

4.4-§. Tekislik va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

To'g'ri chiziq va tekislik fazoda o'zaro quyidagi vaziyatlarda bo'lishi mumkin:

- to'g'ri chiziq tekislikka tegishli ($a \in P$);
- to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi ($a \cap P$);
- to'g'ri chiziq tekislikka parallel ($a \parallel P$);
- to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar ($a \perp P$).

Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq va nuqta. Quyidagi hollarda to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi:



4.12-rasm.

• agar to'g'ri chiziqlarning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, a to'g'ri chiziqlarning A va B nuqtalari (4.13-a, b rasm) Q tekislikka tegishli bo'lganligi uchun a to'g'ri chiziq Q tekislikka tegishli bo'ladi;

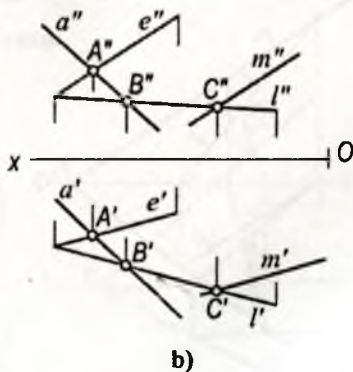
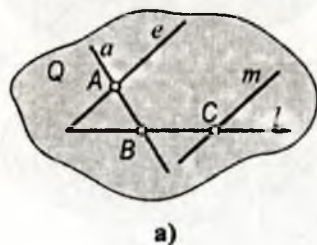
• agar m to'g'ri chiziqlarning bir nuqtasi tekislikka tegishli bo'lib, mazkur tekislikka tegishli yoki unga parallel biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, m to'g'ri chiziqlarning C nuqtasi Q tekislikka tegishli va bu to'g'ri chiziq mazkur tekislikka tegishli e to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda m to'g'ri chiziq Q tekislikka tegishli bo'ladi.

To'g'ri chiziqlarning tekislikka tegishli bo'lish shartlaridan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

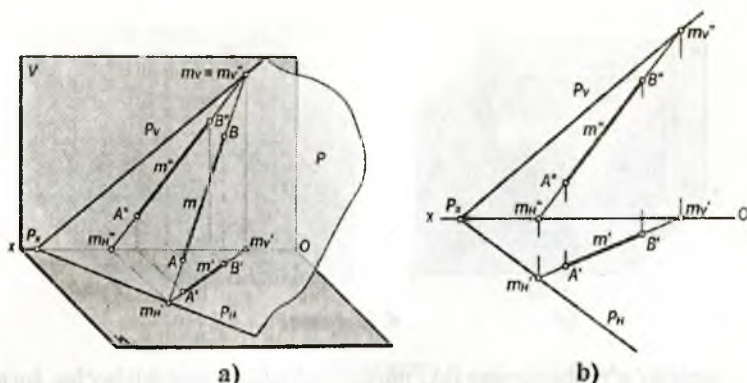
1-xulosa. Agar to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning bir nomli izlari tekislikning bir nomli izlariga tegishli bo'ladi (4.14-a, b rasm).

P tekislikka tegishli m to'g'ri chiziqlarning M_{II} gorizontal izi tekislikning P_{II} gorizontal izida, to'g'ri chiziqlarning M_V frontal izi tekislikning P_V frontal izida joylashgan. Demak, m to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni $m \in P$.

2-xulosa. Agar nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, bu nuqta tekislikning biror to'g'ri chizig'iga tegishli bo'ladi.



4.13-rasm.



4.14-rasm.

4.15-rasmda $P (P_H, P_V)$ tekislik bilan $A (A', A'')$ va $B (B', B'')$ nuqtalarning o'zaro joylashuvi ko'rsatilgan. Buning uchun:

- nuqtaning gorizonttal A' (yoki frontal A'') proyeksiyasidan o'tuvchi va tekislikka tegishli a to'g'ri chiziqlarning gorizonttal a' (yoki frontal a'') proyeksiyasi o'tkaziladi;

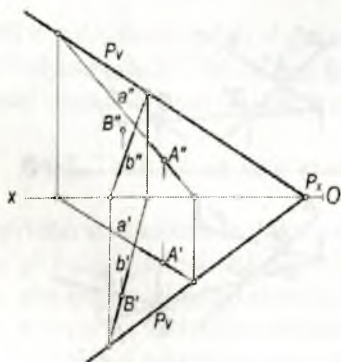
- to'g'ri chiziqlarning frontal a'' (yoki gorizonttal a') proyeksiyasi yasiladi;

- A nuqtaning A' gorizonttal va A'' frontal proyeksiyalari a to'g'ri chiziqlarning bir nomli a' va a'' proyeksiyalarida joylashgani uchun $A \in P$ bo'ladi.

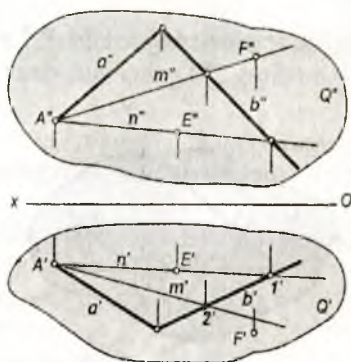
Xuddi shu tartibda $P (P_H, P_V)$ tekislik bilan $B (B', B'')$ nuqtaning o'zaro vaziyatini tekshirganimizda $B' \in b'$ va $B'' \notin b''$ bo'lgani uchun $B \notin P$ bo'ladi.

4.16-rasmda a va b kesishuvchi chiziqlar orqali berilgan Q tekislik bilan E va F nuqtalarning o'zaro vaziyati m va n chiziqlar yordamida aniqlangan:

- $E' \in n'$ va $E'' \in n''$ bo'lgani uchun $E \in Q$ bo'ladi;
- $F' \notin m'$ va $F'' \in m''$ bo'lgani uchun esa $F \notin Q$ bo'ladi.



4.15-rasm.



4.16-rasm.

4.5-§. Tekislikning bosh chiziqlari

Tekislikning bosh chiziqlariga uning gorizontali, frontali va eng katta og'ish chiziqlari kiradi.

Tekislikning gorizontali

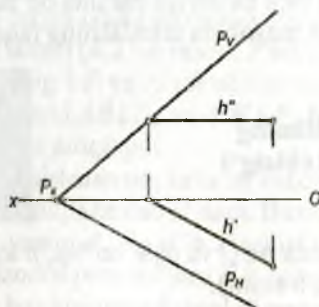
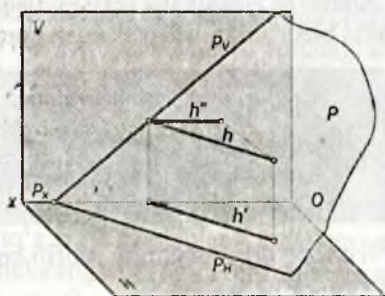
Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq H tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning gorizontali deyiladi.

Bunda $h \in P$ hamda $h \parallel H$ bo'lsa, h to'g'ri chiziq P tekislikning gorizontali chizig'i bo'ladi.

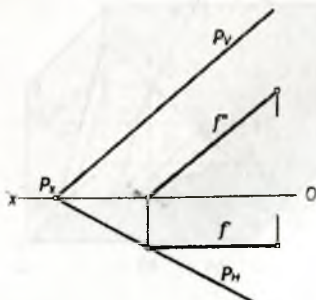
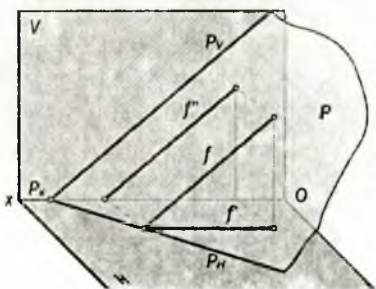
Chizmada tekislik gorizontalinining frontal proyeksiyasi Ox ga parallel, ya'ni $h'' \parallel Ox$ bo'ladi, tekislik gorizontalinining gorizontali proyeksiyasi esa tekislikning P_{Π} iziga parallel, ya'ni $h' \parallel P_{\Pi}$ bo'ladi (4.17-rasm).

Tekislikning frontali

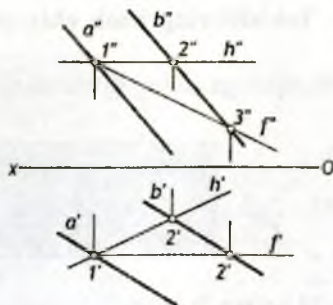
Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq V tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning frontali deyiladi.



4.17-rasm.



4.18-rasm.



4.19-rasm.

Bunda $f \in P$ hamda $f \parallel V$ bo'lsa, f to'g'ri chiziq P tekislikning frontal chizig'i bo'ladi. Chizmada tekislik frontalining gorizontal proyeksiyasi proyeksiyalar o'qi Ox ga parallel bo'ladi, ya'ni $f' \parallel Ox$, tekislik frontalining frontal proyeksiyasi esa tekislikning P_v iziga parallel, ya'ni $f'' \parallel P_v$ bo'ladi (4.18-rasm).

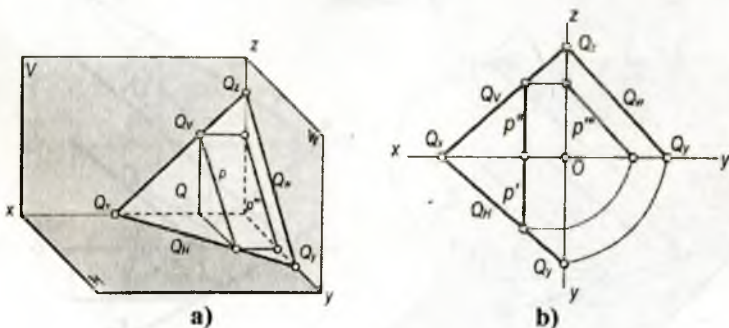
4.19-rasmda $a//b$ chiziqlar bilan berilgan tekislikning h gorizontal va f frontallarini yasash tasvirlangan.

Umuman, chizmada tekislikning cheksiz ko'p bosh chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari (masalan, gorizontallari) hamma vaqt bir-biriga parallel bo'ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Tekislikning profil chizig'i

Ta'rif. Agar tekislikka tegishli to'g'ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning profil chizig'i yoki profili deyiladi.

Bunda $p \in Q$ va $p \parallel W$ bo'lsa, p to'g'ri chiziq Q tekislikning profili bo'ladi (4.20-a, b rasm).



4.20-rasm.

Chizmada tekislik profil chizig'ining gorizontal va frontal proyeksiyasi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Profil proyeksiyasi esa proyeksiyalar o'qlariga nisbatan turlicha joylashuvi mumkin. Agar tekislik izlari bilan berilgan bo'lsa, profilning profil proyeksiyasi tekislikning profil iziga parallel bo'ladi (4.20-b rasm).

Chizmada tekislikning cheksiz ko'p asosiy chiziqlarini o'tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari doimo o'zaro parallel bo'ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig'ini o'tkazish mumkin.

Tekislikning eng katta og'ma chizig'i

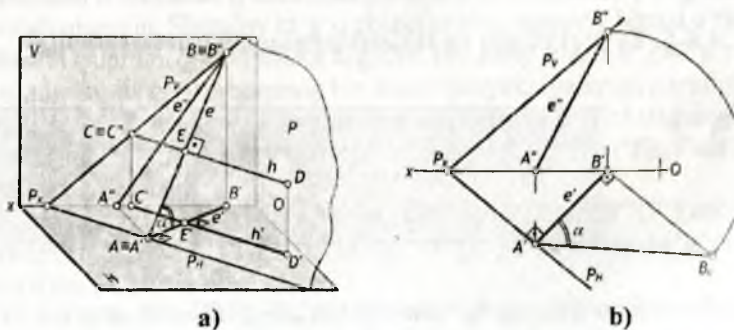
Ta'rif. Tekislikka tegishli va tekislikning bosh chiziqlaridan biri (gorizontal yoki frontal, profil)ga perpendikulyar to'g'ri chiziq tekislikning eng katta og'ma chizig'i deb ataladi.

Agar P tekislikka tegishli e to'g'ri chiziq tekislikning gorizontalligiga perpendikulyar bo'lsa, u holda e to'g'ri chiziq P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i deyiladi.

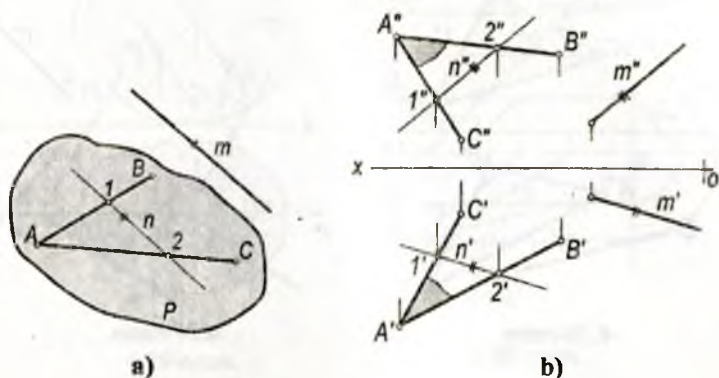
4.21-a rasmda P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'i tasvirlangan. Bu yerda $h \in P$ va $h \parallel H$. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan: $\angle BED = 90^\circ$ va $ED \parallel H$ bo'lgani uchun $\angle B'E'D' = 90^\circ$ bo'ladi.

Tekislikning eng katta og'ma chizig'i orqali uning proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan ikkiyoqli burchagi aniqlanadi (4.21-b rasm). P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i P va H tekisliklar orasidagi $\angle B_0 A' B'$ chiziqli burchakni ifodalaydi. Chunki $AB \perp P_H$ va $A'B' \perp P_H$ bo'lgani uchun bu ikkiyoqli α burchakning qiymatini aniqlaydi.

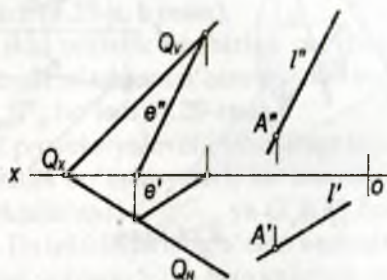
P tekislikning H proyeksiyalar tekisligiga nisbatan eng katta og'ma chizig'ini yasash uchun P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan $e \in P$ to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasini $e' \perp P_H$ qilib, P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'ining gorizontal proyeksiyasi o'tkaziladi va Ox o'qida $e' \cap Ox = B'$ nuqta aniqlanadi. So'ngra bu chiziqning frontal e'' proyeksiyasi



4.21-rasm.



4.24-rasm.



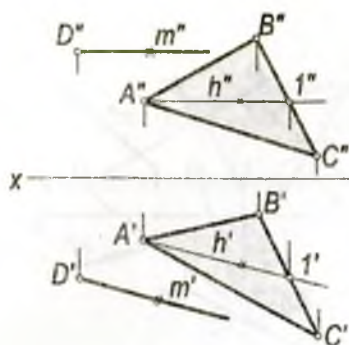
4.25-rasm.

Yechish. A nuqtadan Q tekislikka parallel qilib cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Shunday to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasi o'tkaziladi.

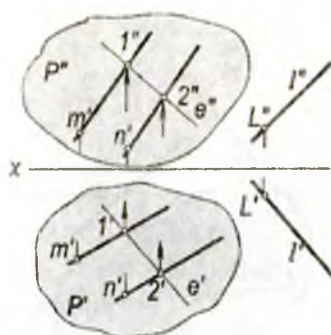
Buning uchun Q tekislikka tegishli ixtiyoriy e (e' , e'') to'g'ri chiziq tanlanadi. Bu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan to'g'ri chiziqning l' va l'' proyeksiyalari o'tkaziladi, ya'ni e (e' , e'') $\in Q(Q', Q'')$ bo'lib, $l' \in A'$, $l'' \in A''$ bo'lganda $l \parallel Q$ bo'ladi.

2-masala. D (D' , D'') nuqtadan ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) tekisligi va gorizontalar tekisligi H ga parallel m to'g'ri chiziq o'tkazilsin (4.26-rasm).

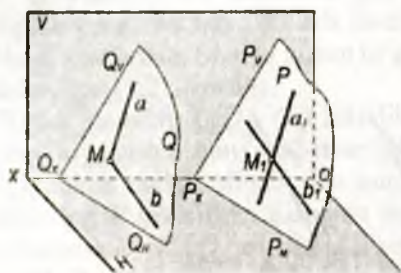
Yechish. $\triangle ABC$ tekisligida H ga parallel qilib uning gorizontali h (h' , h'') to'g'ri chiziq o'tkaziladi. So'ngra D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan $m' \parallel h'$ va $m'' \parallel h''$ qilib izlangan to'g'ri chiziqning proyeksiyalari o'tkaziladi.



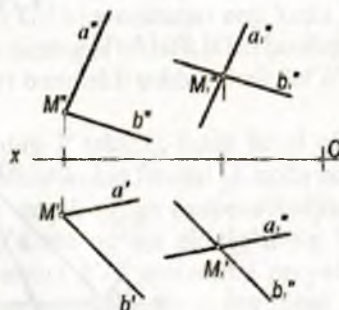
4.26-rasm.



4.27-rasm.



a)



b)

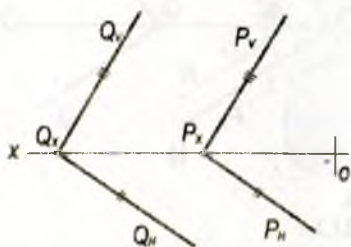
4.28-rasm.

3-masala. $P(m||n)$ tekislik va $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati aniqlansin (4.27-rasm).

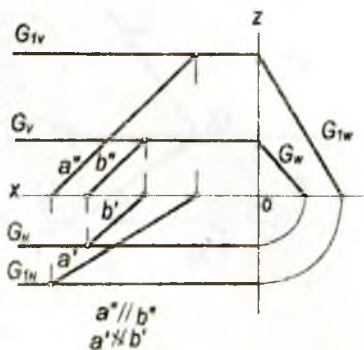
Yechish. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun P tekislikda $e''||l''$ qilib to'g'ri chiziqlarning gorizantal proyeksiyasi o'tkaziladi va uning frontal e'' proyeksiyasi yasaladi. Chizmada e'' to'g'ri chiziq l'' ga parallel bo'lmagani uchun l to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lmaydi. l va P larning o'zaro parallelligini $l''||e''$ qilib o'tkazish bilan ham bajarish mumkin.

4.7-§. Tekisliklarning o'zaro parallelligi

Ta'rif. Agar bir tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikka tegishli o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi.



4.29-rasm.



4.30-rasm.

Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga mos ravishda o'zaro parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi. Ya'ni $a \in Q$, $b \in Q$ bo'lib, $a \cap b$ bo'lsa va $a_1 \in P$ va $b_1 \in P$ bo'lib, $a_1 \cap b_1$ bo'lsa hamda $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo'lganda $Q \parallel P$ bo'ladi (4.28-a, b rasm).

Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallel bo'lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni $Q \parallel P$ bo'lsa, $Q_H \parallel P_H$, $Q_V \parallel P_V$ va $Q_W \parallel P_W$ bo'ladi (4.29-rasm).

Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizontaal va frontal izlari parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, 4.30-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \parallel G_{1H}$ va $G_V \parallel G_{1V}$ bo'lib, $G_W \parallel G_{1W}$ bo'lgani uchun $G \parallel G_1$ bo'ladi. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to'g'ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \in G_1$ va $b \in G$ bo'lgan holda $a'' \parallel b''$ bo'lsa, $a' \parallel b'$ bo'lgani uchun $a \parallel b$ va $G \parallel G_1$ bo'ladi.

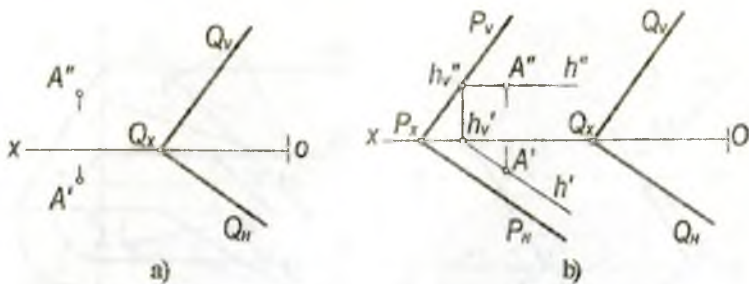
Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o'tkazish mumkin.

1-masala. $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel $P (P_H, P_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.31-a rasm).

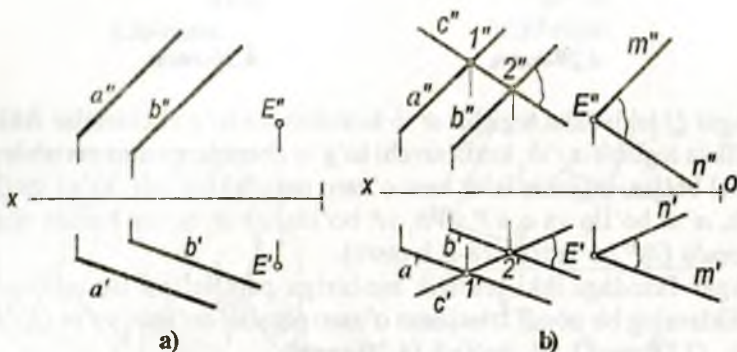
Yechish. Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko'ra, P tekislikning izlari $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$, $P_W \parallel Q_W$ bo'lishi shart. Masalani yechish uchun to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to'g'ri chiziq, jumladan, $h (h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi (4.31-b rasm).

Bu gorizontaalning frontal izi h'' yasali, undan izlangan P tekislikning P_V izi berilgan tekislikning Q_V iziga parallel qilib o'tkaziladi. So'ngra $P_V \cap O_x = P_x$ nuqtasidan Q tekislikning Q_H iziga parallel qilib izlangan tekislikning P_H izi o'tkaziladi.

2-masala. $E (E', E'')$ nuqtadan $a (a', a'')$ va $b (b', b'')$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.32-a, b rasm).



4.31-rasm.



4.32-rasm.

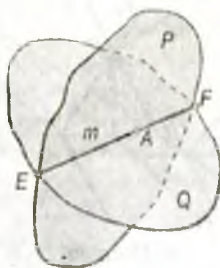
Yechish. Berilgan $(a||b)$ tekislikka tegishli ixtiyoriy c (c' , c'') to'g'ri chiziqli o'tkazib, so'ngra E nuqtaning E' va E'' proyeksiyalaridan a va c chiziqlar proyeksiyalariga mos ravishda parallel qilib o'tkazilgan $m' \cap n'$, $m'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar proyeksiyalari izlangan tekislik proyeksiyasi bo'ladi.

Tekislikka tegishli bo'lmagan nuqtadan mazkur tekislikka parallel bo'lgan cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bunday to'g'ri chiziqlar to'plami berilgan tekislikka parallel bo'lgan tekislikni ifodalaydi.

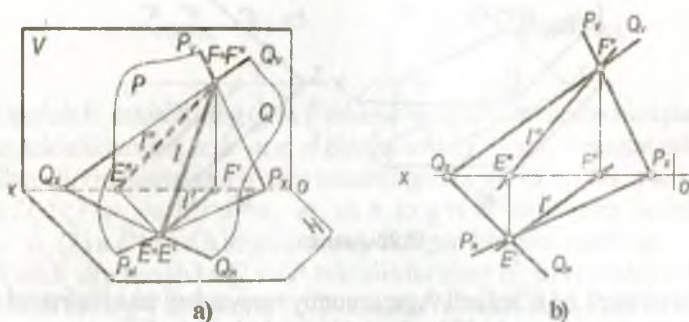
4.8-§. Tekisliklarning o'zaro kesishuvi

Ta'rif. Agar ikki tekislik umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lsa, bu tekisliklar o'zaro kesishuvchi tekisliklar deyiladi.

Ikki P va Q tekisliklar m to'g'ri chiziqli bo'yicha kesishadi, ya'ni $Q \cap P = m$. Demak, tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash uchun har ikkala tekislikka tegishli bo'lgan E va F umumiy nuqtalarni aniqlash kifoya qiladi (4.33-rasm).



4.33-rasm.



4.34-rasm.

4.34-a, b rasmda P va Q kesishuvchi tekisliklar berilgan. Tasvirdan yaqqol ko'rinib turibdiki, bu tekisliklarga umumiy bo'lgan E va F nuqtalar tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish nuqtalari bo'ladi: $E = Q_H \cap P_H$ va $F = Q_V \cap P_V$.

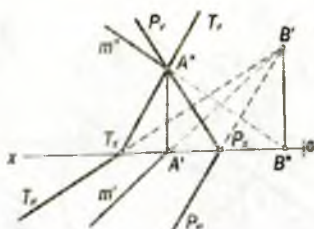
Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, Q va P tekisliklarning l kesishuv chizig'i hosil bo'ladi: $l = Q \cap P$.

Chizmada (4.34-b rasm) bu tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalarini yasash uchun tekisliklarning bir nomli izlari kesishish E va F nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari aniqlanadi va nuqtalarning bir nomli proyeksiyalari o'zaro tutashtiriladi. Natijada hosil bo'lgan l' va l'' to'g'ri chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi. Agar tekisliklarning izlari birinchi oktantda kesishmasa, u holda bir nomli izlarini davom ettirib, ularning kesishuv nuqtasini boshqa oktantda topish bilan kesishuv chizig'i nuqtalarining proyeksiyalarini yasash mumkin.

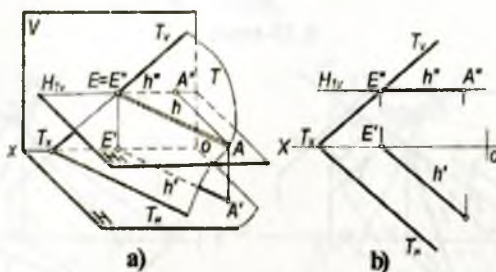
Masalan, $T (T_H, T_V)$ va $P (P_H, P_V)$ tekisliklarning (4.35-rasm) gorizontallari T_H va P_H ikkinchi oktantda kesishadi.

Kesishuvchi tekisliklarning biri gorizontallik bo'lsa, bu tekisliklar gorizontall chiziq bo'yicha kesishadi.

4.36-a, b rasmda umumiy vaziyatdagi T tekislik bilan H gorizontall tekislikning kesishish chizig'i h gorizontall bo'ladi. Haqiqatan, H gorizontall tekislikning har bir nuqtasi H tekislikdan baravar uzoqlikda joylashgani uchun tekisliklarning



4.35-rasm.



4.36-rasm.

kesishuvchi chizig'i $h \parallel H$ bo'ladi. Agar umumiy vaziyatdagi tekislik frontal tekislik bilan kesishgan bo'lsa, bu tekisliklar frontal bo'yicha kesishadi.

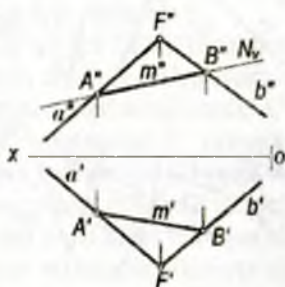
Ammo kesishuvchi tekisliklarning biri proyeksiyalovchi tekislik bo'lsa, proyeksiyalovchi tekislikning xossasiga muvofiq, ularning kesishish chizig'i proyeksiyalaridan biri proyeksiyalovchi tekislikning izida bo'ladi (4.37-rasm).

Kesishuvchi tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmasa, ularning kesishish chizig'ini yordamchi tekisliklar vositasida aniqlash mumkin. Masalan, umumiy vaziyatdagi $P (P_H, P_V)$ va $T (T_H, T_V)$ tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal va V_1 frontal tekisliklardan foydalaniladi (4.38-rasm).

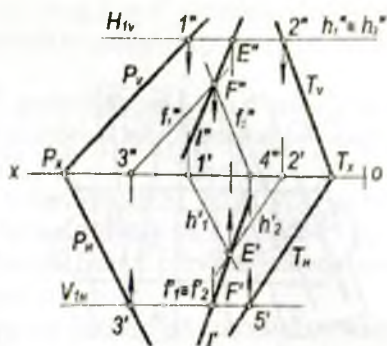
H_1 gorizontal tekislikning frontal izi $H_{1V} \parallel H$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P tekislikni $h_1 (h_1', h_1'')$, T tekislikni $h_2 (h_2', h_2'')$ gorizontallar bo'yicha kesadi. Bu gorizontallarning kesishgan $E (E', E'')$ nuqtasi $E' = h_1' \cap h_2'$ va $E'' = h_1'' \cap h_2''$ P va T tekisliklarning kesishish chizig'i umumiy nuqtalaridan biri bo'ladi.

Frontal tekislik $V_1 \parallel V$ qilib o'tkaziladi. Bu tekislik P va T tekisliklarni $f_1 (f_1', f_1'')$ va $f_2 (f_2', f_2'')$ frontallar bo'yicha kesadi. Bu frontallarning kesishish $F (F', F'')$ nuqtasi P va T tekisliklarning kesishish chizig'i umumiy nuqtalaridan ikkinchisi bo'ladi: $F'' = f_1'' \cap f_2''$ va $F' = f_1' \cap f_2'$. Natijada E va F nuqtalarning E', F' va E'', F'' proyeksiyalari o'zaro tutashtirilsa, P va T tekisliklarning kesishish chizig'ining l' va l'' proyeksiyalari hosil bo'ladi.

4.39-a, b rasmda umumiy vaziyatdagi $a \parallel b$ va $c \cap d$ chiziqlar bilan berilgan Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun gorizontal H_1 va H_2 tekisliklar o'tkazilgan.



4.37-rasm.



4.38-rasm.

Dastlab H_1 tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini aniqlash uchun tekisliklarning a, b va c, d chiziqlarni 1, 2 va 3, 4 nuqtalarda kesganligi belgilanadi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirganda, m_1 va n_1 chiziqlar hosil bo'ladi, ya'ni $H_1 \cap Q = m_1$ va $H_1 \cap P = n_1$. m_1 va n_1 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $E = m_1 \cap n_1$ Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan birinchi nuqtadir.

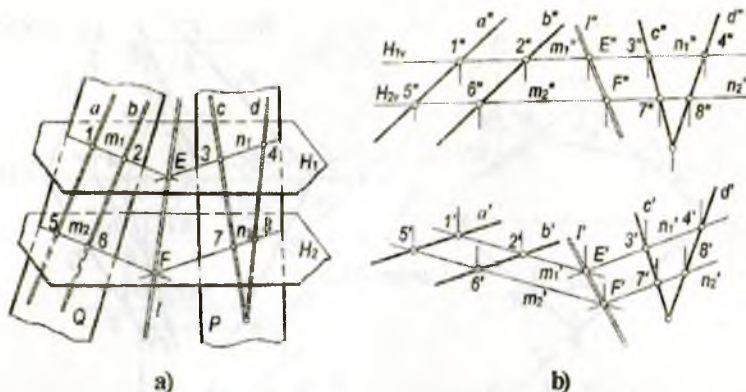
Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning H_2 gorizontal tekislik bilan kesishish chizig'i aniqlanadi. Chizmada H_2 tekislik a, b va c, d chiziqlarni 5, 6 va 7, 8 nuqtalarda kesadi. Natijada $H_2 \cap Q = m_2$ va $H_2 \cap P = n_2$ hosil bo'ladi. Rasmda $H_2 \parallel H_1$ bo'lgani uchun $m_2 \parallel m_1$ va $n_2 \parallel n_1$ bo'ladi. Q va P tekisliklarning ikkinchi umumiy F nuqtasi m_2 va n_2 chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtasi bo'ladi: $F = m_2 \cap n_2$.

Har ikkala P va Q tekisliklar uchun umumiy bo'lgan E va F nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, tekisliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

Chizmada (4.39-b rasm) Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ini yasash uchun H_1 gorizontal tekislikning H_{1V} izini o'tkazib, uning a, b va c, d chiziqlarining frontal proyeksiyalari a'', b'' va c'', d'' larni kesuvchi $1'', 2''$ va $3'', 4''$ nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarning gorizontal $1', 2'$ va $3', 4'$ proyeksiyalari aniqlanib, o'zaro tutashtiriladi. m_1' va n_1' chiziqlar Q va P tekisliklarning H_1 tekislik bilan kesishgan chiziqlarining gorizontal proyeksiyalari bo'ladi. Kesishuvchi chiziqlarning frontal m_1'' va n_1'' proyeksiyalari H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi. Hosil bo'lgan m_1' va n_1' chiziqlarning kesishgan E' nuqtasi Q va P tekisliklarning kesishuv chizig'iga tegishli E nuqtaning gorizontal proyeksiyasi $E' = m_1' \cap n_1'$ bo'ladi. Bu nuqtaning E'' frontal proyeksiyasi esa H_1 tekislikning H_{1V} izida bo'ladi: $E'' \in H_{1V}$.

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning kesishish chizig'iga tegishli ikkinchi F nuqtasining F' va F'' proyeksiyalari H_2 gorizontal tekislikning H_{2V} izini H_{1V} ga parallel holda o'tkazib aniqlanadi.

Chizmadagi E', F' va E'', F'' proyeksiyalarni o'zaro tutashtiruvchi l' va l'' chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.



4.39-rasm.

4.9-§. To'g'ri chiziqlarning tekislik bilan kesishishi

Agar to'g'ri chiziqlar tekislikka parallel yoki tegishli bo'lmasa, bu to'g'ri chiziqlar tekislik bilan kesishadi.

To'g'ri chiziqlar tekislik bilan kesishishi natijasida nuqta hosil bo'ladi.

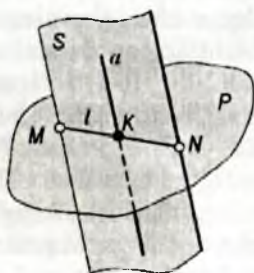
Bu nuqtani aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlaridan foydalaniladi (4.40-rasm):

- berilgan a to'g'ri chiziqdan yordamchi S tekislik o'tkaziladi: $a \in S$;
- P va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi: $S \cap P = l$;
- a to'g'ri chiziqlarning l bilan kesishgan nuqtasi $K = a \cap l$ bo'ladi.

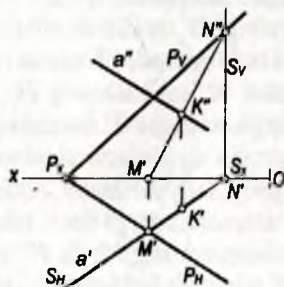
Natijada K nuqta a to'g'ri chiziqqa va P tekislikka tegishli umumiy nuqta bo'ladi. Odatda, yordamchi S tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi.

Chizmada a (a' , a'') to'g'ri chiziqlarning P (P_H , P_V) tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari bo'yicha aniqlaymiz (4.41-rasm). Buning uchun:

- to'g'ri chiziqlarning a' proyeksiyasidan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi S_H tekislikning S_H izi o'tkaziladi;



4.40-rasm.



4.41-rasm.

• S va P tekisliklar kesishuv chizig'ining l' va l'' proyeksiyalari yasaladi. Buning uchun tekisliklar izlarining kesishish nuqtalari proyeksiyalari M' , M'' va N' , N'' dan foydalaniladi;

• a to'g'ri chiziqning frontal a'' proyeksiyasi S va P tekisliklarning kesishish chizig'i l ning frontal l'' proyeksiyasi bilan kesishib, K nuqtaning K'' proyeksiyasi aniqlanadi: $K'' = a'' \cap l''$;

• K nuqtaning K' proyeksiyasi tekislikning S_H iziga yoki a to'g'ri chiziqning a' proyeksiyasiga tegishli bo'ladi: $K' \in a'$ va $K' \in S_H$.

Yuqoridagi misolni a to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

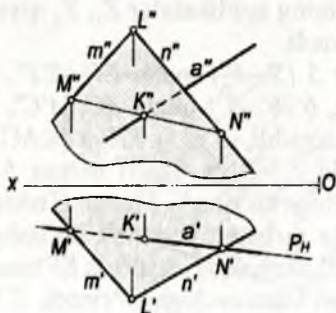
$P(m \cap n)$ tekislik bilan a to'g'ri chiziqning K kesishish nuqtasi proyeksiyalari 4.42-rasmda a to'g'ri chiziq orqali $S(S_H)$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik, 4.43-rasmda m to'g'ri chiziq orqali $S(S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan aniqlangan.

Ayrim hollarda to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi mazkur tekislikni ifodalovchi chegaralangan ABC tekis shaklning tashqarisida bo'lishi mumkin (4.44-a, b rasml). Bunday hollarda tekislik chegaralanmagan geometrik sirt ekanligini esda tutish lozim.

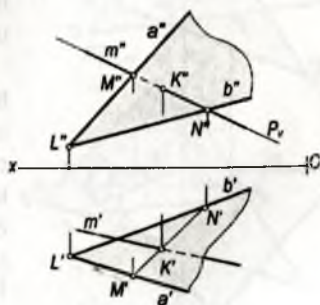
To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash algoritmidan foydalanib, turli geometrik tekis shakllarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash mumkin. Masalan, 4.45-rasmda ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va DEF ($D'E'F'$, $D''E''F''$) uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i proyeksiyalari KL ($K'L'$, $K''L''$) yasalgan.

ΔABC va ΔDEF tekisliklarining kesishish chizig'i yasash uchun ulardan biri, masalan, ΔDEF ning EF va ED tomonlarining ΔABC tekislik bilan kesishish $K(K', K'')$ va $L(L', L'')$ nuqtalari aniqlanadi.

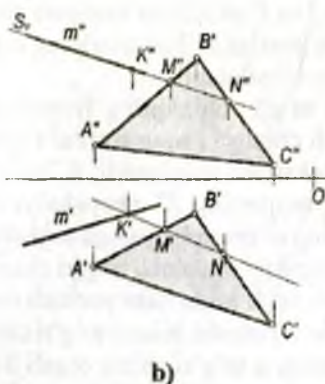
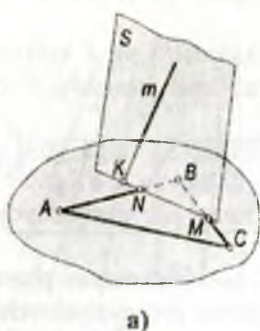
Buning uchun uchburchakning EF tomonidan yordamchi $T(T_1)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikni ΔABC tekislik bilan kesishish 12 chizig'ining proyeksiyalari $l'2'$ va $l''2''$ bo'ladi. Uchburchakning



4.42-rasmi.



4.43-rasm.



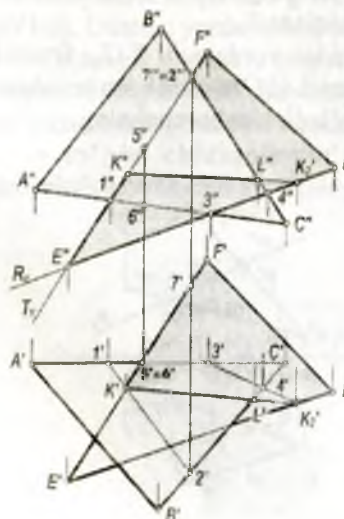
4.44-rasm.

EF tomonining 12 yoki $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning proyeksiyalari K' va K'' aniqlanadi.

Xuddi shu tartibda DEF uchburchak ED tomonining $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish nuqtasi M ning M' va M'' proyeksiyalari yordamchi $S(S_0)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik vositasida aniqlanadi.

Chizmada hosil bo'lgan K' bilan L' va K'' bilan L'' proyeksiyalar o'zaro tutashtirilsa, uchburchaklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari hosil bo'ladi. Uchburchaklar chegaralangan shakllar bo'lgani uchun ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalari $K'L'$ va $K''L''$ chegarasida bo'ladi.

Uchburchaklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan ko'rinadigan yoki ko'rinmaydigan qismlarini aniqlash uchun ularning tomonlariga tegishli konkurent nuqtalaridan foydalaniladi. Masalan, H tekislikka nisbatan ko'rinishlikni aniqlash uchun $\triangle ABC$ va $\triangle DEF$ larning AC va EF tomonlari konkurent $5 \equiv 6(5'6', 5''6'')$ nuqtalarining applikatorlar Z_5, Z_6 qiymatlari taqqoslanadi.



4.45-rasm.

Agar $5(5', 5'')$ nuqta $EF(E'F', E''F'')$ tomoniga, $6(6', 6'')$ nuqta $AC(A'C', A''C'')$ tomoniga tegishli, ya'ni $5 \in EF$ va $6 \in AC$ bo'lsa, chizmada $Z_5 > Z_6$ bo'lgani uchun 5 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. 5 nuqta H tekislikdan 6 nuqtaga nisbatan yuqorida joylashganligi aniqlanadi. Demak, H tekislikda EF tomonning $F'K'$ qismi kuzatuvchiga ko'rinadi, $E'K'$ ning bir qismi esa $\triangle ABC$ ostida qoladi. U holda $\triangle ABC$ ning AB tomoni $A'B'$ proyeksiyasi to'liq va BC tomoni $B'C'$ proyeksiyasining $B'L'$

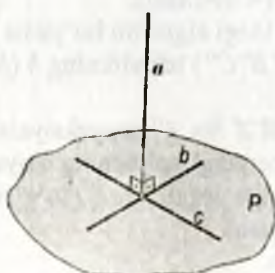
qismi ko'rinadi. $\triangle DEF$ ning ED tomoni $E'D'$ gorizontal proyeksiyasining bir qismi $\triangle ABC$ ning gorizontal $A'B'C'$ proyeksiyasi ostida qoladi.

Uchburchakning V tekislikka nisbatan ko'rinishligini aniqlash uchun BC va EF tomonlariga tegishli 2 va 7 konkurent nuqtalarining $2', 7'$ va $2'', 7''$ proyeksiyalaridan foydalanamiz. Agar $2 \in BC$ va $7 \in EF$ bo'lsa, chizmada $y_2 > y_7$ bo'lgani uchun 2 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun $2(2', 2'')$ nuqta tegishli BC tomonning $B''L''$ va EF tomonning $E''K''$ qismi ko'rinadi. Shuningdek, AC tomon $A''C''$ proyeksiyasining $l''3''$ qismi ko'rinmaydi. U holda uchburchak ED tomonining $E''D''$ proyeksiyasi to'liq ko'rinadi.

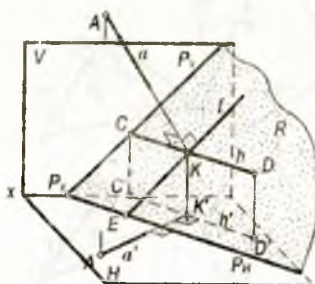
4.10-§. To'g'ri chiziqlarning tekislikka perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi ikki o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Bunda $b \in P$ va $c \in P$, $b \cap c$ hamda $a \perp b$ va $a \perp c$ bo'lsa, $a \perp P$ bo'ladi (4.46-rasm). Demak, tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo'ladi.



4.46-rasm.



a)



b)

4.47-rasm.

Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq tekislikning h gorizontali va f frontaliga perpendikulyar bo'lsin (4.47-a rasm).

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD=90^\circ$ bo'lib, $KD \parallel H$ bo'lgani uchun bu to'g'ri burchakning gorizontal proyeksiyasi $\angle A'K'D'=90^\circ$ bo'ladi. Demak, $A'K' \perp C'D'$ yoki $a' \perp h'$ bo'ladi.

P tekislik h gorizontalinining gorizontal proyeksiyasi $h' \parallel P_H$ bo'lgani uchun $a' \perp P_H$ bo'ladi. Shuningdek, $a'' \perp f''$ yoki $a'' \perp P_V$ bo'lishini isbotlash qiyin emas (4.47-a rasm). Demak, $a \perp P$ bo'lsa, $a' \perp h'$ va $a'' \perp f''$ yoki $a' \perp P_H$ va $a'' \perp P_V$ bo'ladi (4.47-b rasm).

Fazoda to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lishi uchun uning gorizontal proyeksiyasi tekislik gorizontalinining gorizontal proyeksiyasiga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va profil proyeksiyasi tekislik profilining profil proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lishi kerak.

Agar tekislik chizmada izlari bilan berilgan bo'lsa, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari tekislikning bir nomli izlariga mos ravishda perpendikulyar bo'ladi (4.48-rasm).

To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik shartidan foydalanib, ko'pgina metrik masalalarni yechish mumkin.

1-masala. $\triangle ABC$ bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o'tkazilsin (4.49-rasm).

Yechish. Masalani quyidagi algoritm bo'yicha yechamiz:

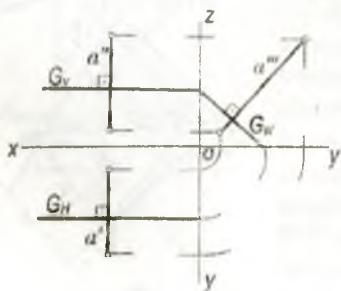
- $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) tekislikning h (h' , h'') gorizontali va f (f' , f'') frontali o'tkaziladi;

- tekislikning A nuqtasi A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A'E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalari yasaladi.

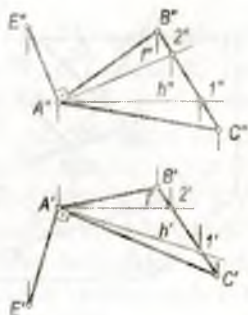
2-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazilsin (4.50-rasm).

Yechish. Buning uchun:

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l'$ va $h'' \parallel Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalinining proyeksiyalari o'tkaziladi;



4.48-rasm.



4.49-rasm.

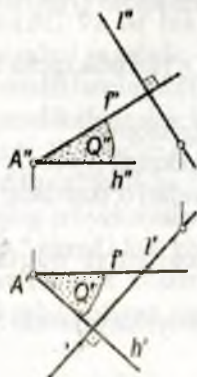
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f \parallel O_x$ va $f' \perp l''$ qilib tekislik frontalining proyeksiyalari o'tkaziladi;
- hosil bo'lgan $h \cap f$ ($h' \cap f \wedge h'' \cap f'$) kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo'lgani uchun bu tekislik l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

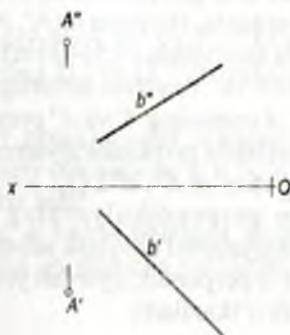
3-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali o'tuvchi va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislikning izlari qurilsin (4.51-rasm).

Yechish.

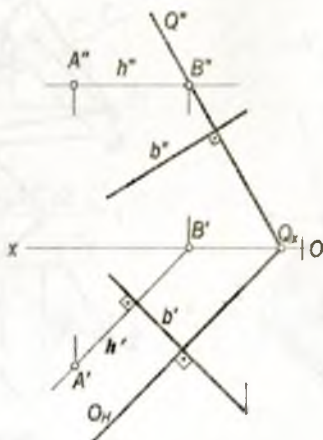
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \in A'$ va $h'' \perp b''$ va $h'' \in A''$ va $h'' \parallel O_x$ qilib tekislikning gorizontali o'tkaziladi (4.52-rasm);
- gorizontaning frontal izining B' va B'' proyeksiyalari yasalanadi;
- Q tekislikning Q_v frontal izi $Q_v \in B''$ va $Q_v \perp b''$, Q_H gorizontali izi esa Q_x dan $Q_H \in Q_x$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \parallel h'$) qilib o'tkaziladi.



4.50-rasm.



4.51-rasm.



4.52-rasm.

Natijada $Q_H \perp b'$ va $Q_V \perp b''$ bo'lgani uchun $Q \perp b$ bo'ladi. Bu masalani tekislikning frontal chizig'ini o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

4.10.1. Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagi yasash algoritmi bo'yicha aniqlanadi (4.53-rasm):

- A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o'tkaziladi: $a \in A$ va $a \perp Q$;
- bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan K nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$.

Buning uchun:

- a perpendikulyardan o'tuvchi yordamchi $S \in a$ tekislik o'tkaziladi;
- Q va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;
- a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig'i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi AK kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo'lgan izlangan masofa bo'ladi.

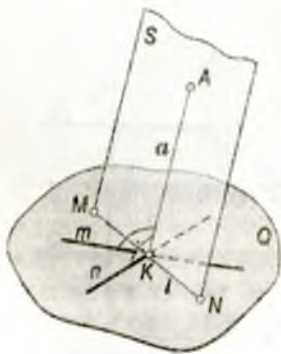
1-masala. Berilgan $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.54-rasm).

Yechish. Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

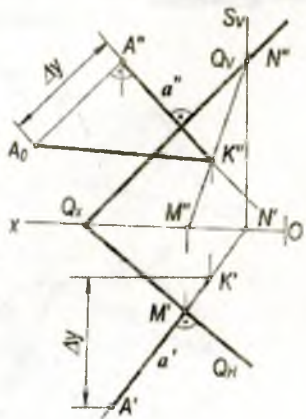
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_V izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o'tkaziladi: $a' \in A'$, $a' \perp Q_H$ va $a'' \in A''$, $a'' \perp Q_V$.

Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:

- ♦ a perpendikulyardan yordamchi gorizonttal proyeksiyalovchi $S(S_H, S_V)$ tekislik o'tkaziladi;



4.53-rasm.



4.54-rasm.

- Q va S tekisliklarning kesishish chizig'i $MN(M'N', M''N'')$ bilan $a(a', a'')$ perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalari aniqlanadi;
- chizmada hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Bu masofaning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ ning A_0K'' gipotenuzasi bo'ladi.

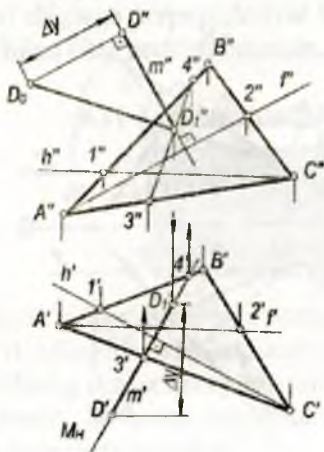
2-masala. $D(D', D'')$ nuqtadan ΔABC ($\Delta A'B'C', \Delta A''B''C''$) tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.55-rasm).

Yechish. Masala quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi:

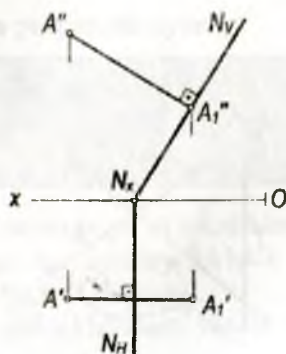
- ΔABC tekislikning gorizontal va frontal chiziqlari proyeksiyalari o'tkaziladi;
- D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \perp D', m' \perp h'$ va $m'' \perp D'', m'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi;
- perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalari aniqlanadi;
- m perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_{Hn}, M_V)$ tekislik o'tkaziladi;
- ΔABC va M tekisliklar kesishish chizig'ining $3'4'$ va $3''4''$ proyeksiyalari yasalani;
- tekisliklarning kesishish chizig'i proyeksiyalari $3'4'$ va $3''4''$ bilan m', m'' perpendikulyarning kesishish D_1 nuqtasining D_1' va D_1'' proyeksiyalari aniqlanadi: $D_1'' = m'' \cap 3''4''$ va $D_1' \in m'$.

Chizmada hosil bo'lgan $D'D_1'$ va $D''D_1''$ proyeksiyalar izlangan DD_1 masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Uning haqiqiy o'lchami to'g'ri bo'rchakli $\Delta D_0D'D_1''$ ning D_0D_1'' gipotenuzasidan iborat bo'ladi.

Agar tekislik xususiy vaziyatda berilsa, u holda berilgan nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash uchun qo'shimcha yasashlar talab



4.55-rasm.



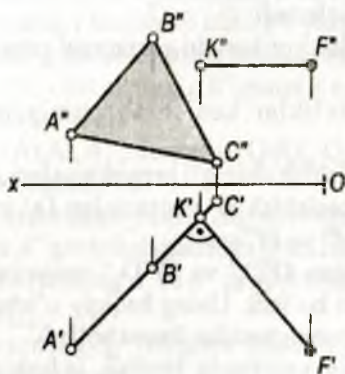
4.56-rasm.

qilinmaydi. Masalan, $A (A', A'')$ nuqtadan $N (N', N'')$ frontal proyeksiyalovchi tekislikkacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami (4.56-rasm) nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan tekislikning N'' frontal iziga tushirilgan perpendikulyarning $A''K''$ frontal proyeksiyasiga teng bo'ladi.

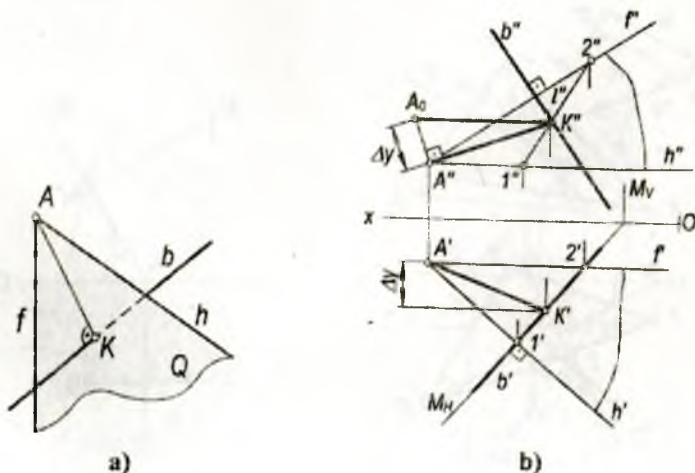
4.57-rasmda $F (F', F'')$ nuqtadan gorizontal proyeksiyalovchi $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C', \triangle A''B''C''$) tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlash tasvirlangan.

4.10.2. Nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani aniqlash. To'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o'lchanadi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa quyidagi tartibda aniqlanadi (4.58-a rasm):



4.57-rasm.



4.58-rasm.

• A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkaziladi: $Q \in A, Q \perp b$;

• berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish K nuqtasi aniqlanadi: $A_1 = b \cap Q$;

• A va K nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, hosil bo'lgan AK kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa bo'ladi.

Chizmada $A (A', A'')$ nuqtadan $b (b', b'')$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani aniqlash uchun (4.58-b rasm):

• A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar Q tekislik o'tkazish uchun bu tekislikning $h (h', h'')$ gorizontali va $f (f', f'')$ frontali $A (A', A'')$ nuqtadan $b (b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkaziladi, ya'ni $h' \in A', h' \perp b'$ va $h'' \in A'', h'' \parallel O_x$ hamda $f' \in A', f' \parallel O_x$ va $f'' \in A'', f'' \in b''$;

• berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlash uchun $b (b', b'')$ to'g'ri chiziqdan yordamchi gorizontaal proyeksiyalovchi $M (M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi. Q va M tekisliklarning kesishish chizig'i $12 = Q \cap M$ ning $1'2', 1''2''$ proyeksiyalari yasaladi;

• chizmada b to'g'ri chiziqning 12 chiziq bilan kesishgan K nuqtasining frontal proyeksiyasi $K'' = b'' \cap 1''2''$ bilan aniqlanadi. Uning K' gorizontaal proyeksiyasi esa b' chiziqqa tegishli bo'ladi;

• A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalari K nuqtaning K' va K'' proyeksiyalari bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ kesmalar A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha masofaning proyeksiyalari bo'ladi.

Chizmadagi A_0K'' kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami bo'lib, u to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ yasash yo'li bilan aniqlangan.

Shuningdek, bu turdagi misolni $A (A', A'')$ nuqtadan o'tuvchi $b (b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan Q tekislikni izlari orqali o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

4.11-§. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi

Ta'rif. Tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi barcha tekisliklar berilgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Bu ta'rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya'ni tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi (4.59-rasm).

Demak, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

1. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqdan tekislik o'tkazish usuli.
2. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazish usuli.

Tekislikning ikki tekislikka perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo'lgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda bu tekislik har ikkala tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Ma'lumki, Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan to'g'ri chiziq ularning l kesishish chizig'i bo'ladi. Tekisliklarning l kesishish chizig'i da ixtiyoriy B nuqta tanlab olamiz (4.60-rasm). Bu nuqtadan l ga perpendikulyar qilib a va b chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar T tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan Q va P tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi.

Demak, berilgan T tekislikka perpendikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo'ladi.

1-masala. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazilsin (4.61-rasm).

Yechish.

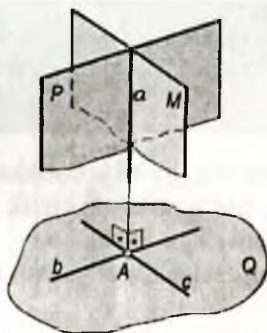
- P tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy a to'g'ri chiziq o'tkaziladi;
- bu to'g'ri chiziqning a_H', a_H'' va a_V', a_V'' izlarining proyeksiyalari yasiladi;
- izlangan Q tekislikning gorizontali Q_H izi $Q_H \in a_H'$ va $Q_H \in Q_x$ qilib, uning frontal Q_V izi $Q_V \in a_V''$ va $Q_V \in Q_x$ qilib o'tkaziladi.

Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: Q tekislikka perpendikulyar va P_x dan o'tuvchi tekislikni o'tkazish uchun (4.62-rasm) Q tekislikda ixtiyoriy $m \in Q$ to'g'ri chiziq olamiz. P tekislikning izlari P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o'tkaziladi. Natijada $P \perp Q$ bo'ladi.

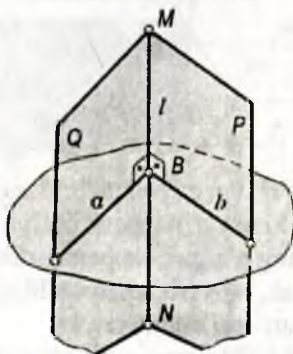
2-masala. Kesishuvchi $a \cap b (a' \cap b', a'' \cap b'')$ chiziqlar bilan berilgan tekislikka $d (d', d'')$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi perpendikulyar tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.63-rasm).

Yechish.

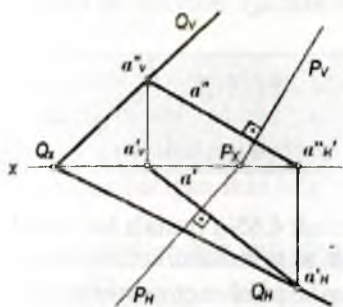
- berilgan tekislik gorizontali va frontalining h', h'' va f', f'' chiziqlari o'tkaziladi;



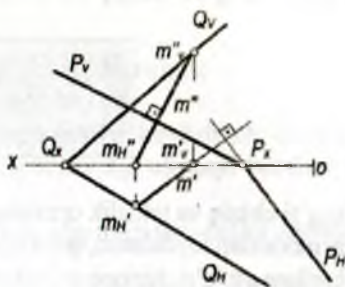
4.59-rasm.



4.60-rasm.



4.61-rasm.



4.62-rasm.

• d to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtasidan $n(n', n'')$ to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari $n' \perp h'$ va $n'' \perp p''$ qilib o'tkaziladi. Hosil bo'lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar hosil qilgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo'ladi.

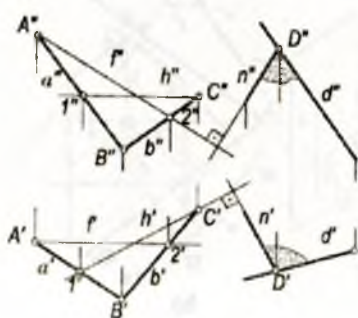
3-masala. $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan $T(T_H, T_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.64-rasm).

Yechish.

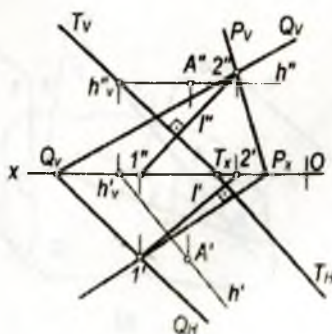
- Q va P tekisliklar kesishish chizig'ining l', l'' proyeksiyalari yasiladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib o'tkaziladi: $h' \perp l'$ va $h' \in A'$ hamda $h'' \parallel Ox$, $h'' \in A''$ va uning izlarining h'_v, h'_v'' proyeksiyalari yasiladi;

- izlangan tekislikning frontal izi $T_V \in h''$, $T_V \perp l''$ $T_H \in T_V$, $T_H \perp l'$ qilib o'tkaziladi.

Natijada berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchinchi tekislik yasiladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



4.63-rasm.



4.64-rasm.

4.12-§. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlash

Ta'rif. To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchak shu to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deyiladi.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak 4.65-a rasmda ko'rsatilgan. Bu fazoviy modeldan foydalanib, quyidagi yasash algoritmlarini keltirish mumkin:

- berilgan a to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi aniqlanadi: $L = a \cap Q$;
- to'g'ri chiziqda ixtiyoriy B nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan berilgan Q tekislikka n perpendikulyarni tushirib, uning Q tekislik bilan kesishuv nuqtasi aniqlanadi: $B' = n \cap Q$;

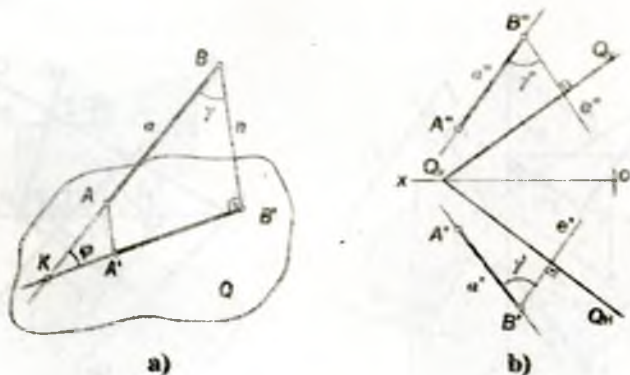
- so'ngra L va B nuqtalarni o'zaro tutashtirish natijasida hosil bo'lgan burchak a to'g'ri chiziq va Q tekislik orasidagi φ burchak bo'ladi.

Chizmada to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqlash uchun yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligi va kesishishi qoidalaridan foydalanib bajariladi. Bunda φ burchak a to'g'ri chiziqning ixtiyoriy B nuqtasidan Q tekislikka tushirilgan perpendikulyar orasidagi γ burchak orqali aniqlanadi (4.65-a, b rasm). $\varphi + \gamma = 90^\circ$ bo'lgani uchun $\varphi = 90^\circ - \gamma$ bo'ladi.

Masala. $Q(b \cap c)$ tekislik va a to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak aniqlansin (4.66-rasm).

Yechish.

- tekislikning $h(H', H'')$ gorizontali va $f(F', F'')$ frontali o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqtasidan tekislikning gorizontali va frontaliga $e(e', e'')$ perpendikulyar o'tkaziladi. Bunda $e' \in A'$, $e' \perp H'$ va $e'' \in A''$, $e'' \perp F'$ bo'ladi;



4.65-rasm.

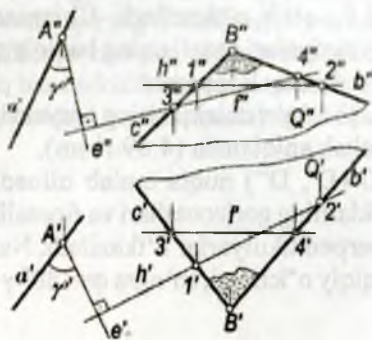
• a va e to'g'ri chiziqlar orasidagi γ (γ' , γ'') burchak belgilanadi. Natijada $\varphi = 90^\circ - \gamma$ aniqlanadi.

4.13-§. Ikki tekislik orasidagi burchak

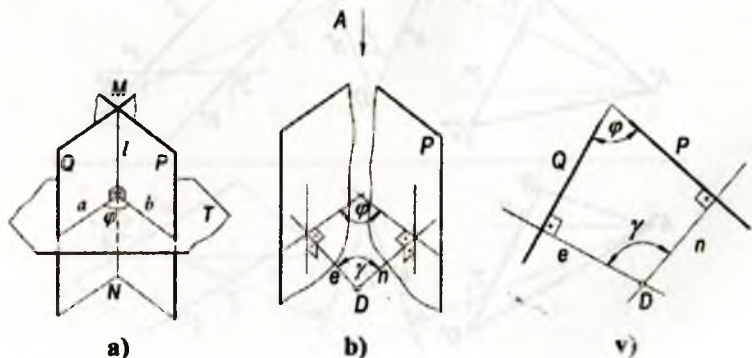
Ikki tekislik orasidagi burchak ularning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi.

Bu chiziqli burchak quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlanadi (4.67-a rasm):

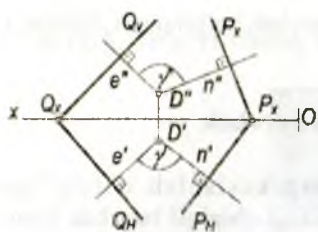
- P va Q tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;
- tekisliklarning l kesishish chizig'iga tegishli ixtiyoriy $A \in l$ nuqtadan perpendikulyar qilib T tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik Q va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi;



4.66-rasm.



4.67-rasm.



4.68-rasm.

• T tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish a va b chiziqlari yasaladi: $a=Q \cap T$ va $b=P \cap T$;

• tekisliklarning kesishish chiziqlari orasidagi $\alpha \wedge b = \varphi$ izlangan burchak bo'ladi.

P va Q tekisliklar orasidagi burchakni quyidagicha aniqlash ham mumkin (4.67, b-rasm):

Fazoning ixtiyoriy D nuqtasidan berilgan Q va P tekisliklarga e va n perpendikulyarlar tushirib, bu perpendikulyarlar orasidagi γ burchak orqali φ burchakning qiymati $\varphi = 180^\circ - \gamma$

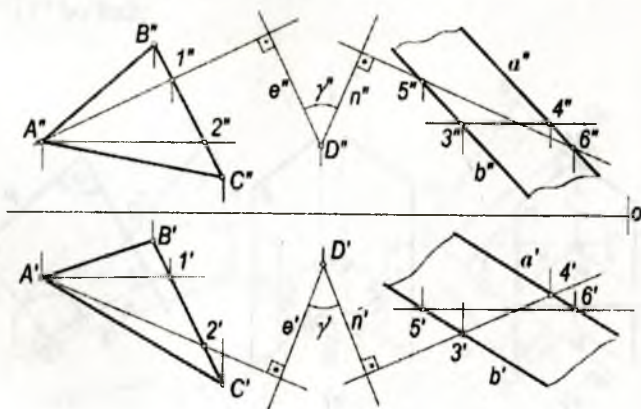
γ formula orqali aniqlanadi.

1-masala. $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklar orasidagi burchak aniqlansin (4.68-rasm).

Yechish. Ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtani tanlab olamiz va uning D', D'' proyeksiyalaridan e va n perpendikulyarlarning proyeksiyalari $e' \perp Q_H \wedge e'' \perp Q_V$ va $n' \perp P_H \wedge n'' \perp P_V$ qilib o'tkaziladi. Chizmada hosil bo'lgan γ burchakning γ' va γ'' proyeksiyalari orqali uning haqiqiy qiymatini aniqlab, φ burchakni $\varphi = 180^\circ - \gamma$ formula orqali topamiz.

2-masala. $\triangle ABC$ va $a \parallel b$ to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchak aniqlansin (4.69-rasm).

Yechish. Ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqta tanlab olinadi. Uning D' va D'' proyeksiyalaridan tekisliklarning gorizontallari va frontallariga $e' \perp h_1''$, $e'' \perp f_1''$ va $n' \perp h_2''$, $n'' \perp f_2''$ qilib perpendikulyarlar o'tkaziladi. Natijada hosil bo'lgan $\gamma(\gamma', \gamma'')$ burchakning haqiqiy o'lchami, so'ngra $\varphi = 180^\circ - \gamma$ burchak aniqlanadi.



4.69-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekislik chizmada qanday berilishi mumkin?
2. Tekislikning izi deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tekisliklar proyeksiyalovchi deyiladi?
4. Gorizontal va gorizontal proyeksiyalovchi hamda frontal va frontal proyeksiyalovchi tekisliklarning farqi nimada?
5. Qanday chiziqlar tekislikning bosh chiziqlari deyiladi?
6. Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari yordamida qanday burchaklarni aniqlanish mumkin?
7. Ikki tekislikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi qanday?
8. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
9. Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq qanday ketma-ketlikda o'tkaziladi?
10. Tekis chizmada berilgan ikki tekislikning o'zaro parallelligi qanday tekshiriladi?
11. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo'ladi?
12. Qanday tekisliklar o'zaro perpendikulyar deyiladi?
13. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?
14. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?



V BOB. ORTOGONAL PROYEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI

5.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bog'liq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi (5.1-a, b rasm).

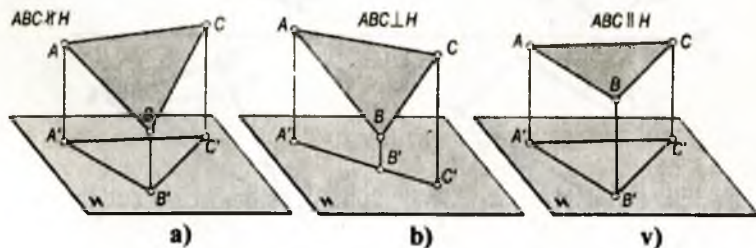
Agar geometrik shaklning proyeksiyasi asliga teng bo'lib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarini, masalan, $\triangle ABC$ tomonlarining haqiqiy o'lchamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarini aniqlash mumkin (5.1-v rasm).

Demak, shunday xulosaga kelish mumkinki, agar geometrik shakl proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan fazoda xususiy vaziyatda berilsa yoki umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakl xususiy vaziyatga keltirilsa, bu bilan metrik va pozitsion masalalarni yechish mumkin. Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatga keltirilgan proyeksiyalari tuziladi.

Geometrik shaklning berilgan ortogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash **ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish** deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan uch usulda bajariladi:

1. Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shaklni fazoda harakatlantirib, proyeksiyalar tekisligiga nisbatan xususiy vaziyatga keltirish *tekis-parallel harakatlantirish usuli* deyiladi.



5.1-rasm.

2. *Aylantirish usuli*. Bunda proyeksiyalar tekisliklari o'z holatlarini o'zgartirmaydi. Proyeksiyalanuvchi shakl ularga qulay holga kelguncha biror o'q atrofida aylantiriladi.

3. Geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgartirilmasdan proyeksiyalar tekisliklari sistemasini unga nisbatan xususiy vaziyatga kelguncha yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtirish *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli* deyiladi.

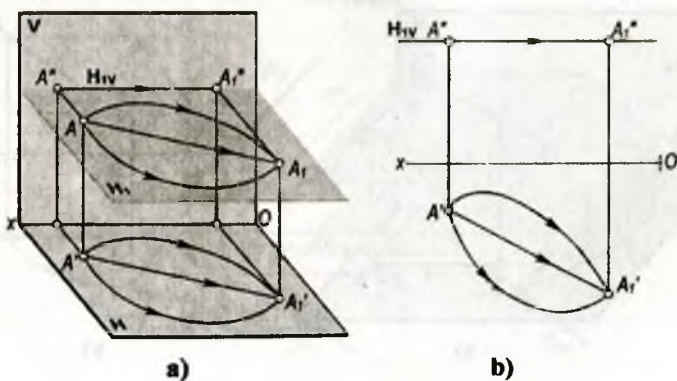
Quyida bu usullarni alohida ko'rib chiqamiz.

5.2-§. Tekis-parallel harakatlantirish usuli

Tekis-parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklning proyeksiyalar tekisliklari sistemasiga nisbatan vaziyatini maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirish uchun uning barcha nuqtalarining harakatlanish trayektoriyalari bir-biriga parallel tekisliklarda harakatlantirish yo'li bilan bajariladi.

Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari harakatlanish trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis-parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish usullariga* bo'linadi.

Parallel harakatlantirish usuli. Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan gorizontal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi. Shuning natijasida hosil bo'lgan yangi proyeksiyasining proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o'zgaradi. 5.2-a, b rasmda A nuqta H_1 gorizontal tekislikda harakatlantirilib, A_1 vaziyatga keltirilgan. Bunda A nuqta A_1 vaziyatga qanday trayektoriya (to'g'ri yoki egri chiziqlar) bo'ylab harakatlantirilishidan qat'i nazar, uning A'' frontal proyeksiyasi (A_1'' vaziyatga) tekislikning H_{1V} izi bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek, 5.3-a, b rasmdagi B nuqta V_1 frontal tekislikda B_1 vaziyatga har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilmasin, uning B' proyeksiyasi V_{1H} izi bo'yicha harakatlanib, B'_1 vaziyatni egallaydi.



5.2-rasm.

Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

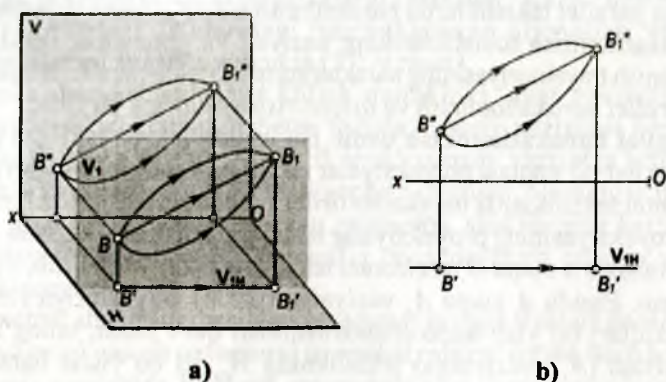
- Fazoda nuqtani gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

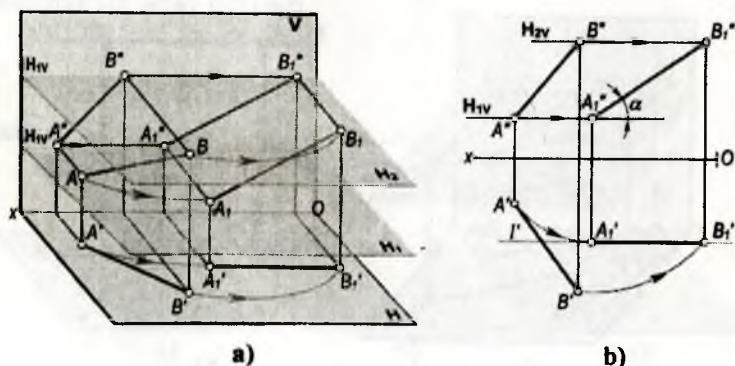
Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanib, ayrim masalalarning yechilishini ko'rib chiqamiz.

1-masala. Umumiy vaziyatda berilgan AB kesma V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.4-a, b rasm).

Yechish. $AB \parallel V$ bo'lishi uchun chizmada $A'B' \parallel Ox$ bo'lishi kerak. Demak, bu masalani yechish uchun H tekislikda (5.4-a rasm) ixtiyoriy A_1 nuqta tanlab,



5.3-rasm.



5.4-rasm.

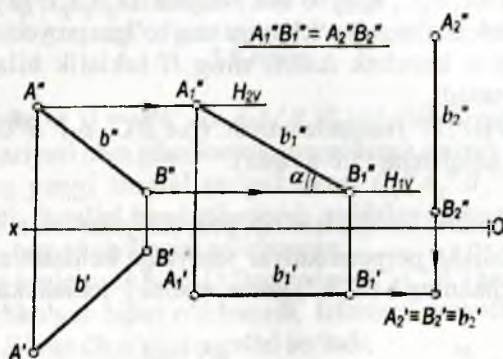
u orqali Ox o'qiga parallel l' to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_1'B_1'=A'B'$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesmaning A'' va B'' proyeksiyalari mos ravishda H_{1V} va H_{2V} bo'yicha Ox o'qiga parallel ravishda harakatlanadi va A_1'', B_1'' vaziyatlarga keladi. Natijada V tekislikka parallel A_1B_1 ($A_1'B_1', A_1''B_1''$) to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo'ladi.

Shuningdek, AB kesma V tekislikka parallel bo'lishi bilan birga uning haqiqiy o'lchami va H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlanadi.

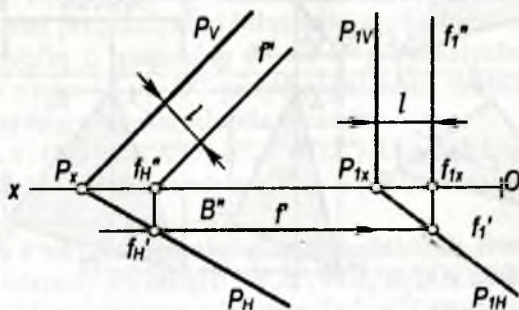
2-masala. Umumiy vaziyatdagi AB ($A'B', A''B''$) kesma H tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.5-rasm).

Yechish. Dastlab AB kesmani harakatlantirib, V tekislikka parallel A_1B_1 ($A_1'B_1', A_1''B_1''$) vaziyatga keltiramiz. So'ngra ixtiyoriy B_2'' nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan $b_2'' \perp Ox$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz hamda unga $A_2''B_2''=A_1''B_1''$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning gorizontaal proyeksiyasi b_1' chiziq bo'yicha harakatlanib, $A_2'=B_2'=b_2'$ bo'lib proyeksiyalanadi.

3-masala. Umumiy vaziyatda berilgan P (P_H, P_V) tekislik H tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.6-rasm).



5.5-rasm.



5.6-rasm.

Yechish. P tekislikning ixtiyoriy $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi. So'ngra Ox o'qida ixtiyoriy nuqtadan $f_1'' \perp Ox$ qilib va chizmada ko'rsatilgan l masofada tekislikning frontal izini $P_{11} \perp Ox$ (yoki $P_{11} \parallel f_1''$) qilib o'tkazamiz. Tekislikning P_{11} gorizontali izi P_{1x} va P_1 nuqtalardan o'tadi.

4-masala. Umumiy vaziyatdagi $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) tekislik H tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.7-rasm).

Yechish.

- $\triangle ABC$ ni avval V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning $h(h', h'')$ gorizontali ni o'tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy A' , nuqta tanlab, bu nuqtadan $h'_1 \perp Ox$ qilib $\triangle A'_1 B'_1 C'_1 = \triangle A' B' C'$ yangi gorizontali proyeksiyasini yasaymiz;

- $\triangle ABC$ ning yangi vaziyati V tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun uning yangi frontal proyeksiyasi $C_1'' A_1'' B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi;

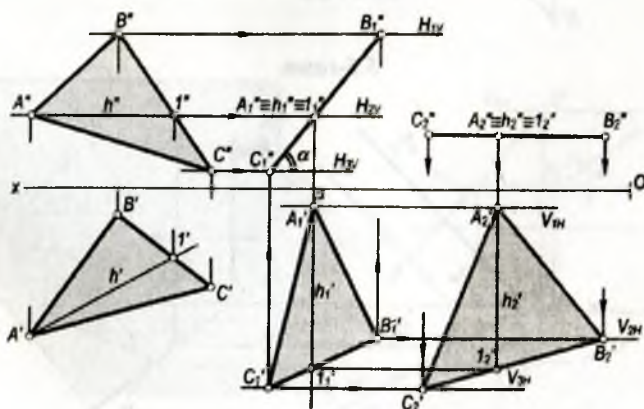
- ixtiyoriy C_2'' nuqta tanlab, bu nuqtadan Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $C_2'' A_2'' B_2'' = C_1'' A_1'' B_1''$ bo'lgan kesmani o'lchab qo'yamiz. Parallel harakatlantirish qoidasiga muvofiq uchburchak gorizontali proyeksiyasining $A_2' B_2'$ va C_2' nuqtalari mos ravishda V_{1H} , V_{2H} va V_{3H} frontal tekisliklarning izlari bo'yicha harakatlantirishidan $\triangle A_2' B_2' C_2'$ hosil bo'ladi. Natijada $\triangle A_2' B_2' C_2'$ H ga parallel bo'ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgan proyeksiyasi hosil bo'ladi.

Chizmadagi α burchak $\triangle ABC$ ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko'rsatadi.

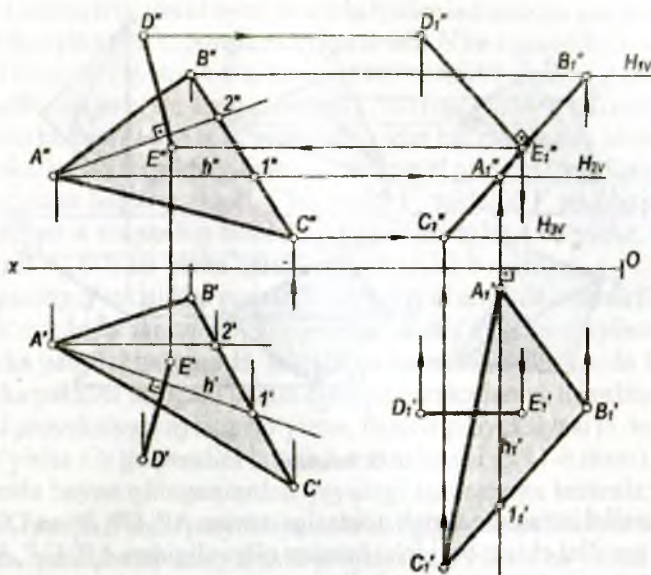
4-masala. $D(D', D'')$ nuqtadan $\triangle ABC$ ($\triangle A' B' C'$, $\triangle A'' B'' C''$) tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.8-a rasm).

Yechish.

- $\triangle ABC$ ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan, V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakning $h(h', h'')$ gorizontali ni V tekislikka perpendikulyar



5.7-rasm.



5.8-rasm.

vaziyatga keltirib, $A_1'1_1'=A'1'$ va $\Delta A_1'B_1'S_1'=\Delta A'B'S'$ qilib yasaladi. D' nuqtaning D_1' vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirish qoidalariga asosan D nuqtaning yangi D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlaymiz;

- masofaning haqiqiy o'lchami D_1'' nuqtadan $C_1''A_1''B_1''$ kesmaga tushirilgan $D_1''E_1''$ perpendikulyar bilan o'lchanadi. Izlangan masofaning gorizontaal proyeksiyasi $D_1'E_1'$ esa Ox o'qiga parallel bo'ladi;

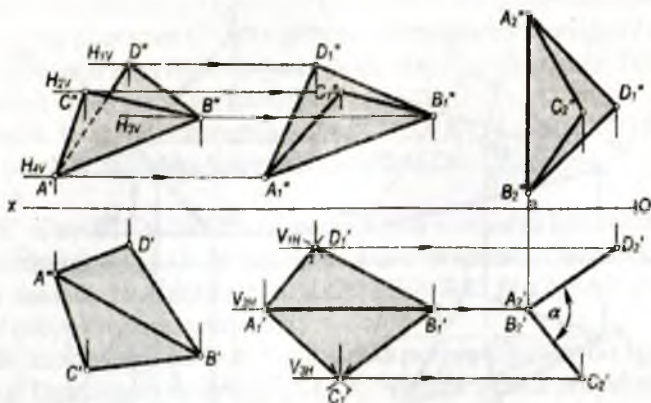
- izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan tekislikning h (h' , h'') gorizontali va f (f' , f'') frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirish qoidasiga muvofiq E nuqtaning E' va E'' proyeksiyalarini ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha D' va D'' proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

5-masala. $CABD$ ($C'A'B'D'$, $C''A''B''D''$) ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (5.9-rasm).

Yechish.

- AB qirra V tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida $A'B'=A_1'B_1'$ va $A_1'B_1' \parallel Ox$ qilib joylashtiriladi;

- A_1' va B_1' nuqtalarga nisbatan D_1' , C_1' nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan A_1' , C_1' , B_1' va D_1' nuqtalar yangi gorizontaal proyeksiya bo'ladi;



5.9-rasm.

- parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A'' , C'' , B'' va D'' nuqtalar Ox o'qiga parallel chiziq bo'yicha harakat qilganligidan A_1'' , C_1'' , B_1'' va D_1'' yangi frontal proyeksiyalari yasiladi;
- AB qirra H tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun $A_1''B_1''=A_2''B_2''$ ni chizmaning ixtiyoriy joyida $A_2''B_2'' \perp Ox$ qilib joylashtiramiz. $A_2''B_2''$ yangi frontal proyeksiya bo'ladi;
- C_2'' va D_2'' nuqtalar esa A_2'' va B_2'' nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasiladi;
- parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A'_1 , C'_1 , B'_1 va D'_1 nuqtalar Ox ga parallel harakat qilib, $A''_2 \equiv B''_2$, C'_2 va D'_2 nuqtalarning yangi gorizontal proyeksiyalarini hosil qiladi;
- bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, $\angle D'_2A'_2C'_2 = \alpha$ chiziqli burchak AB qirradagi ikkiyoqli burchakni o'lchaydi. Bu masalani AB qirrani H ga parallel qilib olish bilan ham yechish mumkin.

5.3-§. Aylantirish usuli

Aylantirish usuli parallel harakatlantirish usulining xususiy holi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqtaning trayektoriyasi ixtiyoriy bo'lmay, balki berilgan biror o'qqa nisbatan aylana bo'yicha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o'qda joylashgan bo'lib, aylanish radiusi esa harakatlanuvchi nuqta bilan aylanish o'qi orasidagi masofaga teng yoki aylanish tekisligining aylanish o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi.

Aylanish o'qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar-tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

Quyida turli vaziyatlarda joylashgan aylanish o'qlari atrofida aylantirish usullarini ko'rib chiqamiz.

5.3.1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish. H va V tekisliklar sistemasida ixtiyoriy A nuqta va i aylanish o'qi berilgan bo'lsin (5.10-a rasm). Agar A nuqtani $i \perp V$ aylanish o'qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta V tekislikka parallel V_1 tekislikda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek, A nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi V_1 tekislikning V_{1H} izi bo'yicha harakat qiladi. Chizmada V_1 tekislik V tekislikka parallel bo'lgani uchun A nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi $V_{1H} \parallel Ox$ bo'yicha harakat qiladi (5.10-b rasm).

B nuqtaning H tekislikka perpendikulyar i o'qi atrofida aylantirilishi 5.11-a rasmda ko'rsatilgan. B nuqta B_1 vaziyatda radiusi OB ga teng aylana bo'yicha H tekislikka parallel bo'lgan H_1 tekislikda harakatlanadi. Bunda H_1 tekislik H tekislikka parallel bo'lgani uchun B nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi H_1 tekislikning H_{1H} izi bo'yicha Ox ga parallel bo'lib harakatlanadi (5.11-b rasm).

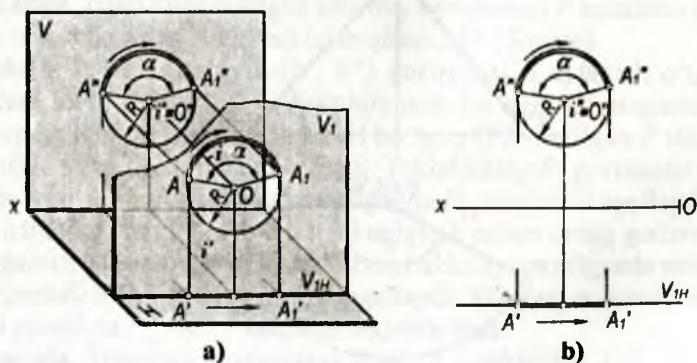
Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelimiz:

- Agar A nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

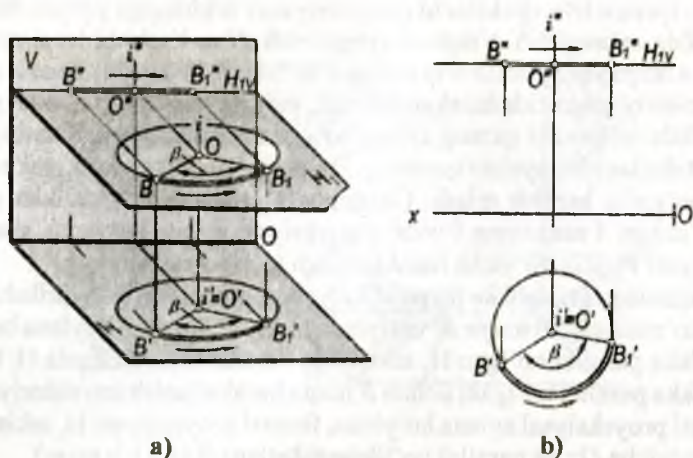
- Agar nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki talab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

1-masala. Umumiy vaziyatdagi AB ($A'B'$, $A''B''$) kesma V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.12-rasm).



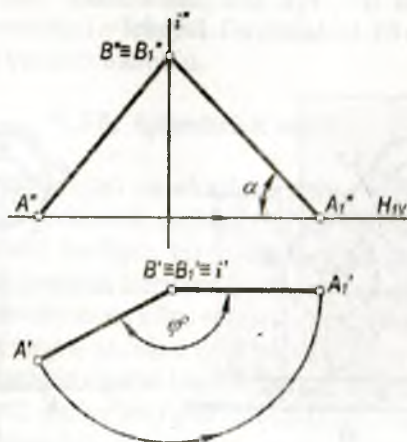
5.10-rasm.



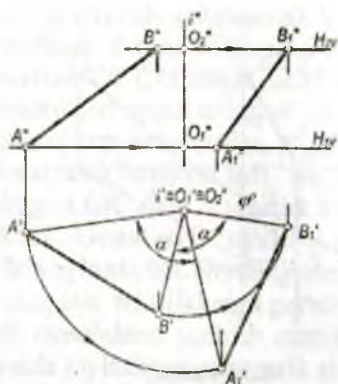
5.11-rasm.

Yechish. AB kesmaning biror, masalan, B uchidan $i \perp H$ aylantrish o'qi o'tkaziladi. So'ngra bu o'q atrofida kesmaning $A'B'$ gorizontaal proyeksiyasini $A'B' \parallel Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda AB kesmaning A'' nuqtasi $H_{11} \parallel Ox$ bo'yicha harakatlanib, A'' vaziyatni egallaydi. Shaklda hosil bo'lgan AB kesmaning yangi $A'B'$ va $A''B''$ proyeksiyalari uning V tekislikka parallelligini ko'rsatadi. Shakldagi α burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.

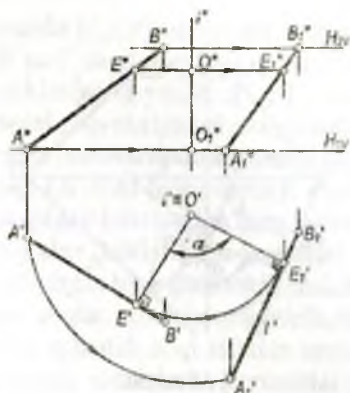
2-masala. AB ($A'B'$, $A''B''$) kesmani $i \perp H$ o'q atrofida α burchakka aylantirish talab qilinsin (5.13-rasm).



5.12-rasm.



5.13-rasm.



5.14-rasm.

Yechish. Kesmani α burchakka aylantirish uchun uning A' va B' proyeksiyalarini berilgan i o'qi atrofida $A'O'_1$ va $B'O'_2$ radiuslari bo'yicha α burchakka aylantirish kifoya qiladi.

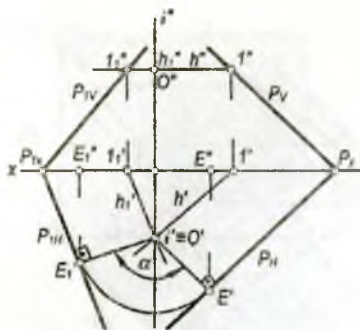
Aylantirish usulining qoidasiga muvofiq kesma uchlarining A'' va B'' proyeksiyalari $H_{11} \parallel O_x$ va $H_{21} \parallel O_x$ bo'yicha harakatlanadi. Natijada hosil bo'lgan $A_1B_1(A'_1B'_1, A''_1B''_1)$ kesma AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyati bo'ladi. Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: AB kesmaning $A'B'$ gorizontall proyeksiyasiga i aylanish o'qining gorizontall proyeksiyasi i' dan perpendikulyar o'tkaziladi (5.14-rasm). Hosil bo'lgan $E'O'$ aylantirish radiusi talab qilingan α burchakka aylantiriladi va $E'_1O'_1$ ga perpendikulyar qilib i'' chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqqa shakldagi $A'E'=A'_1E'_1$ va $E'B'=E'_1B'_1$ kesmalar o'lchab qo'yiladi. So'ngra $A'_1B'_1$ ning frontal proyeksiyasi $A''_1B''_1$ yasaladi. Natijada AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyatining yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari hosil bo'ladi.

3-masala. Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi P tekislikni $i \perp H$ o'qi atrofida α burchakka aylantirilish talab qilinsin (5.15-rasm).

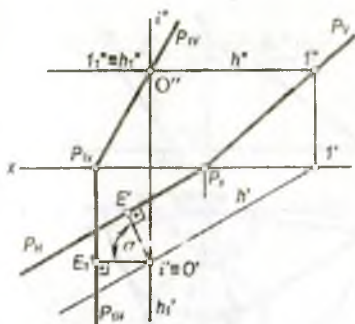
Yechish. P tekislikning h (h' , h'') gorizontali i aylanish o'qi orqali o'tkaziladi va $h \cap i = O$ (O' , O'') aniqlanadi. So'ngra O' nuqtadan P_H ga $O'E'$ perpendikulyar tushiriladi. Hosil bo'lgan $O'E'$ berilgan P tekislikni i o'q atrofida aylantirish radiusi bo'ladi. Tekislikning P_H gorizontall izi $O'E'$ radius bo'yicha α burchakka aylantirilganda P_{H1} vaziyatni egallaydi.

Tekislikning yangi P_{11} frontal izini aniqlash uchun uning gorizontallidan foydalanamiz. Ma'lumki, P tekislik α burchakka aylantirilganda uning h (h' , h'') gorizontali h_1 (h'_1 , h''_1) vaziyatni egallaydi. Shuning uchun tekislikning P_{11} izini yasashda P_{1x} va l_{11} nuqtalar tutashtiriladi.

4-masala. Umumiy vaziyatdagi P (P_H, P_V) tekislikni i (i' , i'') $\perp H$ o'q atrofida aylantirib, frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.16-rasm).



5.15-rasm.

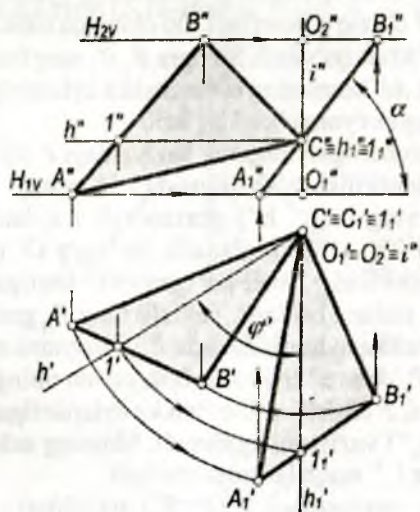


5.16-rasm.

Yechish. P tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali $i(i', i'')$ o'qi orqali o'tkaziladi va gorizontaling i' o'qi bilan kesishish nuqtasi $O(O', O'')$ topiladi. Tekislik bilan uning $h(h', h'')$ gorizontali O' atrofida aylantirilib, proyeksiyalovchi, ya'ni $h_1 \perp O'x$ vaziyatga keltiriladi. Gorizontaling h'' frontal proyeksiyasi esa $h_1' \equiv l_1''$ vaziyatda bo'ladi. Tekislikning yangi P_{1V} frontal izi P_{1X} va l_1'' nuqtalardan o'tadi.

5-masala. $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlansin (5.17-rasm).

Yechish. Izlangan α burchakni aniqlash uchun berilgan $\triangle ABC$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo'ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan, C nuqtasidan $i' \perp H$ aylanish o'qi o'tkaziladi



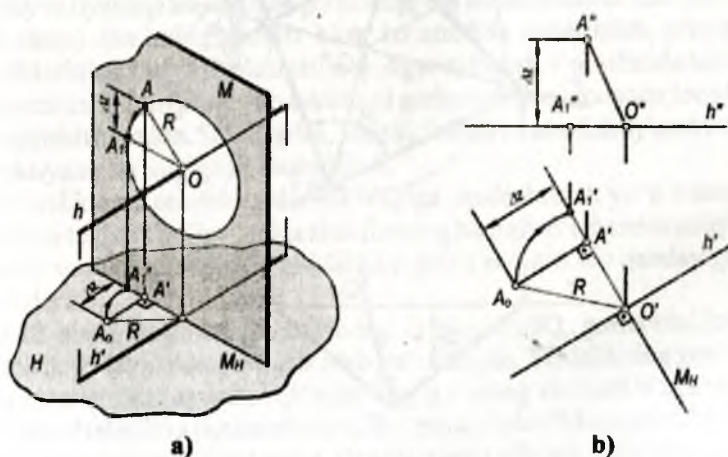
5.17-rasm.

va bu o'q atrofida uchburchak $h_1 \perp V$ (epyurda $h'_1 \perp V$) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda uchburchakning A , B va C nuqtalari ham φ burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarining yangi A'_1 , B'_1 va C'_1 proyeksiyalari orqali uning A'' , B'' , C'' frontal proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, A'' , B'' , C'' kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil bo'ladi. Bu kesmaning Ox o'qi bilan tashkil etgan α burchagi $\triangle ABC$ ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagiga teng bo'ladi.

5.3.2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish. Umumiy vaziyatda joylashgan tekis geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisliklariga parallel bo'lgan o'qlar atrofida aylantirib, ba'zi metrik masalalarni yechish mumkin. Bunda aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shaklning asosiy chiziqlari – gorizontali yoki frontallaridan foydalaniladi. Geometrik shaklni uning gorizontali atrofida aylantirib, H tekislikka parallel vaziyatga, shuningdek, uni frontali atrofida aylantirib, V tekislikka parallel vaziyatga keltirish mumkin.

Geometrik shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirilganda uning har bir nuqtasi aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda aylana bo'ylab harakatlanadi. Masalan, A nuqta h gorizontali atrofida aylantirilganda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha M tekislikda harakatlanadi (5.18-a rasm). Bunda uning gorizontali proyeksiyasi gorizontaling h' gorizontali proyeksiyasiga perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Chizmada tasvirlangan A (A' , A'') nuqtani A_1 (A'_1 , A''_1) vaziyatga kelguncha aylantirish uchun aylanish markazi O (O' , O'') nuqtani aniqlash kerak (5.18-b rasm). Bu nuqta aylanish o'qi h ning M tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Chizmada aylantirish radiusi R ning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun H tekislikda to'g'ri burchakli $\triangle OA'A_0$ yasaymiz. Buning uchun AO radiusning $A'O'$ gorizontali proyeksiyasini to'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti,



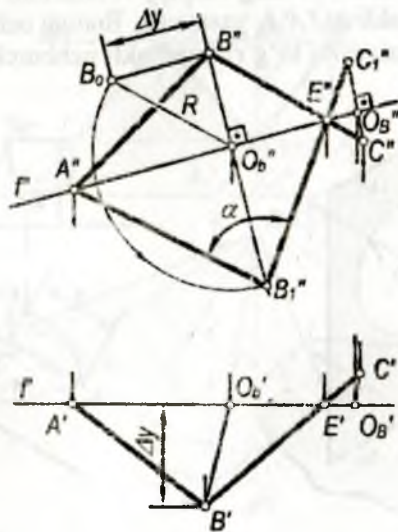
5.18-rasm.

OA kesma uchlari applikatalarining Δz ayirmasini ikkinchi kateti qilib olamiz. Bu uchburchakning gipotenuzasi izlangan aylantirish radiusi R bo'ladi. A nuqtaning aylantirilgandan keyingi yangi vaziyatining A_1' gorizontal proyeksiyasi aylantirish markazi O' nuqtada bo'lgan va $O'A_0=R$ radiusli aylana yoyining $M(M_H)$ tekislikning izi bilan kesishgan A_1' nuqtasi bo'ladi. A nuqtaning yangi A_1'' frontal proyeksiyasi esa h'' to'g'ri chiziqda bo'ladi.

1-masala. Umumiy vaziyatdagi $\angle ABC$ ($\angle A'B'C'$, $\angle A''B''C''$) ning haqiqiy o'lchami aniqlansin (5.19-rasm).

Yechish. Berilgan burchakning gorizontali yoki frontalidan foydalaniladi. Mazkur burchakning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun chizmada uning f (f' , f'') frontali o'tkazilgan. Rasmda hosil bo'lgan $\angle ABE$ ($\angle A'B'E'$, $\angle A''B''E''$) ning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun B nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash kifoya. Buning uchun B'' nuqtadan f'' ga perpendikulyar o'tkaziladi va aylantirish markazining O_B (O'_B , O''_B), so'ngra aylantirish radiusining BO_B ($B'O'_B$, $B''O''_B$) proyeksiyalari aniqlanadi. To'g'ri burchakli $\triangle O''_B B'' B''_0$ yasash bilan radiusning haqiqiy o'lchami $O''_B B''_0 = R$ aniqlanadi. B nuqtaning yangi vaziyatini yasash uchun O''_B dan R radius bilan $O''_B B''_0$ perpendikulyarning davomi bilan kesishguncha yoy o'tkaziladi va hosil bo'lgan B''_1 bilan A'' va E'' nuqtalar tutashtiriladi. Chizmada hosil bo'lgan α berilgan burchakning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

2-masala. Umumiy vaziyatdagi $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) ning haqiqiy o'lchami aniqlansin (5.20-a, b, v rasm).



5.19-rasm.

Yechish. Uchburchak gorizontali h (h' , h'') o'tkaziladi. $\triangle ABC$ ning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun uning B (B' , B'') va C (C' , C'') uchlari aylantirish radiuslarining haqiqiy o'lchamlari aniqlanadi.

Chizmada B nuqtaning aylantirish radiusini aniqlash uchun uning $O'B'$ va $O'B''$ proyeksiyalaridan foydalanib, to'g'ri burchakli $\triangle O'B'B''$ ni yasaymiz. Bu uchburchakning $O'B''$ gipotenuzasi B nuqtaning aylantirish radiusi bo'ladi. B nuqtaning yangi vaziyati aylantirish markazining gorizontaal proyeksiyasi O' dan radiusi $O'B''$ ga teng qilib o'tkazilgan yoyning harakat tekisligining $M_{H''}$ izi bilan kesishgan B'' nuqtasi bo'ladi.

Uchburchakning C va D nuqtalari aylanish o'qiga tegishli bo'lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o'zgarmaydi. Uchburchak A nuqtasi aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini ham B nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini topish kabi aniqlash mumkin. Ammo uchburchakning A nuqtasi h o'qi atrofida B nuqta kabi harakatlanganda N ($N_{H''}$) tekislikka va uchburchakning AB tomoniga tegishli bo'lib qoladi. Uchburchakning AB tomoni esa qo'zg'almas D nuqtadan o'tadi. Shuning uchun chizmada A nuqtaning yangi vaziyatini aniqlash uchun B_0 va D' nuqtalar o'zaro tutashtiriladi va A' nuqtadan $C'D'$ ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettirilib, A_0 nuqta topiladi. Agar A_0 , B_0 va C' nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, uchburchakning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi.

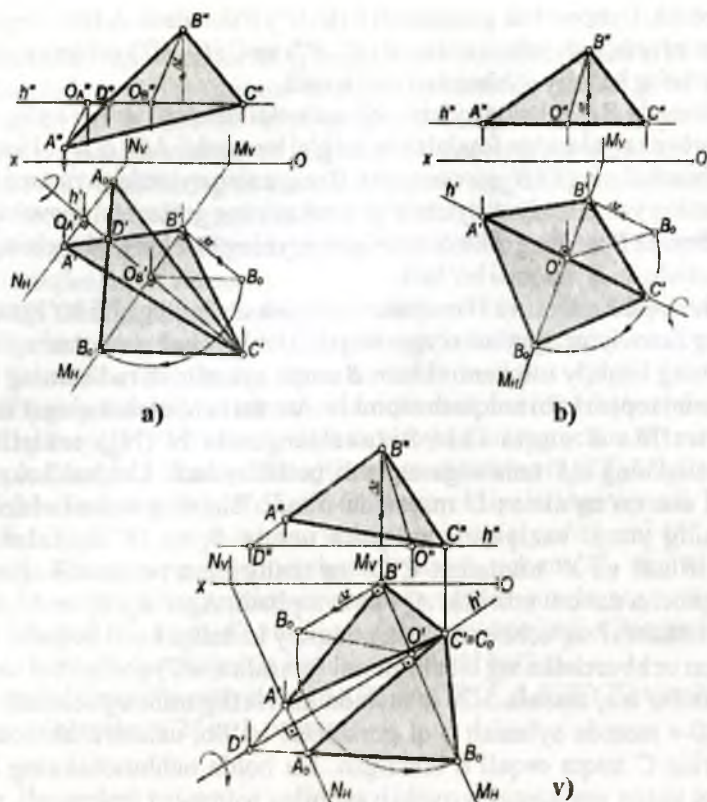
Agar uchburchakning biror tomoni (masalan, AC) gorizontaal vaziyatda berilgan bo'lsa, masala 5.20-b rasmda ko'rsatilganidek yechiladi.

5.20-v rasmda aylanish o'qi gorizontaal bo'lib, uchburchak konturidan tashqarida C nuqta orqali o'tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontaal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada masalaning yechimi yaqqolroq bo'ladi.

5.3.3. Geometrik shaklini proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida yoki tekislikning izi atrofida aylantirish. Aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontaal yoki frontal izlaridan biri qabul qilinadi (5.21-rasm). Bu holda tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jipslashtiriladi. Agar aylanish o'qi sifatida tekislikning gorizontaal izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontaal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtirish mumkin. Shuningdek, tekislik frontal izi atrofida aylantirilib, frontal proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan mazkur tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning haqiqiy o'lchamini aniqlash yoki umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli bo'lgan har qanday geometrik masalalarni yechish mumkin.

5.22-a rasmda umumiy vaziyatdagi Q tekislikni $Q_{H''}$ gorizontaal izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontaal izi aylanish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtani H tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning



5.20-rasm.

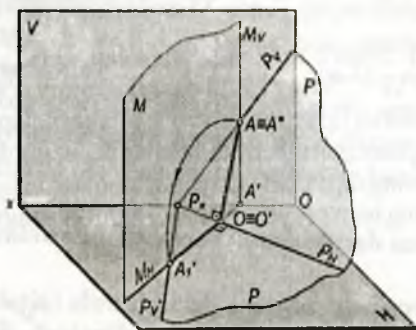
frontal iziga tegishli B (B' , B'') nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali Q_{II} ga perpendikulyar M (M_H , M_V) gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. B nuqta $O'B = R$ radiusli yoy bo'yicha M_H iz bilan kesishguncha aylantiriladi. Natijada hosil bo'lgan B' nuqta bilan Q_v ni o'zaro tutashtirsak, Q tekislikning H tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar H tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lchamlarida proyeksiyalanadi.

5.22-a rasmdan shuni aniqlash mumkinki, Q tekislikni Q_{II} izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirishda Q_v iziga tegishli $Q_x B_1$ kesma o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgani uchun $Q_x B'' = Q_x B'_1$ bo'ladi. Demak, chizinda $Q(Q_{II}, Q_v)$ tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun uning Q_v izida tanlab olingan $B \equiv B''$ nuqta va Q_x markazdan $Q_x B''$ radius bilan yoy chizib, M tekislikning M_H izi bilan kesishgan B_1 nuqta aniqlanadi. So'ngra B_1 va Q_x nuqtalardan tekislikning Q_{I1} izi o'tkaziladi.

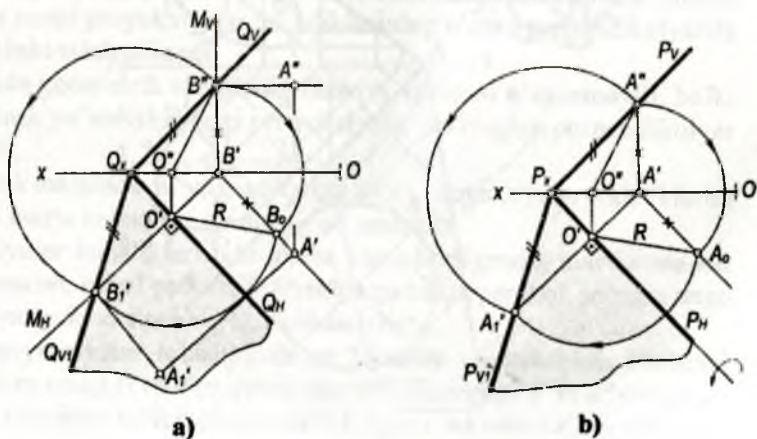
Chizmada P (P_H, P_V) tekislikni P_H izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash zarur bo'lsin (5.22-b rasm). Ma'lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o'qiga perpendikulyar bo'ladi. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko'ra, tekislikning P_V izida olingan A (A', A'') nuqtaning A' proyeksiyasidan tekislikning P_H iziga perpendikulyar o'tkaziladi va O' hamda O'' nuqtalar topiladi. Chizmada hosil bo'lgan $O'A'$ va $O''A''$ aylantirish radiusining proyeksiyalari, $O'A_0$ esa uning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

Xuddi shuningdek, P (P_H, P_V) tekislikni V tekislikka ham jipslashtirish mumkin (5.23-rasm). Buning uchun berilgan P tekislikning P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi $P_H A'$ aniqlanadi va tekislikning P_V izini P_V izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko'rinib turibdiki, P tekislik P_H izi atrofida aylantirilganda $P_H A'$ kesma $P_H A''$ ga teng bo'ladi.

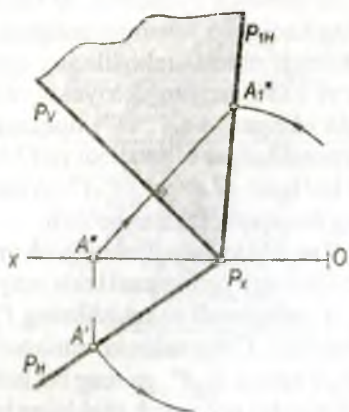
Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lchami uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga



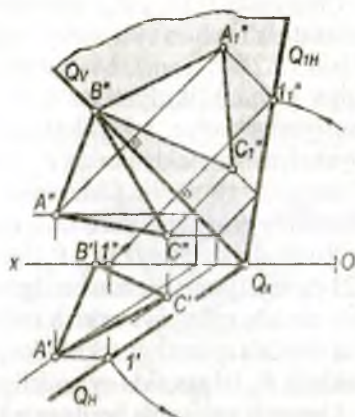
5.21-rasm.



5.22-rasm.



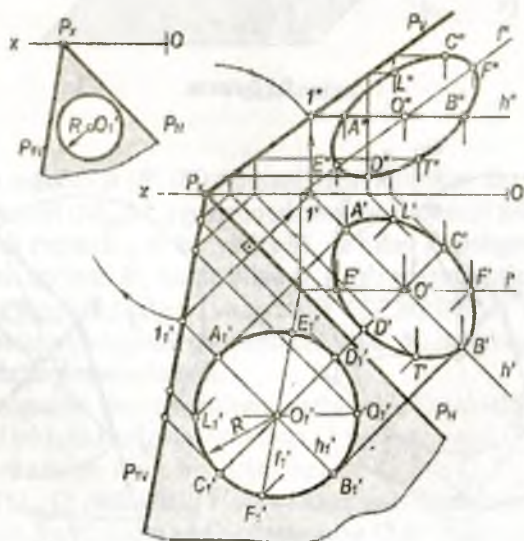
5.23-rasm.



5.24-rasm.

jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan, Q (Q_H , Q_V) tekislikka tegishli ΔABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) ning (5.24-rasm) haqiqiy o'lchami uning A , B va C nuqtalarini V tekislikka jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo'lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo'lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



5.25-rasm.

Masalan, P tekislikning H tekislikka jipslashtirilgan vaziyati P_H, P_V, P_{1V} izlari va shu tekislikka tegishli O_1 markaz va R radiusli aylana berilgan bo'lsin (5.25-rasm).

Bu aylananing P tekislikdagi proyeksiyalarini yasash uchun aylana markazidan tekislikning h' gorizontali o'tkaziladi va l' nuqta aniqlanadi. Bu nuqtadan tekislikning P_H iziga perpendikulyar o'tkazib, O_x proyeksiyalar o'qiga tegishli l' nuqta topiladi. Bu nuqtadan h' ning h'' proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra P_x markazdan $P_x l'$ radius bilan o'tkazilgan yoyning l' dan O_x o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan l'' nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan h' ning h'' proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra l'' va P_x nuqtalar tutashtirilib, tekislikning P_V izi hosil qilinadi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun O_1 dan P_H ga perpendikulyar o'tkazib, h' bilan kesishgan O' nuqta va h'' da O'' nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontaldagi joylashgan aylana A_1 va B_1 nuqtalarining A', A'' va B', B'' proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning P_1 frontali aylananing markazi O_1 dan P_{1H} ga parallel qilib o'tkazilib, aylana E_1 va F_1 nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu tarzda aylananing L_1 va T_1, C_1 va D_1 nuqtalarining proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o'zaro tutashtirsak, aylananing gorizont va frontal proyeksiyalari – ellipslar hosil bo'ladi.

5.4-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari berilgan geometrik shaklga nisbatan xususiy (parallel yoki perpendikulyar) vaziyatda bo'lgan yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda dastlabki va yangi proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyarlik sharti bajarilishi talab qilinadi.

Bu usulda geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgarmaydi, balki proyeksiyalash yo'nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

Geometrik masalada qo'yilgan shartga ko'ra, proyeksiyalar tekisliklarini bir yoki ikki marta ketma-ket almashtirish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklari ikki marta almashtirilganda, ular ketma-ket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so'ngra unga perpendikulyar yoki aksincha qilib almashtiriladi.

5.4.1. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish. Fazodagi biror A nuqta va uning H va V proyeksiyalar tekisliklaridagi A' va A'' ortogonal proyeksiyalari berilgan bo'lsin (5.26-a rasm). Agar V tekislikni V_1 tekislik bilan

almashtirsak, $\frac{V_1}{H}$ yangi proyeksiyalar tekisliklari sistemasi hosil bo'ladi. A

nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o'tkazib, yangi frontal proyeksiyasi A''_1 topiladi.

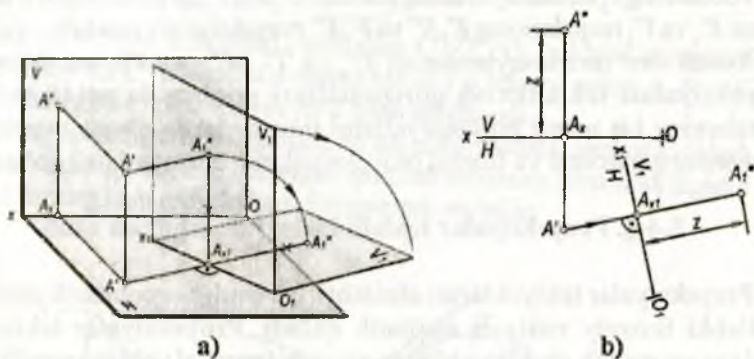
Rasmdagi yasashlardan ko'rinishicha, A'' nuqtadan Ox o'qigacha bo'lgan masofa A''_1 nuqtadan O_1x_1 o'qigacha bo'lgan masofaga tengdir, ya'ni $A''_1A_{x1} = A''A_x$.

Nuqtaning yangi proyeksiyalar sistemasidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtiriladi.

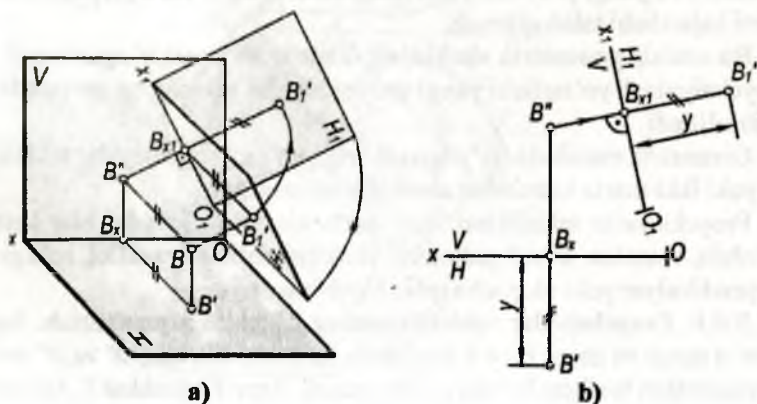
Chizmada A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan O_1x_1 ga perpendikulyar tushiriladi (5.26-b rasm). Uning davomiga A''_1A_{x1} masofa qo'yiladi.

Natijada hosil bo'lgan A' va A''_1 lar A nuqtaning yangi $\frac{V_1}{H}$ tekisliklar sistemasidagi proyeksiyalari bo'ladi. Frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtirilganda nuqtaning z koordinatasi o'zgarmaydi.

H va V proyeksiyalar tekisliklari sistemasida B nuqta B' va B'' proyeksiyalari berilgan bo'lsin (5.27-a rasm). H tekislikni $H_1 \perp V$ tekislik bilan almashtirsak,



5.26-rasm.



5.27-rasm.

$\frac{V}{H_1}$ yangi tekisliklar sistemasiga ega bo'lamiz. B nuqtadan H tekislikka

perpendikulyar o'tkazib, bu nuqtaning B'_1 proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar sistemasidagi chizmasini yasash uchun (5.27-b rasm) H_1 tekislikni V tekislik bilan jipslashtiramiz. Chizmada B nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning B'' proyeksiyasidan O_1x_1 ga o'tkazilgan perpendikulyarning davomiga $B'_1B_{x_1}=B'B_x$ masofa qo'yiladi. Natijada hosil

bo'lgan B'_1 va B'' yangi $\frac{V}{H_1}$ tekisliklar sistemasidagi B nuqtaning chizmasi

bo'ladi. Demak, gorizontal proyeksiya tekisligi almashtirilganda, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasida y koordinatasi o'zgarmaydi.

5.4.2. Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish. Ayrim geometrik masalalarni yechishda proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish zarur bo'ladi.

5.28-rasmda A nuqtaning $\frac{V}{H}$ sistemasida berilgan A' va A'' proyeksiyalari orqali uning yangi A'_1 va A''_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Buning uchun

avval V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirib, $\frac{V_1}{H}$ sistema hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi, A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun uning A' proyeksiyasidan O_1x_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A''A_x$ masofa

qo'yiladi. Natijada A nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ sistemasidagi yangi A''_1 proyeksiyasi hosil

bo'ladi. A nuqtaning A'_1 proyeksiyasini yasash uchun $\frac{V_1}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H_1}$

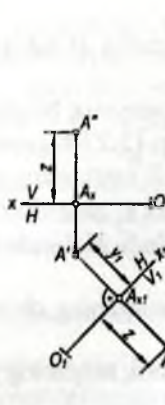
sistemaga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan O_2x_2 o'qi olinadi va nuqtaning A''_1 proyeksiyasidan O_2x_2 ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A'_1A_{x_1}$ masofa qo'yiladi. Shunday qilib, O_2x_2 sistemasida A nuqtaning A''_1 va A'_1 yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

5.29-rasmda B nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ va $\frac{V_1}{H_1}$ sistemaga o'tish

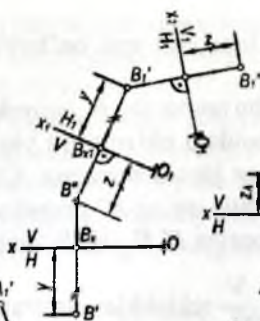
natijasida hosil bo'ladigan yangi B''_1 va B'_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan.

Nuqtaning yangi proyeksiyalarini yasash qoidalariga asoslanib, geometrik shakllarning yangi, maqsadga muvofiq bo'lgan proyeksiyalarini yasash mumkin.

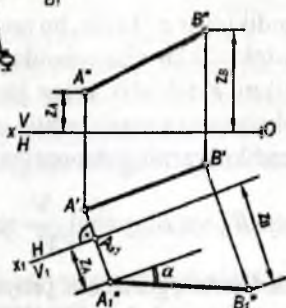
1-masala. Umumiy vaziyatda berilgan AB ($A'B'$, $A''B''$) kesmaning haqiqiy uzunligini aniqlash talab etilsin (5.30-rasm).



5.28-rasm.



5.29-rasm.



5.30-rasm.

Yechish. Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan AB kesmaga parallel qilib gorizontal yoki frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani yechish uchun uning yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi kesmaning biror, masalan, $A'B'$ gorizontal proyeksiyasiga

parallel qilib olinadi. Hosil bo'lgan $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari sistemasida

AB kesma V_1 proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda u haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

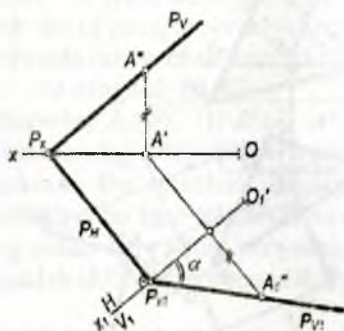
2-masala. Umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.31-rasm).

Yechish. Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tekislikning P_H gorizontal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

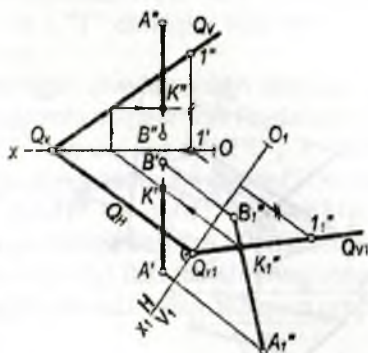
Tekislikning yangi P_{V1} izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning P_V iziga tegishli biror, masalan, $A(A', A'')$ nuqta olib, uning yangi A''_1 frontal proyeksiyasi yasaladi. Tekislikning yangi P_{H1} izi P_{V1} va A''_1 nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan α burchak P tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan burchagi bo'ladi.

3-masala. $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi $Q(Q_H, Q_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (5.32-rasm).

Yechish. Masalani yechish uchun Q tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiramiz. Buning uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tekislikning biror iziga, masalan, Q_H ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Natijada tekislikning yangi Q_{V1} izi hamda to'g'ri chiziqning A''_1, B''_1 proyeksiyasi yasaladi. Hosil bo'lgan kesmaning A''_1, B''_1 proyeksiyasi



5.31-rasm.



5.32-rasm.

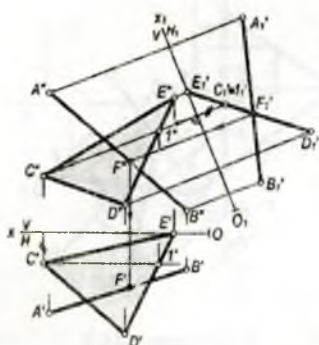
bilan tekislik Q_{11} izining kesishgan K'' nuqtasi AB kesmaning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtani teskari yo'nalishda proyeksiyalab, berilgan to'g'ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining K' va K'' proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu usul bilan $AB (A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning $\triangle CDE (\triangle C'D'E', \triangle C''D''E'')$ bilan kesishish nuqtasining F' va F'' proyeksiyalari yasaladi (5.33-rasm). Bunda mazkur uchburchak tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Buning uchun chizmada $\triangle CDE$ tekislikning biror bosh chizig'iga, masalan, $C1 (C'1', C''1'')$ frontaliga perpendikulyar qilib yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qi o'tkaziladi. Uchburchakning $C'_1D'_1E'_1$ to'g'ri chiziq kesmasi tarzida proyeksiyalangan proyeksiyasi va kesmaning $A'_1B'_1$ yangi proyeksiyalari yasaladi. Ularning o'zaro kesishgan F'_1 nuqtasi belgilanadi, so'ngra F nuqtaning frontal F'' va gorizantal F' proyeksiyalari yasaladi.

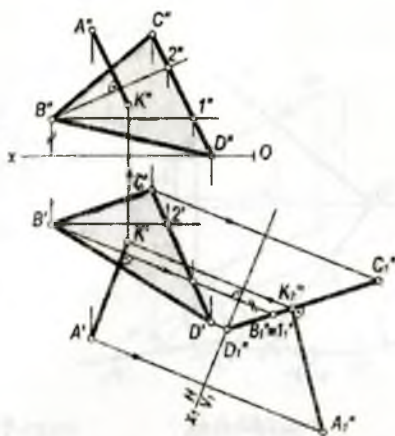
4-masala. $A (A', A'')$ nuqtadan $\triangle BCD (\triangle B'C'D', \triangle B''C''D'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.34-rasm).

Yechish. Bu masofa A nuqtadan $\triangle BCD$ tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o'lchanadi. Masalani yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o'qi uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizantaliga perpendikulyar, ya'ni $O_1x_1 \perp B'1'$ qilib o'tkaziladi. So'ngra uchburchakning to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi $D''_1B''_1C''_1$ vaziyati va nuqtaning A''_1 proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi A''_1 dan $D''_1B''_1C''_1$ kesmaga o'tkazilgan $A''_1K''_1$ perpendikulyar bo'ladi. Bu masofaning gorizantal va frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan K' va K'' proyeksiyalar aniqlanadi. Mazkur K' va K'' nuqtalar A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan uchburchakning gorizantal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo'ladi.

Yechish. Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning biri, masalan, $\triangle EFD$ proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun

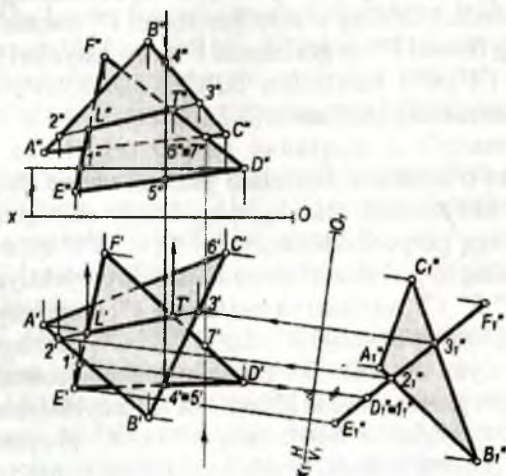


5.33-rasm.



5.34-rasm.

chizmada ΔEFD ning $D'1'$ va $D''1''$ gorizontallining proyeksiyalari hamda unga perpendikulyar, ya'ni $O_1X_1 \perp D'1'$ qilib yangi proyeksiyalar o'qi o'tkaziladi. So'ngra uchburchaklarning yangi A'' , B'' , C'' , va E'' , F'' , D'' proyeksiyalari yasaladi. Bunda ΔEFD ning mazkur proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yangi sistemasida ikki uchburchak $2''$, $3''$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Kesishish chizig'ining $2'3'$ gorizont va $2''3''$ frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiylash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. So'ngra chizmada topilgan $2'3'$ va $2''3''$ kesmalarning ΔEFD ning



5.35-rasm.

$E'F'$, $E''F''$ va $D'F'$, $D''F''$ tomonlari bilan kesishgan L' , L'' va T' , T'' nuqtalari aniqlanadi. Natijada hosil bo'lgan $L'T'$ va $L''T''$ chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.

Chizmada uchburchaklarning ko'rinishligini aniqlash uchun ulardagi $4'$, $4''$ va $5'$, $5''$, shuningdek, $6'$, $6''$ va $7'$, $7''$ konkurent nuqtalardan foydalaniladi.

6-masala. $\triangle ABC$ ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va $\triangle ABD$ ($A'B'D'$, $A''B''D''$) tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.36-rasm).

Yechish. Bu burchak berilgan $\triangle ABC$ va $\triangle ABD$ tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligi ikki tekislikning umumiy AB kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin AB qirra umumiy

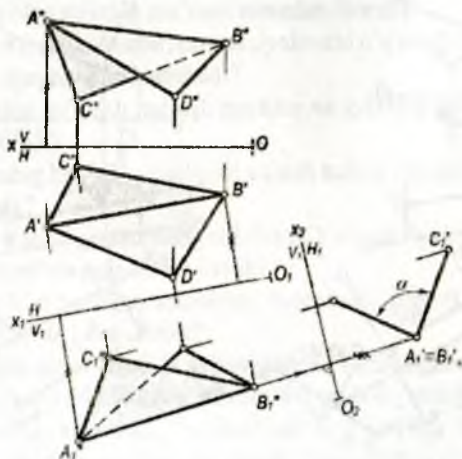
vaziyatda bo'lgani uchun $Ox \frac{V}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari sistemasi avval x_1

$\parallel AB$ qilib (chizmada $O_1x_1 \parallel A'B'$), so'ngra $H_1 \perp AB$ qilib (chizmada $O_2x_2 \perp A''_1B''_1$) ketma-ket almashtiriladi.

Natijada $\triangle ABC$ va $\triangle ABD$ yangi H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo'lib qoladi va o'zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiylanadi. Bu kesmalar orasidagi α chiziqli o'tkir burchak izlangan burchak bo'ladi.

7-masala. AB ($A'B'$, $A''B''$) va CD ($C'D'$, $C''D''$) uchrashmas to'g'ri chiziqli kesmalari orasidagi masofa aniqlansin (5.37-rasm).

Yechish. Bunda CD kesmaga parallel qilib yangi V_1 frontal proyeksiyalar tekisligi o'tkaziladi. Bu tekislikda CD va AB kesmalarning yangi frontal proyeksiyalari $C''_1D''_1$ va $A''_1B''_1$ yasaladi. So'ngra $C''_1D''_1$ kesmaga



5.36-rasm.

perpendikulyar qilib H_1 tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikda C'' , D'' va A'' , B'' larning yangi gorizontal proyeksiyalari topiladi. Bunda CD kesma $C' \equiv D'$ nuqta ko'rinishida proyeksiylanadi. Bu nuqtadan A' , B' kesmaga tushirilgan E' , F' kesmaning uzunligi CD va AB lar orasidagi masofa bo'ladi. Teskari proyeksiyalash bilan E va F nuqtalarning E' , E'' va F' , F'' proyeksiyalari yasalgan.

Yuqoridagi masalani, birinchidan, V_1 tekislikni AB kesmaga parallel va H_1 tekislikni uning yangi proyeksiyasiga perpendikulyar qilib yechsa, ikkinchidan, AB yoki CD kesmalardan biriga parallel qilib avval H tekislikni, so'ngra ularning proyeksiyalaridan biriga perpendikulyar qilib V ni almashtirsa ham bo'ladi.

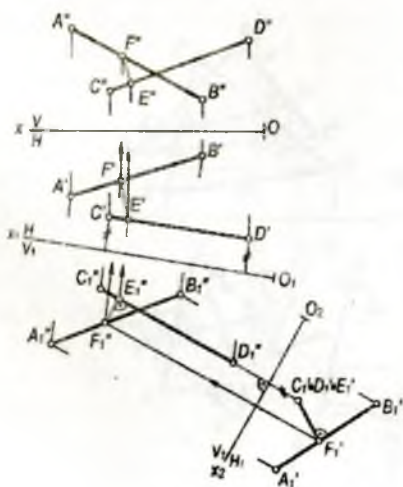
8-masala. Berilgan A (A' , A'') nuqtadan BC ($B'C'$, $B''C''$) kesmagacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.38-rasm).

Yechish. Buning uchun V tekislikni BC kesmaga parallel bo'lgan V_1 tekislik bilan almashtiramiz, ya'ni $V_1 \parallel B'C'$ sharti bajarilsin. BC kesma va A nuqtaning V_1 tekislikdagi yangi B'' , C'' va A'' frontal proyeksiyalari hosil qilinadi. So'ngra H tekislik H_1 tekislik bilan almashtiriladi. Bunda $H_1 \perp B''C''$ bo'lishi kerak.

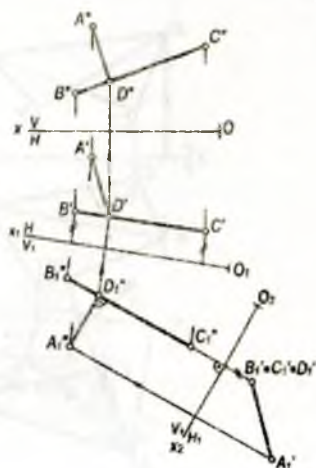
H_1 tekislikda BC va A larning yangi gorizontal proyeksiyalari yasaladi. Hosil bo'lgan A' va B' , C' nuqtalar orasidagi masofa A nuqtadan BC kesmagacha bo'lgan masofa bo'ladi. Bu masalani H ni $H_1 \parallel B''C''$, so'ngra V ni $V_1 \parallel B'C'$ qilib almashtirish yo'li bilan ham yechish mumkin.

9-masala. $\triangle CDE$ ($\triangle C'D'E'$, $\triangle C''D''E''$) uchburchakning proyeksiyalariga asosan uning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.39-rasm).

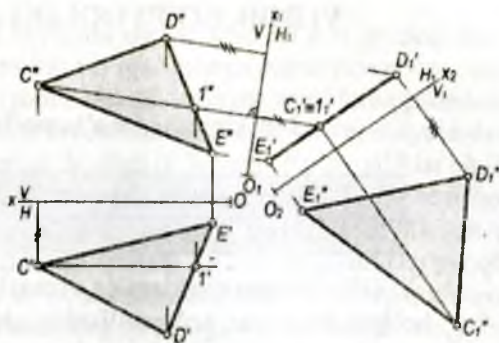
Yechish. Bunda H tekislikni H_1 tekislikka shunday almashtiramizki, $H_1 \perp \triangle CDE$ bo'lsin. Buning uchun $H_1 \perp C''D''$ (uchburchak frontalining frontal proyeksiyasi) bo'lsa, kifoya qiladi. Uchburchakning uchlarini H_1 tekislikka



5.37-rasm.



5.38-rasm.



5.39-rasm.

proyeksiyalab, yangi C', D', E' gorizontal proyeksiya to'g'ri chiziq ko'rinishida hosil qilinadi. So'ngra V tekislikni V_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $V_1 \parallel C'D'E'$ bo'lsin. C, D, E nuqtalarning V_1 tekislikdagi yangi C'', D'', E'' frontal proyeksiyalari yasiladi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirib, $\Delta C''D''E'' = \Delta CDE$ haqiqiy kattaligini hosil qilamiz. Bu masalani uchburchakning gorizontalini o'tkazib va unga avval V_1 ni perpendikulyar qilib tekislik o'tkazish hamda hosil bo'lgan kesmaga (uchburchakning proyeksiyasi) H_1 tekislikni parallel qilib o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
3. Aylantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak?
7. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
8. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib, frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
9. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?
10. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari ketma-ket qanday vaziyatlarda almashtiriladi?



VI BOB. KO'PYOQLIKLAR

6.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ta'rif. Hanima tomonidan tekis ko'pburchaklar bilan chegaralangan geometrik shakl ko'pyoqlik deyiladi.



6.1-rasm.

Tekis ko'pburchaklarning o'zaro kesishuvidan hosil bo'lgan kesmalar, ko'pyoqlikning qirralari va qirralar orasidagi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deb ataladi. Qirralarning o'zaro kesishuv nuqtalari ko'pyoqlikning *uchlari* deb yuritiladi (6.1, 6.2-rasmlar).

Ko'pyoqlikning barcha yon yoqlarining yig'indisi uning *sirti* deb ataladi. Ko'pyoqlikning uchlari va qirralari uning *aniqlovchilari* hisoblanadi (6.1-rasm). Ko'pyoqlikning bir yon yog'ida yotmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deb ataladi (6.2-rasm). Ko'pyoqlik aniqlovchilari uning istalgan yon yog'iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, *qabariq ko'pyoqlik*, aksincha bo'lsa, *botiq ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Ko'pyoqliqlarning bir necha turlari mavjud bo'lib, ulardan quyidagilarni ko'rib chiqamiz:

Piramida

Ta'rif. Yoqlaridan biri tekis ko'pburchak bo'lib, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan tuzilgan ko'pyoqlik piramida deyiladi.

Ko'pburchak piramidaning *asosi* va uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. Yon yoqlarining umumiy uchi piramidaning ham uchi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko'pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o'tib, unga perpendikulyar bo'lsa, *to'g'ri piramida*, perpendikulyar bo'lmasa, *og'ma piramida* deb yuritiladi (6.1-rasm).

Prizma

Ta'rif. Yon yoqlari to'rtburchaklardan va asosi ko'pburchakdan iborat bo'lgan ko'pyoqlik prizma deyiladi.

Yon yoqlarining kesishuv chiziqlari – prizma *qirralari*, qirralar orasidagi ko'pburchaklar uning *yoqlari* deyiladi (6.2-rasm). Prizmaning barcha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo'lgan ko'pburchaklar prizmaning *asoslari* deb ataladi. Yon qirralari asosiga nisbatan og'ma yoki perpendikulyar bo'lsa,

prizma ham mos ravishda *og'ma* yoki *to'g'ri prizma* deb ataladi. Asosi muntazam ko'pburchak bo'lgan prizma *muntazam prizma* deb yuritiladi.

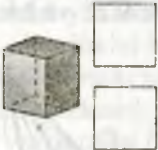
Asoslari o'zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan, yon yoqlari esa asos uchlaridan o'tuvchi uchburchaklar va trapetsiyalardan iborat bo'lgan ko'pyoqlik *prizmatoid* deyiladi (6.3-rasm). Ko'pyoqliklar bir jinsli qabariq, bir jinsli botiq, yulduzsimon hamda ularning birlashishidan hosil bo'lgan murakkab ko'pyoqliklarga bo'linadi. Bir jinsli qabariq ko'pyoqliklar muntazam va yarim muntazam ko'pyoqliklarga ajraladi. Muntazam qabariq ko'pyoqliklar o'zaro teng bir xil muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga, o'zaro teng ikkiyoqli burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'ladi. Bu ko'pyoqliklar asosan 5 xil bo'lib, **Platon jismlari** deb yuritiladi (6.1-jadval).

Ko'pyoqliklarning muhim xossalardan birini Eyler quyidagicha bayon etgan:

Eyler teoremasi. Har qanday qabariq ko'pyoqlikda yoqlar bilan uchlar sonining yig'indisidan qirralar sonining ayirmasi ikkiga teng bo'ladi, ya'ni $Y_o + U - Q = 2$.

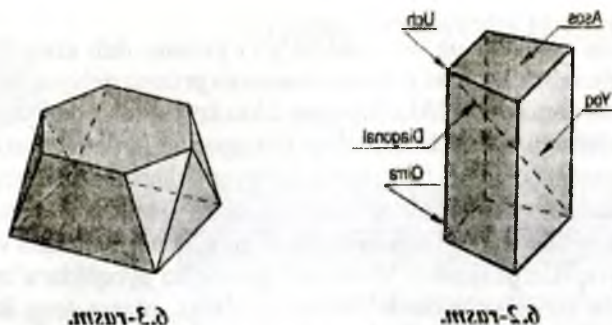
6.1-jadval

Muntazam ko'pyoqliklar

Tetraedr (6.4-rasm) 	Kub - geksaedr (6.5-rasm) 	Oktaedr (6.6-rasm) 
Dodekaedr (6.7-rasm) 	Ikosaedr (6.8-rasm)  $Y_o + U - Q = 2$ Y_o - yoqlar soni U - uchlar soni Q - qirralar soni	Kesik oktaedr (6.9-rasm) 

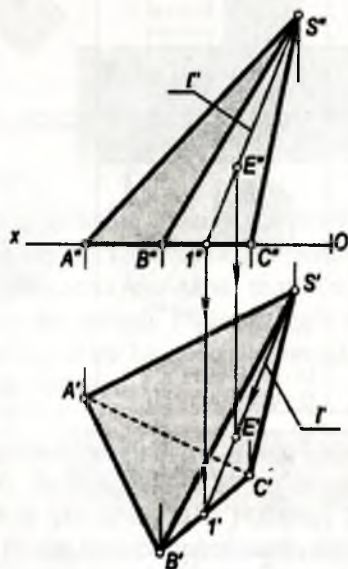
Yon yoqlari turli shakldagi muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lgan ko'pyoqlik *yarim muntazam ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Bu ko'pyoqliklar 18 xil bo'lib, ular **Arximed jismlari** deb yuritiladi. 6.9-rasmda Arximed jismlaridan biri bo'lgan kesik oktaedrning yaqqol tasviri keltirilgan.

Ko'pyoqliklar texnikada turli ko'rinishdagi mashina detallari, ko'pyoqli linzalar yasashda hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko'priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko'pyoqliklardan iborat bo'ladi.



Ko'pyoqliklardan yana «geodezik» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa ular gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o'tish joylarida bezak — ornament sifatida ham qo'llanilgan.

Ko'pyoqlikning tekis chizmada tasvirlanishi. Ko'pyoqlik chizmada o'z aniqlovchilarining to'g'ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 6.10-rasmda $SABC$ piramidaning tekis chizmasi o'z aniqlovchilari: $S(S'S')$ uchi, asosi ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan. SA , SB , ... qirralarning proyeksiyalari S_A, B, C uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi $S'A'$ va $S'A''$, $S'B'$ va $S'B''$ va h.k. kesmalar bo'ladi.



6.10-rasmi.

Yoqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan $S'A'B'$ va $S''A''B''$, $S'A'C'$ va $S''A''C''$, ... tekis shakllardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqlik sirtidagi ixtiyoriy $E(E'')$ nuqtaning yetishmagan E' proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy $l(l', l'')$ to'g'ri chiziq vositasida yasaladi (6.10-rasm).

6.2-§. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Ko'pyoqliklar tekislik bilan kesilganda kesimda ko'pburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pburchakning uchlari ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo'ladi.

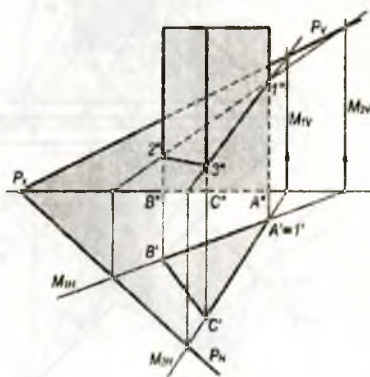
Kesimning tomonlari esa ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo'ladi. Ko'pyoqlikning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi usullar bilan yasash mumkin:

- Kesim tomonlarini, ya'ni ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash usuli.
- Kesim uchlari, ya'ni ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- Aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

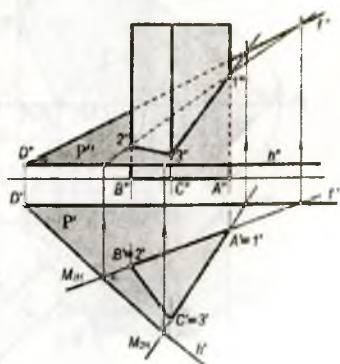
Bu usullardan qaysi birini qo'llash ko'pyoqlik va tekislikning tekis chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

6.2.1. Kesim tomonlarini yasash usuli. Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 6.11-rasmda uchyoqli to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimining proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali $M_1(M_{H1}, M_{V1})$ va $M_2(M_{H2}, M_{V2})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan P tekislik bilan



6.11-rasm.



6.12-rasm.

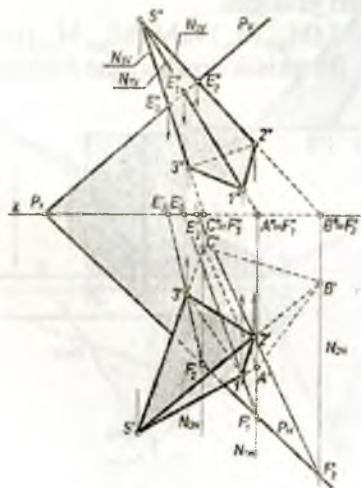
kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining $12(1'2', 1'', 2'')$, $13(1'3', 1''3'')$ tomonlari aniqlangan.

Aynan shu prizmaning o'zaro kesishuvchi $h(h', h'')$ va $f(f', f'')$ to'g'ri chiziqlar orqali berilgan $P(P', P'')$ tekislik bilan kesishuv chizig'ini yasash 6.12-rasmda ko'rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o'tkazilgan $M_1(M_{III})$ va $M_2(M_{II})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining $\Delta 123(1'2'3', 1''2''3'')$ proyeksiyalari yasalgan.

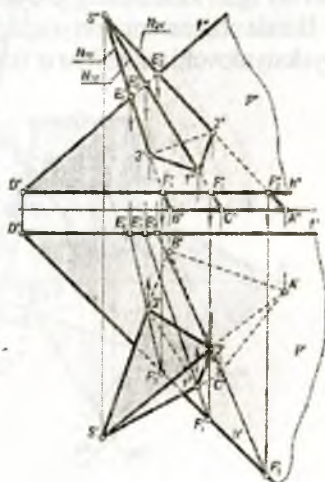
6.2.2. Kesim uchlarini yasash usuli. Bu usul 1-usulga nisbatan umumiyroq hisoblanib, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash algoritmi asosida bajariladi. 6.13 va 6.14-rasmlarda asosi H proyeksiyalar tekisligida bo'lgan $SABC(S'A'B'C', S''A''B''C'')$ piramidaning izlari bilan berilgan $P(P_v, P_H)$ tekislik va kesishuvchi chiziqlar (h va f) proyeksiyalari orqali berilgan umumiy vaziyatdagi $P(P', P'')$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimmi yasash ko'rsatilgan.

Bunda kesim proyeksiyalari $\Delta I'2'3'$ va $\Delta I''2''3''$ ni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

- SA, SB, SC qirralar orqali yordamchi N_1, N_2, N_3 frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkaziladi;
- bu tekisliklarning P tekislik bilan kesishgan chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ning proyeksiyalari yasaladi;
- kesishuv chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 bilan piramida qirralari SA, SB, SC ning mos ravishda kesishuv nuqtalari $1, 2, 3$ larning proyeksiyalari aniqlanadi;
- hosil qilingan $1, 2, 3$ nuqtalar o'zaro birlashtirilib, kesim yuzasining proyeksiyalari $\Delta I'2'3'$ va $\Delta I''2''3''$ yasaladi.



6.13-rasm.

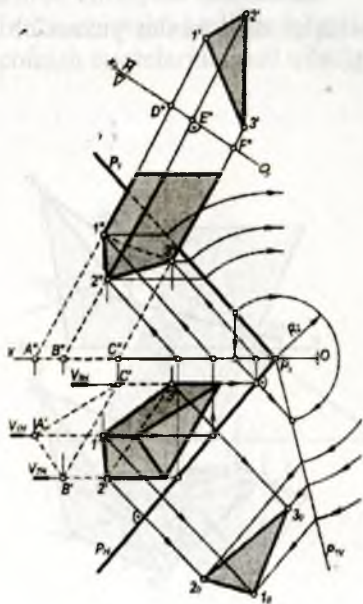


6.14-rasm.

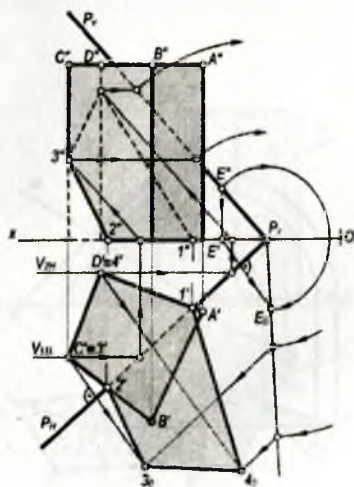
6.15-rasmda aynan shu usul bilan og'ma prizmaning umumiy holatdagi $P(P_v, P_h)$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalarini yasash prizma qirralari orqali V_1 , V_2 va V_3 yordamchi frontal tekisliklar o'tkazish bilan ko'rsatilgan. Kesim yuzasi $\Delta I23$ ning haqiqiy kattaligi P ni P_H izi atrofida aylantirib, H ga jipslashtirish usuli bilan aniqlangan.

6.16-rasmda to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_v, P_h)$ tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Kesimning 1 ($1'$, $1''$) va 2 ($2'$, $2''$) nuqtalari bevosita prizma asosi bilan P tekislikning P_H izi kesishgan nuqtalarida yotadi. C va D qirralar orqali o'tkazilgan yordamchi kesuvchi $V_1(V_{1H})$, $V_2(V_{2H})$ frontal tekisliklar vositasida 3,4 nuqtalar proyeksiyalari aniqlangan. Kesim yuzasining haqiqiy kattaligi P tekislikni uning P_H izi atrofida aylantirib, H ga jipslashtirish usulida yasalgan.

Agar ko'pyoqliklar proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishsa, ularning kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yanada osonlashadi, chunki bunda kesim yuzasining bir proyeksiyasi proyeksiyalovchi tekislik izida bo'ladi. 6.17-rasmda og'ma piramidaning frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_v)$ tekislik bilan kesishgan kesim yuzasi va uning haqiqiy kattaligini yasash ko'rsatilgan. 6.18-rasmda uchyoqli piramidani $N_1(N_{1v})$ va $N_2(N_{2v})$ frontal proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesib, kesimda hosil bo'lgan o'yiqli qismining gorizontall proyeksiyasini yasash ko'rsatilgan. Kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yo'llarini chizmadan tushunib olish qiyin emas.



6.15-rasm.



6.16-rasm.

6.3-§. Ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziq qavariq ko'pyoqlikning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish*, ikkinchisi *chiqish nuqtalari* deb yuritiladi. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- To'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli.
- To'g'ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli.

Quyida to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir necha misollarni ko'rib chiqamiz.

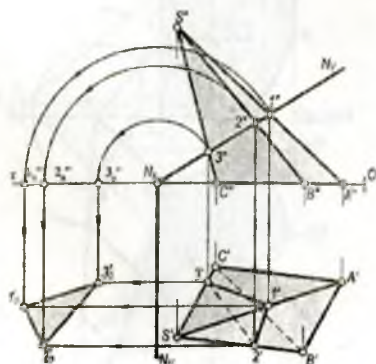
1-usul. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini xususiy vaziyatdagi tekislik vositasida yasash quyidagi yasash algoritmi asosida bajariladi:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko'pyoqlikning o'zaro kesishuvdagi kesim yuzasi chizig'i aniqlanadi;
- kesim yuzasi chizig'i bilan berilgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalari belgilanadi.

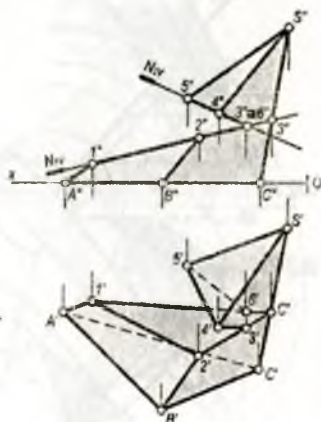
6.19-rasmda $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqlarning uchyuqli prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Yasash algoritmi quyidagicha:

- l to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislik o'tkaziladi: $l'' \in N_V$ va $N_H \perp OX$;
- N tekislik bilan prizmaning kesishishdagi kesim yuzasi chizig'i proyeksiyalari $1'2'3'$ va $1''2''3''$ yasaladi.



6.17-rasm.



6.18-rasm.

Kesim yuzasi chizig'i $\Delta 123$ bilan l to'g'ri chiziqning uchrashish nuqtalari E_1 va E_2 belgilanadi: $12 \cap l = E_1$ va $23 \cap l = E_2$. Bunda, avvalo, $1'2'3 \cap l' = E'_1$ va E'_2 lar aniqlanib, so'ngra proyeksion bog'lanish chizig'i orqali E''_1 va E''_2 lar holati aniqlanadi.

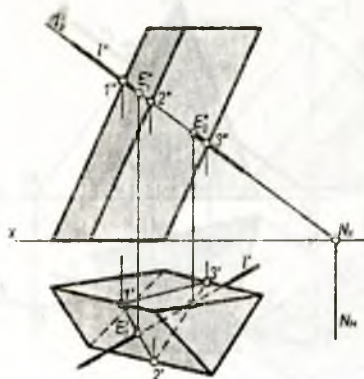
Agar ko'pyoqlikning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

6.20-rasmda to'rtyoqli to'g'ri prizma sirti bilan $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish $E_1(E'_1, E''_1)$, $E_2(E'_2, E''_2)$ nuqtalarini yasash tasvirlangan.

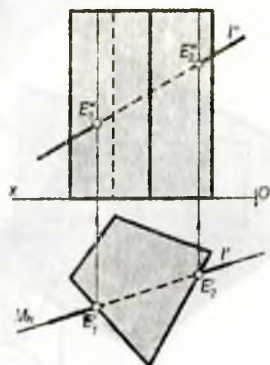
Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo'lgani uchun l orqali $M(M_H)$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari E'_1 va E'_2 belgilanadi. So'ngra ularning E''_1 va E''_2 proyeksiyalari yasaladi.

2-usul. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik vositasida yasashda umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish uchun markaziy yoki qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash usullarining biridan foydalaniladi. Bunda to'g'ri chiziqning ko'pyoqlik sirtiga kirish va chiqish nuqtalarini yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtning asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik o'tkaziladi;
- yordamchi tekislik bilan sirt asosi tomonlarining kesishish nuqtalari belgilanadi;
- bu nuqtalar orqali yordamchi tekislik bilan sirt yon yoqlarining kesishish chiziqlari aniqlanadi;
- bu chiziqlar berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishib, sirtga tegishli kirish va chiqish nuqtalarini hosil qiladi.



6.19-rasm.



6.20-rasm.

6.21-a, b rasmda l (l' , l'') to'g'ri chiziq bilan Φ (Φ' , Φ'') piramidaning o'zaro kesishish nuqtasini yasash tasvirlangan. Bunda piramidaning S uchi va l to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning P_H izini o'tkazish uchun:

- berilgan l to'g'ri chiziqning gorizontal l_H izi yasaladi;
- piramidaning S uchidan to'g'ri chiziqni ixtiyoriy C (C' , C'') nuqtada kesib o'tuvchi SC ($S'C'$, $S''C''$) to'g'ri chiziq o'tkazib, uning ham gorizontal F' , izi yasaladi;

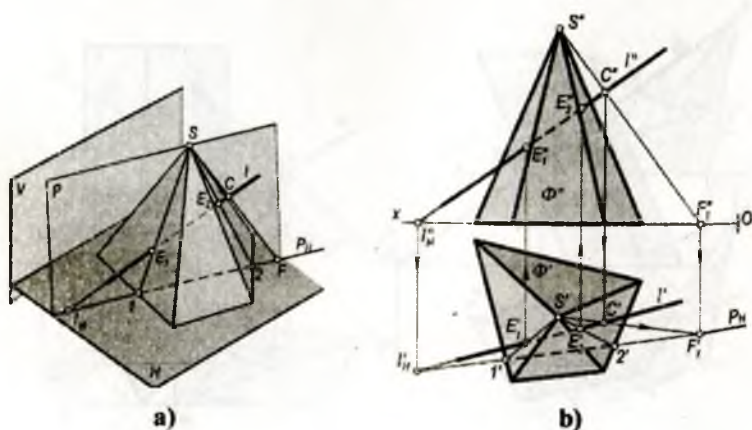
- l_H va F' , izlar orqali piramida asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning gorizontal P_H izini o'tkazamiz. P_H bilan piramida asosining kesishish nuqtalari $1'$ va $2'$ belgilanadi;

- S'' nuqtani $1'$ va $2'$ nuqtalar bilan birlashtirib, P tekislik bilan piramidaning kesishish chizig'i $\Delta S'1'2'$ yasaladi;

- $\Delta S'1'2'$ bilan l to'g'ri chiziqning o'zaro uchrashish E'_1 va E'_2 nuqtalari belgilanadi. Bu nuqtalardan foydalanib, ularning frontal E''_1 va E''_2 proyeksiyalari aniqlanadi. Hosil bo'lgan E_1 va E_2 nuqtalar l to'g'ri chiziq bilan Φ piramida sirtining kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari bo'ladi.

Yuqorida bayon etilgan usul *yordamchi markaziy proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi. Bu usuldan to'g'ri chiziq bilan konus sirtining kesishish nuqtalarini yasashda ham foydalaniladi. Prizma yoki silindr sirtlari bilan to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtalarini yasashda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklardan foydalangan qulay. Bunda berilgan to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalari berilgan to'g'ri chiziq orqali ko'pyoqlikning yon qirralariga parallel qilib o'tkazilgan umumiy vaziyatdagi tekislik vositasida aniqlanadi.

Proyeksiyalash yo'nalishi ko'pyoqlik qirralariga parallel bo'lgani uchun bu *qiyshiq burchakli yordamchi parallel proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi.



6.21-rasm.

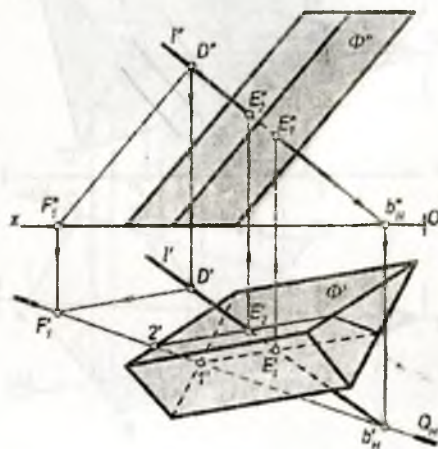
6.22-rasmda og'ma vaziyatdagi Φ (Φ' , Φ'') prizma sirti bilan b (b' , b'') to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan. Bu misolni chizmada yechish algoritmi quyidagicha:

- berilgan b to'g'ri chiziqlarning gorizontalar b_H ($b'_{H'}$, $b''_{H''}$) izi yasaladi;
- b to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy D (D' , D'') nuqtasidan prizmaning yon qirralariga parallel qilib to'g'ri chiziq o'tkaziladi va uning ham gorizontalar F_1 (F'_1 , F''_1) izi aniqlanadi;
- b'_H va F'_1 izlar orqali prizmaning qirralariga parallel kesuvchi umumiy vaziyatdagi Q tekislikning Q_H izi o'tkaziladi. Bu tekislik prizmaning asosini 1' va 2' nuqtalarda kesadi. Ushbu nuqtalardan prizma qirralariga parallel o'tkazilgan kesim chiziqlari 1' to'g'ri chiziqlarni E'_1 va E'_2 nuqtalarida kesadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari E''_1 va E''_2 nuqtalar 1'' to'g'ri chiziqlarda aniqlanadi. Natijada to'g'ri chiziqlarning prizma sirti bilan kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari hosil bo'ladi.

6.4-§. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi

Ko'pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o'zaro joylashuviga qarab to'la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda uchraydi. Ko'pyoqliklar o'zaro kesishganda bir yoki bir necha yopiq fazoviy yoki tekis sinq chiziqlar hosil bo'ladi. Bu sinq chiziq uchlari ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko'pyoqliklardan birini Φ va ikkinchisini Ω deb belgilasak, ularning kesishgan chizig'ini yasash quyidagi algoritmi bilan bajariladi:

- Φ ko'pyoqlik qirralarining Ω ko'pyoqlik sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yoki Ω ko'pyoqlik qirralarining Φ ko'pyoqlik yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;



6.22-rasm.

• Φ va Ω ko'pyoqliklar yon yoq tekisliklarining o'zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

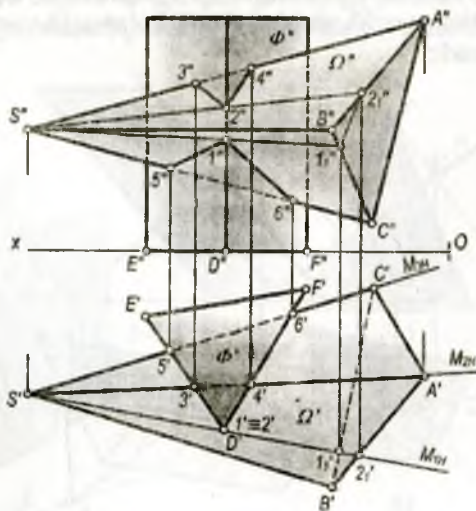
Hosil bo'lgan kesishish nuqtalari yoki chiziqlar tegishli tartibda birlashtirilsa, berilgan ko'pyoqliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda, avvalo, ularning kesishishida qatnashmaydigan qirralari aniqlanadi; so'ngra ko'pyoqliklarning ko'rinar-ko'rinmas qirralari aniqlanib, ularning ko'rinadigan qismlari asosiy tutash chiziqlarda yurgizib chiqiladi.

6.23-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

• prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi D qirrasigina piramida sirtini 1 va 2 nuqtalarda kesib o'tgan. Bu nuqtalar D nuqta orqali o'tgan $M_1(M_{1H})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;

• piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan 3, 4, 5, 6 nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat SA va SC qirralari prizma bilan kesishadi. SA va SC qirralarining prizma bilan kesishgan 3(3', 3''), 4(4', 4''), 5(5', 5''), 6(6', 6'') nuqtalari, 6.20-rasmda ko'rsatilganidek, $M_2(M_{2H})$ va $M_3(M_{3H})$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;

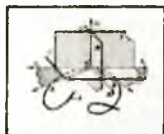
• aniqlangan 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'' nuqtalarning rasmda ko'rsatilganidek ko'rinar-ko'rinmas qismlari e'tiborga olinib, tartib bilan birlashtirib chiqilsa, ikki sirtning o'zaro kesishish siniq chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi.



6.23-rasm.

Nazorat savollari

1. Ko'pyoqlik deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqlikning aniqlovchilariga nimalar kiradi?
3. Qanday ko'pyoqlik piramida deb ataladi?
4. Qanday ko'pyoqlik prizma deb ataladi?
5. Qanday ko'pyoqlik to'g'ri ko'pyoqlik deb ataladi?
6. Qanday ko'pyoqlik muntazam ko'pyoqlik deb yuritiladi?
7. Eyler teoremasida ko'pyoqlikning qaysi xossalari keltirilgan?
8. Tekislik bilan ko'pyoqlikning kesishishidagi kesim yuzasini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
9. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
10. Ikki ko'pyoqlikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?



VII BOB. EGRI CHIZIQLAR

7.1-§. Umumiy ma'lumotlar

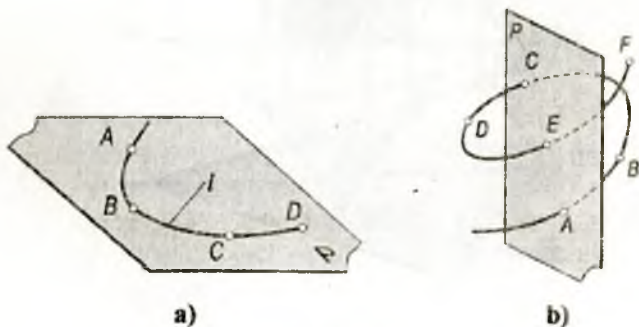
Chizma geometriyada egri chiziqlarning geometrik va mexanik xususiyatlaridan grafik ravishda amaliy foydalanish e'tiborga olinib, ularga oddiy kinematik ta'rif beriladi. Shuning uchun egri chiziq fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning izi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar *tekis* (7.1-a rasm) va *fazoviy* (7.1-b rasm) *egri chiziqlarga* bo'linadi.

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadi. Egri chiziqni tashkil qiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga bo'ysunsa, u *qonuniy*, aksincha, nuqtalar to'plami hech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlar dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadi. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik*, transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent egri chiziq* deyiladi.

Algebraik egri chiziqlar tartib va sinf tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan eng ko'p kesishish nuqtalari soni orqali aniqlanadi.



7.1-rasm.

Tekis egri chiziqlarning sinfi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziq sinfi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinmalar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqlarning tartibi va sinfi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tartibi va sinfi bir xil bo'lib, ikkiga teng bo'ladi.

7.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish

Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq tekis egri chiziq deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko'rinishda ular quyidagi hollar bilan beriladi:

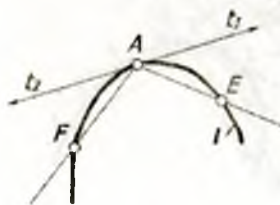
- dekart koordinatalar sistemasida $f(x,y)=0$ ko'phad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida $r=f(\varphi)$ bilan;
- parametrik ko'rinishda $x=x(t)$ va $y=y(t)$ bilan.

Egri chiziqlar grafik ko'rinishda berilishining turli usullari mavjud.

Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Tekis egri chiziqlarning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal o'tkazish mumkin.

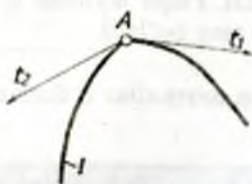
7.2-rasmda berilgan l tekis egri chiziqning biror A nuqtasida urinma va normal o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. E nuqtani A nuqtaga egri chiziq bo'ylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. E nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi t_1 urinmani hosil qiladi. U l egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan *yarim urinma* deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib, A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi t_2 yarim urinmani hosil qiladi. Qarama-qarshi yo'nalgan t_1 va t_2 yarim urinmalar hosil qilgan to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan *urinma* deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq *ravon egri chiziq* deyiladi.

Egri chiziqning A nuqtadagi t urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar n to'g'ri chiziq uning *normali* deb ataladi. Ba'zan yarim urinmalar ustma-ust tushmasdan o'zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar *sinish nuqtasi* deyiladi (7.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal o'tkazish masalalari ko'p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o'tkazishning ba'zi bir grafik usullarini ko'rib chiqamiz.

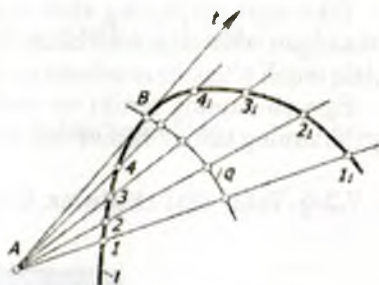


7.2-rasm.

7.2.1. Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma o'tkazish. Biror l egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (7.4-



7.3-rasm.

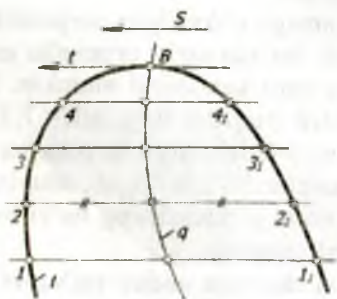


7.4-rasm.

rasm). A nuqtadan l egri chiziqqa urinma o'tkazish talab qilinsin. Buning uchun A nuqta orqali l egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Hosil bo'lgan vatarlarning uchlari $1_1, 2_2, 3_3, \dots$ nuqtalar bilan belgilab, har bir vatarning o'rta nuqtalari topiladi. Vatarlarning o'rta nuqtalarini birlashtirib, q egri chiziq hosil qilinadi. Bu egri chiziq *xatoliklar egri chizig'i* deyiladi va uning l egri chiziq bilan kesishish B nuqtasi A nuqtadan o'tuvchi urinmaning egri chiziqqa urinish nuqtasi bo'ladi. A va B nuqtalar to'g'ri chiziq bilan birlashtirilsa, t urinma hosil bo'ladi.

7.2.2. Berilgan yo'nalishga parallel urinma o'tkazish. Biror l egri chiziqqa berilgan s yo'nalishga parallel urinma o'tkazish uchun l egri chiziq s yo'nalishga parallel chiziqlar bilan kesiladi va hosil bo'lgan $1_1, 2_2, 3_3, \dots$ vatarlarni teng ikkiga bo'luvchi nuqtalar orqali q xatoliklar egri chizig'i o'tkaziladi (7.5-rasm). q egri chiziqning l bilan kesishish nuqtasi B topiladi. B nuqta orqali berilgan s yo'nalishga parallel qilib t urinma o'tkaziladi.

7.2.3. Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o'tkazish. Berilgan l egri chiziq uning ustida yotgan A nuqtadan chiquvchi to'g'ri chiziqlar bilan kesiladi (7.6-rasm). A nuqtadan o'tuvchi urinmaning taxminiy



7.5-rasm.



7.6-rasm.

yoʻnalishiga perpendikulyar qilib b toʻgʻri chiziq oʻtkaziladi. Kesuvchi nurlarga b toʻgʻri chiziqni kesib oʻtgan nuqtalardan boshlab shu chiziqning l dagi vatar uzunligi oʻlchab qoʻyiladi. Nuqtalar toʻplami q egri chiziqni hosil qiladi. q egri chiziqning b bilan kesishish nuqtasi B ni A nuqta bilan birlashtirganda t urinma hosil boʻladi.

7.2.4. Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal oʻtkazish. l egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarning markazi sifatida qabul qilib (7.7-rasm), undan berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalar chiziladi. Bu aylanalar l egri chiziqni $1_1, 2_1, 3_1, \dots$ nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni oʻzaro birlashtirib, egri chiziqning $1_1, 2_1, 3_1, \dots$ vatarlari hosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yoʻnalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliklari oʻlchab qoʻyiladi. Bu kesmalarning uchlarini tartib bilan birlashtirib, q chiziq hosil qilinadi. q va l egri chiziqlar oʻzaro B nuqtada kesishadi. A va B nuqtalarni birlashtiruvchi n toʻgʻri chiziq l egri chiziqning normali boʻladi.

7.3-§. Tekis egri chiziqning egriligi

Qoʻshni yarim urinmalar orasidagi α burchakning ular orasidagi s yoy uzunligiga nisbatining limiti *egri chiziqning egriligi* deyiladi (7.8-rasm). Egrilikni k bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}.$$



7.7-rasm.



7.8-rasm.

Bunda φ burchak qancha katta bo'lsa, egri chiziqli shuncha ko'p egilgan va aksincha, qanchalik kichik bo'lsa, egri chiziqli shuncha kam egilgan bo'ladi. Egrilik qiymati egri chiziqli har bir nuqtasida har xil bo'ladi. Aylanani hamma nuqtasidagi egrilik bir xildir, to'g'ri chiziqli esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqli egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqli cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o'tadi. Uning radiusi *egrilik radiusi*, markazi esa *egrilik markazi* deyiladi. Egrilik radiusi R va egrilik miqdori k o'zaro teskari proporsionaldir: $k=1/R$, ya'ni egrilik radiusi R qancha katta bo'lsa, k egrilik shuncha kichik va aksincha, egrilik radiusi qancha kichik bo'lsa, k egrilik shuncha katta bo'ladi. Masalan, to'g'ri chiziqli egrilik radiusi cheksiz katta bo'lganligi tufayli egrilik nolga teng.

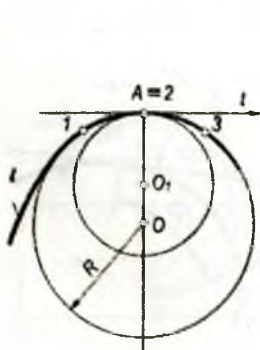
7.4-§. Evolyuta va evolventa

Biror l egri chiziqli hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to'plami l , egri chiziqli hosil qiladi. Bu l , egri chiziqli berilgan l egri chiziqli *evolyutasi* deb ataladi (7.10-rasm). l egri chiziqli l , evolyutaga nisbatan *evolventa* deyiladi.

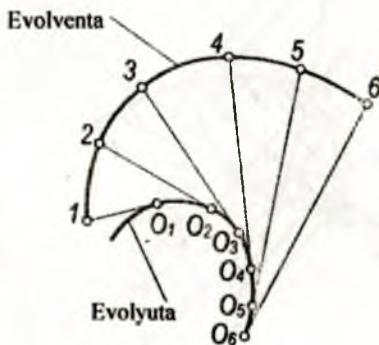
Evolyutaning urinmalari l evolventaning normalidir. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko'p evolventalar joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun egri chiziqli evolyutasi o'z evolventasini aniqlay olmaydi, lekin uning evolventasi o'z evolyutasini aniqlay oladi.

7.5-§. Tekis egri chiziqli nuqtalarining klassifikatsiyasi

Tekis egri chiziqli *monoton* va *ulama* chiziqliarga bo'linadi. *Monoton egri chiziqli*ning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o'sib yoki kamayib boradi. *Monoton egri chiziqli* yoylaridan tashkil topgan chiziqli *ulama chiziqli* deyiladi. Bu



7.9-rasm.



7.10-rasm.

yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari*, ulanuvchi yoylarning o'zi esa ulama chiziqning *tomonlari* deb ataladi. Yoylarning ulanish xarakteriga qarab ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo'lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bitta to'g'ri chiziq ustida yotadi va egirlik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

Qo'sh nuqta. Yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egirlik markazlari esa har xil joylashadi (7.11-rasm).

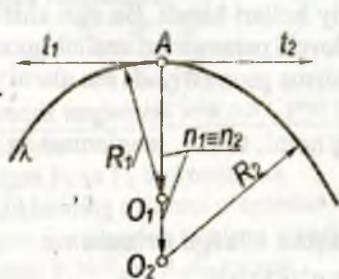
Egilib o'tish nuqtasi. Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi (7.12-rasm).

Birinchii turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi, normallar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bir chiziq ustida yotadi (7.13-rasm).

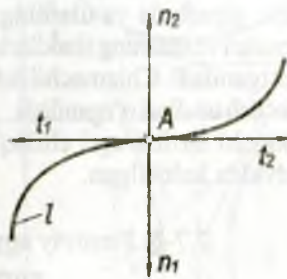
Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar juft-juft bo'lib, bir xil yo'nalishga ega bo'ladi (7.14-rasm).

Sinish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar har xil yo'nalishda bo'ladi (7.15-rasm).

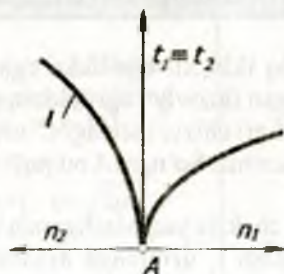
Tugun nuqta. Tugun nuqtada egri chiziq o'zini o'zi bir va bir necha marta kesib o'tadi (7.15-rasm).



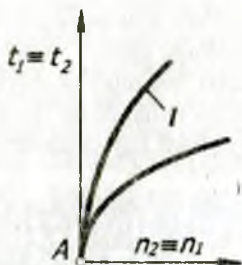
7.11-rasm.



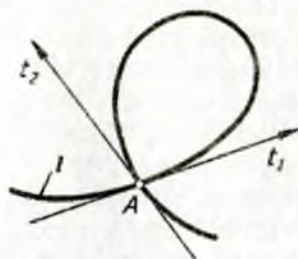
7.12-rasm.



7.13-rasm.



7.14-rasm.



7.15-rasm.

7.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ta'rif. Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi.

Bunday chiziqlar to'g'ri chiziq bilan eng ko'pi ikki nuqtada kesishadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning xususiyatlaridan mashinasozlikda, binokorlikda, umuman, muhandislik amaliyotining barcha tarmoqlarida keng foydalaniladi. Shu boisdan ham 2-tartibli egri chiziqlar mukammal o'rganilgan. Ularga aylana, ellips, parabola, giperbola va ularning xususiy hollari kiradi. Bu egri chiziqlarning tenglamalari va ularning shakllarini aniqlovchi parametrlari analitik geometriyada to'liq o'rganiladi. Chizmachilikda va chizma geometriyada esa ularni yasash va hosil bo'lish usullari o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning nomi, ta'rifi, tenglamasi va shakllari 7.1-jadvalda keltirilgan.

7.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish

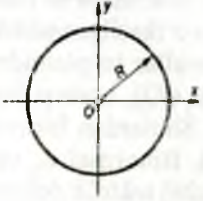
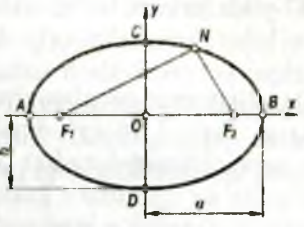
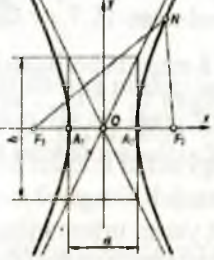
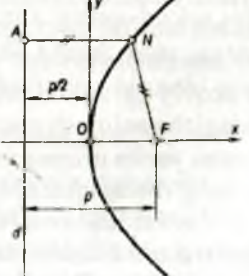
Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq fazoviy egri chiziq deyiladi.

Fazoviy egri chiziq ikki xil egrilikka ega chiziq ham deb yuritiladi. 7.16-rasmda tasvirlangan fazoviy / egri chiziqqa uning C nuqtasida urinma o'tkazish ko'rsatilgan. Egri chiziq ustidagi C nuqta orqali CA va CB kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. So'ngra A nuqtani egri chiziq bo'ylab C nuqtaga yaqinlashtira boramiz.

A nuqta C nuqtaga cheksiz yaqinlashganda CA kesuvchining limiti / egri chiziqning C nuqtasidagi t_1 urinmaga aylanadi. Bunda t_1 urinma / egri chiziqning C nuqtasida o'tkazilgan *yarim urinma* deyiladi. C nuqta orqali o'tuvchi t_2 yarim urinma ham CB kesuvchi orqali xuddi shunday yasaladi. U

o'zining limit vaziyatida t_1 yarim urinma bilan bitta l to'g'ri chiziqda yotadi (7.17-rasm). l fazoviy egri chiziqqa o'tkazilgan urinma orqali tekisliklar dastasi o'tadi. Egri chiziqning xarakterini aniqlash uchun shu tekisliklar dastasidan yopishma, to'g'rilovchi va ularga perpendikulyar bo'lgan normal deb ataluvchi tekisliklar muhim rol o'ynaydi.

7.1-jadval

Aylana Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami aylana deyiladi. Kanonik tenglamasi: $x^2 + y^2 = R^2$ Parametrik tenglamasi: $x = R \cdot \cos t$, $y = R \cdot \sin t$	
Ellips Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami ellips deyiladi: $F_1N + F_2N = AB = \text{const}$. Kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$	
Giperbola Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami giperbola deyiladi: $F_1N - F_2N = A_1A_2 = \text{const}$. Kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi: $x = a \sec t$, $y = b \tg t$	
Parabola Berilgan nuqtadan va d to'g'ri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami parabola deyiladi: $FN = AN$. Kanonik tenglamasi: $y^2 = 2px$ Parametrik tenglamasi: $x = t$, $y = \sqrt{2pt}$ yoki $y = t$, $x = t^2/2p$	

Egri chiziqning yopishma tekisligi quyidagicha yasaladi: berilgan / fazoviy egri chiziqda yotgan C nuqta orqali unga t_1, t_2 yarim urinmalar o'tkazilgan bo'lsin. 7.17-rasmda CA va CB kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazib, t_1 CA (Q_1) va t_2 SB (Q_2) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz. A va B nuqtalarni C nuqtaga yaqinlashtirganda Q_1 va Q_2 tekisliklar t_1 va t_2 yarim urinmalar atrofida aylanib va ustma-ust tushib, Q tekisligini hosil qiladi. Q tekislik / fazoviy egri chiziqqa uning berilgan S nuqtasida o'tkazilgan yopishma tekislik deyiladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko'p normal o'tkazish mumkin. Normallar to'plami hosil qilgan N tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan normal tekislik deyiladi.

Normallar to'plamidagi chiziqlardan biri n_1 yopishma tekislik ustida yotadi ($n_1 \in Q$), boshqa biri n_2 esa unga perpendikulyar joylashgan ($n_2 \perp Q$) bo'ladi. Shulardan birinchisi n_1 – bosh normal, ikkinchisi n_2 – binormal deyiladi. Binormal n_2 va urinma t hosil qilgan T tekislik to'g'rilovchi (rostlovchi) tekislik deb ataladi.

O'zar perpendikulyar N, Q, T tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Bu 1847-yilda birinchi bo'lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan Frene uchyoqligi deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proyeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o'rniida foydalaniladi. Shuningdek, Q – gorizontal, T – frontal va N – profil proyeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqligi tekisliklaridagi proyeksiyalari bo'yicha tekshiriladi.

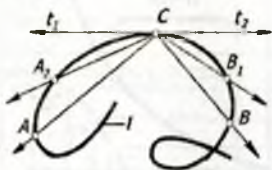
7.8-§. Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi

7.18-rasmda berilgan / fazoviy egri chiziqning 0, 1, 2, ... nuqtalarida unga o'tkazilgan $t_0, t_1, t_2, \dots$ urinmalar va $n_0, n_1, n_2, \dots$ binormallar tasvirlangan. Fazoviy egri chiziq bo'ylab harakatlanuvchi nuqta uzluksiz o'zgaruvchi quyidagi uchta miqdor bilan bevosita bog'liq bo'ladi:

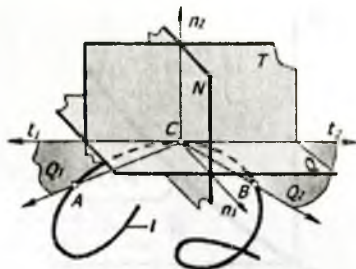
- tanlab olingan 0 nuqtadan boshlab qo'shni nuqtalar orasidagi s masofa;
- t yarim urinmaning burilish burchagi α ;
- qo'shni binormallar orasidagi β burchak.

Yarim urinmalar orasidagi α burchak qo'shni burchak, binormallar orasidagi β burchak burilish burchagi deyiladi. s, α va β miqdorlar fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalari deb yuritiladi.

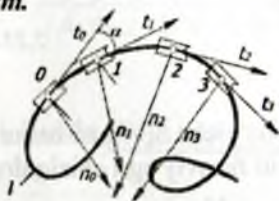
Fazoviy egri chiziqning α qo'shni burchagi va β burilish burchagini quyidagicha aniqlash mumkin (7.19-rasm): ixtiyoriy tanlab olingan biror 0 nuqtadan yarim urinma va binormallarga parallel qilib $t_0, t_1, t_2, \dots$ va $n_0, n_1, n_2, \dots$ to'g'ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to'g'ri chiziqlar to'plami ikki konus sirti: yarim urinmalar yo'naltiruvchi konusi va binormallar yo'naltiruvchi konusini tashkil qiladi. 0 nuqtani sferaning markazi sifatida qabul qilib, biror R radiusli sfera o'tkazamiz. Bu sfera yarim urinmalar va



7.16-rasm.



7.17-rasm.



7.18-rasm.

binormallar yo'naltiruvchi konuslarini yarim urinmalar va binormallar sferik *indikatriasalari* deb ataluvchi egri chiziqlar bo'yicha kesadi. α va β burchaklar miqdorlari bo'yicha (masalan, radianda) indiktrisa yoy uzunliklari o'lanadi. Fazoviy egri chiziqning s uzunligi va unga mos ravishda α qo'shni burchak va β burilish burchagi o'lanib, quyidagi bog'liqliklar tuziladi: $\alpha = f(s)$, $\beta = f_1(s)$. Ular fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalaridagi tenglamalari deb ataladi. 7.20 va 7.21-rasmlarda shu tenglamalarning grafiklari yasalgan.

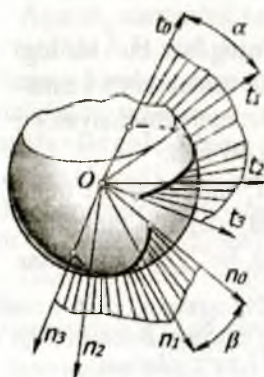
Fazoviy egri chiziqning egriligi. $\alpha = f(s)$ tenglamaning grafigi bo'yicha $\Delta\alpha/\Delta s$ nisbatning $\Delta s \rightarrow 0$ dagi limitini aniqlash mumkin. Bu esa egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egrilik radiusini aniqlaydi, ya'ni

$$R = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \text{ bo'ladi.}$$

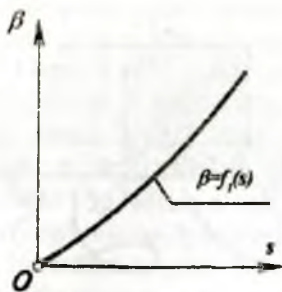
R ning miqdori egri chiziqning cheksiz yaqin uchta nuqtasi orqali o'tuvchi aylana radiusiga teng.

Egrilik radiusi qanchalik kichik bo'lsa, chiziq shuncha ko'p egilgan bo'ladi. Egrilik radiusiga teskari miqdor K_1 fazoviy egri chiziqning *birinchi egriligi* deyiladi. U quyidagicha ifodalanadi: $K_1 = \frac{1}{R}$.

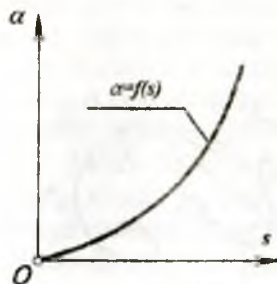
Fazoviy egri chiziqda uning o'z o'qi atrofida burilib harakatlanishi hisobiga ikkinchi xil egilish hosil bo'ladi. Burilish burchagi yopishma tekislikning burilishini ifodalaydigan β burchak bilan o'lanadi.



7.19-rasm.



7.20-rasm.



7.21-rasm.

$\beta=f(s)$ bog'lanish grafigi bo'yicha $\Delta\beta/\Delta s$ nisbatini aniqlash mumkin. $\Delta\beta/\Delta s$ nisbatning $\Delta s \rightarrow 0$ dagi limiti fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi *vint parametri* deyiladi: $P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}$.

Vint parametriga teskari K_2 miqdor fazoviy egri chiziqning *ikkinchi egriligi* yoki *burilish egriligi* deyiladi. Uning qiymati $K_2 = \frac{1}{P}$ bo'ladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi to'la egriligi $K^2 = K_1^2 + K_2^2$ ifodasi bilan aniqlanadi.

7.9-§. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to'g'ri burchakli proyeksiyalariga asosan aniqlash

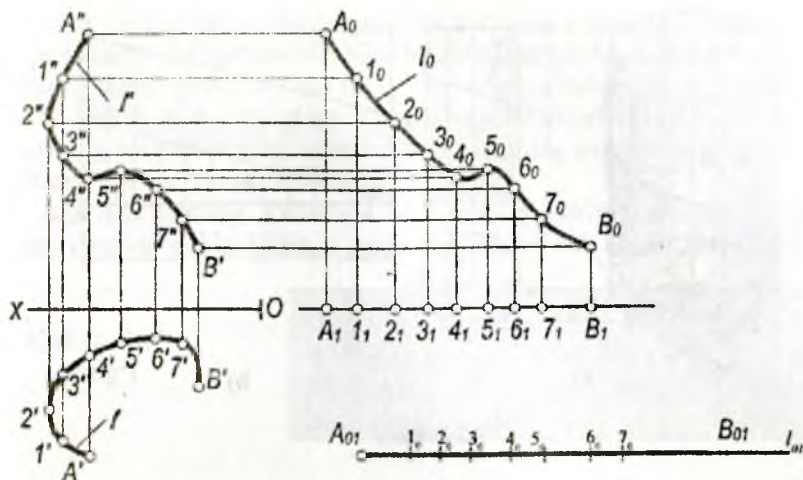
Biror fazoviy l egri chiziqning l' va l'' to'g'ri burchakli proyeksiyalari berilgan bo'lsin (7.22-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi:

Egri chiziqning l' gorizontal proyeksiyasi $A'B'$ ning har bir bo'lagi ixtiyoriy tanlangan a to'g'ri chiziqning A_1 nuqtasidan boshlab unga ketma-ket qo'yib chiqiladi. Hosil bo'lgan A_1B_1 kesma $A'B'$ gorizontal proyeksiyaning to'g'rilangani yoki uning uzunligini o'lchovchi kesma bo'ladi.

So'ngra a to'g'ri chiziqning $A_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots, B_1$ nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontal Ox chiziqdan l'' ($A''B''$) nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'lchanib qo'yiladi. Natijada l_0 egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo'sh joyida l_{01} to'g'ri chiziq olinib, bu to'g'ri chiziqqa l_0 egri chiziq nuqtalari ketma-ket o'lchab qo'yiladi, ya'ni l_0 to'g'rilanadi.

Hosil bo'lgan $A_{01}B_{01}$ kesma l fazoviy egri chiziq $AB(A'B', A''B'')$ bo'lagining uzunligi bo'ladi.



7.22-rasm.

7.10-§. Vint chiziqlari

Silindrik vint chiziqlar

Ta'rif. Nuqtaning silindrik sirt bo'ylab aylanma va ilgariylanma harakati natijasida hosil bo'lgan tracktoriyasi silindrik vint chizig'i deyiladi.

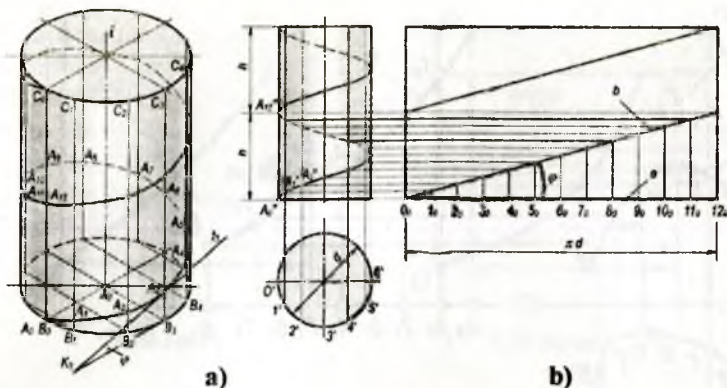
7.23-a rasmda A_0C_0 yasovchining bir necha holatlari $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \dots$ tasvirlangan. Bunda yoylar $A_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=\dots$ o'zaro teng bo'lib, ularning har biri $\pi d/n$ ga teng bo'ladi. Bu yerda, d – silindr diametri, n – silindr asosi bo'laklarining soni.

Agar A_0 nuqtaning holatlari $A_1, A_2, A_3, \dots$ deb belgilansa, uning har bir ko'tarilishi $A_2B_2=2A_1B_1, A_3B_3=3A_1B_1$ va h.k. bo'lib, A_0A_{12} yasovchi bir marta aylanma harakat qilganda $A_{12}B_{12}=12A_1B_1$ bo'ladi. A_0A_{12} masofa — vint chizig'ining qadami, i – vint chizig'ining o'qi, A nuqtadan i gacha bo'lgan masofa vint chizig'ining radiusi deb yuritiladi.

Vint chizig'i chizilgan silindrning diametri va vint chizig'ining qadami uning parametrlari deyiladi. A nuqtaning yana bir marta aylanma harakatidan vint chizig'ining ikkinchi o'rni hosil bo'ladi.

7.23-b rasmda silindrik vint chizig'ining yasalishi ko'rsatilgan. Buning uchun o'qi H ga perpendikulyar, asos diametri d ga va balandligi $2h$ ga teng bo'lgan silindrning gorizonta va fronta proyeksiyalari yasaladi. Silindr asosi bo'lgan aylana teng 12 bo'lakka bo'linadi.

Xuddi shuningdek, vint chizig'ining qadami h ga teng bo'lgan $A_0''A_{12}''$ kesma ham 12 bo'lakka bo'linadi. Vint chizig'ining hosil bo'lish jarayoniga,



7.23-rasm.

ya'ni A nuqtaning silindr yasovchisi bo'yicha va bu yasovchining o'q atrofida aylanma harakatiga asosan, aylananing har bir bo'lagidan yasovchilar va 1-12 kesmaning har bir bo'lagidan o'qqa perpendikulyar kesmalar (nuqtaning aylanma harakati frontal proyeksiyasi) chiqarilsa, l'' vint chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi. Uning gorizonttal proyeksiyasi aylana bilan ustma-ust tushadi. Vint chizig'ining frontal proyeksiyasi sinusoidadagi o'xshash chiziq bo'ladi.

Silindrik vint chizig'ining yoyilmasi 7.23-b rasmda keltirilgan. Buning uchun biror a to'g'ri chiziqqa silindr asosi aylanasi yoy uzunligi πd qo'yiladi va u 12 ta teng bo'lakka bo'linadi. Hosil bo'lgan $0_0, 1_0, 2_0, \dots, 12_0$ nuqtalardan a ga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi. Bu perpendikulyarga vint chizig'i nuqtalarining applikatalari mos ravishda o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan nuqtalar to'plami b to'g'ri chiziqni hosil qiladi. Bu to'g'ri chiziqning a bilan tashkil qilgan ϕ burchagi og'ish burchagi bo'ladi. Vint chizig'ining A_1 nuqtasidan boshlab hosil bo'lgan ikkinchi bo'lagining aylanmasi ham b_1 to'g'ri chiziq shaklida ko'rsatilgan.

Vint chizig'ining ko'tarilish burchagi $\text{tg } \phi = h/\pi d$ formula bilan va uning bir o'ramining uzunligi $l = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}$ formula bilan aniqlanadi.

Silindrning vint chizig'i uning *geodezik chizig'i* deyiladi. Geodezik chiziqlar yordamida sirdagi ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofa o'lchanadi.

Silindrik vint chiziqlar o'ng va chap yo'nalishda bo'ladi. Nuqtaning ko'tarilishida harakat chapdan o'ng tomonga yoki tushishida o'ngdan chapga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq *o'ng yo'nalishli vint chizig'i* deyiladi.

Nuqtaning ko'tarilishida harakat o'ngdan chap tomonga yoki tushishida chapdan o'ngga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq *chap yo'nalishli vint chizig'i* deyiladi.

Silindrik vint chiziqlar mashinasozlikda va qurilishda keng qo'llaniladi.

Vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning barchasi uning o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bilan bir xil φ burchak hosil qiladi (7.23-a rasmi). Shuning uchun silindrik vint chizig'i *bir xil qiya*likdagi chiziqli deyiladi.

Silindrik vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning N tekislikdagi izlarining geometrik o'rni silindrik sirt asosining *evolventasi* bo'ladi. Asos aylanasi esa *evolyuta* hisoblanadi.

Agar silindr sirtidagi boshlang'ich A_0 nuqtaning ilgari lanma va aylanma harakati o'zaro proporsional bo'lmasa, o'zgaruvchi qadamli vint chizig'i hosil bo'ladi.

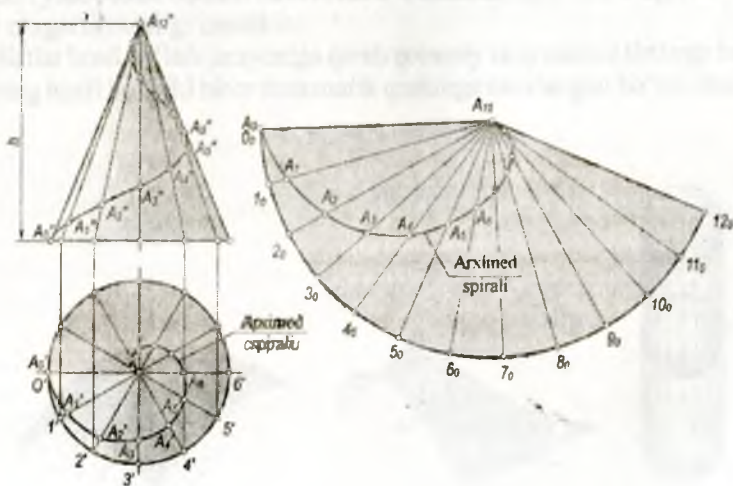
Konus vint chizig'i

Ta'rif. To'g'ri doiraviy konus sirtidagi A nuqta ilgari lanma va aylanma harakat qilsa, unda A nuqta konus sirtiga fazoviy vint chiziqli chizadi. Bu chiziqli konus vint chizig'i deb yuritiladi.

Nuqtaning konus yasovchisi bo'ylab harakati shu yasovchining aylanish burchagiga proporsionaldir. 7.24-a rasmda konusning 12 ta yasovchisining holatlari chizilgan va ularga nuqtalarning holatlari mos ravishda belgilangan. A nuqtaning konus sirti bo'ylab bir marta aylanishidan hosil bo'lgan h masofa *konus vint chizig'ining qadami* deb yuritiladi.

Konus vint chizig'ining konus o'qiga parallel tekislikdagi frontal proyeksiyasi to'liq balandligi kamayuvchi sinusoidaga o'xshash egri chiziqli bo'ladi. Uning konus o'qiga perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasi *Arximed spirali* bo'ladi.

7.24-b rasmda aylanma konus yoyilmasi va unda konus vint chizig'ining yoyilmadagi holati yasalgan. Bu chiziqli yoyilmada Arximed spirali ko'rinishida bo'ladi.



7.24-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekis va fazoviy egri chiziqlarning farqi nimada?
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Egri chiziqning egriligi deb nimaga aytiladi?
4. Egri chiziqning evolyutasi deb nimaga aytiladi?
5. Egri chiziqning biror nuqtasida unga normal qanday o'tkaziladi?
6. Tekis egri chiziqlarning maxsus nuqtalarini aytib bering.
7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering.
8. Silindrik va konussimon vint chiziqlari qanday hosil bo'ladi?
9. Vint chizig'ining qadami nima?
10. Qanday chiziq geodezik chiziq deyiladi?



VIII BOB. SIRTLARNING HOSIL BO'LISHI VA TEKIS CHIZMADA BERILISHI

8.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakati natijasida sirtlar hosil bo'ladi. Sirtlarni hosil qilishning turli usullari ma'lum.

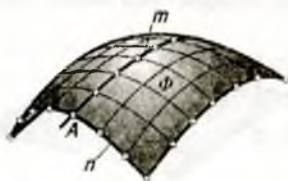
Fazoda m egri chiziq va uni A nuqtada kesib o'tuvchi n egri chiziq berilgan (8.1-rasm). Agar n egri chiziq m egri chiziq bo'ylab uzluksiz harakatlantirilsa, uning qator vaziyatlari to'plamidan iborat biror Φ sirt hosil bo'ladi. Bunda Φ sirtidagi m egri chiziq *sirtning yo'naltiruvchisi*, n egri chiziq uning *yasovchisi* deb ataladi. Aksincha, n egri chiziqni yo'naltiruvchi, m egri chiziqni yasovchi sifatida qabul qilish ham mumkin. Bunda m egri chiziq n egri chiziq bo'yicha harakatlangan bo'ladi.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt *egri chiziqli sirt* (8.1-rasm), to'g'ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt *to'g'ri chiziqli sirt* (8.2-rasm) deb ataladi.

Ixtiyoriy sirtning uzluksiz harakatlantirish natijasida ham sirt hosil qilish mumkin. Bunda hosil bo'lgan Φ sirt harakatlanuvchi Φ_1 yasovchi sirtning har bir vaziyatida u bilan eng kamida bitta umumiy n chiziqqa ega bo'ladi. Masalan, o'zgarmas R radiusli sfera markazi (8.3-rasm) a to'g'ri chiziq bo'ylab uzluksiz harakatlantirilsa, Φ doiraviy silindri sirti hosil bo'ladi.

Sirt yasovchisi harakat davomida o'z shaklini uzluksiz o'zgartirib borishi yoki o'zgartirmasligi mumkin.

Sirtlar hosil bo'lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo'linadi. Sirtning hosil bo'lishi biror matematik qonunga asoslangan bo'lsa, bunday sirt



8.1-rasm.



8.2-rasm.



8.3-rasm.

qonuniy sirt deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera ikkinchi tartibli va hokazo sirtlar bunga misol bo'la oladi.

Sirtning hosil bo'lishi hech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday sirt *qonunsiz sirt* deb ataladi. Bunga topografik (8.4-rasm) va empirik (tajriba asosida olingan) sirtlar (8.5-rasm) kiradi.

Qonuniy sirtlar, o'z navbatida, algebraik va transsendent sirtlarga bo'linadi.

Algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt *algebraik*, transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt *transsendent sirt* deyiladi. Sirtlarning tartibi va sinfi mavjud.

Chizma geometriyada sirtning tartibi uni tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimning tartibi bilan aniqlanadi. Biror to'g'ri chiziq orqali o'tib, sirtga uringan tekisliklar soni sirtning sinfini aniqlaydi.

Qonuniy sirtlar analitik yoki grafik usulda berilishi mumkin. Qonunsiz sirtlar faqat grafik va jadval usulida beriladi.

8.2-§. Sirtlarning berilish usullari

Chizma geometriyada sirtlar asosan analitik, kinematik va karkas usullarda beriladi.

8.2.1. Sirtlarning analitik usulda berilishi. Analitik geometriyada sirt bitta xususiyatga ega bo'lgan nuqtalar to'plami sifatida talqin qilinadi.

Sirtidagi biror ixtiyoriy A nuqtaning x, y, z koordinatalari orasidagi bog'lanish orqali undagi hamma nuqtalarga tegishli xususiyatni ifodalovchi tenglama *sirtning tenglamasi* deyiladi.

Uch o'lchamli fazoda sirt analitik usulda berilishi mumkin.

Sirt umumiy ko'rinishdagi oshkormas funksiya tenglamasi orqali quyidagicha beriladi:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

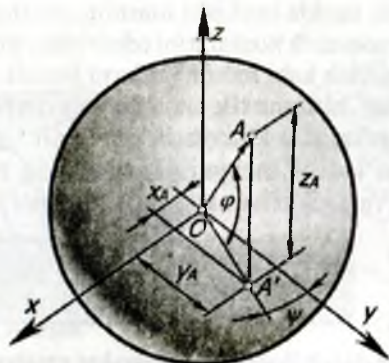
8.6-a rasmdagi sfera sirtida yotgan A nuqtaning x, y, z koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlaydigan tenglama sferaning tenglamasini ifodalaydi. Markazi koordinata boshida joylashgan sferaning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:



8.4-rasm.



8.5-rasm.



8.6-rasm.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (2)$$

Sirtni funksiyaning grafigi sifatida aniqlaydigan oshkor ko'rinishda berish mumkin:

$$z = f(x, y). \quad (3)$$

Sferaning tenglamasini z applikataga nisbatan

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Sirt parametrlari orqali berilishi mumkin.

Sirtni $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ vektorlar orqali ifodalab, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x = x(u, v), \quad u = u(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (5)$$

Bu tenglamalardagi u va v parametrlar bo'lib, ular (u, v) tekislikning ma'lum qismini uzluksiz bosib o'tadi.

Sferaning parametrik tenglamasi φ kenglik va ψ uzunlik (8.6-rasm) parametrlari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \psi, \\ y &= R \cos \varphi \sin \psi, \\ z &= R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Agar (6) tenglamalar φ va ψ parametrlardan ozod qilinsa, sferaning x, y, z koordinatalar orqali ifodalangan (2) tenglamasiga ega bo'linadi.

Sirtlarning analitik usulda berilishi ularning chizmalarini kompyuterda chizish, differensial geometrik xossalarni tekshirish, shu jumladan, ularning yoyilmalarini aniq bajarish kabi imkoniyatlarni beradi.

8.2.2. Sirtlarning kinematik usulda berilishi. Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakatidan kinematik sirt hosil bo'ladi. Unda sirtning o'zi ham uzluksiz bo'ladi. Kinematik harakatning oddiy asosiy turlari: ilgarilanma, aylanma va bu ikki harakatning yig'indisi vintsimon harakatdir.

Kinematik sirt

Ta'rif. Yasovchisining kinematik harakati natijasida hosil bo'lgan sirt kinematik sirt deyiladi.

Harakatning turiga qarab ilgarilanma harakat natijasida hosil bo'lgan sirt *tekis parallel ko'chirish sirti*, aylanma harakatdan hosil bo'lgan sirt *aylanish sirti* va vintsimon harakat natijasida hosil bo'lgan sirt *vint sirti* deb ataladi.

Chizma geometriyada, ko'pincha, sirtlarning kinematik usulda hosil bo'lishidan foydalaniladi. Kinematik sirtlarning ko'rinishi uning yasovchisining shakliga va fazodagi harakat qonuniga bog'liq bo'ladi. Masalan, chiziqli sirtlarda yasovchining shakli to'g'ri chiziqli bo'lib, uning fazodagi harakat qonunini sirtning yo'naltiruvchisi belgilaydi. Aylanish sirtlarida yasovchining shakli ixtiyoriy chiziqli bo'lib, hosil bo'lish qonuni uning ma'lum o'q atrofida aylanishidir.

Vint sirtlarida yasovchining shakli to'g'ri yoki egri chiziqli bo'lib, hosil bo'lish qonuni vintsimon (aylanma va ilgarilanma) harakatdir.

Tekis parallel ko'chirish sirtlari

Ta'rif. Yasovchining ma'lum yo'naltiruvchi bo'yicha doimo o'z-o'ziga parallel ravishda harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt tekis parallel ko'chirish sirti deyiladi.

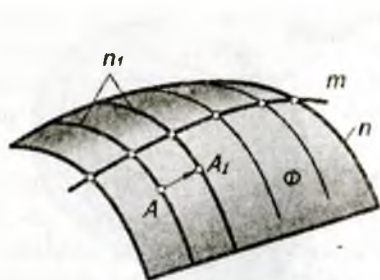
8.7-rasmda n tekis egri chiziqli yasovchining m egri chiziqli bo'ylab doimo o'z-o'ziga parallel ravishda ilgarilanma harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan Φ sirti ko'rsatilgan. Bu tekis parallel ko'chirish sirtidir. n yasovchining hamma nuqtalari harakat davomida m yo'naltiruvchiga o'xshash tekis egri chiziqlar hosil qiladi.

Agar m egri chiziqli n egri chiziqli bo'ylab harakatlantirilsa, uning nuqtalari ham n egri chiziqliga o'xshash egri chiziqlar hosil qiladi. Bu chiziqlar nuqtalarning yo'llari deyilib, sirt ustida to'r hosil qiladi.

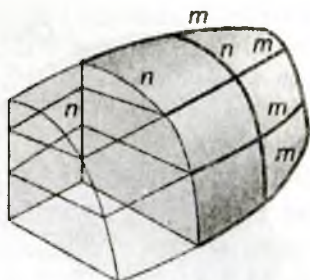
Kinematik sirt yasovchilarining uzluksiz harakati va sirtning o'zining uzluksizligidan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: *kinematik sirtning ixtiyoriy nuqtasidan shu sirtga yotuvchi va to'r oilalariga kiruvchi ikkita egri chiziqli o'tkazish mumkin.*

Agar m yo'naltiruvchi to'g'ri chiziqli bo'lsa, silindr sirti hosil bo'ladi.

Biror parabola boshqa parabola bo'yicha tekis siljitsa, giperbolik paraboloid sirti hosil bo'ladi. Demak, bu sirtlar ham tekis parallel ko'chirish sirtlari turiga kiradi.



8.7-rasm.



8.8-rasm.

8.2.3. Sirtlarning karkas usulida berilishi. Ba'zi bir sirtlarni aniq geometrik qonuniyatlar bilan berib bo'lmaydi. Bunday sirtlar shu sirt ustida yotuvchi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan beriladi.

Sirtning uning ustidagi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan berilishi uning *karkas usulida berilishi* deb yuritiladi. Sirt ustida tanlangan chiziqlar to'plami *sirtning karkaslari* deyiladi (8.8-rasm).

Sirtlarni uzluksiz karkaslar orqali hosil qilish qulaydir. Sirtlarning karkaslari fazoviy egri chiziqlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Ammo sirtlarni tekis egri chiziqlar (kesimlar) dan iborat karkaslari bilan berish qulayroqdir. Sirtlarning karkaslari bir, ikki va uch tekis kesimlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin (8.9-rasm). Bunda har bir to'plam sirtning asosiy karkasi bo'lib, qolganlari unga qo'shimcha karkas sifatida olinadi.

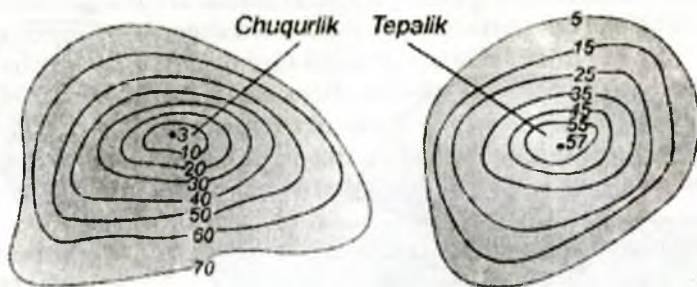
Har bir sirt bir parametrlilik tekis egri chiziqlardan tashkil topgan bo'lib, bu egri chiziqlarning joylashishi va xossalari sirtning xossalarini aniqlaydi.

Sirt nuqtali karkas yoki chiziqli karkaslari bilan berilishi mumkin. Sirt nuqtali karkas bilan berilsa, bu nuqtalar to'plami shunday tanlanishi kerakki, unga asosan sirtning va uning har bir bo'lagingining ko'rinishi va shaklini tasavvur qilish mumkin bo'lsin.

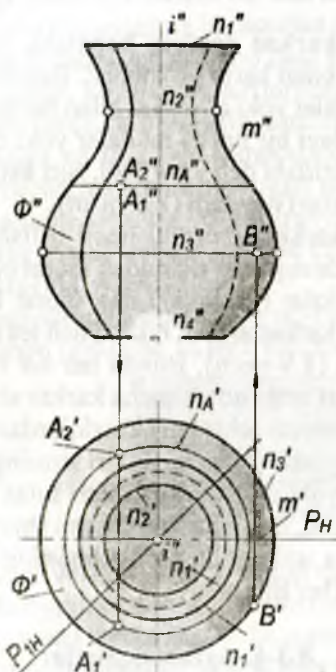
8.3-§. Aylanish sirtlari

Ta'rif. Biror tekis yoki fazoviy chiziqning qo'zg'almas to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanish sirti deb ataladi.

Harakatlanuvchi chiziq *sirtning yasovchisi*, qo'zg'almas to'g'ri chiziq esa uning *aylanish o'qi* deyiladi. Yasovchi va aylanish o'qi aylanish sirtining aniqlovchilarini tashkil qiladi. 8.10-rasmda m (m' , m'') egri chiziqning i (i' , i'') aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan umumiy ko'rinishdagi aylanish sirti tekis chizmada tasvirlangan. Yasovchi va aylanish o'qi ma'lum



8.9-rasm.



8.10-rasm.

bo'lsa, aylanish sirti to'la berilgan hisoblanadi. Sirtning berilishini uning aniqlovchilari orqali $\Phi(m, i)$ ko'rinishida yozish mumkin.

Tekis chizmada aylanish sirti $\Phi'(m', i')$ va $\Phi''(m'', i'')$ proyeksiyalari bilan hamda aniqlovchilarning istalgan ikki proyeksiyasi bilan berilgan. Aylanish jarayonida yasovchining hamma nuqtalari aylanalar bo'yicha harakat qilib, bu aylanalar *sirtning parallellari* deyiladi. Aylanish o'qidan o'tgan barcha tekisliklar *meridian tekisliklari*, ularning aylanish sirti bilan

kesishish chiziqlari esa *sirtning meridianlari* deyiladi. Sirtning barcha meridianlari kongruent bo'ladi. Frontal meridian tekisligi *bosh meridian tekisligi* hisoblanib, uning sirt bilan kesishish chizig'i *bosh meridian chizig'i* yoki sirtning *frontal ocherki* deb ataladi. 8.10-rasmda umumiy ko'rinishdagi aylanish sirtining aylanish o'qi gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga perpendikulyar joylashganligi uchun sirtidagi parallellarning ($n_1'', n_2'', n_3'', \dots$) frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasi ko'rinishida, gorizontal proyeksiyalari esa haqiqiy kattalikda, ya'ni aylana ko'rinishida tasvirlanadi. Tekis chizmada $P(P_H)$ bosh va $P_1(P_{1H})$ oddiy meridian tekisliklari hosil qilgan meridian kesimlari ko'rsatilgan. Bosh meridian V ga parallel bo'lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi.

Agar parallelning bosh meridian bilan kesishish nuqtasidan bosh meridianga o'tkazilgan urinma aylanish o'qiga parallel bo'lsa, bu parallel *ekvator* yoki *bo'yin chizig'i* deyiladi. Bu parallel ikki yon qo'shni parallellardan katta bo'lsa — *ekvator*, agar ulardan kichik bo'lsa, *bo'yin chizig'i* deyiladi. Demak, biror aylanish sirtida bir necha ekvator va bo'yin chiziqlari bo'lishi mumkin. 8.10-rasmdagi aylanish sirtida parallellardan $n_2(n_2', n_2'')$ bo'yin, $n_3(n_3', n_3'')$ esa ekvator chizig'i hisoblanadi.

Boshqa sirtlar singari aylanish sirti ham cheksiz ko'p nuqtalar to'plamidan iboratdir. Bu nuqtalarni to'la-to'kis chizmada tasvirlab bo'lmaydi. Shuning uchun ham H va V ga perpendikulyar qilib aylanish sirtiga urinma silindrlar o'tkaziladi. Urinma silindrlarning H bilan kesishish chizig'i sirtning *gorizontal ocherki*, V bilan kesishish chizig'i esa uning *frontal ocherki* deyiladi. Aylanish sirtlari ko'pincha o'zining gorizontal va frontal ocherklari bilan tasvirlanadi. 8.10-rasmdagi aylanish sirtining frontal ocherki bosh meridian m'' va n_1'', n_4'' parallellari bilan, gorizontal ocherki n_2' va n_3' parallellari bilan tasvirlangan.

Gorizontal va frontal ocherklar sirt proyeksiyalarining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlarini aniqlashga ham yordam beradi.

Parallellar yorda nida sirt ustida nuqtalarning proyeksiyalari topiladi. Masalan, aylanish sirtiga tegishli A_1 va A_2 nuqtalarning frontal proyeksiyalari A_1'' va A_2'' larning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' n_4 parallelning gorizontal proyeksiyasi n_4' da aniqlangan.

Ekvatorda yotuvchi B nuqtaning gorizontal B' proyeksiyasi berilgan. Uning B'' frontal proyeksiyasi ekvatorning n_3'' frontal proyeksiyasida bo'ladi.

Aylanish sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo'llaniladi. Chunki ko'pchilik mexanizmlar aylanma harakat qiladi va aylanish sirtlari stanokda osongina yasalanadi.

Sirtning eng katta paralleli uning *ekvatori*, eng kichik paralleli esa *bo'yini* deb ataladi.

I.oyihalanadigan mashina mexanizmlarining vazifasi, unga qo'yiladigan texnik talablar va shakliga qarab aylanish sirtining yasovchisi tanlanadi.

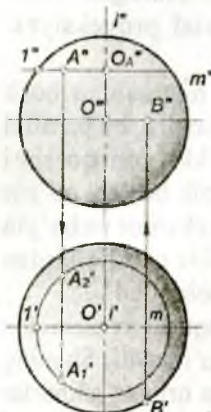
8.3.1. Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari.

Ta'rif. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt ikkinchi tartibli aylanish sirtlari deyiladi.

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlaridan quyidagilarni ko'rib chiqamiz:

Sfera

Ta'rif. Aylananing o'z diametrlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt sfera deb ataladi.



8.11-rasmda tasvirlangan sfera ustidagi A nuqtaning A'' frontal va B nuqtaning B' gorizontal proyeksiyalari berilgan. A nuqtaning A_1' va A_2' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun u orqali O_A "l" radiusli parallel o'tkaziladi. A nuqtaning gorizontal proyeksiyalari shu parallelning gorizontal proyeksiyasida yotadi. A nuqta sferaning oldingi yoki orqa yarmida joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun uning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' nuqtalar parallelning gorizontal proyeksiyasida topiladi. B nuqta sfera ekvatorida yotganligi uchun uning B'' frontal proyeksiyasi bir qiymatli bo'lib, u ekvatorning frontal proyeksiyasida topiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

8.11-rasm.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R \neq 0.$$

Markazi ixtiyoriy $A(x_p, y_p, z_p)$ nuqtada bo'lgan sfera tenglamasi

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2 = R^2$$

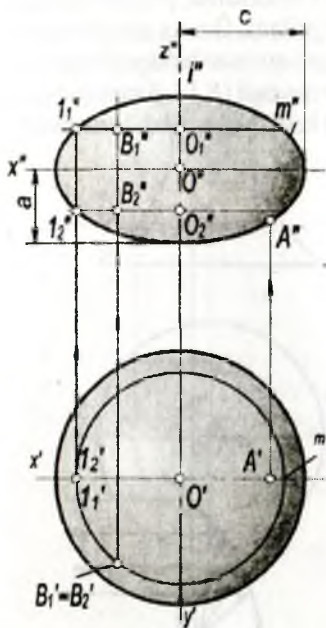
bo'ladi.

Aylanma ellipsoid sirt

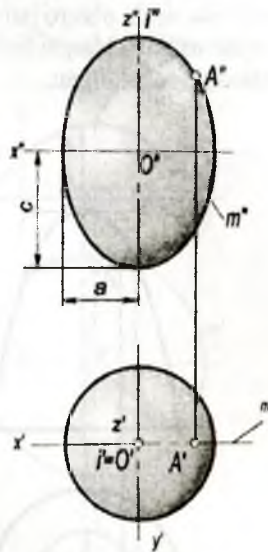
Ta'rif. Ellipsning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma ellipsoid deyiladi.

Bunda $m(m', m'')$ – ellips va $i(l', l'')$ aylanish o'qi ellips o'qi bilan ustma-ust tushadi va sirt $\Phi(i, m)$ ko'rinishda yoziladi.

Ellipsning kichik o'qi atrofida aylanishidan *siqiq aylanma ellipsoid* (8.12-rasm), katta o'qi atrofida aylanishidan *cho'ziq aylanma ellipsoid* hosil bo'ladi (8.13-rasm). 8.12- va 8.13-rasmlarda ellipsoidlar ustida berilgan A va B nuqtalarning bitta proyeksiyasi bo'yicha ularning yetishmaydigan proyeksiyalarini



8.12-rasm.



8.13-rasm.

yasash ko'rsatilgan. Nuqtalarning yetishmaydigan proyeksiyalari parallel, meridian va proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida aniqlangan.

Markazi koordinatalar boshida va katta o'qi aylanish o'qi bo'lgan ellipsning aylanishidan hosil bo'lgan aylanish ellipsoidining kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ bunda } c \neq a \text{ bo'ladi.}$$

Yer sharining shakli siqilgan ellipsoid – geoidni eslatadi.

**Aylanma
paraboloid sirt**

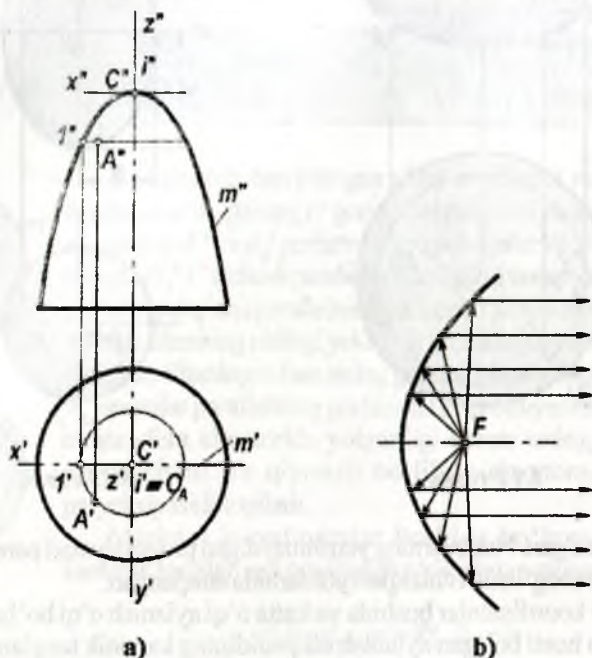
Ta'rif. Parabolaning o'z o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma paraboloid deyiladi.

8.14-rasmda m (m' , m'') parabolaning i (i' , i'') o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ (i' , m) aylanma paraboloidning proyeksiyalari berilgan va uning ustida nuqta tanlash ko'rsatilgan.

Uchi koordinatalar boshida bo'lgan va o'qi Oz bo'lgan aylanma paraboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x^2 + y^2 = -2pz, \text{ bunda } p \neq 0 \text{ bo'ladi.}$$

Aylanma paraboloid parabolik oynalar sirti hisoblanib, projektorlar, parabolik antennalar va avtomobil faralari uchun ishlatiladi. Bunda parabolaning fokal xossasiga asosan parabola fokusida o'atilgan nur manбайдan chiquvchi nurlar parabola sirtida sinib, o'zaro parallel bo'lib qaytadi (8.14-b rasm). Nur yig'ish sirtlari, tovush ushlagichlar, radiolokatorlarni konstruksiyalash ham parabolaning ushbu xossasiga asoslangan.



8.14-rasm.

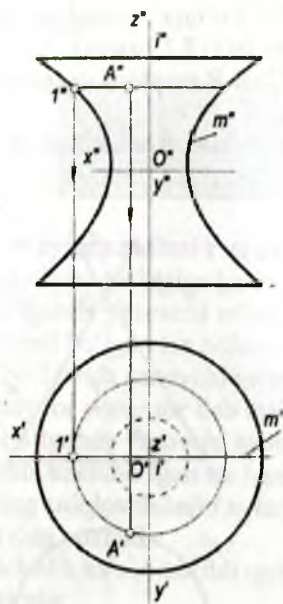
Aylanma giperboloid sirt

Ta'rif. Giperbolaning o'z mavhum yoki haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma giperboloid deyiladi.

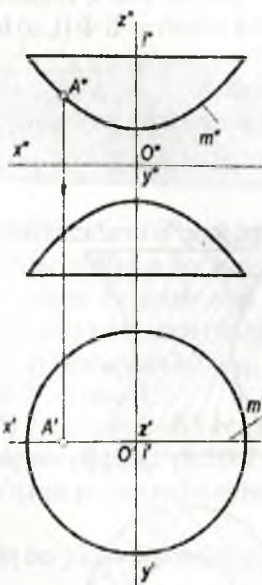
Giperbolaning mavhum o'q atrofida aylanishidan *bir pallali aylanma giperboloid* hosil bo'ladi. 8.15-rasmda $i(i', i'')$ o'qi atrofida $m(m', m'')$ giperbolaning aylanishidan hosil bo'lgan bir pallali $\Phi(i, m)$ giperboloid va uning ustida nuqta tanlash ko'rsatilgan.

Markazi koordinatalar boshida bo'lgan bir pallali aylanma giperboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ bunda } c \neq a \text{ bo'ladi.}$$



8.15-rasm.



8.16-rasm.

Giperbolaning o'z haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan *ikki pallali aylanma giperboloid* hosil bo'ladi. Bu sirt qabariq tubi bilan bir-biriga qaratilgan qozonlarni eslatadi. Bunday sirt 8.16-rasmda tasvirlangan. $\Phi(i, m)$ ikki pallali giperboloid ustida A nuqtaning proyeksiyalari ko'rsatilgan. Ikki pallali aylanma giperboloidning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \text{ bunda } c \neq 0 \text{ bo'ladi.}$$

8.3.2. To'g'ri chiziqning aylanishidan hosil bo'lgan ikkinchi tartibli aylanish sirtlari. To'g'ri chiziqning biror to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan ham 2-tartibli aylanish sirti hosil bo'lishi mumkin.

- Aylanish o'qi $i(i', i'')$ atrofida u bilan ayqash $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning aylanishi natijasida bir pallali aylanma giperboloid sirti $\Phi(i, a)$ hosil bo'ladi (8.17-rasm).

- Yasovchi a to'g'ri chiziq aylanish o'qi i bilan kesishsa, ikkinchi tartibli aylanma konus sirti $\Phi(i, a)$ hosil bo'ladi (8.18-rasm).

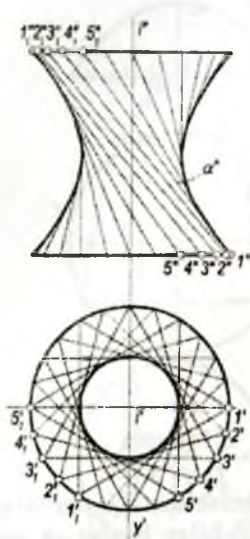
Uchi koordinata boshida bo'lgan aylanma konus sirtining kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ bunda } c \neq a \text{ bo'ladi.}$$

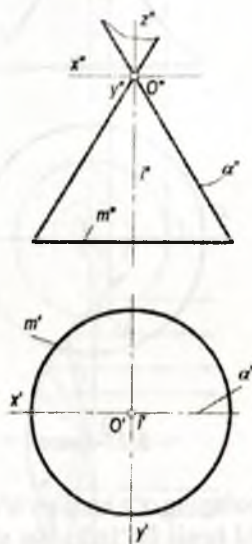
• $a(a', a'')$ yasovchi to'g'ri chiziqlar $i(i', i'')$ o'qqa parallel bo'lsa, ikkinchi tartibli aylanma silindri sirti $\Phi(i, a)$ hosil bo'ladi (8.19-rasm).

Bu silindrning tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ bo'ladi. R miqdor a va i to'g'ri chiziqlar orasidagi masofadir.

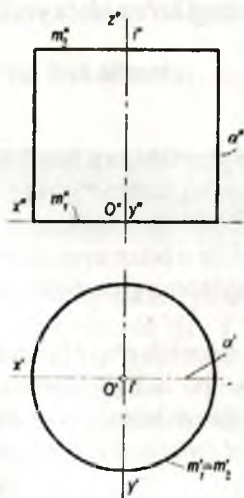
Bir pallali giperboloid, konus, silindri sirlari ham aylanish, ham chiziqli sirtlar turiga kiradi.



8.17-rasm.



8.18-rasm.



8.19-rasm.

8.3.3. Tor sirti.

Ta'rif. Biror aylananing shu aylana tekisligida yotuvchi, ammo aylana markazidan o'tmaydigan ixtiyoriy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tor sirti deyiladi.

Yasovchi m aylana radiusi r va aylana markazidan i o'qqacha bo'lgan R masofalarning o'zaro nisbatiga ko'ra, tor sirlari turlicha bo'ladi:

- $r < R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ni kesmaydi va hosil bo'lgan tor *ochiq tor* yoki *halqa* deyiladi (8.20-a rasm).

- $r = R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ga urinadi. Bunday tor *yopiq tor* deb ataladi (8.20-b rasm).

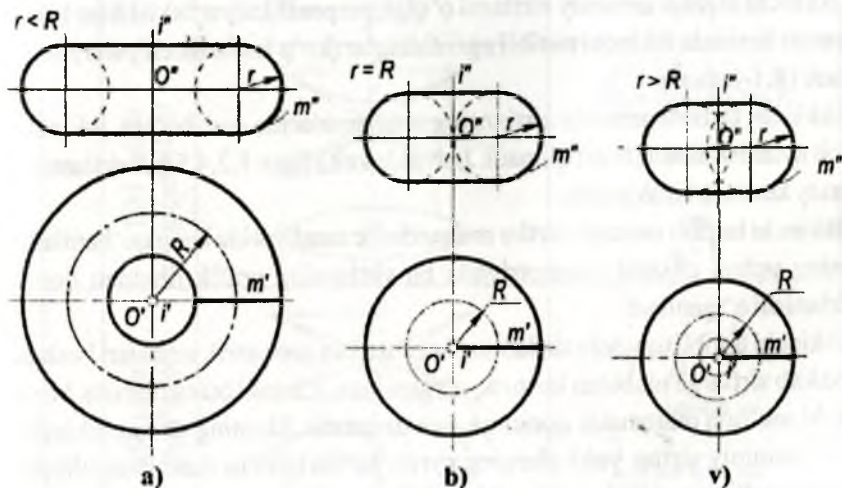
- $r > R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ni kesadi. Bu holda hosil bo'lgan tor ham *yopiq tor* deyiladi (8.20-v rasm).

Tor sirtining aniqlovchilari i aylanish o'qi va m yasovchi aylana bo'ladi va $\Phi(i, a)$ tarzida yoziladi.

Ixtiyoriy tekislik tomi 4-tartibli egri chiziq bo'yicha kesadi, shuning uchun tor 4-tartibli sirtidir.

Markazi koordinatalar boshida va $r = R$ bo'lgan tor sirtining tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$(z^2 + x^2 + y^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$



8.20-rasm.

8.4-§. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + k = 0.$$

Agar bu tenglamaning har ikkala tomoni o'nta koeffitsientdan birortasiga, masalan, k koeffitsientiga bo'linsa, $\frac{A}{k}, \frac{B}{k}, \frac{C}{k}, \dots$ kabi 9 ta nisbat hosil bo'ladi.

Bularning har biri ikkinchi tartibli sirtning parametrlari bo'la oladi. Demak, ikkinchi tartibli sirt 9 ta nuqta orqali berilishi mumkin.

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning grafik tarzda berilishi va ularni aniqlovchi geometrik parametrlar 8.1-jadvalda keltirilgan. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlardan uch o'qli ellipsoid, bir pallali va ikki pallali giperboloidlar markaziy sirtlarga kiradi. Qolgan barcha sirtlar markazsizdir. Markaziy sirtlar uchta simmetriya tekisligiga ega. Ularning simmetriya tekisliklari $y=0$ (XOZ), $x=0$ (YOZ) va $z=0$ (XOY) koordinata tekisliklari bo'ladi. Markaziy sirtlarning bu tekisliklar bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesim ularning *bosh kesimlari* deb yuritiladi. Simmetriya tekisligiga parallel bo'lgan tekisliklardagi kesimlarni sirtlar tenglamasidan foydalanib va kesimlarning o'xshashligiga asosan osongina yasash mumkin.

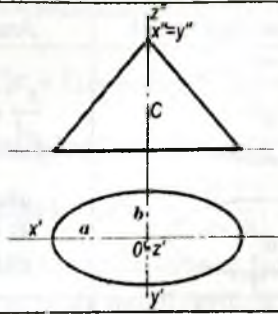
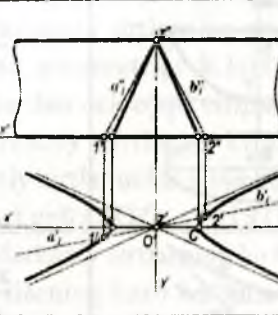
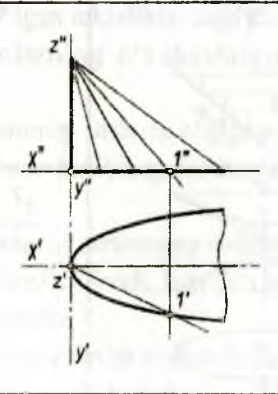
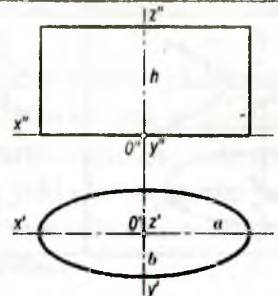
Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarni o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziqlar (ko'p hollarda ellipslar) hosil bo'ladi (8.1-jadval).

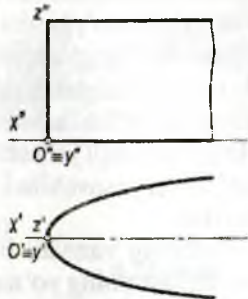
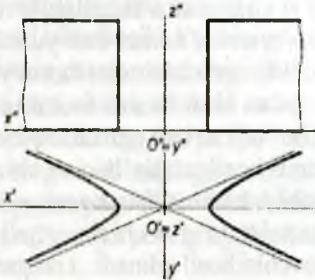
Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning tenglamalarida $a=b$ bo'lsa, ikkinchi tartibli aylanish sirtlari hosil qilinadi. Jadvalda keltirilgan 1,2,4,5,6,9 sirtlarning doiraviy kesimlari mavjuddir.

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar muhandislik amaliyotida keng qo'llaniladi. Shuning uchun chizma geometriyada bu sirtlarning grafik jihatdan qulay tasvirlanishi o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli umumiy sirtlarning kesimlari va geometrik xossalari boshqa murakkab sirtlarga nisbatan ko'proq o'rganilgan. Chunki bu sirtlarning hosil bo'lishi ma'lum matematik qonunga asoslangandir. Shuning uchun ikkinchi tartibli umumiy sirtlar yoki ularning ayrim bo'laklaridan mashinasozlikda, samolyotsozlikda, qurilish amaliyotida, meditsina asboblari yasashda va boshqa sohalarida keng foydalaniladi.

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
1.	Uch o'qli ellipsoid		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ bunda $a > c > b$ $c > a > b$ $a > b > c$ $b > a > c$ $c > b > a$ $b > c > a$
2.	Elliptik paraboloid		$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$ bunda $p > q$ yoki $p < q$
3.	Giperbolik paraboloid		$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$ bunda $p > q$ yoki $p < q$
4.	Ikki pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$ bunda $0 < c < \infty$ va $a > b$
5.	Bir pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ bunda $0 < c < \infty$ va $a > b$

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
6.	Elliptik konus		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ bunda $0 < c < \infty$ va $a > b$
7.	Giperbolik konus		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ bunda $a > b$ va $0 < c < \infty$
8.	Parabolik konus		$x^2 - 2py = z^2,$ bunda $p \neq 0$
9.	Elliptik silindr		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $z = h,$ bunda $a > b$

10.	Parabolik silindr		$y^2 = 2px$ $z = h,$ bunda $p \neq 0$
11.	Giperbolik silindr		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $z = h,$ bunda $a > b$

8.5-§. Chiziqli sirtlar

Ta'rif. To'g'ri chiziqliqning fazoda berilgan uchta (m , n va l) yo'naltiruvchi chiziqlarni kesib o'tib, uzluksiz harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt chiziqli sirt deyiladi.

Bu sirt uch yo'naltiruvchi chiziqli sirt deb yuritiladi. Chiziqli sirt aniqlovchi parametrlar orqali $\Phi(m, n, l)$ ko'rinishda yoziladi.

8.21-a rasmda umumiy holdagi chiziqli sirtning hosil qilish ko'rsatilgan. Chiziqli sirtning bunday umumiy holi *qiyshiq silindr* deyiladi. 8.21-b rasmda qiyshiq silindrning yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Bu sirtning hosil bo'lish jarayoni quyidagichadir: m , n va l egri chiziqli yo'naltiruvchilar berilgan bo'ladi. m chiziqda ixtiyoriy A nuqta tanlaymiz (8.21-a rasm). l chiziqni yo'naltiruvchi qilib, (A, l) konus sirti hosil qilamiz. Bu konus n chiziq bilan biror B nuqtada kesishadi. A, B, C nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq uch yo'naltiruvchi sirt (qiyshiq silindr)ning yasovchilaridan biri bo'ladi. Shuningdek, m ga tegishli bo'lgan barcha nuqtalarni konuslarning uchi deb qabul qilib, l chiziq shu konuslarning

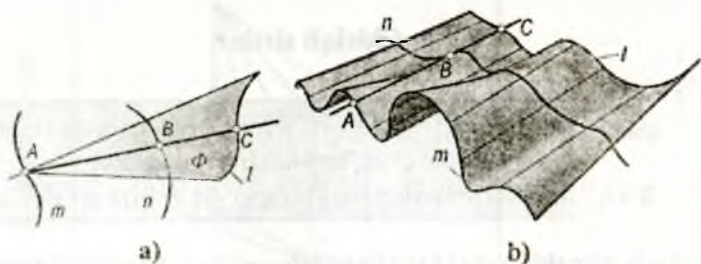
yo'naltiruvchisi bo'lganda, bu konuslar n chiziq bilan kesishib, uning ustida konusga tegishli nuqtalar hosil qiladi. Bu nuqtalardan o'tuvchi chiziqlar qiyshiq silindr sirtining to'g'ri chiziqli yasovchilari to'plamini hosil qiladi.

Xususiy hollarda yo'naltiruvchi m, n va l egri chiziqlarning ba'zilari yoki hammasi to'g'ri chiziq bo'lishi mumkin. Bu to'g'ri chiziqlardan birontasi cheksiz uzoqlikda (xosmas) yoki ba'zilari nuqta ko'rinishida bo'lishi ham mumkin.

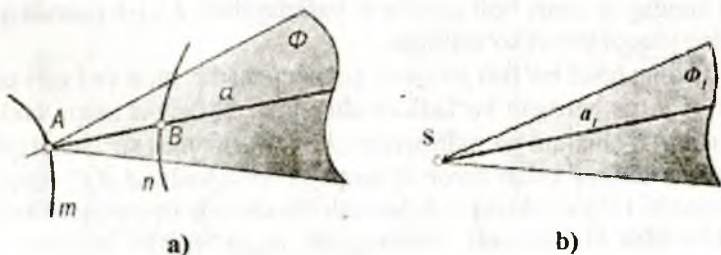
Cheksiz uzoqlikda bo'lgan to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchining vaziyati biror tekislik bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari unga parallel bo'ladi. Bu tekislik *parallelizm tekisligi* deyiladi.

Cheksiz uzoqlashtirilgan nuqtaning vaziyati biror to'g'ri chiziq bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari uning yo'nalishiga parallel bo'ladi.

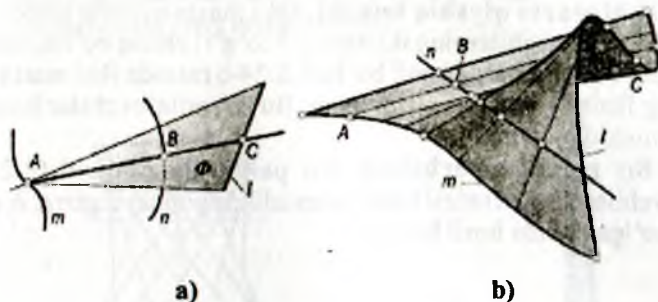
Agar fazoda ixtiyoriy biror S nuqta tanlab, u orqali Φ qiyshiq silindr sirtining yasovchilariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, biror Φ_1 konus sirti hosil bo'ladi. Bu konus sirti *yo'naltiruvchi konus* deb yuritiladi (8.22-a, b rasm). Demak, qiyshiq silindr sirtini ikki egri chiziqdan iborat yo'naltiruvchilar (m, n) va yo'naltiruvchi konus Φ_1 bilan ham berish mumkin. Bunday holda sirtni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi: m va n egri chiziqli yo'naltiruvchilar hamda S uchli Φ_1 yo'naltiruvchi konus berilgan bo'lsin. m chiziq ustidagi ixtiyoriy A nuqtani biror Φ_1 konusning uchi deb olib, $\Phi \parallel \Phi_1$ konus yasaladi. So'ngra $\Phi \cap n = B$ nuqta aniqlanadi. A va B nuqtalar to'g'ri chiziq orqali tutashtirilib, qiyshiq silindrning to'g'ri chiziqli yasovchisi hosil qilinadi. A nuqtani m egri chiziq bo'yicha



8.21-rasm.



8.22-rasm.



8.23-rasm.

harakatlantirib, n chiziqli ustida B nuqta singari qator nuqtalar hosil qilish mumkin. Qiyshiq silindrning bu usul bilan hosil bo'lishini geometrik tomondan quyidagicha tahlil qilish mumkin: sirtning m va n egri chiziqli yo'naltiruvchilari xos chiziqlar bo'lib, l yo'naltiruvchi egri chiziqli cheksiz uzoqlashtirilgan bo'ladi. Cheksiz uzoqlashtirilgan yo'naltiruvchining vaziyati yo'naltiruvchi konus orqali beriladi, ya'ni sirtning har bir to'g'ri chiziqli yasovchisi m va n chiziqlarni kesib, yo'naltiruvchi konusning mos yasovchisi bilan cheksiz uzoqlikda kesishadi.

Chiziqli sirtlar yoyiladigan va yoyilmaydigan sirtlarga bo'linadi.

Ta'rif. Cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchi (to'g'ri chiziqli) o'zaro parallel yoki kesishuvchi bo'lib, tekis element hosil qilsa, bunday chiziqli sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga konus, silindr sirtlari misol bo'la oladi.

Agar cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchi (to'g'ri chiziqli) o'zaro uchrashmas vaziyatda bo'lsa, bunday chiziqli sirtlar yoyilmaydigan sirtlar deyiladi.

8.6-§. Yoyilmaydigan chiziqli sirtlar

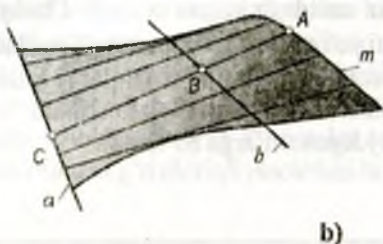
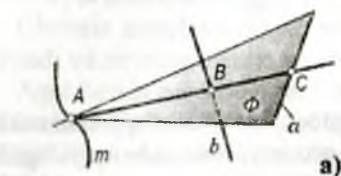
Yoyilmaydigan chiziqli sirtlarga quyidagilar kiradi:

8.6.1. Qiyshiq silindr. Qiyshiq silindr (8.21-a, b rasm) uchala yo'naltiruvchisi ham egri chiziqli ko'rinishida bo'lganda hosil bo'ladi. Uning aniqlovchilari m, n, l egri chiziqlardan iborat bo'lib, $\Phi(m, n, l)$ ko'rinishida yoziladi. Bu sirtlarning yaqqol tasviri 8.21-b rasmda berilgan.

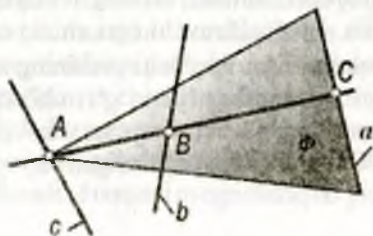
8.6.2. Ikki marta qiyshiq silindroid. Ikki marta qiyshiq silindroid (8.23-a, b rasm) yo'naltiruvchilarining ikkitasi m, n egri chiziqli va uchinchisi l to'g'ri chiziqli bo'lgan hollarda hosil bo'ladi. 8.23-b rasmda bunday sirtning yaqqol tasviri berilgan. Bu sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(m, n, l)$ ko'rinishida yoziladi.

8.6.3. Ikki marta qiyshiq konoid. Ikki marta qiyshiq konoid (8.24-a, b rasm) yo'naltiruvchilarning ikkitasi a , b to'g'ri chiziq bo'lib, uchinchisi m egri chiziq bo'lgan holda hosil bo'ladi. 8.24-b rasmda ikki marta qiyshiq konoidning fazoviy tasviri ko'rsatilgan. Bu sirt aniqlovchilar bilan $\Phi(m, a, b)$ ko'rinishida yoziladi.

8.6.4. Bir pallali giperboloid. Bir pallali giperboloid (8.25-rasm) yo'naltiruvchilarining uchalasi ham bir tekislikda yotmaydigan a , b , c to'g'ri chiziqlar bo'lgan holda hosil bo'ladi.



8.24-rasm.



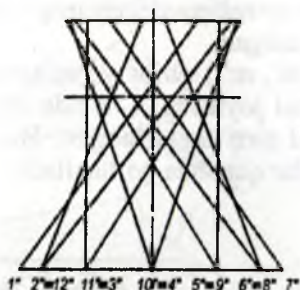
8.25-rasm.

Bir pallali giperboloid sirtida ikki to'g'ri chiziqlar oilasi mavjud bo'lib, ularning har biriga mansub biror to'g'ri chiziq ikkinchi oiladagi hamma to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadi.

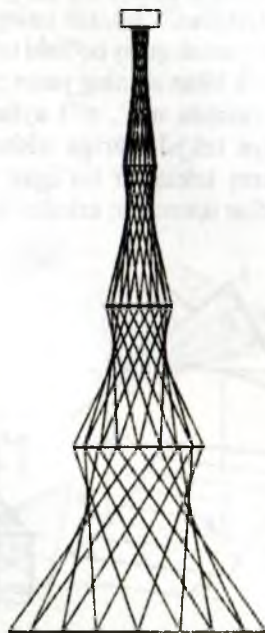
Teorema. Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasidan uning ikkita to'g'ri chiziqli yasovchisi o'tadi.

Sirtning yo'naltiruvchilari sifatida bitta oilaga mansub bo'lgan xohlagan uchta to'g'ri chiziqni qabul qilish mumkin. Sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(a, b, c)$ ko'rinishida yoziladi. 8.26-rasmda bir pallali giperboloid o'zining ikki oilaga mansub bo'lgan to'g'ri chiziqli yasovchilari bilan tekis chizmada tasvirlangan. Bu sirt yasovchilarining xossalari qurilish texnikasida foydalanishni birinchi marta akademik V.G.Shuxov (1853–1939) tavsiya qilgan. Bir pallali aylanma giperboloiddan radiomachta, suv minorasi kabi inshootlarni konstruksiyalashda foydalanilgan. Bu konstruksiyalar o'zining mustahkamligi va yengilligi tufayli qurilish texnikasida keng tarqalgan. 1921-yili Moskvada Shuxov loyihasi asosida 160 metrli 6 seksiyali (6 ta

giperboloid) radiomachta qurildi (8.27-rasm). Hozirgi kunlarda ham bu sirtan qurilish amaliyotida keng foydalaniladi.



8.26-rasm.



8.27-rasm.

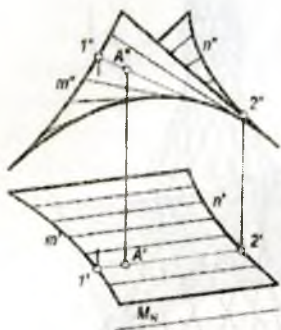
8.6.5. Silindroid. Ikki yo'naltiruvchi m, n xos egri chiziq bo'lib, uchinchi a cheksiz uzoqlashtirilgan, ya'ni xosmas a_x to'g'ri chiziq bo'lsa, hosil bo'lgan chiziqli sirt *silindroid* deyiladi. Silindroid ikki marta qiyshiq silindroidning xususiy holdir. Sirtning hamma to'g'ri chiziqli yasovchilari xosmas to'g'ri chiziqli yasovchining vaziyatini aniqlaydigan parallelizm tekisligiga parallel bo'ladi. Silindroidni aniqlovchilari bilan $\Phi(m, n, a_x)$ yoki $\Phi(m, n, P)$ ko'rinishda yozish mumkin.

8.28-rasmda m va n yo'naltiruvchilari egri chiziqlar va gorizontall proyeksiyalovchi parallelizm tekisligi $M(M_H)$ bilan berilgan silindroid sirti tekis chizmada tasvirlangan. Silindroid sirti ustidagi ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqtaning A' proyeksiyasiga asosan uning ikkinchi A'' proyeksiyasi vaziyatini aniqlash uchun shu nuqta orqali sirtning parallelizm tekisligiga parallel bo'lgan yasovchisi o'tkaziladi. So'ngra yasovchining ikkinchi proyeksiyasi va uning ustida berilgan A nuqtaning A'' proyeksiyasi yasaladi.

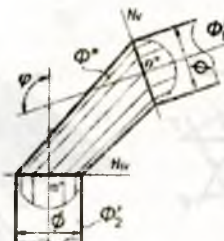
Silindroid sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo'llaniladi. Truboprovodlarning o'tish qismlarini ulash konstruksiyalarida (8.29-rasm), plug ag'dargichlari sirtlarini hosil qilishda, ba'zi bir gumbaz va arkalarni loyihalashda (8.30-rasm) silindroidlardan foydalanish mumkin.

8.29-rasmda bir xil diametrli va o'qlari ϕ burchak hosil qiluvchi Φ_1 va Φ_2 aylanma silindrlarning Φ silindroid sirti orqali birlashtirilishi tasvirlangan. Bunda H_{IV} va N_V tekisliklarda yotuvchi m va n aylanalar – silindroid sirtining yo'naltiruvchilari, V tekislik uning parallelizm tekisligidir. Bu silindroid sirtining chizmasini yasash qulay bo'lishi uchun m va n yo'naltiruvchilarni teng 12 bo'lakka bo'lish yo'li bilan sirtning yasovchilari o'tkazilgan.

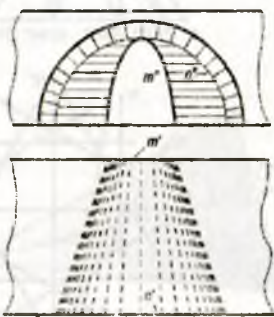
8.30-rasmda $n(n', n'')$ aylana va $m(m', m'')$ ellips yo'naltiruvchilari proyeksiya tekisliklariga nisbatan frontal joylashgan hamda H tekislik parallelizm tekisligi bo'lgan silindroid sirti tasvirlangan. Bu tipdagi silindroidlar tunnellar, arkalar va gumbazlar qurishda qo'llaniladi.



8.28-rasm.



8.29-rasm.



8.30-rasm.

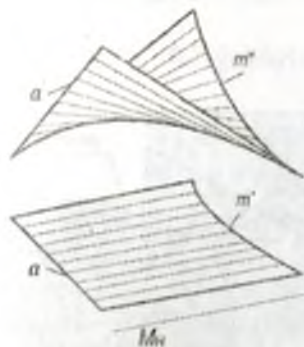
8.6.6. Konoid. Konoid ikki marta qiyshiq konoidning xususiy holi bo'lib, u to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilarning birini cheksiz uzoqlashtirganda hosil bo'ladi. Konoidning to'g'ri va egri chiziqli xos yo'naltiruvchilarini kesib o'tuvchi yasovchilari parallelizm tekisligiga parallel bo'ladi, ya'ni parallelizm tekisligining xosmas chizig'ini ham kesib o'tadi. 8.31-rasmda a to'g'ri chiziq va m egri chiziqli yo'naltiruvchilar hamda $M(M_{II})$ parallelizm tekisligi bilan berilgan konoid tekis chizmada tasvirlangan.

Konoid sirti aniqlovchilari bilan $\Phi(m, a, b_z)$ yoki $\Phi(m, a, M)$ ko'rinishida yoziladi. a to'g'ri chiziq ixtiyoriy vaziyatda berilishi, m egri chiziq tekis yoki fazoviy qilib olinishi mumkin. Ular bir tekislikda yotmasligi shart, aks holda sirt tekislikka aylanadi.

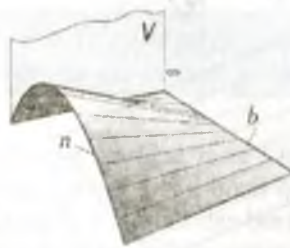
Agar yo'naltiruvchi a to'g'ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga perpendikulyar bo'lsa, hosil bo'lgan sirt to'g'ri konoid deb, perpendikulyar bo'lmasa, og'ma konoid deb yuritiladi.

8.32-rasmda n parabola va b to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilari bilan berilgan konoidning yaqqol tasviri berilgan. Bu sirt uchun V tekisligi parallelizm tekisligi vazifasini o'taydi. Konoidning bunday xususiy hollari ba'zi bino va inshootlar yopmalarida ishlatiladi.

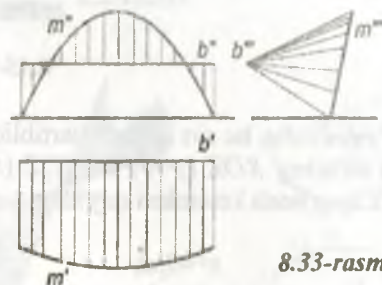
8.33-rasmdagi chizmada tasvirlangan konoid YuNESKoning binosiga kirishdagi ayvonchaning sxematik ko'rinishidir. Bunda konoid sirtini hosil qiluvchi aniqlovchilar b to'g'ri chiziq va m egri chiziq bo'lib, uning tekisligi W ga perpendikulyardir.



8.31-rasm.



8.32-rasm.



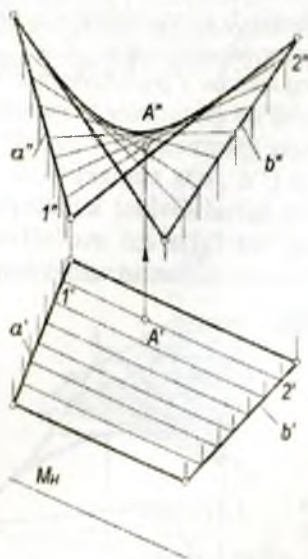
8.33-rasm.

8.6.7. Giperbolik paraboloid. Qiyshiq tekislik sirti — giperbolik paraboloiddir. Giperbolik paraboloid sirti bir pallali giperboloid sirtining xususiy holi bo'lib, bunda to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchilarning bittasi cheksiz uzoqlashtirilganda (xosmas to'g'ri chiziq) hosil bo'ladi. Giperbolik paraboloid sirti aniqlovchilar bilan $\Phi(a, b, c_\infty)$ yoki $\Phi(a, b, M)$ ko'rinishida yoziladi. Bu sirt 8.34-rasmda tasvirlangan. Giperbolik paraboloid sirtini biror parabolaning ikkinchi parabola bo'yicha harakatlanishidan ham hosil qilish mumkin.

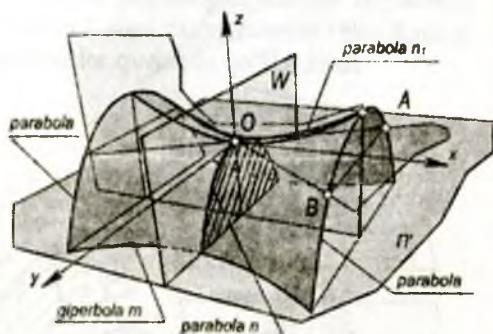
8.35-rasmda tasvirlangan giperbolik paraboloid sirti n parabolaning YOZ tekisligiga parallel bo'lib, uchi doim n , parabola bo'yicha harakatlanishidan yoki bu sirtini XOY tekisligiga parallel tekisliklardagi m giperbolalarning karkasidan hosil bo'lgan deyish ham mumkin. Shunga ko'ra, bu sirt *giperbolik paraboloid* yoki *parabolik giperboloid* deb yuritiladi.

Bu sirtning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{bunda } p \neq q. \quad (1)$$



8.34-rasm.



8.35-rasm.

Tenglamadan ko'rinishicha, bu sirt ikkinchi tartiblidir.

Darhaqiqat, (1) sirtning XOZ ($y=0$) va YOZ ($x=0$) tekisliklar bilan kesishganda hosil bo'lgan bosh kesimlari quyidagi parabolalar bo'ladi:

$$x^2 = 2pz, \quad (2)$$

$$y^2 = -2qz. \quad (3)$$

Sirtni XOY ($z=0$) tekislik bilan kesganda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad (4)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu esa quyidagi ikki to'g'ri chiziqni ifodalaydi:

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Sirtni XOY tekisliklariga parallel, ya'ni $z=h$ tekisliklar bilan kesganda kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \quad (5)$$

giperbola hosil bo'ladi.

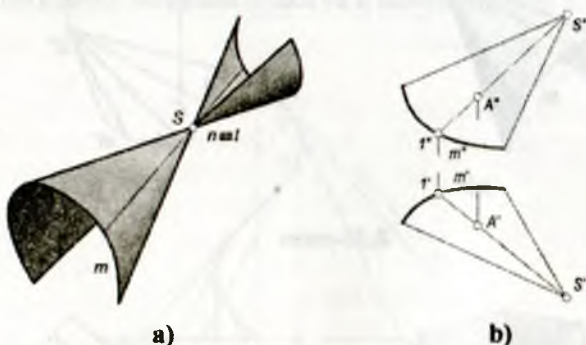
Giperbolik paraboloid sirtidan qurilish amaliyotida, arxitektura binolari va inshootlarining yopmalari sifatida keng foydalaniladi.

Parallelizm tekisligiga ega bo'lgan sirtlar belgiyalik geometr olim nomi bilan *Katalan sirtlari* deb yuritiladi.

8.7-§. Yoyiladigan chiziqli sirtlar

Ta'rif. Cheksiz yaqin yasovchilari o'zaro kesishgan yoki o'zaro parallel bo'lgan sirt yoyiluvchi sirt deyiladi.

Uch yo'naltiruvchi sirtning m , n , l yo'naltiruvchilaridan n va l nuqta bo'lib, ular ustma-ust tushsa, uning yasovchilari konus sirtini hosil qiladi (8.36-a rasm). Shuning uchun konus m egri chiziq va S nuqta bilan beriladi. Uning aniqlovchilari $\Phi(m, S)$ bo'ladi. 8.36-b rasmda $m(m', m'')$ yo'naltiruvchi va $S(S', S'')$ uchi bilan berilgan konusning tekis chizmada berilishi va sirtida nuqta tanlash ko'rsatilgan.

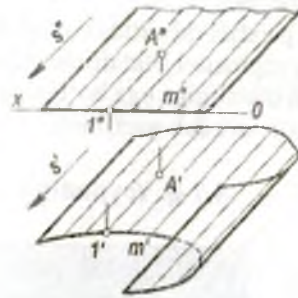


8.36-rasm.

Agar S nuqta biror s yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, m egri chizig'ini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar (yasovchilar) s yo'nalishiga parallel bo'lib qoladi. Konusning bu xususiy holi *silindr* deb yuritiladi (8.37-a rasm). 8.37-b rasmda silindrning tekis chizmada berilishi ko'rsatilgan. Demak, silindr o'z yo'naltiruvchisi va yasovchisining yo'nalishi bilan beriladi: 8.36-a rasmdagi m yo'naltiruvchi siniq chiziq bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *piramida* (8.38-a rasm) deb yuritiladi. 8.38-b rasmda piramidaning ortogonal proyeksiyalarda berilishi ko'rsatilgan. Agar uchi biror s yo'nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, piramidaning qirralari o'zaro parallel bo'lib qoladi va bu sirt *prizma* deb ataladi (8.39-a rasm). Prizmaning chizmada berilishi 8.39-b rasmda ko'rsatilgan.

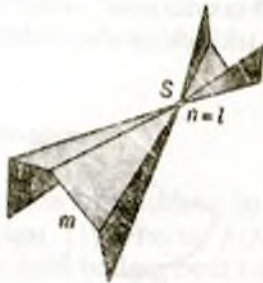


a)



b)

8.37-rasm.



a)

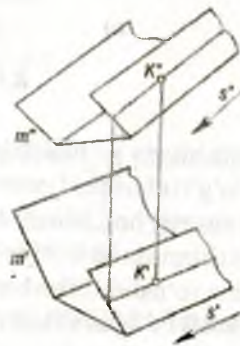


b)

8.38-rasm.



a)



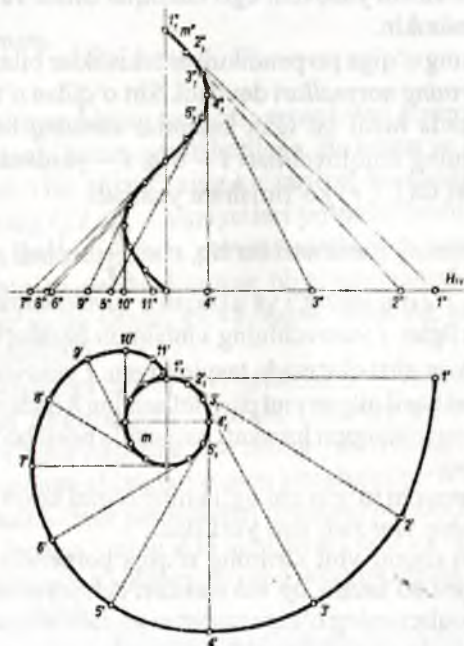
b)

8.39-rasm.

8.7.1. Qaytish qirrali yoyiladigan chiziqli sirtlar. Torlar.

Ta'rif. Biror fazoviy egri chiziqqa urinib o'tuvchi chiziqlar to'plamidan hosil bo'lgan sirt qaytish qirrali sirt deb atakadi.

Qaytish qirrali sirtlar *torlar* deb ham ataladi. Bunda fazoviy egri chiziq sirtning yo'naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo'ladi (8.40-rasm). Sirtning cheksiz ikki yaqin urinma chiziqlari o'zaro kesishganligi uchun qaytish qirrali sirt yoyiluvchi bo'ladi. Tors ham 8.40-rasmdagi umumiy holda berilgan chiziqli sirtning xususiy holdir. Bunda m va n egri chiziqlar ustma-ust tushadi va l cheksiz uzoqlashgan, ya'ni xosmas l_{∞} egri chiziq bo'lib, uning vaziyati yo'naltiruvchi konus orqali beriladi. Tors sirtini yasash uchun yo'naltiruvchi konusni shunday tanlash mumkinki, bunda konusning yasovchilariga mos ravishda parallel qilib yo'naltiruvchi, egri chiziqqa urinma qilib sirtning yasovchilari o'tkaziladi. Bunga yoyiluvchi gelikoid (8.41-rasm) misol bo'la oladi. Tors to'g'ri chiziqlarning egri chiziqqa uzluksiz urinib harakatlanishi davomida qoldirgan izi sifatida qaraladi. Tors sirtining qaytish qirrasi biror chekli nuqta bo'lganda konus sirti hosil bo'ladi. Sirtning hamma yasovchilari chekli nuqtadan o'tadi va u konusning uchi hisoblanadi.



8.40-rasm.

Qaytish qirradi biror cheksiz nuqta bo'lsa, silindrik sirt hosil bo'ladi. Silindrik sirtning hamma yasovchilari o'zaro parallel bo'ladi.

8.7.2. Vint sirtlari. Biror doimiy o'qqa parallel holda ilgarilanma va shu o'qqa nisbatan aylanma harakatlar natijasida hosil bo'lgan harakat *vintsimon harakat* deyiladi.

Ta'rif. Biror chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan sirt *vint sirti* deyiladi.

Vintsimon harakatlanuvchi chiziq sirtning yasovchisi bo'ladi. Chiziqning ilgarilanma harakati va burilish burchagi $\Delta h = k' \beta$ bog'lanishda bo'ladi. Bunda Δh – yasovchining Δt vaqtdagi chiziqli va $\Delta \beta$ burchakli siljishlari, k – proporsionallik koeffitsientidir. Agar k koeffitsient o'zgaras (yoki o'zgaruvchi) miqdor bo'lsa, o'zgaras (yoki o'zgaruvchi) qadamli *vint sirti* hosil bo'ladi.

Yasovchining bir marta to'la aylanishida bosib o'tgan h masofa *vint sirtining qadami* deb ataladi.

Vintsimon harakat davomida yasovchining har bir nuqtasi *vint chizig'ini* hosil qilib, ular *vint sirtining parallellari* deb ataladi. Bu *vint parallellarining qadami* o'zaro teng bo'ladi va ayni bir vaqtda *vint sirtining qadamiga* ham tengdir.

Vint sirtining karkasini yasovchi egri chiziqlar oilasi va *vint parallellari* oilasi bilan berish mumkin.

Vint sirtining uning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda hosil bo'lgan kesimlari *sirtning normallari* deyiladi. Sirt o'qidan o'tuvchi tekisliklar dastasi bilan kesganda hosil bo'lgan kesimlar *sirtning meridianlari* deb yuritiladi. Vint sirtining aniqlovchilari i – o'q, l – yasovchi va h – qadam bo'lib, $\Phi(i, l, h)$ yoki $\Phi(i, l, r)$ ko'rinishida yoziladi.

Bunda r *vint sirtining parametri* bo'lib, $r = \frac{h}{2\pi}$ bo'ladi.

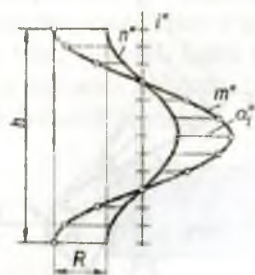
8.41-rasmda $i(i', i'')$ o'q chizig'i va u orqali o'tuvchi tekislikda yotgan $l(l', l'')$ egri chizig'i berilgan. l yasovchining vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan $\theta(\theta', \theta'')$ *vint sirti* chizimada tasvirlangan. l yasovchining $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalari hosil qilgan *vint parallellarining h qadami* o'zaro tengdir.

To'g'ri chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan *vint sirtlari gelikoid* deb yuritiladi.

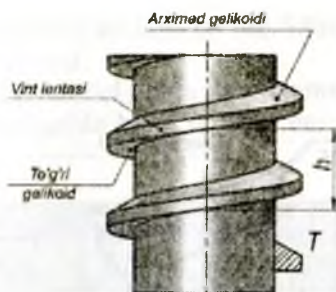
Vint sirtining yasovchi to'g'ri chizig'i uning o'qini kesib o'tsa, *yopiq vint sirti* va kesmasa, *ochiq vint sirti* deb yuritiladi.

Yasovchi to'g'ri chiziq *vint sirtining o'qiga perpendikulyar bo'lsa* — *to'g'ri, perpendikulyar bo'lmasa, og'ma vint sirti* deb yuritiladi. Vint sirtining yasovchi to'g'ri chiziqlari uning o'qiga nisbatan joylashishiga qarab Arximed. evolventa va konvolyuta *vint sirtlari* deb yuritiladi.

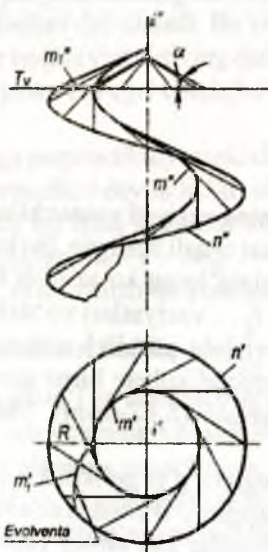
8.42-rasmda sirtini aniqlovchi yo'naltiruvchilar sifatida i o'q chiziq, m *vint chizig'i* va yo'naltiruvchi konus sirti berilgan.



8.43-rasm.



8.44-rasm.



8.45-rasm.

8.45-rasmda ochiq og'ma gelikoid tasvirlangan. Bunda yo'naltiruvchi konusning gorizontall tekislik bilan hosil qilgan α burchagi vint chizig'ining (m yo'naltiruvchining) ko'tarilish burchagi β ga teng ($\alpha = \beta$). Shuning uchun ham yasovchilar hamma vaziyatlarida yo'naltiruvchi vint chizig'iga urinadi. Bunday holda yo'naltiruvchi vint chiziq qaytish qirrasini bo'ladi. Hosil bo'lgan sirt esa yoyiladigan chiziqli sirtga (torsga) aylanadi. Bunday

gelikoid *tors-gelikoid* deyiladi. Uning o'qiga perpendikulyar $T(T)$ tekislik sirt bilan $m(m', m'')$ evolventa egri chizig'i bo'yicha kesishadi. Shuning uchun bu sirt *evolventali gelikoid* ham deb ataladi.

Agar yo'naltiruvchi konus yasovchilarining H bilan hosil qilgan burchagi yo'naltiruvchi chiziqlarning ko'tarilish burchagiga teng bo'lmasa, ya'ni $\alpha \neq \beta$ va $\alpha \neq 90^\circ$, hosil bo'lgan vint sirti *konvolyutali gelikoid* deyiladi.

Vint sirtlari qurilish va texnikada keng qo'llaniladi. Ulardan vint, shnek, burg'u, prujina, turbina parraklarining yassi sirti, ventilyator, kema va havo vintlarining ishchi organlari, zinalar va hokazolarni loyihalashda foydalaniladi.

8.8-§. Siklik sirtlar

Ta'rif. Aylana markazi biror chiziq bo'yab harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt siklik sirt deyiladi.



8.46-rasm.

Siklik sirtlarda harakatlanuvchi / aylana siklik sirtning *yasovchisi*, yasovchi aylananing markazi harakatlanadigan m chiziq sirtning yo'naltiruvchi chizig'i yoki sirtning markazlar chizig'i deb yuritiladi (8.46-rasm). Harakat davomida yasovchi aylananing radiusi o'zgaruvchan va o'zgarmas bo'lishi mumkin.

Siklik sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(m, R)$ ko'rinishida yoziladi.

Siklik sirtni berish uchun uning yasovchisi markazining harakat qonuni va radiusining o'zgarish funksiyasi berilgan bo'lishi zarur. Siklik sirtlarning karkasi aylanalardan iborat.

Aylanish sirtlari ham siklik sirtlar turiga kiradi.

Aylanish sirtlarining o'zgaruvchi yoki o'zgarmas parallellari siklik sirtning yasovchilari bo'ladi. Aylanish o'qi sirtning markazlar chizig'i hisoblanadi.

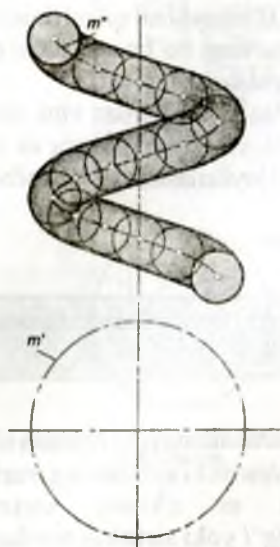
Ikkinchi tartibli aylanish sirtlarini va doiraviy kesimga ega bo'lgan umumiy holdagi ikkinchi tartibli sirtlarni ham siklik sirt deb qarash mumkin.

Agar yasovchi aylananing tekisligi yo'naltiruvchi m chiziqqa doim perpendikulyar bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *naysimon sirt* bo'ladi (8.46-rasm). Naysimon sirt siklik sirtning xususiy holdir. O'zgaruvchan radiusli naysimon sirtni berish uchun markazlar chizig'i m va yasovchi l aylana radiusining o'zgarish qonuniyati berilgan bo'lishi zarur.

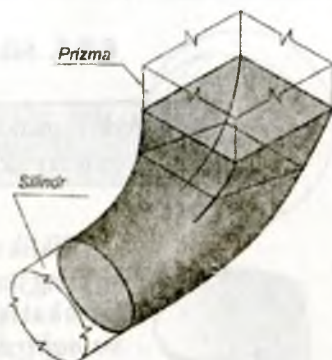
Naysimon sirt yasovchisining radiusi o'zgarmas bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *truba* deb yuritiladi (8.47-rasm).

Aylanma silindrni o'qi to'g'ri chiziq bo'lgan trubali sirt deyish mumkin. Sferaning vint chizig'i bo'yicha harakatidan vintli truba sirti hosil bo'ladi (8.47-rasm). Vintsimon trubali sirtga prujina misol bo'la oladi.

Siklik sirtning yana bir turi *kanal sirtidir*. Kanal sirtning shakli bir tekis uzluksiz o'zgarib boruvchi yopiq chiziqlarning harakatidan hosil bo'ladi.



8.47-rasm.



8.48-rasm.

8.48-rasmda ikkinchi tartibli silindr va to'rtburchakli prizma sirtlarini ulaydigan mufta vazifasini bajaruvchi kanal sirtining yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Nazorat savollari

1. Sirtlar qanday hosil bo'ladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlar hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Sirtlarni hosil qilishning kinetik usulini tushuntirib bering.
5. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
6. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari nima?
7. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan sirtlarning farqi nimada?
8. Qanday sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi?
9. Vint sirtining hosil bo'lishini tushuntirib bering.
10. Bir pallali va ikki pallali giperboloid sirtlar qanday hosil bo'ladi?
11. Siquq va cho'ziq ellipsoidlarning farqi nimada?
12. To'g'ri chiziqli kesmasini aylantirish yo'li bilan qanday sirtlar hosil bo'lishi mumkin?
13. Ikkinchi tartibli sirtlarga qanday sirtlar kiradi?
14. Sirtga tegishli bo'lgan yuzadagi nuqta qanday aniqlanadi?
15. Tor va tors sirtlarning farqi nimada?



IX BOB. SIRTLARNING TEKISLIK VA TO'G'RI CHIZIQ BILAN KESISHISHI

9.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'i to'g'ri chiziq, siniq chiziq va egri chiziq tarzidagi tekis shakllardan iborat bo'lishi mumkin. Bu hol tekislik bilan qanday sirtning kesishishiga va sirt bilan tekislikning o'zaro vaziyatiga bog'liq.

Sirt bilan tekislik kesishish chizig'ining shaklini uni yasashdan oldin bilish mumkin. Shunga ko'ra, uni yasashning biror usuli tanlanadi. Agar kesishish chizig'i to'g'ri chiziq bo'lsa, uning ikki nuqtasi, siniq chiziq bo'lsa, uning sinish nuqtalari (uchlari), egri chiziq bo'lsa, uning tayanch (xarakterli) va bir necha ixtiyoriy nuqtalari topilib, ular o'zaro tutashtiriladi.

Egri chiziqli sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'i umumiy holda egri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu chiziqni yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi. Tayanch nuqtalarga sirtlarning chetki yasovchilari – ocherklariga tegishli nuqtalar va proyeksiyalar tekisliklaridan eng uzoq va eng yaqin masofalarda bo'lgan nuqtalar kiradi. Qolgan nuqtalar oraliq nuqtalar hisoblanadi.

Yuqorida qayd qilingan nuqtalar sirtga tegishli bo'lganligi sababli bu nuqtalar shu sirtning yasovchilari, karkaslari, parallellari, meridianlari va h.k. chiziqlariga ham tegishli bo'ladi. Shuning uchun sirtning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash sirt bilan tekislikning kesishish nuqtalarini topishdan iborat bo'ladi.

Chiziqli sirtning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash uchun sirtning har bir yasovchisi bilan tekislikning kesishish nuqtalarini aniqlash lozim.

Demak, tekislikning ko'pyoqlik yoki egri chiziqli sirtlar bilan kesishish chizig'ini yasash to'g'ri chiziq yoki egri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topishga asoslanadi.

9.2-§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi

Odatda, kesim chizig'i konturining proyeksiyalarini yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi.

Agar sirtni kesuvchi tekislik proyeksiyalovchi bo'lsa, kesim chizig'ining proyeksiyalarini yasash soddalashadi, chunki bu holda kesishish chizig'ining proyeksiyalaridan biri to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'ladi.

Quyida ba'zi sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishini ko'rib chiqamiz.

1-masala. Og'ma elliptik konusning $H_1(H_{1V})$ gorizont tekislik bilan kesishish chizig'i yasalsin (9.1-rasm).

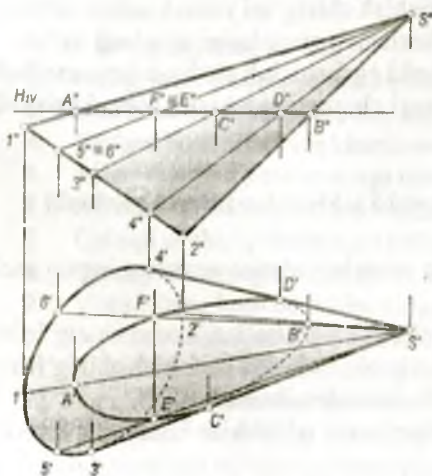
Yechish. Konusning bir necha yasovchilari o'tkaziladi va ularning kesuvchi tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi.

Kesishish chizig'ining $A''B''$ frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi. $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalar kesimni o'ng va chap tomondan chegaralovchi nuqtalardir. Ularning A' va B' gorizontal proyeksiyasi ular orqali o'tuvchi S_1 va S_2 yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari S'_1 va S'_2 larda bo'ladi. Konusning gorizontal ocherk yasovchilari S'_3, S'_4 bilan H_{IV} tekislikning kesishish nuqtalarini yasash uchun bu yasovchilarning frontal S''_3 va S''_4 proyeksiyalari bilan tekislik H_{IV} izining kesishish nuqtalari C'' va D'' lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkaziladi va ularning S'_3, S'_4 yasovchilar bilan kesishgan C' va D' nuqtalari topiladi.

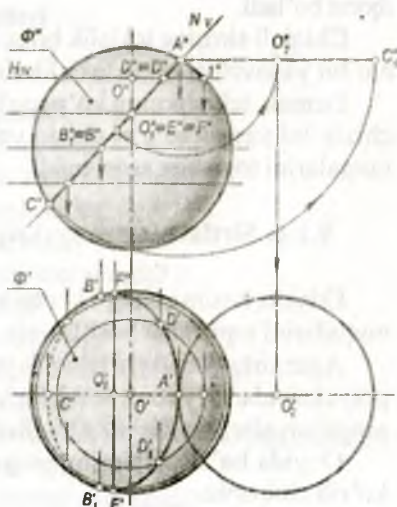
Kesimning oraliq nuqtalarini yasash uchun $A''B''$ kesmada ixtiyoriy $E'' \equiv F''$ nuqtalar belgilab olinadi. Bu nuqtalar orqali $S''_5 \equiv S''_6$ yasovchilarning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi, so'ngra ularning S'_5 va S'_6 gorizontal proyeksiyalari ustida E' va F' belgilab olinadi. Shu tarzda yana bir necha nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari yasaladi.

Gorizontal proyeksiyada kesimning ko'rinishligi quyidagicha aniqlanadi: konusning $4', 6', 1', 5'$ va $3'$ nuqtalaridan o'tgan yasovchilarga tegishli D', F', A', E' va C' nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Shunga asosan kesimning D', F', A', E', C' qismi uzluksiz tutash chiziq bilan, D', B', C' qismi esa shtrix chiziq bilan tekis tutashtiriladi.

2-masala. Sferaning N_V frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishuv chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.2-rasm).



9.1-rasm.



9.2-rasm.

Yechish. Kesimning $A''C''$ frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Kesimning gorizontal proyeksiyasi esa nuqtalarning sferaga tegishlilik shartiga ko'ra yasaladi. B va B_1 nuqtalar sferaning ekvatoriga tegishli bo'lganligi uchun ularning B' va B_1' gorizontal proyeksiyalari gorizontal proyeksiyaning ocherkida belgilab olinadi. A va C nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A' va C' nuqtalar esa sfera bosh meridianining gorizontal proyeksiyasida yotadi.

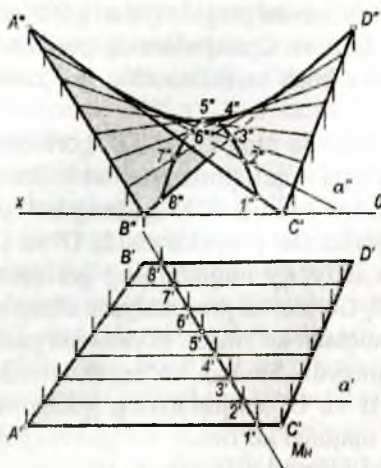
Kesimga tegishli ixtiyoriy D va D_1 nuqtalarning D' va D_1' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun $D'' \equiv D_1''$ nuqta orqali gorizontal tekislikning H_{IV} frontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik sferani radiusi $0''1''$ ga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasida D' va D_1' nuqta hosil qilinadi. Oraliqdagi boshqa ixtiyoriy nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. Gorizontal proyeksiyada sferaning ekvatoridan yuqorida joylashgan hamma nuqtalar ko'rinadi, ekvatoridan pastki qismida joylashgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Shunga ko'ra, ekvatoridan yuqorida joylashgan A, D, D_1, E, F, B va B_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A', D', D_1', E', F', B' va B_1' nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ekvatorning pastki qismida yotganligi uchun ko'rinmaydi. Bu yerda A, B, B_1 va C lar tayanch nuqtalar bo'ladi. Rasmda kesim yuzining haqiqiy kattaligini yasash aylantirish usulida bajarib ko'rsatilgan.

3-masala. V parallelizm tekisligiga ega bo'lgan giperbolik paraboloidning $M(M_{II})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.3-rasm).

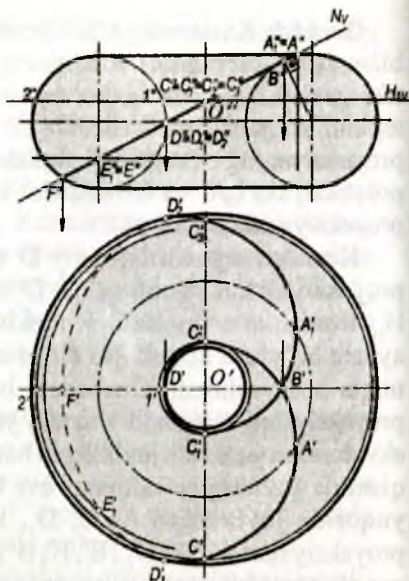
Yechish. Kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyasi tekislikning M_{II} izi bilan ustma-ust tushadi. Uning frontal proyeksiyasini yasash uchun giperbolik paraboloid (qiyshiq tekislik) ning bir necha yasovchilari o'tkazilib, ularning M tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi. Masalan, qiyshiq tekislik $a(a', a'')$ yasovchisining M tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash uchun a' yasovchi va kesuvchi tekislikning M_{II} gorizontal izining kesishish nuqtasi $2'$ belgilab olinadi. So'ngra $2'$ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i chiqarilib, a'' dagi frontal proyeksiyasi $2''$ aniqlanadi. Kesimning $3(3', 3'') \dots 7(7', 7'')$ nuqtalarini yasash $2(2', 2'')$ nuqtani yasash kabi bajariladi.

4-masala. Torning frontal proyeksiyalovchi $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.4-rasm).

Yechish. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi tekislikning frontal izi N_V bilan ustma-ust tushgan. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun frontal proyeksiyada tayanch nuqtalarning $A'' \equiv A_1'', B'', D'' \equiv D_1'' \equiv D_2''$ va F'' frontal proyeksiyalari belgilab olinadi. Bu nuqtalar torga tegishli bo'lganligi uchun ularning gorizontal proyeksiyalarini yasash qiyin emas. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalarning proyeksiyalari esa quyidagicha yasaladi: kesimning frontal proyeksiyasida ixtiyoriy $C'' \equiv C_1'' \equiv C_2'' \equiv C_3''$ nuqtalar belgilanadi. Keyin ular orqali yordamchi gorizontal H_1 tekislikning H_{IV} izi o'tkaziladi. Bu tekislik torni radiuslari $0''1''$ va $0''2''$ kesmalarga teng bo'lgan aylanalar (parallellar) bo'yicha kesadi. Bu aylanalarning



9.3-rasm.



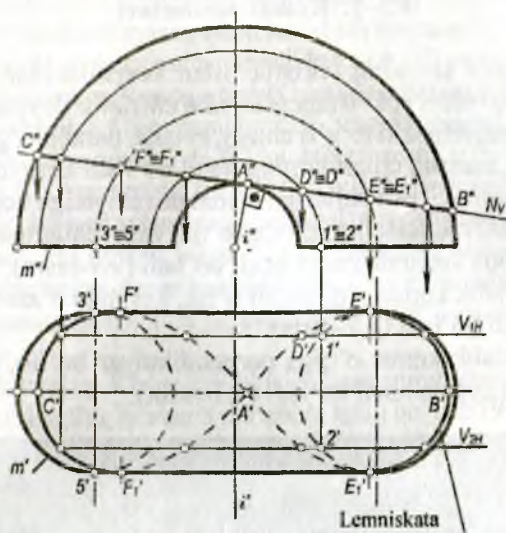
9.4-rasm.

gorizontal proyeksiyalarini yasab, $C'' \equiv C_1'' \equiv C_2'' \equiv C_3''$ nuqtalardan tushirilgan proyeksion bog'lovchi chiziq bilan kesishish nuqtalari C' , C'_1 , C'_2 va C'_3 lar belgilab olinadi. Xuddi shuningdek, boshqa oraliq nuqtalar ham yasaladi. Hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligini torning ekvatoriga nisbatan aniqlab, ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirsak, u holda *Paskal chig'anoq'i* deb nomlangan egri chiziq hosil bo'ladi.

5-masala. Berilgan tor sirtining $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.5-rasm).

Yechish. Chizmadan ko'rinib turibdiki, kesuvchi tekislik torning ichki konturiga urinma vaziyatda o'tkazilgan. Bu holda torning bunday kesimi *lemniskata egri chizig'i* deb yuritiladi.

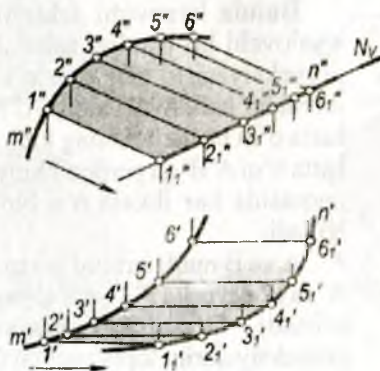
Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun tor V_1 , V_2 yordamchi frontal tekisliklar bilan kesiladi. Hosil bo'lgan parallellarning $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtalari A'' , B'' , C'' , D'' , E'' va F'' lar belgilanadi. So'ngra bu nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari tegishli tekisliklar izlarida topiladi va o'zaro silliq chiziq bilan tutashtiriladi. Gorizontal proyeksiyada kesishuv chizig'ining ko'rinishligi aniqlanadi. Bu lemniskata deb nomlangan egri chiziqdir. Bunda tor yasovchisi $m(m')$ ning m' gorizontal proyeksiyasiga tegishli $3' \dots 4' \dots 5' \dots$ nuqtalardan o'tgan parallellardagi $F'_1 \dots C' \dots F'$ va $E'_1 \dots B' \dots E'$ nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ko'rinmaydi.



9.5-rasm.

6-masala. Ixtiyoriy silindrik sirt $m(m', m'')$ yo'naltiruvchisi va yasovchilarining yo'nalishi bilan berilgan. Mazkur sirtning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.6-rasm).

Yechish. Bu sirtning $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash uchun $m(m', m'')$ yo'naltiruvchi chiziqda ixtiyoriy $1(1', 1'')$, $2(2', 2'')$, $3(3', 3'')$... nuqtalarni belgilab hamda ular orqali silindrning yasovchilarini o'tkazib, bu yasovchilarning berilgan $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtalari $1_1(1'_1, 1''_1)$, $2_1(2'_1, 2''_1)$, $3_1(3'_1, 3''_1)$... lar belgilab olinadi va ular $n(n', n'')$ tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.



9.6-rasm.

9.3-§. Konus kesimlari

Doiraviy konus sirtining tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqlar *konus kesimlari* yoki *ikkinchi tartibli chiziqlar* deyiladi. Bu chiziqlar oilasiga o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziq, aylana, parabola, giperbola, ellips kiradi. Bu oilaga mansub chiziqlarning hosil bo'lishi kesuvchi tekislikning konus o'qiga va uning yasovchilariga nisbatan vaziyatiga bog'liq bo'ladi.

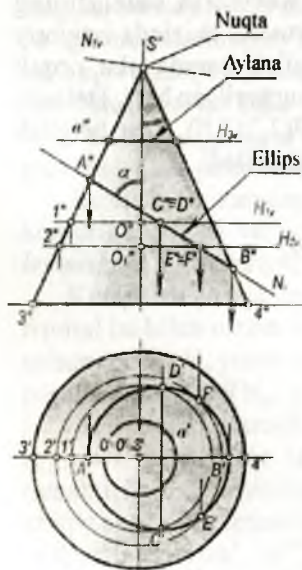
Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tib, yasovchilardan birortasi bilan kesishmasa, u holda kesimda nuqta hosil bo'ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qi orqali o'tsa, kesimda o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qiga perpendikulyar bo'lib, uning uchidan o'tmasa, kesimda aylana hosil bo'ladi (9.7-rasm).

Teorema. Aylana konusning tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimning konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi to'g'ri burchakli proyeksiyasi 2-tartibli egr chiziq bo'lib, uning fokuslaridan biri konus uchining shu tekislikdagi proyeksiyasi bo'ladi.

Elliptik kesim. Kesuvchi tekislik bilan konus o'qi orasidagi α burchak konus yasovchilari va o'qi orasidagi φ burchakdan katta ($\alpha > \varphi$) bo'lsa, kesimda *ellips* hosil bo'ladi.



9.7-rasm.

Kesuvchi tekislik konusning barcha yasovchilarini kesib, $\alpha \neq 90^\circ$ bo'lsa, kesimda *ellips* hosil bo'ladi (9.7-rasm).

To'g'ri doiraviy konusning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash 9.7-rasmda ko'rsatilgan.

Bunda kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli ellipsning frontal proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi $A''B''$ dan iborat bo'ladi. Ayni vaqtda $A''B''$ kesma ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi $C'D'$ kesma katta o'qi $A'B'$ ga perpendikulyar bo'lib, kesishish nuqtasida har ikkala o'q bir-birini teng ikkiga bo'ladi.

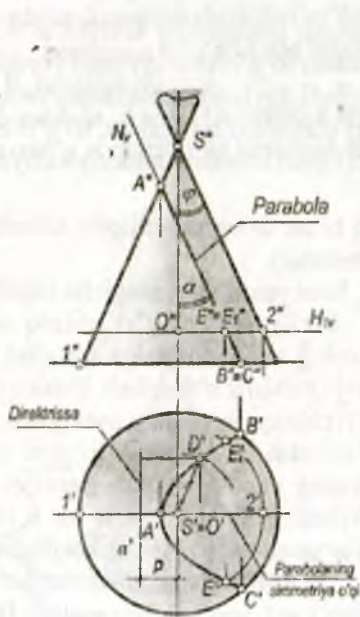
A va B nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A' va B' bevosita $S'3'$ va $S'4'$ yasovchilarda belgilab olinadi. C va D nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun $C'' \equiv D''$ nuqta orqali $H_1(H_{1V})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Radiusi $O'l$ kesmaga teng bo'lgan aylana O' markaz

bo'yicha chiziladi. $C'' \equiv D''$ nuqtadan proyeksiyon bog'lanish chizig'i o'tkazilib, uning $0''1'' \equiv 0'1'$ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari C' va D' lar belgilab olinadi. Gorizontal proyeksiyada ellipsni katta ($A'B'$) va kichik ($C'D'$) o'qlari bo'yicha yasash mumkin. Kesimga tegishli oraliq nuqtalardan bir nechitasi yasab, ular o'zaro tutashtirilsa, ellips hosil bo'ladi. Shunday nuqtalardan E' va F' larni yasashni ko'rib chiqaylik. A'' va B'' nuqtalar orasida ixtiyoriy $E'' \equiv F''$ nuqta olib, u orqali $H_2(H_{2V})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikning konus bilan kesishish chizig'i bo'lgan aylananing gorizontal proyeksiyasi bo'lgan $0''2''$ radiusli aylana chiziladi. Bu aylana bilan $E'' \equiv F''$ nuqtadan tushirilgan proyeksiyon bog'lanish chizig'ining o'zaro kesishishidan E va F nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni konusning $S_4(S'4', S''4'')$ va $S_5(S'5', S''5'')$ yasovchilari orqali ham topish mumkin.

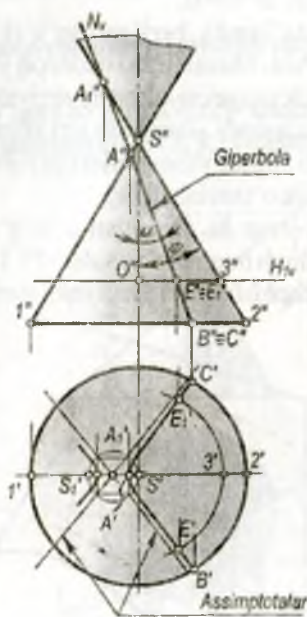
Parabolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning yasovchilaridan biriga parallel qilib o'tkazilsa, kesimda *parabola* hosil bo'ladi (9.8-rasm).

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tmagan va $\alpha = \varphi$ bo'lgan holda ham kesimda *parabola* hosil bo'ladi.

Rasmda to'g'ri doiraviy konus bilan $N(N_V)$ tekislikning kesishuvi ko'rsatilgan. Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli parabolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasi parabola bo'lganligi uchun uni A' uchi, S' fokusi hamda a' direktrissasi bo'yicha yasash mumkin. A' nuqta bevosita



9.8-rasm.



9.9-rasm.

$S'1'$ yasovchida belgilab olinadi, uning chap tomonida $A'S'$ masofada a' direktrissasi parabolaning simmetriya o'qiga perpendikulyar qilib o'tkaziladi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni quyidagicha topish ham mumkin: $A''B''$ kesimda ixtiyoriy $E'' \equiv E_1''$ nuqta belgilab olinadi. Bu nuqta orqali H_1 gorizontal tekislikning frontal H_{IV} izi o'tkaziladi. Bu tekislik konusni $R=0''2''$ radiusli aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi bilan $E'' \equiv E_1''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion bog'lanish chizig'i o'zaro kesishib, E' va E' nuqtalarni hosil qiladi.

Giperbolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning ikkita yasovchisiga parallel bo'lsa, u konusni *giperbola* bo'yicha kesib o'tadi. Bunda $\alpha'' < \varphi''$ bo'ladi. Bunday tekisliklar xususiy holda konus o'qiga parallel bo'ladi (9.9-rasm).

9.4-§. Sirtlarning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

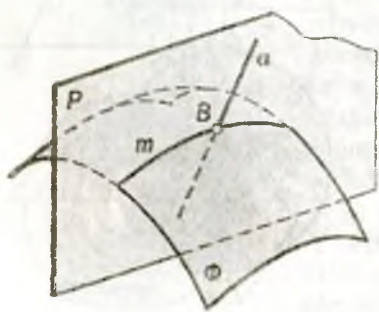
To'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishish nuqtalari sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror a to'g'ri chiziq bilan Φ sirtning kesishish nuqtasi quyidagicha aniqlanadi (9.10-rasm):

- berilgan a to'g'ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi P tekislik o'tkaziladi: $P \in a$;
- Φ sirt bilan P tekislikning kesishish chizig'i m yasaladi: $\Phi \cap P = m$;
- m chiziq bilan berilgan a to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi B belgilab olinadi: $a \cap m = B$.

Ma'lumki, berilgan to'g'ri chiziq orqali istalgancha tekislik o'tkazish mumkin. Masalalarni osonroq yechish uchun to'g'ri chiziq orqali yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi. Bu holda masalaning yechilishi soddalashadi. Berilgan sirt silindrik yoki konus sirt bo'lganda, to'g'ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish qulay.

1-masala. Berilgan a to'g'ri chiziq bilan Φ og'ma elliptik silindrning kesishish nuqtalari yasalsin (9.11, 9.12-rasmlar).

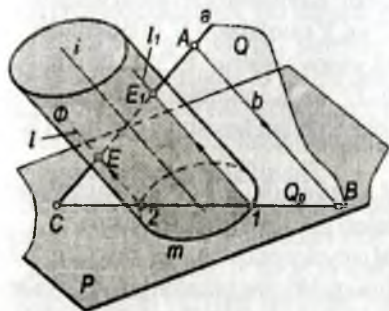
Yechish. Kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash quyidagicha bajariladi:



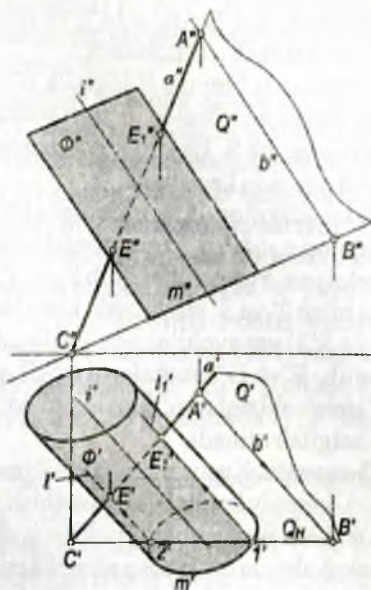
9.10-rasm.

- berilgan a to'g'ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy Q tekislik o'tkaziladi. Buning uchun a to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy A nuqtani belgilab olib, u orqali b to'g'ri chiziq silindrning yasovchilariga parallel qilib o'tkaziladi. Kesishuvchi a va b to'g'ri chiziqlar yordamchi Q tekislikni ifodalaydi;

- Q tekislik bilan Φ silindrning kesishish chiziqlari l va l_1 yasovchilar yasaladi. Buning uchun Q tekislik va silindrning asos tekisligi P ning o'zaro kesishish chizig'i BC yasaladi.



9.11-rasm.

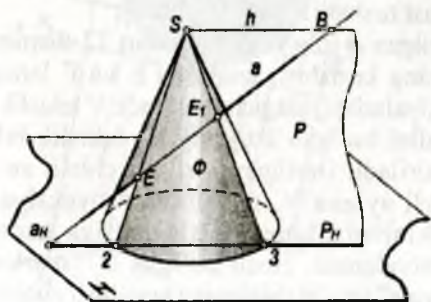


9.12-rasm.

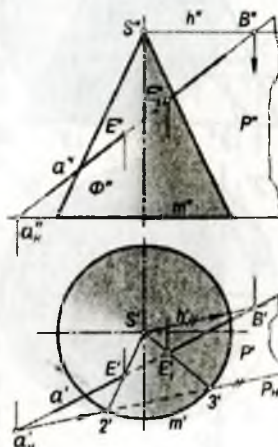
BC to'g'ri chiziqning silindr asosi m bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali l va l_1 yasovchilar (kesishish chiziqlari) o'tkaziladi;

• berilgan a to'g'ri chiziq bilan l va l_1 yasovchilarning kesishish nuqtalari E va E_1 belgilab olinadi.

2-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri doiraviy konus sirti bilan a to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari aniqlansin (9.13, 9.14-rasmlar).



9.13-rasm.



9.14-rasm.

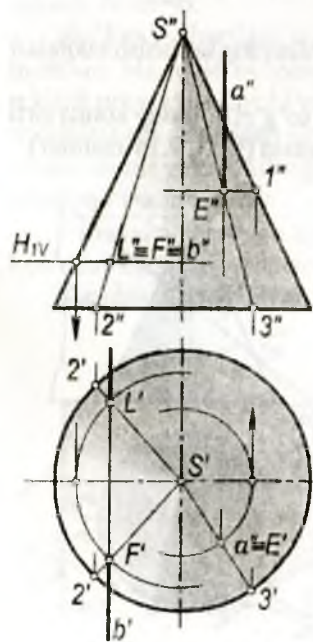
Yechish. Bu holda a to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o'tkaziladi.

Rasmlarda bunday P tekislik o'zaro kesishuvchi a va h to'g'ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda h gorizontall to'g'ri chiziq konusning S uchidan o'tkazilgan: $h \in S$. Ushbu h gorizontall to'g'ri chiziq berilgan a to'g'ri chiziq bilan B nuqtada kesishadi.

P tekislikning P_H gorizontall izini yasab olamiz. Buning uchun a to'g'ri chiziqning $a_H(a''', a''')$ gorizontall izini topib, u orqali gorizontallning gorizontall proyeksiyasi h ga parallel qilib P_H iz o'tkaziladi. Konusning m' asosi tekislikning P_H izi bilan 2' va 3' nuqtalarda kesishadi. 2' va 3' nuqtalarni S' bilan tutashtirib, S'2' va S'3' yasovchilar hosil qilinadi. Bu yasovchilar a' to'g'ri chiziq bilan kesishib, E' va E_1' nuqtalarni hosil qiladi. E' va E_1' nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, a'' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E'' va E_1'' belgilab olinadi.

3-masala. Xususiyl holda berilgan $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqlarning to'g'ri doiraviyl konus bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.15-rasm).

Yechish. Berilgan a to'g'ri chiziq gorizontall proyeksiyalovchi, b to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli kesishish nuqtalarining bittadan proyeksiyalari E' va F'' $\equiv L''$ (mos ravishda gorizontall va frontal proyeksiyalari) ma'lum bo'lib qoladi. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi yasovchilarning avval S'3', S'2'' $\equiv S'2_1''$, so'ngra S'3'', S'2' va S'2_1' proyeksiyalari o'tkaziladi. a' va S'3'' larning o'zaro kesishish nuqtasi E'' hamda b' bilan S'2' va S'2_1' larning kesishish nuqtalari F' va L' belgilab olinadi.



9.15-rasm.

4-masala. To'g'ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.16-rasm).

Yechish. Berilgan $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalarini yasash uchun bu to'g'ri chiziq orqali $M(M_H)$ gorizontall proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik sferani diametri 1'2' kesmaga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. 1'2' diametrli aylananing gorizontall proyeksiyasi tekislikning M_H izi bilan ustma-ust tushadi: $1'2' \equiv M_H$.

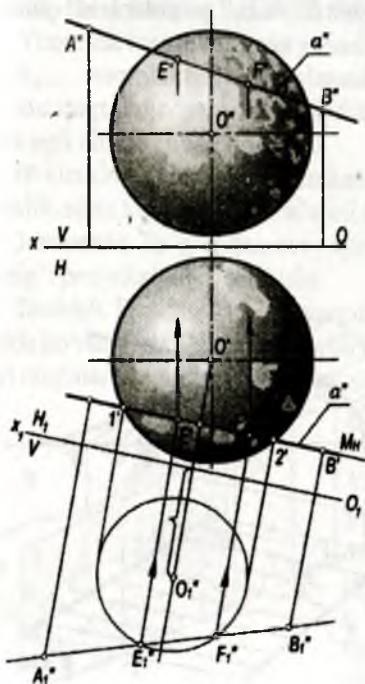
Berilgan a to'g'ri chiziq bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari E va F larning proyeksiyalari quyidagicha yasaladi: V tekislik M ga parallel bo'lgan ixtiyoriyl V_1 tekislik bilan almashtiriladi. Berilgan a to'g'ri chiziq va 12 diametrli aylana V_1 tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuliga asosan proyeksiyalanadi. Hosil bo'lgan O_1'' markazli aylana va a'' to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari E'' va F'' lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan O_1x_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyarlar o'tkazilib,

ularning a' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E' va F' lar aniqlanadi. Bu nuqtalardan esa Ox o'qiga perpendikulyarlar chiqarilib, ularning a'' to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E'' va F'' lar belgilab olinadi.

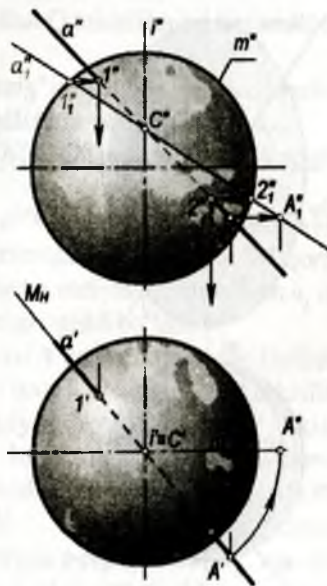
Agar $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq biror aylanish sirtining aylanish o'qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo'lsa (9.17-rasm), u holda to'g'ri chiziqni bu o'q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin. Berilgan $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq orqali o'tgan gorizontaal proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik sferani $m(m', m'')$ meridiani (aylana) bo'yicha kesadi (chizmada m'' ko'rsatilmagan). Bu meridian frontal tekislikka ellips bo'lib proyeksiyalanadi. Bu ellipsni chizmaslik maqsadida $m(m', m'')$ meridian va $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq sirtning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. U holda $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq $a_1(a_1', a_1'')$ vaziyatga, $m(m', m'')$ meridian esa $m_1(m_1', m_1'')$ vaziyatga keladi. a_1'' to'g'ri chiziq bilan m_1'' bosh meridianning kesishish nuqtalari $1_1'', 2_1''$ lar yordamida $1'', 2''$ hamda $1', 2'$ nuqtalar belgilab olinadi.

5-masala. Umumiy vaziyatdagi $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqning $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanma ellipsoid bilan kesishish nuqtalari $E(E', E''), E_1(E_1', E_1'')$ aniqlansin (9.18-rasm).

Yechish. Bunda a to'g'ri chiziqning ellipsoid aylanish o'qi bilan kesishmaydigan vaziyati berilgan. Agar berilgan a to'g'ri chiziq ellipsoidning

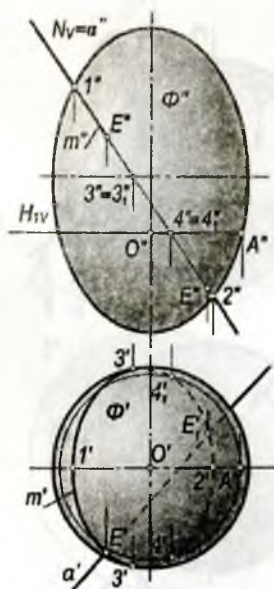


9.16-rasm.

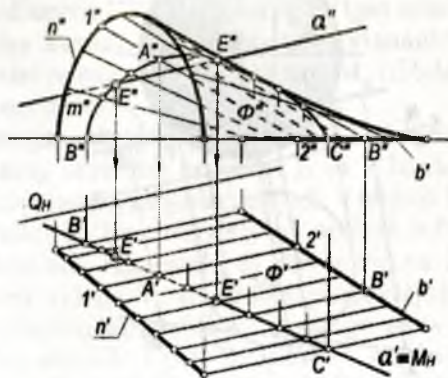


9.17-rasm.

aylanish o'qi bilan kesishadigan bo'lsa, u holda bunday masalani 9.17-rasmda ko'rsatilganidek yechishimiz mumkin. Berilgan a to'g'ri chiziqning ellipsoid bilan kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash uchun to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_V)$ tekislik o'tkaziladi. $N(N_V)$ tekislikning ellipsoid bilan kesishish chizig'i $m(m', m'')$ yasaladi. Bu chiziqning berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishuvida izlanayotgan nuqtalar hosil bo'ladi. Tekislikning N_V frontal izi, to'g'ri chiziqning a'' frontal proyeksiyasi va kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi m'' lar ustma-ust tushadi. Kesishish chizig'ining m' gorizontal proyeksiyasini yasash uchun m'' ga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni belgilab, ularning gorizontal proyeksiyasini topish va ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirish kerak. Ellipsoidning frontal konturiga tegishli $1(1', 1'')$ va $2(2', 2'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari $1'$ va $2'$ nuqtalar bevosita belgilab olinadi. Ixtiyoriy olingan $4(4', 4'')$ va $4_1(4'_1, 4''_1)$ nuqtalarning $4'$ va $4'_1$ gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun $4''=4''_1$ nuqta orqali gorizontal tekislikning frontal izi H_{IV} o'tkaziladi. So'ngra gorizontal proyeksiyada radiusi $O'A'=O''A''$ bo'lgan aylana chizamiz. $4=4_1$ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'ini tushirib, $O'A'$ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari $4'$ va $4'_1$ lar belgilab olinadi. Qolgan nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. a to'g'ri chiziq va m kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyalari a' , m' o'zaro kesishib, E' va E'_1 nuqtalarni hosil qiladi. E' va E'_1 nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlarini chiqarib, ularning a'' frontal proyeksiya bilan kesishuvida E'' va E''_1 nuqtalar hosil qilinadi.



9.18-rasm.



9.19-rasm.

6-masala. $n(n', n'')$ va $b(b', b'')$ yo'naltiruvchilari va $Q(Q_H)$ parallelizm tekisligi bilan berilgan konoidning $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari proyeksiyalari yasalsin (9.19-rasm).

Yechish. Bunda berilgan to'g'ri chiziq orqali gorizontall proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik o'tkaziladi. Uning konoid bilan kesishish chizig'i $m(m', m'')$ yasaladi. $a(a', a'')$ to'g'ri chiziq va $m(m', m'')$ chiziqning o'zaro kesishish nuqtalari $E(E', E'')$ va $E_1(E_1', E_1'')$ lar belgilab olinadi.

9.5-§. Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishishi

Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish chiziqlari quyidagi algoritm asosida bajariladi:

- berilgan Φ sirt va Q tekislik yordamchi kesuvchi P_1 tekislik bilan kesiladi (9.20-rasm). P_1 yordamchi tekislikni shunday o'tkazish kerakki, uning Φ sirt bilan kesishish chizig'i to'g'ri chiziq yoki aylana singari sodda chiziq bo'lsin;

- yordamchi P_1 tekislik bilan Φ sirtning kesishish chizig'i m_1 yasaladi: $\Phi \cap P_1 = m_1$;

- berilgan Q va P_1 tekisliklarning o'zaro kesishish to'g'ri chizig'i yasaladi: $Q \cap P_1 = a_1$;

- a_1 va m_1 chiziqlarning kesishish nuqtasi A_1 ni belgilab, ($A_1 = a_1 \cap m_1$) olinadi. a_1 va m_1 chiziqlarining kesishish nuqtalari bitta yoki ko'p bo'lishi mumkin.

Yuqorida bayon qilingan yasashlarga asosan $P_2, P_3, \dots$ tekisliklar o'tkazilib, $A_2, A_3, \dots$ nuqtalar holati aniqlanadi.

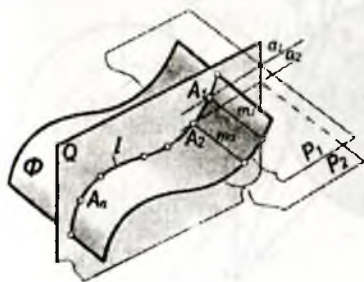
Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilib, Φ sirt bilan Q tekislikning kesishishidan tekis egri chiziq l hosil qilinadi.

Φ sirtning Q tekislik bilan kesishish chizig'ini shu sirt yasovchilarining tekislik bilan kesishish nuqtalarini topish orqali ham yasash mumkin.

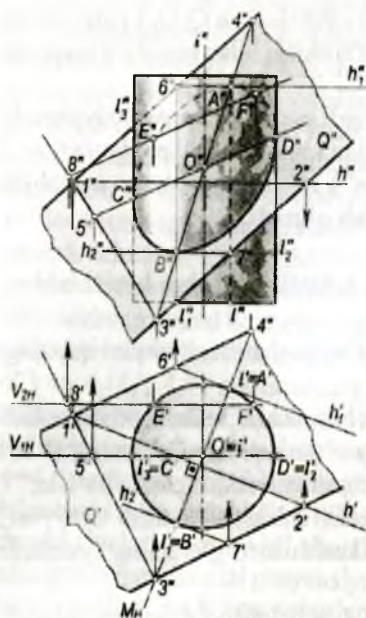
1-masala. To'g'ri doiraviy silindrning $Q(Q', Q'')$ tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin.

Yechish. Bunda $A(A', A'')$ yuqori va $B(B', B'')$ quyi nuqtalarni topish ikki xil usulda ko'rsatilgan. Bu usullardan biri urinma gorizontallar o'tkazishdir. Yuqori va quyi nuqtalar kesuvchi tekislikning silindrga urinma vaziyatda o'tkazilgan h_1 va h_2 gorizontallariga tegishli bo'ladi.

Ikkinchisi A va B nuqtalarni silindrning $i(i', i'')$ o'qi orqali o'tuvchi va Q tekislikka perpendikulyar bo'lgan $M(M_H)$ tekislik yordamida ham topish mumkin. Buning uchun Q tekislikning ixtiyoriy h gorizontali o'tkaziladi. Uning h' gorizontall proyeksiyasiga perpendikulyar ravishda silindrning i o'qi orqali M tekislikning gorizontall M_H izi o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni l va l' yasovchilari bo'yicha,



9.20-rasm.



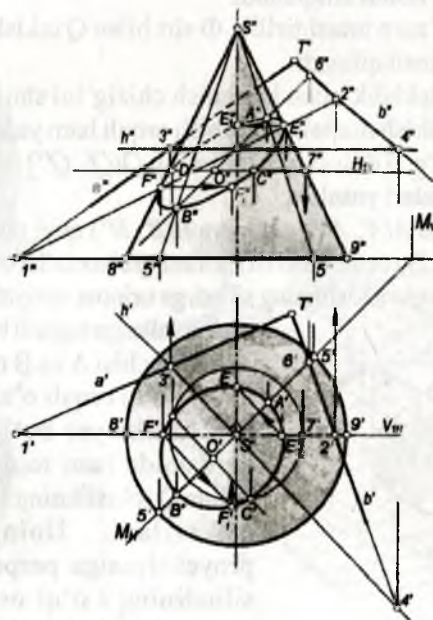
9.21-rasm.

berilgan Q tekislikni esa 34 to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. 34 kesishish chizig'i va l, l_1 yasovchilarning frontal proyeksiyalari $3''4''$ hamda l', l'' larning o'zaro kesishuvidan A'' va B'' nuqtalar hosil bo'ladi. Yuqori va quyi nuqtalarning A' va B' proyeksiyalari silindr asosining proyeksiyasiga tegishli bo'ladi.

Silindr ocherkiga tegishli C va D nuqtalar shu ocherkni ifodalovchi l_2 va l_3 yasovchilarning Q tekislik bilan kesishuvida hosil bo'lgan, oraliqdagi E va F nuqtalar esa C hamda D nuqtalar singari topiladi.

2-masala. To'g'ri doiraviy konusning berilgan tekislik bilan kesishuvidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.22-rasm).

Yechish. Kesuvchi tekislik o'zaro kesishuvchi $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqlar bilan berilgan. Dastlab tayanch nuqtalarning topilishini ko'rib chiqamiz. Kesishish chizig'ining konus ocherkiga tegishli, ya'ni konus chetki yasovchilari S9 va



9.22-rasm.

Kesimning yuqori va quyi nuqtalari esa konusning i o'qi orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan yordamchi $M(M_H)$ tekislikdan foydalanib topiladi. Buning uchun berilgan tekislikning ixtiyoriy $h(h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi. Bu gorizontalning h' proyeksiyasiga perpendikulyar qilib S' nuqta orqali yordamchi M tekislikning M_H izini o'tkazamiz. M tekislikning konus bilan kesishish chiziqlari S_5 va S_5' yasovchilar hamda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'i $S_6(S_6', S_6'')$ larning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, mos ravishda quyi B va yuqori A nuqtalarning frontal proyeksiyalari B'' va A'' nuqtalarni hosil qiladi. A va B nuqtalar orasidagi masofa kesim yuza – ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi CD ni topish uchun AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi O_1 nuqta orqali AB ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu holda CD kichik o'q gorizontal vaziyatdagi to'g'ri chiziq bo'lib, uning proyeksiyasini yordamchi $H_1(H_{IV})$ tekislikdan foydalanib topamiz. Gorizontal proyeksiyada kesuvchi tekislikning M_H izi kesishish chizig'ining simmetriya o'qi bo'ladi. Oraliqdagi E_1 va F_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E_1' va F_1' nuqtalar shu simmetriya o'qiga asoslanib yasalgan. So'ngra ular orqali E_1'' va F_1'' nuqtalar topilgan. Hosil bo'lgan nuqtalarning

Yechish. Kesishish chizig'ining quyi va yuqori nuqtalarini aylantirish usuli bilan topish qulay. Dastavval, sferaning markazidan o'tuvchi yordamchi $M(M_H)$ tekislik berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislikka perpendikulyar qilib o'tkaziladi. So'ngra $M(M_H)$ yordamchi tekislikning sfera va berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislik bilan kesishish chiziqlari sferaning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bu holda $M(M_H)$ tekislikning sfera bilan kesishish chizig'i (aylana) ning frontal proyeksiyasi sferaning ocherki bilan ustma-ust tushadi. M va berilgan tekislikning kesishish chizig'i $0,3$ ning frontal proyeksiyasi $0,3''$ esa $0,3,$ vaziyatni

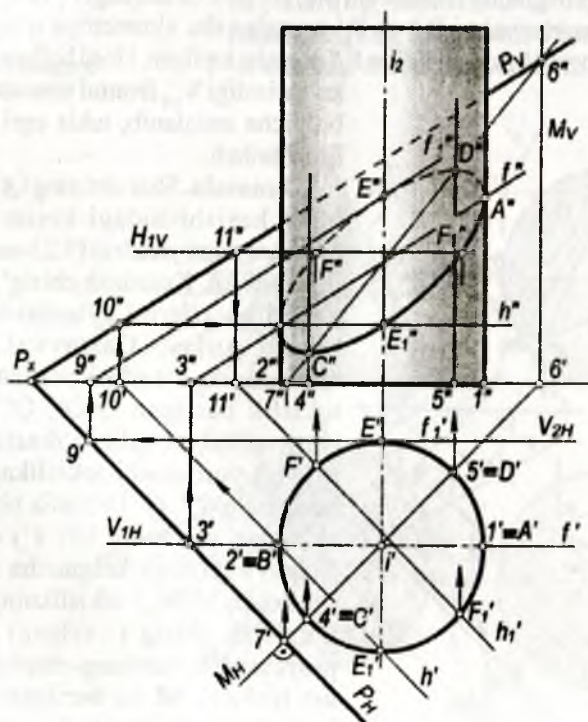
187

egallaydi. Demak, sferaning frontal proyeksiyadagi ocherki bilan $0_1''3_1''$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini belgilab (rasmida faqat A_1'' nuqta belgilangan), ularni teskari yo'nalishda α burchakka burish kerak bo'ladi. Buning uchun A_1'' nuqtadan gorizontaal vaziyatda to'g'ri chiziq o'tkazib, uning $0_1''3_1''$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi A'' ni belgilash yetarli bo'ladi. B'' nuqta ham xuddi shunday topiladi. Ocherklarning berilgan tekisliklar bilan kesishish nuqtalari C, D, E va F lar H_2 hamda V_1 tekisliklar yordamida topilgan. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalardan E_1 va E_2 esa yordamchi H_1 tekislikdan foydalanib topilgan.

4-masala. H tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.24-rasm).

Yechish. Kesim yuzasining gorizontaal proyeksiyasi silindrning gorizontaal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan P tekislikning kesishish nuqtalari A va B ning frontal proyeksiyalari A'' va B'' nuqtalar topiladi. Buning



9.24-rasm.

uchun chetki yasovchilar orqali $V_1(V_{1H})$ frontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni frontal chiziq bo'yicha kesadi. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi f'' silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib, A'' va B'' nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarining frontal proyeksiyalari D'' va C'' nuqtalarni topish uchun silindr o'qidan o'tuvchi va P tekislikka perpendikulyar bo'lgan $M(M_H, M_V)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi: $i \in M_H \perp H$. Bu tekislik silindrni 4(4', 4'') va 5(5', 5'') yasovchilari, P tekislikni esa 6(6', 6'') to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. Yasovchilarning frontal proyeksiyalari 6'' 7'' to'g'ri chiziq bilan kesishib, D'' va C'' nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning boshqa nuqtalarini kesuvchi tekislikning gorizontal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topish mumkin. Masalan, E nuqtaning frontal proyeksiyasi E'' ni topish uchun E nuqtadan o'tkazilgan $V_2(V_{2H})$ tekislik silindrni yasovchisi bo'yicha, P tekislikni $f_1(f_1', f_1'')$ frontal chiziq bo'yicha kesadi. Frontalning frontal proyeksiyasi f_1'' va E' nuqtadan o'tuvchi yasovchi o'zaro kesishib, E'' nuqtani hosil qiladi. F' va F_1'' nuqtalar ixtiyoriy $H_1(H_{1V})$ gorizontal yordamchi tekislik o'tkazish yo'li bilan topiladi. Yordamchi tekislikning H_{1V} izi C'' va D'' nuqtalar oralig'ida o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi silindrning asosi bilan ustma-ust tushadi. Berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik $H_1(H_{1V})$ tekislik bilan $1_1(1_1', 1_1'')$ nuqtadan o'tuvchi $h(h_1', h_1'')$ gorizontal bo'ylab kesishadi.

h_1 gorizontalning gorizontal proyeksiyasi h_1' va silindrning asosi o'zaro kesishib, F' va F_1'' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, H_{1V} izda F'' va F_1'' nuqtalar belgilab olinadi.

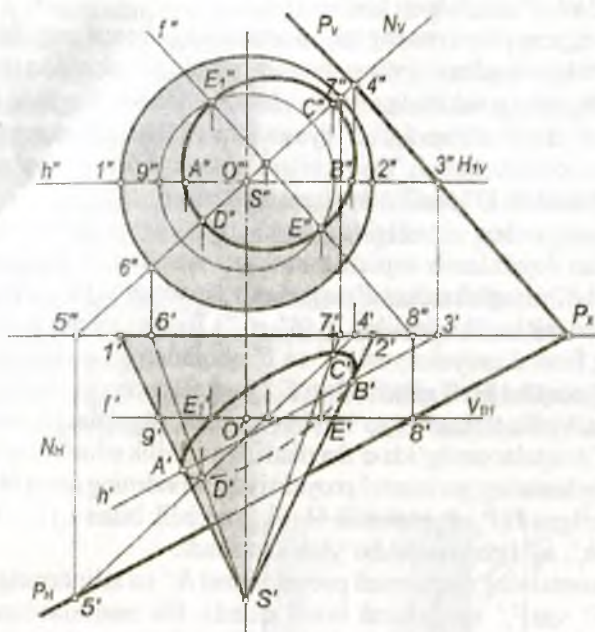
Silindrning kuzatuvchiga qaratilgan oldingi yarim qismini ko'rinadi, orqa tomondagi qismi esa ko'rinmaydi. Shunga asosan kesimning frontal proyeksiyasidagi $A''F''E''C''B''$ qismi ko'rinadi, $B''F''E''D''A''$ qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq — ellips hosil qilinadi.

5-masala. Asosi V tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy konusning $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzasi proyeksiyalari yasalsin (9.25-rasm).

Yechish. Kesim yuzasi — ellipsning proyeksiyalarini yasash konusning $S1(S'1', S''1'')$ va $S2(S'2', S''2'')$ yasovchilari bilan $P(P_H, P_V)$ tekislikning kesishish nuqtalari $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ larni topishdan boshlanadi. $S1$ va $S2$ yasovchilarning frontal proyeksiyalari $S''1''$ va $S''2''$ lar orqali $H_1(H_{1V})$ gorizontal tekislik izi o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni 3(3', 3'') nuqtadan o'tgan $h(h', h'')$ gorizontal chiziq bo'yicha kesadi. Bu gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi konusning $S'1'$ va $S'2'$ chetki yasovchilari bilan kesishib, A' va B' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chizig'ini o'tkazib, $S''1''$ va $S''2''$ yasovchilarda A'' va B'' nuqtalar belgilab olinadi.

V tekislikka eng yaqin $C(C', C'')$ va eng uzoq $D(D', D'')$ nuqtalarning proyeksiyalari quyidagicha topiladi: konusning o'qi orqali o'tuvchi va berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik konusni $S6(S'6', S''6'')$ va

$S7(S'7', S''7'')$ yasovchilari bo'yicha kesadi. $P(P_H, P_V)$ va $N(N_H, N_V)$ tekisliklar esa $45(4'5', 4''5'')$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $P \cap N = 45$.



9.25-rasm.

Bu to'g'ri chiziqning $4'5'$ gorizontaal proyeksiyasi $S6$ va $S7$ yasovchilarning gorizontaal proyeksiyalari $S'6'$ va $S'7'$ lar bilan kesishib, D' va C' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, $S''6''$ va $S''7''$ yasovchilarda D'' va C'' nuqtalar belgilab olinadi.

Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalar esa konusning o'qiga perpendikulyar yordamchi frontal tekisliklar o'tkazish bilan topiladi. Masalan, C' va D' nuqtalar oralig'ida V_1 frontal tekislikning V_{III} gorizontaal izi o'tkaziladi. Bu tekislik konusni radiusi $0'9'$ ga teng aylana bo'yicha, P tekislikni esa $8(8', 8'')$ nuqtadan o'tuvchi $f(f', f'')$ frontal bo'yicha kesadi. Frontal proyeksiyada chizilgan $0'9'=0''9''$ radiusli aylana va f' to'g'ri chiziq o'zaro kesishib, E'' va E_1'' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib, f' to'g'ri chiziqda E' va E_1' nuqtalar belgilab olinadi. Hosil bo'lgan nuqtalar silliq tutashtirilib, kesim yuzasi — ellips chiziladi. Frontal proyeksiyada kesimga tegishli bo'lgan hamma nuqtalar ko'rinadi. Gorizontaal proyeksiyada esa konusning yuqori yarmida joylashgan kesimning $A'E_1'C'B'$ qismi ko'rinadi, $B'E'D'A'$ qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq — ellipsni hosil qilamiz.

9.6-§. Sirtlarning to'g'ri chiziqli va tekislik bilan kesishuvini yasashda ba'zi qo'shimcha usullar

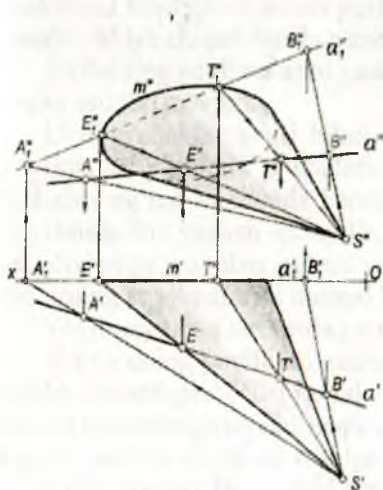
Piramida yoki konus sirtlar qatnashgan pozitsion masalalarni yechishda markaziy proyeksiyalashdan foydalanish maqsadga muvofiq.

1-masala. Konus sirti bilan ixtiyoriy $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqli kesishish nuqtalarini yasash kerak bo'lsin (9.26-rasm).

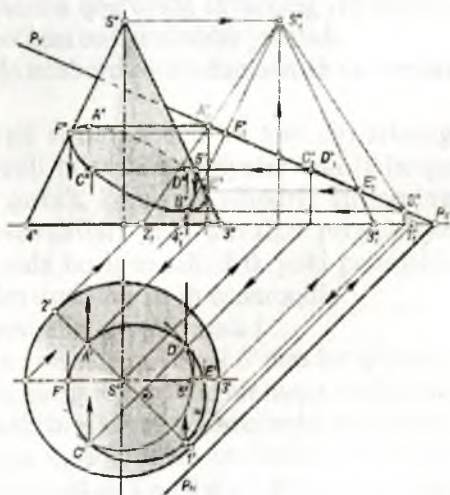
Yechish. Konusning V asos tekisligini proyeksiyalar tekisligi, uchi S nuqtani esa proyeksiyalash markazi deb qabul qilamiz. U holda konus sirtining V dagi markaziy proyeksiyasi uning $m(m', m'')$ asosi bilan ustma-ust tushadi. $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqli kesishish V tekislikdagi markaziy proyeksiyasi $a_1(a_1', a_1'')$ esa $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalar orqali aniqlanadi. Konusning m' asosi va a_1'' to'g'ri chiziqli kesishish nuqtalari E_1'' va T_1'' lar izlanayotgan kesishish nuqtalarining markaziy proyeksiyalari bo'ladi. E_1'' va T_1'' nuqtalar S proyeksiyalash markazining frontal proyeksiyasi S'' bilan tutashtiriladi. Natijada ular a' bilan kesishib, E'' va T'' nuqtalarni hosil qiladi. E'' va T'' nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E' va T' a' to'g'ri chiziqli ustida aniqlanadi.

2-masala. To'g'ri doiraviy konusning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash talab qilinsin (9.27-rasm).

Yechish. Konus va P tekislik V frontal proyeksiyalar tekisligiga P tekislikning gorizontal yo'nalishi bo'yicha proyeksiyalangan. Bunday proyeksiyalashda kesishish chizig'ining yordamchi proyeksiyasi $A_1'' B_1''$ kesma bo'lib, u tekislikning P_V izi bilan ustma-ust tushadi. Kesishish chizig'ining $A_1'' B_1''$, $C_1'' \equiv D_1''$, E_1'' va F_1'' nuqtalari orqali konusning yordamchi yasovchilari o'tkaziladi. So'ngra bu yasovchilarning gorizontal va frontal



9.26-rasm.



9.27-rasm.

proyeksiyalari yasaliib, ularga izlanayotgan nuqtalarning avval $A'', B'', C'', D'', E'', F''$ frontal proyeksiyalari, keyin A', B', C', D', E', F' gorizontal proyeksiyalari aniqlanadi. Bunda A – kesishuv chizig'ining yuqori, B – quyi, E va F nuqtalar esa konusning ocherkiga tegishli nuqtalardir. Kesishish chizig'i AB kesma ellipsning katta o'qi bo'lib, kichik o'qi esa CD kesma bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?
2. Sferani tekislik bilan kesganda qanday shakl hosil bo'ladi va uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
3. Silindrning tekislik bilan kesishuvidan qanday shakllar hosil bo'lishi mumkin?
4. Konus kesimlari nimalardan iborat?
5. Sirtning tekislik bilan kesishish chizig'idagi maxsus nuqtalar nimalardan iborat?
6. Sirtlar qanday tekisliklar bilan kesilsa, kesimning bitta proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi?
7. Qanday tekisliklar tor sirtini aylanalar bo'yicha kesadi?
8. To'g'ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtalarini yasash qanday bajariladi?
9. To'g'ri chiziq bilan konusning kesishish nuqtalarini yasashda yordamchi kesuvchi tekislikni qanday vaziyatda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi?
10. To'g'ri chiziq aylanish sirtlarining aylanish o'qini kesib o'tsa, ularning kesishish nuqtalarini qanday usulda yasash osonroq bo'ladi?



X BOB. SIRTLARNING YOYILMALARINI YASASH

10.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtning egilish deformatsiyasi yordamida tekislikka aylantirish mumkin bo'lsa, bunday sirt *yoyiladigan sirt* deyiladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

Ta'rif. Sirt biror bo'lagining cho'zilmagan, yritilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning yoyilmasi deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash muhandislik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil qilish uchun yaxlit chizma qog'ozida sirtlarning yoyilmalari yasaliib, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

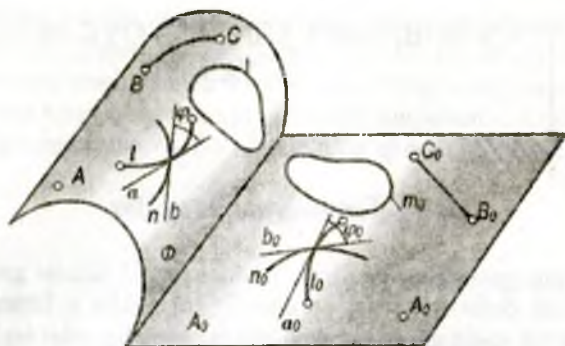
Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan qirrali sirtlar, konus va tors sirtlarining yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan qirrali, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash qulaydir. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.

Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari taqriban yasaladi.

Sirt va uning yoyilmasi elementlari orasida quyidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lishi kerak, ya'ni sirtga tegishli har bir nuqta va shaklga shu sirt yoyilmasiga tegishli nuqta va shakl mos keladi yoki aksincha, yoyilmaga tegishli har bir nuqta va shaklga sirtga tegishli nuqta va shakl mos kelishi kerak (10.1-rasm). Bu moslikka asosan quyidagi xossalarni keltirish mumkin:

1-xossa. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yoylarning uzunliklari o'zaro teng bo'ladi: $l = l_0$.



10.1-rasm.

Natija. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yopiq egri chiziqlar bir xil yuzaga ega bo'ladi: $S_m = S_{m_0}$.

2-xossa. Sirtga tegishli ikki chiziq orasidagi burchak yoyilmaga tegishli mos chiziqlar orasidagi burchakka tengdir: $\varphi = \varphi_0$.

3-xossa. Sirtga tegishli to'g'ri chiziqqa yoyilmada ham to'g'ri chiziq mos keladi. Ammo yoyilmaga tegishli to'g'ri chiziqqa sirtning biror to'g'ri chizig'i hamma vaqt ham mos kelmaydi.

4-xossa. Sirtga tegishli o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarga yoyilmada ham o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar mos keladi.

5-xossa. Agar sirtga tegishli egri chiziqqa yoyilmada to'g'ri chiziq mos kelsa, bunday chiziq sirtning *geodezik chizig'i* deyiladi. 10.1-rasmda ko'rsatilgan sirtning BC chizig'i uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

Ta'rif. Sirtga tegishli ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada tutashtiruvchi chiziq sirtning geodezik chizig'i deb ataladi.

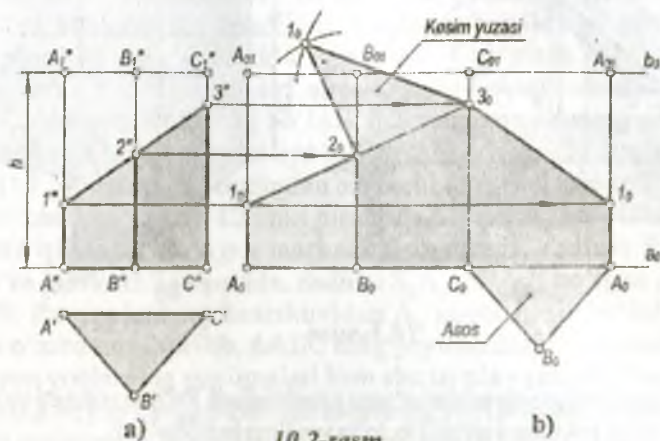
Sirtning yoyilmasini yasash deganda uni yirtmasdan, uzmasdan yoki g'ijimlashtirib faqat egib bir tekislikka jipslashtirish tushuniladi. Albatta, bunday jarayon sirtning biror chizig'i (qirasi, yasovchilari va shu kabilar) bo'yicha kesib, amalga oshirilishi mumkin. Lekin amaliyotda sirtlarning yoyilmalari, asaliy, so'ngra egish deformatsiyasi yordamida bu yoyilmalardan kerakli konstruksiyalar yasaladi. Shuning uchun ham sirtlarning yoyilmalarini tekislik (qog'oz) da yasash muhim ahamiyat kasb etadi.

10.2-§. Ko'pyoqliklarning yoyilmalari

Ko'pyoqliklarning to'la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko'pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo'lgan yoqlarni yasash

demakdir. Bunday yasash uchun yoqlarning tomonlari, ya'ni qirralarining haqiqiy uzunliklari bo'lishi kerak. Agar ularning haqiqiy uzunliklari chizmada bo'lmasa, ularni turli usullar orqali yasash mumkin.

1-masala. Asosi H tekislikda yotgan uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash talab qilinsin (10.2-a,b rasm).

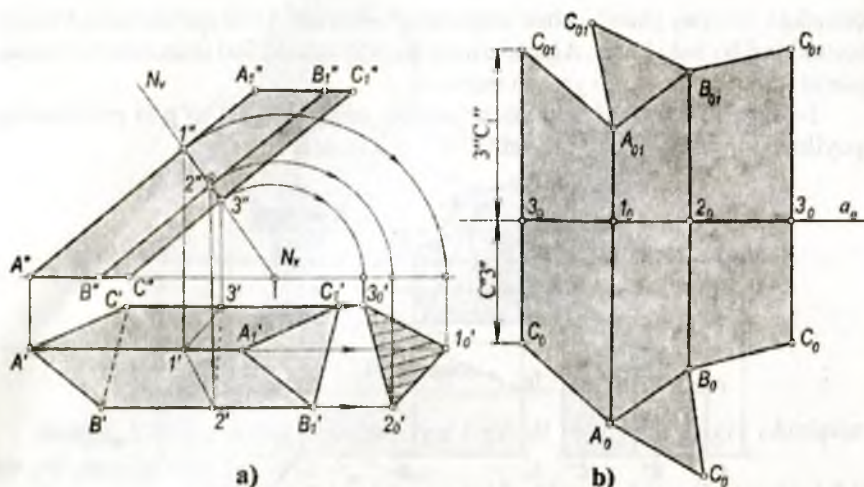


10.2-rasm.

Yechish. Prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontaal proyeksiyada haqiqiy uzunlikda tasvirlangan. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror, masalan, AA_1 qirrasi bo'ylab xayolan kesish kerak. So'ngra uchta to'g'ri to'rtburchaklar (yon yoqlar) yonma-yon qo'yib yasaladi. Bu to'rtburchaklarning balandligi prizmaning balandligi h ga, asoslari esa mos ravishda $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo'shiladi va prizmaning to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.

10.3-a,b rasmlarda berilgan uchyoqli og'ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo'lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari $A''A_1''$, $B''B_1''$ va $C''C_1''$ kesmalarga teng bo'ladi. Asoslari gorizontaal vaziyatda bo'lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Bunday og'ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og'ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy $N(N_0)$ tekislik o'tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari ($1'2'3'$, $1''2''3''$) hosil qilinadi. So'ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi $\Delta 1_0 2_0 3_0$ aylantirish usulida yasaladi.

Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo'sh) joyda a_0 – yordamchi chiziq ingichka qilib o'tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarining haqiqiy uzunliklari biror (masalan, 3_0) nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi (10.3-b rasm). Hosil bo'lgan 3_0 , 1_0 , 2_0 va 3_0 nuqtalardan a_0 chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o'lchab qo'yiladi. Yoyilmada $C''3''=C_0 3_0$ va $3''C''=3_0 C_0$ qirraning o'lchab qo'yilishi ko'rsatilgan.

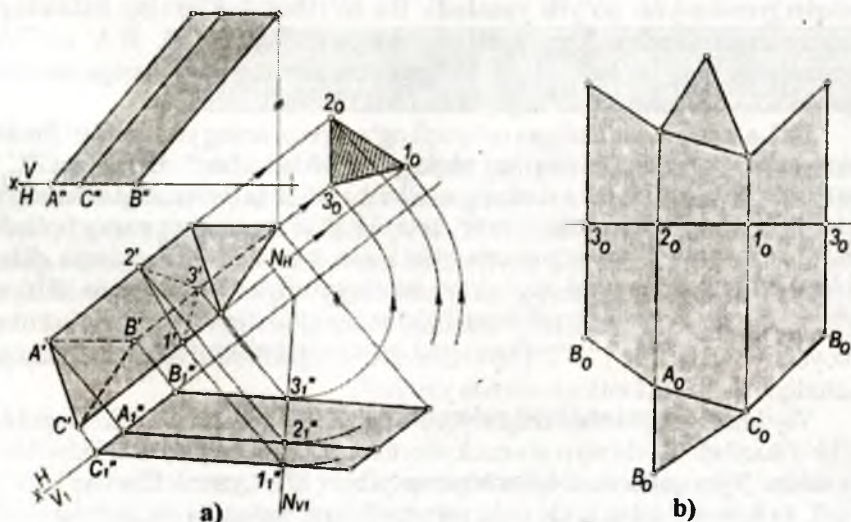


10.3-rasm.

Hosil bo'lgan qirralarning uchlari o'zaro tutashtiriladi. Prizma yon sirti va asosining haqiqiy kattaligi yoyilmasi qo'shilib, to'la yoyilma hosil bo'ladi.

2-masala. Berilgan yon qirralari umumiy vaziyatda bo'lgan uchyoqli prizmaning yoyilmasini yasash talab etilsin (10.4-a rasm).

Yechish. Mazkur masala yuqorida keltirilgan masala asosida yechiladi. Dastlab prizma qirralari va normal kesimining haqiqiy uzunliklarini yasash

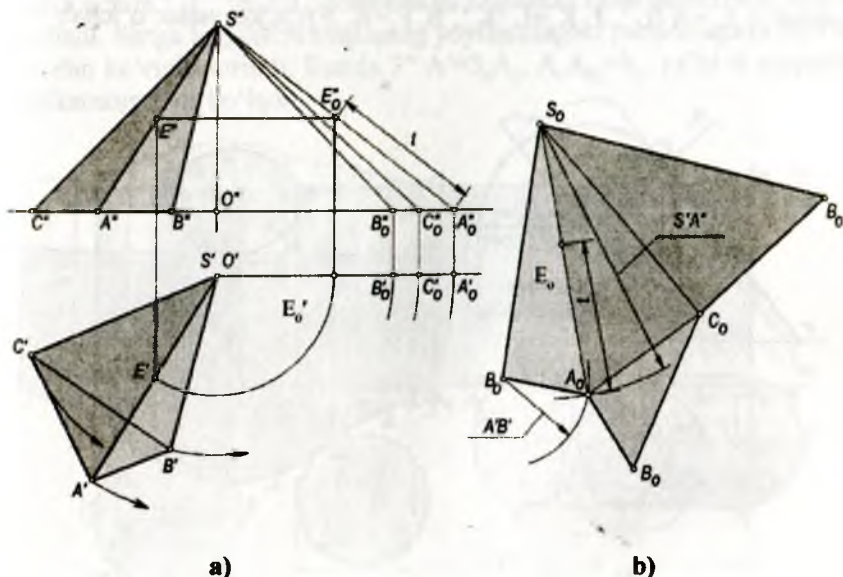


10.4-rasm.

kerak bo'ladi. Buni esa proyeksiyalar tekisliklarini prizma qirralariga parallel vaziyatda almashtirish bilan amalga oshirish maqsadga muvofiqdir. Chizmadagi qolgan yasashlar va yoyilmaning hosil qilinishi ortiqcha tushuntirishlarni talab qilmaydi (10.4-b rasm).

3-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo'lgan uchyoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasalsin (10.5-a rasm).

Yechish. Piramida kabi sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchak usulidan foydalaniladi. Buning uchun dastlab piramida yon qirralarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Chizmada ular aylantirish usuli yordamida topilgan. Asos qirralarining haqiqiy uzunliklari $A'B'$, $B'C'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Piramida yon sirtining yoyilmasini yasash uchun chizmaning ixtiyoriy (bo'sh) joyida S_0 nuqta belgilab olinadi (10.5-b rasm). Bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa $S_0B_0 = S'B''$ kesma o'lchab qo'yiladi. Chunki piramida SB qirrasi bo'yicha kesilgan deb faraz qilinadi. So'ngra markazi B_0 nuqtada, radiusi $B_0A_0 = B'A'$ bo'lgan va markazi S_0 nuqtada, radiusi $S_0A_0 = S'A''$ bo'lgan ikkita yoy chiziladi. Bu yoylarning kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi. $S_0B_0A_0$ nuqtalar o'zaro tutashtirilib, $\triangle ABC$ ning yoyilmadagi o'rni hosil qilinadi. Qolgan yon yoqlarning yoyilmalari ham shu tarzda yasaladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga piramida asosining yoyilmadagi o'rni qo'shilsa, piramida sirtining to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.



10.5-rasm.

10.3-§. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash

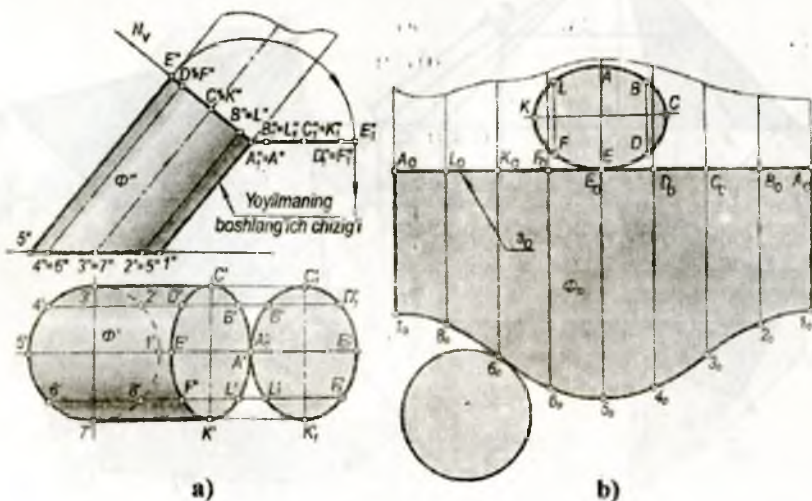
Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasashda normal kesim va dumalatish usullaridan foydalaniladi. Har ikkala usul bilan ham yoyilmani yasashda silindrik sirt approksimatsiya qilinib, prizmatik sirtga keltiriladi va masala prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi.

Umuman, biror silindrning yoyilmasini yasash uchun: silindr yoyilmasida qatnashadigan yasovchilarning haqiqiy uzunliklari aniqlanadi; qo'shni yasovchilar orasidagi asos yoylarining haqiqiy uzunliklari topiladi; planimetrik yasashlarga asosan silindr elementlari ketma-ket yoyilmada yasaladi.

10.6-a rasmda yasovchilari frontal vaziyatda va asosi H tekislikda yotgan og'ma elliptik silindr tasvirlangan. Bunday silindrning yoyilmasi (10.6-b rasm) normal kesim usulida bajarilgan. Silindrik sirt prizmatik sirtga approksimatsiya qilinadi. Buning uchun silindr asosi ixtiyoriy bo'laklarga bo'linadi (rasmda 8 ta teng bo'lakka bo'lingan).

Bu holda silindr 8 yoqli prizmagacha almashtiriladi. Silindrning yasovchilariga perpendikulyar bo'lgan $N(N_v)$ tekislik bilan kesishish chizig'i yasaladi. Kesishish chizig'i, ya'ni normal kesimning haqiqiy kattaligi aylantirish usuli bilan topiladi.

Silindrik sirtning yoyilmasini yasash uchun chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb 1A yasovchi olingan. a_0 to'g'ri chiziqqa uzunligi normal kesimning perimetriga teng bo'lgan $[A_0A_0]$ kesma o'lchab qo'yiladi. Bu kesmaga A_0 nuqtadan boshlab $A_0L_0=A_0'L_0'$, $L_0K_0=L_0'K_0'$, $K_0F_0=K_0'F_0'$, ... kesmalar o'lchab



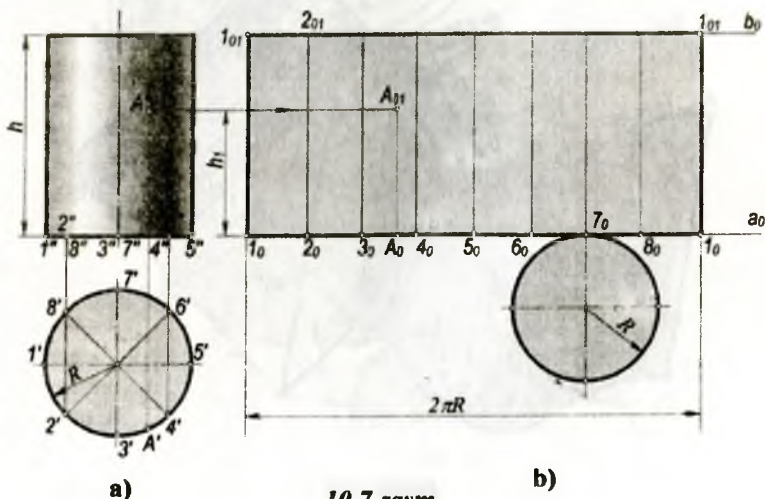
10.6-rasm.

qo'yilib, oraliqdagi $L_0, K_0, F_0 \dots$ nuqtalar aniqlanadi. Bu nuqtalar orqali a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar o'tkaziladi. 10.6-a rasmda silindr yasovchilarining frontal proyeksiyalari o'z haqiqiy uzunliklariga teng ekanligini ko'rish mumkin. Shuning uchun yasovchilarning frontal proyeksiyadagi uzunliklari o'lchab olinib, yoyilmadagi mos perpendikulyarlarga qo'yiladi. O'lchab qo'yilgan kesmalarning ikkinchi uchlari tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan Φ_0 shakl Φ silindr yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Φ_0 shakl silindrning asosi va normal kesimining haqiqiy kattaligi bilan to'ldirilib, to'la yoyilma hosil qilinadi.

Asoslari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, bunday to'rtburchakning tomonlari $2\pi R$ va h_0 ga teng bo'ladi (10.7-a, b rasm). Bu yerda, R – asosning radiusi, h – silindrning balandligi. Asosi II tekisligiga tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrning to'la yoyilmasini yasash 10.7-b rasmda ko'rsatilgan.

Bunda silindrning $1_0 2_0$ ($1' 2', 1'' 2''$) yasovchisi yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olingan.

Ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga $[1_0 1_0] = 2\pi R$ kesma o'lchab qo'yiladi va u teng 8 bo'lakka bo'linadi. Kesmaning har ikkala uchidan a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilib, ularga $1_0 1_{01} = h$ kesma, ya'ni silindrning balandligiga teng kesmalar o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan $1_0 1_{01} 1_{01} 1_0$ to'g'ri to'rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo'lib, to'la yoyilmani yasash uchun $1_0 1_{01}$ va $2_0 2_{01}$ tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asoslari chiziladi. Sirtga tegishli A nuqtaning yoyilmadagi o'rnini aniqlash 10.7-a, b rasmdan ko'rinib turibdi. Bunda $3' \cap A' = 3_0 A_0$, $A_0 A_{01} = h_1$, ya'ni A nuqtaning applikatasiga teng bo'ladi.



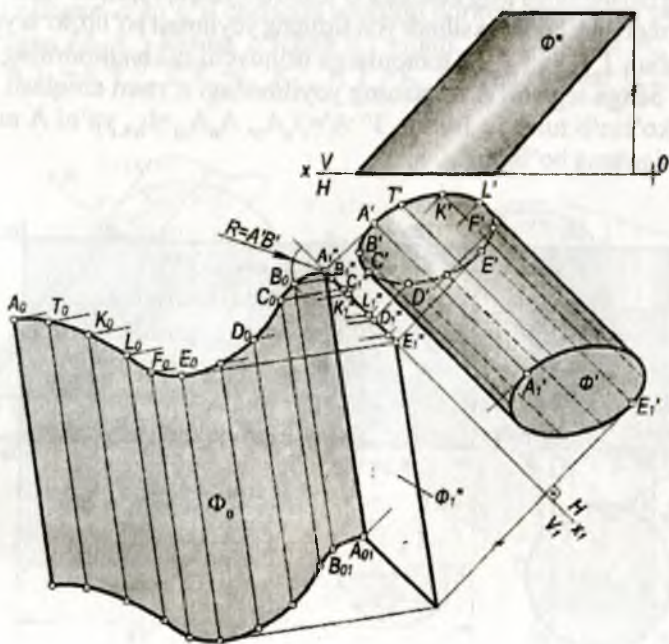
10.7-rasm.

10.8-rasmda tasvirlangan Φ og'ma elliptik silindr yon sirtining yoyilmasi dumalatish usulida bajarilgan. Dastavval, silindr uning yasovchilariga parallel bo'lgan V tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli bilan proyeksiyalanadi.

Silindrning $AA_1(A'A', A''A'')$ yasovchisi yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olinan. Φ silindr o'zining AA_1 yasovchisi orqali o'tgan tekislikka yoyiladi. Buning uchun silindrik sirt yana prizmatik sirtga approksimatsiya qilinadi va prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Silindr yasovchilaridan biri $BB_1(B'B', B''B'')$ ning yoyilmadagi o'rni B_0B_{01} ni yasashni ko'rib chiqaylik. Markazi A_1'' nuqtada va radiusi $A'B'$ ga teng bo'lgan aylana yoyi chiziladi. B_1'' nuqtadan esa $A_1''A_{01}''$ yasovchiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, yoyilmaga tegishli B_0 nuqtani hosil qiladi. B_0 nuqta orqali $A_1''A_{01}''$ ga parallel qilib B_0B_{01} ($B_0B_{01}=A_1''A_{01}''$) yasovchi o'tkaziladi. Yoyilmadagi $C_0, D_0, \dots$ nuqtalar va ular orqali o'tuvchi yasovchilar ham B_0 nuqta va B_0B_{01} yasovchi singari yasaladi.

10.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash

Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek uchburchaklar usuli bilan bajariladi. Buning uchun konus o'ziga ichki chizilgan ko'pyoqli piramidaga approksimatsiya qilinadi va shu

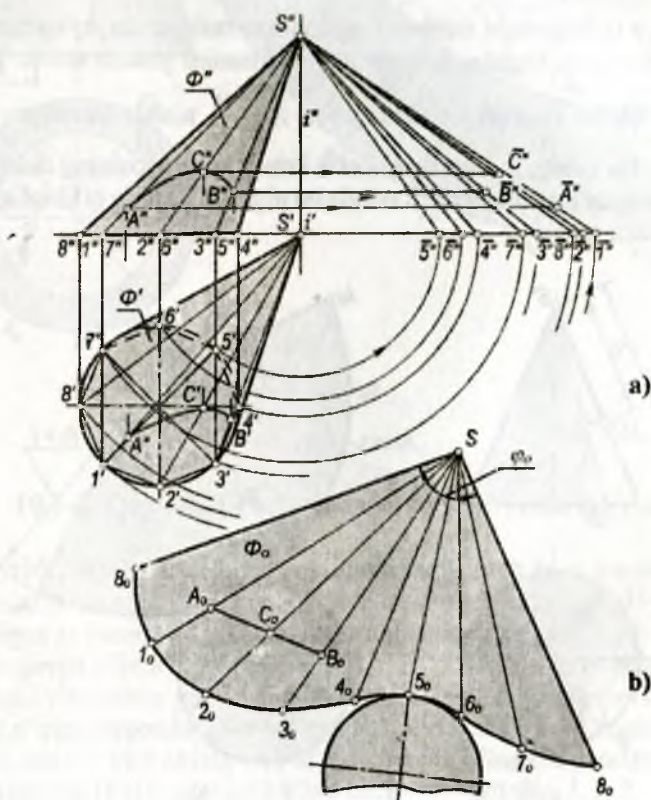


10.8-rasm.

piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko'pyoqli piramidaning yoqlari qanchalik ko'p bo'lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo'ladi. Umuman, konusni yoyish uchun uning bir necha yasovchilarining haqiqiy uzunliklari va yo'naltiruvchi egri chizig'i (yoki uning bo'laklari) — asosining haqiqiy uzunligi topiladi. So'ngra konus yasovchilari va asosining bo'laklari birin-ketin yoyilmaga ko'chiriladi.

10.9-a rasmda asosi H tekislikka tegishli Φ og'ma konus tasvirlangan. Bu konusning yoyilmasini yasashda uchburchaklar usulidan foydalanamiz. Konusni o'ziga ichki chizilgan piramidaga approksimatsiyalaymiz. Konus yasovchilari yoki ichki chizilgan piramida qirralarining haqiqiy uzunliklarini yasash rasmda aylantirish usulida bajarilgan.

S8 yasovchini yoyilmaning boshlang'ich chizig'i deb olamiz. Chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy S_0 nuqtani belgilaymiz (10.9-b rasmlar). 10.9-a rasmdan S8 yasovchining haqiqiy uzunligi bo'lgan $S''8_1$ kesmani o'lchab va uni S_0 nuqtadan chiqarilgan ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziqqa qo'yib, 8_0



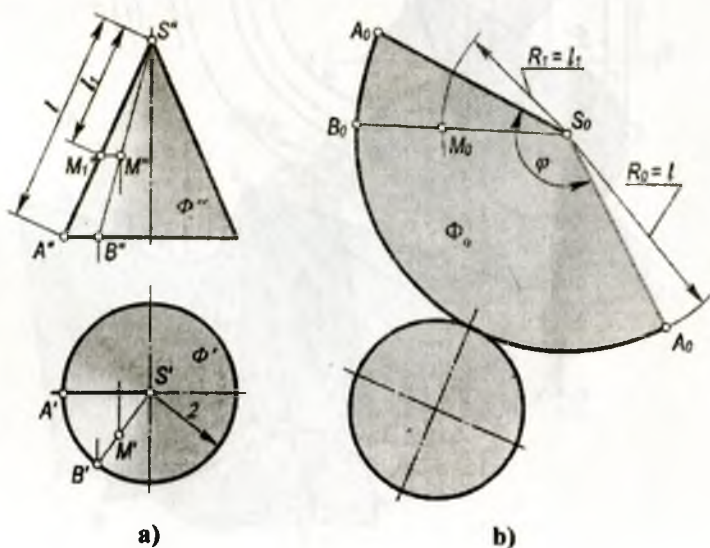
10.9-rasm.

nuqtani hosil qilamiz. So'ngra S_0 nuqtani markaz, $S''1''$ ni radius qilib yoy chizamiz. Markazi 8_0 nuqtada va radiusi $8'1'$ bo'lgan ikkinchi yoy chizamiz. Har ikkala yoylar o'zaro kesishib, 1_0 nuqtani hosil qiladi. Yoyilmaning qolgan $2_0, 3_0, 4_0, \dots$ nuqtalari ham shu tartibda yasalani. Hosil bo'lgan Φ_0 shakl berilgan konus yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Uni konusning asosi – ellips bilan to'ldirib, to'la yoyilmani hosil qilamiz. $\Phi(\Phi', \Phi'')$ konus sirtidagi AB egri chiziqqa Φ_0 shaklda A_0B_0 to'g'ri chiziq mos kelgan. Shuning uchun AB – konusning geodezik chizig'i bo'ladi. Shuningdek, konusning hamma yasovchilari uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

10.10-a,b rasmda asosi H tekislikka tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy $\Phi(\Phi', \Phi'')$ konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo'ladi.

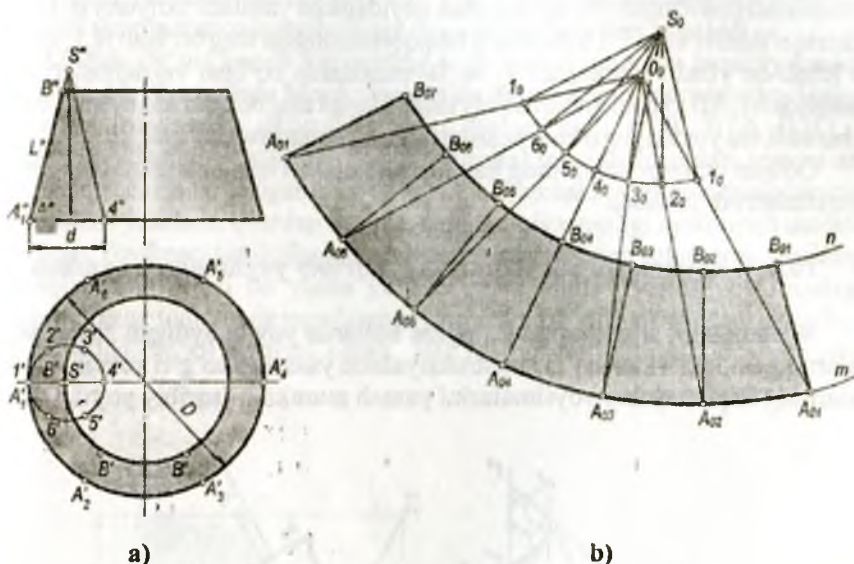
Doiraviy sektorning radiusi konus yasovchisining uzunligi l ga teng, markaziy burchagi $\varphi = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$ bo'ladi. Bu yerda, r – konus asosining radiusi, l – konusning yasovchisi.

10.11-a,b rasmda uchi chizma maydonidan tashqarida joylashgan kesik konus tasvirlangan. Bunday konusning yoyilmasini yasash uchun shunday yordamchi konus chizish kerakki, unda $K = \frac{d}{D}$ nisbat butun son orqali ifodalansin. Bu yerda, D – berilgan kesik konus katta asosining diametri, d – yordamchi konusning diametri. Rasmda bu nisbat 3 ga teng qilib olingan.



10.10-rasm.

Dashtlab yordamchi konusning yoyilmasini yasaymiz (10.11-b rasmi). Keyin $\angle 1_0 S_0 1_0$ ning bissektrisasiga tegishli ixtyoriy O_0 nuqta orqali $O_0 1_0, O_0 2_0, O_0 3_0, \dots$ nurlarni o'tkazamiz. Bu nurlarga O_0 nuqtadan boshlab $O_0 A_{01} = K' O_0 1_0, O_0 A_{02} = K' O_0 2_0, O_0 A_{03} = K' O_0 3_0, \dots$ kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan $A_{01}, A_{02}, A_{03}, \dots$ nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. Amalda bunday egri chiziqning markazi O_0 nuqtada, radiusi $O_0 A_{01}$ bo'lgan aylana yoyi ko'rinishida chiziladi. So'ngra $A_{01}, A_{02}, A_{03}, \dots$ nuqtalar orqali $S_0 1_0, S_0 2_0, S_0 3_0, \dots$ yasovchilarga mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga kesik konusning A"B" yasovchisiga teng bo'lgan $A_{01} B_{01}, A_{02} B_{02}, A_{03} B_{03}, \dots$ kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan $B_{01}, B_{02}, B_{03}, \dots$ nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, kesik konus yon sirtining yoyilmasini hosil qilamiz.



10.11-rasm.

10.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash

Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash ham konus sirtlarning yoyilmalarini yasashdagidek uchburchaklar usulida bajariladi. 10.12-a rasmda yoyiladigan gelikoid va 10.12-b rasmda uning yoyilmasini yasash ko'rsatilgan. Qaytish qirrali silindrik vint chizig'ida $A, B, C, \dots$ nuqtalarni belgilab olamiz. Ular orqali vint chizig'iga urinmalar o'tkazib, sirt yasovchilarini hosil qilamiz. Sirtning o'qiga perpendikulyar bo'lgan H_1 tekislik bilan sirtni kesamiz. Bu holda berilgan sirt n – vint chizig'i va m – evolventa bilan chegaralangan bo'ladi. Urinmalarning $H_1 (H_{IV})$ tekislik bilan kesishish nuqtalari $1, 2, 3, \dots$ ni belgilab olamiz. Sirtning qo'shni yasovchilari orasidagi bo'laklarining, ya'ni egri chiziqli to'rtburchaklarning bittadan diagonallarini o'tkazib, ularni ikkita

Shunday qilib, qaytish qirrali sirt ko'pyoqlik sirtiga approssimatsiya qilinadi. Bu holda sirt yoyilmasini yasash ko'pyoqlik sirtining yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Buning uchun uchburchaklarning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Shunday tomonlardan biri, masalan, $C2$ ning haqiqiy uzunligini yasash 10.12-a rasmda aylantirish usulida bajarilib ko'rsatilgan. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yoyilmada uchburchaklar ketma-ket yasaladi. 10.12-b rasmda yoyilma $A_0B_0I_0$ uchburchakni yasashdan boshlangan. Bu uchburchak quyidagicha yasaladi: ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga $B1$ tomonning haqiqiy uzunligiga teng bo'lgan B_0I_0 kesma o'lchab qo'yiladi. Markazlari I_0 va B_0 nuqtalarda bo'lgan va radiuslari mos ravishda $A1$, AB tomonlarning haqiqiy uzunliklariga teng bo'lgan ikki aylana yoylari chiziladi. Bu yoylarning o'zaro kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi.

10.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash

204

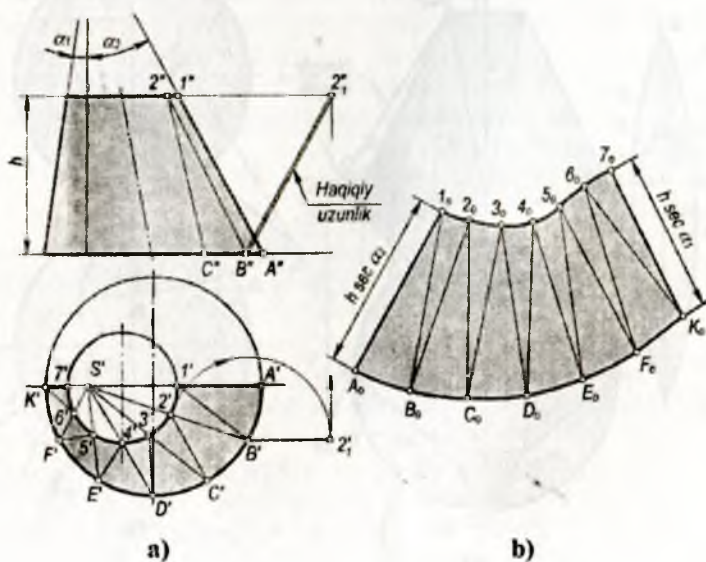
yasashning umumiy usuli shundan iboratki, berilgan sirt yoyiladigan sirtlardan biriga (ko'pyoqlik, silindrik yoki konussimon) approssimatsiya qilinadi.

Sirtlarning yoyilmalarini taqribiy yasashning uch usuli mavjud:

1. Yordamchi uchburchaklar usuli.
2. Yordamchi silindrik sirtlar usuli.
3. Yordamchi konus sirtlar usuli.

Yordamchi uchburchaklar usuli. Bu usulning mohiyati quyidagidan iborat: dastlab yoyilmaydigan sirt uchburchaklarga bo'lib chiqiladi, ya'ni berilgan sirt ko'pyoqlik sirtiga approssimatsiya qilinadi. Keyin ko'pyoqlik sirtining yoyilmasi yasaladi. Buning uchun uchburchak tomonlarining haqiqiy uzunliklari proyeksiyalarda yasaladi. Har bir uchburchakning yoyilmadagi vaziyati uchala tomonining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasaladi.

Amalda og'ma konus sirtlarining yoyilmalari umuman taqribiy usulda yasaladi. 10.13-a rasmda Monj chizmasida og'ma konus tasvirlangan. Uning yoyilmasini yasash uchun berilgan konus sirti A_1B , B_1C , B_2C ,... uchburchaklarga ajratiladi. Bu uchburchaklarning bittadan tomonlari konusning uchidan o'tadigan qilib olinadi. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Ulardan biri B_2 ning haqiqiy uzunligi aylantirish usulida yasalgan. Yoyilmani hosil qiluvchi uchburchaklarni ularning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasash qiyin emas. Bunda yoyilmadagi uchburchaklar tomonlarining o'zaro joylashuv tartibi proyeksiyadagi joylashuv tartibi bilan bir xil bo'lishi kerak. 10.13-b rasmda og'ma konus yon sirti

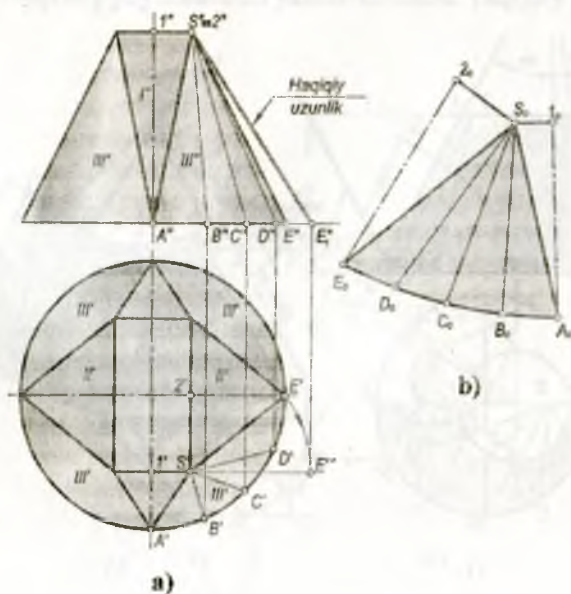


10.13-rasm.

yoyilmasining yarmi ko'rsatilgan. 10.14-a rasmda tasvirlangan sirt silindrik trubadan to'rtburchakli trubaga o'tish elementi bo'lib, u ikkita I ko'rinishdagi, ikkita II ko'rinishdagi tekis uchburchaklardan hamda to'rtta III ko'rinishdagi elliptik konus sirtlaridan tashkil topgan. Bunday sirtning yoyilmasini yasash uchun dastlab konus sirtlarini piramida sirtlariga approksimatsiya qilamiz (rasmda faqat bitta konus sirtining piramidaga approksimatsiya qilinishi ko'rsatilgan). Buning uchun konusning asosida bir necha A, B, C, D, E nuqtalarni belgilab olib, ularni konusning uchi bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklarini yasaymiz. 10.14-a rasmda SE tomonning haqiqiy uzunligini yasash ko'rsatilgan. Bu sirt yoyilmasini yasash uchun tomonlarning haqiqiy uzunliklari bo'yicha uchburchaklar yasaymiz.

Berilgan sirtning $S2EA1$ choragi yoyilmasini yasash 10.14-b rasmda ko'rsatilgan. Qolgan choraklarining yoyilmasi ham yuqorida bayon qilinganidek yasaladi.

Yordanichi silindrik sirtlar usuli. Bu usul yoyilmaydigan aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmalarini yasashda qulay. Uning mohiyati quyidagidan iborat: berilgan sirt meridianlari bo'yicha bir necha o'zaro teng bo'laklarga bo'lib chiqiladi. Bu bo'laklar, o'z navbatida, silindrik sirtlar bilan almashtiriladi. Bunday silindrik sirtlar berilgan sirtga har bo'lagingining o'rta meridiani bo'yicha urinib o'tishi shart. 10.15-a rasmda proyeksiyalari bilan berilgan sferik sirt bo'lagingining taqribiy yoyilmasi 10.15-b rasmda tasvirlangan.

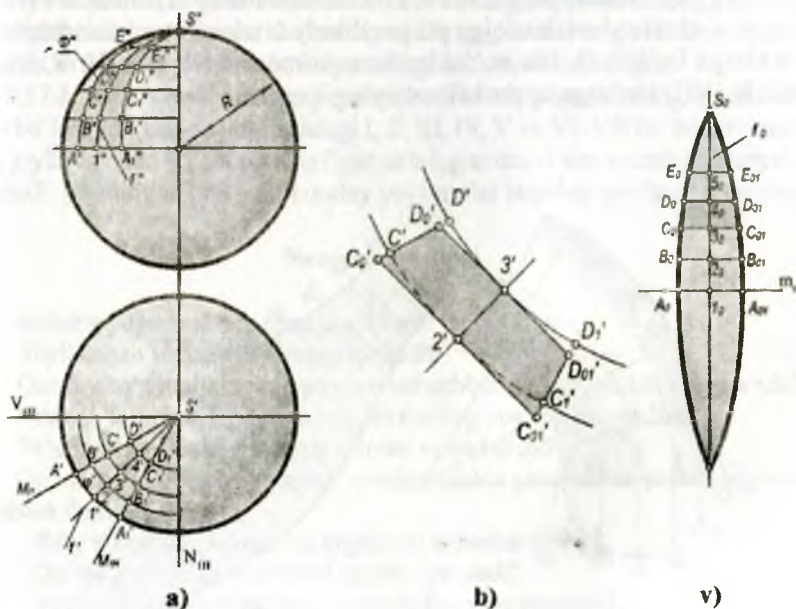


10.14-rasm.

Dastavval, sferik sirtning meridianlar bo'yicha kesuvchi V_1 , M , M_1 va W_1 tekisliklar bilan teng bo'laklarga bo'lamiz. Bunda bo'laklar soni qancha ko'p bo'lsa, sferaning yoyilmasi shuncha aniqroq bo'ladi. M va M_1 tekisliklar orasidagi sferaning $\Phi(\Phi', \Phi'')$ bo'lagi yoyilmasini yasashni ko'rib chiqamiz. Bu bo'lakni silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday almashtirish 10.15-rasmda kattalashtirib ko'rsatilgan. M va M_1 meridional tekisliklar orasidagi masofalar silindrik sirt yasovchilarining uzunliklari bo'ladi. Demak, bu yasovchilar gorizontaal vaziyatdagi kesmalar bo'lib, ularning gorizontaal proyeksiyalari haqiqiy uzunliklarida tasvirlanadi. Bunday silindrik sirt Φ bo'lakning o'rta meridiani f bo'yicha urinuvchi bo'ladi. Φ bo'lakning yoyilmasini yasash uchun gorizontaal vaziyatda ixtiyoriy 1_0 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Unga $A_0 1_0 = A' 1'$ va $1' A_1' = 1_0 A_{01}$ kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Bu kesmaning o'rtasidan unga perpendikulyar qilib f_0 to'g'ri chiziq

o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq o'rta meridional kesim uzunligining yarmi $\frac{\pi D}{2}$

ni 1_0 nuqtadan boshlab o'lchab qo'yib, S_0 nuqtani belgilab olamiz. 1, 2, 3, 4, 5 va S nuqtalar orasidagi masofalarning haqiqiy uzunliklarini aniqlab, f_0 to'g'ri chiziqqa $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$ va 5_0 nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalar orqali gorizontaal to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga f_0 vertikal to'g'ri chiziqdan boshlab har ikkala tomonga $1', 2', 3', 4'$ va $5'$ nuqtalar orqali o'tgan yasovchilarning

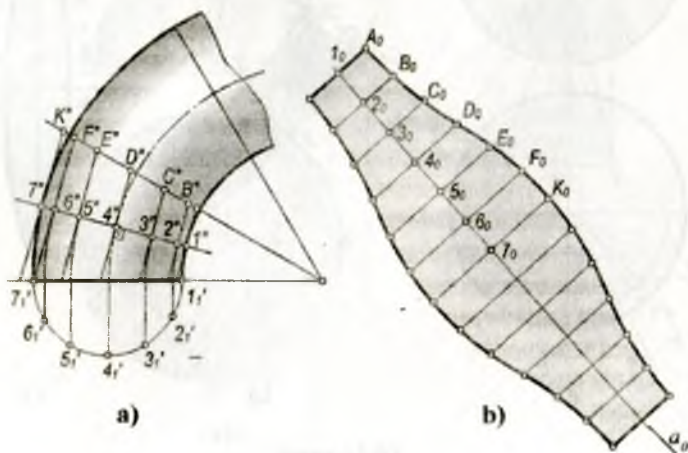


10.15-rasm.

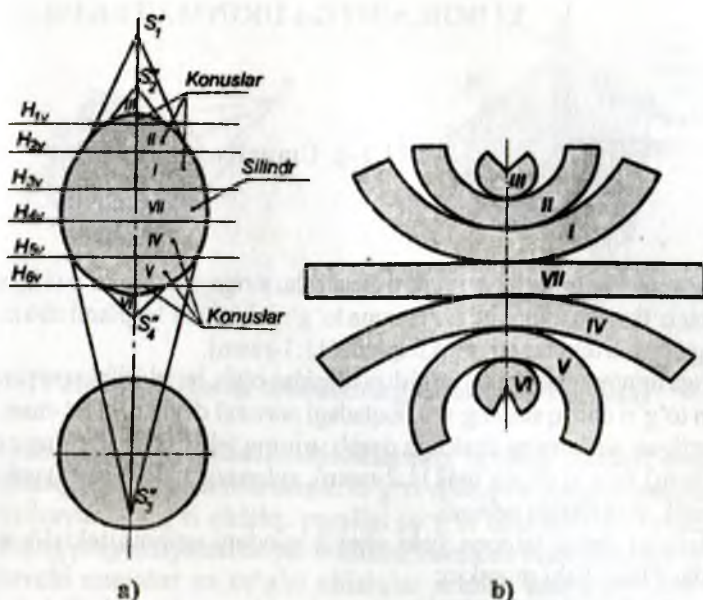
yarmini o'ldirib qo'yamiz. Hosil bo'lgan $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, S_0$ va $S_{01}, A_{01}, B_{01}, C_{01}, D_{01}, E_{01}$ nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. $A_0 S_0 A_{01}$ shakl Φ bo'lak yoyilmasining yarmi hisoblanadi. Ikkinchi yarmining yoyilmasi ham xuddi shu tarzda yasaladi. Sfera sirtining to'la yoyilmasini hosil qilish uchun shunday yoyilmadan yana $n-1$ tasini yasash kerak bo'ladi, bunda n – sferik sirt bo'laklarining soni. Yuqorida ko'rilgan hol uchun $n=12$.

10.16-a rasmda tasvirlangan tor halqaning taqribiy yoyilmasini yasash uchun uni 12 teng bo'lakka bo'lib, bir bo'laging yoyilmasini yasaylik (10.16-b rasm). Torning bu bo'lagini tashqi chizilgan yordamchi silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday silindrik sirt halqa bo'laging o'rta meridiani yoki normal kesimi bo'yicha urinadi. Yoyilmani yasash uchun gorizontal vaziyatda a_0 to'g'ri chiziq o'tkazamiz (10.16-b rasm) va unga normal kesimning uzunligini o'ldirib qo'yamiz. Keyin bu to'g'ri chiziqda $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ nuqtalarni belgilab, ular orqali a_0 to'g'ri chiziqda perpendikulyar qilib yordamchi silindrning yasovchilarini o'tkazamiz. Bularga yasovchilarning uzunliklarini o'ldirib qo'yamiz. Hosil bo'lgan $A_0, B_0, C_0, \dots$ nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, yoyilmani hosil qilamiz. Bu esa halqa 1/12 qismining yoyilmasi bo'ladi.

Yordamchi konus sirtlar usuli. Bu usul bilan konturi egri chiziqli aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmasi yasaladi. Berilgan sirt aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesiladi. Sirtning har bir bo'lagi konussimon yoki silindrik sirtlarga approksimatsiya qilinadi va bu sirtlarning yoyilmalari yasaladi. 10.17-a rasmda Monj chizmasida berilgan aylanish sirtlari aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan bir necha bo'laklarga bo'linadi. Bu bo'laklar konussimon (I, II, III, IV, V, VI) va silindrik (VII) sirtlarga approksimatsiya qilinadi.



10.16-rasm.



10.17-rasm.

10.17-b rasmda konussimon va silindrik sirtlarga approksimatsiya qilingan sirt bo'laklarining yoyilmalari ko'rsatilgan. Bu yoyilmalar to'g'ri doiraviy silindr va konus sirtlarning yoyilmalarini yasashga asosanib bajarilgan.

10.17-b rasmda hosil qilingan yoyilma bo'yicha berilgan sirtning aynan o'zini yasab bo'lmaydi. Bunda yoyilmadagi I, II, III, IV, V va VI, VII bo'laklar orasida ochiq joylar mavjud bo'lib, ular berilgan sirtning aynan o'zini yasash imkoniyatini bermaydi. Shuning uchun ham bunday yoyilmalar taqribiy yoyilmalar deyiladi.

Nazorat savollari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Yoyiladigan sirtlar deb nimaga aytiladi?
3. Qanday ko'pyoqliklarning yoyilmalari uchburchaklar usuli bilan yasaladi?
4. Normal kesim usuli bilan qanday sirtlarning yoyilmalari yasaladi?
5. To'g'ri doiraviy silindrning yoyilmasi nimadan iborat?
6. Og'ma silindrning yoyilmalari qanday usulda yasaladi va yasash algoritmi nimalardan iborat?
7. To'g'ri doiraviy konusning yoyilmasi nimadan iborat?
8. Og'ma konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
9. Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?
10. Taqribiy yoyilmalarni yasashning triangulyatsiya usuli nimadan iborat?
11. Elliptik konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
12. Sferaning taqribiy yoyilmasi qanday yasaladi?



XI BOB. SIRTGA URINMA TEKISLIKLAR

11.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ma'lumki, sirtning biror nuqtasi orqali shu sirtga cheksiz ko'p urinma to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bu urinma to'g'ri chiziqlar to'plami shu nuqtadagi sirtning urinma tekisligini tashkil qiladi (11.1-rasm).

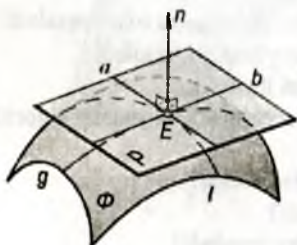
Sirtga urinma tekislikning urinish nuqtasidan o'tib, bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq sirtning shu nuqtadagi *normali* deyiladi (11.1-rasm).

Berilgan sirtlarning shakliga qarab urinma tekisliklar sirtning nuqtasiga (11.1-rasm), to'g'ri chizig'iga (11.2-rasm), aylanasiga (11.3-rasm) yoki boshqa geometrik shakllariga urinadi.

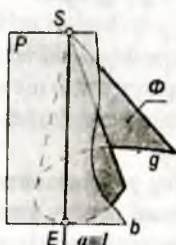
Berilgan sirtga yagona yoki chekli sondagi urinma tekislik quyidagi hollarda o'tkazilishi mumkin:

- sirt ustidagi nuqta orqali;
- sirt tashqarisidagi nuqta orqali;
- berilgan to'g'ri chiziq orqali;
- berilgan to'g'ri chiziqqa parallel;
- berilgan tekislikka parallel;
- berilgan ikki sirtga urinma va hokazo.

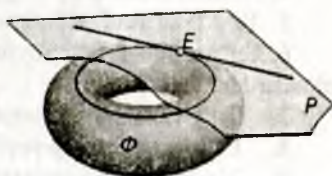
Bu shartlar tekislikning berilish usullari bilan uzviy bog'liq bo'lib, sirtlarning turiga qarab tanlanadi. Masalan, ikkinchi holda S nuqtadan shar sirti uchun cheksiz urinma tekisliklarni o'tkazish imkonini beradi (11.4-rasm). Shar sirti uchun chekli urinma tekislik hosil qilish masalasi faqat 1-, 3-, 5-hollar qo'yilganda hal bo'ladi (11.5-rasm). Boshqa sirtlar uchun ham xuddi shunday mulohaza yuritish mumkin.



11.1-rasm.



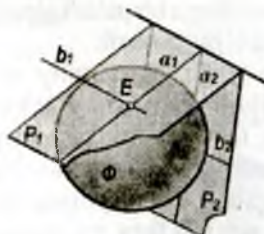
11.2-rasm.



11.3-rasm.



11.4-rasm.



11.5-rasm.

11.2-§. Urinma tekislikning chizmada berilishi

Urinma tekislik, chizmada tekisliklarning berilish usullari singari, bir to'g'ri chiziqda yotmagan uch nuqta, to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta, ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq, parallel to'g'ri chiziqlar va boshqa tekis shakllarining proyeksiyalari orqali berilishi mumkin. Tekislikning berilishida qatnashuvchi nuqtalar va to'g'ri chiziqlar urinish nuqtalari yoki urinish chiziqlarini ifodalashi mumkin. Masalan, konus sirtiga uringan tekislik kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ko'rinishida berilishi mumkin va bu chiziqlarning biri urinish chizig'i bo'lib xizmat qiladi (11.2-rasm).

Urinma tekislik sirtga qanday urinishidan qat'i nazar, urinish chiziqlariga tegishli nuqtalar elliptik, parabolik, giperbolik nuqtalarga bo'linadi.

Sirtning elliptik nuqtasi

Ta'rif. Agar urinma tekislik sirt bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa va shu nuqta orqali o'tuvchi sirtning barcha kesim chiziqlari urinma tekislikning bir tomonida qolsa, sirtning bunday urinish nuqtasi elliptik nuqta deyiladi (11.1-rasm).

Bunga ellipsoid, paraboloid, shar sirtlarining nuqtalari misol bo'la oladi.

Sirtning parabolik nuqtasi

Ta'rif. Agar urinma tekislik sirt bilan to'g'ri chiziq hosil qilib urinsa, bu urinish chizig'ining nuqtalari parabolik nuqtalar deyiladi (11.2-rasm).

Bunga konus, silindr kabi sirtlar misol bo'ladi.

Sirtning giperbolik nuqtasi

Ta'rif. Agar urinma tekislik sirtga urilib, uni kessa, hosil bo'lgan kesishish chizig'iga oid sirtning nuqtasi giperbolik nuqta deyiladi (11.6-rasm).

Bunday sirtlarga bir pallali giperboloid, giperbolik paraboloid kabi sirtlarning nuqtalari misol bo'la oladi.

Urinma tekisliklar amaliy va nazariy jihatdan katta ahamiyatga ega. Nazariy jihatdan urinma tekisliklardan differensial geometriyada sirtlarning urinish nuqtasi atrofidagi xossalarini o'rganishda keng foydalaniladi. Urinish nuqtasidagi normalning yo'nalishini aniqlashdan esa muhandislik amaliyotida foydalaniladi. Bundan tashqari, urinma tekisliklar arxitektura va rassomchilikda sirtlarning o'z soyasi yoki tushgan soyasi chegaralarini aniqlashda, chizma geometriyada sirtlarning ocherklarini yasashda keng qo'llaniladi.

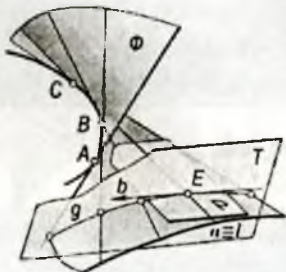
11.3-§. Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazish

Sirtagi ixtiyoriy nuqtadan yagona urinma tekislik o'tadi. Bu tekislik sirtning urinish nuqtasiga o'tkazilgan bir juft kesishuvchi urinma to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari orqali tasvirlanadi (11.7, 11.10-rasmlar). Sirtning ixtiyoriy nuqtasiga urinma tekislik o'tkazishga doir bir necha masalani ko'rib chiqamiz.

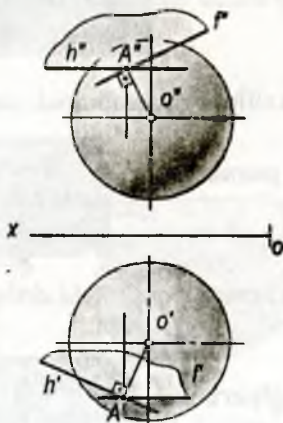
1-masala. Sferaning $A(A', A'')$ nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazilsin (11.7-rasm).

Yechish. Izlangan urinma tekislik urinish nuqtasi $A(A', A'')$ orqali o'tkazilgan $OA(O'A', O''A'')$ radiusga perpendikulyar bo'ladi. Shunga ko'ra, to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik shartiga asosan A nuqtadan sferaning OA radiusiga perpendikulyar qilib ikkita urinma to'g'ri chiziq, ya'ni gorizontal $h(h', h'')$ va frontal $f(f', f'')$ chiziqlar o'tkaziladi. Bu chiziqlar birgalikda izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

2-masala. $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanish sirtining ixtiyoriy $A(A', A'')$ elliptik nuqtasi orqali unga urinma tekislik o'tkazilsin (11.8-rasm).



11.6-rasm.



11.7-rasm.

Yechish. Izlangan urinma tekislikni sirtning A nuqtasi orqali o'tgan paralleli va meridianiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqlar orqali ifodalash qulaydir. Urinma tekislikni ifodalovchi chiziqlarni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

- $A(A', A'')$ nuqtadan sirtning $N(N_V)$ tekislikdagi $l(P, l'')$ paralleli va $M(M_H)$ tekislikdagi $c(c', c'')$ meridiani o'tkaziladi;

- $l(P, l'')$ parallelning $A(A', A'')$ nuqtasidan $a(a', a'')$ urinma o'tkaziladi, bu urinma tekislikning gorizontali bo'ladi.

- $c(c', c'')$ meridian chizig'iga o'tkazilgan urinmaning b' gorizantal proyeksiyasi a' ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi;

- b urinma chiziqning frontal proyeksiyasi b'' ni yasash uchun aylanish o'qi $l(i', i'')$ va $A(A', A'')$ urinish nuqtasidan iborat M meridian tekisligini V proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgunga qadar i atrofida burib, A nuqtaning yangi $A_1(A'_1, A''_1)$ vaziyati aniqlanadi;

- A urinish nuqtasining yangi A''_1 frontal proyeksiyasidan sirtning frontal proyeksiyasi chegara chizig'i c''_1 ga urinma o'tkazib, i' o'qi bilan kesishgan joyda S'' nuqta aniqlanadi;

- S'' va A'' nuqtalarni birlashtirib, b'' hosil qilinadi. Natijada hosil bo'lgan kesishuvchi $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ urinma chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

3-masala. Konus sirtining ixtiyoriy $B(B', B'')$ parabolik nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazilsin (11.9-rasm).

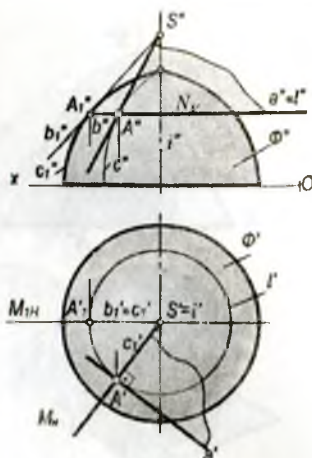
Yechish. Izlangan tekislik konus sirti bilan to'g'ri chiziq bo'ylab urinadi. Uni yasash algoritmi quyidagicha:

- konus uchi $S(S', S'')$ bilan berilgan $B(B', B'')$ nuqtani o'zaro birlashtirib, urinish chizig'ining b' va b'' proyeksiyalari aniqlanadi;

- $b(b', b'')$ chiziqning konus asosi bilan kesishgan $A(A', A'')$ nuqtasidan konus asosiga urinma to'g'ri chiziq $t(t', t'')$ o'tkaziladi. Bunda $t' \perp b'$ bo'ladi;

- hosil bo'lgan kesishuvchi $b(b', b'')$ va $t(t', t'')$ to'g'ri chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi. Konus uchi orqali cheksiz ko'p urinma tekisliklar o'tadi, chunki S dan o'tuvchi cheksiz yasovchi — urinish chiziqlari mavjuddir.

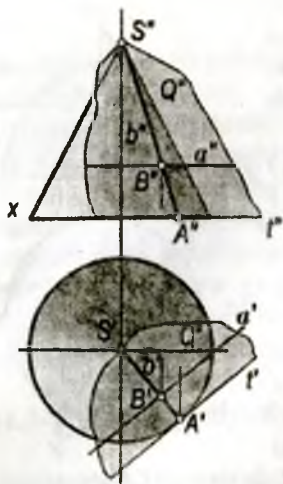
Silindr sirtiga urinma tekislik o'tkazish 3-masaladagidek bo'lib, faqat urinish chizig'ini silindr yasovchilariga parallel qilib o'tkazish yetarlidir (11.10-rasm).



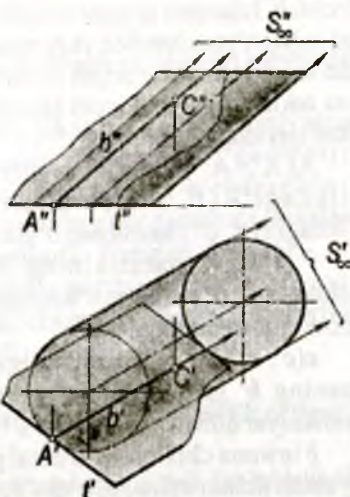
11.8-rasm.

11.4-§. Sirt tashqarisidagi nuqta orqali urinma o'tkazish

Sirt tashqarisidagi nuqtadan faqat chiziqli sirtlargagina chekli sondagi urinma tekislik o'tkazish mumkin. Quyida ixtiyoriy nuqtadan konus sirtlariga urinuvchi tekisliklar yasashni ko'rib chiqamiz.



11.9-rasm.



11.10-rasm.

1-masala. Konus sirtida yotmagan E nuqta orqali konus sirtiga urinma tekislik yasalsin (11.11-rasm).

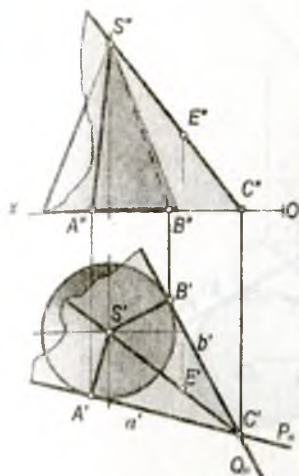
Yechish. Urinma tekislikning vaziyatini berilgan nuqta va urinish chizig'i aniqlaydi. Buning uchun konus uchi $S(S', S'')$ bilan $E(E', E'')$ nuqta tutashtirilsa, bu to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va konus sirtiga urinuvchi tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Bu tekisliklar SE qirrada o'zaro kesishib, ikkiyoqli burchak hosil qiladi. Urinma tekisliklarni yasash algoritmi quyidagicha:

- S' va E' , S'' va E'' nuqtalarni o'zaro birlashtirib, uning gorizontali izi $C(C', C'')$ yasaladi;
- SE qirraning gorizontali izi C' dan konus asosiga A' va B' nuqtalarda urinuvchi P va Q tekisliklarning $P_{||}$ va $Q_{||}$ izlari o'tkaziladi;
- S' uch bilan A' va B' nuqtalar birlashtirilib, konus yasovchilari bo'lgan SA va SB urinish chiziqlarining gorizontali $S'A'$ va $S'B'$ proyeksiyalari aniqlanadi;
- SA va SB urinish chiziqlarining frontal $S''A''$ va $S''B''$ proyeksiyalari yasaladi. Natijada P va Q urinma tekisliklarning proyeksiyalari $\Delta S'A'C'$ va $\Delta S''A''C''$, $\Delta S'B'C'$ va $\Delta S''B''C''$ hosil bo'ladi. Bu tekisliklar masalaning ikki yechimga ega ekanligini tasdiqlaydi.

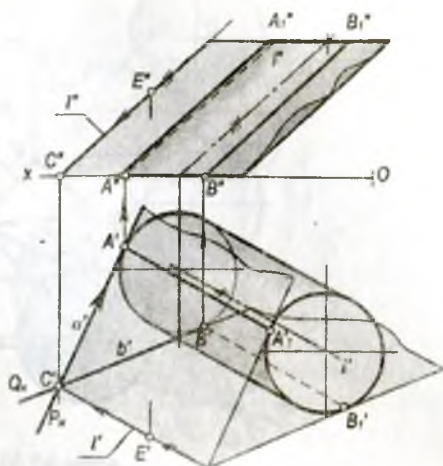
2-masala. Silindr sirtidan tashqarida yotgan E nuqta orqali unga urinib o'tuvchi tekislik yasalsin (11.12-rasm).

Yechish. Yasash algoritmi quyidagicha:

- $E(E', E'')$ nuqtadan silindr yasovchisiga parallel $l(l', l'')$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi va uning gorizontali izi $C(C', C'')$ yasaladi;
- l to'g'ri chiziqning gorizontali izi C' orqali silindrnining H tekisligidagi asosiga urinib o'tuvchi P va Q tekisliklarning $P_{||}(a)$ va $Q_{||}(b)$ izlarini o'tkazib, $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ urinish nuqtalari aniqlanadi;



11.11-rasm.



11.12-rasm.

• bu nuqtalardan esa P va Q tekisliklarning sirtga urinish chiziqlari $AA_1(A'A_1', A''A_1'')$ va $BB_1(B'B_1', B''B_1'')$ lar o'tadi.

Natijada kesishuvchi $l'a$ va $l'b$ to'g'ri chiziqlar P va Q urinma tekisliklarini ifodalaydi. Bu masala ham ikkita yechimga ega bo'ladi.

11.5-§. Berilgan to'g'ri chiziq orqali urinma tekislik o'tkazish

Berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtga urinma tekislik o'tkazish masalasi tekislikning nuqta, shu nuqtadan o'tmagan to'g'ri chiziq orqali berilish usuli bilan bog'liqdir, ya'ni tekislik sirtga bitta nuqtasi bilan urinishi mumkin.

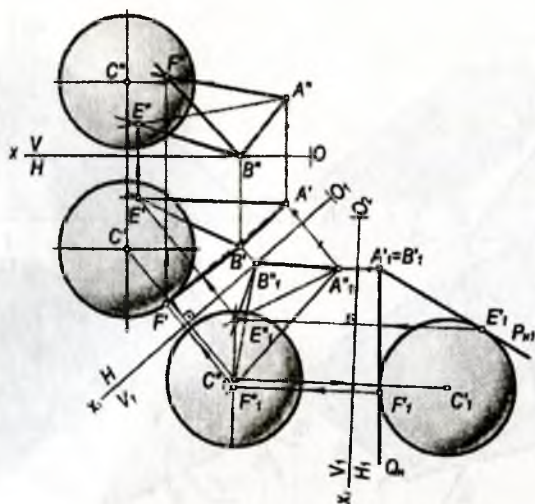
Shar tashqarisida olingan AB to'g'ri chiziq orqali shar sirtiga urinma tekislik o'tkazish 11.13-rasmda tasvirlangan.

Ma'lumki, berilgan AB to'g'ri chiziq orqali sharga ikkita P va Q urinma tekisliklar o'tkazish mumkin. Yasash algoritmi quyidagicha:

• berilgan AB to'g'ri chiziq proyeksiyalari tekisliklarini ikki marta almashtirish usuli yordamida proyeksiyalovchi $A_1 \equiv B_1'$ vaziyatga nuqta ko'rinishida keltiriladi;

• yangi tekisliklar sistemasidagi sharning proyeksiyasi konturiga urinma qilib P_{H_1} va Q_{H_1} urinma tekislik izlari o'tkaziladi va E_1', F_1' urinish nuqtalari aniqlanadi;

• so'ngra E_1' va F_1' nuqtalarni teskari proyeksiyalash yo'li bilan dastlab ularning E_1'', F_1'' , so'ngra E', F' va E'', F'' proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalarni tegishli A va B nuqtalar bilan tutashtirish natijasida izlangan $P(AB, E)$, $Q(AB, F)$ urinma tekisliklarning $(A'B', E')$, $(A''B'', E'')$ va $(A'B', F')$, $(A''B'', F'')$ proyeksiyalari hosil bo'ladi;



11.13-rasm.

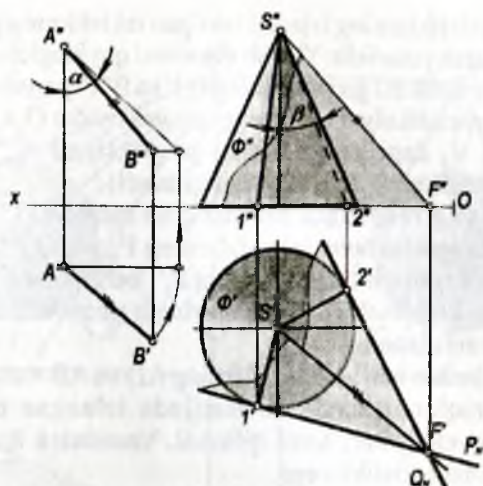
• agar AB to'g'ri chiziq shar sirti bilan kesishsa, u holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

11.6-§. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish

Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib sirtga urinma tekislik o'tkazish masalasi faqat chiziqli sirtlar uchun o'rinni bo'lib, urinma tekislik kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ko'rinishida tasvirlanadi. Masalan, konusga urinma tekislik o'tkazganda berilgan to'g'ri chiziqning konus o'qi bilan hosil qilgan α burchagi konus yasovchisi bilan o'qi orasidagi β burchagiga teng yoki undan katta bo'lishi lozim. Aks holda, urinma tekislik yasab bo'lmaydi. $\alpha \geq \beta$ shartni qanoatlantiruvchi AB to'g'ri chiziqqa parallel hamda berilgan Φ konus sirtiga urinuvchi tekislik yasashni ko'rib chiqamiz (11.14-rasm). Buning uchun konus uchi $S(S', S'')$ dan berilgan AB ($A'B', A''B''$) to'g'ri chiziqqa parallel SF ($S'F', S''F''$) to'g'ri chiziq o'tkazib, uning gorizontali $F(F', F'')$ ni yasaymiz. Qolgan yasashlar xuddi 11.4-§ dagi 1-masala kabi bajariladi. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik shartiga asosan yasalgan P(SF1) va Q(SF2) urinma tekisliklar berilgan AB to'g'ri chiziqqa paralleldir, chunki SF to'g'ri chiziq ikkala urinma tekislik uchun umumiy bo'lib, AB to'g'ri chiziqqa paralleldir.

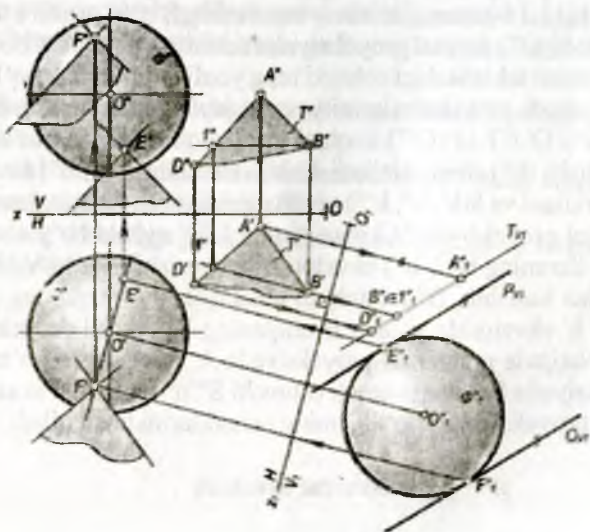
11.7-§. Berilgan tekislikka parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish

Berilgan tekislikka parallel va sirtga urinuvchi tekislik o'tkazish masalalari asosan egri chiziqli sirtlarga tegishlidir.



11.14-rasm.

Berilgan $T(AD \cap AB)$ tekislikka parallel qilib va Φ shar sirtiga urinma tekislik o'tkazish 11.15-rasmda keltirilgan. Izlangan urinma tekislik ikkita bo'lib, ularni ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq tarzida tasvirlash qulaydir. Urinma tekislikni yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarini bir marta almashtirish usuli yordamida berilgan T tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Sharning ham yangi almashtirilgan proyeksiyasi yasali, so'ngra



11.15-rasm.

izlangan urinma tekisliklarning izlarini berilgan tekislikning yangi vaziyatiga parallel qilib o'tkazish yetarlidir. Yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan T tekislik B1 gorizontalining B'1' va B''1'' proyeksiyalari yasaladi;
- B'1' ga perpendikulyar qilib yangi proyeksiyalar O_1x_1 o'qi o'tkaziladi va T tekislikning V_1 dagi yangi frontal proyeksiyasi $A_1''D_1''B_1''$ hamda sharning O_1'' markazli proyeksiyasi hosil qilinadi;
- $A_1''D_1''B_1''$ to'g'ri chiziqa parallel qilib markazi O_1'' nuqtadagi shar proyeksiyasiga izlangan urinma tekisliklarning P_{V_1} va Q_{V_1} izlari o'tkaziladi va ularning sharga urinish nuqtalari E_1'' va F_1'' belgilanadi;
- teskari proyeksiyalash yo'li bilan urinish nuqtalarining E' , E'' va F' , F'' proyeksiyalari aniqlanadi;
- E va F nuqtalardan berilgan tekislikning AD va AB tomonlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Natijada izlangan urinma parallel tekisliklarning proyeksiyalari hosil qilinadi. Yasashdan ko'rinib turibdiki, masala ikkita urinma tekislikka ega.

11.8-§. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash

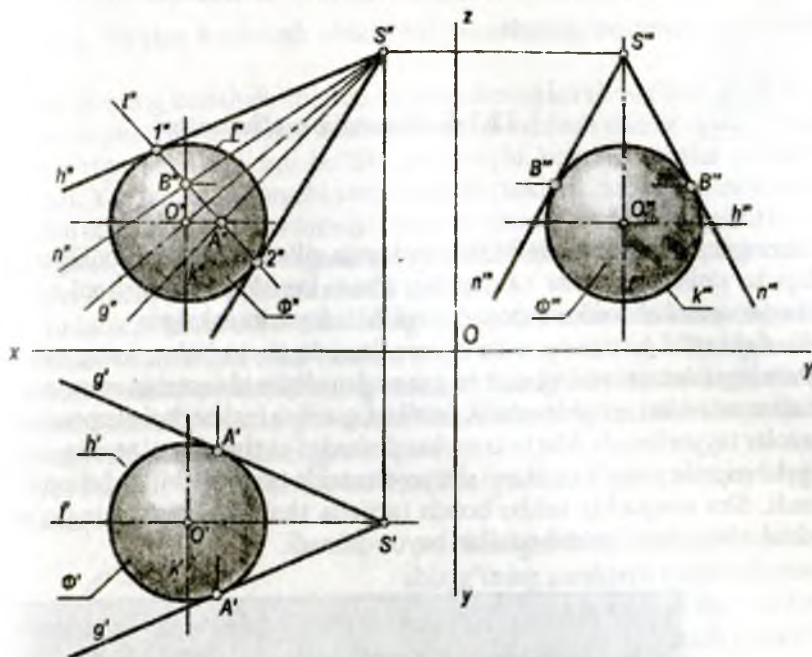
Ta'rif. Kuzatuvchiga nisbatan sirtning aniq shaklini belgilovchi tashqi konturi sirtning ocherki deyiladi.

O'qi frontal vaziyatda bo'lgan $S(S', S'')$ uchli og'ma doiraviy konusning frontal proyeksiyasiga asosan uning gorizontal va profil ocherklarini yasash talab qilinadi (11.16-rasm). Doiraviy konusning S uchi orqali o'tuvchi uning o'qi $SO(S'O', S''O'')$ frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgani uchun konusning frontal tekislikdagi ocherki teng yonli uchburchak bo'ladi.

Qolgan ocherk proyeksiyalarini yasash quyidagicha bajariladi: konusning o'qida ixtiyoriy O' (O', O'', O''') nuqtani markaz qilib olib, konus sirtiga urinma yordamchi $\Phi(\Phi', \Phi'')$ sfera chiziladi. Ushbu sferaning $h(h', h'')$ ekvatori, $f(f', f'')$ bosh meridiani va $k(k', k'')$ profil meridiani bo'lgan aylanalar chiziladi. Φ sfera frontal proyeksiyasida konus sirtiga $1''2''$ aylana bo'yicha urinadi. Bu $1''2''$ aylana sferaning $h(h', h'')$ ekvatori bilan kesishib — $A(A', A'')$, k'' profil meridiani bilan kesishib, B'' nuqtalarni hosil qiladi. A nuqtaning gorizontal A' proyeksiyasi h' ekvatorida yotadi. B nuqtaning B''' profil proyeksiyasi k''' da aniqlanadi. Natijada gorizontal proyeksiyada A' nuqta orqali o'tuvchi $S'g'$ va profil proyeksiyada B''' nuqta orqali o'tuvchi $S'''n'''$ chiziqlar konusning chetki yasovchilari proyeksiyalari bo'lib, uning ocherklarini hosil qiladi.

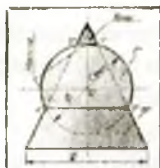
Nazorat savollari

1. Urinma tekislik deb nimaga aytiladi?
2. Qanday chiziq sirtning normal deyiladi?
3. Berilgan sirtga urinma tekislik qanday shartlar asosida o'tkaziladi?



11.16-rasm.

4. Qanday nuqtalar sirtning elliptik, parabolik va giperbolik nuqtalari deyiladi?
5. Sirt tashqarisidagi nuqtadan unga qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?
6. Sirt tashqarisidagi to'g'ri chiziqli orqali unga nechta va qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?
7. Berilgan tekislikka parallel nechta urinma tekislik o'tkazish mumkin?
8. Sirtning ocherki deb nimaga aytiladi?
9. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib hamma vaqt konus sirtiga urinuvchi tekislik o'tkazsa bo'ladimi?



XII BOB. SIRTLARNING O'ZARO KESISHISHI

12.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Insoniyat o'zining amaliy faoliyatida konus, silindr, shar, ko'pyoqliklar yoki boshqa ko'rinishdagi sirtlar va ularning o'zaro kesishishidan turli xil arkalar, gumbazlar va muhandislik inshootlari qurilishida foydalanib kelgan.

Kesishuvchi sirtlar asosida o'zaro kesishgan trubalar, keng oraliqli binolarning ustunsiz tomlari, neft va gaz saqlanadigan sistemalar, rezervuarlar, meditsina asboblari, mashinasozlik detallari, qurilish inshootlari elementlari va hokazolar tayyorlanadi. Shu bois muhandislardan sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini aniq yasash va ularni sirt yoyilmasida tasvirlay bilish bilimi talab qilinadi. Shu maqsadda ushbu bobda turlicha shakldagi sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash usullari bayon qilinadi.

Ta'rif. Ikki sirtning kesishish chizig'i deb ular uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Kesishuvchi sirtlarning hosil bo'lishiga qarab ularning kesishish chizig'i quyidagi ko'rinishlarda uchraydi:

- Kesishuvchi sirtlar egri chiziqli yoki to'g'ri chiziqli sirtlar bo'lsa, ularning kesishish chizig'i umumiy holda fazoviy egri chiziq bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli, ikkinchisi ko'pyoqlik sirti bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i tekis egri chiziq bo'ladi.
- Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko'pyoqlik sirti bo'lsa, ularning kesishish chizig'i fazoviy yoki tekis sinq chiziq bo'ladi.

Kesishuvchi sirtlar analitik usulda o'z tenglamalari bilan berilsa, ularni birga yechib, kesishish chiziqlarining tenglamasi hosil qilinadi.

Kesishish chizig'ining tartibi umumiy holda kesishuvchi sirtlarning tartibiga qarab belgilanadi. Agar sirtlardan biri m tartibli, ikkinchisi n tartibli bo'lsa, ularning kesishish chizig'ining tartibi mn ga teng bo'ladi, ya'ni $\Phi_1^m \cap \Phi_2^n = a^{mn}$.

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham 2-tartibli bo'lsa, ular 4-tartibli egri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^2 = a^4$ bo'ladi.

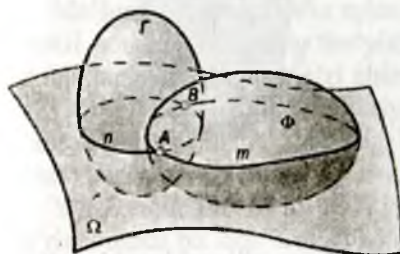
Kesishuvchi sirtlardan biri 2-tartibli va ikkinchisi ko'pyoqlik sirti bo'lsa, ular 2-tartibli egri chiziqlar bo'yicha kesishadi, ya'ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^k = ka^2$. Bunda k — 2-tartibli egri chiziqlar soni. Bu ko'pyoqlik sirtning yoqlari soni orqali aniqlanadi.

12.2-§. Sirtlar kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi

Ikki sirtning kesishish chizig'i, odatda, kesishish chizig'ining nuqtalarini ketma-ket yasash yo'li bilan hosil qilinadi. Kesishish chizig'ining nuqtalari ikkala sirtga ham taalluqli bo'lib, yordamchi kesuvchi sirtlar yordamida yasaladi. Yordamchi kesuvchi sirtlar sifatida tekislik, sfera, konus va silindr sirtlarini olish mumkin. Yordamchi kesuvchi sirtlar shunday tanlanishi kerakki, u berilgan sirtlar bilan kesishganida kesimda chizilishi oddiy va qulay chiziqlar – to'g'ri chiziq yoki aylanalar hosil bo'lsin.

Yordamchi kesuvchi sirtlar oldingi boblarda yordamchi kesuvchi tekislik ko'rinishida ishlatilgan edi. Masalan, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishuv nuqtasini yasashda, tekisliklarning kesishish chizig'ini yasashda, tekislik bilan sirtlarning kesishuvida, to'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishuvida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazilgan edi.

Yordamchi kesuvchi sirtlar usulida yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi (12.1-rasm):



12.1-rasm.

- berilgan ikki Γ va Φ sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalar, o'z navbatida, yordamchi kesuvchi sirtlarni o'tkazish chegarasini aniqlaydi;

- yordamchi kesuvchi Ω sirt o'tkaziladi. Bunda Ω va Φ sirtlar o'zaro kesishib, n ($\Phi \cap \Omega = n$) chiziqni, Γ sirt bilan Ω sirt kesishib, m ($\Gamma \cap \Omega = m$) chiziqni hosil qiladi;

- n va m chiziqlar kesishib ($n \cap m = A$, $B, \dots$), $A, B, \dots$ nuqtalarni hosil qiladi.

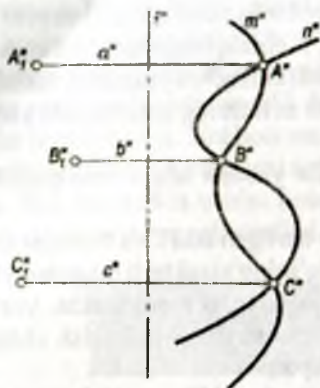
Bu nuqtalar berilgan Φ va Γ sirtlar kesishish chizig'ining nuqtalaridir. Bunday yasash algoritmi yetarli marta takrorlansa, kesishish chizig'ini yasash uchun yetarli nuqtalar hosil qilinadi. Bu nuqtalar ma'lum tartibda lokalo yordamida silliq tutashtirilsa, berilgan ikki sirtning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

Agar yordamchi kesuvchi sirt tekislik bo'lsa, xosmas o'qli tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Agar yordamchi kesuvchi sirt sferadan iborat bo'lsa, konsentrik yoki ekssentrik sferalar oilasi hosil bo'ladi. Shunga ko'ra, ikki kesishuvchi sirtning kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi, yordamchi kesuvchi konsentrik va ekssentrik sferalar usullari hosil bo'ladi. Bu usullarning qo'llanilishi to'g'risida keyinchalik batafsil to'xtab o'tamiz.

12.3-§. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi

Ta'rif. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlari chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesishadi.

Isboti. Ikkita aylanish sirtining $m(m'')$ va $n(n'')$ meridianlari (yasovchilari) hamda ular uchun umumiy bo'lgan $i(i'')$ o'q berilgan bo'lsin (12.2-rasm). m'' va n'' meridianlarning kesishish nuqtalarini $A'', B'', C'', \dots$ harflar bilan belgilaymiz. Agar m va n egri chiziqlar i o'q atrofida aylantirilsa, Φ va Γ aylanish sirlari hosil bo'ladi (shaklda bu sirtlar tasvirlanmagan). Unda m'' va n'' egri chiziqlarning aylanishi natijasida ularga umumiy bo'lgan $A'', B'', C'', \dots$ nuqtalar $a'', b'', c'', \dots$ aylanalar chizadi. Bu aylanalar esa ikkala sirt uchun umumiydir. Demak, $a'', b'', c'', \dots$ aylanalar umumiy o'qli Φ va Γ aylanish sirtlarining kesishish chiziqlari bo'ladi.



12.2-rasm.



12.3-rasm.

12.3-rasmda umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma ellipsoid va bir pallali giperboloidlarning kesishish chiziqlari a'' va b'' aylanalar frontal proyeksiyada ko'rsatilgan. 12.4 va 12.5-rasmlarda sferaning doiraviy silindr va doiraviy konus sirtlari bilan kesishish chiziqlari tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining biriga perpendikulyar qilib olingan.



12.4-rasm.

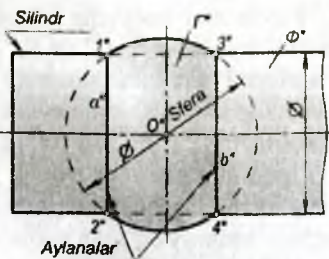


12.5-rasm.

Yuqoridagi teoremdan quyidagi natijani chiqarish mumkin:

Natija. Markazi aylanish sirtining o'qida bo'lgan har qanday $\Gamma(\Gamma'')$ sfera shu aylanish sirti bilan aylanalar bo'ylab kesishadi (12.6-rasm).

Haqiqatan, $\Phi(\Phi'')$ aylanish sirti $i(i'')$ o'qining ixtiyoriy $O(O')$ nuqtasini markaz qilib olib, Ω'' sfera chizilgan. Φ va Γ sirtlar a'' va b'' aylanalar bo'yicha kesishgan (tasvirlar faqat frontal proyeksiyada keltirilgan). Yuqorida keltirilgan xulosa va misollar aylanish sirtlari kesishish chizig'ini yasashda qo'llaniladigan konsentrik va eksentrik sferalar usullarining asosi hisoblanadi.



12.6-rasm.

12.4-§. O'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli

Ma'lumki, markazi biror aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera bu sirtning chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to'g'ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko'rinishida proyeksiyalanadi. Aylanish sirtlari bilan sferaning o'zaro kesishish chizig'i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

Yordamchi kesuvchi sferalar to'plami konsentrik yoki eksentrik ko'rinishlarda bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

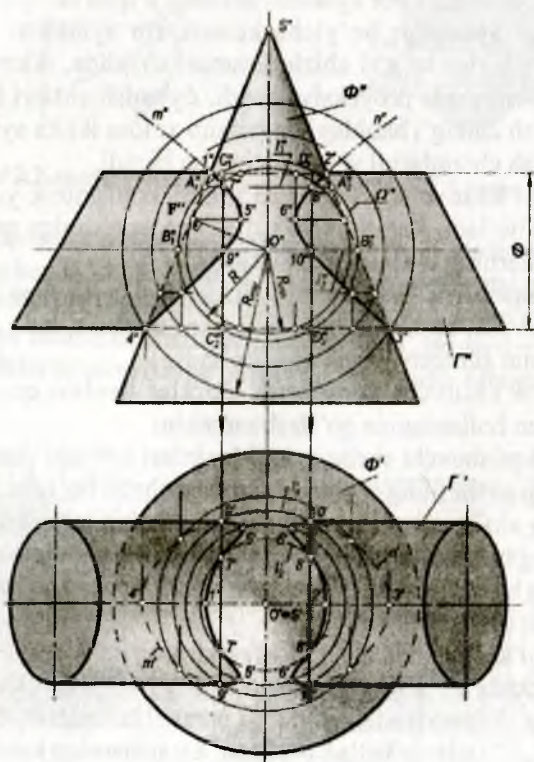
12.4.1: Konsentrik sferalar usuli. Ikki aylanish sirtining o'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu o'qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo'ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo'llash mumkin:

- o'zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo'lishi shart;
- aylanish sirtlarining o'qlari o'zaro kesishgan bo'lishi kerak;
- aylanish sirtlarining o'qlari (yoki simmetriya tekisligi) proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lishi yoki sirt o'qlarining biri proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel, ikkinchi o'q esa ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lishi kerak.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtada bo'ladi. 12.7-rasmda o'qlari umumiy $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi V ga parallel bo'lgan $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanma konus va $\Gamma(\Gamma', \Gamma'')$ silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun O'' nuqtani markaz qilib, R radiusli $\Omega(\Omega'')$ sfera chiziladi. Ω sfera Φ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun ular $l_1(l_1', l_1'')$ va $l_2(l_2',$

12.7) aylanalar bo'yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning V tekislikdagi proyeksiyalari $A_1'' A_2''$ va $B_1'' B_2''$ kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera Γ sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun $C_1' C_2''$ va $D_1'' D_2''$ kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish 7'', 8'', 9'' va 10'' nuqtalari har ikkala Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shuningdek, O'' nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarni yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan m'' va n'' egri chiziqlar Φ va Γ sirtlarning kesishish chizig'i bo'ladi. Φ va Γ sirtlar frontal ocherklarining 1'', 2'', 3'', 4'' kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi. O'' nuqtadan eng uzoqda joylashgan 4'' xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi R_{max} bo'ladi. Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan yana bir jufti Φ va Γ sirtlarining birortasiga R_{min} radiusli urinma sfera o'tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning R_{min} radiusi quyidagicha aniqlanadi (12.7-rasm): O'' nuqtadan berilgan sirtlarning biri chekka yasovchisiga $O''E''$ va $O''F''$



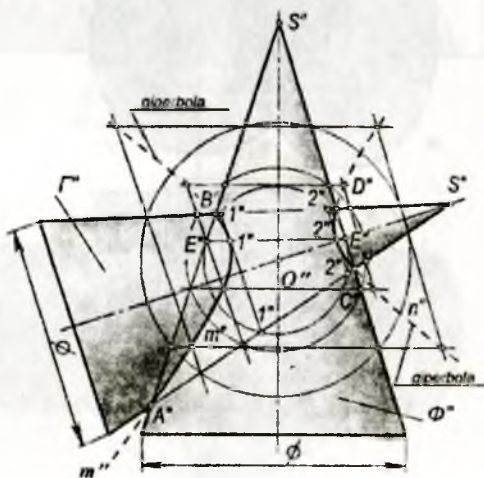
12.7-rasm.

chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda, avvalo, kesishish chizig'ining xarakterli $1(1', 1'')$ va $2(2', 2'')$ nuqtalari aniqlanadi. So'ngra O' nuqtani markaz qilib olib, ikkala konusni kesadigan qilib Φ_1' sfera o'tkaziladi. Φ_1' sfera Γ' konus bilan a' aylana bo'yicha, Φ' konus bilan b' aylana bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari $5' \equiv 6'$ ikki konusning kesishish chizig'iga tegishli bo'ladi. a aylananing a'' proyeksiyasi yasaliib, uning ustida $5''$ va $6''$ nuqtalar yasaladi. Kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari ham yuqoridagidek yasaladi va o'zaro tutashtiriladi.

12.9-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo'lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan.

12.4.2. Ekssentrik sferalar usuli. Markazlari biror aylanma sirt o'qining turli nuqtalarida joylashgan sferalar *ekssentrik sferalar* deb yuritiladi. 12.10-rasmda konus o'qi va sfera markazi $O(O', O'')$ bitta frontal simmetriya tekisligida joylashgan.

Bu ikki sirtning kesishish chizig'ini yasash uchun, avvalo, ularning frontal ocherklarining kesishishdagi xarakterli nuqtalari $1''$ va $2''$ belgilanadi. Ma'lumki, har qanday ikki sfera aylana bo'yicha kesishadi. Markazi konus o'qida bo'lgan sfera ham konus bilan aylana bo'yicha kesishadi. Shuning uchun konus o'qining biror nuqtasini markaz qilib olib, ixtiyoriy radius bilan yordamchi sferalar yasash yo'li bilan bu ikki sirtning kesishish chizig'i yasaladi. Konus o'qidagi O'' nuqtani markaz qilib olib, R_1 radiusli sfera yordamida kesishish chizig'ining $3(3', 3'') \equiv 4(4', 4'')$ nuqtalari yasalgan. Shuningdek, konus o'qidagi O_2'' nuqtani markaz qilib olib, R_2 radiusli sfera yordamida $5(5', 5'') \equiv 6(6', 6'')$ nuqtalarning vaziyati aniqlangan. Xuddi shu tarzda konus o'qidagi ixtiyoriy nuqtalarni markaz qilib olib, ixtiyoriy radiuslar

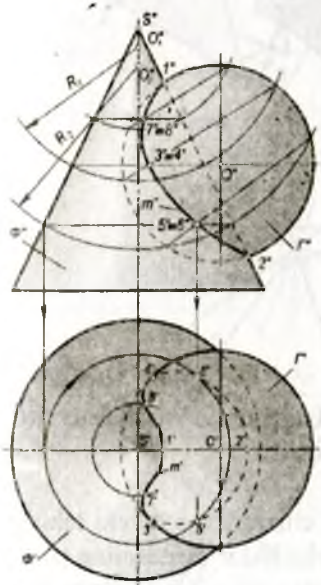


12.9-rasm.

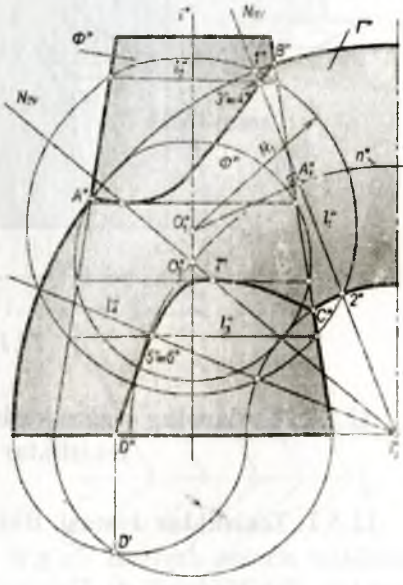
bilan sferalar chizish yordamida ikkala sirtning kesishish chizig'i $m(m'')$ yasalgan. m ning gorizonttal m' proyeksiyasi konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizonttal tekisliklar orqali aniqlanadi.

Aylanma kesik konus va tor sirtlarining kesishish chizig'ini yasash frontal proyeksiya tekisligida ko'rsatilgan (12.11-rasm). Konusning o'qi l'' va tor yasovchilarining markazlari yotuvchi n'' chiziq bitta frontal tekislikda joylashgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun torning frontal proyeksiya tekisligidagi l_1'' o'qi orqali N_{11} frontal proyeksiyalovchi tekislikning izi o'tkaziladi. Bu tekislik torning n'' markazlar chizig'ini ixtiyoriy A_1'' nuqtada kesadi. Bunda N_{11} tekislik tori l_1'' aylana bo'yicha kesadi. l_1'' aylananing markazi A_1'' nuqtadan aylana tekisligiga perpendikulyar chiqariladi. Uning aylanma konus o'qi l'' bilan kesishish nuqtasi O_1'' belgilanadi. O_1'' nuqtani markaz qilib olib, torning l_1'' aylanasi o'tuvchi R_1 radiusli sfera chiziladi. Bu yordamchi sfera konus bilan l_2'' va l_3'' aylanalar va tor sirti bilan l_1'' va l_4'' aylanalar bo'yicha kesishadi. l_1'' va l_3'' aylanalarining kesishish nuqtalari $3'' \equiv 4''$ hamda l_1'' va l_4'' aylanalarining kesishish nuqtalari $5'' \equiv 6''$ izlanayotgan egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. Chunki $3'' \equiv 4''$ va $5'' \equiv 6''$ nuqtalar konus va tor sirtlari uchun umumiy nuqtalardir.

Aylanma konus va tor sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli A'' , B'' va C'' nuqtalari bu sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalari yordamida aniqlangan. Sirtlar o'qlarining kesishish nuqtasi O_2'' orqali tor sirtiga urinma



12.10-rasm.

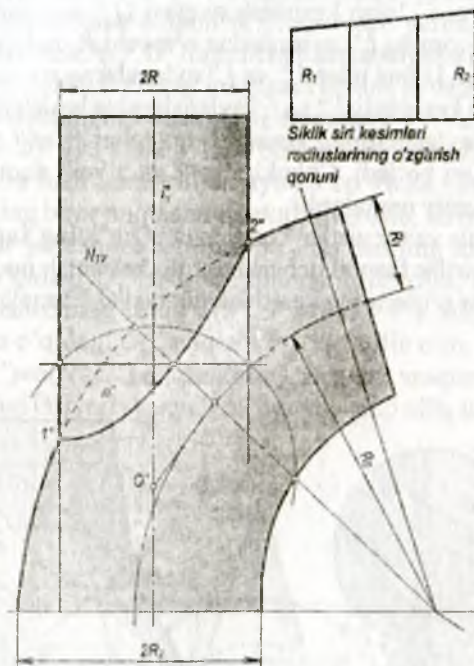


12.11-rasm.

qilib o'tkazilgan $\Phi(\Phi'')$ sfera sirti orqali A'' va $7''$ xarakterli nuqtalar aniqlangan. Bu nuqtalar egrilikning burilish nuqtalari bo'ladi.

Torning n'' aylanish o'qi orqali bir necha frontal proyeksiyalovchi tekisliklar izlarini o'tkazib va bu tekisliklarda hosil bo'lgan aylanalar orqali markazi konus o'qida turlicha joylashgan yordamchi sferalar o'tkazib, egri chiziqning qolgan oraliq nuqtalari yasaladi.

12.12-rasmda siklik va silindrik sirtlardan tashkil topgan truboprovodning bir qismi frontal proyeksiyada tasvirlangan. Bunda aylanish silindri bilan naysimon siklik sirtning n'' kesishish chizig'ini yasash eksentrik sferalar usuli bilan ko'rsatilgan. Har ikkala sirt uchun umumiy bo'lgan n'' egri chiziqning barcha nuqtalarini yasash yuqorida keltirilgan misolga asosan bajarilgan.



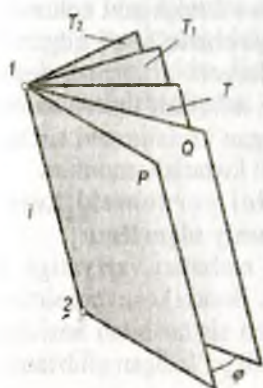
12.12-rasm.

12.5-§. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Kesuvchi tekisliklar dastasi usuli

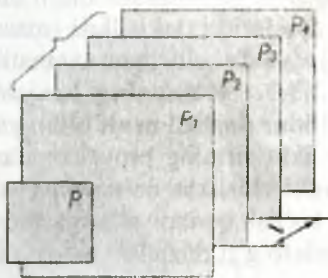
12.5.1. Tekisliklar dastasi. Bitta to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar *tekisliklar dastasi* deyiladi. To'g'ri chiziq tekisliklar dastasining o'qi deb yuritiladi. Tekisliklar dastasi xos (12.13-rasm) yoki xosmas o'qqa (12.14-rasm) ega bo'ladi. Xos o'qli tekisliklar dastasining chizmadagi bir nomli

izlari bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi (12.15-rasm). Shu izlar dastasining $1''$ va $2''$ nuqtalari tekisliklar dastasi Γ o'qining izlaridan iborat bo'ladi. Dasta tekisliklarining vaziyati esa bitta parametr, ya'ni aylanish burchagi φ ning kattaligi orqali aniqlanadi.

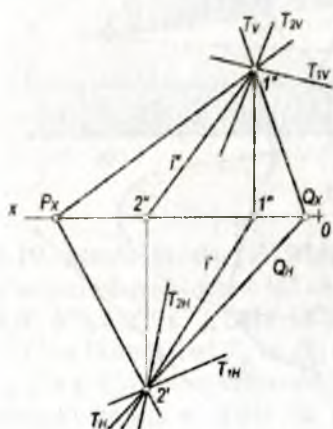
Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining chizmadagi bir nomli izlari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar dastasidan iborat bo'ladi (12.16-rasm). Bu dasta tekisliklarining vaziyati bitta parametr, ya'ni tekisliklar orasidagi / masofa bilan aniqlanadi. Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining yo'nalishi esa biror Q yo'naltiruvchi tekislik orqali beriladi. Bu tekislik *parallelizm tekisligi* deb ham yuritiladi.



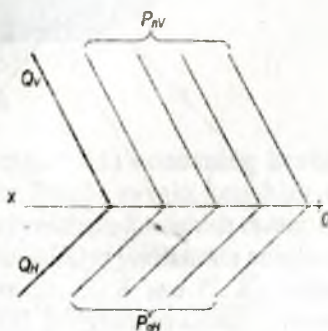
12.13-rasm.



12.14-rasm.



12.15-rasm.



12.16-rasm.

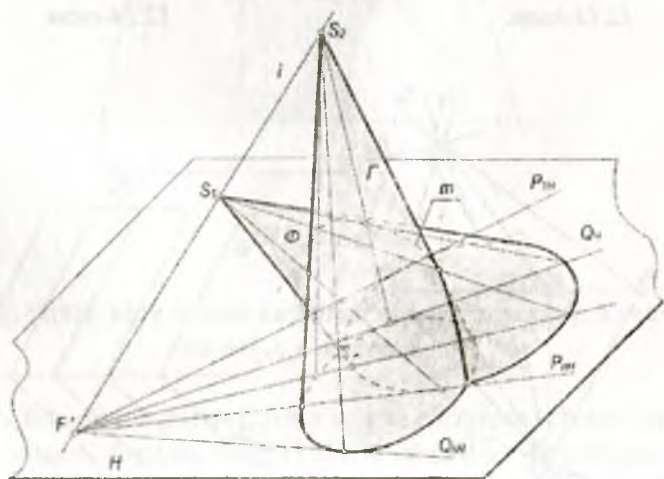
tekisliklar dastasi, asosan, tekislik bilan sirtning, sirt bilan sirtning va sirt bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli nomi bilan ishlatiladi.

12.5.2. Chiziqli sirtlarning o'zaro vaziyatini ularning kesishish chiziqlarini yasamasdan aniqlash. Har bir chiziqli sirtning yasovchilari orqali o'tgan tekisliklar dastasi sirtning asos tekisligida izlar dastasi to'plamini hosil qiladi. Bu izlar dastasi sirt asosiga urinuvchi izlar orasida bo'ladi.

Asoslari bir tekislikda yotgan sirtlarning o'zaro vaziyatini shu sirtlarning yasovchilari orqali o'tgan umumiy o'qli kesuvchi tekisliklar dastasi izlari to'plamining o'zaro vaziyati aniqlaydi. Agar izlar dastasi o'zaro kesishsa, sirtlar ham kesishadi. Ular kesishmasa, sirtlar ham kesishmaydi. 12.17-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki konus sirtining o'zaro vaziyati aniqlangan. S_1 va S_2 konus uchlari orqali o'tgan kesuvchi tekisliklar $P_{1H} \dots P_{mH}$ va $Q_{1H} \dots Q_{nH}$ izlar to'plamini hosil qilgan. Bu to'plamlar qisman kesishgani uchun konus sirtlari ham qisman kesishib, bitta m fazoviy egri chiziq hosil qilgan. Izlar to'plamining bu xususiyati berilgan o'zaro kesishuvchi sirtlarning kesishish chiziqlarini yasamasdan oldin uning xarakterini aniqlash imkonini beradi. Buni asoslari bir tekislikda (masalan, H da) yotgan kesishuvchi sirtlarning 12.1-jadvalda keltirilgan sxematik chizmalaridan kuzatish mumkin.

12.5.3. Sirtlarning kesishish chiziqlarini yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli bilan yasashning umumiy algoritmi:

- ikki sirtning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatiga qarab kesuvchi tekisliklar dastasining vaziyati tanlanadi. Bunda kesuvchi sirtlarning hosil bo'lish qonuniyatlariga asosan, ular berilgan sirtlar bilan kesishganda kesimda to'g'ri chiziqlar yoki aylanalar to'plami hosil bo'ladigan qilib tanlanadi;

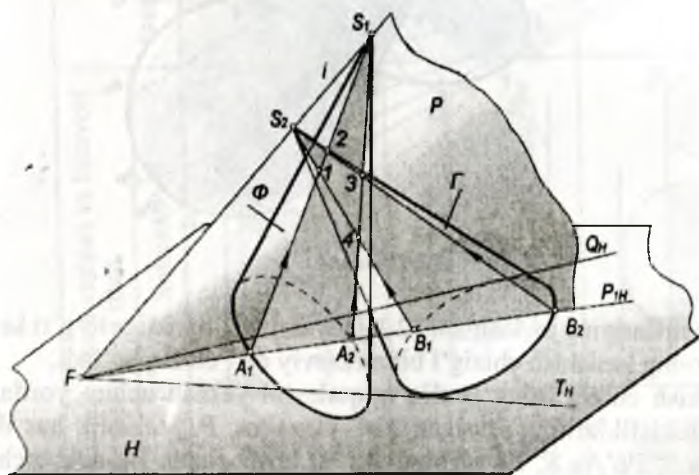


12.17-rasmi.

- sirtlarning asoslari yotgan tekislikda kesuvchi tekisliklar izlarining dastasi yasaladi;
- kesishuvchi sirtlar asoslarining o'zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar izi dastasining vaziyati 12.1-jadvalga asosan aniqlanadi;
- kesishuvchi sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari belgilanadi;
- kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari yasaladi;
- hosil bo'lgan nuqtalar ketma-ket ravon tutashtiriladi.

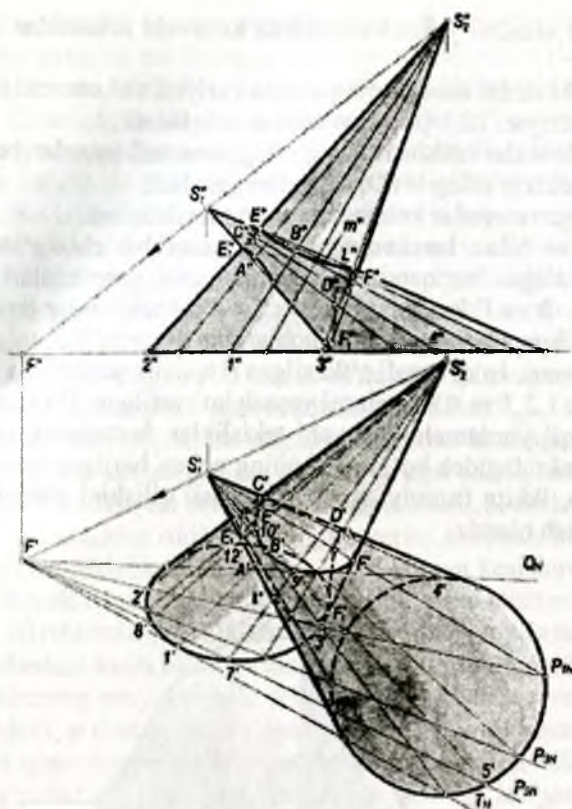
12.5.4. Konus bilan konusning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

Konus uchidan o'tgan har qanday tekislik konusni yasovchilari bo'yicha kesadi. Berilgan Φ va Γ konuslarni kesib o'tuvchi tekisliklar dastasining i o'qi kesishuvchi konuslarning S_1 va S_2 uchlariidan o'tuvchi S_1S_2 to'g'ri chiziq bo'ladi (12.18-rasm). i o'qi orqali o'tkazilgan P tekislik yordamida ikki sirtga umumiy bo'lgan 1,2,3 va 4 nuqtalarni yasash ko'rsatilgan. Bu konuslarning asosi va xos o'qli yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasining izlari 12.1-jadvalning 1-punktidagidek bo'ladi. Shuning uchun berilgan Φ va Γ sirtlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qilishini oldindan jadval yordamida aniqlab olamiz.



12.18-rasm.

12.19-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki konusning kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Bunda, avvalo, kesishish $A(A', A''), B(B', B''), C(C', C''), D(D', D'')$ nuqtalari yasaladi. Kesishish chizig'ining A va B , C va D nuqtalari T_H va Q_H urinma tekisliklar yordamida aniqlanadi. Ular $S_2'1'$ va $S_1'4'$ yasovchilarning nuqtalaridir. E', E_1' va F', F_1' nuqtalar kesishuvchi konus sirtlarining gorizontaal proyeksiyasidagi ixtiyoriy yasovchilari ustidagi nuqtalardir. Bu nuqtalar esa kesuvchi tekisliklar dastasining $P_{1H}, P_{2H}, P_{3H}, \dots$ kabi izlari yordamida hosil qilingan.



12.19-rasm.

Konus sirtlarining joylashishi 12.1-jadvalning 2-punktiga to'g'ri kelgani uchun ularning kesishish chizig'i bitta fazoviy egri chiziq bo'ladi.

Kesishish chizig'ining oraliq nuqtalarini yasash uchun yordamchi kesuvchi tekisliklarning istalgan biri, masalan, P_{2H} tekislik har ikkala konuslarda $S_1'5'6'$ va $S_2'7'8'$ uchburchaklar hosil qiladi. Bu uchburchaklar o'zaro kesishib, $9'$, $10'$, $11'$ va $12'$ kesishish nuqtalarini hosil qiladi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari mos yasovchilarning frontal proyeksiyalari ustida topiladi. Xuddi shu yasash tartibi boshqa kesuvchi tekisliklar uchun yetarli marta takrorlansa, ikki konus sirti o'zaro kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari ham hosil bo'ladi.

Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari yasovchilarning ko'rinishligi qoidasiga amal qilgan holda ketma-ket ravon tutashtiriladi.

12.5.5. Konus bilan piramidaning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash. Konus bilan piramida sirtlari fazoviy siniq egri chiziq hosil qilib kesishadi. Bu sirtlarning o'zaro vaziyati 12.1-jadvaldan foydalanib aniqlanadi. Kesishish

№	Kesishuvchi sirtlar asoslarining o'zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar dastasining izlari		Kesishish chizig'ining sxematik ko'rinishi	Kesishuvchi sirtlarning o'zaro vaziyati
	Xos o'qli	Xosmas o'qli		
1.				Φ va Γ sirtlar o'zaro to'liq kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
2.				Φ va Γ sirtlar o'zaro qisman kesishib, bitta fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
3.				Φ va Γ sirtlar o'zaro qisman kesishib, bitta kesishish nuqtasiga ega bo'lgan bitta yopiq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta sirtlarning urinish nuqtasi bo'ladi.

4.				Φ va Γ sirtlar o'zaro to'liq kesishib, ikkita tekis egri chiziq hosil qiladi. Kesishish chiziqlari A ₁ va A ₂ nuqtalarda bir-biri bilan kesishadi. A ₁ va A ₂ nuqtalar Φ va Γ sirtning urinish nuqtalari bo'ladi.
5.				Φ va Γ sirtlar o'zaro kesishmaydi.
6.				Φ sirt bilan Γ ko'pyoqlik sirti o'zaro to'liq kesishib, ikkita fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.
7.				Φ sirt bilan Γ ko'pyoqlik sirti qisman kesishib, bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.

8.				Φ sirt bilan Γ ko'pyoqlik sirti qisman kesishib, urinish nuqtasiga ega bo'lgan bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta Φ va Γ sirtlarning o'zaro urinish nuqtasi bo'ladi.
9.				Φ sirt bilan Γ ko'pyoqlik sirti o'zaro to'liq kesishib, A ₁ va A ₂ urinish nuqtalariga ega bo'lgan ikkita fazoviy siniq chiziq hosil qiladi. A ₁ va A ₂ nuqtalar Φ va Γ sirtlarning o'zaro urinish nuqtalari bo'ladi.
10.				Φ sirt bilan Γ ko'pyoqlik o'zaro kesishmaydi.

chizig'ining sinish nuqtalari piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalaridir. Kesishish chizig'ining tekis egri chiziqlari piramida yoqlarining konus sirti bilan kesishgan chiziqlaridir. Bu chiziqlar ikkinchi tartibli tekis egri chiziqlar hisoblanib, tekislik bilan sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmidan foydalanib yasalsa ham bo'ladi. Konus bilan piramida sirtining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi, umuman olganda, konus bilan konusning kesishish chizig'ini yasash algoritmining o'zginasidir. Faqat xarakterli nuqtalar qatoriga piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalarini ham yasashni kiritish yetarli.

12.5.6. Konus bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Konus bilan silindr sirtlari o'zaro kesishganda fazoviy, xususiyl hollarda esa tekis egri chiziq hosil bo'ladi.

Asosi bir tekislikda yotuvchi konus va silindr sirtlarining kesishish chizig'ini yasash uchun konusning S_2 uchidan silindr yasovchilariga parallel qilib kesuvchi tekisliklar dastasining i o'qi o'tkaziladi (12.20-rasm).

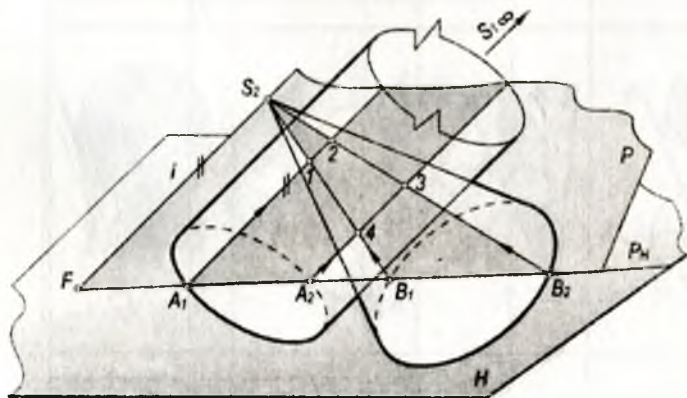
Bu dastaning istalgan P tekisligi konusni $S_2B_1B_2$ uchburchak, silindrni esa A_1, A_2 nuqtalardan o'tuvchi yasovchilari bilan kesadi. Ularning o'zaro kesishishi natijasida kesishish chizig'ining 1, 2, 3, 4 nuqtalari hosil bo'ladi.

12.21-rasmda asoslari H tekislikda yotgan konus bilan silindr sirtlarining kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Buning uchun sirtlarga urinuvchi yordamchi kesuvchi P_1, P_4 tekisliklarning P_{1H}, P_{4H} izlari yasaladi.

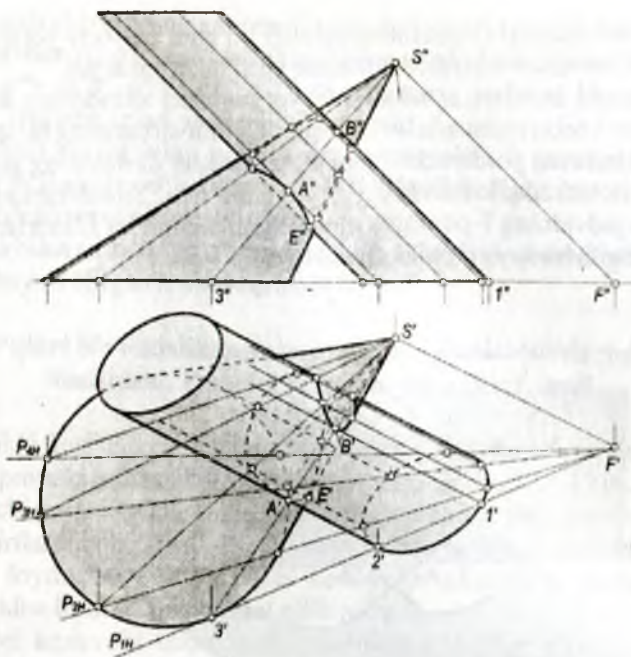
12.1-jadvalning 2-punktiga asosan konus va silindrning butunlay kesishib, bitta yopiq egri chiziq hosil qilishi aniqlanadi.

Konus bilan silindrning xarakterli nuqtalarini aniqlash 12.19-rasmda ko'rsatilgan konus bilan konusning o'zaro kesishishidek bajariladi.

Kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari P_1 va P_4 tekisliklar orasidagi yordamchi tekisliklar orqali yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari ketma-ket ravon tutashtiriladi.



12.20-rasm.



12.21-rasm.

12.5.7. Konus bilan prizmaning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

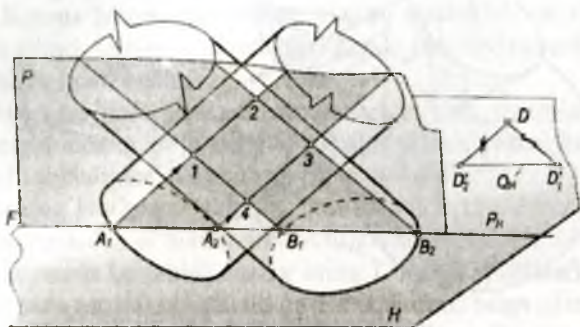
Konus bilan prizma sirti o'zaro kesishib, fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. Bu kesishish chizig'ining sinish nuqtalari prizma qirralarining konus sirti bilan kesishish nuqtalaridir. Kesishish chizig'ining tekis egri chiziqlari prizma yoqlarining konus sirti bilan kesishuvidan hosil bo'ladi.

Xususiyl holda konus bilan prizmaning kesishish chizig'i tekislik bilan sirtning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta qo'llash yo'li bilan aniqlanadi. Umumiy holda esa, konus bilan prizmaning kesishish chizig'ini yasash algoritmi konus bilan silindrning kesishish chizig'ini yasash algoritmining o'zginasi bo'lib, faqat xarakterli nuqtalar soniga qo'shimcha ravishda prizma qirralarining konus bilan kesishish nuqtalarini yasash kifoyadir.

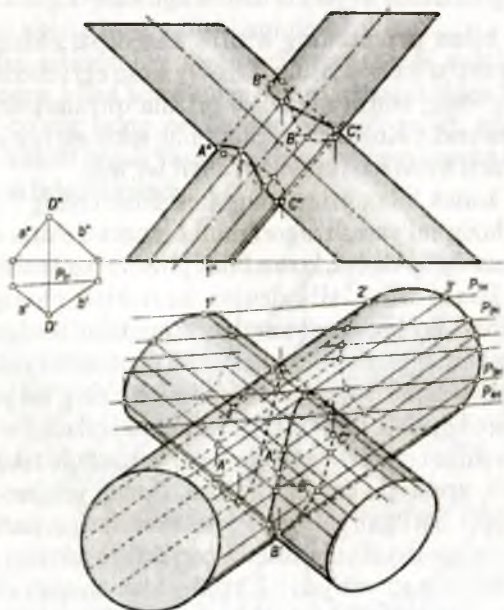
12.5.8. Silindr bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Silindr bilan silindr sirti o'zaro kesishib, fazoviy egri chiziq hosil qiladi. Bu silindrlarning to'g'ri chiziqli yasovchilari orqali o'tgan kesuvchi yordamchi tekisliklar dastasi o'zaro parallel bo'lib, xosmas o'qqa ega bo'ladi. Bunda yordamchi tekisliklar dastasining yo'nalishi berilgan silindrlar yasovchilariga parallel bo'lgan yo'naltiruvchi tekislikni aniqlaydi va bu tekislik parallelizm tekisligi deb yuritiladi. Berilgan silindrlarning o'zaro vaziyati 12.1-jadvaldan aniqlab olinadi. 12.22-rasmda ikki silindr sirti kesishish chizig'ining 1,2,3,4 nuqtalarini yasash

ko'rsatilgan. Bu nuqtalar Q tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy yordamchi va ikki silindrni kesuvchi P tekislikni o'tkazish yo'li bilan yasalgan.

12.23-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki silindrning kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Silindr sirtlarining biriga urinib, ikkinchisini kesuvchi yordamchi P_1 va P_4 tekisliklar dastasining gorizontal P_{1H} P_{4H} izlari o'tkaziladi. Bunda $P_{1H} \parallel P_{4H} \parallel Q_H$ bo'ladi. Silindrlarning o'zaro vaziyati 12.1-jadvalning 1-punktiga mos kelgani uchun bu silindrlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.



12.22-rasm.



12.23-rasm.

Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari xuddi konus bilan konusning yoki konus bilan silindr kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari kabi bo'ladi. Bu $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari P_{2H} , P_{3H} , ... tekislik izlari yordamida yasaladi.

Kesishish chizig'ining boshqa oraliq nuqtalari P parallel yordamchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari o'zaro ravon birlashtiriladi.

Prizma bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi xuddi yuqorida bayon etilgan ketma-ketlikda bo'ladi.

12.6-§. O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli

Agar ikki kesishuvchi sirtlarning o'qlari o'zaro kesishmasdan, ulardan biri biror proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lib, ikkinchi sirtning o'qi ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, u holda bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda parallel kesuvchi tekisliklar usulidan foydalaniladi. Parallel kesuvchi tekisliklar proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel qilib olinadi.

Parallel kesuvchi tekisliklar usulining qulayligi shundaki, bunda yordamchi kesuvchi tekisliklar kesishuvchi sirtlarni aylanalar va to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Parallel kesuvchi tekisliklar usulida tekisliklar dastasining o'qi xosmas bo'ladi. Bu usul bilan yechiladigan bir necha sirtlarning o'zaro kesishuvini ko'rib chiqamiz.

12.6.1. Ikki silindrning o'zaro kesishishi. 12.24-rasmda kesishuvchi silindrlarning biri gorizontal proyeksiyalovchi, ikkinchisining o'qi frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan holda silindrlar tasvirlangan.

Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar V tekislikka parallel bo'ladi. Ularning o'zaro vaziyati chizmaning gorizontal proyeksiyasidan ko'rinib turibdi. Kesishish chizig'ining xarakterli $1(1', 1'')$, $2(2', 2'')$, $4(4', 4'')$, $5(5', 5'')$ nuqtalari yordamchi kesuvchi frontal V_{1H} , V_{2H} , V_{4H} , V_{5H} tekisliklar yordamida hosil qilingan. Bunda yordamchi parallel tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Bir tekislikda yotuvchi ikki silindrga mansub bo'lgan yasovchilarning kesishish nuqtalari ikkala sirt uchun umumiy bo'lib, yasaladigan $m(m', m'')$ egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. m egri chiziqning qolgan nuqtalari V_{1H} va V_{2H} tekisliklar orasida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Kesishish chizig'i frontal proyeksiyasining silindrning V_3 simmetriya tekisligidan kuzatuvchi tomondagi nuqtalari ko'rinadi, uning orqasidagi nuqtalari esa ko'rinmaydi.

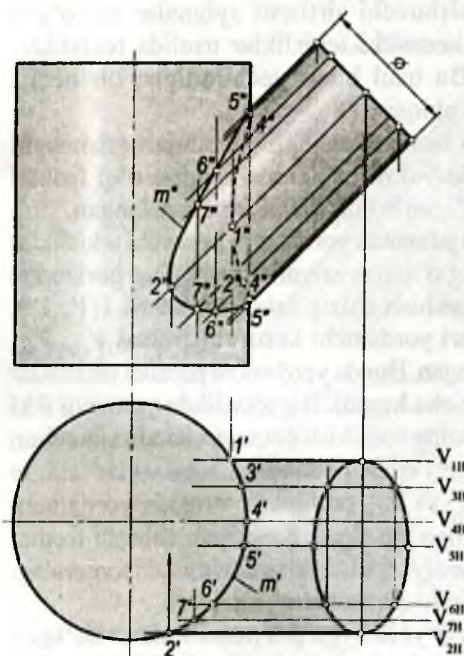
12.6.2. O'qlari uchrashmas va H yoki V ga perpendikulyar bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash (12.25-rasm). Kesishuvchi sirtlardan doiraviy silindr o'qi V tekislikka va doiraviy konus o'qi H tekislikka perpendikulyar bo'lganda yordamchi parallel kesuvchi

tekisliklar gorizontalk tekisliklar bo'ladl. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Hosil bo'lgan aylana va yasovchilar o'zaro kesishib, kesishish chizig'ining nuqtalarini hosil qiladi.

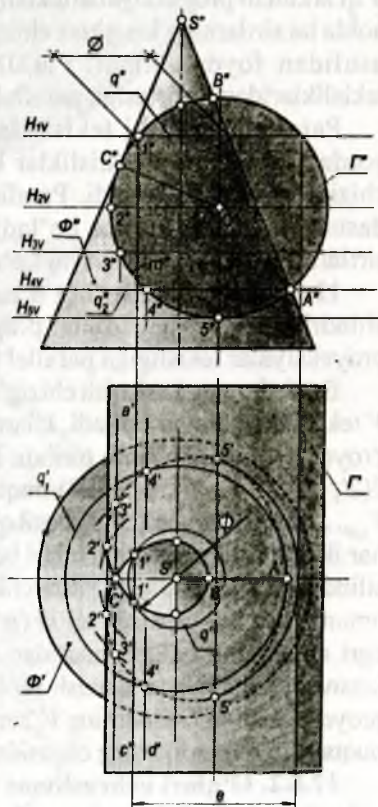
Kesishish chizig'ining $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalarida belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4,5 nuqtalar $H_1 \parallel H, \dots$ va $H_5 \parallel H$ tekisliklar o'tkazib, gorizontalk proyeksiyadagi q va q_1 aylanalarining va a', b', c' va d' to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. Qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

$2(2', 2'')$ xarakterli nuqta Γ silindrnng $H_2(H_{2V})$ simmetriya tekisligini o'tkazish yo'li bilan topiladi. Kesishish chizig'ining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan nuqtalari ham H_2 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

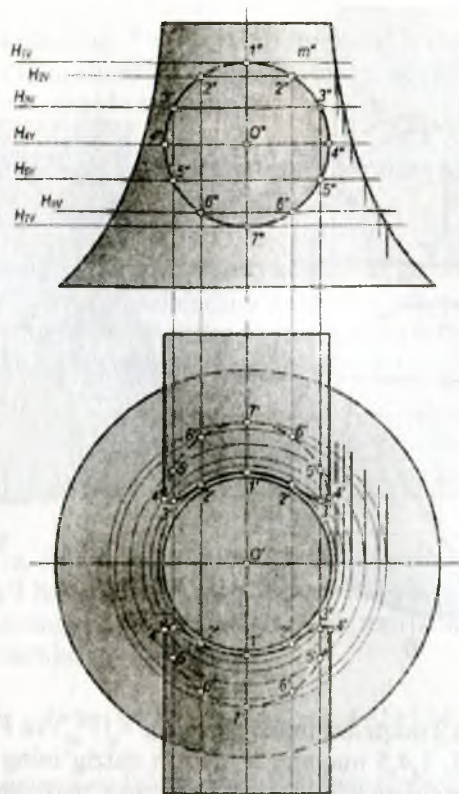
12.26-rasmda o'qlari kesishib, o'zaro perpendikulyar bo'lgan aylanish silindri bilan tor sirti bo'lagining kesishish chizig'ini yasash tasvirlangan.



12.24-rasm.



12.25-rasm.

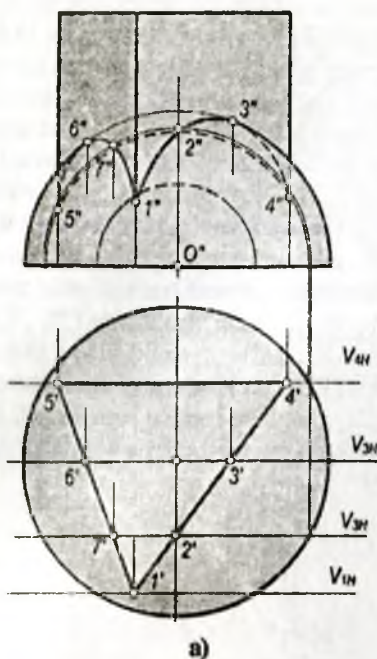


12.26-rasm.

Kesishish egri chizig'ini yasash $H_1(H_{11}), \dots$ gorizontalkesuvchitekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Bunday holda sirtlarning kesishish egri chizig'i ikkita simmetrik bo'lakdan iborat bo'ladi. 1, 4, 7 xarakterli nuqtalar H_{11}, H_{41} va H_{71} tekisliklar yordamida yasalgan. Kesishgan egri chiziq gorizontalkesuvchitekisliklar yordamida aniqlanadi.

12.6.3. Yarim sfera bilan uchburchakli to'g'ri prizmaning o'zaro kesishishi. Sfera bilan prizma sirti fazoda sinuq egri chiziq bo'yicha kesishadi. 12.27-a, b rasmda yarim sfera va qirralari H tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. Yordamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo'yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizma sirti sharni to'la kesadi va uchta aylana hosil bo'ladi. Ularning V dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o'zaro kesishish chizig'ining



12.27-rasm.

xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal $V_1(V_{1H})$, $V_4(V_{4H})$ va $V_3(V_{3H})$ tekisliklar yordamida yasaladi. 1,4,5 nuqtalar kesishish chizig'ining sinish nuqtalari bo'lib, prizma qirrasining sfera bilan kesishgan nuqtalaridir. V_3 tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig'ining ko'rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Qolgan yasashlar rasmdan ko'rinib turibdi. Bu misolda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklarni gorizontaal tekislik qilib olsa ham bo'ladi.

12.6.4. O'qlari o'zaro parallel bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. O'qlari parallel bo'lgan Φ siqiq aylanma ellipsoid bilan Γ aylanish sirti 12.28-a, b rasmda tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari H tekisligiga perpendikulyar joylashgan. Sirtlarning fazoda bunday berilishida yordamchi kesuvchi tekisliklar sirtlarning o'qlariga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Dastlab kesishuv chizig'ining 1(1', 1'') va 6(6', 6'') xarakterli nuqtalari belgilanadi. Qolgan nuqtalar $H_2(H_{2V})$, $H_3(H_{3V})$... kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Kesuvchi gorizontaal yordamchi tekisliklar berilgan ikkala aylanish sirtini aylanalar bo'yicha kesadi. Kesimlarda hosil bo'lgan bu aylanalar o'zaro kesishib, ikkala sirtga oid bo'lgan kesishish chizig'ining nuqtalarini beradi. Masalan, 12.28-rasmda 2(2', 2''), 2₁(2₁', 2₁'') nuqtalarni hosil qilishda H_{2V} tekisligi o'tkazilgan. Bu tekislik sirtlarning birini $l(l', l'')$, ikkinchisini $n(n', n'')$ aylanalar bo'yicha kesgan. Hosil bo'lgan l va n aylanalar o'zaro kesishib, 2(2', 2'') va 2₁(2₁', 2₁'') nuqtani hosil qiladi, ya'ni gorizontaal

proyeksiyalar tekisligidagi l' va m' aylanalarning kesishishidan $2'$ va $2_1'$ nuqtalar hosil bo'ladi, so'ngra ularning V dagi proyeksiyalari H_{2V} da yasaladi. Qolgan barcha nuqtalar shu usulda aniqlanadi.

12.7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishidagi maxsus hollar

Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishi geometrik va muhandislik amaliyotidagi ko'pgina masalalarni o'z ichiga oladi.

Ma'lumki, ikkinchi tartibli sirtlar algebraik sirtlar turkumiga kiradi. Shuning uchun ularning kesishish chiziqlari ham algebraik egri chiziqlar bo'ladi.

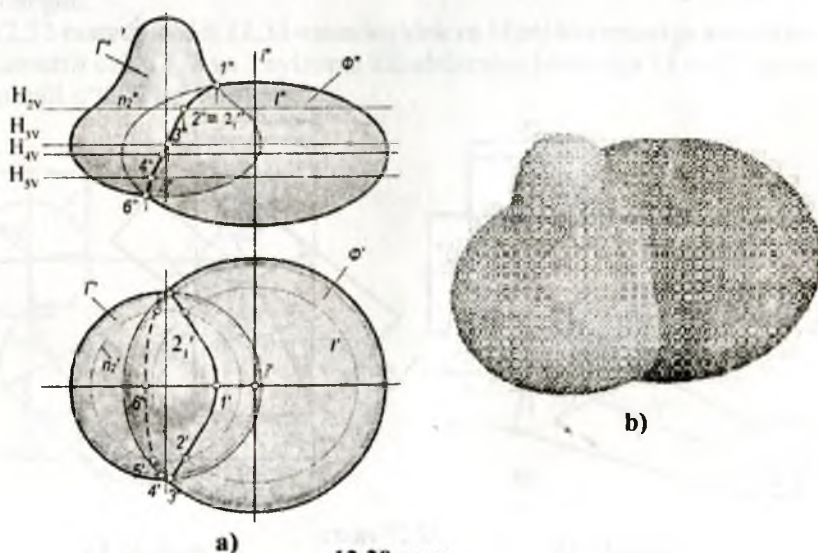
Ta'rif. Ikki sirt kesishish chizig'ining tartibi sirtlar tartibining ko'paytmasiga tengdir.

Shunga ko'ra, ikkita ikkinchi tartibli sirt kesishganda to'rtinchi tartibli kesishish chizig'i hosil bo'ladi: $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^2 = m^4$. Sirtlarning kesishish chizig'i, kesishuvchi sirtlarning vaziyati va shakliga qarab, turli tartibli egriliklarga ajraladi.

Masalan, 4-tartibli egri chiziq

$$4=3+1, 4=2+1+1, 4=2+2, 4=1+1+1+1$$

tartibdagi egri chiziqlarga ajralishi mumkin. Bularning geometrik ma'nosi quyidagicha:



12.28-rasm.

- To'rtinchi tartibli egri chiziq bitta uchinchi tartibli egri chiziqqa va to'g'ri chiziqqa ajralgan. Umumiy to'g'ri chiziqli yasovchiga ega bo'lgan har qanday chiziqli ikkinchi tartibli ikki sirtning kesishuvida bu holni ko'rish mumkin.

- To'rtinchi tartibli egri chiziq bitta ikkinchi tartibli egri chiziqqa va ikkita to'g'ri chiziqqa ajraladi.

- To'rtinchi tartibli egri chiziq ikkita ikkinchi tartibli egri chiziqqa ajralgan. Bu holni keyinroq batafsil ko'rib chiqamiz.

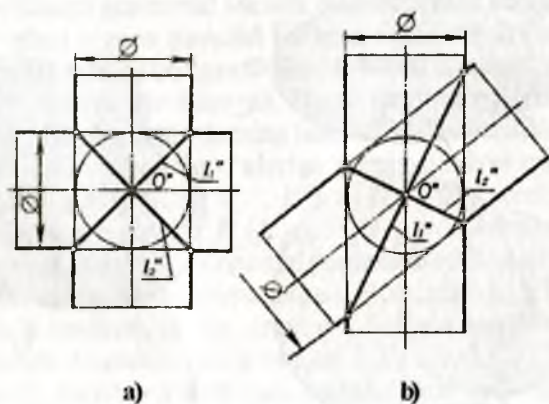
- To'rtinchi tartibli egri chiziq to'rtta to'g'ri chiziqqa ajraladi. Bu holni umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma va elliptik silindrlar misolida ko'rish mumkin.

12.7.1. Monj teoremasi va uning xususiy hollari.

Teorema. Agar ikki o'zaro kesishuvchi ikkinchi tartibli sirtlarning tashqarisida yoki ichkarisida biror uchinchi ikkinchi tartibli sirtni urinma vaziyatda chizish mumkin bo'lsa, u holda berilgan sirtlar ikkita tekis egri chiziq bo'yicha kesishadi. Egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

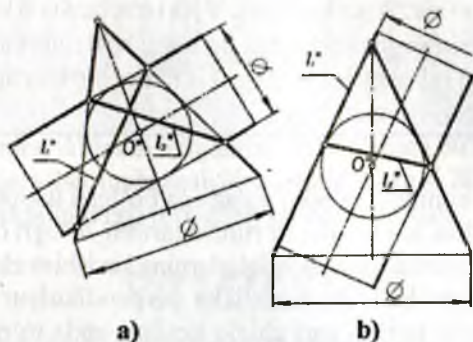
Monj teoremasi muhandislik amaliyotida ikkinchi tartibli ikki sirtning tashqarisida yoki ichkarisida sfera chizish mumkin bo'lgan hollarda ularning kesishish chizig'ini yasash uchun qo'llaniladi. Monj teoremasiga doir bir necha misollarni ko'ramiz. Chizmalar frontal proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar orqali berilgan.

Masalan, 12.29-a,b rasmda o'qlari kesishuvchi holda joylashgan ikki aylanma kesishuvchi silindrlar ichiga sferalar chizilgan. Teoreмага asosan bu silindrlar ikki l_1'' va l_2'' ellipslar bo'yicha kesishadi. 12.30-a,b rasmda aylanma silindr



12.29-rasim.

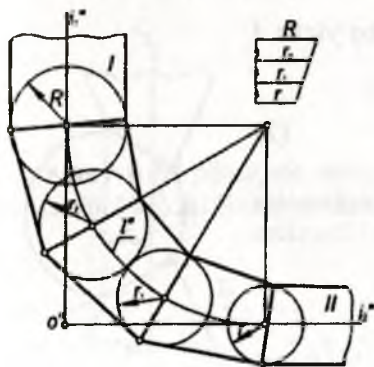
bilan konusning kesishish chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Bunda silindr va konusga urinuvchi sirt sfera, sirlarning kesishish chiziqlari l_1'' va l_2'' ellipslardir.



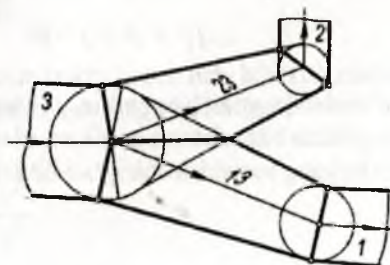
12.30-rasm.

Monj teoremasi truboprovodlarni loyihalashda qo'llanilishi mumkin. O'qlari o'zaro O'' nuqtada kesishuvchi har xil diametrli ikki silindrik I va II trubalar berilgan. Ularni tutashtiruvchi oraliq trubalar yasash kerak bo'lsin (12.31-rasm). Buning uchun, avvalo, trubaning i_1'' va i_2'' o'qlarini l'' aylana yoyi bilan tutashtiramiz. So'ngra bu yoyni teng bo'laklarga bo'lib, bo'linish nuqtalarini sferalarning markazi sifatida qabul qilamiz. r va R radiuslar proporsional o'zgartirilgan holda sferalar chiziladi. Har ikki yonma-yon sferalarga urinmalar o'tkazib, konuslar hosil qilinadi. Ikki yonma-yon konuslar umumiy ichki sferaga ega bo'lgani uchun ellipslar bo'yicha kesishadi. Ular chizmada kesma tarzida tasvirlangan.

12.32-rasmda xuddi 12.31-rasmdagidek va Monj teoremasiga asosan har xil diametrli uchta 1, 2 va 3 aylanma silindrlarning bir-biriga 13 va 23 konus sirti orqali o'tishi ko'rsatilgan.



12.31-rasm.



12.32-rasm.

12.7.2. Umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvi.

Teorema. Agar kesishuvchi ikkinchi tartibli ikki sirt umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i simmetriya tekisligida ikkinchi tartibli chiziq bo'lib proyeksiyalanadi.

Isboti. Umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli ikki sirt berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ular to'rtinchi tartibli m' egri chiziq bo'yicha kesishadi. Sirtlarning simmetriya tekisligi ularning kesishish chizig'ining ham simmetriya tekisligi bo'ladi. Bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan biror tekislik bilan to'rtinchi tartibli egri chiziq kesilsa, unda to'rtta nuqta hosil bo'ladi. Shu nuqtalardan bir jufti simmetriya tekisligining bir tomonida, ikkinchi jufti uning ikkinchi tomonida yotadi. Bu nuqtalar ham simmetrik joylashgan bo'ladi. Demak, to'rtinchi tartibli egri chiziqning shunday ikki nuqtasi mavjudki, ular simmetriya tekisligiga nisbatan simmetrik joylashadi. Shuning uchun ularning simmetriya tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari ustina-ust tushadi. To'rtinchi tartibli egri chiziqning hamma nuqtalari shu tarzda proyeksiyalansa, ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini analitik usulda ham ko'rsatish mumkin. Umumiy frontal simmetriya tekisligiga ega bo'lgan aylanma konus va sfera berilgan bo'lsin (12.33-rasm). Bu ikki sirt ham ikkinchi tartibli bo'lgani uchun ular to'rtinchi tartibli egri chiziq bo'yicha kesishadi.

$z = kx$ yasovchi to'g'ri chiziq Oz o'qi atrofida aylantirilsa, aylanma konus sirti hosil bo'ladi. U holda bu konusning tenglamasi

$$z^2 = k^2 (x^2 + y^2) \quad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. Markazi Ox o'qi bo'yicha l masofaga siljigan sferaning tenglamasini

$$(x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (1) va (2) tenglamalar birgalikda bitta sistemaga olinsa, ular konus bilan sfera sirtlarining kesishish chizig'ini ifodalaydi:

$$\begin{cases} z^2 = k^2 (x^2 + y^2) \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \quad (3)$$



yoki

$$\begin{cases} y^2 = \frac{z^2}{k^2} - x^2 \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{cases} \quad (4)$$

4-sistemaning ikkinchi tenglamasida y^2 o'rniga birinchi tenglamadagi y^2 ning qiymati qo'yilsa, unda kesishish chizig'ining XOZ , ya'ni V tekisligidagi (simmetriya tekisligidagi) proyeksiyasi hosil bo'ladi:

$$(x-l)^2 + z^2 / k^2 - x^2 + z^2 = R^2. \quad (5)$$

Ba'zi soddalashtirishlardan so'ng (5) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$z^2 = 2 \frac{lk^2}{l+k^2} x + \frac{k^2}{l+k^2} (R^2 - l^2). \quad (6)$$

Bu yerda $\frac{lk^2}{l+k^2} = p$, $\frac{k^2}{l+k^2} (R^2 - l^2) = q$ deb belgilansa, (6) tenglamani

$$z^2 = 2px + q \quad (7)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Natijada umumiy simmetriya tekisligiga ega bo'lgan aylanma konus va sfera sirtlari kesishish chizig'ining shu tekislikdagi proyeksiyasi parabola (7) ekanligi kelib chiqadi.

(5) tenglamada $z = 0$ deb olinsa, parabola uchining koordinatasi topiladi:

$$x_0 = \frac{l^2 - R^2}{2l}. \quad (8)$$

Agar $l=0$ deb olinsa, sferaning markazi aylanma konus uchi bilan bir nuqtada bo'linadi, u holda (6) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$z^2 = \frac{R^2 k^2}{l+k^2} \quad (9)$$

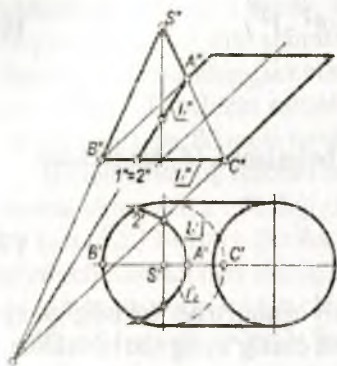
yoki

$$z = \pm \frac{Rk}{\sqrt{1+k^2}}. \quad (10)$$

Bu tenglama (10) ikkita parallel to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi. Bu holda (6) parabola frontal tekislikda ikki parallel to'g'ri chiziqqa ajralgan bo'ladi, ya'ni 4-tartibli egri chiziq ikkita aylanaga ajraladi. Haqiqatan, umumiy o'qqa ega bo'lgan ikki aylanma sirt doim aylanalar bo'yicha kesishadi.

12.8-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishiga oid teoremlar

1-teorema. Agar ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishsa, u holda ular yana biror egri chiziq bo'yicha kesishadi va bu ham tekis egri chiziq bo'ladi.



12.34-rasm.

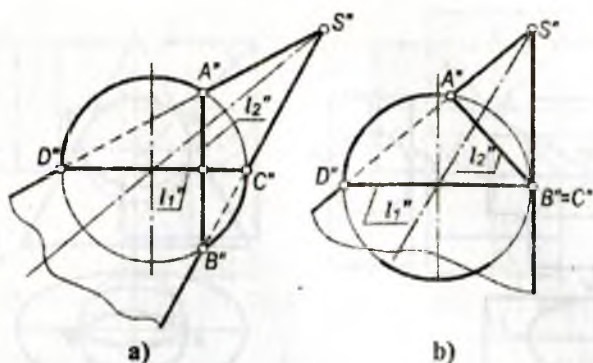
Isboti. Teorema birinchi qismining shartiga asosan ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu egri chiziq faqat ikkinchi tartibli bo'lishi mumkin. Chunki ikkinchi tartibli sirtlarni ixtiyoriy tekislik bilan kesganda ham ikkinchi tartibli chiziq hosil bo'ladi. Ikkita ikkinchi tartibli sirt to'rtinchi tartibli egri chiziq bo'yicha kesishgani uchun ikkinchi noma'lum bo'lgan egri chiziq ham Monj teoremasiga asosan ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi. 12.34-rasmda umumiy asosi aylana bo'lgan silindr va konus sirtlari berilgan. Kesishuvchi bu sirtlar ikkinchi tartibli va bitta umumiy aylana bo'yicha kesishgan. Teorema shartiga asosan bu sirtlarga

tegishli yana bitta tekis egri chiziq bo'lishi lozim. Izlanayotgan ikkinchi tekis egri chiziq $l_2(l'_2, l''_2)$ ellips bo'ladi. Shunday qilib, konus va silindr sirtlari bir aylana va bir ellips bo'yicha kesishadi.

Teoremaning natijasi sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

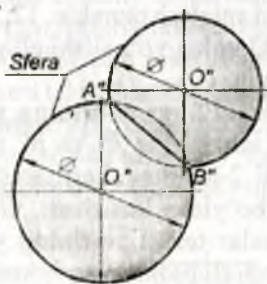
Ta'rif. Agar sfera biror sirt bilan aylana bo'yicha kesishsa, u holda bu sfera shu sirt bilan yana bir aylana bo'yicha kesishadi.

12.35-a,b rasmda sfera bilan konusning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Bunda sfera va konus uchun umumiy bo'lgan tekis egri chiziqlardan biri sferaning katta l_1'' gorizontaal kesimidir. Teorema shartiga ko'ra, yana bir tekis kesim mavjud. Izlangan tekis kesim l_1'' aylana bo'ladi.

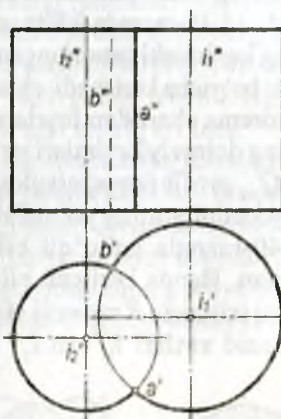


12.35-rasm.

Ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvidagi to'rtinchi tartibli egri chiziq ikkita tekis chiziqqa ajraladigan va ulardan biri mavhum bo'lgan hollar ham uchraydi. 12.36-rasmda har xil diametrli sferalarning kesishishi tasvirlangan. Ular bitta tekis egri chiziq $A''B''$ aylana bo'yicha kesishgan. Bunda ikkinchi tekis egri chiziq mavhum deb qaraladi.



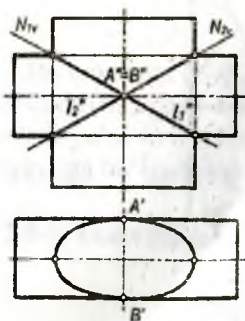
12.36-rasm.



12.37-rasm.

O'qlari parallel bo'lgan ikkinchi tartibli ikki aylanma silindr ikkita parallel yasovchi (yoki bitta tekis egri chiziq) bo'yicha kesishadi. Ikkinchi tekis egri chiziq (ikkita yasovchi) mavhumdir (12.37-rasm).

2-teorema. Agar ikkinchi tartibli ikki sirt ikkita nuqtada urinsa, u holda ularning kesishish chiziqlari ham ikkinchi tartibli ikki tekis egri chiziqqa ajraladi.



12.38-rasm.



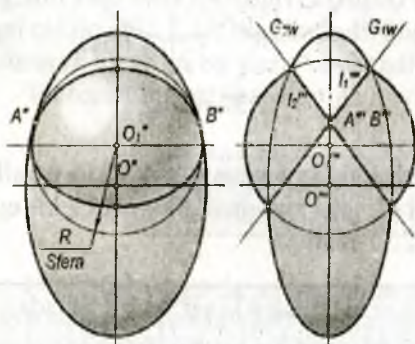
12.39-rasm.

Bu tekis egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

12.38-rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo'lgan aylanma va elliptik silindrlarning kesishishi tasvirlangan. Bu sirtlar l_1'' va l_2'' ellipslar bo'yicha kesishadi. 12.39-rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo'lgan elliptik konus va sferaning kesishishi tasvirlangan. Teorema shartiga ko'ra, bu sirtlar l_1'' va l_2'' aylanalar bo'yicha kesishadi, chunki sferaning tekis kesimlari faqat aylanalardir.

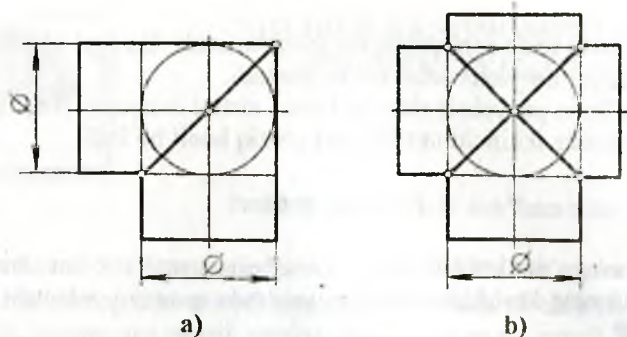
2-teorema shartidan foydalanib, umumiy ko'rinishdagi ikkinchi tartibli sirtlarning doiraviy kesimlari yo'nalishlarini aniqlash mumkin. 12.39-rasmda G_{1W} va G_{2W} profil proyeksiyalovchi tekisliklarning yo'nalishi elliptik konus doiraviy kesimlarining yo'nalishini aniqlaydi.

12.40-rasmda uchoqli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo'nalishi aniqlangan. Bunda berilgan ellipsoidning ichida ikki A'' va B'' nuqtalarga urinuvchi ixtiyoriy R radiusli sfera chiziladi. 2-teorema shartiga asosan sfera va ellipsoid sirtlari l_1'' va l_2'' aylanalar bo'yicha kesishadi. G_{1W} va G_{2W} aylanalar tekisliklarining yo'nalishi uchoqli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo'nalishi bo'ladi.



12.40-rasm.

12.41-a,b rasmlarda shar atrofida chizilgan ikki aylanma silindrning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Silindrik sirtlar ikki tekis egri chiziqlari ellipslar bo'yicha kesishadi. Qurilish amaliyotida silindrlarning shunday vaziyatda kesishishi *novali gumbaz* deb yuritiladi. 12.42-a,b,v,g rasmlarda o'qlari o'zaro kesishgan o'tish trubalarini yasash misollari ko'rsatilgan.



12.41-rasm.

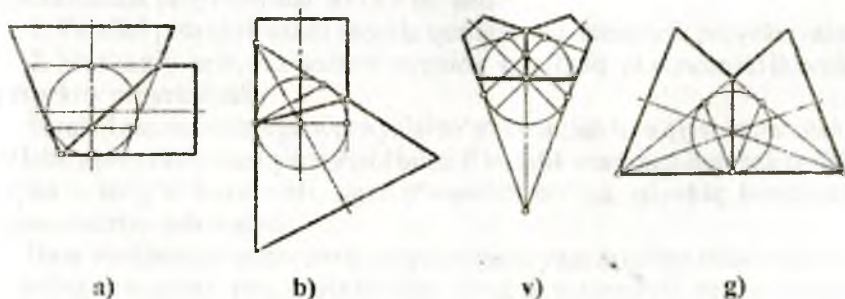
3-teorema. Ikkinchi tartibli sirtlarning ocherki (konturi) ikkinchi tartibli egri chiziqdan iborat.

Bu teorema ikkinchi tartibli sirtlarni tasvirlashda alohida ahamiyatga ega, chunki ikkinchi tartibli sirtlar ko'pincha chizmada o'zining ocherklari bilan beriladi.

Isboti. 1. Parallel proyeksiyalashda ikkinchi tartibli sirtlarning xossasiga asosan uni har qanday tekislik bilan kesganda ikkinchi tartibli tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Bu egri chiziqning ixtiyoriy vaziyatdagi tekislikdagi parallel proyeksiyasi umumiy holda ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi.

Kesuvchi tekislik ikkinchi tartibli sirtning simmetriya tekisligi bo'lib, u asosiy proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lsa, kesimning shu proyeksiyasi tekisliklaridagi parallel proyeksiyalari o'ziga kongruent bo'ladi.

2. Markaziy proyeksiyalashda S markaz bo'yicha biror ikkinchi tartibli Φ sirtni proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi nurlar to'plami o'rovchi konus sirtini hosil qiladi. O'rovchi konus sirti berilgan



12.42-rasm.

Φ sirt bilan bitta tekis egri chiziq bo'yicha urinadi. Bu egri chiziq berilgan sirtning S markaz bo'yicha ocherki hisoblanadi.

Hosil bo'lgan proyeksiyalovchi konus sirtini ixtiyoriy P tekislik bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
2. Ikki sirtning kesishish chizig'ini yasashda qanday yordamchi sirtlardan foydalaniladi?
3. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ida qanday nuqtalar xarakterli deyiladi?
4. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini qanday egri chiziqlar bo'ladi?
5. Konsentrik va eksentrik sferalardan qanday hollarda foydalaniladi?
6. Sferaning har qanday aylanma sirt bilan kesishuvidan nima hosil bo'ladi va u qanday aniqlanadi?
7. Monj teoremasi va undan kelib chiqadigan xususiy hollarni aytib bering.
8. Bitta sferaga tashqi chizilgan silindr va konusning o'zaro kesishishidan qanday chiziqlar hosil bo'ladi?
9. Yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usulining mohiyati nimadan iborat?
10. Silindr bilan prizmaning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda yordamchi tekislik qanday vaziyatda o'tkaziladi?
11. O'qlari kesishmaydigan og'ma silindr va konuslarning kesish chizig'ini yasashda kesuvchi tekislik qanday o'tkaziladi?



XIII BOB. AKSONOMETRIK PROYEKSIYALAR

13.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ma'lumki, ortogonal proyeksiyalarda chizmalarni chizish birmuncha qulay bo'lib, buyumning metrik xarakteristiklari ham saqlanadi. Buning boisi ortogonal proyeksiyalashda buyum proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holda joylashtiriladi. Ortogonal proyeksiyalash usulida tuzilgan chizmalarda qirqim va kesimlardan foydalanib, buyumning ichki va tashqi ko'rinishini yetarlicha aniqlash mumkin. Ammo ortogonal proyeksiyalardagi chizmalarga ko'ra, ularning fazoviy shakllarini tasavvur qilish qiyin. Bunday hollarda buyum chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi.

Bunday tasvirlar aksonometrik proyeksiyalar bo'la oladi. Lekin aksonometrik proyeksiyalarning hammasi ham yaqqol bo'lavermaydi. Buyumni yaqqol qilib tasvirlash proyeksiyalash yo'nalishi va proyeksiyalar tekisliginig vaziyatlariga bog'liq bo'ladi. Aksonometrik proyeksiya qisqacha **aksonometriya** deb yuritiladi (*aksonometriya* grekcha so'z bo'lib, *axon* – o'q, *metreo* – o'lchayman, ya'ni «o'qlar bo'yicha o'lchash» degan ma'noni bildiradi).

Ta'rif. Dekart koordinatalar sistemasida joylashtirilgan buyum va uning proyeksiyalarining shu sistema bilan birgalikda berilgan s yo'nalish bo'yicha ixtiyoriy olingan biror P tekislikdagi proyeksiyasi uning aksonometriyasi deyiladi.

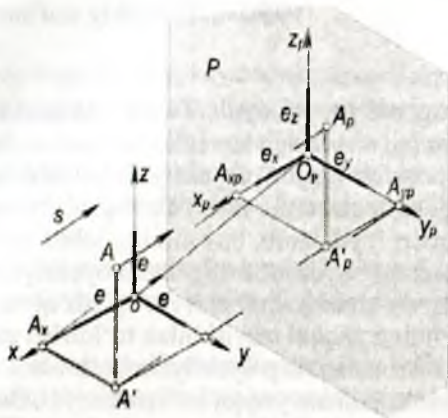
P tekislik *aksonometriya tekisligi* deb yuritiladi (13.1-rasm). Aksonometrik proyeksiyalar ikki xil bo'ladi:

1. Parallel proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar.
2. Markaziy proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik yoki perspektiv proyeksiyalar.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli va qiyshiq burchakli bo'ladi. s proyeksiyalash yo'nalishi bilan P tekislik orasidagi burchak $\varphi=90^\circ$ bo'lsa – to'g'ri burchakli, agar $0^\circ < \varphi \neq 90^\circ$ bo'lsa, qiyshiq burchakli aksonometriya deb ataladi.

Biror shaklning aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun shaklning o'zi va uning ortogonal proyeksiyalaridan birini aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash yetarlidir. Masalan, fazodagi A nuqta ortogonal proyeksiyalaridan biri A' proyeksiyasi bilan birga P aksonometriya tekisligiga tasvirlangan (13.1-rasm). Bunda A_p nuqta A nuqtaning aksonometrik

proyeksiyasi bo'ladi. A' nuqta esa A nuqtaning *ikkilamchi proyeksiyasi* deb yuritiladi. Shakldagi OA $A'A$ siniq chiziq tomonlari A nuqtaning x , y va z koordinatalaridan iborat bo'lganligi uchun *koordinatalar siniq chizig'i* deb yuritiladi. Uning aksonometrik proyeksiyasi $O_p A_{xp} A'_{xp} A'_{yp} A'_{zp}$ siniq chiziq bo'ladi.



13.1-rasm.

$O_p x_p, O_p y_p, O_p z_p$ lar aksonometrik proyeksiyalar o'qlari, O_p esa O koordinatalar boshining aksonometriyasi bo'ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar parallel proyeksiyalar turiga mansub bo'lganligi uchun ular parallel proyeksiyalarning hammasi xossalariga ega.

Shunga ko'ra, $AA' \parallel Oz, A'A_x \parallel Oy, A'A_y \parallel Ox$ bo'lganligi uchun $A_p A'_{xp} \parallel O_p z_p, A'_{yp} A'_{zp} \parallel O_p y_p, A'_{xp} A'_{yp} \parallel O_p x_p$ bo'ladi.

13.2-§. Aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari

Dekart koordinatalar sistemasidagi uchala koordinata o'qlari uchun umumiy bo'lgan e uzunlikni masshtab birligi sifatida qabul qilamiz (13.1-rasm). Buni *natural masshtab birligi* deb ataymiz. Natural masshtab birligi e kesmani Ox , Oy va Oz koordinata o'qlariga qo'yib, P tekislikka proyeksiyalasak, e_x, e_y, e_z kesmalar hosil bo'ladi. Bu kesmalar *aksonometrik masshtab birligi* deb yuritiladi. Ularning e ga nisbatlari aksonometrik o'qlar bo'yicha *o'zgarish koeffitsientlari* deb yuritiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{e_z}{e} = k_z, \quad (1)$$

13.1-rasmdan

$$\frac{O_p A_{xp}}{OA_x} = \frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{O_p A_{yp}}{OA_y} = \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{O_p A_{zp}}{OA_z} = \frac{e_z}{e} = k_z \quad (2)$$

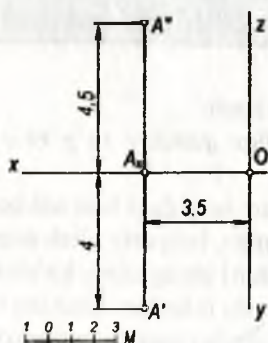
tenglilarni yozish mumkin.

Demak, A nuqtaning dekart va aksonometrik koordinatalari orasidagi bog'lanishni quyidagicha yozishimiz mumkin:

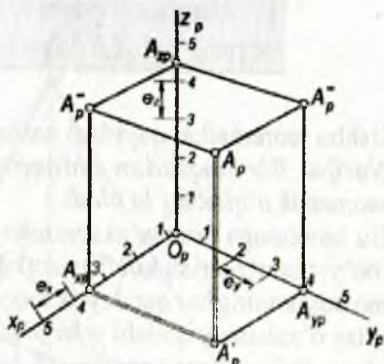
$$\frac{x_p}{x} = k_x \text{ yoki } x_p = k_x x, \quad \frac{y_p}{y} = k_y \text{ yoki } y_p = k_y y, \quad \frac{z_p}{z} = k_z \text{ yoki } z_p = k_z z. \quad (3)$$

Aksonometrik o'qlarning vaziyatlari va shu o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari berilgan bo'lsa, fazodagi har qanday nuqtaning aksonometriyasini yasash mumkin. Buning uchun nuqtaning x , y va z koordinatalarini mos o'zgarish koeffitsientlariga ko'paytirib, aksonometrik o'qlar bo'yicha (yoki ularga parallel) o'lchab qo'yiladi va uch bo'g'inli koordinatalar siniq chizig'ining aksonometriyasi yasaladi. Masalan, fazodagi koordinatalari 3,5; 4 va 4,5 sonlarga teng bo'lgan A nuqtaning aksonometriyasini yasash kerak bo'lsin (13.2-a rasm). Buning uchun $O_p x_p$ o'qiga O_p nuqtalardan boshlab $O_p A_{xp} = 3,5e_x$ kesma o'lchab qo'yiladi va A_{xp} nuqta belgilab olinadi (13.2-b rasm). Bu nuqtadan $O_p y_p$ o'qiga parallel qilib $A_{xp} A'_p = 4e_y$ kesma va hosil bo'lgan A'_p nuqtadan $O_p z_p$ o'qiga parallel qilib $A'_p A''_p = 4,5e_z$ kesma o'lchab qo'yiladi. Hosil bo'lgan A''_p nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi, A''_p esa A nuqtaning ikkilamchi proyeksiyasi bo'ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar uch turga bo'linadi:



a)



b)

13.2-rasm.

1. Uchala o'qlar bo'yicha o'zgarish ko'effitsientlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $k_x = k_y = k_z$ bo'lganda hosil bo'lgan aksonometriya *izometrik proyeksiyalar* deyiladi.
2. O'zgarish ko'effitsientlaridan ikkitasi o'zaro teng bo'lib, uchinchi ulardan farqli bo'lsa, ya'ni $k_x = k_y \neq k_z$, $k_x = k_z \neq k_y$ yoki $k_y = k_z \neq k_x$ bo'lganda hosil bo'lgan aksonometriya *dimetrik proyeksiyalar* deyiladi.
3. Uchala o'qlar bo'yicha o'zgarish ko'effitsienti turlicha bo'lgan aksonometriyalar ($k_x \neq k_y \neq k_z$ bo'lsa) *trimetrik proyeksiyalar* deyiladi.

13.3-§. Aksonometriyaning asosiy teoremasi

Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish ko'effitsientlari ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin. Aksonometrik proyeksiyalardagi bunday xususiyatni 1853-yilda avstriyalik matematik Karl Polke (1810–1876) aniqlab, quyidagi xulosaga kelgan:

Teorema. Tekislikka tegishli bitta nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy uchta kesma fazoda joylashgan bitta nuqtadan chiquvchi o'zaro perpendikulyar va teng uchta kesmaning parallel proyeksiyasi bo'lishi mumkin.

1864-yilda K. Polkening shogirdi G.A. Shvars bu teoremani umumlashtirdi va uning sodda isbotini berdi. Keyinchalik aksonometriyaning Polke–Shvars nomi bilan yuritiladigan bu asosiy teoremasi quyidagicha ta'riflanadi:

Teorema. Diagonallari bilan berilgan har qanday tekis to'rtburchakni ixtiyoriy olingan tetraedrga o'xshash tetraedning parallel proyeksiyasi deb qabul qilish mumkin.

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Bir nuqtadan chiqqan uchta har qanday to'g'ri chiziq aksonometrik o'qlar bo'la oladi.

Bu teoreмага binoan aksonometriya o'qlari orasidagi burchaklarni va ular bo'yicha o'zgarish ko'effitsientlarini, umuman, ixtiyoriy olish mumkin. Ammo buyumning har qanday aksonometrik tasviri uning tabiiy ko'rinishiga butunlay o'xshamay qolishi yoki juda oz o'xshashi mumkin. Shuning uchun ham buyumning aksonometriyasi tabiiy ko'rinishiga mumkin qadar ko'proq o'xshash bo'lishi hamda aksonometriyani osonroq yasash maqsadida amalda aksonometriyaning ba'zi xususiy turiarigina qo'llaniladi. Ular *standart aksonometrik proyeksiyalar* deb yuritiladi. Bunday aksonometrik proyeksiyalar kitobning 13.7 va 13.8-§ida ko'riladi.

13.4-§. O'zgarish koeffitsientlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o'zaro bog'lanish

Aksonometriyaning asosiy teoremasiga asosan aksonometrik proyeksiyalar o'qlari va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlarini ixtiyoriy olish mumkin. Ammo ular bir-biri bilan o'zaro uzviy bog'liq bo'ladi.

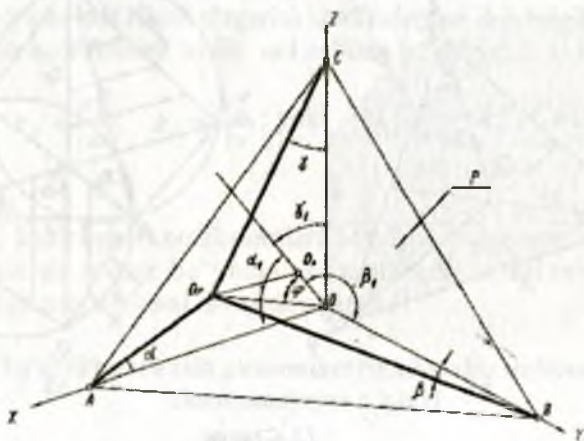
Ox , Oy va Oz koordinatalar o'qlarini P aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga φ burchak ostida proyeksiyalaymiz (13.3-rasm). Bunda koordinatalar boshi O nuqtaning P tekislikdagi proyeksiyasi O_p bo'ladi. Bunday qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalashning proyeksiyalanish burchagi φ ni chizmada hosil qilish uchun O nuqtadan P tekislikka OO_p perpendikulyarni tushiramiz. OO_p va O_pO_0 to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak proyeksiyalash burchagi bo'ladi.

1-teorema. Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari kvadratlarning yig'indisi 2 soni bilan proyeksiyalash burchagi kotangensi kvadratining yig'indisiga teng.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi. \quad (1)$$

Ushbu teoremaning isboti Sh.Murodov va boshqalarning «Chizma geometriya kursi» darsligida (1988-y.) keltirilgan.

2-teorema. To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalashda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari kvadratlarning yig'indisi 2 ga teng.



13.3-rasm.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2. \quad (2)$$

Isboti. 13.4-a, b rasmda P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi va OXYZ dekart koordinatalar sistemasi keltirilgan.

O koordinatalar boshining P tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi O_p nuqta A, B, C nuqtalar bilan tutashtirilsa, O_pA , O_pB , O_pC aksonometriya o'qlari hosil bo'ladi. Bu o'qlarning Ox , Oy va Oz hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α , β va γ bilan belgilaymiz. Bunda OO_pA , OO_pB , OO_pC lar to'g'ri burchakli uchburchaklar bo'lganligi uchun

$$O_pA:OA = \cos \alpha, O_pB:OB = \cos \beta \text{ va } O_pC:OC = \cos \gamma \quad (3)$$

bo'ladi.

OO_p proyeksiyalash yo'nalishi bilan Ox , Oy va Oz o'qlar orasidagi burchaklar α_1 , β_1 va γ_1 yo'naltiruvchi burchaklar deyiladi.

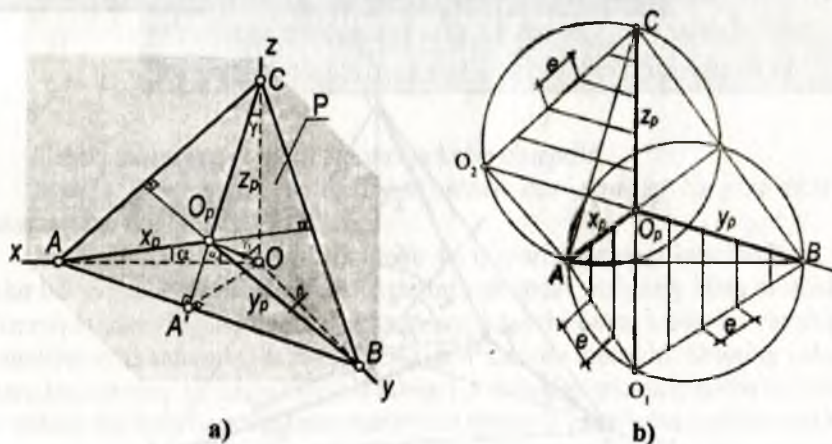
Analitik geometriyadan ma'lumki, yo'naltiruvchi burchaklar kosinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng, ya'ni:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1. \quad (4)$$

Chizmadan ko'rinib turibdiki, $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$, $\beta_1 = 90^\circ - \beta$ va $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma$ bo'lgani uchun ular (4) ifodaga qo'yib soddalashtirilsa,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \quad (5)$$

bo'ladi.



13.4-rasm.

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$ va $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma$ ekanligini e'tiborga olgan holda (5) ifodani soddalashtirishdan so'ng quyidagicha yozish mumkin:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2. \quad (6)$$

$k_x=O_pA:OA=\cos \alpha$; $k_y=O_pB:OB=\cos \beta$ va $k_z=O_pC:OC=\cos \gamma$ bo'lgani uchun (2) ifodaning to'g'riligi isbotlandi.

To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalarda keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari. Aksonometrik masshtablardan foydalanmasdan aksonometrik proyeksiyalar yasash juda ko'p vaqtni oladi. Chunki dekart koordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan har bir kesma aksonometriyalarning uzunliklarini hisoblab topishga to'g'ri keladi. Shuning ... keltirilgan o'zgarish koeffitsientlaridan foydalaniladi. Masalan, ixtiyoriy to'g'ri burchakli trimetrik proyeksiyalar quyidagi o'zgarish koeffitsientlari bilan berilgan bo'lsin:

$$k_x=0,92, k_y=0,47, k_z=0,96,$$

bu (2) ifodaga qo'yilsa,

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=(0,92)^2+(0,47)^2+(0,96)^2=1,9889\approx 2$$

hosil bo'ladi.

O'qlar bo'yicha natural (aniq) o'zgarishni (3) koeffitsientlar $\frac{1}{0,92} = 1,09$ ga ko'paytirsak, $k_x=0,92\cdot 1,09=1,0028$, $k_y=0,47\cdot 1,09=0,5123$, $k_z=0,96\cdot 1,09=1,0464$ bo'ladi. Bularni yaxlitlab, $k_x^k=1$, $k_y^k=0,5$ va $k_z^k=1$ deb olsak, $k_x^k=k_x\cdot 1,09$, $k_y^k=k_y\cdot 1,09$, $k_z^k=k_z\cdot 1,09$ bo'ladi. Bunda k_x^k , k_y^k va k_z^k o'qlar bo'yicha keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari deb belgilangan. Bunda 1,09 keltirish koeffitsienti bo'lib, uni m bilan belgilaymiz. U holda

$$k_x = \frac{k_x^k}{m}, \quad k_y = \frac{k_y^k}{m}, \quad k_z = \frac{k_z^k}{m} \quad \text{yoki} \quad (k_x^k)^2 + (k_y^k)^2 + (k_z^k)^2 = 2m^2$$

hosil bo'ladi.

Demak, keltirilgan koeffitsientlari bo'yicha bajarilgan aksonometrik proyeksiyalarda o'qlar bo'yicha aksonometrik masshtablar keltirish koeffitsientiga proporsional ravishda o'zgaradi.

13.5-§. To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi va aksonometriya o'qlari

Dekart koordinatalar sistemasi OXYZ da P aksonometriya tekisligini joylashtirganda u koordinata tekisliklari bilan kesishib, ABC uchburchakni

hosil qiladi (13.4-a rasm). Bu uchburchak aksonometriyada *izlar uchburchagi* deb yuritiladi.

1-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari *izlar uchburchagining* balandliklari bo'ladi.

Isboti. Oz koordinatalar o'qi XOY tekislikka perpendikulyar va $OO_p \perp P$ bo'lganligi sababli $A'OC$ uchburchak tekisligi XOY va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi. $\Delta A'OC \perp XOY$ bo'lganligi uchun $A'C \perp AB$ yoki $z_p \perp AB$ bo'ladi. Xuddi shuningdek, $y_p \perp AC$ va $x_p \perp BC$ ekanligini ham isbot qilish mumkin.

2-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada *izlar uchburchagi* o'tkir burchakli uchburchakdir.

Isboti. XOY, XOZ va YOZ koordinatalar tekisliklari to'g'ri burchakli uchyoqlikni hosil qiladi (13.4-a rasm). Bu uchyoqliklarning P tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan ΔBC uchburchakda $A'C \perp AB$ bo'lishi 1-teoremadan ma'lum. Demak, $\angle A'AC$ uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli $\angle CAA' < 90^\circ$ bo'ladi. Shuningdek, $\angle A'BC < 90^\circ$ va $\angle ACB < 90^\circ$ bo'ladi.

3-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari orasidagi burchaklar o'tmas burchaklardir.

Isboti. 1-teoremada aksonometriya o'qlari *izlar uchburchagining* balandliklari, 2-teoremada esa *izlar uchburchagining* o'tkir burchakli bo'lishi isbot qilingan edi. Planimetriyadan ma'lumki, har qanday o'tkir burchakli uchburchakning balandliklari o'zaro o'tmas burchak ostida kesishadi.

To'g'ri burchakli aksonometriyada *izlar uchburchagi* teng tomonli uchburchak bo'lsa, bunday aksonometriya *izometriya* bo'ladi, teng yonli uchburchak bo'lsa — *dimetriya*, tomonlari har xil bo'lgan uchburchak bo'lsa, *trimetriya* bo'ladi.

Izlar uchburchagi ABC berilgan bo'lsa, $O_p A$, $O_p B$ va $O_p C$ kesmalarning uzunliklarini aniqlash mumkin (13.4-b rasm). *Izlar uchburchagida* x_p , y_p va z_p o'qlar o'tkazilgan. Bunday chizmani XOY, XOZ, YOZ tekisliklar bilan ifodalangan uchyoqlikning P tekislikka to'g'ri burchakli proyeksiyasi deyish mumkin (13.4-a rasmga qarang). Jipslashtirish usulidan foydalanib, $AO_p B$ uchburchakning proyeksiyasiga ko'ra uning haqiqiy kattaligi $AO_p B$ ni yasaymiz. Buning uchun $\angle AOB = 90^\circ$ bo'lganligi tufayli diametri AB ga teng bo'lgan aylana chizamiz. O_p nuqtadan ABga perpendikulyar tushirib, O_p nuqta ni belgilab olamiz. Uni A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz.

$\frac{O_P A}{O_1 A}$ va $\frac{O_P B}{O_1 B}$ nisbatlar x_p va y_p o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari hisoblanadi:

$$k_x = \frac{O_P A}{O_1 A}, \quad k_y = \frac{O_P B}{O_1 B}.$$

Xuddi shuningdek, O_2 nuqtani aniqlab, z_p o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_z = \frac{O_P C}{O_2 C}$ ni aniqlash mumkin. Agar $AO_1 B$ va $AO_2 C$ uchburchaklarning tomonlariga O_1 va O_2 nuqtalardan boshlab natural uzunlik birliklarini qo'ysak, ularning mos aksionometrik o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlash bilan aksionometrik masshtablarni yasash mumkin.

13.6-§. Aylananing aksionometriyasi

Aylana tekisligining aksionometriya tekisligiga nisbatan vaziyatiga qarab aylana aksionometriyasi ellips, aylana yoki to'g'ri chiziqli kesmasidan iborat bo'lishi mumkin. Umumiy hollarda aylananing aksionometriyasi ellips bo'ladi.

Ta'rif. Aylananing har qanday o'zaro perpendikulyar diametrlarining aksionometriyasi — ellipsning qo'shma diametrlaridan iborat bo'ladi.

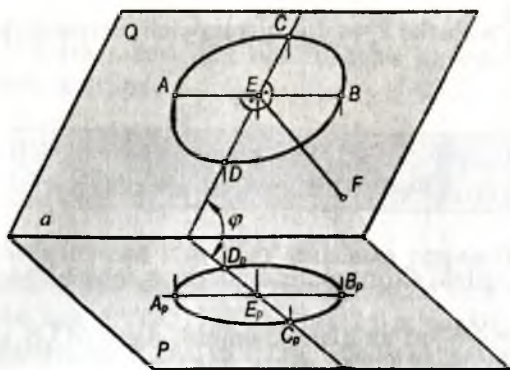
Aksionometriya o'qlariga parallel bo'lgan qo'shma diametrning uzunligi aylana diametrining mos o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientiga ko'paytirilganiga teng.

Qiyshiq burchakli aksionometriya ellips kichik o'qining uzunligi 0 (nol) dan aylana diametri d gacha, katta o'qining uzunligi d dan ∞ gacha o'zgarishi mumkin.

To'g'ri burchakli aksionometriyalarda ellips katta o'qining uzunligi d ga, kichik o'qining uzunligi $d \cos \varphi$ ga teng. Bu yerda, φ — aylana tekisligi bilan aksionometrik proyeksiyalar tekisligi orasidagi burchak.

Aylananing to'g'ri burchakli aksionometriyasi. Chizmachilikda ko'p hollarda aylananing to'g'ri burchakli aksionometriyasi bo'lgan ellipsni chizish uchraydi.

Aylana tekisligi Q aksionometrik proyeksiyalar tekisligi P bilan o'zaro o'tkir burchak φ hosil qilib kesishganda aylananing aksionometriyasi ellips bo'ladi (13.5-rasm). Bu ellipsning katta o'qi $A_p B_p$ aylananing AB diametriga, kichik o'qi $C_p D_p$ esa aylana diametrining φ burchak kosinusiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi, ya'ni:



13.5-rasm.

$$A_p B_p = AB, C_p D_p = CD \cos \varphi.$$

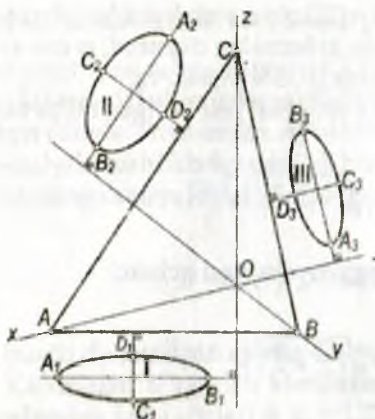
Parallel proyeksiyalarning xossalriga ko'ra, ellipsning $A_p B_p$ katta o'qi Q va P tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i a ga parallel, $C_p D_p$ kichik o'qi esa bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi, ya'ni:

$$A_p B_p \parallel a, C_p D_p \perp a.$$

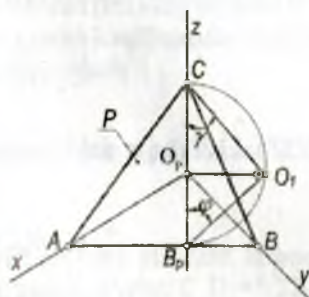
Shunday qilib, aylananing aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun aylana markazi E nuqtaning proyeksiyasi E_p nuqta yasaliib, bu nuqtadan ellipsning katta va kichik o'qlari o'tkaziladi. Ellipsni uning katta va kichik o'qlari bo'yicha yasashning ko'p usullari mavjud.

Ko'pincha H, V, W yoki ularga parallel tekisliklarda yotuvchi aylanalar aksonometrik proyeksiyalarini yasashga to'g'ri keladi. Bunday aylanalar aksonometriyalarini yasashni batafsil ko'rib chiqamiz.

Ma'lumki, to'g'ri burchakli aksonometriyada P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi H, V, W tekisliklar bilan kesishadi. P tekislikning bu tekisliklar bilan kesishish chiziqlari izlar uchburchagining tomonlaridan iborat bo'ladi. Demak, H tekislikka tegishli aylanani P tekislikka proyeksiyalashdan hosil bo'ladigan I ellipsning katta o'qi izlar uchburchagining AB tomoniga, V tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi — II ellipsning katta o'qi AC tomoniga, W tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi — III ellipsning katta o'qi BC tomoniga parallel bo'ladi (13.6-rasm). To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari izlar uchburchagining balandligidan iborat bo'ladi. Shunga ko'ra, I ellips uchun $A_1 B_1 \perp OC$ (Oz), II ellips uchun $A_2 B_2 \perp OB$ (Oy), III ellips uchun $A_3 B_3 \perp OA$ (Ox) bo'ladi. Ellipsning $C_1 D_1$, $C_2 D_2$ va $C_3 D_3$ kichik o'qlari $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ va $A_3 B_3$ katta o'qlariga doim mos ravishda perpendikulyar bo'ladi.



13.6-rasm.



13.7-rasm.

To'g'ri burchakli aksonometriyada ellipsning katta o'qi doim tegishli aylanalarning diametrlariga teng bo'ladi, kichik o'qlari aksonometriyaning turiga qarab o'zgaradi. Kichik o'qining uzunliklarini hisoblash mumkin. Buning uchun 13.7-rasmga murojaat qilamiz. Oz o'qidan o'tuvchi va izlar uchburchagining AB tomoniga perpendikulyar qilib o'tkazilgan tekislik P tekislikni CB to'g'ri chiziq bo'yicha, XOY tekislikni esa eng katta og'ma chizig'i $O_p B_p$ bo'yicha kesib o'tadi. Natijada $CO_1 B_p$ to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilinadi. Bu uchburchakning $CO_1 B_p$ jipslashgan vaziyati rasmda ko'rsatilgan. Buning uchun diametri CB_p kesma bo'lgan yarim aylana chiziladi va O_1 nuqtadan Oz o'qqa perpendikulyar chiqarib, uning yarim aylana bilan kesishish nuqtasi O_1 belgilab olinadi. O_1 nuqtani C va B_p nuqtalar bilan tutashtirib, γ va φ burchaklar aniqlanadi. Bu burchaklar mos ravishda P tekislik bilan Oz o'qi va XOY tekislik orasidagi burchaklar bo'ladi. Bundan Oz o'qi bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_z = \cos \gamma$ ekanligi ma'lum. XOY tekislikning eng katta qiyalik chizig'i $O_1 B_p$ ning yo'nalishi bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_{XOY} = \cos \varphi$ bo'ladi. To'g'ri burchakli $CO_1 B_p$ uchburchakdan $\cos^2 \varphi = 1 - \cos^2 \gamma$ bo'lgani uchun

$$k_{XOY} = \sqrt{1 - k_z^2}$$

bo'ladi.

Xuddi shuningdek, XOZ va YOZ tekisliklarining eng katta qiyalik chiziqlari yo'nalishlari bo'yicha o'zgarish koeffitsientlarining qiymatlarini keltirib chiqarish mumkin:

$$k_{XOZ} = \sqrt{1 - k_y^2}, \quad k_{YOZ} = \sqrt{1 - k_x^2}.$$

Yuqorida ellipsning kichik o'qi $C_p D_p = CD \cos \varphi$ ekanligini ko'rib chiqqan edik. Bunda CD – proyeksiyalanayotgan aylananing diametri, φ esa aylana tekisligi bilan P tekislik orasidagi burchakdir. Shunga ko'ra,

- XOY tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi bo'lgan ellips uchun:

$$C_p D_p = CD \sqrt{1 - k_z^2};$$

- XOZ tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi uchun:

$$C_p D_p = CD \sqrt{1 - k_y^2};$$

- YOZ tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi uchun:

$$C_p D_p = CD \sqrt{1 - k_x^2}$$

bo'ladi.

13.7-§. To'g'ri burchakli standart aksonometriyalar

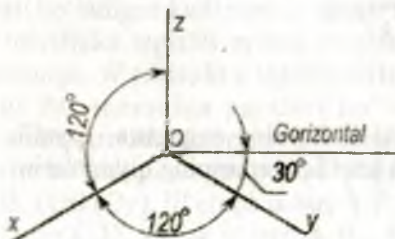
13.7.1. To'g'ri burchakli standart izometriya. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometrik proyeksiyalar tekisligi P koordinatalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, izlar uchburchagi teng tomonli bo'lib, uning balandligi bissektrisasi ham bo'ladi. Shuning uchun to'g'ri burchakli izometriyada aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar 120° ga teng (13.8-rasm). Bu holda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_y = k_z$

bo'lib, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2$ tenglikdan $3k_x^2 = 2$ yoki $k_x = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82$ hosil

bo'ladi. Demak, $k_x = k_y = k_z = 0,82$ bo'lib, u *natural o'zgarish koeffitsienti*

deyladi. Buyumning aniq izometriyasini yasash uchun dastlab undagi har bir nuqtani x, y, z koordinatalari yoki uning eni, bo'yi va balandligini $0,82$ ga ko'paytirib chizishga to'g'ri keladi.

Lekin buyumlarnig to'g'ri burchakli izometriyasini yasashda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari 1 ga teng qilib olinsa, chizish sur'ati tezlashadi. Bu holda $k_x = k_y = k_z = 1$ bo'lib, ular izometriyada keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari deb



13.8-rasm.

yuritiladi. Bunda keltirish koeffitsienti $m = \frac{1}{0,82} = 1,22$ ga teng bo'lib, buyunning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,22 marta kattalashadi.

13.9-rasmda kub va uning yoqlariga ichki chizilgan aylanalarning izometriyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan. Aylananing tekisliklari (kubning yoqlari) H , V va W proyeksiyalar tekisliklariga parallel. Natural o'zgarish koeffitsientlari 0,82 bo'yicha ellipslarning katta va kichik o'qlari quyidagicha bo'ladi:

$$A_p B_p = d, C_p D_p = \sqrt{1 - 0,82^2} d = 0,58d,$$

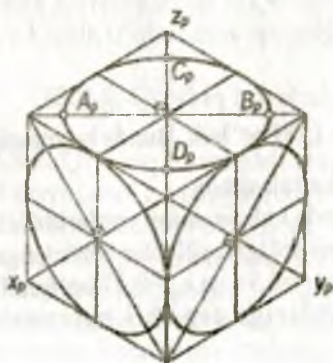
bunda d – berilgan aylana diametri.

Keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha standart izometriyada ellipslarning katta o'qlari $A_p B_p = 1,22d$ ga, kichik o'qlari $C_p D_p = 1,22 \cdot 0,58d = 0,71d$ ga teng bo'ladi.

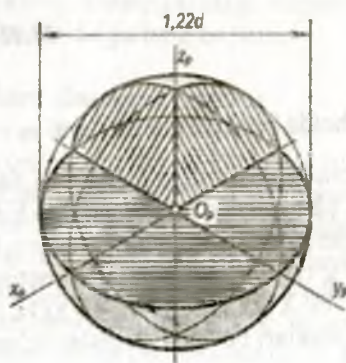
Shunday qilib, diametri d ga teng bo'lgan aylanalar gorizontaal, frontal va profil yoki ularga parallel bo'lgan tekisliklarda joylashgan bo'lsa, bunday aylanalarning izometriyasidagi ellipslarning $A_p B_p$ katta o'qi d ga, $C_p D_p$ kichik o'qi esa $0,58d$ ga teng, keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha esa $A_p B_p = 1,22d$, $C_p D_p = 0,71d$ bo'ladi.

13.10-rasmda to'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan sferaning diametri $1,22d$ ga teng. Bunda d – sferaning diametri.

13.7.2. To'g'ri burchakli standart dimetriya. Agar aksonometrik proyeksiyalar tekisligi koordinatalar tekisliklaridan ikkitasi bilan bir xil burchak hosil qilsa, bunday aksonometriya to'g'ri burchakli dimetriya deyiladi. Bunda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_y \neq k_z$, $k_x = k_z \neq k_y$, yoki $k_x = k_y = k_z$ bo'lishi mumkin.



13.9-rasm.



13.10-rasm.

To'g'ri burchakli dimetriyaning juda ko'p turlari mavjud bo'lib, ulardan aksonometrik o'qlarning o'zaro joylashuvi 13.11-rasmda ko'rsatilgan vaziyatdagi holati standartda tavsiya qilingan. Bu o'qlarni α va β burchaklarning

tangenlari orqali oson yasash mumkin, chunki $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{8}$. Standart

dimetriyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlarining $k_x = k_y = k_z$ holi qabul qilinib, $k_x = k_y = 2k_z$ yoki $k_z = 1/2 k_x$ deb olingan. U holda $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2$ tenglikka

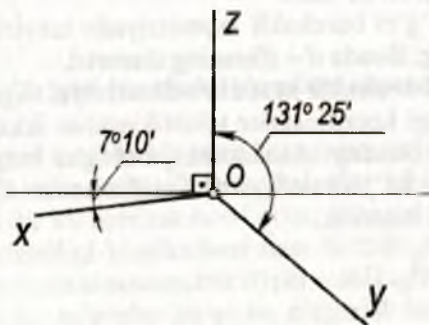
yuqoridagi qiymatlarni qo'yib, $k_x^2 + k_x^2 + \frac{k_x^2}{4} = 2$ yoki $9k_x^2 = 8$ ga ega

bo'lamiz. Bundan $k_x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$ ni hosil qilamiz. Demak, $k_x \approx 0,94$;

$k_y \approx 0,94$; $k_z \approx 0,47$ hosil bo'ladi.

Amaliyotda to'g'ri burchakli dimetrik proyeksiyalarni yasash uchun quyida keltirilgan o'zgarish koeffitsientlaridan foydalaniladi:

$$k_x = 1, k_y = 1, k_z = 0,5.$$



13.11-rasm.

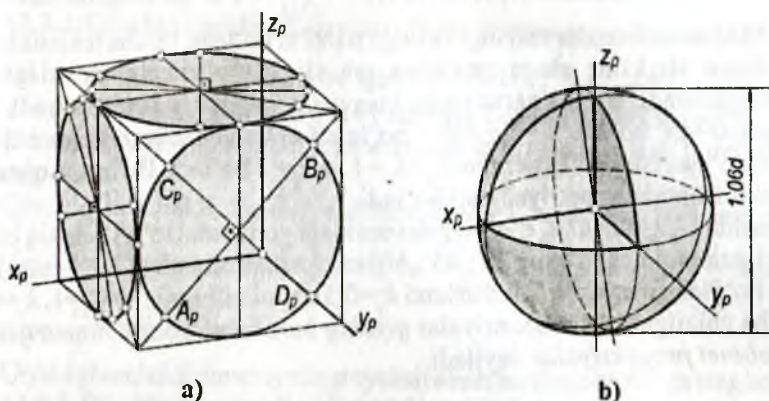
U holda keltirish koeffitsienti $m = \frac{1}{0,94} = 1,06$ bo'ladi. Bunda buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,06 marta kattalashadi.

13.12-a rasmda to'g'ri burchakli dimetriyada kub va uning yoqlarida ichki chizilgan aylanalarning dimetrik proyeksiyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan.

To'g'ri burchakli standart dimetriyada $k_x = k_y = 0,94$ va $k_z = 0,47$ bo'lganligi uchun $H(XOY)$ hamda $W(YOZ)$ tekisliklariga tegishli aylananing proyeksiyalari bo'lgan ellipslar uchun

$$C_p D_p = CD \sqrt{1 - 0,94^2} = 0,33d$$

bo'ladi. $V(XOZ)$ tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi ellips uchun esa $C_p D_p = d \sqrt{1 - 0.47^2} = 0.88d$ bo'ladi.



13.12-rasm.

Keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha XOY va YOZ tekisliklariga parallel bo'lgan yoqlardagi ellipslar (aylananing dimetriyasi) uchun katta o'qlar $A_p B_p = 1.06d$, kichik o'qlar $C_p D_p = 0.35d$ bo'ladi. Chunki $C_p D_p = 1.06 \cdot 0.33d$. XOZ tekislikka parallel bo'lgan yoqdagi ellips uchun $A_p D_p = 1.06d$, $C_p D_p = 0.93d$. Chunki $C_p D_p = 1.06 \cdot 0.88d = 0.93d$.

Sferaning to'g'ri burchakli dimetriyasini keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha chizish 13.12-b rasmda ko'rsatilgan. Sferaning dimetriyasi D_1 diametrli aylana bo'lib, $D_1 = 1.06d$ ga teng.

Diametri d ga teng aylanalar gorizontaal va profil tekisliklarda joylashgan bo'lsa, ularning dimetriyasidagi ellipsning katta va kichik o'qlari mos ravishda $1.06d$ va $0.35d$ ga teng. Agar diametri d ga teng aylana frontal tekislikda joylashgan bo'lsa, bunday aylananing dimetriyasidagi ellipsning katta va kichik o'qlari mos ravishda $1.06d$ va $0.94d$ ga teng bo'ladi.

13.8-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar

13.8.1. Qiyshiq burchakli standart frontal dimetriya. Buyumlarning yaqqol tasvirlarini qiyshiq burchakli aksonometriyada yasash uchun qiyshiq burchakli standart izometriya va dimetriyalardan foydalaniladi. Bunda P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi xususiy holda, ya'ni koordinata tekisliklarining birortasiga parallel qilib olinadi. Bu holda proyeksiyalash yo'nalishini aksonometrik tekislikka perpendikulyar qilib olib bo'lmaydi. Chunki bunda koordinata o'qlaridan biri nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Bu esa tasvir yaqqolligini ta'minlamaydi. Agar P aksonometriya tekisligi XOZ koordinatalar tekisligiga parallel qilib olinsa (13.13-rasm), $O_p x_p \parallel O_x$, $O_p z_p \parallel O_z$

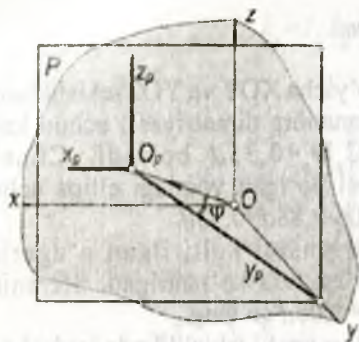
bo'lganligi uchun $O_p x_p$ va $O_p z_p$ o'qlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, bu o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_z = 1$ bo'ladi, k_y esa $OO_p B$ to'g'ri

burchakli uchburchakdan topiladi va $k_y = \frac{OO_p}{OB} = \text{ctg}$ ga teng bo'ladi. Bu

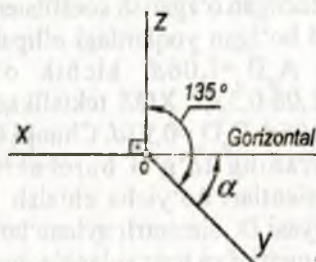
holda XOZ koordinatalar tekisligi va unga parallel bo'lgan barcha tekisliklarda joylashgan shakllar aksonometriya tekisligiga o'zining kattaligicha proyeksiyalanadi. Bu esa narsa yaqqol tasvirini yasashni osonlashtiradi.

Agar $\varphi = 45^\circ$ bo'lsa, $k = \text{ctg } 45^\circ = 1$ bo'lgani uchun aksonometriya o'qlari bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 1$ bo'ladi. Bu holda qiyshiq burchakli frontal izometriya hosil bo'ladi.

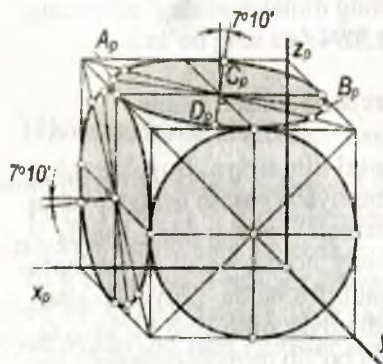
Amalda $O_p y_p$ o'qi $O_p x_p$ o'qining davomidagi gorizontol to'g'ri chiziq bilan hosil qilgan burchagi α ning 30° , 45° , 60° vaziyatlari olinadi (13.14-rasm) va bu o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti $k_y = 0,5$ qabul qilingan. $k_x = k_z = 1$, $k_y = 0,5$ bo'yicha chizilgan aksonometriyalar *qiyshiq burchakli frontal dimetriyalar* yoki *kabinet proyeksiyalar* deyiladi.



13.13-rasm.



13.14-rasm.



13.15-rasm.

Qiyshiq burchakli frontal dimetriyada aksonometriya o'qlarining vaziyati 13.14-rasmida ko'rsatilganidek qabul qilingan, ya'ni $XOZ = 90^\circ$, $YOZ = 135^\circ$. O'zgarish koeffitsientlari esa $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 0,5$ bo'ladi.

13.15-rasmida kub va uning yoqlari-dagi ichki chizilgan aylanalarning aksonometriyalari qiyshiq burchakli frontal dimetrik proyeksiyada tasvirlangan. Bunda XOZ tekislikka parallel yoqda y_p yotgan aylana dimetriyadagi aylanaga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Qolgan yoqlardagi aylanalar ellipslar bo'lib proyeksiyalanadi.

Bu ellipslar o'qlari keltirilgan o'zgarish koeffitsientlari bo'yicha 1,06d va 0,33d ga teng bo'ladi.

13.8.2. Qiyshiq burchakli standart frontal izometriya. Qiyshiq burchakli frontal izometriyada $k_x = k_z = k_y = 1$ bo'lganligi uchun $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$ dan $1^2 + 1^2 + 1^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$ yoki $\operatorname{ctg}^2 \varphi = 1$ bo'ladi, bundan $\varphi = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$.

Demak, qiyshiq burchakli izometriyada φ proyeksiyalash burchagi 45° ga teng ekan.

Qiyshiq burchakli dimetriya uchun $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 0,5$ bo'lgani uchun $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + 1^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$ yoki $\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{4}$, bundan $\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1}{4}$ bo'lib, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 63^\circ$ bo'ladi.

Qiyshiq burchakli dimetriyada proyeksiyalash burchagi $\varphi = 63^\circ$ ga teng bo'ladi.

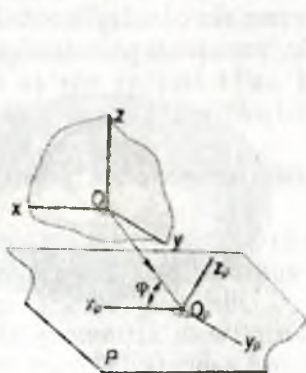
13.8.3. Qiyshiq burchakli gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi). Agar P aksonometriya tekisligi XOY koordinatalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda hosil bo'lgan tasvir gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi) deyiladi (13.16-rasm). Bunda φ burchak ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

O_{x_p} va O_{y_p} o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari $k_x = k_y = 1$ bo'lib, O_{z_p} o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsienti k_z esa 0,7 dan 1 gacha deb olinishi mumkin. Ko'p hollarda $k_z = 1$ deb olinadi.

Zenit aksonometriyasidan juda katta qurilish maydonida joylashgan binolar, yo'llar, aerodromlar va hokazolarning o'zaro joylashuvini kichik masshtabda ko'rsatishda foydalaniladi. 13.17-rasmda minoraning zenit aksonometriyasi tasvirlangan. Minoraning plani α burchakka burilgan.

13.9-§. Aylanish sirtlarining ocherklarini aksonometriyada yasash

13.9.1. Parallellar usuli. Bu usul asosan aylanish o'qi bo'ylab cho'zilgan aylanish sirtlarining aksonometriyalarini yasashda qo'llaniladi. 13.18-a



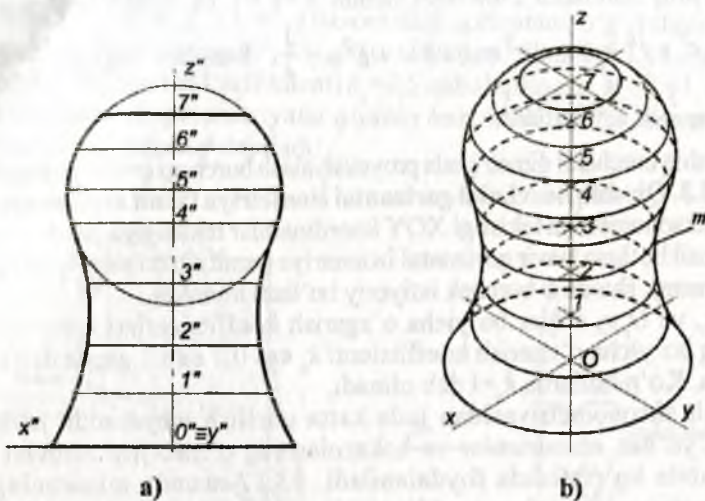
13.16-rasm.



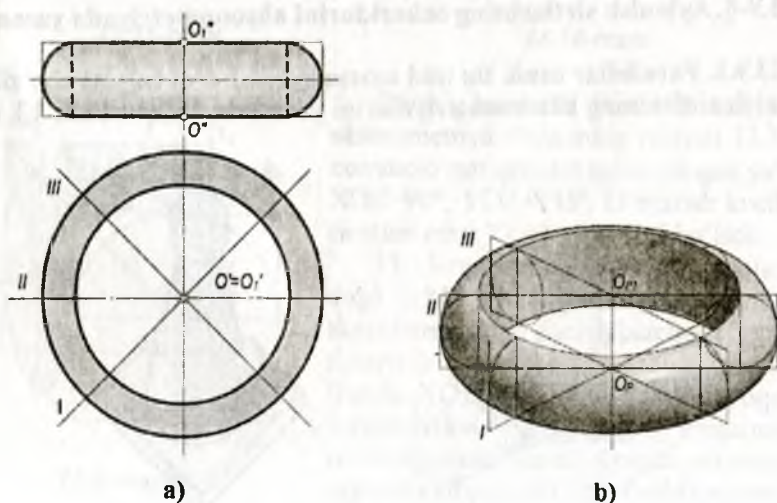
13.17-rasm.

rasmdagi chizmada berilgan aylanish sirtining bir necha parallellari (aylanalari) o'tkaziladi. Bu parallellarning aksonometriyalari bo'lgan ellipslar chiziladi. Bu ellipslarni o'rab oluvchi m egri chiziq aylanish sirtining ocherki bo'ladi. Sirtning aksonometriyasi 13.18-b rasmda to'g'ri burchakli izometriyada yasalgan.

13.9.2. Meridianlar usuli. Aylanish o'qlari bo'yicha siqiq bo'lgan sirtlarning aksonometriyasini yasashda bu usuldan foydalanish mumkin. Sirtning bir necha meridianlari o'tkazilib, ularning aksonometriyasi yasaladi. 13.19-a rasmda tor sirtining aksonometriyasi to'g'ri burchakli izometriyada



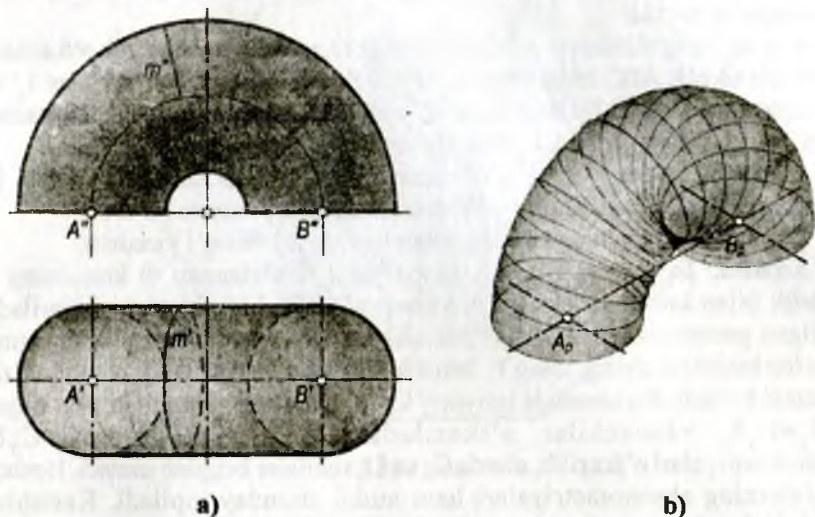
13.18-rasm.



13.19-rasm.

ko'rsatilgan. Bunda tor meridianlari(aylanalar)ning aksonometriyalari bo'lgan ellipslarni o'rab oluvchi chiziq aylanish sirtining ocherkini ifodalaydi.

13.20-a rasmda berilgan yarim tor (halqa) ning aksonometriyasini yasash 13.20-b rasmda to'g'ri burchakli izometriyada bajarilgan.



13.20-rasm.

Bunday torning aksonometriyasini yasash uchun dastlab H tekislikka tegishli va markazlari $A(A'', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalarda bo'lgan ikki yasovchi aylananing aksonometriyalari bo'lgan ellipslar chiziladi. So'ngra bu aylanalar markazlari A_p va B_p nuqtalar orqali o'tuvchi frontal vaziyatdagi $A''B''$ yarim aylananing aksonometriyasi chiziladi. Bu yarim aylana tor yasovchilari markazlari harakat qiluvchi chiziq bo'lib, unda bir necha (yetarli miqdorda) nuqtalar olinadi. Markazlari mazkur nuqtalarda bo'lgan $m(m', m'')$ kabi yasovchi aylanalarning aksonometriyalari chiziladi. Ushbu ellipslarni o'rab(qamrab) oluvchi chiziq torning konturi hisoblanadi. Yasovchi aylanalarning aksonometriyalari o'rniqa ushbu markazlar bo'yicha radiusi yasovchi aylana radiusi bilan bir xil bo'lgan sferalarning aksonometriyalari(aylanalar) chizilsa ham bo'ladi.

13.10-§. Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish

Aksonometrik proyeksiyalarda geometrik shakllarning o'zaro joylashuviga qarab turli pozitsion masalalar ortogonāl proyeksiyalardagi qoidalarga asosan yechiladi.

Bunda geometrik shakllarning aksonometriyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalaridan biri berilishi kerak. Ko'pincha shakllarning gorizontāl tekislikdagi ikkilamchi proyeksiyalaridan foydalaniladi.

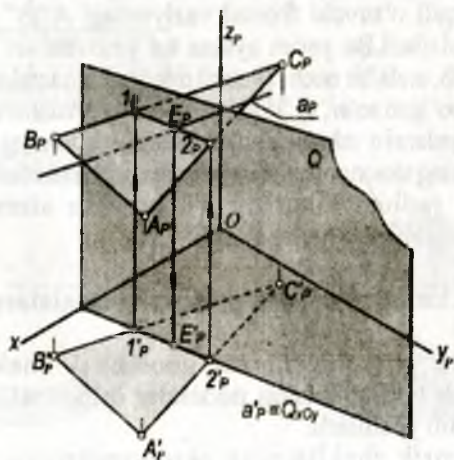
1-masala. Berilgan a to'g'ri chiziqlarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin.

Yechish. ABC uchburchak tekisligining $A_p B_p C_p$ va a to'g'ri chiziqlarning a_p proyeksiyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalari $A_p' B_p' C_p'$, a_p' berilgan bo'lsin (13.21-rasmi). Ularning kesishish nuqtasini yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

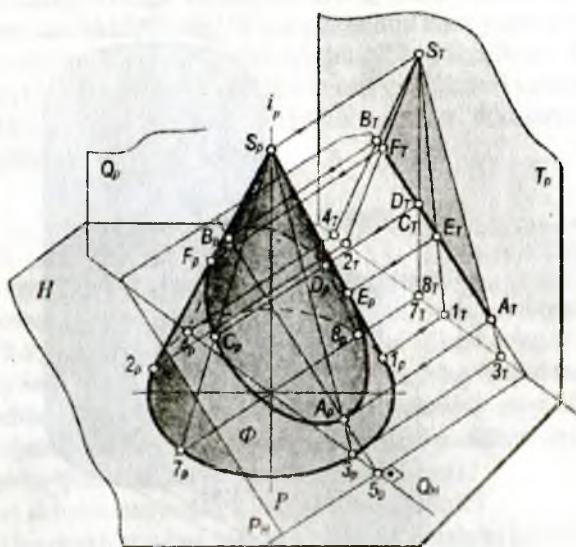
- a_p (a_p') to'g'ri chiziq orqali $Q(O_p)$ tekislik $O_p z_p$ o'qqa parallel qilib o'tkaziladi;
- bu tekislik ABC tekislikning $A_p' B_p' C_p'$ ikkilamchi proyeksiyasi bilan 1_p va 2_p nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalardan $O_p z_p$ o'qqa parallel chiziqlar chiqarib hamda 1_p va 2_p nuqtalarni $B_p C_p$ va $A_p C_p$ tomonlar ustida belgilab, o'zaro tutashtiriladi;
- so'ngra a_p va $1_p 2_p$ to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishuv nuqtasi E_p belgilab olinadi. Uning ikkilamchi proyeksiyasi E_p' nuqta bo'ladi.

2-masala. Konusning tekislik bilan kesishish chizig'i yasalsin.

Yechish. To'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan Φ konusning P tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash algoritmi quyidagicha bajariladi: berilgan geometrik shakllar $T \perp P$ tekislikka proyeksiyalanadi (13.22-rasm). U holda kesishish chizig'ining T_p tekislikdagi proyeksiyasi $A_p B_p$ to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi. Bu kesmada ixtiyoriy $C_T \equiv D_T$ nuqtalarni belgilab, ular orqali $C_T 7_T \equiv C_T 8_T$ yasovchilar o'tkaziladi. Bu yasovchilarning $C_T 8_T$ aksonometriyalari o'tkazilib, ularda C_T va D_T nuqtalar belgilab olinadi. Boshqa nuqtalarning aksonometriyalari ham xuddi shunday topiladi. Kesishish chizig'ining konus ocherkiga urinish nuqtalari E_p va F_p lar quyidagicha topiladi: konusning ocherkini ifodalovchi $S_1 l$ va $S_2 2_p$ yasovchilarning T_p tekislikdagi $S_1 l_p$ va $S_2 2_p$ proyeksiyalari o'tkaziladi. Ularning $A_p B_p$ kesma bilan kesishish nuqtalari E_T va F_T lar belgilab olinadi. E_T va F_T nuqtalardan teskari yo'nalishda nurlar o'tkazib, ularning mos ravishda $S_1 l_p$ va $S_2 2_p$ yasovchilar



13.21-rasm.



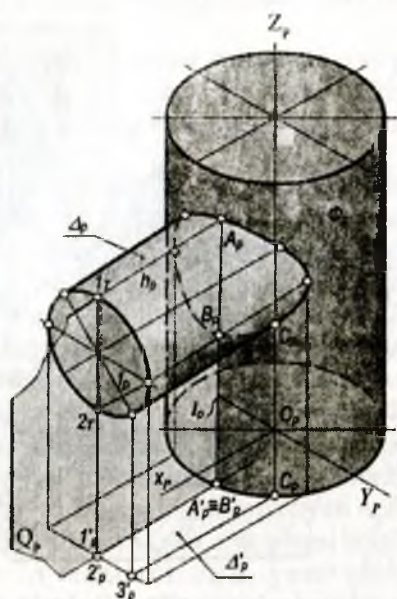
13.22-rasm.

bilan kesishish nuqtalari E_p va F_p lar belgilab olinadi. Kesimning A_p – quyi va B_p – yuqori nuqtalarini ortogonal proyeksiyalarga oid qoidalariga asosanib topish mumkin. Buning uchun konusning i_p o‘qidan o‘tuvchi va berilgan P tekislikka perpendikulyar Q_p tekislikdan foydalanamiz. Bu tekislik konusni S_{p_p} va S_{p_4} yasovchilari, berilgan tekislikni esa 5_6 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. S_{p_3} va S_{p_4} yasovchilarning 5_6 to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan A_p va B_p nuqtalar hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, konusning P tekislik bilan kesishish chizig‘i yasaladi.

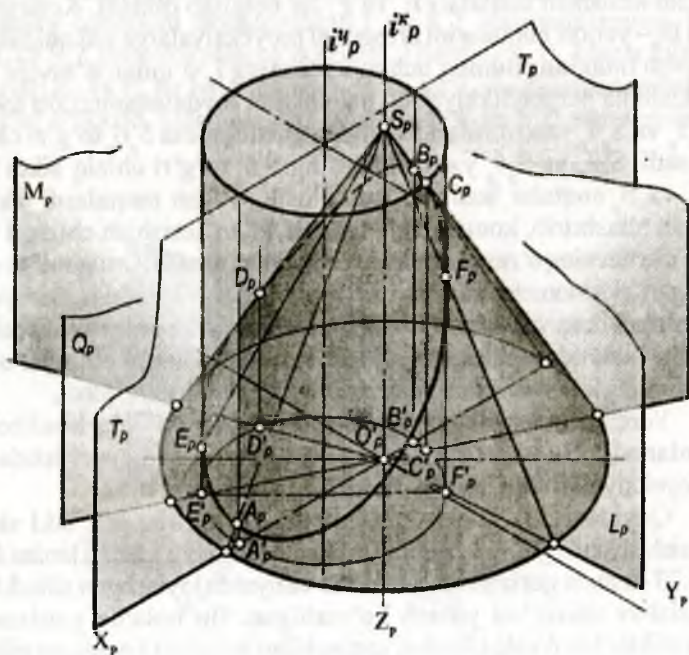
Sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash. Ortogonal proyeksiyalardagi singari aksonometriyada ham sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalaniladi. Bunda kesuvchi tekisliklar berilgan sirtlar bilan oddiy chiziqlar bo‘yicha kesishadi. Bu egri chiziqlar o‘zaro kesishib, sirtlarning kesishish chizig‘iga tegishli nuqtalarni hosil qiladi.

Yordamchi tekislik yasalishi oson bo‘lgan chiziqlar hosil bo‘ladigan qilib tanlanadi. Bu shartga ko‘ra, ba’zi masalalarni yechishda qo‘shimcha proyeksiyalashdan ham foydalanish mumkin.

Quyidagi 13.23 va 13.24-rasmlarda tasvirlangan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanilgan. 13.23-rasmda gorizontaal va vertikal vaziyatda joylashgan silindrlarning o‘zaro kesishuv chizig‘ini yasash ko‘rsatilgan. Bu holatda yordamchi kesuvchi tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo‘yicha kesadigan qilib o‘tkazilgan. Silindrlar yasovchilari o‘zaro kesishib, izlanayotgan egri chiziqqa tegishli nuqtalarni hosil qiladi. 13.24-rasmda esa aylanish o‘qlari o‘zaro parallel bo‘lgan



13.23-rasm.



13.24-rasm.

vertikal vaziyatdagi silindr va konuslarning aksonometriyalari berilgan. Ularning o'zaro kesishish chizig'ini yasash uchun ham yordamchi tekisliklar ularning yasovchilari bo'yicha kesishadigan qilib o'tkazilgan. Bu tekisliklar konus sirtining o'qidan o'tkazilgan. Ular konus va silindrni yasovchilari orqali kesadi. Bu yasovchilarning o'zaro kesishish nuqtalari ikki sirtning kesishish chizig'iga tegishli nuqtalar bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Aksonometrik proyeksiyalar qanday hosil qilinadi?
2. Aksonometriya asosiy teoremasining mohiyati nimadan iborat?
3. O'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsientlarini ta'riflab bering.
4. Haqiqiy va keltirilgan o'zgarish koeffitsientlarining farqini tushuntiring.
5. Izlar uchburchagi nima va u haqidagi teoremlarning qaysi birini bilasiz?
6. Proyeksiyalash burchagi va o'zgarish koeffitsientlari orasida qanday bog'lanish bor?
7. Aylananing aksonometriyasi haqida nimalar bilasiz?
8. Standart aksonometriyaning qanday turlarini bilasiz?
9. To'g'ri burchakli standart izometriya haqida nimalarni bilasiz?
10. To'g'ri burchakli standart dimetriyani ta'riflab bering.
11. Qiyshiq burchakli standart dimetriya (kabinet proyeksiya) haqida nimalar bilasiz?
12. Zenit aksonometrik proyeksiyalar qanday maqsadlarni ko'zlab chiziladi?
13. Aksonometrik proyeksiyalarda pozitsion masalalarni yechish uchun nimalarga e'tibor beriladi?

QISQACHA TARIXIY MA'LUMOTLAR

Chizma geometriya boshqa fanlar singari inson mehnat faoliyati natijasida vujudga kelgan.

Qadimgi inshootlar qoldiqlaridan ma'lum bo'lishicha, miloddan avval ham tasvirlar asosida bajarilgan chizmalardan foydalanilgan. Sanoat va texnika tarmoqlarining rivojlanishi bilan tasvirlarni yasash usullari ham takomillashib borgan.

Bizgacha yetib kelgan fanga taalluqli eng qadimgi yozma manbalardan biri rim arxitektori Mark Vitruviyning (mil.av. I asr) «Arxitektura haqida o'nta kitob» traktatidir. U o'z asarida narsalarning gorizontaal va frontal proyeksiyalarini proyeksion bog'lanishsiz keltirgan.

Uyg'onish davrida arxitektura va tasviriy san'atning jadal rivojlanishi natijasida G'arbiy Yevropada geometrik asosda tasvirlash usullari haqidagi ta'limotlar paydo bo'la boshladi. Bu sohadagi nazariyotchilardan biri italyan olimi Leon Alberti (1404–1472) bo'lib, u o'zining «Rassomchilik haqida» va «Me'morchilik haqida» nomli asarlarida perspektivaning matematik asoslarini ishlab chiqdi.

Grafik yasashlar usullarining keyingi rivoji italyan rassomi, olimi va muhandisi Leonardo Vintchi (1452–1519) nomi bilan bog'liq. U o'z amaliy faoliyatida perspektiv tasvirlar, shu jumladan, «kuzatish» perspektivasi qonunlarini qo'llash doirasini kengaytirdi.

Taniqli nemis rassomi Albrecht Dyrer (1471–1528) o'zining «Qo'llanma» asarida tekis va fazoviy egri chiziqlarni yasashning bir qancha usullarini keltiradi. U «Dyrer usuli» deb nomlangan perspektiv yasashlarning yangi o'ziga xos usulini yaratgan.

Italyan olimi Gvido Ubal dini (1545–1607) «Perspektiva bo'yicha olti kitob»i ulkan nazariy ahamiyatga ega. U perspektiv tasviriga binoan narsaning haqiqiy o'lchamlarini aniqlashga asos solgan.

Fransuz matematigi Jirar Desarg (1593–1662) «Narsalarni perspektivada tasvirlashning umumiy usuli» nomli asarida perspektiv yasashlarda koordinatalar usulini qo'llash bilan chizma geometriya faniga katta hissa qo'shdi.

Nemis geometri Lambert (1723–1777) elementar geometriya masalalarini perspektiv yasashlar asosida grafik usulda yechishni tavsiya qildi.

Shunday qilib, XVIII asr oxiriariga kelib proyeksiyalash usullari bo'yicha yetarli tajriba to'plandi. Ammo bu usullar tarqoq bo'lib, yaxlit nazariyaga birlashtirilmagan edi. Fransuz geometri Gaspar Monj (1746–1818) o'zining «Geometrie descriptive» («Chizma geometriya») asarida tasvirlash usullari sohasidagi bilimlarni umumlashtirdi va sistemaga soldi. U bu bilan chizma geometriyaga fan sifatida asos soldi.

O'rta Osiyoda chizma geometriyaga oid ilk ma'lumotlar IX–XI asrlarda yashab o'tgan qomusiy olimlar Muhammad al-Xorazmiy (780–850), Abu Nasr Forobiy (873–950), Abu Rayhon Beruniy (973–1048), Abu Ali ibn Sino (980–1037) va boshqalarning «Geometriya», «Geodeziya», «Astronomiya» kabi asarlarida keltirilgan.

Temuriylar davrida Movarounnahr hududida muhtasham binolar, masjid va madrasalar qad ko'tardi. Barpo etilgan binolar, albatta, aniq chizmalar asosida qurilgan. Chizmalar esa maxsus chizmachilik asboblari vositasida bajarilganligi haqida ko'pgina ma'lumotlar bor. Bu davrdagi tasvirlash usullari haqidagi ma'lumotlar hali o'rganilmagan bo'lib, o'z tadqiqotchilarini kutmoqda.

Rossiyada chizma geometriya 1810-yildan Peterburg yo'l muhandislari korpusi instituti (hozirgi Peterburg temir yo'llar transporti instituti)da fransuz tilida o'qitila boshladi. Fanni o'qitish uchun G. Monjning shogirdi K. P o t y e taklif qilindi. Keyinchalik Potyening yordamchisi Y a . A . S e v a s t y a n o v (1796–1849) chizma geometriyadan rus tilida ma'ruzalar o'qiy boshladi. 1821-yilda u «Chizma geometriya asoslari» kursini nashr etadi. Bu rus tilidagi birinchi original darslik bo'lib, o'z davrida Yevropada ushbu fan bo'yicha yozilgan kitoblardan ancha ustun turadi. Ya. A. Sevastyanovga 1824-yilda ruslardan birinchi professorlik unvoni berildi.

Professor V. I. K u r d y u m o v ning (1853–1904) ishlari o'zining nazariy jihatdan chuqurligi, ilmiy asoslarining izchilligi bilan ajralib turadi. Uning 1886–1905-yillar mobaynida chop etilgan ilmiy ishlari chizma geometriyaning barcha bo'limlari: ortogonal proyeksiyalar, egri chiziqlar va sirtlar, perspektiva, aksonometrik proyeksiyalarni qamrab oladi. V. I. Kurdyunov: «Chizma geometriya chizmaning grammatikasidir», – deb ta'kidlagan.

Akademik Y e . S . F y o d o r o v (1853–1919) tasvir usullariga yangicha qarashlarni ilgari surdi. Uning vektorli chizma geometriya haqidagi fikrlari hozir ham ilmiy ahamiyatini yo'qotgani yo'q. Olim o'zining «Yangi geometriya chizmachilikning asosi sifatida», «Yangi chizma geometriya» kabi asarlarida sonlar o'rniga vektorlardan foydalandi.

Texnika fanlari doktori, professor N. A. R i n i n (1877–1943) tasvirlash usullari sohasidagi juda ko'p ilmiy ishlar muallifidir. Uning fanning barcha bo'limlarini qamrab oluvchi «Chizma geometriya», «Aksonometriya», «Sonlar bilan belgilangan proyeksiyalar», «Perspektiva», «Chiziqli perspektiva elementlari» kabi mashhur darsliklaridan tashqari, ko'pgina ilmiy-tadqiqot xarakteridagi ishlari ma'lum.

D. I. K a r g i n (1880–1949) chizma geometriya va muhandislik grafikasi faniga katta hissa qo'shgan olim bo'lib, grafik hisoblashlar va yasashlarni aniq bajarish bo'yicha ilmiy ishlar olib borgan. D. I. Kargin grafika bo'yicha birinchi fan doktoridir.

Professor M. Y a . G r o m o v (1884–1963) ilmiy ishlarining asosiy yo'nalishi egri chiziqlar va sirtlarning hosil bo'lish nazariyasini boyitishdan iborat. U sobiq ittifoqda birinchilar qatorida «Chizma geometriyada egri chiziqlar va sirtlarning kinematik asoslari» mavzusida doktorlik dissertatsiyasini himoya qilgan.

1935–1941-yillarda M. Ya. Gromov Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasiga rahbarlik qildi. Shu davrda u ilmiy-metodik ishlarni rivojlantirib, 1937-yilda «Proyeksion chizmachilik bo'yicha masalalar to'plami» o'quv qo'llanmasini yaratdi. Olim 1941–1945-yillarda hozirgi Toshkent irrigatsiya va melioratsiya instituti «Chizma geometriya va mashinasozlik chizmachiligi» kafedrasiga mudir bo'lib, shu yillari O'rta Osiyo politexnika institutida ma'ruzalar o'qidi.

Fizika-matematika fanlari doktori, professor N. F. C h e t v e r u x i n (1891–1974) sovet davrining eng mashhur geometrlaridan biridir. U bir necha yil chizma geometriya va muhandislik grafikasi ekspert komissiyasining raisi bo'lgan. N. F. Chetveruxinning «Shartli tasvirlash nazariyasi» asari tasvirlar nazariyasiga qo'shilgan ulkan hissa bo'ldi. Bundan tashqari, olimning «Geometriya kursida fazoviy shakllar chizmalari», «To'liq va to'liq bo'lmagan tasvirlar», «Proyeksion chizmachilikda stereometrik masalalar» va boshqa ishlari ham shu mavzuga bag'ishlangan. U «Oliy geometriya», «Chizma geometriya kursi», «Geometrik yasashlarning usullari» nomli darsliklar muallifidir.

Professor V. O. G o r d o n (1892–1971) chizma geometriya va muhandislik grafikasini o'qitish bo'yicha yetuk mutaxassis bo'lib, uning umumta'lim maktablari uchun chizmachilikdagi darsligi bir necha yillar mobaynida millionlab o'quvchilar uchun zarur qo'llanma vazifasini o'tab kelgan.

1941–1945-yillarda V. O. Gordon Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasiga rahbarlik qildi. Shu yillarda u «Chizma geometriya kursi» kitobini yozib tugatadi. Hozirgi kunda bu kitob 24 marta qayta nashr qilinib, Rossiya oliy texnika o'quv yurtlari uchun asosiy klassik darslik hisoblanadi.

Texnika fanlari doktori, professor A. I. Dobryakovning (1895–1947) «Chizma geometriya kursi» ancha mukammal darslik hisoblanib, arxitektura-qurilish ixtisosligidagi oliy o'quv yurtlariga mo'ljallangan. Olimning «Chizma geometriyadan masalalar to'plami» ushbu kitobning mantiqiy davomidir.

A. I. Dobryakov tomonidan perspektiva va soyalar nazariyasining o'ta muhim masalalari ishlab chiqilib, natijada yangi teoremlar ta'riflab berildi.

Professor S. M. Kolotovning (1885–1965) tasvirlash usullarini rivojlantirish sohasidagi xizmatlari alohida o'rin tutadi. 1926–1944-yillarda ukrain olimi O'zbekistonning turli qurilish tashkilotlarida va O'rta Osiyo industrial instituti «Chizma geometriya va arxitektura loyihalash» kafedrasida ishlab, 1933-yili «Chizma geometriya kursi»ni chop etdi. Bu darslikda u yordamchi proyeksiyalash usulining qulayligini isbotladi. S. M. Kolotov o'zining «Soyalar yasashning yangi nazariyasi», «Yordamchi proyeksiyalash», «Chizma geometriya kursi» kabi kitoblarida tasvirlash usullarini kengaytirishning yangi sohalarini mavjudligini ko'rsatdi.

O'zbekistonda chizma geometriya tarixi Turkiston Xalq Universiteti (hozirgi O'zbekiston Milliy universiteti) faoliyati bilan bog'liq. 1930–1934-yillarda universitet tarkibidan bir necha oliy texnika o'quv yurtlari ajralib chiqib, ularda «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedralari tashkil qilinadi va o'qitila boshlaydi. Dastlabki yillarda fanni o'qitish metodikasiga, talabalar bajaradigan chizmalar (topshiriqlar) to'plamlari tuzishga va yosh o'qituvchilar pedagogik mahoratini oshirishga katta e'tibor berildi.

O'zbekistonda chizma geometriya fani bo'yicha birinchi pedagog R. A. Him Xorunov (1911–1992) sanaladi. 1953-yilda R. Xorunov Leningradda «Parallel proyeksiyalashda yaqqol tasvirlar yasashning ba'zi bir masalalari» mavzusida nomzodlik dissertatsiyasini himoya qiladi. 1953–1983-yillar davomida u Toshkent temir yo'llar transporti institutida kafedra mudiri bo'lib, o'z ilmiy maktabini yaratdi, bir necha nomzodlik ishlariga rahbarlik qildi.

1961-yili R. Xorunov tomonidan «Chizma geometriya kursi»dan darslik chop etilib, bu o'zbek tilida chizma geometriya fani terminologiya tizimi majmuasi yaratilishiga olib keldi. Darslikning keyingi nashrlariga fanning namunaviy dasturida belgilangan barcha bo'limlar kiritilib, u arxitektura-qurilish mutaxassislarga mo'ljallab tayyorlangan.

1966-yilda R. Xorunovga professorlik unvoni, 1981-yilda O'zbekistonda xizmat ko'rsatgan fan arbobi unvoni berildi.

Yusuf Qirg'izboyev (1912–1995) Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat institutida 1951–1978-yillarda kafedra mudiri sifatida faoliyat yuritgan. U 1958-yilda o'zbek tilida birinchi marta mexanika ixtisosliklari uchun «Chizma geometriya» darsligini chop etadi. Kitobda tasvirlash usullarida ishlatiladigan o'zbekcha atamalar tizimi yaratildi. 1961-yili Yu. Qirg'izboyevga dotsentlik unvoni beriladi.

1974-yilda Yu. Qirg'izboyev, E. Sobitov, L. Hakimov va I. Rahmonovlar muallifligida «Mashinasozlik chizmachiligi kursi» chop etildi. Bu o'zbek tilida yaratilgan birinchi adabiyot bo'lib, unda nazariy va amaliy ma'lumotlar bilan bir qatorda chizmachilikka oid atamalar ishlab chiqildi.

1963-yildan boshlab respublikamiz pedagoglaridan Sh. K. Murodov birinchi bo'lib Kiyevdagi prof. S. M. Kolotov ilmiy maktabiga aspiranturaga kirishi munosabati bilan ukrain va o'zbek olimlari o'rtasida ilmiy hamkorlik vujudga keladi. Kiyev ilmiy maktabining hozirgi rahbari texnika fanlari doktori, professor V. Ye. Mixaylenkoning 1968-yilda Buxoro va Samarqand oliy o'quv yurtlarida ma'ruzalar o'qishi, undan keyingi yillarda Toshkent, Samarqand, Buxoro, Urganch, Chimkent va Jambul shaharlariga tashrif buyurib, ilmiy seminarlar o'tkazishi hamda izlanuvchi va aspirantlar tanlab olinishi O'zbekiston va qo'shni respublikalarda fanning rivojlanishiga turtki bo'ldi. Hozirda respublikamizda faoliyat yuritayotgan 26 fan nomzodidan 23 tasi shu ilmiy maktabda dissertatsiya himoya qilgan, ulardan 3 tasi professor (Sh. K. Murodov, J. Ya. Yodgorov, R. Q. Ismatullayev) va bittasi fan doktori (D. F. Qo'chqorova) bo'ldi.

ASOSIY GEOMETRIK O'RINLAR

Ba'zi bir geometrik masalalarni yechish geometrik o'rinlarni qo'llash bilan bajariladi.

Nuqta, to'g'ri chiziq, egri chiziq va sirlarga tegishli bo'lgan pozitsion va metrik masalalar shartlarini qanoatlantiruvchi masalaning berilish shartiga geometrik o'rinlar tanlanadi.

Ta'rif. Fazodagi elementlarning (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik) geometrik o'rni deb biror aniq shartlarni qanoatlantiruvchi shu elementlar to'plamiga aytiladi.

Quyida ba'zi bir geometrik o'rinlarni keltiramiz:

1. *Berilgan elementlardan bir xil uzoqlikdagi (masofadagi) elementlarning geometrik o'rinlari.*

1.1. Berilgan O nuqtadan bir xil R uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda markazi O nuqtada va radiusi R masofaga teng bo'lgan aylana, fazoda esa markazi O nuqtada bo'lgan R radiusli sfera bo'ladi.

1.2. Berilgan ikki A va B nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda berilgan ikki nuqtani tutashiruvchi AB kesmaning o'rtasidan o'tuvchi perpendikulyar to'g'ri chiziq, fazoda esa AB kesma o'rtasidan o'tuvchi va unga perpendikulyar bo'lgan tekislik bo'ladi.

1.3. Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtaning geometrik o'rni tekislikda berilgan uch nuqtadan o'tuvchi aylana markazi, fazoda esa berilgan uch nuqtadan o'tuvchi aylana markazidan o'tib, aylana tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq yoki berilgan nuqtalarni birlashtiruvchi vatarlarning o'rtasidan o'tuvchi va aylana tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'ladi.

1.4. Bir tekislikda yotmagan to'rt nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtaning geometrik o'rni berilgan nuqtalar yotgan shar sirtining markazi bo'ladi.

1.5. Berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil masofadagi nuqtalarning geometrik o'rni o'qi berilgan to'g'ri chiziq bo'lgan aylanma silindr sirtining nuqtalari bo'ladi.

1.6. Ikki parallel to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda berilgan to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq, fazoda esa berilgan to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tuvchi va parallel to'g'ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bo'ladi.

1.7. Fazodagi uchta o'zaro parallel to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni yuzovchilari shu to'g'ri chiziqlar bo'lgan aylanma silindr sirtining o'qi bo'ladi.

1.8. Ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tekislikda to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan qo'shni burchaklarning perpendikulyar bissektrisalari, fazoda esa ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq tashkil qilgan qo'shni burchaklar bissektrisalaridan o'tuvchi va to'g'ri chiziq tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikki o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

1.9. Fazodagi bir nuqtada o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni uchi berilgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lgan aylanma konusning o'qi bo'ladi.

1.10. Berilgan tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni ikki o'zaro parallel tekislik bo'lib, ular berilgan tekislikdan berilgan uzoqlikda joylashgan bo'ladi.

1.11. Ikki parallel tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'ri berilgan tekisliklarga parallel bo'lgan tekislik bo'lib, u berilgan tekisliklarning ixtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesmalarning o'rtasidan o'tadi.

1.12. Ikki kesishuvchi tekislikdan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'ri tekisliklar tashkil qilgan ikkiyoqli burchaklarni teng ikkiga bo'luvchi o'zaro perpendikulyar bo'lgan ikkita tekislik bo'ladi.

1.13. R radiusli aylanadan L masofadagi nuqtalarning geometrik o'ri $R < L$ bo'lganda $R + L$ va $R > L$ bo'lganda $R = L$ radiusli konsentrik aylanalar bo'ladi.

1.14. R_1 radiusli sferadan L_1 masofadagi nuqtalarning geometrik o'ri $R_1 < L_1$ bo'lganda $R_1 + L_1$ va $R_1 > L_1$ bo'lganda $R_1 - L_1$ radiusli konsentrik sferalar bo'ladi.

1.15. Berilgan a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, undan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri o'qi a to'g'ri chiziq bo'lib, radiusi $R = L$ bo'lgan aylanma silindrning yasovchilari bo'ladi.

1.16. Berilgan A nuqtadan bir xil L masofadagi parallel to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri radiusi $R = L$ bo'lgan aylanma silindrning yasovchilari bo'ladi.

1.17. Berilgan a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmagan va undan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri o'qi a to'g'ri chiziq bo'lib, radiusi $R = L$ bo'lgan aylanma silindrga urinma to'g'ri chiziqlar bo'ladi.

1.18. Berilgan A nuqtadan o'tib, biror a to'g'ri chiziqdan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri o'qi a to'g'ri chiziq bo'lgan radiusi $R = L$ aylanma silindrga A nuqtadan urinib o'tuvchi ikki tekislik bo'ladi.

1.19. Berilgan P tekislikdan L masofadagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri P dan L masofada joylashgan ikki o'zaro parallel tekislik bo'ladi.

1.20. Berilgan O nuqtadan bir xil L masofada joylashgan tekisliklarning geometrik o'ri markazi O nuqtada va radiusi $R = L$ bo'lgan shar sirtiga urinma tekisliklar to'plami bo'ladi.

1.21. Berilgan A nuqtadan o'tuvchi va biror O nuqtadan L masofadagi tekisliklarning geometrik o'ri ikki markazi O nuqtada va radiusi $R = L$ bo'lgan shar sirtiga urinma tekislik bo'ladi.

1.22. Berilgan a to'g'ri chiziqqa parallel va undan L masofadagi tekisliklarning geometrik o'ri o'qi a to'g'ri chiziq, radiusi $R = L$ bo'lgan aylanma silindr sirtiga urinuvchi tekisliklar to'plami bo'ladi.

2. Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziq va tekisliklarning geometrik o'rinlari.

2.1. Biror a to'g'ri chiziqning A nuqtadan o'tib, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.2. Fazoda berilgan A nuqtadan o'tib, biror a to'g'ri chiziq bilan α burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri uchi A nuqtada bo'lgan aylanma konus sirtining yasovchilar to'plami bo'ladi.

2.3. Fazoda berilgan A nuqtadan o'tuvchi va biror P tekislik bilan β burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri o'qi A nuqtadan o'tib, P tekislikka perpendikulyar bo'lgan va yasovchilari P bilan β burchak tashkil qilgan aylanma konus sirtining yasovchilar to'plami bo'ladi.

2.4. Ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri berilgan to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan qo'shni burchaklar bissektrisalaridan o'tuvchi va to'g'ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikkita o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.5. Ikki ayqash to'g'ri chiziqqa bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri ikki o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.6. Ikki kesishuvchi tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri tekisliklar tashkil qilgan ikkiyoqli burchaklarni teng ikkiga bo'luvchi ikkita o'zaro perpendikulyar tekislik bo'ladi.

2.7. Bir nuqtada kesishuvchi uchta tekislikka bir xil qiyalikdagi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'ri kesishuv nuqtasidan o'tuvchi har bir juft bissektor tekisliklarining kesishuvidan hosil bo'lgan to'rtta to'g'ri chiziq bo'ladi.

2.8. Berilgan A nuqtadan o'tib, biror P tekislik bilan α burchak tashkil qiluvchi tekisliklarning geometrik o'rni uchi A nuqtada va o'qi to'g'ri chiziq bo'lgan yasovchilari u bilan berilgan burchak hosil qilgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to'plami bo'ladi.

2.9. Berilgan A nuqtadan o'tib, biror P tekislik bilan β burchak hosil qilgan tekisliklarning geometrik o'rni uchi A nuqtada, o'qi P tekislikka perpendikulyar bo'lgan va yasovchilari P ga β burchakka og'ishgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to'plami bo'ladi.

3. Geometrik elementlarning boshqa ba'zi bir geometrik o'rinlari.

3.1. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchining geometrik o'rni sfera sirtining nuqtalari bo'lib, uning diametri to'g'ri burchakning gipotenuzasiga teng bo'ladi.

3.2. Konus va silindr sirtlariga nisbatan bir xil qiyalikdagi nuqtalarning geometrik o'rni bu sirtlarning o'qlari bo'ladi.

3.3. Berilgan aylanadan o'tuvchi sferalar markazlarining geometrik o'rni shu aylana markazidan o'tuvchi va aylana tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi.

3.4. Berilgan A nuqtadan o'tib, berilgan a to'g'ri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni tekislik bo'ladi.

3.5. Berilgan A nuqtadan o'tib, berilgan P tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni P tekislikka parallel bo'lgan tekislik bo'ladi.

3.6. Sfera sirtida berilgan A nuqtadan o'tib, sirtga urinuvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni shu nuqtaga urinma tekislik bo'lib, u sferaning A nuqtasidagi radiusiga perpendikulyar bo'ladi.

3.7. Fazoda berilgan 3 ta o'zaro ayqash to'g'ri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni bir kovakli elliptik yoki aylanma giperboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari bo'ladi.

3.8. Berilgan 2 ta ayqash to'g'ri chiziqni kesuvchi va biror P tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rni giperbolik paraboloid sirtining to'g'ri chiziqli yasovchilar to'plami bo'ladi.

ATAMA VA TUSHUNCHALAR IZOHLI LUG'ATI

A

Algebraik egri chiziq	tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq
Algebraik sirt	algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Algebraik sirt sinfi	ixtiyoriy to'g'ri chiziqdan o'tib, sirtga urinuvchi tekisliklarning eng ko'p soni bilan aniqlanadi
Algebraik sirt tartibi	sirtning to'g'ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarning eng ko'p soni bilan aniqlanadi yoki sirtning ifodalovchi tenglama darajasi
Algoritm	masalani yechish rejasi yoki ketma-ketligi
Arximed jismlari	muntazam ko'pyoqliklarning uchlari kesilganda hosil bo'lgan yarim muntazam ko'pyoqliklar
Aylanish o'qi	fazodagi shaklni biror proyeksiyalar tekisligiga qulay holga keltirishda uni aylantirish uchun tanlangan to'g'ri chiziq
Aylanish radiusi	aylanish markazidan harakatlanuvchi nuqtagacha bo'lgan masofa
Aylanma yoki aylanish sirti	biror to'g'ri chiziq, tekis yoki fazoviy egri chiziqning qo'zg'almas o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt
Aylantirish markazi	aylanish o'qi bilan aylantirish tekisligining kesishuv nuqtasi
Aylantirish tekisligi	biror shaklning nuqtasi orqali o'tuvchi va aylanish o'qiga perpendikulyar tekislik
Aylantirish usuli	proyeksiyalar tekisliklarini o'zgartirmay, berilgan shaklni biror o'q atrofida aylantirib, proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holatga keltirish

B

Binormal	fazoviy chiziqning biror nuqtasidan unga o'tkazilgan yopishma tekislik va urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Bir pallali giperboloid	uch yo'naltiruvchisi xos to'g'ri chiziq bo'lgan chiziqli sirt
Birinchi turdagi qaytish nuqtasi	bu nuqtada egri chiziqning yarim urinmalari ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi
Bissektor tekisligi	H va V proyeksiyalar tekisliklaridan har birer uzorlikdagi nuqtalarning geometrik o'rti yoki H va V tekisliklar orasidagi bissektor tekisligi

Bo'yin chizig'i	aylanish sirtining eng kichik paralleli bo'lib, uning bosh meridiani bilan kesishgan nuqtasida bosh meridianga o'tkazilgan urinma aylanish o'qiga parallel bo'ladi
Bosh meridian	aylanish sirtining frontal simmetriya tekisligi bilan kesishgan chizig'i
Bosh meridian tekisligi	aylanish o'qi orqali o'tgan frontal kesuvchi tekislik
Bosh normal	fazoviy chiziqlarning biror nuqtasidan unga o'tkazilgan yopishma tekislikda yotuvchi va urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
D	
Diskret karkas	uzuq-yuluq karkas
Dodekaedr	yon yoqlari 12 muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti yoki muntazam 12 yoqlik
E	
Egri chiziq	fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning qoldirgan izi
Egri chiziq sinfi	fazoviy egri chiziqlarda biror to'g'ri chiziq orqali unga o'tkazilgan eng ko'p urinma tekisliklar, tekis egri chiziqlarda esa tekislikdagi biror nuqtadan unga o'tkazilgan eng ko'p urinmalar soni bilan aniqlanadi
Egri chiziq normal	egri chiziqlarning urinish nuqtasidan urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar to'g'ri chiziq
Egri chiziq tartibi	fazoviy egri chiziqlarda tekislik bilan egri chiziqlarning eng ko'p kesishish nuqtalari, tekis egri chiziqlarda esa to'g'ri chiziq bilan egri chiziqlarning eng ko'p kesishish nuqtalari soni bilan aniqlanadi
Egri chiziq urinmasi	egri chiziq bilan umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq
Egri chiziqlarning egriligi	egri chiziqda o'tkazilgan qo'shni yarim urinmalar orasidagi burchakning ular orasidagi yoy uzunligiga nisbatining limiti
Ekssentrik sferalar usuli	murakkab aylanma sirtlarning kesishuv chizig'ini aniqlashda qo'llaniladigan usul
Ekvator	aylanish sirtidagi eng katta parallel bo'lib, uning bosh meridiani bilan kesishuv nuqtasida bosh meridianga o'tkazilgan urinmalar aylanish o'qiga parallel bo'ladi
Elliptik kesim	konusning barcha yasovchilarini kesib, uning o'qiga perpendikulyar bo'lmagan tekislik kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Epyur	fransuzcha so'z bo'lib, «chizma» degan ma'noni bildiradi
Evolventa	evolyutani hosil qilgan egri chiziq unga nishatan evolventa deb ataladi

Evolyuta

egri chiziqning hamma nuqtalari uchun yasalgan egrilik markazlarining geometrik o'rni

F

Fazoviy egri chiziq

hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq

Frenc uchyogligi

o'zaro perpendikulyar yopishma, normal va rostlovchi tekisliklardan iborat uchyoglik

Frontal proyeksiyalovchi tekislik

frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik

Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq

frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq

Frontal tekislik

frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik

Frontal to'g'ri chiziq

frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq

Frontal proyeksiyalar tekisligi

shakllarning frontal proyeksiyalari yotgan frontal tekislik (V)

G

Giperbolik kesim

konusning ikki yasovchiga parallel tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan shakl

Giperbolik nuqtalar

sirtning bunday nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislik sirtini kesib o'tadi

Gorizontal proyeksiyalar tekisligi

shaklning gorizontal proyeksiyalari yotgan gorizontal tekislik (H)

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik

gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik

Gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq

gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq

Gorizontal tekislik

gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik

Gorizontal to'g'ri chiziq

gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq

Geksaedr

muntazam 6 yoqlik

I

Ikki karra qiyshiq kanoid

ikki yo'naltiruvchisi xos to'g'ri chiziq va uchinchi yo'naltiruvchisi xos egri chiziq bo'lgan chiziqli sirt

Ikki karra qiyshiq silindroid

ikki yo'naltiruvchisi xos egri chiziq va uchinchi yo'naltiruvchisi xos to'g'ri chiziq bo'lgan chiziqli sirt

Ikkinchi qaytish nuqtasi

egri chiziqning bunday nuqtasida urinma va normallar ustma-ust tushib, bir tomonga yo'nalgan bo'ladi

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari

ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtlar

Ikkinchi tartibli sirtlar

biror to'g'ri chiziq bilan eng ko'p ikki nuqtada kesishgan sirtlar yoki tenglamasining darajasi ikkiga teng sirtlar

Ikosaedr yon yoqlari 20 muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti yoki muntazam 20 yoqlik

J

Jipslashtirish usuli aylantirish usulining xususiy holi bo'lib, bunda aylantirish o'qi sifatida tekislikning biror izi qabul qilinadi va uning atrofida aylantirib, tekislik shu proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi

K

Kanal sirti tekis kesimlardan iborat uzluksiz karkasdan tashkil topgan sirt. Tekis kesim fazoda ma'lum yo'nalishga ega bo'lib, harakat jarayonida o'z shaklini bir me'yorda o'zgartirishi mumkin

Karkas sirtlarni aniqlaydigan nuqtalar yoki chiziqlar to'plami

Kinematik sirt yasovchisining kinematik harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan sirt

Kirish va chiqish nuqtalari to'g'ri chiziqlarning sirt bilan kesishish nuqtalari

Ko'pyoq bir necha tekisliklarning kesishuvidan hosil bo'lgan shakl

Ko'pyoq qirradi ko'pyoqlik yoqlarining kesishuv chiziqlari

Ko'pyoqlik tomonlari tekis uchburchak yoki ko'pburchaklar bilan chegaralangan qirrali sirt

Ko'pyoqlik uchi ko'pyoqlik qirralarining kesishuv nuqtalari

Konkurent nuqtalar bir proyeksiyalovchi nurda yotgan nuqtalar

Konsentrik sferalar usuli aylanma sirtlarning o'zaro kesishuv chizig'ini yasashda qo'llaniladigan usul

Konus kesimlari konus sirtining biror tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesim yuzasi

Koordinata o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining kesishgan chiziqlari

Kub yoqlari 6 ta kvadratdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti

M

Markaziy proyeksiyalash proyeksiyalash markazi nuqta bo'lib, u orqali tekislikda hosil qilingan proyeksiya

Monoton egri chiziq egriligi bir me'yorda oshib yoki kamayib boruvchi egri chiziq

Muntazam ko'pyoqlik muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'lgan ko'pyoqlik

Meridian aylanish o'qi orqali o'tgan tekislikning aylanish sirti bilan kesishgan chizig'i

Meridian tekisligi aylanish o'qi orqali o'tgan tekislik

Metrik masala	berilgan shakllarning o'zaro vaziyatiga nisbatan ularning metrikasini yoki oldindan berilgan metrik shartni qanoatlantiruvchi shakllarning o'zaro vaziyatini aniqlash
N	
Normal	egri chiziqning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar to'g'ri chiziq. Sirtning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Normal kesim	biror sirtning uning o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesim
Normal tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'lgan tekislik
O	
Oktaedr	asosi kvadrat va yon yoqlari 8 ta muntazam uchburchakdan iborat bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti
Oktant	uchta o'zaro perpendikulyar tekislikning fazoni 8 ta bo'lakka bo'lishi
Ortogonal proyeksiyalarni almashtirish	masala yechishda grafik amallarni soddalashtirish uchun qo'llaniladigan chizmani qayta tuzish usullari
Ortogonal proyeksiyalash	to'g'ri burchakli proyeksiyalash
P	
Parabolik kesim	konusning bitta yasovchisiga parallel tekislik kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Parabolik nuqtalar	urinma tekislikning sirtga to'g'ri chiziq bo'yicha urinishidan hosil bo'lgan urinish chizig'ining nuqtalari
Parallel proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'lgan proyeksiyalash
Parametr	narsaning holati va shaklini aniqlashda qatnashadigan ko'rsatkichlar
Parametrlashtirish	narsalar to'plamining holati va shakli parametrlarini aniqlash
Piramida	asosi uchburchak yoki ko'pburchak, yon yoqlari umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat qirrali sirt
Platon jismlari	muntazam ko'pburchaklardan iborat yonlarga, o'zaro teng ikkiyoqli burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'lgan (tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr) qavariq ko'pyoqlik sirti
Pozitsion masala	berilgan shakllarning o'zaro tegishlilikini, ya'ni o'zaro umumiy elementlarni aniqlaydigan masala

Prizma	asoslari o'zaro parallel bo'lib, uchburchak yoki ko'pburchaklardan, yon yoqlari to'rtburchaklardan iborat qirrali sirt
Prizmatoid	asoslari parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan, yon yoqlari esa ikkala asos uchlaridan iborat uchburchak va trapetsiyalar bo'lgan qavariq ko'pyoqlik sirti
Profil proyeksiyalovchi tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik
Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Profil tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik
Profil to'g'ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
Proyeksiya	narsaning proyeksiyalovchi nurlarning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuvidan hosil bo'lgan tasviri
Proyeksiyalar tekisligi	proyeksiyalar yotgan tekislik
Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish	narsaning holatini o'zgartirmasdan, unga nisbatan proyeksiyalar tekisliklarining holatini qulay qilib o'zgartirish
Proyeksiyalash	bu jarayonda proyeksiyalanuvchi obyekt nuqtalari orqali nurlar o'tkazilib, ularning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuv nuqtalari aniqlanadi
Proyeksiyalash markazi	proyeksiyalovchi nurlar chiqadigan xos yoki xosmas nuqta
Proyeksiyalash nuri	proyeksiyalanuvchi nuqta bilan proyeksiyalash markazini bog'lovchi to'g'ri chiziq
Q	
Qavariq ko'pyoqlik	yoqlari bir tomonida joylashgan ko'pyoqlik
Qirrali sirt kesim yuzasi	qirrali sirt bilan tekislik kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Qiyshiq burchakli proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nurlar proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lmagan holda hosil bo'lgan proyeksiyalash
Qo'sh nuqta	egri chiziqning bu nuqtasida yarim urinmalar bir to'g'ri chiziqni tashkil qilib, qarama-qarshi yo'nalishga, normallar esa ustma-ust tushib, bir yo'nalishga ega bo'ladi
Qonuniy egri chiziq	muayyan biror qonunga bo'ysunuvchi nuqtalar to'plami
Qonuniy sirt	hosil bo'lish jarayoni biror qonunga asoslangan sirt
Qonunsiz egri chiziq	o'z harakati bilan biror qonunga bo'ysunmagan nuqtalar to'plami
Qonunsiz sirt	hosil bo'lish jarayoni biror qonunga asoslanmagan sirt

R

Ravon egri chiziq	hamma nuqtalariga qarama-qarshi yo'nalgan yarim urinmalar bir to'g'ri chiziqda yotuvchi egri chiziq
Rostlovchi tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasiga urinma va binormal orqali o'tuvchi tekislik

S

Siklik sirt	markazlari egri chiziqli yo'naltiruvchi bo'ylab harakatlanuvchi aylana hosil qilgan sirt
Sinish nuqtasi	egri chiziqning bu nuqtasida yarim urinmalar o'zaro burchak hosil qiladi
Sirt	biror chiziq yoki sirtning fazoda uzluksiz harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan geometrik shakl
Sirt kesim yuzasi	biror sirt bilan tekislikning kesishishidan hosil bo'lgan shakl
Sirt yasovchisi	o'z harakati bilan sirtni hosil qiluvchi chiziq yoki sirt
Sirt yo'naltiruvchisi	sirt yasovchisining harakatlanishini belgilovchi chiziq
Sirtga urinma tekislik	sirtning biror nuqtasidan o'tgan ikki kesim chizig'iga o'tkazilgan urinmalardan tashkil bo'lgan tekislik
Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'i	ikki kesishuvchi sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni
Sirtning sinfi	biror to'g'ri chiziqdan sirtga o'tkazilgan urinma tekisliklarning eng ko'p soni bilan aniqlanadi
Sirtning normal	sirtning biror nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq
Sirtning tartibi	biror to'g'ri chiziq bilan sirt kesishgan nuqtalarning eng ko'p soni bilan aniqlanadi

T

Tekis egri chiziq	hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq
Tekis parallel ko'chirish sirti	yasovchisi o'z harakati davomida o'z-o'ziga parallel bo'lib qoladigan sirt
Tekis parallel ko'chirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo'lib, bunda aylanish o'qining holati ko'rsatilmaydi
Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq	tekislikdagi o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq
Tekisliklar dastasi	bir to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar to'plami
Tekislikning eng katta og'ish chizig'i	tekislikka tegishli bo'lib, uning gorizontalari va frontallariga yoki profililariga perpendikulyar to'g'ri chiziq

Tekislikning frontali	tekislikda yotgan va V ga parallel to'g'ri chiziq
Tekislikning gorizontali	tekislikda yotgan va H ga parallel to'g'ri chiziq
Tekislikning izlari	tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari
Tekislikning profili	tekislikda yotgan va W ga parallel to'g'ri chiziq
Tetraedr	yoqlari to'rt muntazam uchburchakdan iborat piramida
To'g'ri burchakli proyeksiyalash	proyeksiyalovchi nuriarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar holda proyeksiyalash
To'g'ri burchakli uchburchak usuli	kesmaning proyeksiyalari bo'yicha uning haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlashda qo'llaniladigan usul. Uchburchakning bir kateti sifatida kesmaning proyeksiyasi, ikkinchi kateti sifatida esa kesma uchlarning shu tekislikdan uzoqliklar ayirmasi olinadi
To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyati	to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni unga perpendikulyar bo'lmasa, uning proyeksiyasi ham to'g'ri burchak bo'ladi
To'g'ri chiziqning izlari	to'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan nuqtalari
To'g'ri chiziqning tekislikka parallelligi	tekislikda yotgan biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq
To'g'ri kanoid	bitta yo'naltiruvchisi xos egri chiziq, ikkinchisi to'g'ri chiziq va uchinchisi xosmas to'g'ri chiziq bo'lgan chiziqli sirt
To'g'ri silindroid	ikki yo'naltiruvchisi xos egri chiziq, uchinchisi esa xosmas to'g'ri chiziq bo'lgan chiziqli sirt
Tors	fazoviy egri chiziqqa urinuvchi to'g'ri chiziqlar hosil qilgan yoyiluvchi chiziqli sirt
Transsendent egri chiziq	transsendent tenglama bilan ifodalangan egri chiziq
Transsendent sirt	transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Triangulyatsiya	sirkul yordamida uchburchakdan foydalanib yasash usuli
Trubasimon sirt	egri chiziqli yunaltiruvchisi bo'yicha unga perpendikulyar harakatlanuvchi yoki doimiy radiusga ega aylana hosil qilgan sirt
U	
Umumiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan tekislik
Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziq

V

Vint chizig'i	silindr yoki konus sirtida bir me'yorda aylanma va ilgarilanma harakat qiluvchi nuqtaning trayektoriyasi
Vint sirti	biror chiziq yoki sirtning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan sirt

X

Xatolar egri chizig'i	egri chiziqni kesuvchi vatarlarning o'rta nuqtalaridan o'tgan egri chiziq
Xosmas nuqta	to'g'ri chiziqning cheksiz uzoqlashgan nuqtasi
Xosmas tekislik	uch o'lchamli fazoning cheksiz uzoqlashgan nuqtalar to'plami
Xosmas to'g'ri chiziq	tekislikning cheksiz uzoqlashgan chizig'i
Xususiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan tekislik
Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq

Yo

Yopishma tekislik	fazoviy egri chiziq ustida yotgan nuqta va unga cheksiz yaqin bo'lgan ikki nuqtadan o'tgan tekislik
Yordamchi proyeksiyalash	asosiy proyeksiyalash yo'nalishiga qo'shimcha ravishda bajariladigan proyeksiyalash
Yoyilmaydigan sirt	cheksiz yaqin qo'shni ikki yasovchisi o'zaro ayqash bo'lgan chiziqli sirt
Yoyiluvchi sirt	cheksiz yaqin qo'shni ikki yasovchisi o'zaro kesishgan chiziqli sirt

Ch

Chiziq	nuqtaning tekislik yoki fazodagi harakatlanishtidan qoldirgan trayektoriyasi
Chiziqli sirt	uchta fazoviy egri chiziqni bir vaqtda kesib harakatlanuvchi to'g'ri chiziq hosil qilgan sirt
Chorak	ikki o'zaro perpendikulyar tekislikning fazoni 4 ta bo'lakka bo'lishi

O'

O'zaro parallel tekisliklar	bir tekislikda yotgan va o'zaro kesishgan ikki chiziq ikkinchi tekislikda yotgan va o'zaro kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lgan tekisliklar
O'zaro perpendikulyar tekislik	bir tekislikda yotgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislik yoki tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Alijonov O.I., Xolmurzaev A.A. Muhandislik grafikasi. – Farg‘ona, Texnika nashriyoti, 2005.
2. Ismatullaev R. Chizma geometriya. –T., 2003.
3. Murodov Sh. Gidrotexniklar uchun chizma geometriya. –T.: O‘qituvchi, 1991.
4. Murodov Sh., Hakimov L., Odilov P., Shomurodov A., Jumaev M. Chizma geometriya kursi. – T.: O‘qituvchi, 1988.
5. Xorunov R. Chizma geometriya kursi. –T.: O‘qituvchi, 1995.
6. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985.
7. Гордон В.О. Семенцов-Огиевский М.А. Начертательная геометрия. Под ред. Н.Н. Крылова.– М.: Высшая школа, 2000.
8. Михайленко В.Е., Пономарев А.М. Инженерная графика: Учебник. –Киев: Высшая школа, 1990.
9. Фролов С.А. Начертательная геометрия.–М.: Машиностроение, 1983.
10. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. –М.: Высшая школа, 1999.

MUNDARIJA

So'zboshi.....	3
-----------------------	----------

Kirish

1-§. Chizma geometriya fanining maqsadi va vazifalari.....	6
2-§. Asosiy geometrik tushunchalar.....	7
3-§. Geometrik shakllarda o'zaro bir qiymatli moslik.....	9

I bob. Tasvirlash usullari

1.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	10
1.2-§. Markaziy proyeksiyalash usuli va uning xossalari.....	10
1.3-§. Parallel proyeksiyalash usuli va uning xossalari.....	13
1.4-§. To'g'ri burchakli proyeksiyalash.....	15

II bob. Geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalari

2.1-§. Nuqtaning ikki o'zaro perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyalari.....	18
2.2-§. Nuqtaning uchta tekislikdagi proyeksiyalari.....	24
2.3-§. Nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog'lanish.....	31

III bob. To'g'ri chiziqlarning ortogonal proyeksiyalari

3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning ortogonal proyeksiyalari.....	35
3.2-§. Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari.....	37
3.3-§. To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish.....	41
3.4-§. To'g'ri chiziqlarning izlari.....	41
3.5-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyal tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash.....	44
3.6-§. Ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatlari.....	45
3.7-§. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari.....	48
3.8-§. Chizmalarda ko'rinishlikni aniqlash.....	49

IV bob. Tekislik va uning ortogonal proyeksiyalari

4.1-§. Tekislikning berilishi.....	52
4.2-§. Tekislikning izlarini yasash.....	54
4.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari.....	55
4.4-§. Tekislik va to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatlari.....	58
4.5-§. Tekislikning bosh chiziqlari.....	61
4.6-§. To'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro parallelligi.....	64
4.7-§. Tekisliklarning o'zaro parallelligi.....	66
4.8-§. Tekisliklarning o'zaro kesishuvi.....	68
4.9-§. To'g'ri chiziqlarning tekislik bilan kesishishi.....	72

4.10-§. To'g'ri chiziqlarning tekislikka perpendikulyarligi.....	75
4.11-§. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi.....	81
4.12-§. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlash.....	84
4.13-§. Ikki tekislik orasidagi burchak.....	85

V bob. Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullari

5.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	88
5.2-§. Tekis-parallel harakatlantirish usuli.....	89
5.3-§. Aylantirish usuli.....	94
5.4-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli.....	105

VI bob. Ko'pyoqliklar

6.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	114
6.2-§. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi.....	117
6.3-§. Ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.....	120
6.4-§. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi.....	123

VII bob. Egri chiziqlar

7.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	126
7.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normalar o'tkazish.....	127
7.3-§. Tekis egri chiziqlarning egriligi.....	129
7.4-§. Evolyuta va evolventa.....	130
7.5-§. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikatsiyasi.....	130
7.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.....	132
7.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normalar o'tkazish.....	132
7.8-§. Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi.....	134
7.9-§. Fazoviy egri chiziqlarning uzunligini uning to'g'ri burchakli proyeksiyalariga asosan aniqlash.....	136
7.10-§. Vint chiziqlari.....	137

VIII bob. Sirtlarning hosil bo'lishi va tekis chizmada berilishi

8.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	141
8.2-§. Sirtlarning berilish usullari.....	142
8.3-§. Aylanish sirtlari.....	145
8.4-§. Ikkinchi tartibli umumiy sirtlar.....	154
8.5-§. Chiziqli sirtlar.....	157
8.6-§. Yoyilmaydigan chiziqli sirtlar.....	159
8.7-§. Yoyiladigan chiziqli sirtlar.....	165
8.8-§. Siklik sirtlar.....	171

IX bob. Sirtlarning tekislik va to'g'ri chiziq bilan kesishishi

9.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	173
9.2-§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi.....	173
9.3-§. Konus kesimlari.....	178
9.4-§. Sirtlarning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.....	180
9.5-§. Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishishi.....	185
9.6-§. Sirtlarning to'g'ri chiziq va tekislik bilan kesishuvini yasashda ba'zi qo'shimcha usullar.....	191

X bob. Sirtlarning yoyilmalarini yasash	
10.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	193
10.2-§. Ko'pyoqliklarning yoyilmalari.....	194
10.3-§. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash.....	198
10.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash.....	200
10.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash.....	203
10.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash.....	204

XI bob. Sirtga urinma tekisliklar

11.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	210
11.2-§. Urinma tekislikning chizmada berilishi.....	211
11.3-§. Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazish.....	212
11.4-§. Sirt tashqarisidagi nuqta orqali urinma o'tkazish.....	213
11.5-§. Berilgan to'g'ri chiziq orqali urinma tekislik o'tkazish.....	215
11.6-§. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish.....	216
11.7-§. Berilgan tekislikka parallel bo'lgan urinma tekislik o'tkazish.....	216
11.8-§. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash.....	218

XII bob. Sirtlarning o'zaro kesishishi

12.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	220
12.2-§. Sirtlar kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi.....	221
12.3-§. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi.....	221
12.4-§. O'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli.....	223
12.5-§. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Kesuvchi tekisliklar dastasi usuli.....	228
12.6-§. O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli.....	239
12.7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishidagi maxsus hollar.....	243
12.8-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishiga oid teoremlar.....	248

XIII bob. Aksonometrik proyeksiyalar

13.1-§. Umumiy ma'lumotlar.....	253
13.2-§. Aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsientlari.....	254
13.3-§. Aksonometriyaning asosiy teoremlari.....	256
13.4-§. O'zgarish koeffitsientlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o'zaro bog'lanish.....	257
13.5-§. To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi va aksonometriya o'qlari.....	259
13.6-§. Aylananing aksonometriyasi.....	261
13.7-§. To'g'ri burchakli standart aksonometriyalar.....	264
13.8-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar.....	267
13.9-§. Aylanish sirtlarining ocherklarini aksonometriyada yasash.....	269
13.10-§. Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish.....	271

Qisqacha tarixiy ma'lumotlar.....	276
Asosiy geometrik o'rinlar.....	279
Atama va tushunchalar izohli lug'ati.....	282

Foydalanilgan adabiyotlar	291
--	-----

**Sh.Murodov, L.Hakimov, A.Xolmurzayev,
M.Jumayev, A. To'xtayev**

CHIZMA GEOMETRIYA

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent — 2006

«Iqtisod — Moliya» nashriyoti

Muharrir	<i>M.H. Usmonova</i>
Texnik muharrir	<i>T. I. Smirnova</i>
Musahhiha	<i>M.Sa'dullayeva</i>
Kompyuterda sahifalovchi	<i>Sh. Hazratova</i>

Bosishga ruxsat etildi 28.07.2006. Bichimi 60x90^{1/16}. Ofset bosma.
Shartli bosma tabog'i 18,0. Hisob-nashriyot tabog'i 18,5. Adadi 3000 nusxa.
Buyurtma № 2006—18/31. Bahosi shartnoma asosida.

«Iqtisod — Moliya» nashriyoti, Toshkent, X. Asamov ko'chasi, 7

«NISIM» bosmaxonasi, Sh. Rashidov 71