

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Инженерно-технологическая академия

В. В. ЛИСЯК

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ:
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРОЕКЦИИ,
ПОВЕРХНОСТИ**

Учебное пособие

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2020

УДК 004.415.2(075.8)

ББК 32.973(Я73)

Л639

Печатается по решению кафедры систем автоматизированного проектирования Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета (протокол № 6 от 22 января 2020 г.)

Рецензенты:

профессор кафедры естествознания и безопасности жизнедеятельности
Таганрогского института им. А. П. Чехова (филиал)
ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)», доктор технических наук,
профессор *В. И. Божич*

профессор кафедры систем автоматизированного управления
Института радиотехнических систем и управления ЮФУ,
доктор технических наук, профессор *В. И. Финаев*

Лисяк, В. В.

Л639 Математические основы компьютерной графики: преобразования, проекции, поверхности : учебное пособие / В. В. Лисяк ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2020. – 103 с.

ISBN 978-5-9275-3490-6

В учебном пособии рассматриваются математические основы геометрических преобразований в двухмерной и трёхмерной областях, проективной геометрии и трёхмерного геометрического моделирования. Кратко приводится теоретический материал, даются примеры решения типовых задач, а также контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии» и «Прикладная информатика».

УДК 004.415.2(075.8)

ББК 32.973(Я73)

ISBN 978-5-9275-3490-6

© Южный федеральный университет, 2020

© Лисяк В. В., 2020

© Оформление. Макет. Издательство

Южного федерального университета, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в процессе создания объектов приборостроения, машиностроения, строительства, микроэлектроники широко используются системы автоматизированного проектирования со средствами трёхмерного геометрического моделирования. При этом значительная часть проектирования выполняется в интерактивном режиме на базе диалога с компьютером. В процессе диалога используется естественный для разработчика язык изображения схем, сборочных единиц, общих планов и т.п., а в качестве моделей объектов применяются геометрические модели, которые обеспечивают разработчиков в процессе проектирования наиболее понятными и наглядными средствами, не требующих специальной математической подготовки.

Геометрическое моделирование является частью компьютерной графики и особенно широко применяется в областях, где требуется синтез и анализ пространственных форм проектируемых объектов.

В учебном пособии рассматриваются математические основы геометрических преобразований в двухмерной и трёхмерной областях, проективной геометрии и трёхмерного геометрического моделирования. Кратко приводится теоретический материал, даются примеры решения типовых задач, а также контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы.

Учебное пособие подкрепляет лекционный курс «Компьютерная графика», в который также входит цикл лабораторных работ, ориентированный на приобретение студентами практических навыков по созданию различных видов геометрических моделей и работы с ними. При подготовке учебного пособия особое внимание уделено приобретению студентами практических навыков применения математического аппарата при решении некоторых задач компьютерной графики.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии» и «Прикладная информатика».

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧЕК И ЛИНИЙ

1.1. Представление точек и линий

Любое изображение представляется графическими устройствами в виде точек и линий. В связи с этим основным моментом в математическом обеспечении графических систем и подсистем геометрического моделирования является умение эффективно представлять и преобразовывать точки.

Для плоскости координата точки представляется вектор-строкой $\|x, y\|$ матрицы, описывающей объект. Таким образом, объект можно задать матрицей, количество строк которой соответствует количеству выбранных для задания объекта точек, а количество столбцов равно двум в случае плоскости или трём для трёхмерного пространства. При этом изменение положения точек выполняется за счёт преобразования матрицы, описывающей исходный объект, а линии между точками реализуются аппаратными или программными средствами компьютера. Процесс преобразования матриц выполняется в соответствии с правилами матричной алгебры.

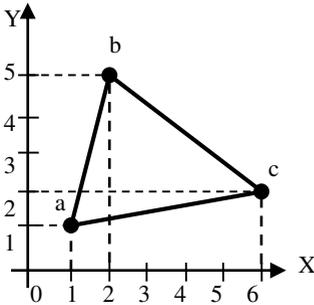
Любую фигуру, составленную из прямых линий, можно задать двумя матрицами: матрицей P координат характерных точек фигуры, т.е. тех точек, которые однозначно определяют исходный объект, и матрицей смежности R , которая описывает связи точек объекта. Характерные точки фигуры – точки соединения линий фигуры. Матрица R является квадратной и симметричной относительно элементов главной диагонали, т.е. $r_{i,j} = r_{j,i}$. Поэтому теоретически можно задавать половину её элементов. Однако это справедливо, если связи точек объекта являются неориентированными, т.е. для них не имеет значения направление соединения точек.

Матрица смежности R в процессе преобразования точек не участвует, а используется только на этапах визуализации изображений. Матрица R определяется как

$$R = \|r_{i,j}\|, \quad i, j \in N = \{1, 2, \dots, n\},$$

где n – число точек фигуры; $r_{i,j} = 1$, если точки i и j связаны между собой и $r_{i,j} = 0$, в противном случае.

Пример 1.1. Задать в матричной форме приведённую на рис. 1.1 фигуру.



Описание фигуры, изображённой на рис. 1.1 в виде матриц

$$R = \begin{matrix} a & b & c \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}, P = \begin{matrix} x & y \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Рис. 1.1. Фигура к примеру 1.1

Координаты двух концевых точек задают отрезок, т.е. матрица, задающая фигуру, будет содержать две вектор-строки.

Пример 1.2. Заданы две точки $A(0,1)$ и $B(2,3)$ и задана матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

которая выполняет преобразование координат исходных точек A и B в их новые значения A^* и B^* . Требуется найти значения координат точек A^* и B^* .

Решение. Представим точки A и B в виде вектор-строк $\|0, 1\|$ и $\|2, 3\|$. Выполним умножение вектор-строк на заданную матрицу преобразования T , в результате чего вычислим новые значения координат точек A^* и B^* .

$$AT = \|0 \ 1\| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \|3 \ 1\| = A^*, \quad BT = \|2 \ 3\| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \|11 \ 7\| = B^*.$$

Новыми значениями координат точки A^* будут $x^* = 3$ и $y^* = 1$, а новыми координатами для точки B^* — $x^* = 11$, $y^* = 7$.

Более компактно отрезок, заданный точками A и B , можно задать матрицей $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, где в первой строке матрицы определены координаты x и y точки A , а во второй строке — координаты x и y точки B . После

перемножения матриц L и T новые значения координат точек A^* и B^* определяются следующим образом:

$$LT = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{vmatrix} = L^*$$

Первая строка матрицы L^* определяет координаты точки A^* , где $x^* = 3$ и $y^* = 1$, а вторая строка – координаты точки B^* , где $x^* = 11$, а $y^* = 7$. Нетрудно видеть, что применённое преобразование T привело к увеличению длины отрезка и изменению его положения. Если записать уравнения прямых, проходящих через точки A, B и точки A^*, B^* , то можно сделать вывод, что исходная прямая $y = x + 1$, проходящая через точки A и B , была преобразована в прямую $y^* = (3/4)x^* - (5/4)$, проходящую через точки A^* и B^* , с помощью матрицы преобразования T .

Приведённое преобразование применимо для любой исходной прямой и представляет взаимно однозначное соответствие точек исходной и преобразованной прямой. На основании этого можно сделать вывод, что любая фигура на базе операции перемножения матриц преобразуется в изоморфную ей фигуру в той же системе координат.

1.2. Базовые операции преобразования для плоскости

Для выполнения преобразований в обычных декартовых координатах на плоскости достаточно использовать матрицу преобразований размерностью 2×2 . Познакомимся с набором операций, которые можно реализовать с помощью матрицы преобразования 2×2 . Для этого выполним умножение вектор-строки $\|x \ y\|$, которая задаёт положение точки на плоскости, на матрицу преобразования, записанную в общем виде:

$$\|x \ y\| \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \|(ax + cy) \ (bx + dy)\| = \|x^* \ y^*\|$$

Как видно, выполненная операция изменила положение исходной точки $P(x, y)$ в её новое положение $P^*(x^*, y^*)$ с $x^* = (ax + cy)$, а $y^* = (bx + dy)$.

Для изучения набора операций, который можно реализовать за счёт использования матрицы преобразования 2×2 , выполним анализ нескольких частных случаев.

1. Если задать в матрице преобразования $a = d = 1$ и $c = b = 0$, то в результате умножения вектор-строки $\|x \ y\|$ на матрицу преобразования координаты исходной точки не изменятся, и точка остаётся в прежнем положении.

2. Зададим элементы $b = c = 0$, а a и d запишем в общем виде. Тогда имеем следующее преобразование:

$$\|x \ y\| \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = \|ax \ dy\| = \|x^* \ y^*\|$$

Анализ полученного преобразования указывает, что за счёт элементов a и d выполняется операция масштабирования. При этом, если $a = d$, то выполняется пропорциональное изменение масштаба по осям X и Y . Если $a \neq d$, то масштабирование по осям разное. Масштаб увеличения или уменьшения определяют значения элементов a и d . При a и (или) d больше 1 – масштаб увеличения. При $0 < a$ и (или) $d < 1$ имеем масштаб уменьшения.

3. Пусть a и (или) $d < 0$, а $b = c = 0$, тогда

$$\|x \ y\| \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -d \end{vmatrix} = \|-ax \ -dy\| = \|x^* \ y^*\|.$$

Из анализа преобразования следует, что отрицательные элементы главной диагонали матрицы преобразования управляют операциями отображения относительно осей и начала координат. Например:

1. Если $a = 1$, а $d = -1$, то получим

$$\|x \ y\| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \|x \ -y\| = \|x^* \ y^*\|,$$

откуда видно, что реализуется операция отображения относительно оси X .

2. Если $a = -1$ и $d = 1$, то получим

$$\|x \ y\| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \|-x \ y\| = \|x^* \ y^*\|,$$

откуда видно, что реализуется операция отображения относительно оси Y .

3. Если $a = -1$ и $d = -1$, то получим

$$\| x \ y \| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \| -x \ -y \| = \| x^* \ y^* \|,$$

откуда видно, что реализуется операция отображения относительно начала координат.

Таким образом, элементы главной диагонали a и d матрицы преобразования реализуют операции всех видов масштабирования и всех видов отображений (в том числе с одновременным масштабированием).

4. Пусть $a = d = 1$, а элементы b и c записаны в общем виде. Тогда:

$$\| x \ y \| \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{vmatrix} = \| (x+cy) \ (bx+y) \| = \| x^* \ y^* \|$$

Как видно из преобразования, новые значения координат x^* и y^* линейно зависят от исходных координат. Такая операция называется сдвигом, а элементы b и c обеспечивают её выполнение вдоль соответствующих осей.

С помощью матрицы преобразования 2×2 можно реализовать дополнительно операцию вращения точки вокруг начала координат.

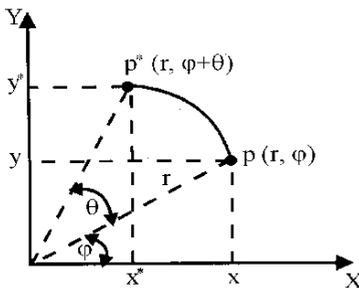


Рис. 1.2. Вращение на плоскости

Вращение на плоскости. Рассмотрим двухмерное вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости XU . Если применить полярную систему координат, то координаты точки $P(r, \varphi)$ после поворота на угол Θ получают вид $P^*(r, \varphi + \Theta)$ (рис. 1.2).

Для исходной точки P :

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi.$$

Для точки P^* имеем:

$$x^* = r \cos(\varphi + \Theta) = r \cos \varphi \cos \Theta - r \sin \varphi \sin \Theta;$$

$$y^* = r \sin(\varphi + \Theta) = r \sin \varphi \cos \Theta + r \cos \varphi \sin \Theta.$$

Учитывая, что $r \cos \varphi = x$, а $r \sin \varphi = y$, имеем

$$x^* = x \cos \Theta - y \sin \Theta; \quad y^* = x \sin \Theta + y \cos \Theta.$$

Так как $P^* = P M (R(\Theta))$, то

$$\left\| \begin{matrix} x & y \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x \cos \Theta - y \sin \Theta & x \sin \Theta + y \cos \Theta \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, матрица вращения относительно начала координат имеет вид

$$M(R(\Theta)) = \left\| \begin{matrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{matrix} \right\|.$$

Эта матрица соответствует комбинации изменения масштаба и сдвига, но оставляет размеры фигуры неизменными.

Отображение изображения определяется его поворотом на 180° вокруг оси, лежащей в плоскости xy . Характерные случаи отображения треугольника с точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$ приведены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Пример отображения треугольника

$\left\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} \right\ $	$\left\ \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\ $	$==$	$\left\ \begin{matrix} -x_1 & y_1 \\ -x_2 & y_2 \\ -x_3 & y_3 \end{matrix} \right\ $	Поворот (отображение) на 180° относительно оси y
$\left\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} \right\ $	$\left\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\ $	$==$	$\left\ \begin{matrix} x_1 & -y_1 \\ x_2 & -y_2 \\ x_3 & -y_3 \end{matrix} \right\ $	Поворот (отображение) на 180° относительно оси x
$\left\ \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} \right\ $	$\left\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\ $	$==$	$\left\ \begin{matrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \\ y_3 & x_3 \end{matrix} \right\ $	Поворот (отображение) на 180° относительно линии $x = y$

Рассмотренный материал позволяет сделать следующие выводы:

1. Используя операции умножения векторов положения точек на матрицы преобразования, можно управлять формой и положением фигуры.
2. Использование матрицы преобразования 2×2 не позволяет выполнить операцию переноса точки и преобразования начала координат, что является ограничением, которое преодолеем далее введением однородных координат.

1.3. Однородные координаты

Все преобразования, рассмотренные ранее, с помощью матрицы преобразований 2×2 не позволили выполнить операцию преобразования начала координат, а также преобразование переноса с помощью унифицированной операции умножения матриц. Преобразование переноса, как известно, реализуется с помощью операции сложения.

В связи с тем, что геометрическое преобразование, примененное к объекту или совокупности объектов, часто является композицией (последовательностью) нескольких преобразований, актуальна задача перехода к одной базовой операции, т.е. выполнение всей цепочки преобразований с помощью только операции умножения. Такая задача решается на базе искусственного приёма, который называется однородным координатным преобразованием. Реализация этого приёма заключается в переходе к однородным координатам и выполнения с ними преобразований, что позволяет все основные операции (в том числе перенос и преобразование начала координат) выполнить посредством перемножения матриц.

Математическое обеспечение современных графических систем и систем геометрического моделирования функционирует на базе однородных координат и их преобразований.

Переход от обычных координат к однородным координатам выполняется посредством введения в векторы положения точек P и P^* третьей дополнительной компоненты в случае плоскости или четвёртой компоненты в случае трёхмерного пространства. Тогда вектор-строка $\| x \ y \ \|$ будет представлена вектор-строкой $\| x \ y \ 1 \ \|$ для плоскости или $\| x \ y \ z \ \|$ будет представлена вектор-строкой $\| x \ y \ z \ 1 \ \|$ в случае трёхмерного пространства.

После введения дополнительной координаты необходимо дополнить матрицу преобразования 2×2 третьей строкой, для соблюдения равенства числа столбцов в векторе положения точки, и числа строк в матрице преобразования, что является необходимым условием при умножении двух матриц. В этом случае матрица преобразования будет иметь размерность 3×2 . После этого, выполнив умножение вектора положения точки на матрицу преобразования, получим

$$\| x \ y \ 1 \| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m & n \end{array} \right\| = \| (x+m) \ (y+n) \| = \| x^* \ y^* \|.$$

В приведённом результате видно, что компоненты m и n реализуют операцию переноса исходной точки в новое положение.

В связи с тем, что матрица 3×2 не имеет обратной матрицы (не является квадратной), то отсекается класс задач, который связан с нахождением обратных матриц. Этот недостаток легко преодолеть, если ввести третий столбец в матрицу преобразования 3×2 . Тогда матрица становится квадратной размерностью 3×3 , а преобразованные координаты представляются в виде однородных координат, что иллюстрирует следующее преобразование:

$$\| x \ y \ 1 \| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{array} \right\| = \| (x+m) \ (y+n) \ 1 \| = \| x^* \ y^* \ 1 \|.$$

Для того чтобы в полной мере выяснить влияние третьего столбца на преобразование объекта, дополним матрицу 3×2 столбцом в общем виде

$$\left\| \begin{array}{c} p \\ q \\ s \end{array} \right\| \text{ в отличие от } \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\|.$$

Тогда результатом преобразования точки $\| x \ y \ 1 \|$ будет точка $\| x^* \ y^* \ h \|$, где $h \neq 1$, и поэтому плоскость находится в трёхмерном пространстве, а её положением можно управлять значениями p, q, s .

Таким образом, однородное координатное преобразование можно определить следующим образом. Чтобы выполнить однородное координатное преобразование необходимо:

- 1) представить n -мерный вектор $(n + 1)$ -мерным вектором;
- 2) выполнить в $(n + 1)$ -мерном пространстве требуемые преобразования;
- 3) выполнить деление полученных координат на величину h , чтобы вернуться в исходное пространство.

Пусть плоскость, в которой лежит вектор, полученный в результате однородного координатного преобразования, находится в $(n + 1)$ -мерном пространстве. В общем случае, $h \neq 1$, откуда следует, что однородным представлением точки $P(x, y)$ может быть любая тройка чисел, полученная

умножением тройки $(x, y, 1)$ на скалярный множитель $h \neq 0$, т.е. $P^*(hx, hy, h)$, и наоборот, по любой тройке (x_1, x_2, x_3) можно определить прямоугольные координаты $x = x_1/x_3$ и $y = x_2/x_3$.

Операция умножения на скаляр является операцией пропорционального масштабирования по осям X и Y . Следовательно, преобразованные координаты x^* и y^* получаются с помощью лучей, проходящих через начало координат и каждую точку изображения.

В связи с этим однородное координатное представление точки не является единственным. Например, исходная точка $(3, 2)$ может иметь однородные координаты $(24, 16, 8)$, $(12, 8, 4)$ или $(6, 4, 2)$. При этом равенство дополнительной координаты единице означает, что исходные координаты и полученные в результате преобразований равны. При $h \neq 1$ возврат в обычные координаты реализуется как $x^* = X/h$ и $y^* = Y/h$, т.е. выполнением нормализации однородных координат.

Запишем матрицу преобразования 3×3 общего вида в однородных координатах

$$T = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ m & n & s \end{pmatrix},$$

и проанализируем влияние элементов p и q на результат преобразования. Для этого исключим в матрице преобразования уже рассмотренные операции.

Тогда

$$\| x \quad y \quad 1 \| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \| x \quad y \quad (px + qy + 1) \| = \| X \quad Y \quad H \|$$

где $X = x$, $Y = y$, а $H = px + qy + 1$.

Получилось уравнение плоскости $px + qy - H + 1 = 0$, в которой лежат преобразованные точки в однородных координатах. Управляя положением плоскости за счёт переменных p и q , можно выполнять операции построения различных видов перспективных проекций.

Таким образом, были рассмотрены все операции преобразования, которые можно реализовать с помощью матрицы 3×3 для двумерных однородных координат. В результате сделаем следующие выводы.

1. В матрице преобразования 3×3 можно выделить четыре подматрицы:

- подматрицу 2×2 , содержащую элементы a, b, c, d ;
- подматрицу 1×2 , содержащую элементы m и n ;
- подматрицу 2×1 , содержащую элементы p и q ;
- подматрицу 1×1 , содержащую скалярный элемент s .

$$\left\| \begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline m & n & s \end{array} \right\|$$

2. Элементы подматрицы 2×2 управляют всеми видами масштабирования, отображения, сдвига и вращения.

3. Элементы подматрицы 1×2 реализуют все виды операций переноса.

4. Элементы подматрицы 2×1 управляют построением всех видов перспективных проекций.

5. Элемент s выполняет операцию полного масштабирования по всем осям X и Y .

Пример 1.3. Прямая линия проходит через точки $A(5, 3)$ и $B(6, 8)$. К прямой требуется применить однородное координатное преобразование, заданное матрицей

$$M = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

затем выполнить проецирование на плоскость $H = 1$ и записать уравнение результирующей прямой линии.

Решение. Запишем исходные однородные координаты для точек $A(5, 3)$ и $B(6, 8)$ в виде матрицы P

$$P = \left\| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \end{array} \right\|.$$

Найдём матрицу P^* , получающуюся после применения заданного однородного координатного преобразования:

$$P^* = PM = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 30 & 20 \\ 20 & 58 & 37 \end{vmatrix}$$

Выполним операцию проецирования на плоскость $H = I$. Для этого достаточно выполнить нормализацию полученных координат

$$P^* = \begin{vmatrix} 13/20 & 30/20 & 1 \\ 20/37 & 58/37 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,65 & 1,5 & 1 \\ 0,54 & 1,57 & 1 \end{vmatrix}$$

В результате получаем новые значения координат точек, через которые будут проходить прямая $A^*(0,65; 1,5)$ и $B^*(0,54; 1,57)$. Запишем уравнение прямой A^*B^* .

$$\frac{x^* - x_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{y^* - y_1^*}{y_2^* - y_1^*}; \quad \text{или} \quad \frac{x^* - 0,65}{0,54 - 0,65} = \frac{y^* - 1,5}{1,57 - 1,5};$$

$$\text{или} \quad y^* = -0,18x^* + 0,62.$$

Уравнение исходной прямой АВ запишется в виде

$$\frac{x-5}{6-5} = \frac{y-3}{8-3} \quad \text{или} \quad y = 5x - 22.$$

После выполнения условий задачи исходная прямая $y = 5x - 22$, проходящая через точки $A(5, 3)$ и $B(6, 8)$, трансформируется в прямую $y^* = -0,18x^* + 1,62$, проходящую через точки $A^*(0,65; 1,5)$ и $B^*(0,54; 1,57)$, что показано на рис. 1.3.

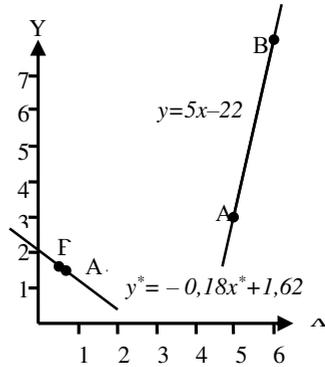


Рис. 1.3. К примеру 1.3

1.4. Классы задач геометрического моделирования

В компьютерной графике имеется класс задач со следующей постановкой.

Известны две матрицы P и P^* . Матрица P описывает исходную фигуру P , матрица P^* описывает фигуру, полученную в результате применения к P некоторого преобразования T , т. е. существует взаимосвязь $PT = P^*$. Требуется вычислить неизвестную матрицу преобразования T .

Известно, что решением такой задачи является $T = P^{-1} P^*$, где P^{-1} – обратная матрица от квадратной матрицы P .

Пример 1.4. Заданы фигуры P и P^* (рис.1.4). К фигуре P применены аффинные операции, которые преобразовали координаты фигуры P в новые координаты фигуры P^* .

Необходимо вычислить матрицу преобразования T , трансформирующую изображение P в изображение P^* .

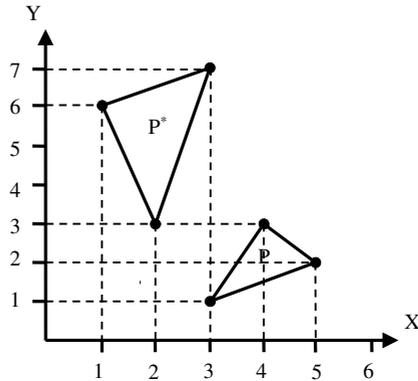


Рис. 1.4. К примеру 1.4

Решение. Зададим изображения P и P^* в матричном виде в однородных координатах

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $P^* = P T$, то решением относительно T является $T = P^{-1} P^*$. Применим к матрице P традиционную схему нахождения обратной матрицы P^{-1} .

1. Выполним разложение матрицы, например, по элементам первой строки и вычислим её определитель:

$$\Delta = 3(-1^{1+1}) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1^{1+2}) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1^{1+3}) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 7 = -3.$$

2. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы P :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

3. Вычисленные алгебраические дополнения в соответствии с их индексами запишем в матрицу A и транспонируем её в матрицу A^t :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad A^t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. Разделим каждый элемент матрицы A^t на определитель Δ . Тогда получим $P^{-1} = A^t / \Delta$ и вычислим $T = P^{-1} P^*$:

$$T = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Убедимся в правильности вычисления матрицы T , проверив $PT = P^*$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5/3 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.5. Вычислить матрицу M однородного координатного преобразования, которое переводит точку $P(x, y, z, 1)$ в точку

$$P^* ((x+5y+2z), (6x+y+4z), (2x+3y+z), 1).$$

Решение. Запишем общее решение $P M = P^*$ или

$$\|x \ y \ z \ 1\| \ ? \ \| = \| (x+5y+2z) \ (6x+y+4z) \ (2x+3y+z) \ 1 \|$$

Как видно, точка P^* может получить новые координаты x^* , y^* и z^* , обозначенные в результате, только в одном случае, когда матрица M будет иметь следующий вид, что следует из правила перемножения матриц:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Если матрицу преобразования интерпретировать как оператор, то операция перемножения матриц будет применяться для преобразования координат исходных точек. В этом случае матрица описания исходного объекта и матрица преобразования должны быть известны.

Таким образом, выделены два крупных класса задач, один из которых связан с поиском неизвестной матрицы преобразования одного геометрического объекта в другой, а во втором классе задач известная матрица преобразования используется для геометрического преобразования системы точек объекта.

1.5. Композиция преобразований

В процессе работы над проектом разработчик выполняет последовательность действий, приводящих к желаемому результату. Поэтому, как правило, используются цепочки преобразований, которые также называются комбинированными операциями. При выполнении операции перемножения матриц в цепочке важно не забывать, что операция перемножения матриц некоммукативна, т.е. $AB \neq BA$. Поэтому необходимо соблюдать порядок перемножения матриц в комбинированных операциях.

Так как матрица сложного преобразования (композиции преобразований или цепочки преобразований) вычисляется посредством произведения матриц цепочки преобразований, то необходимо в записи цепочки различать матрицы преобразований. Поэтому обозначим:

$M(T)$ – матрица преобразования, реализующая перенос;

$M(R(\alpha))$ – матрица, выполняющая преобразование поворота на угол α вокруг начала координат;

$M(E)$ – матрица, выполняющая операции всех видов масштабирования.

Запишем положение точки в однородных координатах и приведём матрицы основных преобразований точки $P(x, y, 1)$ в точку $P^*(x^*, y^*, 1)$.

1. Перенос точки $P(x, y)$ на вектор $T(t_x, t_y)$:

$$P^* = P \cdot M(T), \text{ где } M(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Поворот точки $P(x, y)$ относительно начала координат на угол α :

$$P^* = P \cdot M(R(\alpha)), \text{ где } M(R(\alpha)) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Масштабирование на вектор $E(e_x, e_y)$:

$$P^* = P \cdot M(E), \text{ где } M(E) = \begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Сложным преобразованием называется композиция (цепочка) базовых преобразований, которые применяются последовательно.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.6. Задан объект P , который необходимо перенести на вектор $T(t_x, t_y)$, затем выполнить вращение на угол α относительно начала координат.

Решение. Применим к объекту P операцию переноса и запишем результат как $P' = PM(T)$. После этого применим операцию вращения. Тогда

$$P^* = P' \cdot M(R(\alpha)) \quad \text{или} \quad P^* = P \cdot M(T) \cdot M(R(\alpha)).$$

На основании свойства ассоциативности перемножим сначала матрицы $M(T)$ и $M(R(\alpha))$ и определим матрицу, выполняющую полное преобразование:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ (t_x \cos \alpha - t_y \sin \alpha) & (t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

По аналогии можно определить матрицу любого сложного преобразования, представляющего цепочку базовых преобразований.

Напомним, что вращение в однородных координатах для плоскости

$$M(R(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняет операцию поворота на угол α относительно начала координат. В случае, когда вращение необходимо выполнить относительно произвольной точки, то эта точка сначала помещается в начало координат.

Пример 1.7. Вычислить матрицу вращения на угол α относительно произвольной точки $C(x_c, y_c)$.

Решение. Требуемое преобразование выполняется в три этапа:

- 1) сначала выполняем операцию переноса точки $C(x_c, y_c)$ в начало координат, т.е. переносим на $C(-x_c, -y_c)$;
- 2) затем выполняем операцию вращения на угол α относительно начала координат;
- 3) на последнем этапе применяем операцию переноса на $C(-x_c, -y_c)$, чтобы вернуть центр вращения в исходное положение.

Выполнив рассмотренные этапы, получим следующее преобразование:

$$\begin{aligned} P^* &= P \cdot M(T(-C)) \cdot M(R(\alpha)M(T(C))) = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Cx & Cy & 1 \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Cx & -Cy & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ Cx & Cy & 1 \end{pmatrix} = \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ (-Cx \cos \alpha + Cy \sin \alpha + Cx) & (-Cx \sin \alpha - Cy \cos \alpha + Cy) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим ещё один пример, иллюстрирующий применение преобразования масштабирования относительно произвольной точки.

Отметим, что матрица масштабирования в однородных координатах для плоскости на вектор $E(e_x, e_y)$

$$M(E) = \begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

выполняет операцию масштабирования относительно начала координат. В случае, когда масштабирование необходимо выполнить относительно произвольной точки, то эта точка сначала помещается в начало координат.

Пример 1.8. Вычислить матрицу преобразования масштабирования относительно точки $C(x_c, y_c)$ и масштабом $E(e_x, e_y)$.

Разница с задачей из примера 1.7 заключается в выполнении операции масштабирования, а не вращения относительно произвольной точки $C(x_c, y_c)$. Поэтому поступим аналогично и выполним следующую цепочку преобразований:

- 1) перенести точку $C(x_c, y_c)$ на $(-C)$ для того, чтобы точка $C(x_c, y_c)$ совпала с началом координат;
- 2) выполнить масштабирование на вектор $E(e_x, e_y)$;
- 3) перенести точку $C(x_c, y_c)$ на $(-C)$ для того, чтобы вернуть её в прежнее положение. Тогда

$$P^* = P M(T(-C)) M(E) M(T(C)).$$

Пример 1.9. Задано двумерное изображение P $((2, 2, 2), (3, 2, 2), (4, 3, 4))$ в ОК. Вычислить в ОК изображение P^* для следующей цепочки преобразований: сдвиг на вектор $(4, 5)$, отображение относительно начала координат, масштабирование на вектор $(9, 9)$. Нормализовать результат.

Решение. Запишем в операторной форме уравнение требуемой в задаче цепочки преобразований:

$$P^* = P M(Cд) M(От) M(E),$$

где $M(Cд)$, $M(От)$ и $M(E)$ – матрицы преобразования, реализующие операции сдвига, отображения и масштабирования соответственно.

$$P^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставим в уравнение матрицы с заданными параметрами, тогда воспользуемся свойством ассоциативности матричного умножения и выполним сначала перемножение матриц отображения и масштабирования. Тогда цепочка преобразований запишется как

$$P^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После выполнения цепочки умножений получим матрицу

$$P^* = \begin{pmatrix} -90 & -108 & 2 \\ -99 & -153 & 2 \\ -126 & -117 & 4 \end{pmatrix}$$

Нормализуем матрицу P^* и получим требуемый результат

$$P_n^* = \begin{pmatrix} -90/2 & -108/2 & 2/2 \\ -99/2 & -153/2 & 2/2 \\ -126/4 & -117/4 & 4/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -54 & 1 \\ -49,5 & -76,5 & 1 \\ -63 & -58,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6. Базовые преобразования в трёхмерной области

Наиболее эффективно изучить форму объекта можно, поместив его в трёхмерное пространство, применять к нему различные базовые операции, такие как поворот, изменение масштаба, отображения, построение проекций и др. В этом случае форма объекта рассматривается со всех сторон, и выделяются те или иные её аспекты.

Распространим все результаты для плоскости на трёхмерную область. Так как точка P теперь находится в трёхмерной области, то вектор её положения в однородных координатах для $h = 1$ запишется как $\|x \ y \ z \ 1\|$ или при

$h \neq 1$ как $\| hx \ hy \ hz \ h \|$. Для получения трёхмерных декартовых координат необходимо однородные координаты нормализовать, т.е. разделить на h .

Преобразования объектов в трёхмерной области аналогично преобразованиям объектов на плоскости. Аналогично определяются базовые преобразования, а композиция преобразований вычисляется перемножением матриц, входящих в цепочку преобразований.

В трёхмерной области появляется разнообразие видов вращений, например, можно вращать изображение вокруг координатных осей или вокруг оси, которая проходит через начало координат и заданную точку, можно также вращать изображение вокруг оси, которая не обязательно проходит через начало координат. В результате появляется пять видов вращений, среди которых три вида вращения широко используются в проективной геометрии при построении проекций.

Базовые операции в трёхмерной области. Как и для плоскости, определим набор базовых операций для трёхмерной области, учитывая, что теперь точка представляется вектором $\| x \ y \ z \ 1 \|$, а матрица преобразования для однородных координат имеет размерность 4×4 .

Преобразование переноса. В матричной форме операция преобразования переноса на вектор $T = \| t_x \ t_y \ t_z \|$ запишется в виде $P^* = P \cdot M(T)$, где

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{pmatrix}.$$

Масштабирование. Преобразование масштаба на вектор $E (e_x, e_y, e_z)$ определяется как $P^* = P \cdot M(E)$, где

$$M(E) = \begin{pmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось, преобразование пропорционального масштабирования по всем осям можно реализовать за счет элемента s матрицы $M(E)$. Тогда

$$M(E) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}.$$

Отметим, что этот же результат получается при $s = 1$ и остальных элементах главной диагонали равных $1/s$. В этом случае

$$M(E) = \begin{vmatrix} 1/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В преобразовании поворота выделяют следующие виды вращения:

- вращения вокруг осей X, Y, Z ;
- поворот относительно прямой, проходящей через начало координат;
- поворот относительно произвольной прямой.

Рассмотрим сначала поворот относительно прямой, которая проходит через начало координат и точку A . Как известно, направление оси вращения задаётся единичным вектором $n = n_1i + n_2j + n_3k$, где $n_1 = \cos\alpha$, $n_2 = \cos\beta$, $n_3 = \cos\gamma$ (n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы). Следовательно, если прямая проходит через начало координат и точку $A(x_1, y_1, z_1)$, то

$$n_1 = \cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \quad n_2 = \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \quad n_3 = \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

а матрица вращения будет иметь следующий вид:

$$M(R(\Theta)) = \begin{vmatrix} (n_1^2 + (1 - n_1^2)\cos\Theta) & \begin{pmatrix} n_1n_2(1 - \cos\Theta) + \\ + n_3 \sin\Theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n_1n_3(1 - \cos\Theta) + \\ + n_2 \sin\Theta \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} n_2n_1(1 - \cos\Theta) - \\ - n_3 \sin\Theta \end{pmatrix} & (n_2^2 + (1 - n_2^2)\cos\Theta) & \begin{pmatrix} n_2n_3(1 - \cos\Theta) + \\ + n_1 \sin\Theta \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} n_3n_1(1 - \cos\Theta) + \\ + n_2 \sin\Theta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n_3n_2(1 - \cos\Theta) + \\ + n_1 \sin\Theta \end{pmatrix} & (n_3^2 + (1 - n_3^2)\cos\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Преобразование поворота вокруг координатных осей. Эти виды вращений являются частными случаями обобщенной матрицы вращения $M(R(\Theta))$ при задании значений n_1, n_2, n_3 .

Тогда матрица преобразования поворота относительно оси X на угол Θ получается из $M(R(\Theta))$ при $n_1 = 1$ и $n_2 = n_3 = 0$:

$$M(R(X, \Theta)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования поворота относительно оси Y на угол Θ получается из $M(R(\Theta))$ при $n_2 = 1$ и $n_1 = n_3 = 0$:

$$M(R(Y, \Theta)) = \begin{vmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица преобразования поворота относительно оси Z на угол Θ получается из $M(R(\Theta))$ при $n_3 = 1$ и $n_2 = n_1 = 0$:

$$M(R(Z, \Theta)) = \begin{vmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотренные преобразования поворота вокруг координатных осей запишем в матричной форме

$$P^* = P \cdot M(R(X, \Theta)); \quad P^* = P \cdot M(R(Y, \Theta)); \quad P^* = P \cdot M(R(Z, \Theta)).$$

При повороте относительно прямой, заданной двумя произвольными точками, прямая не проходит через начало координат.

Алгоритм решения этого вопроса аналогичен алгоритму вращения или масштабирования относительно произвольной точки, рассмотренному для плоскости. В этом случае рассматриваемый вид вращения будет выполняться в три шага:

- на первом шаге выполняется операция переноса оси вращения в положение, при котором она будет проходить через начало координат;

- на втором шаге выполняется поворот изображения относительно нового положения оси;
- на третьем шаге ось вращения и изображение переносится в исходное положение.

Пусть ось проходит через точку $A = || k m n I ||$. В этом случае приведённые этапы преобразования в матричной форме будут иметь следующий вид:

$$P^* = P M(T(-A)) M(R(\Theta)) M(T(A)),$$

откуда

$$P^* = P \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & -m & -n & 1 \end{vmatrix} M(R(\Theta)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & m & n & 1 \end{vmatrix}.$$

Операция сдвига. В трёхмерной области операцию сдвига (линейного преобразования) обеспечивают элементы b, c, f, d, h, i в общей матрице преобразования 4×4 . Тогда

$$P^* = P \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \|(x + yd + zh)(bx + y + iz)(cx + fy + z)I\|,$$

где $x^* = x + yd + zh$; $y^* = bx + y + iz$; $z^* = cx + fy + z$.

Из полученного выражения видно, что элементы d и h первого столбца управляют операцией сдвига по X . Элементы b и i второго столбца управляют сдвигом по Y , а элементы c и f третьего столбца – сдвигом по Z .

Пример 1.10. Пусть элементы $b = c = f = i = 0$, тогда

$$P^* = P \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \|(x + yd + zh) \quad y \quad z \quad I\|,$$

где $x^* = x + yd + zh$; $y^* = y$; $z^* = cx + fy + z$. То есть выполнен сдвиг по X .

Пусть элементы $b = i = d = h = 0$, тогда

$$P^* = P \cdot \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} x & y & (cx + yf + z) & 1 \end{array} \right\|,$$

где $x^* = x$; $y^* = y$; $z^* = z$, т.е. выполнен сдвиг по Z .

По аналогии с плоскостью выделим в обобщенной матрице преобразования 4×4 для трёхмерных однородных координат 4 подматрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ l & m & n & s \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc|c} 3x3 & 3x1 \\ 1x3 & 1x1 \end{array} \right\|.$$

Подматрица 3×3 управляет сдвигом, масштабированием, вращением и отображением. Подматрица 1×3 управляет переносом. Подматрица 3×1 управляет операцией построения перспективных проекций. Скалярный элемент s управляет общим пропорциональным масштабированием по всем осям.

Упражнения и контрольные вопросы для самостоятельной работы к разделу 1

Упражнение 1. Какие операции преобразования объектов выполняются приведённой матрицей?

- 1) масштабирование вдоль осей X, Y, Z ;
- 2) перенос вдоль осей X, Y, Z ;
- 3) отображение относительно начала координат;
- 4) сдвиг вдоль осей X, Y, Z ;
- 5) поворот относительно координатных осей.

$$\left\| \begin{array}{cccc} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Упражнение 2. Какие операции преобразования объектов выполняются приведённой матрицей?

- 1) масштабирование по осям X, Z ;
- 2) перенос по осям X, Z ;
- 3) отображение относительно оси Y ;

$$\left\| \begin{array}{cccc} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ m & 0 & k & 1 \end{array} \right\|$$

- 4) сдвиг по осям X, Z ;
- 5) вращение вокруг осей X, Z .

Упражнение 3. Какие операции преобразования объектов выполняются приведённой матрицей?

$$\begin{pmatrix} -a & e & 0 & 0 \\ d & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) масштабирование по осям X, Y ;
- 2) перенос по осям X, Y ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по осям X, Y ;
- 5) вращение вокруг осей X, Y .

Упражнение 4. Какие операции преобразования объектов выполняются приведённой матрицей?

$$\begin{pmatrix} 1 & d & e & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) масштабирование по осям Y, Z ;
- 2) перенос по осям Y, Z ;
- 3) отображение относительно оси X ;
- 4) сдвиг по осям Y, Z ;
- 5) вращение вокруг осей Y, Z .

Упражнение 5. Какие операции преобразования объектов выполняются приведённой матрицей?

$$\begin{pmatrix} 1 & e & f & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & k & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) масштабирование вдоль осей X, Y, Z ;
- 2) перенос вдоль осей X, Y, Z ;
- 3) отображение относительно начала координат;
- 4) поворот относительно координатных осей.
- 5) сдвиг вдоль осей X, Y, Z .

Упражнение 6. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;
- 2) поворот относительно оси Y ;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) поворот относительно осей X и Y .

Упражнение 7. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;

- 2) поворот относительно оси Y ;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) поворот относительно осей X и Y ;
- 5) поворот относительно начала координат.

Упражнение 8. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;
- 2) поворот относительно оси Y ;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) поворот относительно осей X и Y ;
- 5) перенос по Z .

Упражнение 9. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;
- 2) поворот относительно оси Y ;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) операция переноса вдоль оси X ;
- 5) перенос по Z .

Упражнение 10. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;
- 2) поворот относительно оси Y ;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) операция переноса вдоль оси X ;
- 5) операция переноса вдоль оси Y .

Упражнение 11. Установите правильную последовательность матриц преобразований для выполнения цепочки операций: масштабирование – отображение – перенос – сдвиг – построение проекции.

1)	2)	3)	4)	5)
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & \epsilon & c & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Упражнение 12. Установите правильную последовательность матриц преобразований для выполнения цепочки операций: масштабирование – перенос – отображение – сдвиг – построение проекции.

1)	2)	3)	4)	5)
$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & \epsilon & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & a & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 13. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) масштабирование по Y, Z ;
- 2) сдвиг по X ;
- 3) отображение относительно начала координат;
- 4) перенос по X, Z .

Упражнение 14. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по Y, Z ;
- 2) сдвиг по X ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) масштабирование по Y, Z .

Упражнение 15. Какую операцию реализуют в матрице преобразования элементы m, n, l ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & n & l & 1 \end{vmatrix}$$

Упражнение 16. Какую операцию реализуют в матрице преобразования элементы b, c, d, f, I, j ?

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ i & j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 17. Какую операцию реализуют в матрице преобразования положительные элементы a, b, c ?

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 18. Какую операцию выполняет матрица преобразования?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 19. Какую операцию выполняет матрица преобразования?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 20. Какую операцию выполняет матрица преобразования?

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 21. Какие операции реализуют в матрице преобразования отрицательные элементы a, b, c ?

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 22. Какую операцию выполняет положительный элемент S в матрице преобразования?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}$$

Упражнение 23. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & e & c & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по X ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z .

Упражнение 24. Задано изображение $P((1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 3, 4))$. Вычислить матрицу преобразования в ОК для следующих цепочек преобразований:

- 1) поворот на 45^0 вокруг точки $c(8, 2)$, с последующим переносом на вектор $m(3, 7)$ и отображением относительно начала координат;
- 2) отображение относительно оси x , с последующим масштабированием на вектор $e(2, 3)$ относительно точки $(6, 7)$ и отображением относительно y ;
- 3) сдвиг на вектор $(4, 5)$ с последующим отображением относительно начала координат и полным масштабированием с коэффициентом 9 ;
- 4) поворот вокруг оси x , оси y на 45^0 , сдвиг на вектор $(7, 9)$;
- 5) перенести на вектор $m(1, 3)$, выполнить вращение на 30^0 вокруг точки $C(2, 2)$ и отобразить относительно начала координат.

Упражнение 25. В какой плоскости после нормализации координат находится изображение?

- 1) $H = 10$;
- 2) $H = 4$;
- 3) $H = 8$;
- 4) $H = 0,5$;
- 5) $H = 1$.

Упражнение 26. Укажите правильную последовательность действий при вычислении обратной матрицы.

- 1) транспонирование матрицы;
- 2) вычисление определителя;
- 3) вычисление алгебраических дополнений.

Упражнение 27. Укажите правильную последовательность перемножения матриц преобразований при вращении вокруг произвольной точки $k(X, y)$.

- 1) $M(R(\alpha))$;
- 2) $M(T(-k))$;
- 3) $M(T(k))$.

Упражнение 28. Какова должна быть размерность матрицы преобразования плоской фигуры, заданной в однородных координатах?

- 1) 2×2 ;
- 2) 1×3 ;
- 3) 3×3 ;
- 4) 4×4 ;
- 5) 3×2 .

Упражнение 29. Укажите значение элемента матрицы преобразования $\|a_{ij}\|_{3 \times 3}$, управляющего операцией отображения однородных координат.

- 1) 5;
- 2) 3;
- 3) -1;
- 4) 2;
- 5) 10.

Упражнение 30. Какие операции преобразования объектов выполняются матрицей?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

- 1) поворот относительно оси X ;
- 2) одинаковое масштабирование по всем осям;
- 3) поворот относительно оси Z ;
- 4) операция переноса вдоль оси X ;
- 5) операция переноса вдоль оси Y .

Упражнение 31. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)

б)

в)

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по X ;

- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z .

Упражнение 32. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & с & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по Z ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z .

Упражнение 33. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & с & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по Z ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z .

Упражнение 34. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\left\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & b & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & с & 1 \end{array} \right\ $

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по X и Y ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z .

Упражнение 35. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по X и Z ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z ;
- 6) отображение относительно оси X и Z .

Упражнение 36. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) сдвиг по X, Y, Z ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по Y и Z ;
- 5) масштабирование по оси Z ;
- 6) перенос по X .

Упражнение 37. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & v & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & -1 & f & 0 \\ h & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по Y, Z ;
- 2) сдвиг по X, Y, Z ;
- 3) отображение относительно оси Y и Z ;
- 4) сдвиг по Y ;
- 5) масштабирование по оси Z ;
- 6) перенос по X, Z .

Упражнение 38. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & v & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) поворот относительно оси X ;
- 3) отображение относительно оси Z ;
- 4) сдвиг по X, Y и Y ;
- 5) масштабирование по оси Z ;
- 6) перенос по Y, Z .

Упражнение 39. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & v & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z ;
- 2) поворот относительно оси X ;
- 3) сдвиг по X, Y и Z ;
- 4) поворот относительно оси Y .

Упражнение 40. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & в & c & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z;
- 2) поворот относительно оси X;
- 3) отображение относительно оси Z;
- 4) сдвиг по X, Y и Z;
- 5) поворот относительно оси Z;
- 6) перенос по Z.

Упражнение 41. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) перенос по X, Y, Z;
- 2) поворот относительно оси X;
- 3) отображение относительно оси Z;
- 4) поворот относительно оси Y;
- 5) поворот относительно оси Z;
- 6) перенос по X, Y.

Упражнение 42. Установите правильную последовательность матриц преобразований для выполнения цепочки операций: поворот вокруг оси X – отображение – построение проекции – сдвиг.

1)	2)	3)	4)
$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & a & в & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 43. Установите правильную последовательность матриц преобразований для выполнения цепочки операций: построение проекции – масштабирование – сдвиг – поворот вокруг оси Y .

$$\begin{array}{cccc}
 1) & 2) & 3) & 4) \\
 \left\| \begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

Упражнение 44. Установите правильную последовательность матриц преобразований для выполнения цепочки операций: сдвиг – поворот вокруг оси X – отображение – построение проекции.

$$\begin{array}{cccc}
 1) & 2) & 3) & 4) \\
 \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции преобразования можно выполнить на плоскости, используя матрицу преобразования 2×2 ?
2. Что такое однородное координатное преобразование и как оно реализуется?
3. Какие матрицы однозначно задают объект для визуализации?
4. Перечислите базовый набор операций преобразования объектов.
5. Какие операции преобразования для плоскости нельзя выполнить с помощью матрицы 2×2 ?
6. Что означает композиция преобразований?
7. Раскройте процесс однородного координатного преобразования.
8. Что означает операция нормализации координат?
9. Является ли однородное координатное представление точки единственным?
10. Выделите в матрице преобразования 3×3 подматрицы и опишите операции преобразования, за которые отвечают элементы каждой из них.

11. Почему однородное координатное представление точки не является единственным?
12. Какие дополнительные операции преобразования можно выполнить за счёт использования матрицы 3×3 для плоскости?
13. Приведите все виды вращения в трёхмерном пространстве.
14. Какие элементы и за какие операции отвечают в матрице преобразования 4×4 для трёхмерной области?
15. Приведите матрицы вращения объекта вокруг осей X , Y и Z .
16. Перечислите классы задач геометрического моделирования.
17. Приведите алгоритм реализации операции масштабирования или вращения относительно произвольной точки.
18. Почему необходимо соблюдать порядок перемножения матриц в комбинированных операциях?
19. Приведите алгоритм вычисления обратной матрицы.
20. Как выполняется вращение объекта вокруг прямой, не проходящей через начало координат?
21. В чём заключается различие в преобразованиях сдвига и переноса?
22. Какую операцию необходимо выполнить для возврата в исходное пространство после реализации преобразований в однородных координатах?
23. Объект находится в четырёхмерном пространстве. Какую размерность будет иметь матрица его преобразования для однородных координат?

2. ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

2.1. Классификация проекций

При выполнении проецирования преобразуется размерность системы координат. Поэтому исходные точки в системе координат размерностью n преобразуются в точки системы координат размерности меньше n .

Проекция любого объекта формируется прямыми проецирующими лучами (проекторами), которые выходят из центра проецирования, проходят через точки объекта и образуют на картинной (проекционной) плоскости проекцию. Проекции, построенные по описанному правилу, являются плоскими геометрическими проекциями, так как проекционная поверхность – плоская, а проецирующие лучи (проекторы) – прямые. Когда плоскость проекции криволинейная или проекторы кривые, то образуется класс проекций, являющихся либо неплоскими, либо негеометрическими. Такие проекции характерны для некоторых картографических проекций.

В классификации проекций выделяются два больших класса проекций:

1. Центральные (перспективные) проекции. Характерной особенностью этого класса проекций является конечное расстояние между центром проекции и проекционной плоскостью. Поэтому для этих проекций в явном виде задаётся центр проекции.

2. Параллельные проекции. Характерной особенностью этого класса проекций является бесконечное расстояние между центром проекции и проекционной плоскостью. Поэтому для этих проекций задается направление проецирования.

Визуальная картина, которая порождается центральной (перспективной) проекцией, совпадает с картиной, которую образует фотосистема или зрительная система человека. Поэтому перспективными проекциями в основном пользуются художники и архитекторы для изображения общих планов.

Размер центральной проекции обратно пропорционален расстоянию от центра проекции до объекта, поэтому проекции параллельных ли-

ний в общем случае не параллельны, а углы сохраняются только на границах, параллельных проекционной плоскости. Вследствие этого центральная проекция непригодна для представления точной формы и размеров объекта.

Визуальная картина, которую порождает параллельная проекция, представляет собой менее реалистичное изображение. Этот класс проекций имеет истинные размеры и поэтому наиболее широко используется в техническом черчении.

На рис. 2.1 приводится классификация параллельных и центральных проекций.

Проекции		
Параллельные		Центральные
<i>АксонOMETрические:</i>	<i>Косоугольные:</i>	<i>Однофокусные</i>
<i>Ортогональные</i>	<i>Свободные</i>	<i>Двухфокусные</i>
<i>Изометрия, диметрия</i>	<i>Кабинетные</i>	<i>Трёхфокусные</i>
<i>Триметрия</i>		

Рис. 2.1. Классификация проекций

Различие между аксонометрическими и косоугольными проекциями заключается в том, какой угол проекторы составляют с проекционной плоскостью. Для аксонометрических проекций этот угол равен 90° (проекторы перпендикулярны плоскости проекции), а для косоугольных проекций – угол отличный от 90° .

АксонOMETрические проекции. Различаются несколько видов аксонометрических проекций, которые широко применяются в инженерной графике. Среди этих проекций общими являются ортогональные, диметрические, изометрические и триметрические проекции.

Отличительной особенностью ортогональных проекций является перпендикулярность проекционной плоскости координатным осям X , Y и Z . Поэтому направление проецирующих лучей совпадает с направлением координатных осей.

Отличительной особенностью диметрических проекций является равенство двух углов в плоскости проецирования, что соответствует одинаковому сокращению двух координатных осей.

Отличительной особенностью изометрических проекций является равенство всех углов в плоскости проецирования, что соответствует одинаковому сокращению трёх координатных осей.

Отличительной особенностью триметрических проекций является неравенство между собой всех трёх углов в плоскости проецирования, т.е. все координатные оси имеют разное сокращение.

2.2. Ортогональные проекции

Ортогональное проецирование складывается из получения фронтальных, профильных и горизонтальных проекций. Рассмотрим сначала ортографические проекции в плоскостях YZ ($X = 0$), XZ ($Y = 0$) и XY ($Z = 0$). Матрицы, реализующие операцию преобразования проецирования изображения в ту или иную нулевую плоскость, всегда содержат нулевой столбец, который соответствует нулевой плоскости проекции. В связи с этим матрицы проецирования будут иметь вид

$$M(X=0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(Y=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(Z=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если ортогональные проекции выполняются на плоскостях $X = p$, $Y = p$, $Z = p$, то надо применить дополнительно преобразование переноса, тогда

$$M(X=p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(Y=p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(Z=p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

Когда проектировщик находится перед монитором, то его естественной видовой плоскостью является XY с $Z = 0$. В связи с этим при рассмотрении алгоритма построения различных видов ортогональных проекций будем использовать проецирование только на плоскость $Z = 0$, имея в виду,

что проецирование на другие плоскости выполняется аналогично, но с применением соответствующих матриц проецирования на нулевую плоскость.

Существует 6 видов ортогональных проекций: 2 фронтальные, 2 профильные и 2 горизонтальные проекции. Фронтальные проекции состоят из вида спереди и вида сзади. Профильные проекции состоят из вида слева и вида справа. Горизонтальные проекции состоят из вида сверху и вида снизу.

Общий алгоритм построения вида проекции состоит в следующем:

1. Необходимо применить операцию вращения объекта вокруг оси X или Y (в зависимости от того, какой вид требуется) и вращать, пока необходимый вид объекта не станет фронтальным видом, т.е. станет параллельным проекционной плоскости.

2. Выполнить проецирование из бесконечности на плоскость $Z = 0$.

Обозначим:

$M(\Phi_n)$ – матрица для построения фронтальной проекции вида спереди;

$M(\Phi_3)$ – матрица для построения фронтальной проекции вида сзади;

$M(\Gamma_в)$ – матрица для построения горизонтальной проекции вида сверху;

$M(\Gamma_н)$ – матрица для построения горизонтальной проекции вида снизу;

$M(\Pi_л)$ – матрица для построения профильной проекции вида слева;

$M(\Pi_п)$ – матрица для построения профильной проекции вида справа.

Тогда, в соответствии с общим алгоритмом построения ортогональных проекций матрицы преобразования запишутся следующим образом:

$$M(\Phi_n) = M(R(X, 0^\circ)) \cdot M(z = 0);$$

$$M(\Phi_3) = M(R(X, 180^\circ)) \cdot M(z = 0);$$

$$M(\Gamma_в) = M(R(X, 90^\circ)) \cdot M(z = 0);$$

$$M(\Gamma_н) = M(R(X, -90^\circ)) \cdot M(z = 0);$$

$$M(\Pi_л) = M(R(Y, 90^\circ)) \cdot M(z = 0);$$

$$M(\Pi_п) = M(R(Y, -90^\circ)) \cdot M(z = 0).$$

Определим $M_x = M(R(X, \Theta)) \cdot M(z = 0)$ и $M_y = M(R(Y, \Theta)) \cdot M(z = 0)$.

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в матрицы M_x и M_y значения Θ , получим:

$$M(\Gamma_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\Pi_H) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\Pi_\Pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученные матрицы включены в состав программного обеспечения ортогонального проецирования.

$$M(\Phi_\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\Phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\Gamma_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, если применить цепочку преобразований, включающую перемножение матрицы описания объекта на матрицу требуемого видового преобразования и на матрицу проецирования на требуемую плоскость проекции, то получим необходимую проекцию.

Пример 2.1. Для усечённой пирамиды (рис. 2.2) построить на плоскости $Z = 0$ профильную проекцию вида слева.

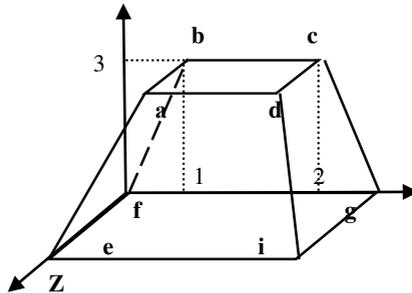


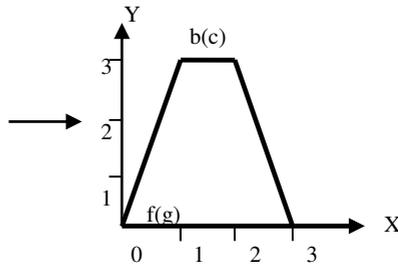
Рис. 2.2. К примеру 2.1

Решение. $P^* = P M(\Pi_n) M(Z=0)$.

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \begin{array}{l}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 i
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 3 & 2 & 1 \\
 1 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 3 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 0 & 1 \\
 1 & 3 & 0 & 1 \\
 1 & 3 & 0 & 1 \\
 2 & 3 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 P^*$$

Ответ.

$$P^* = \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 0 & 1 \\
 1 & 3 & 0 & 1 \\
 1 & 3 & 0 & 1 \\
 2 & 3 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}$$



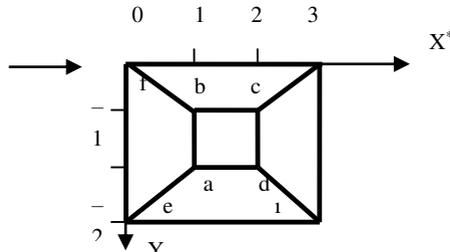
Пример 2.2. Для усечённой пирамиды (рис. 2.2) построить на плоскости $Z=0$ горизонтальную проекцию вида сверху.

Решение. $P^* = P M(\Gamma_b) M(Z=0)$.

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \begin{array}{l}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 i
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 3 & 2 & 1 \\
 1 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 3 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & -2 & 0 & 1 \\
 1 & -1 & 0 & 1 \\
 2 & -1 & 0 & 1 \\
 2 & -2 & 0 & 1 \\
 0 & -3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & -3 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 P^*$$

Ответ.

$$P^* = \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 1 & -2 & 0 & 1 \\
 1 & -1 & 0 & 1 \\
 2 & -1 & 0 & 1 \\
 2 & -2 & 0 & 1 \\
 0 & -3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & -3 & 0 & 1
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}$$

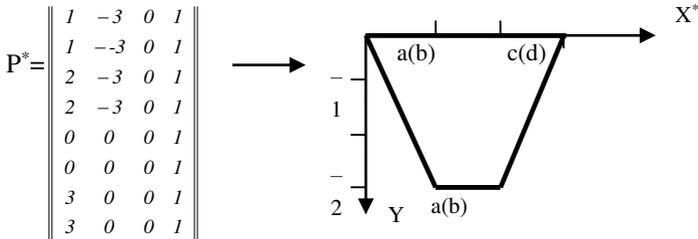


Пример 2.3. Для усечённой пирамиды (рис. 2.2) построить на плоскости $Z = 0$ фронтальную проекцию вида с задней стороны.

Решение. $P^* = P M(\Gamma_0) M(Z = 0)$.

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \begin{array}{l}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 i
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & 3 & 2 & 1 \\
 1 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 1 & 1 \\
 2 & 3 & 2 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 3 & 1
 \end{array} \right\| \\
 \times \\
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right\| \\
 \times \\
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right\| \\
 = \\
 P^* \\
 \left\| \begin{array}{cccc}
 1 & -3 & 0 & 1 \\
 1 & -3 & 0 & 1 \\
 2 & -3 & 0 & 1 \\
 2 & -3 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1 \\
 3 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

Ответ.



В этом примере получившаяся проекция перевёрнута на 180° относительно оси X . Если воспользоваться матрицей преобразования, реализующей поворот относительно оси Y , то изображение требуемого вида проекции будет в третьем квадранте.

2.3. Изометрия, диметрия

Ортогональные проекции дают истинные размеры объекта, на экране монитора можно наблюдать каждую грань в отдельности, что ограничивает возможности анализа формы объекта. Форма лучше воспринимается, когда можно наблюдать одновременно несколько граней объекта. Чтобы реализовать такую возможность, используется диметрическое или изометрическое проецирование.

Общий алгоритм построения диметрии или изометрии основан на повороте фронтального вида относительно оси Y на угол β , чтобы приоткрыть профильный вид, а затем повернуть относительно оси X на угол α ,

чтобы приоткрыть горизонтальный вид. В результате будут наблюдаться фронтальный, профильный и горизонтальный виды. После этого выполняется проецирование из бесконечности на требуемую нулевую плоскость. При этом разница между построением диметрии и изометрии заключается в разных углах поворотов α и β . Тогда результирующая матрица, выполняющая указанные два поворота, будет выглядеть следующим образом:

$$M = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \sin\alpha & \sin\beta \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\beta & \sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

После выполнения операции проецирования на плоскость $Z = 0$ результирующая матрица будет иметь вид

$$M' = M \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \sin\beta & \sin\alpha \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим вычисление значений углов α и β для построения диметрической проекции. Если применить преобразование M' к единичным векторам по X и Y , то для диметрии получим связь углов α и β :

$$\sin^2\beta = \sin^2\alpha / (1 - \sin^2\alpha).$$

Откуда, выбрав угол α , можно вычислить угол β и определить матрицу диметрии. При этом для выбора $\sin\alpha$ применяют приём, который заключается в сокращении оси z в фиксированное число раз.

Тогда, учитывая уравнение $\sin^2\beta = \sin^2\alpha / (1 - \sin^2\alpha)$, приходим к уравнению $8\sin^4\alpha - 9\sin^2\alpha + 1 = 0$, корни которого дают углы $\alpha = 20,7^\circ$ и $\beta = 22,2^\circ$.

Подставив в матрицу M значения углов α и β и вычислив тригонометрические функции, получим матрицу диметрического преобразования $M(D)$:

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,13 & -0,35 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0,35 & 0 \\ 0,37 & -0,32 & 0,86 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для получения изометрии необходимо взять одинаковые искажения по всем трём осям $U'_x = U'_y = U'_z$. Для U'_z получаем

$$U'_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \sin \beta & \sin \alpha & \cos \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и имеем еще одну связь между углами α и β :

$$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

(как и в диметрии) и

$$\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha.$$

После преобразований получим $\sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \beta$, откуда $\sin^2 \alpha = 1/3$; $\sin^2 \beta = 1/2$; $\alpha = 35,26^\circ$; $\beta = 45^\circ$, а угол, который проекционная ось x составляет с горизонталью, будет равен 30° . Подставив в матрицу M значения углов α и β и вычислив тригонометрические функции, получим матрицу изометрического преобразования $M(H_3)$.

$$M(H_3) = \begin{pmatrix} 0,707 & 0,408 & -0,577 & 0 \\ 0 & 0,816 & 0,577 & 0 \\ 0,707 & -0,408 & 0,577 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим пример вычисления диметрической и изометрической проекций на плоскость $Z = 0$ для единичного куба (рис. 2.3).

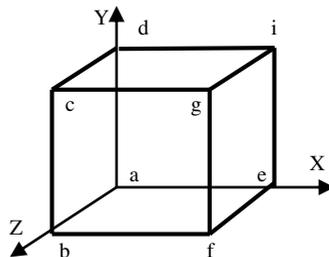


Рис. 2.3. Единичный куб

Исходная матрица	Матрица преобразования	Преобразованная матрица P*
$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$	$\begin{vmatrix} 0,92 & 0,13 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93 & 0 & 0 \\ 0,37 & -0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ <p>Диметрия</p>	$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,37 & -0,32 & 0 & 1 \\ 0,37 & 0,61 & 0 & 1 \\ 0 & 0,93 & 0 & 1 \\ 0,92 & 0,13 & 0 & 1 \\ 1,29 & -0,19 & 0 & 1 \\ 1,29 & 0,74 & 0 & 1 \\ 0,92 & 1,06 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 0,71 & 0,41 & 0 & 0 \\ 0 & 0,82 & 0 & 0 \\ 0,71 & -0,41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ <p>Изометрия</p>	$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,71 & -0,41 & 0 & 1 \\ 0,71 & 0,41 & 0 & 1 \\ 0 & 0,82 & 0 & 1 \\ 0,71 & 0,41 & 0 & 1 \\ 1,42 & 0 & 0 & 1 \\ 1,42 & 0,82 & 0 & 1 \\ 0,71 & 1,22 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

На рис. 2.4 показаны изображения построенных проекций.

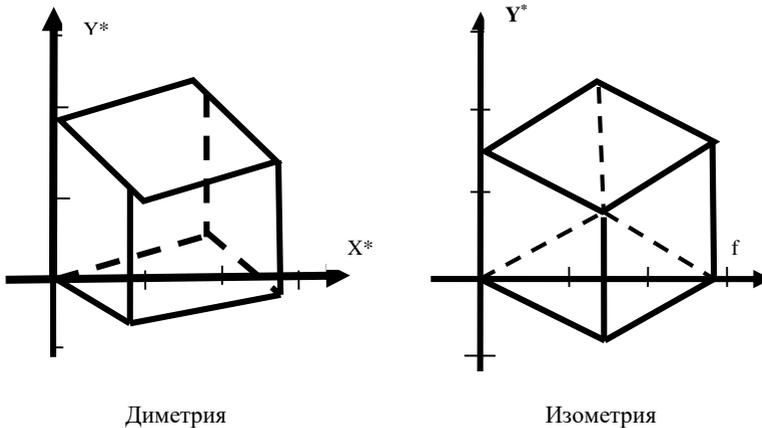


Рис. 2.4. Изображения диметрической и изометрической проекций на плоскость $Z = 0$

2.4. Косоугольные проекции

В косоугольных проекциях проекторы составляют с плоскостью проекции угол, отличный от 90° . Следовательно, появляются составляющие P_x и P_y единичного вектора оси Z на плоскость XU . В результате единичный вектор $\| 0 0 1 1 \|$ оси Z становится вектором $\| P_x P_y 0 1 \|$. Как и прежде, условимся выполнять проецирование на плоскость $Z = 0$.

Чтобы определить положение элементов P_x и P_y в матрице преобразования для косоугольной проекции, запишем преобразование

$$\| 0 0 1 1 \| \cdot \| ? \| = \| P_x P_y 0 1 \|,$$

что возможно, когда неизвестная матрица преобразования будет иметь вид

$$\| 0 0 1 1 \| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_x & P_y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \| P_x P_y 0 1 \|.$$

Значения элементов P_x и P_y определяются функциями угла между проекторами и плоскостью проекции, которые в общем случае могут быть произвольными. Однако в практике проектирования имеет значение угол, равный 45° , который порождает свободную и кабинетную косоугольные проекции. Характерной особенностью кабинетной проекции является сокращённая в два раза третья ось, что определяет её как частный случай свободной проекции. Следовательно,

- для свободной проекции $P_x = \cos 45^\circ$ и $P_y = \sin 45^\circ$;
- для кабинетной проекции $P_x = 1/2 \cos 45^\circ$, $P_y = 1/2 \sin 45^\circ$.

2.5. Перспективные преобразования и проекции

Типовая цепочка преобразований при построении перспективных проекций включает: аффинные преобразования, перспективные преобразования и преобразование на двухмерную плоскость (экран).

Первые три элемента последнего столбца матрицы преобразования 4×4 отвечают за построение различных видов перспективных проекций.

Построение перспективной проекции выполняется в три этапа. На первом этапе формируется тот вид объекта, который хотелось бы увидеть на перспективной проекции. Обычно для этого используют базовые операции преобразования, такие как масштабирование, вращение, перенос и другие. На втором этапе выполняется перспективное преобразование. На третьем этапе выполняется проецирование сформированного вида объекта на желаемую плоскость наблюдения.

Одноточечная с точкой схода на оси Z перспективная проекция на плоскость $Z = 0$ получается следующим преобразованием:

$$\|X \ Y \ Z \ H\| = \|x \ y \ z \ 1\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \|x \ y \ 0 \ (rz+1)\|.$$

Таким образом, после нормализации обычными преобразованными координатами являются:

$$x^* = \frac{X}{H} = \frac{x}{rz+1}; \quad y^* = \frac{Y}{H} = \frac{y}{rz+1}; \quad z^* = \frac{Z}{H} = \frac{0}{rz+1}.$$

Новые координаты x^* , y^* вычислены при $r = 1/k$, где k – фокусное расстояние. Выполненное преобразование реализует операцию проецирования на плоскость $z = 0$ из центра, находящегося в точке $z = -k$.

Прежде чем проецировать объект на выбранную плоскость, необходимо выполнить ряд аффинных преобразований (движения, отображения и подобия вдоль координатных осей), которые формируют перед наблюдателем желаемый вид. При этом применяются такие характерные операции, как масштабирование, перенос, сдвиг, отображение, вращение и их комбинации.

Напомним, что аффинная геометрия имеет дело с фигурами, свойства которых инвариантны по отношению к применяемым аффинным преобразованиям.

Таким образом, для получения перспективной проекции необходимо выполнить три этапа:

- 1) на первом этапе применяют аффинные преобразования;
- 2) на втором этапе применяют перспективное преобразование;
- 3) на третьем этапе применяют проекционное преобразование.

Ниже приведены матрицы преобразования для всех видов перспективных проекций.

1. При $(p, q, r) \neq 0$ получается трёхточечная проекция с точками схода на осях X, Y, Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. При $p \neq 0; (q, r) = 0$ получается одноточечная проекция с точкой схода на оси X .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. При $q \neq 0; (p, r) = 0$ получается одноточечная проекция с точкой схода на оси Y .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. При $r \neq 0; (p, q) = 0$ получается одноточечная проекция с точкой схода на оси Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. При $r = 0; (p, q) \neq 0$ получается двухточечная проекция с точками схода на X, Y .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. При $q = 0; (p, r) \neq 0$ получается двухточечная проекция с точками схода на X, Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. При $p = 0; (r, q) \neq 0$ получается двухточечная проекция с точками схода на Y, Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На рис. 2.5. приведена иллюстрация формирования всех видов перспективных проекций.

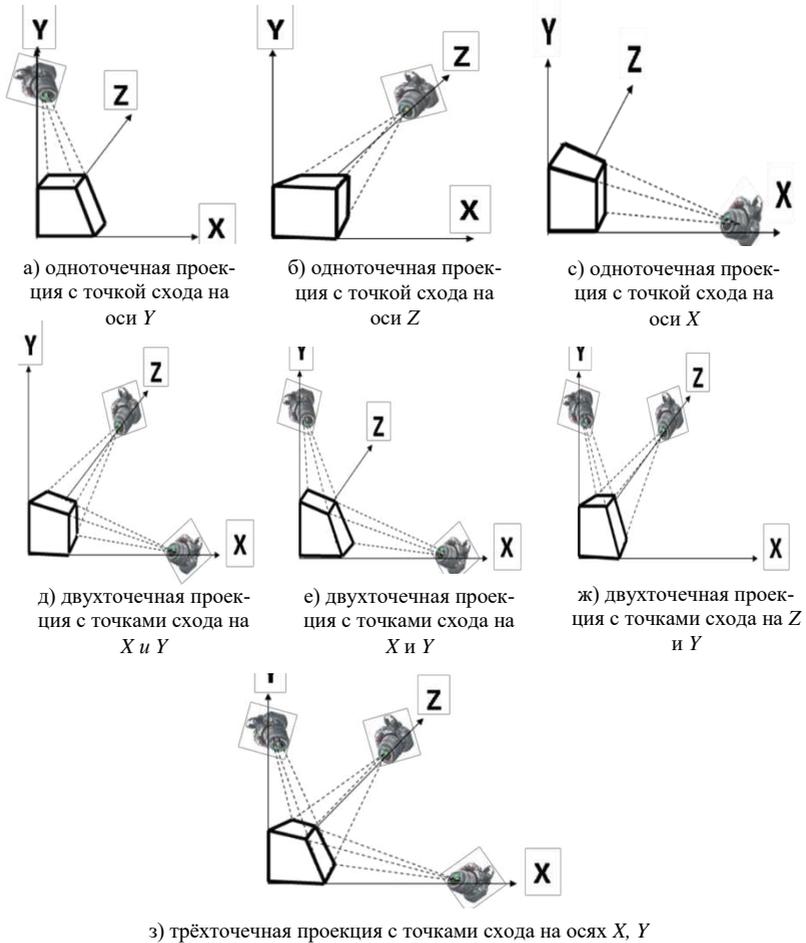


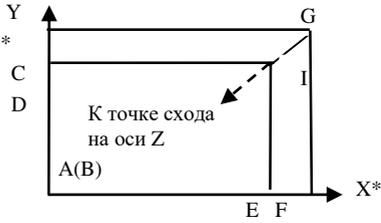
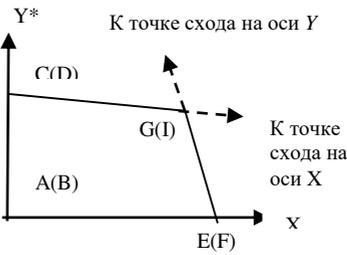
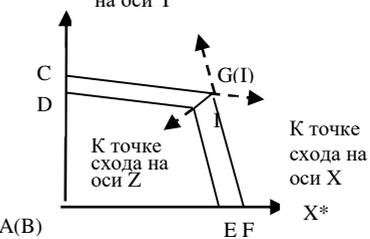
Рис. 2.5. Иллюстрация всех видов перспективных проекций Y (а-з)

Размер перспективной проекции обратно пропорционален фокусному расстоянию до объекта, следовательно значения переменных p, q, r обратно пропорциональны фокусному расстоянию. В табл. 2.1 приведён пример вычисления некоторых видов перспективных проекций с фокусным расстоянием, равным 10, на плоскость $Z = 0$ для единичного куба, изображённого на рис. 2.3.

Таблица 2.1

**Пример вычисления некоторых видов
одноточечной, двухточечной
и трёхточечной проекций**

Исходная матрица	Матрица преобразования	Преобразованная матрица P*	Нормализованная преобразованная матрица P*
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ <p>Одноточечная проекция с точкой схода на оси Z</p>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0,9 \\ 1 & 1 & 0 & 0,9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1,1 & 0 & 0 & 1 \\ 1,1 & 1,1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix}$
$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ <p>Двухточечная проекция с точками схода на осях X и Y</p>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1,1 \\ 1 & 1 & 0 & 1,2 \\ 1 & 1 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix}$
$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ <p>Трёхточечная проекция с точками схода на осях X, Y, Z</p>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1,1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1,1 \\ 1 & 1 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ i \end{matrix}$

Нормализованная преобразованная матрица P^*	Вид проекции
$ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \left\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1,1 & 0 & 0 & 1 \\ 1,1 & 1,1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\ \rightarrow $	<p>Одноточечная проекция с точкой схода на оси Z</p> 
$ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \left\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \end{matrix} \right\ \rightarrow $	<p>Двухточечная проекция с точками схода на осях X и Y</p> 
$ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ I \end{matrix} \left\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0,9 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,8 & 0 & 1 \end{matrix} \right\ \rightarrow $	<p>Трёхточечная проекция с точками схода на осях X, Y, Z</p> 

**Упражнения и контрольные вопросы
для самостоятельной работы к разделу 2**

Упражнение 1. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) трёхфокусная с сходом на осях X , Y и Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 2. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- 1) двухфокусная с сходом на осях X и Z ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) трёхфокусная с сходом на осях X , Y и Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 3. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) трёхфокусная с сходом на осях X , Y и Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 4. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- 1) проекция на плоскость $Y = 0$;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) проекция на плоскость $Z = 0$;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) трёхфокусная с сходом на осях X , Y и Z .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 5. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|--|--|
| 1) проекция на плоскость $Y = 0$; | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) проекция на плоскость $X = 0$; | $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) однофокусная с сходом на оси Z ; | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y . | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |

Упражнение 6. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|--|--|
| 1) однофокусная с сходом на оси X ; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) однофокусная с сходом на оси Y ; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) однофокусная с сходом на оси Z ; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 4) косоугольная проекция; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 5) трёхфокусная с сходом на осях X , Y и Z . | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |

Упражнение 7. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) косоугольная кабинетная проекция; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos 45 & \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) однофокусная с сходом на оси Y ; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos 45 & \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) однофокусная с сходом на оси Z ; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos 45 & \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 4) косоугольная свободная проекция. | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos 45 & \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |

Упражнение 8. Укажите признак диметрической проекции.

- 1) одинаковое сокращение трёх осей;
- 2) одинаковое сокращение двух осей;
- 3) разное сокращение всех осей;
- 4) разное сокращение двух осей.

Упражнение 9. Какие матрицы выполняют операции вычисления косоугольной проекции и проецирования на плоскость $Z = 0$?

- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) |
| $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |

Упражнение 10. Какие матрицы выполняют построение косоугольной свободной проекции и проецирование на плоскость $X = 0$?

- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) |
| $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos 30 & \sin 30 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos 45 & \sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |

Упражнение 11. Какие матрицы выполняют построение трёхфокусной проекции, косоугольной кабинетной проекции и проецирования на плоскость $X = 0$?

1)	2)	3)	4)	5)
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5\cos 45 & 0,5\sin 45 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 12. Укажите правильную последовательность матриц для построения следующей цепочки проекций: однофокусная с сходом на оси Y , двухфокусная с сходом на осях Y и Z , однофокусная с сходом на оси X .

1)	2)	3)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 13. Укажите правильную последовательность матриц для построения следующей цепочки проекций: однофокусная с сходом на оси X , проецирования на плоскость $X = 0$, двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

1)	2)	3)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 14. Укажите правильную последовательность использования матриц для построения следующей цепочки проекций: однофокусная с сходом на оси X , косоугольная, однофокусная с сходом на оси Y .

1)	2)	3)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Упражнение 15. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) двухфокусная с сходом на осях X и Z ;
- 6) двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

Упражнение 16. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) двухфокусная с сходом на осях X и Z ;
- 6) двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

Упражнение 17. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с задней стороны;
- 3) профильная, вид слева;
- 4) профильная, вид справа;
- 5) горизонтальная, вид сверху;
- 6) горизонтальная, вид снизу.

Упражнение 18. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) фронтальная, вид спереди; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) фронтальная, вид с задней стороны; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) профильная, вид слева; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 4) профильная, вид справа; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 5) горизонтальная, вид сверху; | |
| 6) горизонтальная, вид снизу. | |

Упражнение 19. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) фронтальная, вид спереди; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) фронтальная, вид с задней стороны; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) профильная, вид слева; | |
| 4) профильная, вид справа; | |
| 5) горизонтальная, вид сверху; | |
| 6) горизонтальная, вид снизу. | |

Упражнение 20. Какую проекцию реализует матрица преобразования?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) фронтальная, вид спереди; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 2) фронтальная, вид с задней стороны; | $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ |
| 3) профильная, вид слева; | |
| 4) профильная, вид справа; | |
| 5) горизонтальная, вид сверху; | |
| 6) горизонтальная, вид снизу. | |

Упражнение 21. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) построение проекции с точкой схода на оси X ;
- 2) построение проекции с точкой схода на оси Y ;
- 3) построение горизонтальной проекции вида сверху;
- 4) построение двухфокусной проекции с точками схода на осях X и Y ;

- 5) построение двухфокусной проекции с точками схода на осях X и Z ;
- 6) построение двухфокусной проекции с точками схода на осях Y и Z .

Упражнение 22. Задано изображение $P((1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 3, 4))$. Вычислить матрицу преобразования в ОК для следующих цепочек преобразований:

- 1) построение вида слева, построение кабинетной проекции на плоскость $x = 0$;
- 2) отображение относительно оси x , построение двухфокусной проекции на плоскость $z = 0$ с фокусными расстояниями по $x = 5$, по $y = 3$;
- 3) построение свободной проекции на плоскость $y = 0$, отображение относительно оси y ;
- 4) перенос на вектор $m(1, 3)$, построение трёхфокусной проекции на плоскость $x = 0$ с фокусными расстояниями по $x = 2$, $y = 3$ и $z = 4$;
- 5) сдвиг на вектор $(7, 9)$, построение проекции вида снизу на плоскость $z = 0$.

Упражнение 23. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(X, 90)) \cdot M(z = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) горизонтальная, вид сверху с проецированием на плоскость $Z = 0$;
- 4) горизонтальная, вид снизу;
- 5) профильная, вид слева.

Упражнение 24. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(Y, 90)) \cdot M(z = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) горизонтальная, вид сверху;
- 4) профильная, вид слева с проецированием на плоскость $Z = 0$;
- 5) профильная, вид справа.

Упражнение 25. При каких значениях угла получается косоугольная кабинетная проекция?

- 1) 30° ;
- 2) 45° ;
- 3) 60° ;
- 4) 90° .

Упражнение 26. При каких значениях угла получается косоугольная свободная проекция?

- 1) 30° ;
- 2) 45° ;
- 3) 60° ;
- 4) 90° ;
- 5) 180° .

Упражнение 27. На какую плоскость производится проецирование, если первый столбец матрицы преобразования нулевой?

- 1) $X = 0$;
- 2) $Y = 0$;
- 3) $Z = 0$;
- 4) $H = 0$.

Упражнение 28. Укажите правильную последовательность проекций по возрастанию числа одинаково сокращённых осей.

- 1) изометрия.
- 2) триметрия.
- 3) диметрия.

Упражнение 29. Установите соответствие: геометрическое преобразование – название получившейся проекции.

(А) $M(R(X, 0)) M(z = 0)$;

(Б) $M(R(X, 180)) M(z = 0)$;

(В) $M(R(X, 90)) M(z = 0)$;

(1) горизонтальная вид сверху и проецированием на плоскость $Z = 0$;

(2) фронтальная вид с тыла и проецированием на плоскость $Z = 0$;

(3) фронтальная вид спереди и проецированием на плоскость $Z = 0$.

Упражнение 30. Установите соответствие: геометрическое преобразование – название получившейся проекции.

(А) $M(R(X, -90)) M(z = 0)$;

(Б) $M(R(Y, 90)) M(z = 0)$;

(В) $M(R(Y, -90)) M(z = 0)$;

- (1) профильная проекция, вид слева;
- (2) горизонтальная проекция, вид снизу;
- (3) профильная проекция, вид справа.

Упражнение 31. На какую плоскость производится проецирование, если второй столбец матрицы преобразования нулевой?

- 1) $X = 0$;
- 2) $Y = 0$;
- 3) $Z = 0$;
- 4) $H = 0$.

Упражнение 32. На какую плоскость производится проецирование, если третий столбец матрицы преобразования нулевой?

- 1) $X = 0$;
- 2) $Y = 0$;
- 3) $Z = 0$;
- 4) $H = 0$.

Упражнение 33. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) перенос по осям X и Y ;
- 5) двухфокусная с сходом на осях X и Z .

Упражнение 34. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\ $

- 1) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 3) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 4) одинаковое масштабирование по всем осям;
- 5) двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

Упражнение 35. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) сдвиг по оси Y ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) однофокусная с сходом на оси X ;
- 5) двухфокусная с сходом на осях X и Z ;
- 6) двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

Упражнение 36. Установите соответствие между матрицей преобразования и выполняемой матрицей операцией.

а)	б)	в)
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & p \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- 1) однофокусная с сходом на оси X ;
- 2) однофокусная с сходом на оси Y ;
- 3) однофокусная с сходом на оси Z ;
- 4) двухфокусная с сходом на осях X и Y ;
- 5) сдвиг по оси Z ;
- 6) двухфокусная с сходом на осях Y и Z .

Упражнение 37. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(X, -90)) \cdot M(X = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) горизонтальная, вид сверху;
- 4) горизонтальная, вид снизу с проецированием на плоскость $X = 0$;
- 5) профильная, вид слева;
- 6) горизонтальная, вид сверху с проецированием на плоскость $X = 0$.

Упражнение 38. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(Y, 180)) M(Y = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) горизонтальная, вид сверху;
- 4) фронтальная, вид с тыла и проецированием на плоскость $Y = 0$;
- 5) профильная, вид слева;
- 6) профильная, вид справа.

Упражнение 39. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(X, 180)) \cdot M(Z = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) горизонтальная, вид сверху;
- 4) горизонтальная, вид снизу;
- 5) фронтальная, вид с тыла и проецированием на плоскость $Z = 0$;
- 6) профильная, вид слева.

Упражнение 40. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(Y, 90)) M(X = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) профильная, вид слева с проецированием на плоскость $X = 0$;
- 3) фронтальная, вид с тыла;
- 4) горизонтальная, вид сверху;
- 5) профильная, вид слева;
- 6) профильная, вид справа.

Упражнение 41. Какой вид ортогональной проекции получается, если к фигуре применить следующее преобразование:

$$M(R(Y, -90)) M(Z = 0)?$$

- 1) фронтальная, вид спереди;
- 2) фронтальная, вид с тыла;
- 3) профильная, вид справа с проецированием на плоскость $Z = 0$;
- 4) горизонтальная, вид сверху;
- 5) профильная, вид слева;
- 6) профильная, вид справа.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите классификацию видов проекций.
2. Приведите основной алгоритм получения различных видов ортогональных проекций.
3. Как выбирается связь углов в диметрической и изометрической проекциях?
4. Какие элементы матрицы преобразования отвечают за построение косоугольных проекций и какие значения они имеют?
5. Приведите комбинации элементов матрицы преобразования для построения всех видов перспективных проекций.
6. В чём различие свободной и кабинетной проекций?
7. В каких областях и почему применяются ортогональные проекции?
8. Назовите все виды ортогональных проекций.
9. В каких областях находят применение перспективные проекции?
10. Назовите все виды перспективных проекций.
11. В чём отличие диметрической и изометрической проекций?
12. Какой параметр является основным при построении любого вида перспективной проекции?
13. Назовите виды косоугольных проекций и значение угла между проектором и картинной плоскостью.
14. Приведите основной алгоритм получения диметрической и изометрической проекций.
15. В чём заключается основное различие между параллельными и перспективными проекциями?

3. ОСНОВЫ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

3.1. Введение

Необходимость в описании пространственных объектов, как правило, возникает в двух случаях:

1) требуется описать реально существующий объект: от простой грани до модели автомобиля или географический объект (гора);

2) при проектировании пространственного объекта в диалоговом режиме, для которого важно удобство описания объекта, чтобы его было бы легко привести к желаемой форме.

Объект, изучаемый в геометрическом аспекте, называют *геометрическим*, а описание объекта с той или иной степенью подробности называется его *геометрической моделью*.

В практике описания реальных объектов обычно применяются в зависимости от особенностей решаемой задачи три основных типа пространственных моделей: каркасные, поверхностные и монолитные. Перечисленные модели представляют объект с разной степенью детализации, точности, и следовательно, имеют разную сложность.

Рассмотрим особенности указанных моделей и сферы их применения.

Каркасная модель. Основной особенностью модели является её прозрачность. Представление такой модели состоит в описании только связности точек объекта, поэтому в модели представлены только рёбра. Если сделать физический аналог каркасной модели, то получится объект, выполненный как бы из проволоки, где каждая проволочка является ребром модели. Так как при создании каркасной модели не используется механизм, описания поверхностей, то модель прозрачная. В связи с этим при визуализации представление об объекте крайне затруднено.

В каркасных моделях отсутствует понятие объёма, поэтому они применяются в системах малой и средней производительности для задания объектов, представляющих замкнутые многогранники, или для объектов, получаемых перемещением и фиксацией образующей.

Типичной задачей, где применяется каркасная модель, является анализ движения робота. Эта задача решается в ЭВМ практически в реальном времени, что позволяет проследить динамику действий робота, поэтому каркасную моделью часто пользуются как одним из методов визуализации.

Поверхностные модели. В отличие от каркасных моделей в поверхностных моделях задаются рёбра и поверхности. В связи с этим в поверхностных моделях существует возможность скрывать ребра и поверхности заднего плана поверхностями переднего плана. Это позволяет существенно облегчить, а во многих случаях получить однозначное представление о форме объекта.

Поверхностные модели широко используются в практике разработки динамических поверхностей, к которым, например, относятся фюзеляжи самолетов, обводы судов, различного вида воздушные каналы, скульптурные поверхности и т.д. В представлении и моделировании поверхностей широко используются методы аппроксимации, которые позволяют проектировать поверхности с требуемыми характеристиками.

Монолитные модели. Такие модели являются наиболее сложными в описании и трудоёмкими в проведении моделирования. Фактически это компьютерный дубликат объекта. Монолитные модели содержат все необходимые и достаточные сведения о поверхностях, ребрах объекта и его внутренних особенностях. Так как модели имеют объём и массу, то могут иметь и характеристики материала. Наиболее широкое применение монолитные модели находят в области машиностроения.

3.2. Представление кривых и поверхностей

Наиболее часто поверхности представляются полигональными сетками или параметрическими бикубическими кусками. Каждое из этих представлений наиболее эффективно применяется в своих областях. Например, полигональные сетки наиболее широко используются в таких областях, как картография, геодезия или архитектура определённых стилей, а бикубические куски – в различных отраслях машиностроения.

Полигональная сетка представляет собой планарный, связный граф. Фактически это множество связанных между собой плоских многоугольников, которыми могут быть треугольники, прямоугольники, шестиугольники и другие многоугольники, в том числе и их комбинации.

Желаемый вид поверхности можно представить множеством параметрических бикубических кусков. При этом каждый из кусков описывает координаты точек поверхности уравнениями для X , Y и Z , которые имеют по два параметра с показателями степени не выше третьей.

Чем больше бикубических кусков или многоугольников в полигональной сетке, тем точнее представление поверхности. Отметим, что при одинаковом требовании к точности описания поверхности необходимо существенно меньшее число бикубических кусков, чем многоугольников в случае полигональной сетки. Однако алгоритмы для бикубических кусков сложнее алгоритмов для полигональных сеток.

3.2.1. Параметрические кубические кривые

Чтобы наиболее эффективно представить пространственную кривую, необходимо выбрать компромисс между способом ввода, требуемым типом преобразований и удобством диалога проектировщика с системой.

В системах проектирования, как правило, ввод информации выполняются посредством точек, представляющих желаемую кривую. При этом для построения гладкой кривой, которая проходила бы через введенные точки, широко применяют сплайновые сегменты. Математический сплайн – аналог физического сплайна, который представляет собой гибкую рейку. Чтобы описать сплайновый сегмент, удобно воспользоваться его представлением в виде параметрических кубических кривых.

Кривая, у которой переменные x , y и z являются многочленами третьего порядка относительно некоторого параметра t , называется параметрической кубической кривой, которая задается следующей системой уравнений:

$$x(t) = at^3 + bxt^2 + cxt + dx,$$

$$y(t) = ay^3 + byt^2 + c_yt + d_y,$$

$$z(t) = azt^3 + bzt^2 + czt + d_z.$$

В дальнейшем будем рассматривать только конечные отрезки кривой, поэтому можно ограничить изменение параметра t и считать его как $0 \leq t \leq 1$.

Наша цель – описать кривую с помощью последовательности сегментов кривой и выбрать коэффициенты a, b, c так, чтобы уравнения удовлетворяли форме сегмента. Текущее изменение формы кривой характеризуется величиной касательного вектора и углом его наклона. Поэтому при описании каждого сегмента кривой обращают внимание на способ (форму) задания конечных точек сегмента и касательных векторов в этих точках. Так как основная масса работ по проектированию кривых и поверхностей выполняется в режиме диалога, то выбор формы описания определит удобство взаимодействия пользователя с системой. С учётом этого в практике проектирования наибольшей популярностью пользуются такие способы представления параметрических кубических кривых, как форма Эрмита, форма Безье и форма В-сплайнов. Для правильного выбора той или иной форм необходимо ориентироваться на условия конкретной задачи.

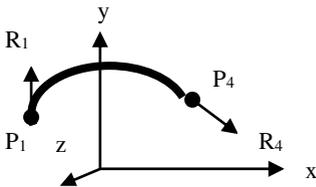


Рис. 3.1. Сегмент кривой Эрмита

Форма Эрмита. Сегмент кривой в этой форме определяется координатами его конечных точек P_1 и P_4 и касательными векторами R_1 и R_4 в этих точках (рис. 3.1). Уравнения кривой в форме Эрмита имеют один и тот же вид для $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$:

$$x(t) = P_{1x}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4x}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1x}(t^3 - 2t^2 + 1) + R_{4x}(t^3 - t^2);$$

$$y(t) = P_{1y}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4y}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1y}(t^3 - 2t^2 + 1) + R_{4y}(t^3 - t^2);$$

$$z(t) = P_{1z}(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_{4z}(-2t^3 + 3t^2) + R_{1z}(t^3 - 2t^2 + 1) + R_{4z}(t^3 - t^2)$$

или в общем виде

$$r(t) = P_1(2t^3 - 3t^2 + 1) + P_4(-2t^3 + 3t^2) + R_1(t^3 - 2t^2 + 1) + R_4(t^3 - t^2).$$

В приведённом выражении функции, зависящие от параметра t : $2t^3 - 3t^2 + 1$, $-2t^3 + 3t^2$, $t^3 - 2t^2 + 1$ и $t^3 - t^2$ называются **функциями сопряжения**. Функции $2t^3 - 3t^2 + 1$ и $-2t^3 + 3t^2$ обеспечивают сопряжение точек P_1 и P_4 , а функции $t^3 - 2t^2 + 1$ и $t^3 - t^2$ обеспечивают сопряжение векторов R_1 и R_4 , что в результате объединяет сегменты в гладкую кривую.

Основным недостатком формы Эрмита является задание в явном виде параметров касательных векторов, что неудобно и неэффективно при работе в интерактивном режиме.

Форма Безье. Основное достоинство такой формы описания сегмента связано с её адаптацией под диалоговый режим работы, т.е. не требуется вводить параметры касательных в явном виде. Касательные здесь задаются в неявном виде посредством двух точек, которые могут и не лежать на кривой. При этом перемещая эти точки мышкой в плоскости экрана, кривая легко приводится к желаемой форме. Поэтому форма Безье очень удобна для работы в диалоговом режиме и активно применяется в компьютерной графике.

Параметрические кривые задаются уравнениями $X = PX(t)$, $y = Py(t)$, что является более эффективным по сравнению с заданием функции в явном виде $y = f(x)$, так как функция может быть неоднозначной, что существенно затрудняет работу с ней.

Функции для многочленов Безье определяются как

$$P_x(t) = \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} X_i; \quad P_y(t) = \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} y_i,$$

где $C_m^i = m! / (i!(m-i)!)$, а x_i и y_i – координаты точек ориентиров P_i . Значение m определяет степень полинома и количество точек ориентиров, которое на единицу больше m .

Например, при $m = 1$ количество точек ориентиров равно двум. Поэтому кривая $P(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ представляет прямую линию с начальной и конечной точками P_0 и P_1 соответственно, что показано на рис. 3.2. При $m = 2$ количество точек ориентиров равно трём и кривая $P(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$ представляется, как показано на рис. 3.3.

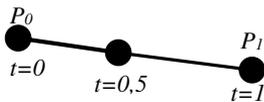


Рис. 3.2. Кривая при $m = 1$

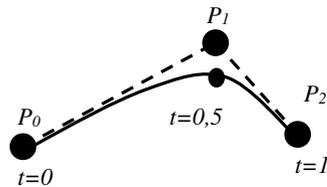


Рис. 3.3. Кривая при $m = 2$

Координаты точек кривой Безье в зависимости от значения параметра t можно вычислить с помощью геометрического алгоритма [19], который заключается в следующем.

1) Стороны сегмента, проходящие через точки-ориентиры, делят пропорционально значению параметра t .

2) Точки, получившиеся в результате деления, соединяют отрезками и получают новый контур, в котором число вершин на единицу меньше, чем у предыдущего контура.

3) Стороны нового контура снова делят пропорционально значению параметра t . Процесс деления и соединения отрезками продолжается до получения одной точки деления, т.е. точки кривой Безье (рис. 3.4).

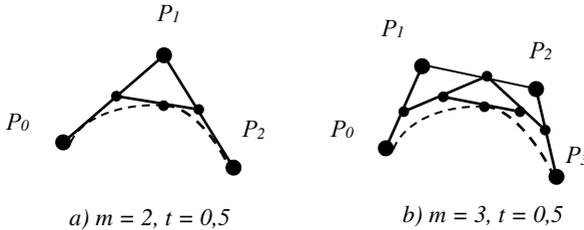


Рис. 3.4. Геометрический алгоритм для кривой Безье

Форма В-сплайнов. Форма кубического В-сплайна позволяет описывать кривую, которая может проходить через произвольные управляющие точки. Для приложений, в которых предъявляются высокие требования к гладкости проектируемой кривой или поверхности, важно, чтобы обеспечивалась непрерывность изменения касательного вектора и его кривизна в конечных точках. Для этого необходимо, чтобы непрерывными были первая и вторая производные. В формах Эрмита и Безье непрерывны в конечных точках только первые производные, что позволяет в форме В-сплайнов представлять и конструировать кривые в более гладком виде.

Уравнение в общем виде, описывающее кривую в форме В-сплайнов имеет следующий вид:

$$r(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_i + (3t^3 - 6t^2 + 4)P_{i+1} + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)P_{i+2} + t^3 P_{i+3}.$$

В разных задачах какая-либо форма задания кривых оказывается более эффективной. Среди основных моментов, которые влияют на выбор формы описания кривой, можно выделить следующие:

1. Описание кривых в форме Эрмита пригодно, когда решается задача аппроксимации уже имеющихся кривых и поверхностей.
2. Описание кривых в форме В-сплайнов применяется, когда по условию задачи требуется непрерывность первой и второй производных в конечных точках сегментов кривой.

3. Представление кривых в формах Безье и В-сплайнов наиболее эффективно применять в интерактивных режимах проектирования. Для этих форм характерно свойство выпуклой оболочки (мембраны), которое используется при решении задач визуализации кривых.

4. Необходимо учитывать, что можно выполнять переходы от одной формы описания кривой к другой. Например, от формы Эрмита, у которой отсутствует свойство выпуклой оболочкой, можно перейти к форме Безье, обладающей этим свойством.

3.2.2. Модели описания поверхностей

Для описания поверхностей существуют разнообразные методы [8], с некоторыми из которых познакомимся ниже.

Аналитическая модель. В таких моделях поверхность описывается математическими формулами, которые записываются в явном, неявном или параметрическом виде. Например, как функцию двух аргументов $z = f(x, y)$ или в виде уравнения $F(x, y, z) = 0$.

Наиболее широкое применение в практике проектирования и моделирования нашла параметрическая форма описания поверхности. Уравнения поверхности в параметрической форме записываются в следующем виде:

$$X = Fx(s, t), y = Fy(s, t), z = Fz(s, t),$$

где s и t – параметры, меняющиеся с заданным шагом в пределах заданного диапазона; Fx , Fy и Fz – функции, определяющие форму поверхности.

Параметрическое описание поверхности имеет ряд преимуществ перед явным или неявным заданием функций, среди которых отметим следующие:

- простое описание замкнутых поверхностей и поверхностей с неоднозначными функциями;
- описание можно выполнить так, что оно будет инвариантно при поворотах поверхности и (или) её масштабировании.

В случае представления сложной поверхности, к которой предъявляются особые требования в отношении гладкости, применяют специальную функцию, которая называется сплайном. Сплайновые функции наиболее рационально позволяют решать задачу аппроксимации фрагментов по-

верхности, а после их объединения формируется модель сложной поверхности. Фактически сплайн та же поверхность, для которой просто вычисляются координаты её точек.

Среди многообразия сплайнов наиболее востребованными являются кубические сплайны. Это связано с тем, что третья степень является наименьшей из степеней для описания любой формы с обеспечением непрерывности первой производной при стыковке сплайнов. Это позволяет получить поверхность без изломов в местах стыка. Сплайны преимущественно задаются в параметрической форме. Компоненты $x(s,t)$ и $y(s,t)$ кубического сплайна записываются в виде многочлена третьей степени параметров s и t :

$$\begin{aligned} X(s,t) = & a_{11} s^3 t^3 + a_{12} s^2 t^2 + a_{13} s^3 t + a_{14} s^3 + \\ & + a_{21} s^2 t^3 + a_{22} s^2 t^2 + a_{23} s^2 t + a_{24} s^2 + \\ & + a_{31} s^3 t^3 + a_{32} s^3 t^2 + a_{33} s^3 t + a_{34} s^3 + \\ & + a_{41} t^3 + a_{42} t^2 + a_{43} t + a_{44}. \end{aligned}$$

По аналогии записывается и компонента $y(s,t)$ кубического сплайна.

В целом к достоинствам аналитической модели относятся:

- пригодность для выполнения многих операций моделирования и анализа поверхностей;
- достаточно простой расчёт координат каждой точки поверхности;
- небольшой объем информации для описания сложных форм.

К недостаткам аналитической модели относятся:

- использование сложных функций, снижающих скорость вычислений и выполнения операций визуализации;
- невозможность во многих случаях применения аналитической модели описания непосредственно для построения изображения поверхности.

3.2.3. Полигональные сетки

Полигональная сетка представляет собой планарный, связный граф. Фактически это множество связанных между собой плоских многоугольников, которыми могут быть треугольники, прямоугольники, шестиугольники и другие многоугольники, в том числе и их комбинации.

Полигональную сетку можно описать разными методами, которые в конкретных задачах имеют свои положительные и отрицательные моменты. При разработке методов задания полигональной сетки необходимо руководствоваться следующим соображением.

Чем больше в описании полигональной сетки будет содержаться информации, которая в явном виде указывает на связь вершин и ребер с многоугольниками, тем более производительными оказываются алгоритмы, но и более расточительны в памяти. Познакомимся с характерными методами описания полигональных сеток.

Метод явного задания многоугольников. Для задания многоугольника в этом методе перечисляются в порядке обхода координаты его вершин.

Если описывать многоугольник или небольшое их количество, то метод явного задания многоугольников является простым и эффективным, при задании полигональной сетки с большим числом вершин малоприменим вследствие дублирования координат общих вершин.

Существенный недостаток метода связан с интерактивным режимом считывания координат общих для разных многоугольников вершин. Оператор, использующий дигитайзер как устройство графического ввода, как правило, не попадает точно в одну и ту же вершину дважды, поэтому значения координат одних и тех же вершин в разных многоугольниках могут различаться, в том числе и вследствие ошибок округления. Ещё одним недостатком рассматриваемого метода является двойная прорисовка общих ребер многоугольников при визуализации полигональной сетки на графических устройствах.

Метод задания многоугольника с помощью указателей на список вершин. В этом методе координаты всех вершин сетки, начиная с первой, заносятся в список вершин

$$V = ((X_1, y_1, z_1), (X_2, y_2, z_2), \dots, (X_n, y_n, z_n)).$$

При этом каждая координата в списке получает свой порядковый номер. Тогда любой многоугольник можно задать перечислением номеров вершин (указателей), которые его образуют. Координату каждой вершины многоугольника в списке вершин можно редактировать. Поэтому, с одной

стороны, экономится память, а с другой стороны, что является более важным, общие вершины в разных многоугольниках всегда имеют одинаковые координаты. При этом редактирование координаты в списке вершин автоматически приводит к её замене во всех многоугольниках, где она встречается. Однако, как и в методе явного задания многоугольников, в процессе визуализации полигональной сетки общие рёбра многоугольников так же рисуются дважды.

Метод явного задания ребер. В этом методе полигональная сетка задаётся тремя множествами: вершин, ребер и многоугольников. Ребра в списке ребер задаются парой инцидентных им вершин и дополнительно ссылкой на номера многоугольников, которым это ребро принадлежит. Так как одно ребро может принадлежать только одному или двум многоугольникам, то в ссылке должен обязательно присутствовать один номер многоугольника, а номер второго многоугольника в случае его отсутствия записывается как 0. Многоугольник задаётся перечислением номеров ребер, входящих в многоугольник.

Способ явного задания ребер является более экономичным при визуализации полигональной сетки с помощью любого графического устройства вывода (плоттер, фотоплоттер, экран монитора). Это связано с тем, что вычерчиваются только рёбра в отличие от вычерчивания многоугольников, когда многократно рисуются общие ребра многоугольников.

Все представления полигональной сетки независимо от используемого метода их создания в обязательном порядке проходят контроль корректности описания или, что тоже самое, проверку на непротиворечивость описания. В стандартный набор таких проверок в обязательном порядке входят:

- контроль связности полигональной сетки;
- контроль замкнутости всех многоугольников сетки;
- контроль использования каждого ребра сетки не более двух раз;
- контроль отсутствия «дыр» (потеря в описании какой-либо вершины);
- контроль наличия в описании полигональной сетки компонент связности, что указывает на отсутствие связности всей сетки.

Сами алгоритмы такого контроля являются достаточно трудоёмкими особенно для полигональных сеток с большим числом вершин. Кроме того, в них могут присутствовать ещё ряд дополнительных проверок, что усложняет алгоритмы и замедляет их работу.

Отметим, что метод явного задания ребер наиболее просто позволяет проверить на непротиворечивость.

Пример. Зададим фрагмент полигональной сетки (рис. 3.5) и опишем его рассмотренными выше методами.

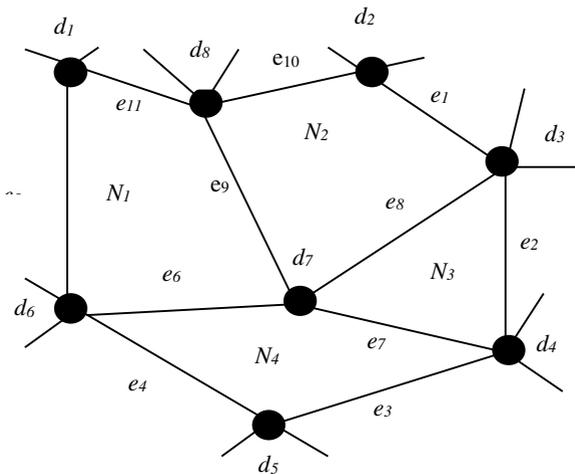


Рис. 3.5. Фрагмент полигональной сетки

1. Явное задание многоугольников:

$$V = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8); d_i = (X_i, y_i, z_i);$$

$$N_1 = (d_1, d_6, d_7, d_8); N_2 = (d_2, d_3, d_7, d_8); N_3 = (d_3, d_4, d_7); N_4 = (d_4, d_5, d_6, d_7).$$

2. Задание многоугольников указателями в список вершин:

$$D = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8); d_i = (X_i, y_i, z_i);$$

$$N_1 = (1, 6, 7, 8); N_2 = (2, 3, 7, 8); N_3 = (3, 4, 7); N_4 = (4, 5, 6, 7).$$

3. Явное задание ребер:

$$D = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8); d_i = (X_i, y_i, z_i);$$

$$E = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11});$$

$$e_1 = (d_2, d_3, N_2, 0); e_2 = (d_3, d_4, N_3, 0); e_3 = (d_4, d_5, N_4, 0); e_4 = (d_5, d_6, N_4, 0);$$
$$e_5 = (d_1, d_6, N_1, 0); e_6 = (d_6, d_7, N_1, N_4); e_7 = (d_4, d_7, N_3, N_4); e_8 = (d_3, d_7, N_2, N_3);$$
$$e_9 = (d_7, d_8, N_1, N_2); e_{10} = (d_2, d_8, N_2, 0); e_{11} = (d_1, d_8, N_1, 0);$$
$$N_1 = (e_5, e_6, e_9, e_{11}); N_2 = (e_1, e_8, e_9, e_{10}); N_3 = (e_2, e_7, e_8); N_4 = (e_3, e_4, e_6, e_7).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Почему неудобно представление кривых с помощью функций переменных x, y, z ?
2. В каких случаях возникает необходимость описывать пространственные объекты?
3. Какие типы трёхмерных моделей используются в САПР?
4. Опишите достоинства и недостатки каркасных, монолитных и поверхностных моделей.
5. Какие методы представления пространственных форм вы знаете?
6. Приведите сравнительный анализ различных способов описания полигональных сеток.
7. В чём заключается обязательная проверка корректности описания полигональной сетки?
8. Приведите основные способы описания параметрических кубических кривых и их особенности.

4. ВВОД-ВЫВОД ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

4.1. Дигитайзеры

Дигитайзер (устройство ввода графической информации) используется в основном в профессиональной деятельности при работе с графическими данными, особенно в тех случаях, когда требуется оперативный ввод больших объёмов графической информации сложной формы. Решение этой задачи особенно актуально в области мультипликации, в системах автоматизированного проектирования различного назначения, при создании электронных (цифровых) карт для работы с ними в геоинформационных системах, визуализации научной информации и во многих других приложениях.

Основным функциональным назначением дигитайзеров является оцифровка эскизов, чертежей и любых изображений, выполненных на бумажных носителях, и представление их в виде компьютерных файлов для дальнейшей обработки на ЭВМ. Сегодня широко распространены дигитайзеры, которые предоставляют те же функции не только для плоских изображений, но и для объектов, помещённых в трёхмерное пространство. Таким образом, с помощью дигитайзера фактически создаётся компьютерный геометрический дубликат реального объекта.

Необходимость в дигитайзере первоначально возникла для решения задач ввода и передачи графических данных в системах автоматизированного проектирования в разных областях (машиностроения, архитектуры и строительства приборостроения и других). В связи с переходом к цифровой технологии обработки данных возникла целая отрасль в геодезии и картографии, связанная с переводом картографической информации на бумажной основе в цифровые электронные карты. При этом это коснулось не только геологии, геодезии, но и создания электронных кадастров различного назначения, например, кадастр недвижимости, кадастр системы коммунального хозяйства различного уровня с многообразием его инфраструктуры и многие другие.

Во всех перечисленных областях применения дигитайзеров фактически стояла одна задача – фиксировать точное значение координат большого количества точек, которое для многих задач измеряется сотнями тысяч.

Типовой дигитайзер включает специальный планшет, на который крепится носитель графической информации, клавиатуры для ввода различной служебной информации и команд управления, а также светового пера или курсора в разнообразных исполнениях.

Отметим, что помимо профессиональных дигитайзеров разработаны их разновидности в виде небольших графических планшетов, которые часто называют рисовальными планшетами. В этих устройствах изображение, создаваемое на планшете, переносится на экран монитора с помощью специальной электромагнитной решётки, которая находится под панелью планшета. При этом можно выполнять процесс копирования изображения на бумажном носителе на экран монитора, для чего изображение накрывается специальной синтетической плёнкой и обводится специальным пером.

Как правило, такие планшеты имеют небольшие размеры (типа коврика для мыши) и подключаются к последовательному порту компьютера.

Классификация дигитайзеров. При разработке и совершенствовании дигитайзеров были опробованы практически все физические принципы считывания и регистрации графических данных. Этим объясняется, если посмотреть ретроспективно, их многообразие.

Обычно в классификации дигитайзеров учитывают:

- уровень автоматизации при считывании графических данных;
- выбранный метод считывания графических данных;
- используемый способ отсчёта и регистрации графических данных.

Уровень автоматизации процесса считывания указывает на участие оператора в этом процессе или его отсутствие, что делит дигитайзеры на полуавтоматы и автоматы. В полуавтоматах оператор фиксирует курсор в точке считывания и при необходимости вводит служебную информацию. В дигитайзерах-автоматах (сканеры) считывание графических данных выполняется без участия оператора. Однако в этом случае получается растровая форма данных и дополнительно требуется довольно дорогостоящая программа конвертации растровой формы в векторную форму представления графических данных. Такие программы называются векторизаторами, но и после их применения, как правило, остаётся небольшая доля ручной доработки. Поэтому такие дигитайзеры хороши для «художественных» редакторов.

Применяемый метод считывания графических данных классифицирует дигитайзеры на непрерывный, дискретный и непрерывно-дискретный способы действия.

При непрерывном способе считывания координат их расположение может быть произвольным. Такие дигитайзеры имеют относительно простую конструкцию, но низкую точность считывания координат. Причём погрешность отсчета координат увеличивается вместе с размером изображения.

В связи с этим при решении задач, в которых требуется повышенная точность считывания координат, применяются дигитайзеры дискретного действия. В таких устройствах считывание координат выполняется с заданным шагом в фиксированных точках рабочего поля.

Возможен и непрерывно-дискретный метод считывания координат, в котором с целью повышения разрешающей способности сначала выполняются считывание координат с достаточно большим шагом дискретизации, а затем в пределах выбранного дискрета координата точки считывается с помощью непрерывного метода.

Сам способ непосредственного отсчёта значений текущих координат может быть связан с электромеханикой, оптикомеханикой, магнитными, емкостными и ультразвуковыми эффектами, используя которые можно создавать соответствующие дигитайзеры.

Электромеханические и оптикомеханические устройства представляют начальный период развития средств ввода графических данных, в которых использовались шаговые двигатели для перемещения координатной системы. Такие дигитайзеры были тяжёлыми, требовали для своей установки специального фундамента, имели большие размеры и массу. Поэтому в начале 90-х гг. их сменили дигитайзеры, использующие магнитные, емкостные и ультразвуковые эффекты.

Наиболее широкое распространение к настоящему времени получили дигитайзеры магнитного типа, отличительной способностью которых являются высокая надежность, помехозащищенность, удобство в работе и технологическая эффективность. В таких устройствах отсчёт координат выполняется за счёт электромагнитной связи датчика с координатными шинами, которые реализованы в виде сетки из тонких проводников. Конструктивно такая сетка помещена под поверхность планшета и в ней наводятся импульсы ЭДС при считывании координаты точки.

Связь датчика с планшетом может носить и ёмкостной характер. В этом случае дигитайзер будет ёмкостного типа.

Для отсчёта координат может использоваться ультразвук. В таких дигитайзерах координаты определяются фиксацией времени распространения ультразвука от перемещаемого датчика до специальных микрофонов по краям планшета. Ультразвуковые дигитайзеры из-за ряда недостатков не получили распространения.

Дигитайзеры серии «Планшет». Для того чтобы получить представление о технических характеристиках дигитайзеров, познакомимся с наиболее распространённым дигитайзером магнитного типа серии «Планшет». При этом особое внимание уделим вопросу погрешностей, которые возникают при оцифровке изображения.

В целом все дигитайзеры рассматриваемой серии имеют следующие усреднённые технические характеристики:

- стандартные форматы рабочего поля считывания координат соответствуют форматам А), А2, А1;
- разрешение устройства, обусловленное аппаратурой – 0,05 мм;
- максимальная величина аппаратурной погрешности – $\pm 0,15$ мм.

На точность считывания координат оказывают влияние следующие основные погрешности, которые необходимо учитывать:

1. Погрешность, которая связана с носителем графических данных.
2. Погрешность, связанная с аппаратной частью устройства (инструментальная погрешность), куда входит:

- погрешность, связанная с технологией завода изготовителя, которая называется систематической погрешностью дигитайзера;
- погрешность, обусловленная возникновением краевых эффектов;
- погрешность, связанная с работой курсора дигитайзера и выражающаяся в эффекте эксцентриситета и параллакса;
- погрешность, которую вносит разрешение устройства;
- погрешность, обусловленная нестабильностью работы устройства.

3. Погрешность, связанная с действиями оператора дигитайзера.

Поясним подробнее перечисленные погрешности и их величины.

Погрешность, которая связана с носителем графических данных, можно значительно уменьшить или даже исключить, если в качестве материала, на котором изготовлено изображение, использовать материал с

безусадочной основой. Например, такая технология применяется в производстве фотшаблонов, где точность позиционирования составляет 50–100 микрон.

Погрешность, связанная с технологией завода изготовителя (систематическая погрешность), определяется качеством изготовления проводников поля считывания и их ортогональностью. Завод изготовитель учитывает эту погрешность в виде таблицы поправок, которая записывается в постоянное запоминающее устройство дигитайзера.

Погрешность, обусловленная краевыми эффектами, связана с тем, что в силу технологии изготовления на краях планшета возникает искривление магнитного поля. Снижают эту погрешность за счёт повышения качества экранирования устройства и увеличением расстояния между краем планшета и рабочего поля. Завод изготовитель старается ограничить величину этой погрешности до 0,001–0,005 мм. Величина этой погрешности незначительна и ею можно пренебречь.

Погрешность, связанная с эффектом эксцентриситета, характеризует точности совпадения электронного центра с центром курсора. Как правило, значение этой погрешности лежит в пределах 0,01–0,02 мм.

Погрешность, связанная с эффектом параллакса, обусловлена возникновением зазора между поверхностью рабочего поля и поверхностью курсора. Обычно значение этой погрешности лежит в пределах 0,05 мм.

Погрешность, которую вносит ограничение на разрешение дигитайзера, зависит от допустимой величины дискрета рабочего поля и определяется его половиной. Величина дискрета дигитайзера обычно равна 0,05–0,1 мм. Поэтому погрешность разрешения будет не более 0,025–0,05 мм.

Погрешность, обусловленная нестабильностью работы устройства, зависит от его способности к воспроизведению координаты считываемой точки без изменений с течением времени. Стабильность фактически означает устойчивость дигитайзера к внешним факторам и к прогреву собственной электроники. Завод-изготовитель устанавливает величину этой погрешности на уровне 0,01–0,05 мм.

Погрешность, связанная с действиями оператора дигитайзера, определяется остротой его зрения, опытом, психологическим состоянием и другими факторами. Исследования в области эргономики ограничивают величину этой погрешности в пределах 0,05–0,1 мм.

Рассмотрены все виды погрешностей, из которых складывается общая погрешность отсчёта координат в дигитайзере. На основании этого можно сформулировать ряд выводов:

1. Погрешности, связанные с основой, на которой представлены графические данные, и с инструментальной систематической погрешностью можно не учитывать, так как их можно исключить применением специальных безударочных материалов и поправочных таблиц в памяти дигитайзера.

2. Погрешности, которые связаны с наличием краевых эффектов, эффекта эксцентриситета и разрешением устройства, могут быть учтены при периодической проверке погрешности стабильности устройства.

3. Погрешности, обусловленные действиями оператора и нестабильностью аппаратуры, нельзя исключить из рассмотрения, но они имеют статистическую природу и учёт их вклада в общую погрешность может выполняться статистическим методом.

В основе функционирования почти всех дигитайзеров лежит процесс взаимодействия двух составляющих: указывающего органа (перо, мышь, ручка, курсор и т.п.) и рабочей зоны, которая представляет собой специальную сетку под плоскостью планшета, и которая регистрирует и передает координату положения указателя в компьютер. При этом координаты могут передаваться в относительной, не зависящей от начального положения в рабочей зоне, или в абсолютной форме, когда должна быть выполнена привязка к началу координат.

Наиболее «продвинутые» дигитайзеры имеют рабочую поверхность, обладающую свойством тактильности, т.е. чувствительностью к нажатию. Это свойство обусловлено пьезоэлектрическим эффектом. Под такой рабочей поверхностью находится сетка из тонких проводников. При этом, если нажать на какую-либо точку рабочей зоны, то на пластине пьезоэлектрика появится разность потенциалов, которая идентифицируется с координатой этой точки и отображается на экране монитора.

Фактически дигитайзеры такого типа представляют собой электронную чертёжную доску, позволяющую вводить графическую информацию в реальном масштабе времени с разрешением 400 dpi.

При выборе графического планшета следует руководствоваться такими параметрами, как размер рабочей зоны, разрешение и, в случае тактильной рабочей зоны, уровнем чувствительности при нажатии.

Размер рабочей зоны задаётся, как правило, в дюймах. Для графического планшета более актуально указывать разрешение не в точках на дюйм, а количестве линий на дюйм (Ipi). Для среднестатистического пользователя считается удовлетворительной величина в 100 Ipi. Профессиональные современные планшеты имеют этот параметр в среднем на уровне 2540 Ipi.

Параметр чувствительности пера к нажатию варьируется от 128 до 1024 уровней нажатия, но для среднего пользователя достаточно 256 уровней.

Для самого пера планшета важны легкость и удобство управления. Лёгкость пера обеспечивается, прежде всего, отсутствием в нём элементов питания, а удобство работы с пером обеспечивается наличием специальных кнопок управления параметрами рисуемой линии.

Профессиональные дигитайзеры для САПР имеют размер (до А0) включительно, а на их рабочей поверхности находятся функциональные панели, управляющие настройками без обращения к экранному меню.

Если не предъявлять особых требований к использованию планшета, то с ним можно работать как с «мышкой». Более требовательные пользователи должны установить дополнительные программы, например, такие как Fractal Design Painter или Dabbler.

Программа Painter предоставляет взаимодействие пользователя с дигитайзером на основе меню для установки многих параметров рисования. Например, при установке соответствующих параметров можно реализовать следующие возможности:

- зависимость оттенка чернил от направления проводимой линии;
- зависимость толщины линии от силы нажатия на перо;
- зависимость концентрации брызг около линии от скорости проведения линии и многие другие зависимости.

Трёхмерные дигитайзеры. Разработка и внедрение трёхмерных дигитайзеров началась в связи с необходимостью измерения геометрии сложных пространственных форм и практической постановкой задачи создания 3D-моделей реальных объектов.

Такая задача возникла в промышленном дизайне, в инженерных разработках, в среде производителей технологической оснастки, художников, аниматоров, разработчиков игровых приложений и других. На рис. 4.1 показаны некоторые из видов трёхмерных дигитайзеров.



Рис. 4.1. Виды трёхмерных дигитайзеров

Типичным представителем трёхмерных дигитайзеров для оцифровки объектов любой формы является полнофункциональный дигитайзер MicroScribe-3D производства компании Immersion Corporation.

Основным элементом этого дигитайзера является трёхшарнирный рычаг («рука»), на конце которого закреплён наконечник «руки» (датчик), который выполняется в разных вариантах. Например, в виде пера, шарика или при особых требованиях к точности показаний – в виде острой иголки. Рычаг-рука допускает проведение дуги с углом до 330° , а максимальный радиус действия «руки» составляет 840 мм. У дигитайзера имеются педали, которые реализуют функции, аналогичные кнопкам «мышки».

Обязательной процедурой, предшествующей оцифровке, является калибровка дигитайзера, которая заключается в выборе и вводе в компьютер координат трёх реперных точек – левой, правой и задней. После калибровки можно начинать оцифровку. В процессе оцифровки полученные координаты точек запоминаются в компьютере, а также поступают на экран монитора, в результате чего выполняется визуализация пространственной модели.

Выполнять оцифровку объектов любой формы можно в полуавтоматическом или ручном режимах. При этом контактный щуп фиксирует и считывает координаты своего местоположения. Дальнейшая работа с файлами оцифрованных данных выполняется специальными прикладными программами, например, такими как AutoCad, Autodesk, Maya, Rhinoceros и др.

Для визуализации пространственной модели применяются программы, представляющие их в виде точек, линий, каркасных моделей, сплайнов. На рис. 4.2 иллюстрируются разные виды визуализации. Для работы с другими приложениями оцифрованные объекты сохраняют в форматах dxf, IGES, obj, txt, 3ds и передают их в приложения, работающие с этими форматами.

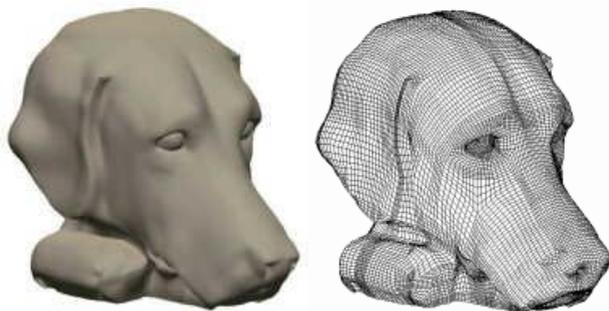


Рис. 4.2. Виды визуализации объекта

Иногда требуется особое качество пространственной модели объекта. Решение этой задачи требует применения дорогих профессиональных дигитайзеров, среди которых выделяется класс так называемых мобильных координатно-измерительных машин (КИМ).

Конструктивно КИМ состоит из основания и нескольких связанных шарнирами колен, т.е., по аналогии с человеческой рукой, имеются кистевой, локтевой и плечевой суставы. Все шарниры имеют датчики, фиксирующие угол поворота соответствующего колена. Современные КИМ имеют 6–7 степеней свободы, работают с объектами до четырёх метров по каждому измерению и обеспечивают точность до 0,3 мм. КИМ комплектуется автоматической системой отслеживания температурных колебаний и их компенсации.

Ещё одним из интересных применений трёхмерных дигитайзеров являются системы трёхмерного боди-сканирования, т.е. трёхмерного сканирования человеческого тела. Такие системы широко востребованы, прежде всего в тех случаях, когда необходим быстрый обмер большого количества человек (армия), кроме того, в киноиндустрии, индивидуальном пошиве, медицине, мультипликации и создании систем виртуальной реальности.

В качестве примеров систем боди-сканирования можно привести систему Cyberware Whole Body Color 3D Scanner (производитель Cyberwear) и Symcad (производитель TELMAT Industrie, Франция). На рис. 4.3 приведён общий вид подобных систем.



Рис. 4.3. Общий вид боди-системы

4.2. Программы создания моделей для 3D-печати

При создании собственной модели для печати на 3D-принтере часто сталкиваются с тем, что «тяжелые» и дорогие системы, например, AutoCAD, нерационально применять для моделирования простейших объектов типа чехла или подставки для смартфона. Познакомимся с некоторыми хорошо зарекомендовавшими себя программами, как с простыми так и с профессиональными, с помощью которых трёхмерная модель создается рационально и эффективно.

При формировании полноценной модели для печати на 3D-принтере всегда требуется несколько разных программ, и моделирование представляет собой один из этапов, который, однако, является основополагающим.

Созданная модель, как правило, хранится в файле формата STL. Содержимое этого файла необходимо «перевести» на язык принтера. Для этого существуют специальные программы, которые называются слайсерами (от английского слова «to slice» – "нарезать").

Таким образом, чтобы напечатать объект в 3D-принтере, необходимо сначала создать математическое описание объекта, а затем указать принтеру как его печатать. Чтобы 3D-принтер распознал описание объекта, необходимо выполнить его декомпозицию на слои, т.е. разложить на слои и получить G-код объекта. Эту функцию и выполняет программа-слайсер, которая «нарезает» объект на слои, которые принтер накладывает друг на

друга, создавая конечный предмет. Результат работы слайсера – G-код, в котором отражены все параметры печати.

Качество слайсера влияет на результат работы часто больше, чем качество 3D-принтера. Программ-слайсеров существует много, некоторые из них бесплатные, некоторые русифицированы.

В конце подраздела приведена сводная таблица 3D-слайсеров, которая поможет с выбором подходящего ПО.

Готовый код на принтер передает программа-хост. Она же позволяет следить за процессом создания объекта в режиме реального времени.

Далее сделаем краткий обзор наиболее распространённых приложений, с помощью которых можно создавать собственные модели или дорабатывать уже готовые шаблоны.

TinkerCAD. Бесплатное приложение для тех, кто только начал заниматься моделированием и хочет получить на первое время простейший инструмент, пусть и с несколько ограниченными возможностями. Редактор работает в браузере в онлайн-режиме, что еще больше упрощает его использование, так как устанавливать ничего не придётся, но надо быть постоянно онлайн. Для совсем неподготовленных пользователей на сайте приложения есть несколько бесплатных видеоуроков.

TinkerCAD является удобным и простым онлайн-инструментом. Модели в TinkerCAD строятся из простых форм, которые есть в шаблонах. Также можно загружать свои изображения или использовать модели, созданные другими пользователями (меню Community), в том числе те, которые сложно нарисовать новичку.

В TinkerCAD можно делать простые детали для конструктора, но со сложными конструкциями редактор не справляется. Большой плюс этой программы в том, что она позволяет сначала создать фигуру в 2D и преобразовать ее в 3D-объект. Единственный минус – русский язык не поддерживается, но интерфейс и так предельно понятный.

3DTin. Программа представляет еще один простой инструмент для работы прямо в браузере, например, 3DTin совместим с браузерами HTML5 (Chrome, Safari, Firefox и другие). Этот редактор также не предназначен для создания сложных моделей, но с простыми моделями работать в нём комфортно, так как никаких специальных навыков в 3D-дизайне не потребуется.

3DTin является бесплатным простым редактором с облачным хранением эскизов, огромным выбором шаблонов и возможностью добавления своих моделей в общую библиотеку. Благодаря облачному хранению доступ к своим файлам можно получить из любой точки мира в любое время, если есть подключение к интернету. Ознакомиться с обучающими видеороликами можно на сайте программы.

3D Slash. Как и предыдущие приложения является программой для начинающих, но в 3D Slash создание модели строится по другому принципу, если сравнивать с другими редакторами. Здесь реализован блочный принцип конструирования, когда объекты складываются из блоков или, наоборот, удаляются из объекта ненужные части по тому же принципу. Для этого предусмотрен ряд инструментов, таких как резак, дрель, молоток и другие.

Таким образом в 3D Slash можно создавать интерьерные модели, которые легко раскрашивать, накладывать текстуры, текст и т. п. А вот со сложными задачами, например, создания скульптур, 3D Slash не справится. Еще одной особенностью программы является возможность создавать трёхмерный логотип или 3D-текст. Для этого достаточно импортировать нужное лого, либо ввести текст, а программа сама превратит их в трёхмерные.

Приложение бесплатное, поддерживает онлайн-версию для браузера, но не русифицировано.

123D Catch. Бесплатное приложение от Autodesk для десктопов и мобильных устройств, при помощи которого фотоснимки преобразуются в трёхмерные модели. Для создания модели понадобится несколько снимков с разных ракурсов, чтобы приложение смогло создать нормальный 3D-объект. И чем больше снимков, тем лучше. В идеале придётся освоить еще STL-редактор, чтобы доделать то, что создано в 123D Catch на основе фотографий, так как в самой утилите этой возможности нет.

Положительными моментами приложения являются элементарный для освоения интерфейс, возможность использования на смартфоне или планшете, а также обмен моделями через электронную почту или социальные сети. Детализация итогового объекта оставляет желать лучшего, но для новичков, желающих создать модель по образу и подобию какого-либо предмета, приложение является достаточным.

Sculptris. Бесплатное приложение создания статуэток и фигурок, т.е. для тех, кто хочет освоить скульптинг. Объект в приложении как бы вылепливается из глины, поэтому можно моделировать статуэтки, бюсты, модели роботов, фигурки животных, персонажей игр и другое.

Пользователю предлагается несколько видов кистей для обработки поверхностей, есть возможность имитировать текстуру человеческой кожи, но функций, в целом, не так уж много. Для начинающих в Sculptris много интересного, но за более широкими возможностями компания Pixologic, создавшая программу, предлагает обратиться уже к платному инструменту ZBrush.

SketchUp. SketchUp, в прошлом Google SketchUp, интуитивно понятная программа, которая подойдет для профессионального использования. Программа предлагает больше функций для создания простых трёхмерных объектов, чем предыдущие инструменты. При этом программа отличается настолько простым пользовательским интерфейсом, что новые пользователи удивляются столь малому количеству рабочих панелей, но на самом деле здесь есть все необходимое для моделирования. Для новичков есть бесплатный базовый пакет для браузера Make SketchUp, который нужно установить вместе с бесплатным плагином для экспорта STL.

Профессиональную версию SketchUp Pro активно используют архитекторы и дизайнеры. Однако даже в бесплатной версии доступен каталог готовых моделей и многочисленные плагины для решения различных задач. Они позволяют преобразовывать форму объекта, выдавливать рисунки на поверхности, создавать сложные узоры, текстуры и другие операции.

Blender 3D. Является одним из самых многофункциональных приложений для моделирования. Новички, освоив простые программы, могут использовать систему проектирования Blender, как бесплатный и один из самых функциональных современных инструментов. Программа позволяет создавать короткометражные анимации и поддерживать средства для видеомонтажа. Что касается рассматриваемых задач, т.е. инструменты как для разных видов моделирования, так и для трёхмерного скульптинга.

У редактора Blender 3D есть активное сообщество, где можно искать обучающие материалы, задавать вопросы и выбирать нужные расширения, созданные самими пользователями (Blender 3D имеет открытый код). Для

знакомства с интерфейсом в обязательном порядке придётся освоить несколько уроков – часть действий вообще можно совершить только при помощи комбинации клавиш, а с интуитивностью у приложения не все гладко.

Некоторые пользователи жалуются на медленную работу и необходимость настройки не самых нужных параметров наподобие освещения, но при этом Blender 3D остается одной из самых функциональных программ для моделирования.

FreeCAD. CAD-система, которая представляет собой мощную программу параметрического моделирования не для новичков. Позволяет моделировать объекты и менять параметры, возвращаясь на несколько шагов назад (параметрическое моделирование). Редактор ориентирован на проектирование в области машиностроения, но его используют и для создания объектов архитектуры.

FreeCAD позволяет создавать сложные объекты и поверхности, а нужные возможности добавлять при помощи плагинов, которых благодаря открытому коду приложения достаточно много.

Несмотря на широкие возможности программы, она не такая «тяжёлая», как программы-конкуренты. Среди минусов программы можно отметить:

- каталог готовых моделей маловат;
- обучающих видео по работе в редакторе нет на русском языке.

OpenSCAD. Бесплатный инструмент для создания трёхмерных моделей, рассчитанный на тех, кто знаком с программированием. Моделирование происходит при помощи ввода программного кода. Использовать мышку понадобится только для того, чтобы со всех сторон рассмотреть готовый объект. В OpenSCAD моделирование ведётся на одноименном языке программирования, средствами которого можно создавать фигуры и детали при помощи ввода команд на рисование, поворот, масштабирование, сложение, вычитание и другие. Например, можно ввести команды на прорисовку куба, сферы и вычитания из куба сферы.

Слева в окне OpenSCAD находится блок для ввода команд, справа – результат моделирования. Благодаря тому, что вы видите всю программу, легко вернуться на несколько шагов назад и исправить ошибку.

Несмотря на пугающие поначалу перспективы, параметрическая не-сложная модель создается довольно быстро. Также пользователи могут найти необходимые для программы модели в сторонних библиотеках.

Некоторые полезные характеристики 3D-слайсеров приведены в табл. 4.1, а рассмотренные в этом подразделе программы сведены в соответствии со своим рейтингом в табл. 4.2.

Таблица 4.1

Таблица характеристик 3D-слайсеров

Название	Квалификация пользователя	Стоимость	ОС
3DPrinterOS	Новички и продвинутые пользователи	Условно-бесплатно	Браузер, Windows, Mac
Astropint		Условно-бесплатно	Браузер, Raspberry Pi
Craftware		Бесплатно	Windows, Mac, Linux
Cura		Бесплатно	Windows, Mac, Linux
Slic3r	Продвинутые пользователи и профессионалы	Бесплатно	Windows, Mac, Linux
SliceCrafter	Продвинутые пользователи	Бесплатно	Браузер
IceSL		Бесплатно	Windows, Linux
KISSlicer	Новички и продвинутые пользователи	Условно-бесплатно	Windows, Mac, Linux, Raspberry Pie
MakerBot Print	Новички	Бесплатно	Windows, Mac
MatterControl	Новички и продвинутые пользователи	Бесплатно	Windows, Mac, Linux
Netfabb Standard		Платно	Windows
OctoPrint		Бесплатно	Windows, Mac, Linux, Raspberry Pie
Repetier		Бесплатно	Windows, Mac, Linux
SelfCAD		Платно	Браузер
Simplify3D		Платно	Windows, Mac
Tinkerine Suite		Новички	Бесплатно
Z-Suite	Новички	Бесплатно	Windows, Mac

Таблица 4.2

Рейтинг программ создания моделей

Рейтинг ZOOM	Система	Цена
1. TinkerCAD	Браузер	Бесплатно
2. 3DTin	Браузер	Бесплатно

Рейтинг ZOOM	Система	Цена
3. 3D Slash	Windows, Mac, Linux	Бесплатно
4. SketchUp	Windows, Mac, Linux	Бесплатно (SketchUp Make), \$695 (SketchUp Pro)
5. Blender 3D	Windows, Mac	Бесплатно
6. Sculptris	Windows, Mac	Бесплатно
7. 123D Catch	Windows, Android, Mac, iOS,	Бесплатно
8. OpenSCAD	Windows, Mac, Linux	Бесплатно
9. FreeCAD	Windows, Mac, Linux	Бесплатно

Вопросы для самоконтроля

1. Основное функциональное назначение дигитайзеров и в каких областях они находят наиболее широкое применение?
2. Опишите типовой состав дигитайзера.
3. В чём отличие графического планшета от профессионального дигитайзера?
4. Как классифицируются дигитайзеры по уровню автоматизации при считывании графических данных?
5. Охарактеризуйте формы представления информации, которые получают в автоматических и полуавтоматических дигитайзерах.
6. Что такое программа-векторизатор и в чём заключается процесс векторизации растровой информации?
7. Как классифицируются дигитайзеры по методу считывания графических данных?
8. В чём разница между непрерывным, дискретным и непрерывно-дискретным методом считывания графических данных?
9. Как классифицируются дигитайзеры по способу отсчёта значений текущих координат?
10. За счёт чего выполняется отсчёт координат в дигитайзерах магнитного и ультразвукового типа?
11. Перечислите виды погрешностей, влияющих на точность считывания координат дигитайзером.
12. Какие виды погрешностей входят в понятие инструментальной погрешности?

13. Охарактеризуйте следующие эффекты: эксцентриситета, параллакса и краевой эффект.
14. Что означает погрешность, обусловленная нестабильностью работы дигитайзера?
15. В чём заключается погрешность, связанная с действиями оператора?
16. Какая практическая задача вызвала необходимость в разработке и внедрении трёхмерных дигитайзеров?
17. В каких случаях используются контрольно-измерительные машины, и какие составные части входят в их конструкцию?
18. Что представляет собой система боди-сканирования и для решения каких задач она применяется?
19. Приведите примеры наиболее распространённых приложений для создания собственных моделей под 3D-печать.
20. В чём заключается процесс подготовки объекта к 3D-печати и сам процесс её выполнения?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Компьютерная графика и её важнейшая составляющая – геометрическое моделирование широко применяются в областях, где требуется синтез и анализ пространственных форм проектируемых объектов.

В процессе диалога используется естественный для разработчика язык изображения схем, сборочных единиц, общих планов и т.п., а в качестве моделей объектов применяются геометрические модели, которые обеспечивают разработчиков в процессе проектирования наиболее понятными и наглядными средствами, не требующих специальной математической подготовки. Однако для разработчиков программного обеспечения компьютерной графики, как и для студентов, желающих научиться создавать собственные графические программы, основополагающими знаниями являются математические основы компьютерной графики.

Многолетний опыт приёма общеинститутского экзамена по дисциплине «Компьютерная графика» показал, что наиболее трудными для студентов разных направлений подготовки являются вопросы, связанные с математическими основами некоторых разделов компьютерной графики. В рамках рабочей программы дисциплины такими разделами являются:

- представление и преобразования геометрических моделей объектов;
- математические основы проективной геометрии;
- методы представления кривых и поверхностей.

В связи с этим возникла необходимость дополнить имеющийся учебно-методический комплекс дисциплины «Компьютерная графика» учебным пособием, расширяющим знания студентов по перечисленным разделам математических основ, как в теоретическом плане, так и, что наиболее важно, в практическом применении этих знаний и приобретения навыков решения задач. Для этого в разделы учебного пособия включен не только соответствующий теоретический материал, но приводятся примеры решения типовых задач и довольно многочисленные упражнения и задачи для самостоятельного решения с возможностью проверки ответов. Также приведены контрольные вопросы для самостоятельной работы по разделам.

В целом в учебном пособии раскрыты вопросы однородного координатного преобразования – для чего оно нужно и как реализуется, представления точек, линий и фигур, базовых операций преобразования для

двухмерной и трёхмерной области, классы задач геометрического моделирования и выполнения композиции операций.

В разделе «Проективная геометрия» отражены вопросы математических основ построения аксонометрических, косоугольных и перспективных проекций.

В разделе «Основы трёхмерного моделирования» раскрыт материал по каркасным, поверхностным и монолитным моделям, представлению параметрических кубических кривых и представлению поверхностей полигональными сетками. Для повышения эрудиции студентов в пособии содержится материал обзорного характера по вопросам сканирования объектов и их 3D-печати.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Ответы к упражнениям раздела 1

№ упраж- нения	Ответ	№ упраж- нения	Ответ
1	1, 3	23	A5, B1, B3
2	1, 2, 3	25	5
3	1, 3, 4	26	2, 3, 1
4	3, 4	27	2, 1, 3
5	2, 5	28	3
6	1	29	-1
7	2	30	2
8	3	31	A4, B1, B3
9	1, 4	32	A2, B1, B3
10	2, 5	33	A1, B3, B4
11	1, 2, 3, 4, 5	34	A3, B2, B1
12	1, 3, 2, 4, 5	35	A2, B1, B3
13	A1, B4, B3	36	A1, B4, B3
14	A4, B1, B3	37	A1, B2, B3
15	Перенос	38	A4, B1, B2
16	Сдвиг	39	A3, B1, B4
17	Масштабирование	40	A4, B1, B5
18	Вращение вокруг оси X	41	A5, B2, B4
19	Вращение вокруг оси Z	42	4, 1, 3, 2
20	Вращение вокруг оси Y	43	4, 1, 2, 3
21	Отображение и масштабирование	44	2, 4, 1, 3
22	Пропорциональное масштабиро- вание по всем осям		

Ответы к упражнениям раздела 2

№ упражнения	Ответ	№ упражнения	Ответ
1	5	21	A1, B3, B6
2	1	23	3
3	2	24	4
4	3	25	2
5	2	26	2
6	4	27	1
7	4	28	2, 3, 1
8	2	29	A3, B2, B1
9	3, 5	30	A2, B1, B3
10	1, 5	31	2
11	1, 5, 2	32	3
12	2, 3, 1	33	A1, B2, B5
13	1, 2, 3	34	A4, B1, B5
14	1, 3, 2	35	A1, B2, B5
15	A1, B2, B5	36	A5, B2, B6
16	A1, B2, B6	37	4
17	2	38	4
18	4	39	5
19	5	40	2
20	1	41	3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайленко, В. Е.* Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР [Текст]: учебник для вузов / В. Е. Михайленко, В. Н. Кислооккий, А. А. Лященко, К. А. Сазонов. – Киев: Выща школа, 1991. – 374 с.
2. *Трохова, Т. А.* Графика микроЭВМ в задачах САПР [Текст]: справочное пособие / Т. А. Трохова. – Минск: Вышэйша школа, 1991. – 234 с.
3. *Симонович, С. В.* Специальная информатика [Текст]: учебное пособие / С. В. Симонович, Г. А. Евсеев, А. Г. Алексеев. – Москва: АСТ-ПРЕСС: Инфорком-Пресс, 1998. – 478 с.
4. *Никулин, Е. А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики [Текст]: монография / Е. А. Никулин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
5. *Роджерс, Д.* Математические основы машинной графики [Текст] / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва: Мир, 2001. – 604 с.
6. *Полещук, Н. Н.* Самоучитель AutoCAD 2011 [Текст] / Н. Н. Полещук. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. – 544 с.
7. *Порев, В. Н.* Компьютерная графика [Текст] / В. Н. Порев. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. – 432 с.
8. *Малюх, В. Н.* Введение в современные САПР [Текст] / В. Н. Малюх. – Москва: ДМК Пресс, 2010. – 192 с.
9. *Ушаков, Д. М.* Введение в математические основы САПР [Текст] / Д. М. Ушаков. – Новосибирск: ЗАО «ЛЕДАС», 2006. – 208 с.
10. *Сазонов, А. А.* Трёхмерное моделирование в AutoCAD 2011 [Текст] / А. А. Сазонов. – Москва: ДМК Пресс, 2011. – 376 с.
11. *Авдеев, В. А.* Периферийные устройства: интерфейсы, программирование [Текст] / В. А. Авдеев. – Москва: ДМК Пресс, 2009. – 848 с.
12. *Орлов, А.* AutoCAD 2014 (+CD с видеокурсом) [Текст] / А. Орлов. – Санкт-Петербург: Питер, 2014. – 384 с.
13. *Трошин, П. И.* Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование [Текст] / П. И. Трошин. – Казань: Казанский федеральный университет, 2015. – 56 с.
14. *Голованов, Н. Н.* Геометрическое моделирование [Текст]: учебное пособие / Н. Н. Голованов. – Москва: НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 400 с.

Список литературы

15. *Лисяк, Н. К.* Основы геометрического моделирования [Текст]: учебное пособие / Н. К. Лисяк, В. В. Лисяк. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2014. – 72 с.
16. *Лисяк, В. В.* Геометрическое моделирование в САПР [Текст]: решебник / В. В. Лисяк, Н. К. Лисяк. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. – 62 с.
17. *Ткачев, Д. А.* AutoCAD 2004: Самоучитель [Текст] / Д. А. Ткачев. – Киев: ВНД. СПб.: Питер, 2003. – 432 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	
ТОЧЕК И ЛИНИЙ	4
1.1. Представление точек и линий	4
1.2. Базовые операции преобразования для плоскости.....	6
1.3. Однородные координаты.....	10
1.4. Классы задач геометрического моделирования.....	14
1.5. Композиция преобразований.....	17
1.6. Базовые преобразования в трехмерной области.....	21
Упражнения и контрольные вопросы для самостоятельной ра- боты к разделу 1.....	26
Вопросы для самоконтроля	37
2. ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ	39
2.1. Классификация проекций.....	39
2.2. Ортогональные проекции.....	41
2.3. Изометрия, диметрия.....	45
2.4. Косоугольные проекции.....	49
2.5. Перспективные преобразования и проекции.....	49
Упражнения и контрольные вопросы для самостоятельной ра- боты к разделу 2.....	55
Вопросы для самоконтроля	65
3. ОСНОВЫ ТРЁХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	66
3.1. Введение.....	66
3.2. Представление кривых и поверхностей.....	67
3.2.1. Параметрические кубические кривые.....	68
3.2.2. Модели описания поверхностей.....	72
3.2.3. Полигональные сетки.....	73
Вопросы для самоконтроля.....	77
4. ВВОД-ВЫВОД ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ.....	78
4.1. Дигитайзеры	78

Содержание

4.2. Программы создания моделей для 3D-печати.....	87
Вопросы для самоконтроля.....	93
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	95
ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ.....	97
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	99

Учебное издание

ЛИСЯК Владимир Васильевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ:
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРОЕКЦИИ,
ПОВЕРХНОСТИ**

Учебное пособие

Редактор *З. И. Надточий*
Корректор *З. И. Надточий*
Компьютерная верстка *И. А. Клочко*

Подписано в печать 14.05.2020.
Бумага офсетная. Формат 60 x 84 ¹/₁₆. Уч. изд. лист. 5,99
Усл. печ. л. 5,35. Тираж 30 экз. Заказ № 7595.

Издательство Южного федерального университета

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ
344091, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1. Тел. (863) 243-41-66.