

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

R.N. SHAMSIYEV, D.N. SHAMSIYEV, SH.T. PIRMATOV

OLIV MATEMATIKA

III QISM

Oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent-2020

UO‘K: 517(075.8)

KBK 22.1ya7

**Sh.N.Shamsiyev, D.N. Shamsiyev, Sh.T.Pirmatov Oliy matematika. 3 qism
darslik. T.:2020.-368 b.**

Ushbu darslik oily ta'lim muassasalarining texnika yo'nalishlari talabalari uchun "Oliy matematika" fani dasturi asosida yozilgan bo'lib, fanning kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, operatsion hisob, matematik fizika tenglamalari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika mavzulari bayon qilingan. Darslikning har bir mavzusi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan. Paragraflarning har birida mavzuga oid asosiy tushunchalar keltirilgan, tegishli teoremlar isboti bilan va unga doir namunaviy misollar yechimlari bilan keltirilgan. Mavzuga oid nazariy savollar va mustaqil yechish uchun misollar ham berilgan.

Darslik oily ta'lim muassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

В учебнике излагается материал, входящий в курс Высшей математики: теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, уравнения математической физики, теория вероятностей и математическая статистика. Все разделы учебника написаны на основании современной зарубежной литературы и анализа учебных технологий. Приведены теоретические вопросы по каждой теме и примеры для самостоятельного решения.

Данный учебник предназначен для студентов технических вузов, также может быть полезен для преподавателей.

The textbook contains materials included in the course of Higher Mathematics: the theory of functions of a complex variable, operational calculus, equations of mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. All sections of the textbook are written on the basis of modern foreign literature and the analysis of educational technologies. Theoretical questions on each topic and examples for independent solutions are given.

This textbook is intended for students of technical universities, can also be useful for teachers.

Taqrizchilar:

- Sh. Qosimov** O'zMU, Differensial tenglamalar va matematik fizika kafedrası professori, fizika-matematika fanlari doktori;
- B. Xudoyorov** TIQXMI, Oliy matematika kafedrası mudiri, texnika fanlari doktori;
- G. Shodmonov** ToshDTU, Oliy matematika kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi;
- A. Abdukarimov** ToshDTU, Oliy matematika kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Mazkur darslik Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

KIRISH

Mazkur darslik birinchi navbatda oliy texnika o'quv yurtlarining talabalariga mo'ljallangan bo'lishiga qaramasdan, undan oliy matematikani u yoki bu hajmda o'rganadigan boshqa kategoriya talabalari ham foydalanishlari mumkin. Darslik uch qismdan iborat bo'lib, uchinchi qism asosan kompleks funksiyalar nazariyasi, operatsion hisob, matematik fizika tenglamalari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo'limlarini qamrab olgan.

Mualliflar, oliy matematika kursining mos bo'limlarini tizimli va oliy texnika o'quv yurtlari talablari darajasida qat'iy bayon etishga harakat qilishdi. Har bir mavzu bo'yicha misollar tahlili bilan keltirilgan va bobning oxirida talabalarning mustaqil bajarishlari uchun mashqlar keltirilgan.

Mavzular bayon qilinish jarayonida katta hajmni talab qiladigan ayrim teoremlarning isboti keltirilmagan va yengil isbotlanadigan teoremlarning isboti talabalarga mashq sifatida qoldirilgan. Ko'pgina ta'riflar, teoremlar va formulalar kiritiladigan tushunchani kengroq yoritish imkonini beradigan izohlar bilan berilgan. Mavzularda imkon darajasida muhandislik tadbqiqiga ega bo'lgan masalalar tanlanishiga harakat qilingan. Boblarning tartib raqami darslikning dastlabki ikkita qismning davomi sifatida berilgan. Mavzular, ta'riflar, teoremlar va misollarning tartib raqamlari ham ana shu qismlardagi singari belgilangan.

Darslikga taqriz yozishda sinchkovlik bilan yondashgan O'zbekiston Milliy universitetining professori Sh.G. Qosimovga, Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligi mexanizatsiyalash muhandislari institutining professori B. Xudoyorovga, Toshkent davlat texnika universiteti dotsentlari G'. Shodmonov va A. Abdukarimovlarga, mualliflar o'zlarining alohida minnatdorchiliklarini bildiradi.

Darslik haqidagi fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga mualliflar oldindan o'z tashakkurlarini bildiradilar.

Darslikda quyidagi belgilashlardan foydalanilgan:

◀, ▶ - teorema isbotining boshlanishi va oxiri;

▶, ◀ - misol yoki masala yechimining boshlanishi va oxiri.

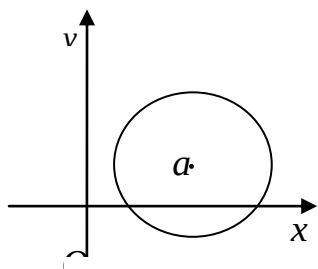
XV BOB. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI

15.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya va uning limiti

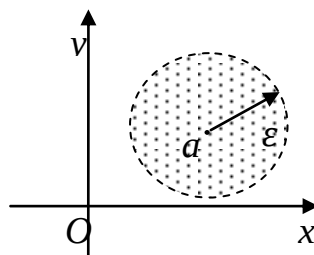
Kompleks tekislik nuqtalari to'plami

Kompleks sonlar va ular ustida asosiy amallarni bajarish haqida darslikning 1- qismida (3.4-mavzu) to'xtab o'tilgan edi. Shuningdek, bu mavzuda kompleks sonlar ketma- ketligi va uning limiti haqida tushuncha berilgan. Kompleks sonning modulini bilgan holda kompleks tekislikdagi ba'zi chiziq va sohalalarni ifodalash mumkin bo'ladi.

1. $E = \{z: |z - a| = R\}$ to'plam, kompleks tekislikda a nuqtadan bir xil R masofada joylashgan nuqtalar to'plamidan iborat, bu yerda $R > 0$ va a fiksirlangan nuqta. Bu to'plam tekislikda markazi a nuqtada, radiusi R ga teng bo'lgan aylanani ifodalaydi (15.1- rasm).



15.1-rasm

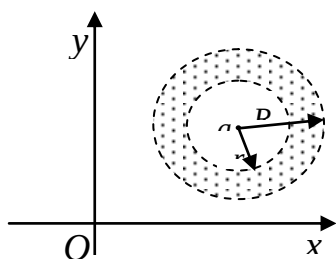


15.2-rasm

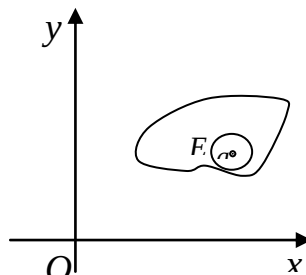
2. $E = \{z: |z - a| < \varepsilon\}$ to'plam, markazi a nuqtada, radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan ochiq doiradan iborat. Bu to'plamni ko'pincha a nuqtaning ε atrofi deb ataladi (15.2- rasm).

3. $E = \{z: |z| > R\}$ to'plam, markazi nol nuqtada bo'lib, radiusi R ga teng bo'lgan doiraning tashqarisidan iborat. Bu to'plamni *cheksizlikning atrofi* deb ataladi.

15.1-Ta'rif. Cheksiz uzoqlashgan nuqta biriktirilgan tekislikka, kengaytirilgan kompleks tekislik deb ataladi.



15.3- rasm



15.4- rasm

4. $E = \{z: r < |z - a| < R\}$ to‘plam, radiuslari r va R , markazi a nuqtada bo‘lgan xalqani ifodalaydi (15.3- rasm). Xususan, $E = \{z: 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ to‘plam, a nuqtaning o‘zi kirmagan “xalqani” ifodalab, ba’zan unga a nuqta o‘yib olib tashlangan xalqa deb ataladi.

5. $E = \{z: |z - a| + |z - b| = c\}$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami tekislikda, fokuslari a va b nuqtalarda bo‘lgan ellipsdan iborat.

Soha va chegara

15.2-Ta’rif. z kengaytirilgan kompleks tekislikda biror E to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar markazi z nuqtada bo‘lgan yetarlicha kichik doiraning barcha nuqtalari E to‘plamga tegishli bo‘lsa, z nuqta E to‘plamning *ichki nuqtasi* deb ataladi, (15.4- rasm).

Markazi cheksiz uzoqlashgan nuqtada bo‘lgan doira deyilganda, markazi $z = 0$ nuqtada bo‘lgan ixtiyoriy $|z| = R$ aylananing tashqi qismi tushuniladi.

Agar z_0 nuqtaning ixtiyoriy “ ε -atrofida” E to‘plamga tegishli bo‘lgan ham tegishli bo‘lmagan ham nuqtalar yotsa, bu nuqta E to‘plamning *chegaraviy nuqtasi* deb ataladi.

E to‘plamning barcha chegaraviy nuqtalari to‘plamiga uning *chegarasi* deyiladi.

15.3-Ta’rif. Agar z nuqta va uning biror “ ε -atrofi” berilgan to‘plamga tegishli bo‘lmasa, bu nuqta shu to‘plamning *tashqi nuqtasi* deyiladi.

15.4-Ta’rif. Agar to‘plam faqat ichki nuqtalardan iborat bo‘lsa, u *ochiq to‘plam* deyiladi.

$E = \{z: |z - a| < R\}$ doira va $E = \{z: r < |z - a| < R\}$ xalqa ochiq to‘plamga misol bo‘la oladi.

15.5-Ta’rif. Agar to‘plamning ixtiyoriy ikki nuqtasini shu to‘plamda yotuvchi uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirish mumkin bo‘lsa, u *bog‘lamli to‘plam* deyiladi.

15.6-Ta’rif. Kengaytirilgan kompleks tekislikning bog‘lamli ochiq to‘plami *soha* deb ataladi.

15.7-Ta'rif. D soha va uning chegaraviy nuqtalaridan tuzilgan to'plamga *yopiq soha* deb ataladi va $\bar{D}$ kabi belgilanadi.

$E = \{z: |z - a| \leq R\}$ doira va $E = \{z: r \leq |z - a| \leq R\}$ xalqa yopiq sohaga misol bo'la oladi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar

Kompleks sonlarning ikkita z va w tekisliklarini qaraymiz. z tekislikda D soha, w da E soha berilgan bo'lsin (bu soha ∞ ni ham o'z ichiga olishi mumkin).

15.8-Ta'rif. Agar D sohaning har bir z nuqtasiga E sohaning bitta yoki bir necha nuqtasi mos qo'yilgan bo'lsa, D sohada $w = f(z)$ funksiya berilgan deyiladi (birinchi holda funksiya bir qiymatli, ikkinchi holda ko'p qiymatli deb ataladi).

D to'plamga $f(z)$ funksiyaning aniqlanish, E to'plamga esa qiymatlar sohasi deb ataladi.

$z = x + iy$ va $w = u + iv$ deb olib,

$$w = u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ ni funksiyaning haqiqiy qismi, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ ni esa, mavhum qismi deb ataladi.

Shunday qilib kompleks o'zgaruvchili $w = f(z)$ funksiyaning berilishi haqiqiy o'zgaruvchili ikkita funksiyaning berilishiga teng kuchli ekan.

15.1-Misol. $w = z^2$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

► $z = x + iy$ va $w = u + iv$ deb olsak, u holda:

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Demak, $u = x^2 - y^2$ va $v = 2xy$. Bu funksiya bir qiymatli bo'ladi, chunki har bir z ga uning kvadrati mos qo'yilmoqda. ◀

Kompleks sondan ildiz chiqarish formulasiga ko'ra, har qanday kompleks sonning kvadrat ildizi ikkita qiymatga ega. Shuning uchun $w = \sqrt{z}$ ikki qiymatli funksiyaga misol bo'ladi.

$w = f(z)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D , qiymatlar sohasi E bo'lsin. Geometrik jihatdan bu funksiya D sohaning nuqtalarini E sohaning nuqtalariga akslantiradi. Shuning uchun $w = f(z)$ funksiyaning akslantirish deb atashimiz

mumkin bo'lib D ga akslantirishning asli, E ga esa tasviri deb ataladi. Yuqoridagi kabi akslantirishlar bir qiymatli va ko'p qiymatli bo'lishi mumkin. Bir qiymatli akslantirishda hech qaysi ikki nuqtaning tasvirlari utsma- ust tushmaydi.

Funksiyaning limiti

$f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning biror Ω atrofida aniqlangan bo'lsin (z_0 nuqtaning o'zida funksiya aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin).

15.9-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday bir $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, A sonini $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi limiti deb ataladi.

Bu limit $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ kabi yozilib, z_0 va A kompleks tekislikning chekli nuqtalari.

$A = \infty$ va z_0 chekli bo'lganida funksiyaning limiti quyidagicha ta'riflanadi:

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday bir $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in \Omega$ nuqtalar uchun

$$|f(z)| > \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $A = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi limiti deb ataladi.

Xuddi shunga o'xshash tarzda cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi limit ta'rifini ham kiritishimiz mumkin (uni kitobxonga mashq tarzida qoldiramiz).

Funksiyaning uzluksizligi

15.10-Ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya z_0 chekli nuqtada chekli va $f(z_0)$ qiymatga teng limitga ega bo'lsa, ya'ni,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(z)$ funksiya bu nuqtada uzluksiz deyiladi.

CHeksiz uzoqlashgan nuqta uchun bu ta'rif quyidagicha ko'rinish oladi:

15.11-Ta'rif. Agar

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(z)$ funksiya $z_0 = \infty$ cheksiz nuqtada uzluksiz deyiladi, bu yerda w_0 chekli son. w_0 ni funksiyaning cheksizlikdagi qiymati deb qabul qilamiz.

15.12-Ta'rif. D sohaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lgan $f(z)$ funksiya, shu sohada uzluksiz deb ataladi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiya ikkita haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar orqali ifodalanganligi uchun quyidagi teorema o'rinli.

15.1-Teorema. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarda bo'lgani kabi kompleks o'zgaruvchili funksiyalarda ham quyidagi xossalar o'rinli:

15.2-Teorema. Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar biror z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda:

- a) $f(z) \pm g(z)$;
- b) $f(z) \cdot g(z)$;
- c) $\frac{f(z)}{g(z)}, (g(z_0) \neq 0)$

funksiyalar ham z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada, $F(w)$ funksiya esa $w_0 = f(z_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $F(f(z))$ murakkab funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Kompleks o'zgaruvchili asosiy elementar funksiyalar

1. Chiziqli funksiya $w = az + b, a \neq 0$
2. Kasr chiziqli funksiya $w = (az + b)/(cz + d), c \neq 0, ad - bc \neq 0$
3. Ko'rsatgichli funksiya $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

Bu funksiya quyidagi xossalarga ega:

- a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
- b) $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$;

c) $e^{z+2\pi ki} = e^z$, ya'ni e^z funksiya davriy bo'lib, uning davri $2\pi i$ ga teng.

4. Trigonometrik funksiyalar ko'rsatgichli funksiya yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

yoki

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Shuni ta'kidlash joizki, bu funksiyalarning argumentlari xususan haqiqiy son bo'lganida ular haqiqiy ma'nodagi trigonometrik funksiyalar bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari ko'pchilik trigonometrik formulalar ular uchun saqlanib qoladi.

5. Giperbolik funksiyalar haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarda bo'lgani kabi aniqlanadi

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Aniqlanishidan ko'rinib turibdiki trigonometrik va giperbolik funksiyalar o'zaro bog'liq. Ularning ta'rifidan bevosita

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz & \operatorname{ch} z &= \cos iz \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz \end{aligned}$$

tengliklar kelib chiqadi. Bu formulalardan ko'pincha, trigonometrik funksiyalarning kompleks argumentdagi qiymatlarini hisoblashda foydalaniladi. Ma'lumki, trigonometrik funksiyalar uchun ko'plab ayniyatlar bajariladi. Yuqoridagi bog'lanishlarni e'tiborga olgan holda giperbolik funksiyalar uchun ham ba'zi ayniyatlarni isbotlash mumkin.

6. Logarifmik funksiya $w = \operatorname{Ln} z, z \neq 0$

Kompleks sonning $\operatorname{Ln} z$ logarifmini haqiqiy sonlardagi kabi $w = e^z$ tenglikda ma'lum w ga ko'ra z ni aniqlashdan hosil qilamiz. $w = e^z$ funksiya davriy bo'lganligi uchun unga teskari bo'lgan $w = \operatorname{Ln} z$ funksiya cheksiz ko'p qiymatli bo'ladi va uni

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

kabi aniqlaymiz. Bu yerda $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ ga funksiyaning bosh qiymati deb ataladi. Yuqoridagi kabi aniqlangan logarifmik funksiya ham haqiqiy o'zgaruvchilardagi kabi xossalarga ega.

7. Teskari trigonometrik funksiyalarni

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}$$

formulalar bilan aniqlaymiz. Bu funksiyalarning barchasi ko'p qiymatli bo'lib, ularning bosh qiymati mos ravishda logarifmning bosh qiymatiga mos olinadi.

8. Umumiy darajali funksiya $w = z^a$.

Bu yerda w ning qiymati $z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}$ tenglikdan aniqlanadi, uning bosh qiymati esa $z^a = e^{a\ln z}$ kabi olinadi.

9. Umumiy ko'rsatgichli funksiya $w = a^z, a \neq 0$

Bu holda ham yuqoridagi kabi $a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}$ tenglikdan foydalanamiz.

15.2-Misol. $\sin(\pi + i \ln 3)$ ni hisoblang.

► $\sin z = -i\operatorname{sh} z$ ekanligidan

$$\begin{aligned} \sin(\pi + i \ln 3) &= -i\operatorname{sh}(\pi i - \ln 3) = -i \frac{e^{\pi i - \ln 3} - e^{-\pi i + \ln 3}}{2} = \\ &= -\frac{i}{2}(e^{\pi i} e^{-\ln 3} - e^{-\pi i} e^{\ln 3}) = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\pi i} - 3e^{-\pi i}\right) = -\frac{i}{2}\left(-\frac{1}{3} + 3\right) = -\frac{4i}{3}. \end{aligned}$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

15.3-Misol. i^i ni hisoblang.

► Umumiy darajali funksiyaning ta'rifiga ko'ra

$$i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln 1 + iarg i + 2k\pi i)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$$

$k = 0$ da bosh qiymat $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ni hosil qilamiz. ◀

15.2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni differensiallash

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosila va differensial ta'rifi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarning mos ta'rifi bilan aynan ustma ust tushadi. Shuning uchun differensial hisobning barcha teorema va formulalari kompleks o'zgaruvchili funksiyalarga ham targ'ib etiladi.

Shu bilan birga kompleks o'zgaruvchili differensiallanuvchi funksiyalar ko'pgina qo'shimcha xossalarga ham ega. Uning sababi, kompleks o'zgaruvchili funksiya differensiallanuvchiligidan sharti haqiqiy o'zgaruvchili funksiya hosilasi mavjudligi shartiga ko'ra birmuncha chegaralanganligidir.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi

$w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. $z = x + iy$ argumentga $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ orttirma beramiz va funksiyaning $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ orttirmasini hisoblaymiz.

15.13-Ta'rif. Agar Δz orttirma ixtiyoriy tarzda nolga intilganida $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ifodaning limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(z)$ funksiyaning hosilasi deb ataladi va

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df}{dz} \quad (15.1)$$

kabi belgilanadi, $f(z)$ funksiya esa differensiallanuvchi deb ataladi.

$\Delta w/\Delta z$ nisbatning Δz nolga ixtiyoriy tarzda intilganida limitga ega bo'lishi sharti, haqiqiy o'zgaruvchili $\varphi(x)$ funksiya uchun qo'yilgan shartdan kuchliroqdir.

Bu shart $z + \Delta z$ ning z ga ixtiyoriy yo'l bilan, jumladan z keluvchi ixtiyoriy nur bo'ylab yaqinlashganida ham $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti mavjud va ularning barchasi teng bo'lishi kerakligini anglatadi. Biz bu yaqinlashishlarning ikkita maxsus holini qarab chiqamiz.

Koshi- Riman shartlari

◀ $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin. $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ortirma uchun funksiya orttirmasini quyidagicha yozamiz

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

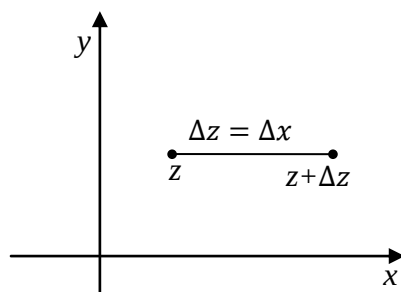
bu yerda: $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)$ va $\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)$.

Hosila ta'rifiga ko'ra

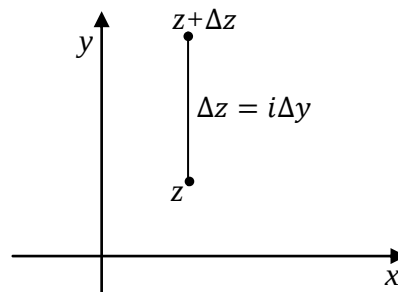
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \quad (15.2)$$

$f(z)$ funksiya z nuqtada hosilaga ega bo'lsin, u holda $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ limit mavjud va u $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ orttirmaning nolga intilish turiga bog'liq emas. Shuni hisobga olib biz quyidagi xususiy hollarni qaraymiz:

1) $\Delta z = \Delta x$ bo'lsin, ya'ni $z + \Delta z$ ning z nuqtaga yaqinlashishi Ox o'qiga parallel (15.5 rasm). U holda:



15.5- rasm



15.6-rasm

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (15.3)$$

tenglikni hosil qilamiz.

2) $\Delta z = i\Delta y$, ya'ni $z + \Delta z$ ning z nuqtaga yaqinlashishi Oy o'qiga parallel bo'lsin (15.6-rasm). Bu holda yuqoridagi kabi amal bajarib,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (15.4)$$

tenglikga ega bo'lamiz.

$\Delta w/\Delta z$ ifodaning $\Delta z \rightarrow 0$ dagi limiti, Δz ning nolga intilish turiga bog'liq bo'lmaganligi uchun (15.3) va (15.4) limitlar o'zaro teng, ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Bu yerdan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (15.5)$$

(15.5) tengliklarga *Koshi- Riman shartlari* deb ataladi.

Ular $f(z)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgan barcha nuqtalarda bajarilishi kerak. Demak funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun bu funksiya Koshi-Riman shartlarini qanoatlantirishi zarur ekan. $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning differensiallanuvchiligi sharti talab etilganida, bu shartlar yetarli ham bo'lar ekan.

Haqiqatan ham, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsin. U holda (1 qism, 9.1 va 9.2-Teorema) $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar uchun

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \rho \\ \Delta v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \rho \end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ va α_1 hamda α_2 miqdorlar ρ miqdorga nisbatan cheksiz kichik.

Yuqoridagilarga asosan ixtiyoriy $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ uchun

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + \rho(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Bu tenglikda Koshi- Riman shartidan foydalanib $\frac{\partial v}{\partial y}$ hosilani $\frac{\partial u}{\partial x}$ bilan, $\frac{\partial u}{\partial y}$ hosilani esa $-\frac{\partial v}{\partial x}$ bilan almashtiramiz va

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right) + \rho(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + \rho(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\Delta x + i\Delta y} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (15.6)$$

tenglikga ega bo'lamiz. $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$ ekanligidan,

$$\left| \frac{\rho(\alpha_1 + i\alpha_2)}{\Delta x + i\Delta y} \right| = |\alpha_1 + i\alpha_2|.$$

α_1 va α_2 miqdorlar ρ miqdorga nisbatan cheksiz kichik bo'lganligi uchun $\rho \rightarrow 0$ da $|\alpha_1 + i\alpha_2| \rightarrow 0$. O'z navbatida $\Delta z \rightarrow 0$ da (15.6) ga asosan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

ya'ni $f(z)$ funksiya differensiallanuvchi ekan.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik. ►

15.3-Teorema. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $z = x + iy$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun

- 1) $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x, y) nuqtada differensiallanuvchi;
- 2) (x, y) nuqtada Koshi- Riman shartlari bajarilishi zarur va etarli.

Koshi- Riman shartlariga ko'ra hosilani

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

kabi formulalar bilan hisoblash mumkin.

15.14-Ta'rif. Agar funksiya nafaqat berilgan nuqtada, balki uning biror atrofida ham differensiallanuvchi bo'lsa, unga shu nuqtada *analitik* deyiladi.

15.15-Ta'rif. Biror sohaning barcha nuqtalarida analitik bo'lgan funksiya shu sohada analitik yoki *golomorf* deb ataladi.

15.16-Ta'rif. Bir qiymatli $f(z)$ funksiyaning analitiklik nuqtalari uning *to'g'ri nuqtalari* deb aytiladi, qolgan barcha nuqtalari uning maxsus nuqtalari deyiladi.

Xususan, funksiya aniqlanmagan nuqtalar ham uning maxsus nuqtasi bo'ladi. Amaliy masalalarda funksiyaning analitiklikka tekshirish uchun, uning Koshi- Riman shartlarini qanoatlantirishini tekshirish etarli bo'lar ekan.

Shuni yana bir marta ta'kidlashimiz joizki, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan barcha teoremlar kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun

ham o‘rinlidir. Xususan, bizga ma’lum bo‘lgan hosila olish qoidalari va hosilalar jadvali kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham o‘rinli. Faqatgina hosila olish mumkin bo‘lishi uchun Koshi- Riman shartlari bajarilishi lozim.

15.4-Misol. $w = z^2$ funksiyani analitiklikka tekshiring.

$$\blacktriangleright w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Demak: $u = x^2 - y^2$ va $v = 2xy$. Bu funksiyalar Koshi- Riman shartlarini qanoatlantiradi, chunki,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Bu tengliklar tekislikning barcha nuqtalarida o‘rinli bo‘lganligi uchun, berilgan funksiya butun tekislikda analitik bo‘ladi hamda

$$w' = (z^2)' = 2z. \blacktriangleleft$$

15.5-Misol. $w = z\bar{z}$ funksiyani analitiklikka tekshiring.

$\blacktriangleright$ Funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratamiz

$$w = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Ko‘rinib turibdiki, Koshi- Riman shartlari faqatgina bir nuqta $x = 0$ va $y = 0$ bo‘lgandagina bajariladi. Shuning uchun berilgan funksiya faqat bitta $z = 0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo‘lib, $f'(z) = 0$. Shu bilan birga bironta ham nuqtada analitik emas. $\blacktriangleleft$

Qo‘shma garmonik funksiyalar

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya biror D sohada differentsiallanuvchi, u va v funksiyalar esa ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. (15.5) Koshi-Riman shartlarining birinchisini x bo‘yicha, ikkinchisini y bo‘yicha differentsiallab

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarni $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ ekanligini e'tiborga olgan holda ayirsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15.7)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Xuddi yuqoridagi kabi amallarni bajarsak, $v(x, y)$ funksiya ham

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

shartni qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz

(15.7) tenglikga Laplas tenglamasi deb ataladi. Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiya esa *garmonik funksiya* deyiladi.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{ifoda Laplas operatori deb ataladi. Bunga ko'ra (15.7)}$$

tenglikni

$$\Delta u = 0$$

deb yozishimiz mumkin.

Biror D sohada analitik bo'lgan funksiya ixtiyoriy tartibdagi hosilaga ega bo'lganligi uchun, uning haqiqiy va mavhum qismlari ham ixtiyoriy tartibdagi xususiy hosilalarga ega. Demak, yuqorida keltirib chiqarilganiga ko'ra, ixtiyoriy analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari garmonik funksiyalardan iborat bo'lar ekan.

15.17-Ta'rif. Koshi-Riman shartlari bilan bog'langan $u(x, y)$ va $v(x, y)$ garmonik funksiyalar o'zaro *qo'shma garmonik funksiyalar* deb ataladi.

Umuman olganda $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning garmonik ekanligidan $u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning analitik bo'lishi kelib chiqmaydi. Bu funksiya analitik bo'lishi uchun qo'shimcha ravishda Koshi-Riman shartlarining bajarilishi talab etiladi. Qo'shma garmonik funksiyalar uchun quyidagi teorema o'rinli.

15.4-Teorema. Bir bog'lamli D sohada garmonik bo'lgan ixtiyoriy $u(x, y)$ funksiya uchun, u bilan qo'shma garmonik bo'lgan funksiyaning ixtiyoriy o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida topish mumkin.

Bu teoremaning ma'nosi shundan iboratki, analitik funksiyaning haqiqiy yoki mavhum qismini bilgan holda, ixtiyoriy o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida funksiyaning o'zini tiklash mumkin.

15.6-Misol. Haqiqiy qismi $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ tenglik bilan aniqlanuvchi analitik funksiyaning toping.

► Qidirilayotgan funksiya analitik bo'lganligi uchun, u funksiya Koshi-Riman shartlarini qanoatlantiradi. Berilgan $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Koshi-Rimanning ikkinchi shartidan

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ yoki } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Bu tenglikni x bo'yicha integrallasak

$$v(x, y) = -\int \frac{2y}{x^2 + y^2} dx + c(y) = -2\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c(y)$$

Oxirgi funksiyaning y bo'yicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + c'(y)$$

va Koshi-Rimanning birinchi sharti, ya'ni $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ tenglikdan

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + c'(y)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan $c'(y) = 0$ yoki $c(y) = c$. Demak

$$v(x, y) = -2\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c$$

Shunday qilib

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) - 2i\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c.$$

Agar $\ln(x^2 + y^2) = 2\ln|z|$, $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arg} z$ ekanligini e'tiborga olsak, logarifmning ta'rifidan

$$f(z) = 2\ln(x^2 + y^2) - 2i\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + c = 2\ln z + c_1$$

tenglik hosil bo'ladi. ◀

Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi

$f(z)$ funksiya biror D sohada analitik bo'lsin. z_0 bu sohada yotuvchi qandaydir nuqta bo'lib, $f'(z_0) \neq 0$ shart bajarilsin. Bu funksiya z tekislikni w tekislikka o'tkazib, z_0 nuqtani esa w_0 ga akslantirsin.

γ chiziq z_0 nuqta orqali, uning aksi bo'lgan Γ chiziq esa w_0 nuqta orqali o'tsin. $z_0 + \Delta z$ nuqta γ chiziq bo'ylab harakatlanib z_0 ga yaqinlashsin, unga mos bo'lgan $w_0 + \Delta w$ nuqta esa Γ chiziqda w_0 ga yaqinlashsin.

Ta'rifga ko'ra,

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

bu yerda $|\Delta z|$ soni z_0 va $z_0 + \Delta z$ nuqtalar orasidagi masofaga teng, xuddi shu kabi $|\Delta w|$ ham w_0 va $w_0 + \Delta w$ nuqtalar orasidagi masofaga teng. Demak,

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

tenglikda limitning qiymati $z_0 + \Delta z$ nuqtaning z_0 ga qanday yaqinlashishiga bog'liq bo'lmasdan, ikki cheksiz kichik masofalar nisbatlariga bog'liq ekan. Bu munosabatning geometrik ma'nosi shundaki, funksiya analitik bo'lgan nuqtada barcha yo'nalishlarda masofalar cho'zilishi bir xil bo'lar ekan. Shunday qilib, hosila modulining geometrik ma'nosi quyidagicha:

$|f'(z_0)|$ soni $w = f(z)$ akslantirishning z_0 nuqtadagi cho'zilish (siqilish) koeffitsientini aniqlaydi.

Unga cho'zilishlar o'zgarmasligi xossasi deb ataladi.

Hosilaning argumenti uchun

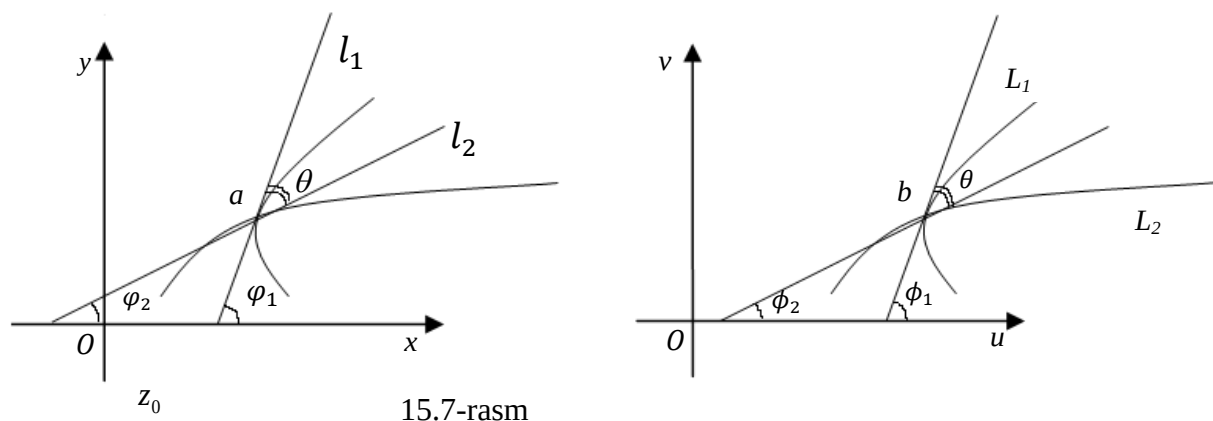
$$\begin{aligned} \arg f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \Phi - \varphi \end{aligned}$$

bu yerda Φ va φ mos ravishda Γ hamda γ chiziqlarning w_0 va z_0 nuqtalardagi urinmalarining haqiqiy o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari. Agar

$\Phi = \varphi + \arg f'(z_0)$ deb yozib olsak, hosila argumentining geometrik ma'nosi quyidagicha tavsiflanadi:

$\arg f'(z_0)$ burchak, $w = f(z)$ akslantirishda z_0 nuqtada ixtiyoriy γ chiziq urinmasining Γ chiziq urinmasiga burilish kerak bo'lgan burchagiga teng. Agar $\arg f'(z_0) > 0$ bo'lsa, burilish soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi, $\arg f'(z_0) < 0$ bo'lsa soat strelkasi yo'nalishi bo'ylab.

$w = f(z)$ analitik funksiya berilgan bo'lsin. a nuqtada θ burchak ostida kesishuvchi ikkita silliq l_1 va l_2 (θ bu chiziqlarga o'tkazilgan urinmalar orasidagi $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ burchak) chiziqlarning akslari L_1 va L_2 ham silliq chiziqlar bo'lib, $b = f(a)$ shart bajarilsin (15.7- rasm).



Funksiya analitik, shuning uchun $\phi_1 = \varphi_1 + \arg f'(a)$, $\phi_2 = \varphi_2 + \arg f'(a)$.

Demak $\phi_1 - \phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$. Shartga ko'ra $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta$, u holda $\phi_1 - \phi_2 = \theta$. Bu esa, $b = f(a)$ nuqtadagi L_1 va L_2 chiziqlar orasidagi burchak.

Shunday qilib, analitik funksiya bajaradigan akslantirishda l_1 va l_2 chiziqlar orasidagi burchak θ bo'lsa, ularning aksi bo'lgan L_1 va L_2 chiziqlar orasidagi burchak ham θ bo'lar ekan. Unga burchaklar *saqlanish xossasi* deb ataladi.

15.18-Ta'rif. Burchaklar saqlanishi va cho'zilishlar o'zgarmasligi xossasiga ega bo'lgan akslantirishga *konform akslantirish* deb ataladi.

Analitik funksiya bajaradigan akslantirish, agar $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsa konform bo'ladi.

15.7-Misol. $w = z^2$ funksiya bajaradigan akslantirishda $z_0 = 1 + i$ nuqtadagi cho‘zilish koeffitsienti va burilish burchagini toping.

$$\blacktriangleright w' = 2z = 2x + 2iy$$

Demak $w'(z_0) = 2 + 2i$

$$|w'(z_0)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

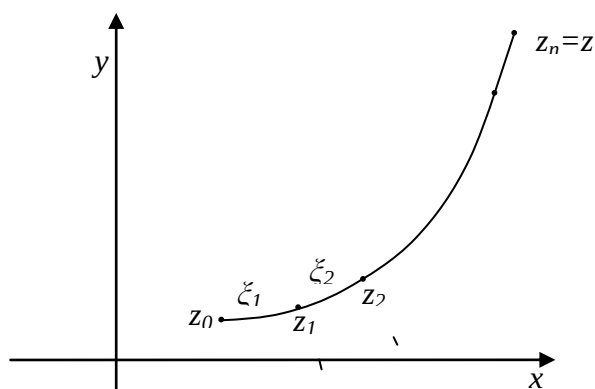
$$\arg w'(z_0) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Shunday qilib $1 + i$ nuqtadan o‘tuvchi silliq chiziqlar $w = z^2$ akslantirishda bir xil $2\sqrt{2}$ cho‘zilishga ega. Bu chiziqlarning akslari $w_0 = (1 + i)^2 = 2i$ nuqtada bir xil $\pi/4$ burchakka buriladi. $\blacktriangleleft$

15.3. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalarni integrallash.

Kompleks o‘zgaruvchili funksiya integralining ta’rifi

z kompleks tekislikda yopiq yoki yopiq bo‘lmagan silliq yoki bo‘lakli silliq C egri chiziq berilgan bo‘lsin. Chiziqning boshlang‘ich nuqtasini z_0 , oxirgi nuqtasini esa z (agar chiziq yopiq bo‘lsa $z_0 = z$) deb olamiz. z_0 ni boshlang‘ich, z ni oxirgi nuqta deb tanlab, C chiziqda musbat yo‘nalishni tanlab oldik. $f(z)$ funksiyani C chiziqning barcha nuqtalarida uzluksiz deb faraz qilaylik.



15.8- rasm

C yoyni ixtiyoriy usulda n ta “elementar” yoylarga ajratamiz va bo‘linish nuqtalarini z_0 dan z ga bo‘lgan yo‘nalishda z_k kabi nomerlab chiqamiz, bu yerda $z_n = z$.

$z_1 - z_0 = \Delta z_1, \quad z_2 - z_1 = \Delta z_2, \dots, z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$ belgilashlar kiritamiz.

Δz_k soni z_{k-1} nuqtadan z_k nuqtaga qarab yoʻnalgan vektor bilan tasvirlanadi, $|\Delta z_k|$ esa bu vektoring uzunligi. Har bir elementar yoyda ixtiyoriy tarzda bittadan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nuqta tanlaymiz (15.8 rasm). Yuqoridagi boʻlinishga asosan quyidagi yigʻindini tuzamiz

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta z_n \quad (15.8)$$

va $\lambda = \max_k |\Delta z_k|$ kabi belgilash kiritamiz.

15.19-Taʼrif. $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) da (15.8) yigʻindining limiti mavjud boʻlib, bu limitning qiymati chiziqning boʻlinish turiga va nuqtalarning tanlanish usuliga bogʻliq boʻlmasa, limitning qiymatiga $f(z)$ funksiyadan C egri chiziq boʻyicha olingan integral deb ataladi va

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k \quad (15.9)$$

kabi belgilanadi.

Shuni taʼkidlab oʻtishimiz lozimki, egri chiziqli integrallar kabi bu integral ham integrallash chizigʻi silliq va integrallanuvchi funksiya uzluksiz boʻlganida har doim mavjud.

Kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar integrallarining xossalari

Kompleks oʻzgaruvchili funksiya integralining taʼrifidan koʻrinib turibdiki, uni haqiqiy oʻzgaruvchili funksiyaning egri chiziqli integraliga olib kelish mumkin. Haqiqatan, haqiqiy oʻzgaruvchilarga oʻtsak,

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

tengliklarni eʼtiborga olgan holda

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy)$$

yoki

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (15.10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning integrali ikkita egri chiziqli integrallar yig'indisi orqali ifodalanar ekan. Shuning uchun egri chiziqli integrallardan kelib chiqadigan bir nechta xossalarni isbotsiz keltiramiz.

$$1. \quad \int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz,$$

$$2. \quad \int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz,$$

bu yerda $k - const$;

3. Agar $\bar{C}$ – geometrik jihatdan C bilan ustma ust tushib, lekin unda yo'nalish qarama qarshi bo'lsa, u holda

$$\int_{\bar{C}} = - \int_C f(z)dz;$$

4. Agar C yoy $C_1, C_2, \dots, C_n$ yoylardan tashkil topgan bo'lsa, u holda

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz;$$

$$5. \quad \int_C dz = z - z_0;$$

6. Agar C yoyning barcha nuqtalarida $|f(z)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lib, C yoyning uzunligi l ga teng bo'lsa, u holda

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq Ml$$

Bu xossalar integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun ularning isbotiga to'xtalib o'tirmaymiz.

Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralini hisoblash

Agar C chiziq $x = x(t), y = y(t)$ parametrik tenglamasi bilan berilgan bo'lib, chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari $t = \alpha, t = \beta$ parametrlarga mos kelsa, u holda

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt, \quad (15.11)$$

bu yerda $z(t) = x(t) + iy(t)$ –uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.

Xususan, agar chiziq $y = y(x), a < x < b$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda (15.11) formula quyidagicha bo'ladi

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(x + iy(x))(1 + iy'(x))dx$$

15.8-Misol. Ushbu $\int_C \bar{z}dz$ integral xisoblansin, bu yerda C –chiziq $z = 0$ va $z = 1 + i$ nuqtalarni tutashtirib turuvchi $y = x$ to‘g‘ri chiziq kesmasidan iborat.

► Agar bu integralda haqiqiy o‘zgaruvchilarga o‘tsak

$$\int_C \bar{z}dz = \int_C (x - iy)d(x + iy) = (1 - i^2) \int_0^1 xdx = 1$$

hosil bo‘ladi. ◀

15.20-Ta’rif. Agar

$$\Phi'(z) = f(z)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\Phi(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb ataladi

Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lgan Nyuton-Leybnits formulasini kompleks o‘zgaruvchili funksiyalarga ham ko‘chirishimiz mumkin.

15.5-Teorema. Agar $f(z)$ funksiya z_0 va z_1 nuqtalarni o‘z ichiga oluvchi D sohada analitik bo‘lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi o‘rinli:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \quad (15.12)$$

bu yerda $\Phi(z)$ funksiya $f(z)$ ning biror boshlang‘ich funksiyasi.

Endi biz ko‘pchilik integrallarni hisoblashda muhim bo‘lgan ikkita xossani keltiramiz.

15.6-Teorema. $f(z)$ va $g(z)$ biror bir bog‘lamli D sohada analitik funksiyalar, z_0 va z_1 bu sohaning ixtiyoriy nuqtalari bo‘lsa, u holda quyidagi bo‘laklab integrallash formulasi o‘rinlidir:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = [f(z)g(z)] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz \quad (15.13)$$

15.7-Teorema. $z = \varphi(w)$ analitik funksiya S chiziqni o‘zaro bir qiymatli ravishda w tekislikdagi Γ chiziqqa akslantirsin, u holda

$$\int_C f(z)dz = \int_{\Gamma} f(\varphi(w))\varphi'(w)dw \quad (15.14)$$

Eslatma. 1. Agar integrallash yo‘li aylana yoki uning biror yoyidan iborat bo‘lsa $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ kabi almashtirish bajarish maqsadga muvofiq.

2. Agar integrallash chizig‘i yopiq konturdan iborat bo‘lsa, haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar integrallaridagi kabi $\oint$ belgilashdan foydalanamiz.

15.9-Misol. a) Quyidagi integralni hisoblang:

$$I = \int_1^{1+i} z dz$$

► Integral ostidagi funksiya analitik bo‘lganligi uchun (15.12) formulaga ko‘ra

$$I = \int_1^{1+i} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^{1+i} = \frac{1}{2} ((1+i)^2 - 1) = \frac{2i-1}{2}$$

b) Agar C integrallash chizig‘i $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$ aylana yoyidan iborat bo‘lsa, quyidagi integralni hisoblang

$$\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz$$

Chiziq birlik aylanadan iborat bo‘lganligi uchun $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ kabi almashtirish bajaramiz, u holda

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (e^{2i\theta} + 1) ie^{i\theta} d\theta &= i \int_0^\pi (e^{3i\theta} + e^{i\theta}) d\theta = \left(\frac{1}{3} e^{3i\theta} + e^{i\theta} \right) \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{3} e^{3i\pi} + e^{i\pi} - \frac{1}{3} - 1 = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

c) $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ integral hisoblansin. Bu yerda C chiziq $|z| = 1$ aylananing yuqori yarim yoyi. Integral ostida ildizning $\sqrt{1} = -1$ shartni qanoatlantiruvchi tarmog‘i olinsin.

Bu integralda ham $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ kabi almashtirish bajaramiz va $\sqrt{1} = -1$ shartdan $\sqrt{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$ ni hosil qilamiz. U holda

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}} = i \int_0^\pi e^{i(\frac{\theta}{2}-\pi)} d\theta = 2e^{i(\frac{\theta}{2}-\pi)} \Big|_0^\pi = 2(1-i)$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

Koshi teoremasi

15.8-Teorema (Koshi). Agar $f(z)$ funksiya C yopiq kontur bilan chegaralangan bir bog‘lamli D soha va uning chegarasida analitik bo‘lsa, u holda

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (15.15)$$

◀ $f'(z)$ funksiya D sohada uzluksiz bo‘lsin. $f(z)$ funksiya analitik bo‘lganligi uchun uning haqiqiy va mavhum qismlari uchun Koshi-Riman shartlari bajariladi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(15.10) formulaga ko‘ra

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

tenglik o‘rinli. Egri chiziqli integrallar nazariyasidan ma‘lumki, Koshi-Rimanning ikkinchi shartiga ko‘ra

$$\oint_C u(x,y)dx - v(x,y)dy = 0$$

birinchi shartiga ko‘ra

$$\oint_C v(x,y)dx + u(x,y)dy = 0$$

Demak

$$\oint_C f(z)dz = 0. \blacktriangleright$$

Eslatma. Koshi teoremasi ko‘p bog‘lamli sohalar uchun ham o‘rinli. Bunday holda C bir necha yopiq konturlar birlashmasidan iborat bo‘ladi.

Koshi integrali. Koshining integral formulasi

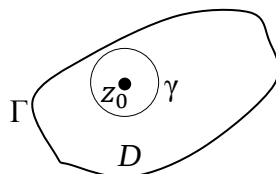
Yuqorida isbot etilgan Koshi teoremasidan kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining eng muhim formulalaridan biri- Koshining integral formulasi kelib chiqadi.

15.9-Teorema. $f(z)$ funksiya bir bog‘lamli D soha va uning musbat orientirlangan chegarasi C chiziqda analitik bo‘lsin. U holda D sohaning ichida yotuvchi ixtiyoriy z_0 nuqta uchun

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (15.16)$$

formula o'rinli.

◀ z_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi radiusi ρ ga teng bo'lgan shunday γ aylana olamizki $|z - z_0| \leq \rho$ doira to'laligicha D sohada yotsin.



15.9-rasm

Koshi teoremasiga ko'ra (15.9- rasm)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

Bu yerda γ^- chiziqning manfiy orientirini, ya'ni soat strelkasi bo'ylab yo'nalishni anglatadi. Integrallarning 3- xossasiga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (15.17)$$

Demak (16) formulani γ kontur uchun isbotlash etarli.

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) &= \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \\ &= \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \end{aligned} \quad (15.18)$$

Oxirgi integralda $f(z)$ uzluksiz bo'lganligi uchun $\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = 0$

yoki

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Shuning uchun (15.18) tenglikda $\rho \rightarrow 0$ limitga o'tsak, tenglikning chap tomonidagi integral (15.17) ga asosan ρ ga bog'liq bo'lmaganligi uchun

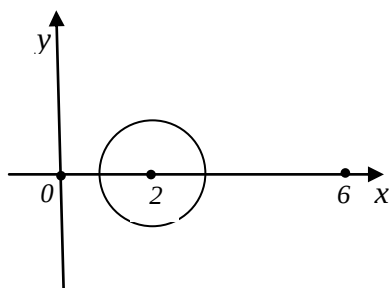
$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = 0$$

yoki (15.16) tenglikni hosil qilamiz. ▶

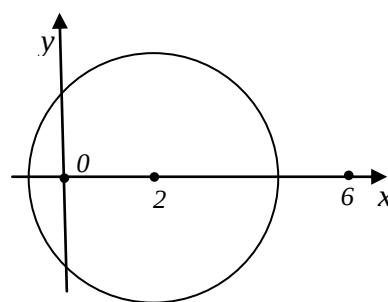
(15.16) tenglikning o'ng tomonida turgan integralga *Koshi integrali*, tenglikning o'ziga esa *Koshining integral formulasi* deb ataladi. Koshi integralini hisoblash uchun $f(z)$ funksiyaning soha chegarasidagi qiymatini bilish kerak.

O'z navbatida Koshining integral formulasi, agar funksiyaning soha chegarasidagi qiymatlari ma'lum bo'lsa, uning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi qiymatini hisoblash imkonini beradi.

Eslatma. Koshining integral formulasi ko'p bog'lamli sohalar uchun ham o'rinli bo'lib, bu holda integral bir nechta integrallarga ajralib ularning barchasida chiziq bo'ylab yurilganida soha chap tomonda qoladi.



15.10- rasm



15.11- rasm

15.10-Misol. Koshining integral formulasidan foydalanib integralni hisoblang

$$\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$$

Agar

- 1) $C: |z - 2| = 1$
- 2) $C: |z - 2| = 3$
- 3) $C: |z - 2| = 5$

bo'lsa.

► 1) $|z - 2| \leq 1$ yopiq doirani qaraymiz.

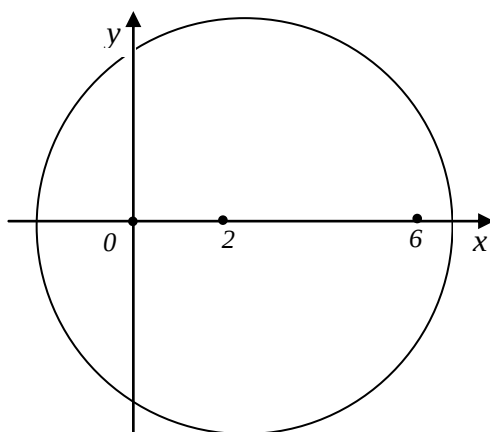
Bu sohada integral ostidagi funksiya analitik (15.10- rasm), shuning uchun Koshi teoremasiga ko'ra,

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0$$

2) $|z - 2| = 3$ aylananing ichida, maxraj nolga aylanadigan bitta nuqta bor (15.11- rasm). Bu $z = 0$ nuqta, shuning uchun Koshining integral formulasiga ko'ra

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{0-6} = -\frac{\pi i}{3}$$

3) $|z - 2| = 5$ chiziqlarning ichida maxraj nolga aylanadigan ikkala nuqta $z = 0$ va $z = 6$ lar ham yotadi (15.12- rasm), shuning uchun



15.12- rasm

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz &= \frac{1}{6} \oint_C \frac{e^{z^2}}{z-6} dz - \oint_C \frac{e^{z^2}}{z} dz = 2\pi i \frac{e^{36}}{6} - 2\pi i \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{3} \pi i (e^{36} - 1) \end{aligned}$$

bo'ladi. ◀

15.10-Teorema. $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D soha va uning musbat orientirlangan chegarasi Γ chiziqda analitik bo'lsin. U holda ixtiyoriy natural n soni uchun quyidagi formula o'rinli:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (15.19)$$

bu yerda $z_0 \in D, z \in \Gamma$.

Bu formulaga *yuqori tartibli hosilalar* formulasi deb ataladi. Uni hosil qilish uchun (15.16) Koshining integral formulasini z_0 ni o'zgaruvchi deb qarab n marta differensiallash etarli. Bu yerda z_0 nuqta ixtiyoriy tanlanganligi uchun, analitik

funksiya ixtiyoriy tartibdagi hosilaga ega degan xulosa kelib chiqadi. Yuqori tartibli hosilalar formulasi yordamida ba'zi integrallarni hisoblash mumkin.

15.11-Misol. Quyidagi integralni hisoblang.

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$$

► Bu misolda $f(z) = \cos z$, $z = 0$ nuqta esa qaralayotgan chiziqlarning ichida yotadi, shuning uchun (15.19) formulaga asosan integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{2} (-1) = -\pi i$$

qiymatga teng bo'ladi. ◀

15.12-Misol. Quyidagi integralni hisoblang.

$$\oint_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$$

► $z = 2$ nuqta integrallash chizig'i $|z - 3| = 6$ aylananing ichida, $z = -4$ esa tashqarisida yotadi. Shuning uchun integral ostidagi funktsiyani shakl almashtirib (15.19) formulani qo'llaymiz va natjada:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz &= \oint_{|z-3|=6} \frac{\frac{z}{z+4}}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{z}{z+4} \right)' \Big|_{z=2} = \\ &= 2\pi i \frac{4}{(z+4)^2} \Big|_{z=2} = \frac{2\pi i}{9} \end{aligned}$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

15.4. Qatorlar va maxsus nuqtalar. Sonli qatorlar

Hadlari kompleks sonlardan iborat bo'lgan qatorni kompleks sonlar qatori deb yuritiladi.

Agar quyidagicha kompleks sonlar qatori qaralayotgan bo'lsa, ya'ni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) + \dots + (\alpha_n + i\beta_n) + \dots \quad (15.20)$$

U holda, haqiqiy sonlar qatorida bo'lgani kabi bu qatorning dastlabki n ta hadining yig'indisi uning xususiy yig'indisi deb atalib,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k)$$

bilan belgilaymiz.

Ta'rifga ko'ra, n cheksizga intilganda hususiy yig'indilar ketma-ketligi biror chekli limitga ega bo'lsa, uni (15.20) qatorning yig'indisi deb atalib, (15.20) qatorning o'zini yaqinlashuvchi, aksincha bo'lsa, uzoqlashuvchi deb ataladi.

15.11-Teorema. (15.20) kompleks sonlar qatori yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning hadlarining haqiqiy va mavhum qismlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

kabi haqiqiy sonlar qatorlari bir vaqtda yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va etarli.

◀ Zarurligi

Faraz qilaylik (15.20) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \beta_k$$

chekli son bo'lishi kerak. Bu yerdan tenglikning o'ng tomonidagi ikkala limit ham chekli bo'lishi zarurligi kelib chiqadi.

Etarliligi. (15.20) qatordan tuzilgan quyidagi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n &= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \dots \end{aligned}$$

haqiqiy sonlar qatorlarining har biri alohida-alohida yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsin. U holda, agar ularning xususiy yig'indilarini mos ravishda σ_n va τ_n orqali belgilasak, quyidagilarni yozish mumkin bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \text{ (chekli) va } \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau \text{ (chekli)}$$

Shuningdek agar $S_n = \sigma_n + i\tau_n$ ekanligini nazarda tutsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n + i\tau_n) = \sigma + i\tau \text{ (chekli).}$$

Demak (20) qator yaqinlashuvchi ekan. ►

15.21-Ta'rif Agar (15.20) kompleks sonlar qatoriga mos keluvchi quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + i\beta_n| = |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| + \dots + |\alpha_n + i\beta_n| + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (15.20) qatorning o'zini mutlaq yaqinlashuvchi qator deb yuritiladi.

Eslatma. Kompleks hadli qatorlarga haqiqiy hadli qatorlar uchun qo'llanilgan yaqinlashish belgilarini qo'llash mumkin bo'lib, bu holda kompleks hadli qatorlar mutlaq yaqinlashishga tekshiriladi.

15.13-Misol. Quyidagi qatorni yaqinlashishga tekshiring

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$$

► Trigonometrik funksiyalarning aniqlanishidan $\cos in = (e^n + e^{-n})/2$ bo'ladi. Qator yaqinlashishining Dalamber belgisiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 2^n}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e + e^{-2n-1})}{2(1 + e^{-2n})} = \frac{e}{2} > 1$$

Demak qator uzoqlashuvchi. ◀

Darajali qatorlar

Hadlari kompleks o'zgaruvchili funksiyalardan iborat bo'lgan

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (15.21)$$

qatorga *funktsional qator* deyiladi.

Bu ko'rinishdagi funktsional qatorlar haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar qatorlari bilan bir xossalarga ega bo'lganligi uchun biz ularni qoldiramiz. (II qism, XXI bob). Funktsional qatorlarning muhim xususiy hollaridan biri darajali qatorlar bo'lib, bunday qatorlar kompleks sonlar tekisligida qaraladi. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + s_n z^n + \dots \quad (15.22)$$

ko'rinishdagi qatorga *darajali qator* deyiladi, bu yerda s_n — o'zgarmas kompleks son. Bu qator z ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zilarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, kompleks sonlar tekisligi ikki qismga ajralib, uning bir qismida qator yaqinlashadi, ikkinchisida uzoqlashadi. Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini aniqlaydigan quyidagi teoremani keltiramiz.

15.12-Teorema. (Abel) Agar (15.22) darajali qator biror $z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda bu qator $|z| < |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalarda mutlaq yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha (15.22) qator biror z_0 da uzoqlashuvchi bo'lsa, $|z| > |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Abel teoremasidan (15.22) darajali qatorning yaqinlashish sohasi doiradan iborat ekanligi kelib chiqadi, chunki tekislikda $|z| < |z_0|$ soha markazi nolda radiusi $|z_0|$ ga teng bo'lgan doirani ifodalaydi. $|z_0|$ sonlarining eng kattasiga darajali qatorning *yaqinlashish radiusi* deb atalib, uni

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n}{s_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|s_n|}} \quad (15.23)$$

formulalar yordamida hisoblanadi. $|z| < R$ sohaga darajali qatorning *yaqinlashish doirasi* deb ataladi.

$|z_0| = R$ aylana ustidagi nuqtalarda qator yaqinlashishi ham uzoqlashishi ham mumkin. $R = 0$ da qator faqatgina $z = 0$ nuqtada yaqinlashadi, $R = \infty$ da esa kompleks tekisligining barcha nuqtalarida yaqinlashadi.

15.14-Misol. Quyidagi darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

► $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ bo'lganligi uchun

$$s_n = (1+i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \quad |s_n| = \sqrt{2}^n$$

Demak (23) formulaga ko'ra

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|s_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{2}^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Shunday qilib qatorning yaqinlashish sohasi markazi nolda radiusi $R = \sqrt{2}/2$ bo'lgan doiradan iborat. ◀

Abel teoremasidan quyidagi bir necha muhim natijalar kelib chiqadi.

1-Natija. Yaqinlashish doirasining ichida darajali qator analitik funksiyaga yaqinlashadi.

2-Natija. Darajali qatorni yaqinlashish doirasi ichida ixtiyoriy marta hadlab differensiallash va integrallash mumkin bo‘lib, hosil bo‘lgan qatorlarning yaqinlashish radiusi berilgan qator yaqinlashish radiusiga teng.

Eslatma. (15.22) darajali qator bilan birgalikda

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + s_n(z-a)^n + \dots$$

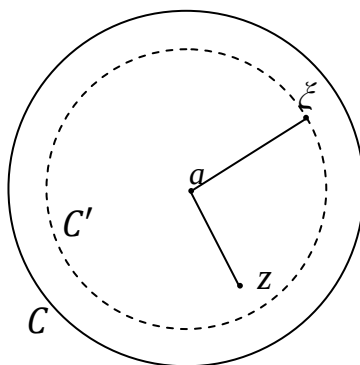
ko‘rinishdagi qatorlar ham darajali qatorlardir. Ravshanki, u ham doirada yaqinlashuvchi bo‘lib, yaqinlashish radiusi (15.23) formulalar bilan topiladi. Yaqinlashish sohasi $|z-a| < R$ doiradan iborat.

Taylor qatori

Markazi $z = a$ nuqtada bo‘lgan C aylana bilan chegaralangan D doira ichida bir qiymatli analitik $f(z)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyani $z = a$ nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz. z nuqta D doira ichida ixtiyoriy joylashgan bo‘lsin (15.13 rasm).

◀ D doiraning ichida markazi a nuqtada bo‘lgan shunday C' aylana olamizki, z nuqta uning ichida yotsin. Agar ξ nuqta C' aylananing ustidagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, u holda Koshining integral formulasiga ko‘ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \quad (15.24)$$



15.13 - rasm

$\frac{1}{\xi-z}$ kasrda quyidagicha shakl almashtiramiz

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)}$$

$|\xi - a|$ modul C' aylananing radiusiga teng, $|z - a|$ modul esa z nuqtadan a nuqtagacha bo'lgan masofaga teng bo'lib, $|\xi - a|$ dan kichik, shuning uchun $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| < 1$. O'z navbatida $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}$ ifodani C' aylananing ichida joylashgan ixtiyoriy z nuqtada yaqinlashuvchi cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi deb qarash mumkin:

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = 1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n + \dots \quad (15.25)$$

O'zgarmas z uchun $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| = q$ kattalik C' aylanada o'zgarmas son bo'lganli uchun (15.25) qator bu aylanada ξ ga nisbatan yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun (15.25) qator hadlarining modullari

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

qator hadlari bilan ustma-ust tushadi.

Demak, oxirgi qator (15.25) qator uchun majoranta bo'ladi. O'z navbatida darajali qatorlarning xossalriga ko'ra (15.25) qatorni biror songa hadlab ko'paytirish, uni hadlab integrallash mumkin bo'ladi. Yuqoridagilarga asosan (15.25) tenglikning ikkala tomonini $\frac{f(\xi)}{\xi-a}$ nisbatga hadlab ko'paytiramiz, natijada

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{\xi-a} + \frac{(z-a)f(\xi)}{(\xi-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} + \dots$$

qatorga ega bo'lamiz. Agar bu qatorni $\frac{1}{2\pi i}$ ga ko'paytirib, C' chiziqli bo'yicha hadlab integrallasak, $f(z)$ funksiyaning $z-a$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilmasini hosil qilamiz

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a} + \frac{z-a}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} + \dots = \\ &= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \end{aligned}$$

bu yerda:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15.26)$$

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik. ►

15.13-Teorema. Agar $f(z)$ markazi $z = a$ nuqtada bo'lgan D doira ichida bir qiymatli analitik funksiya bo'lsa, u holda bu funktsiyani D doirada yaqinlashuvchi bo'lgan darajali qatorga yoyish mumkin bo'lib, uning koeffitsientlari (15.26) formulalar bilan hisoblanadi.

Yuqorida hosil qilingan qatorda, uning (15.26) koeffitsientlarini hisoblashda C' chiziqli sifatida, D doiraning ichida yotuvchi markazi $z = a$ nuqtada bo'lgan ixtiyoriy aylana yoki a nuqtani o'z ichiga olib uni bir marta aylanuvchi ixtiyoriy yopiq konturni olishimiz mumkin. Chunki Koshining integral formulasiga asosan integralning qiymati kontur tanlanishiga bog'liq emas.

Agar (15.19) yuqori tartibli hosilalar formulasini e'tiborga olsak,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - a} = f(a),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Ular yordamida matematik analizdan ma'lum bo'lgan Teylor formulasini hosil qilamiz

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots \quad (15.27)$$

$a = 0$ bo'lsa, ma'lum bo'lgan Makloren qatorini hosil qilamiz

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots \quad (15.28)$$

Ushbu yoyilmalardan foydalangan holda ba'zi elementar funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasini keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun funktsiyani bevosita (15.28) formulalarga qo'yish etarli:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Bu qatorlarning birinchi uchasi kompleks tekisligining barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'ladi, oxirgisi esa binomial qator deb atalib $|z| < 1$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi.

Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (15.29)$$

ko'rinishdagi qatorga Loran qatori deb ataladi, bu yerda a, c_n - kompleks sonlar, z - kompleks o'zgaruvchi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \quad (15.30)$$

qatorning *bosh qismi*,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (15.31)$$

esa *to'g'ri qismi* deyiladi.

Ravshanki, (15.29) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun (15.30) va (15.31) qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. (15.31) darajali qatorning yaqinlashish sohasi doira bo'lib, uning radiusi (15.23) formula bilan hisoblanadi. (15.30) qatorning yaqinlashish sohasini topish uchun bu qatorda

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \xi^n$$

almashtirish bajaramiz va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$$

ni hosil qilamiz. U bizga ma'lum darajali qator bo'lib uning yaqinlashish radiusini

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_{-n}}{s_{-n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|s_{-n}|}}$$

formula bilan hisoblanadi. Demak, agar

$$\frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{r} \quad \text{yoki} \quad |z-a| > r$$

bo'lsa, (15.30) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, Loran qatori yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning to'g'ri va bosh qismlari bir vaqda yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. $r < R$ bo'lsa, (15.30) va (15.31) qatorlarning umumiy yaqinlashish sohasi mavjud va Loran qatori

$$r < |z-a| < R$$

xalqada yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $r > R$ bo'lsa, Loran qatori birorta ham nuqtada yaqinlashmaydi. $r = R$ bo'lganida Loran qatori aylananing ba'zi nuqtalarida yaqinlashuvchi, qolgan nuqtalarida uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

15.15-Misol. Quyidagi qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+12i)^n}{(z-5i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-5i)^n}{17^n}$$

► Har bir qatorning yaqinlashish sohalarini alohida aniqlaymiz:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(5+12i)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |5+12i| = 13.$$

Demak, Loran qatorining bosh qismi $|z-5i| > 13$ da yaqinlashadi.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|1/\left(\frac{1}{17^n}\right)\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |17| = 17$$

Loran qatorining to'g'ri qismi $|z-5i| < 17$ doirada yaqinlashar ekan. Shunday qilib berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $13 < |z-5i| < 17$ xalqadan iborat bo'lar ekan. ◀

15.14-Teorema. Agar $f(z)$ funksiya $r < |z-a| < R$ xalqada analitik bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning bu xalqada yagona usulda Loran qatoriga yoyish mumkin va uning koeffitsientlari

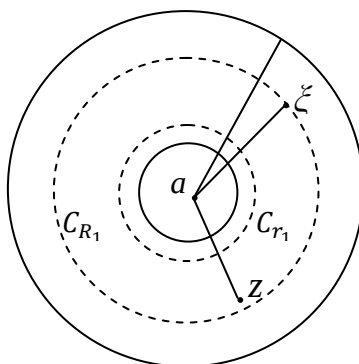
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

formulalardan topiladi, bu yerda C , markazi a nuqtada bo'lgan berilgan xalqaning ichida yotuvchi ixtiyoriy aylana.

◀ z nuqtani $r < |z - a| < R$ xalqada ixtiyoriy tanlab mahkamlab olamiz. Bu xalqada radiuslari $r < r_1 < R_1 < R$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ikkita C_{r_1} va C_{R_1} aylanalar olamiz. Ko'p bog'lamli sohalar uchun Koshi formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}^-} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (15.32)$$

bu yerda birinchi integralda yo'nalish soat strelkasiga qarama-qarshi, ikkinchisida soat strelkasi bo'ylab (15.14 rasm).



15.14- rasm

C_{R_1} aylanada $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| < 1$ bo'lganligi uchun Teylor formulasi keltirib chiqarilishida bajarilgan amallarni takrorlasak,

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{\xi - a} + \frac{(z - a)f(\xi)}{(\xi - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} + \dots$$

tenglikni hosil qilamiz. Uni C_{R_1} aylana bo'ylab hadlab integrallasak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (15.33)$$

kabi darajali qator hosil bo'lib, uning koeffitsientlari quyidagicha topiladi

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

C_{r_1} aylanada esa $\left| \frac{\xi-a}{z-a} \right| < 1$ bo'lganligi uchun

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - a - (\xi - a)} = -\frac{1}{(z - a) \left(1 - \frac{\xi - a}{z - a} \right)} = -\frac{1}{(z - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\xi - a}{z - a} \right)^n$$

Uni $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ ifodaga ko‘paytirib C_{r_1} aylanada hadlab integrallasak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} \quad (15.34)$$

bu yerda

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

(15.33) va (15.34) qatorlar koeffitsientlarni hisoblash formulalarida Koshi teoremasiga asosan integrallash chiziqlarini $r < |z - a| < R$ xalqada yotuvchi va markazi a nuqtada bo‘lgan ixtiyoriy aylana bilan almashtirish mumkin. Agar (15.33) va (15.34) tengliklarni (15.32) formulaga qo‘ysak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n \quad (15.35)$$

kabi Loran qatoriga bo‘lgan yoyilmani hosil qilamiz. Bu yerda:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

C chiziq $r < |z - a| < R$ xalqada yotuvchi va markazi a nuqtada bo‘lgan aylana.

Bu yerda ham C aylanani $r < |z - a| < R$ xalqada yotuvchi va a nuqtani o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy yopiq kontur bilan almashtirish mumkin. ►

15.16-Misol. $f(z) = 1/(z + 2)$ funksiyani $z = 0$ nuqta atrofida darajali qatorga yoying.

► Berilgan funksiyaning n tartibli hosilasi formulasini topamiz

$$f^{(n)}(z) = \left(\frac{1}{z + 2} \right)^{(n)} = [(z + 2)^{-1}]^{(n)} = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-n) \cdot (z + 2)^{-n-1},$$

hamda bu hosilaning nol nuqtadagi qiymatini aniqlaymiz

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n! \cdot 2^{-n-1}$$

U holda $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot 2^{-n-1}$ ekanligini nazarda tutsak, funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$f(z) = \frac{1}{z + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^{-n-2} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$$

Bu qatorning yaqinlashish radiusini topamiz

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(-1)^n 2^{(-n-1)}}} = \frac{1}{2^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-1}}} = 2$$

Demak, qatorning yaqinlashish sohasi $|z| < 2$ doiradan iborat ekan. ◀

15.17-Misol. $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ funksiyani $0 < |z-1| < 2$ xalqada Loran qatoriga yoying.

► Berilgan $f(z)$ funksiyani $(z-1)$ ning musbat va manfiy darajalari bo'yicha yig'indisi ko'rinishida ifodalashimiz kerak. Buning uchun funksiyada quyidagicha shakl almashtiramiz

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} \right).$$

Birinchi ikkita had kerakli ko'rinishga ega. Qolgan hadlarning shaklini almashtiramiz.

$|z-1| < 2$ bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \dots \end{aligned}$$

To'rtinchi hadning shaklini almashtiramiz

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{z-1}{2}\right) \right]^{-2}$$

bu yerda ham $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ bo'lganligi uchun, binomial yoyilmadan foydalanib qatorga yoyamiz

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[1 - 2 \cdot \frac{z-1}{2} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

Barcha yoyilmalarni $f(z)$ funksiyaga qo'ysak,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} \right) + \frac{5}{16} - \frac{3}{16}(z-1) + \frac{7}{64}(z-1)^2 - \frac{1}{16}(z-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

ko'rinishdagi Loran qatoriga bo'lgan yoyilmani hosil qilamiz. ◀

Yakkalangan maxsus nuqtalar

15.22-Ta'rif. Agar

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning n – tartibli noli deb ataladi, va $n = 1$ bo'lsa, z_0 oddiy nol deyiladi.

Masalan, $z_0 = 0$ nuqta $f(z) = \sin z$ funksiya uchun oddiy nol, $\varphi(z) = z \sin z$ funksiya uchun esa ikkinchi tartibli nol bo'ladi.

15.15-Teorema. z_0 nuqta $f(z)$ analitik funksiyaning m tartibli noli bo'ladi faqat va faqat shu holda, qachonki funksiyani z_0 nuqtaning atrofida

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu yerda $\varphi(z)$, z_0 nuqtada analitik funksiya va $\varphi(z_0) \neq 0$.

◀ $f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning atrofida analitik bo'lganligi uchun uni darajali qatorga yoyish mumkin

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

Agar z_0 nuqta m tartibli nol bo'lsa, yuqoridagi yig'indida dastlabki $m - 1$ ta had nolga teng bo'ladi. U holda

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0)^{m+1} + \dots = \\ &= (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \dots \right] = (z - z_0)^m \varphi(z) \end{aligned}$$

bu yerda, $\varphi(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik va $\varphi(z_0) \neq 0$. Teskari tasdiq

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

funksiyadan bevosita hosila olish bilan tekshiriladi. ►

15.23-Ta'rif. Agar $z = z_0$ nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bu atrofda $f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda analitik bo'lsa, z_0 nuqtani $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

$z = z_0$ yakkalangan maxsus nuqta bo'lsa, yuqorida isbot qilingan teoreмага ko'ra, $f(z)$ funksiyani $0 < |z - z_0| < R$ xalqada

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ko'rinishda Loran qatoriga yoyish mumkin. Bu yoyilmaning bosh qismi uchun uch xil holat bo'lishi mumkin:

- a) Loran qatorida $z - z_0$ ning manfiy darajalari ishtirok etmaydi;
- b) Yoyilmaning tarkibida $z - z_0$ ning chekli sondagi manfiy darajalari ishtirok etadi;
- s) Yoyilmada $z - z_0$ ning cheksiz sondagi manfiy darajalari ishtirok etadi

Yuqoridagilarga ko'ra funksiyaning maxsus nuqtalari uch turga bo'linadi. Biz bu hollarning har birini alohida-alohida qarab chiqamiz.

1. Funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatoriga bo'lgan yoyilmasida manfiy darajali hadlar ishtirok etmasin, ya'ni

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Bunday nuqtaga **tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta** deb ataladi. Ko'rinish turibdiki, $z \rightarrow z_0$ da funksiyaning chekli limiti mavjud va $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$. Agar funksiya z_0 nuqtada aniqlanmagan yoki aniqlansa ham qiymati boshqa son bo'lsa, unga z_0 nuqtada c_0 qiymat bersak, ya'ni $f(z_0) = c_0$ deb olsak funksiya analitik bo'lib qoladi. Bajarilgan amal yordamida funksiyaning uzilishini tuzatdik. Ana shu sababga ko'ra bunday maxsus nuqtani tuzatib bo'ladigan deyiladi.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbotladik.

15.16-Teorema. Agar z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ chekli limit mavjud.

2. Funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasida chekli sondagi manfiy darajali hadlar ishtirok etadi, ya'ni

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

kabi bo'lsa, z_0 funksiyaning **qutb maxsus nuqtasi** deyiladi. Agar bu yerda $c_{-m} \neq 0$ bo'lsa, z_0 ga m –tartibli qutb maxsus nuqta deb ataladi. $m = 1$ da *oddiy qutb* deyiladi.

15.17-Teorema. Agar z_0 funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

◀ $f(z)$ funksiyaning Loran qatorini qaraylik:

$$\begin{aligned} & \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ & = (z - z_0)^{-m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1}] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ & = (z - z_0)^{-m} \psi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \end{aligned} \quad (15.36)$$

Ravshanki, $\psi(z)$ funksiya z_0 nuqtaning atrofida chegaralangan va analitik, shuning uchun $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. (15.36) tenglikda shakl almashtirib funksiyaning

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$$

ko'rinishda yozib olsak bo'ladi, bu yerda $\varphi(z)$ ($\varphi(z_0) \neq 0$) analitik funksiya. Funksiyaning bu ko'rinishdagi ifodasi yordamida qutbning tartibini ham aniqlash mumkin. ►

Shuni ta'kidlashimiz lozimki, funksiyaning nollari va qutblari o'zaro bog'liq bo'lib ular uchun quyidagi teorema o'rinli.

15.18-Teorema. z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'lishi uchun u $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiya noli bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremaning isboti cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlarning o'zaro bog'liqligidan kelib chiqqanligi uchun uni qoldiramiz.

Ravshanki, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning n ($n \geq 1$) –tartibli qutb nuqtasi bo'lsa, $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ funksiyaning n tartibli noli bo'ladi.

3. Funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatoriga bo'lgan yoyilmasida cheksiz sondagi manfiy darajali hadlar ishtirok etadi, ya'ni

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

bo'lsa, z_0 ga funksiyaning ***muhim maxsus nuqtasi*** deb ataladi.

Bu holda $z \rightarrow z_0$ da funksiya hech qanday limitga ega bo'lmaydi.

Yakkalangan maxsus nuqta atrofida analitik funksiyaning Loran qatoriga yoyishning yuqorida qaralgan uchta holi mumkin bo'lgan barcha hollarni qamrab oladi va ular maxsus nuqta atrofida analitik funksiyaning o'zini tutishini aniqlashda asosiy ahamiyatga ega.

Yuqorida olib borilgan tahlillardan yakkalangan maxsus nuqtaga nisbatan ikki xil yondashish mumkinligi kelib chiqadi. Biz funksiyaning maxsus nuqta atrofida Loran qatoriga yoyib, so'ngra bu nuqta atrofida funksiya o'zini qanday tutishini tahlil qildik. Teskari yondashuv ham mumkin bo'lib, unga ko'ra asos sifatida yakkalangan maxsus nuqta atrofida funksiyaning o'zini tutishi olinadi. Bu holda yuqoridagi 15.16 va 15.17-Teoremlarga teskari teoremani isbotlash mumkin.

Cheksiz uzoqlashgan nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deb ataladi, agar shunday R mavjud bo'lsaki, funksiya $|z| > R$ sohada $z = 0$ nuqtadan chekli masofada joylashgan maxsus nuqtaga ega bo'lmasa; Chekli yakkalangan nuqtalar holidagi kabi, bu holda ham maxsus nuqtalarni sinflarga ajratamiz. Buning uchun $R < |z| < \infty$ xalqada analitik bo'lgan $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyamiz

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Cheksizlik - yakkalangan maxsus nuqta uchun quyidagi ta'riflarni qabul qilamiz. Cheksiz uzoqlashgan nuqtaning atrofi deyilganida $\rho < |z| < \infty$ soha, ya'ni $|z| \leq \rho$ doiraning tashqarisi tushuniladi.

15.24-Ta'rif. Agar $f(z)$ funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasida z ning musbat darajalari ishtirok etmasa:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n,$$

cheksizlik - yakkalangan maxsus nuqta bu funksiyaning tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasi deyiladi.

15.25-Ta'rif. Agar (z) funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^k c_n z^n, \quad k > 0, \quad c_k \neq 0$$

ko'rinishda bo'lsa, cheksizlik - yakkalangan maxsus nuqta bu funksiyaning qutb maxsus nuqtasi deyiladi,

15.26-Ta'rif. Agar $f(z)$ funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

ko'rinishda bo'lsa, cheksizlik - yakkalangan maxsus nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi deyiladi,

Cheksizlik $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi va $\xi = \frac{1}{z}$ inversiya almashtirishi bo'lsin. Bu almashtirish 0 ni ∞ ga o'tkazadi va aksincha. Agar $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ funksiya uchun $\xi = 0$ tuzatib bo'ladigan, qutb yoki muhim maxsus nuqta bo'lsa, u holda cheksizlik $f(z)$ uchun xuddi shunday maxsus nuqta bo'ladi.

15.18-Misol. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ funksiyaning maxsus nuqtalari va ularning turini aniqlang.

► Funksiyaning berilishidan ma'lumki, uning bitta $z = 0$ maxsus nuqtasi bo'lib, u qutb maxsus nuqta bo'ladi. Qutbning tartibi ikkiga teng, chunki $\sin z$ funksiyaning yoyilmasidan foydalanib yozsak

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-4}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

Bu berilgan funksiyaning Loran qatori bo'lib, ta'rifga ko'ra qutbning tartibi ikki bo'ladi. ◀

15.19-Misol. $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$ funksiyaning qutblari va ularning turlarini aniqlang.

► Ko'rinib turibdiki funksiya yagona $z = 0$ maxsus nuqtaga ega bo'lib, 15.17-Teoremaga asosan u qutb nuqta bo'ladi, chunki

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \sin z} = \infty$$

Uning tartibini aniqlash uchun $\varphi(z) = z - \sin z$ funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya uchun

$$\varphi(0) = 0;$$

$$\varphi'(z) = 1 - \cos z, \quad \varphi'(0) = 0;$$

$$\varphi''(z) = -\sin z, \quad \varphi''(0) = 0;$$

$$\varphi'''(z) = \cos z, \quad \varphi'''(0) = 1 \neq 0.$$

Demak, $z = 0$ nuqta $\varphi(z)$ funksiyaning uchinchi tartibli noli bo'ladi.

15.18-Teoremaga asosan, $z = 0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi bo'lib, uning tartibi uchga teng. ◀

15.5. Chegirmalar nazariyasi.

Funksiyaning maxsus nuqtalardagi chegirmasi va ularni hisoblash

Tadbiqlar uchun muhim bo'lgan, analitik funksiylarning chegirmasi tushunchasini kiritamiz

$z = a$ nuqta bir qiymatli $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda a nuqtani musbat yo'nalishda bir marta aylanuvchi shunday C oddiy konturni tanlash mumkinki, bu konturda yoki uning ichida a nuqtadan tashqari barcha nuqtalarda $f(z)$ funksiya analitik bo'ladi.

15.27-Ta'rif. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

integral bilan aniqlanuvchi qiymatga $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadagi chegirmasi deb ataladi va

$$\text{Res}f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (15.37)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiyaning berilgan nuqtadagi chegirmasi C konturning shakli va o'lchamlariga bog'liq emas (agar chiziq oddiy va berilgan nuqtani musbat yo'nalishda bir marta aylansa).

Ma'lumki, agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkaalangan maxsus nuqtasi bo'lsa, funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasi bosh qismining c_{-1} koeffitsienti uchun

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

tenglik o'rinli. Demak, yuqoridagi ta'rifga asosan

$$\text{Res}f(a) = c_{-1}$$

Agar a nuqta funksiya analitiklik yoki tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasi bo'lsa, bu nuqtada chegirma nolga teng. Haqiqatan ham, analitik yoki tuzatib bo'ladigan a maxsus nuqtada funksiyaning Loran qatoridagi yoyilmasida manfiy darajali hadlar qatnashmaydi. Boshqacha aytganda Loran qatorining bosh qismi barcha koeffitsientlari, jumladan c_{-1} ham nolga teng. Shuning uchun

$$c_{-1} = \text{Res}f(a) = 0 \quad (15.38)$$

Agar a nuqta $f(z)$ funksiya uchun qutb yoki muhim maxsus nuqta bo'lsa, bunday holda chegirma nolga teng bo'lishi yoki noldan farqli son bo'lishi ham mumkin.

$z = a$ ($a \neq \infty$) funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsin. Bu holni ikkiga ajratamiz.

a) oddiy qutb bo'lgan hol.

Bu holda, ta'rifga ko'ra $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan

$$f(z)(z-a) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+1}$$

yoki $z \rightarrow a$ da limitga o'tsak

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a).$$

Demak, oddiy qutb nuqta uchun

$$\text{Res}f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) \quad (15.39)$$

Oddiy qutbning quyidagi maxsus ko'rinishini qaraylik:

$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, bu yerda $\varphi(z)$ va $\psi(z)$ funksiyalar a nuqtada analitik va $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, ya'ni a nuqta $f(z)$ funksiya uchun oddiy qutb bo'ladi. U holda (15.39) formulaga ko'ra

$$\text{Res}f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Demak bu hol uchun

$$\text{Res}f(a) = \varphi(a)/\psi'(a) \quad (15.40)$$

b) Karrali qutb bo'lgan hol m -tartibli qutb nuqtasi bo'lsa, u holda:

Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning m tartibli qutb nuqtasi bo'lsa, u holda ta'rif bo'yicha funksiyaning a nuqta atrofida Loran qatori

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini $(z-a)^m$ ga ko'paytiramiz, u holda

$$\begin{aligned} f(z)(z-a)^m &= c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \\ &+ \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} \end{aligned}$$

Agar bu tenglikning ikkala tomonini $m-1$ marta differensiallab $z \rightarrow a$ da limitga o'tsak

$$(m-1)!c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m]$$

Bu yerdan m tartibli qutb uchun chegirmani hisoblash formulasi

$$\text{Res}f(a) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \quad (15.41)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Xususan, $f(z) = h(z)/(z-a)^m$ va $h(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada analitik, hamda $h(a) \neq 0$ bo'lsa,

$$\text{Res}f(a) = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a) \quad (15.42)$$

15.20-Misol. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini hisoblang.

► Bu funksiya $z = 1$ oddiy qutbga, $z = 2$ da ikkinchi tartibli qutbga erishadi. Shuning uchun (15.39) va (15.41) formulalarga ko'ra

$$\begin{aligned} \text{Res}f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} (z-1) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z}{(z-2)^2} \right] = 1 \\ \text{Res}f(2) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} (z-2)^2 \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z-1)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1 \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Muhim maxsus nuqta.

Bu holda maxsus nuqtadagi chegirma sifatida funksiyaning bevosita bu nuqta atrofida Loran qatoriga yoyib, uning c_{-1} koeffitsienti olinadi.

Cheksiz uzoqlashgan nuqtada chegirma

$f(z)$ funksiya $\rho < |z| < \infty$ sohada, ya'ni $z = \infty$ nuqtaning atrofida analitik, $z = \infty$ nuqta esa funksiyaning yakka-lang maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda funksiya $\rho < |z| < \infty$ sohada

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

kabi Loran qatoriga yoyiladi.

15.28-Ta'rif. $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasi deb,

$$\text{Res}f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$$

integral bilan aniqlanadigan qiymatga aytiladi, bu yerda C markazi nolga radiusi ρ dan katta ixtiyoriy aylana.

Yuqoridagi chegirmaning ta'rifida integrallash manfiy, ya'ni soat strekasi yo'nalishida olinadi. Buning sababi integrallashda soha $\rho < |z| < \infty$ chap tomonda qolishi kerak. Demak, cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi chegirmani

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

integraldan foydalanib topsak,

$$\text{Res}f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz = -c_{-1}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar ∞ tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta bo'lsa, Loran qatori

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan c_{-1} ni topsak

$$\text{Res}f(\infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - c_0] \quad (15.43)$$

formula hosil bo'ladi. Demak cheksizlik- tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta bo'lsa, u noldan farqli bo'lishi mumkin ekan.

15.21- Misol. $f(z) = 1 + 1/z$ funksiyaning cheksizlikdagi chegirmasini toping.

► Funksiyaning berilishini, uning cheksizlikdagi Loran qatoriga yoyilmasi deb qabul qilsak bo'ladi. Bu funksiya uchun

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1$$

ya'ni $z = \infty$ tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta. Shuning uchun $c_{-1} = 1$ ekanligidan $\text{Res}f(\infty) = -1$. ◀

Chegirmalar haqidagi asosiy teorema

Endi yuqorida kiritilgan tushunchalarning bevosita tadbiqlari bilan shug'ullanamiz. Chegirmalarni amaliy masalalarga tadbiq etishda quyidagi teorema muhim rol o'ynaydi.

15.19-Teorema. (Chegirmalar haqidagi asosiy teorema) C oddiy kontur bilan chegaralangan D sohaning chekli sonidagi $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalarida analitik bo'lgan $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. U holda $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ integralning qiymati funksiyaning maxsus nuqtalardagi chegirmalari yig'indisiga teng:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z_k) \quad (15.44)$$

◀ Barcha maxsus nuqtalarni D sohadan chiqib ketmaydigan qilib $C_1, C_2, \dots, C_n$ aylanalar bilan o'raymiz. Bu aylanalarning ichida faqatgina bitta maxsus nuqta bo'lsin va aylanalardan hech qanday ikkitasi o'zaro kesishmasin. Shunda biz ko'p bog'lamli soha hosil qildik. Agar sohaning chegarasida musbat yo'nalish tanlasak, ichki aylanalarda yo'nalish soat strellkasiga qarama-qarshi bo'ladi. (15.15 rasm)

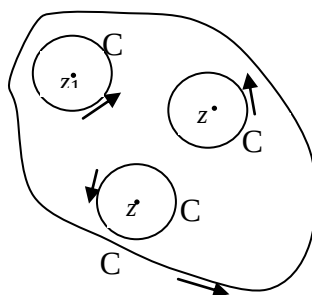
U holda Koshi teoremasining ko'p bog'lamli sohalar uchun natijasiga ko'ra, soha chegarasi bo'yicha olingan integral nolga teng

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k^-} f(z) dz = 0$$

Agar yig'indida integrallash yo'nalishini o'zgartirsak

$$\int_C f(z) dz = - \sum_{k=1}^n \int_{C_k^-} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz$$

Bu yerdan (44) tenglik kelib chiqadi. ▶



15.15-

15.20-Teorema. $f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislikning chekli sonidagi $z_1, z_2, \dots, z_n$ va $z = \infty$ nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalarda analitik bo'lsin. U holda funksiyaning barcha nuqtalardagi chegirmalari yig'indisi nolga teng, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0 \quad (15.45)$$

◀ $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalarni o'z ichiga oluvchi C yopiq kontur olamiz. U holda yuqoridagi 15.18- Teoremaga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k)$$

Lekin bu tenglikda chap tomonda turgan integral cheksizlikdagi chegirmaning qarama qarshi ishora bilan olinganiga teng, ya'ni

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -\operatorname{Res} f(\infty)$$

Agar integralni chegirmaning qiymati bilan almashtirsak (15.45) tenglik kelib chiqadi. ▶

Isbotlangan teorema tasdig'ining ko'rinishini biroz o'zgartirish juda ko'p integrallarning hisoblanishini osonlashtiradi. Aytaylik, C yopiq kontur berilgan bo'lib, bu chiziqning ichida n ta maxsus nuqta, tashqi qismida m ta chekli va cheksizlikdagi maxsus nuqtalar yotibdi. U holda (15.45) tenglikka ko'ra

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) + \sum_{i=1}^m \operatorname{Res} f(z_i) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0$$

Ikkinchi tomondan chegirmalar haqidagi asosiy teoremaga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k)$$

Agar yig'indini integral bilan almashtirsak

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i \sum_{i=1}^m \operatorname{Res} f(z_i) - 2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) \quad (15.46)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ma'nosi quyidagicha: integralning qiymati integrallash chizig'idan tashqaridagi va cheksizlikdagi chegirmalar yig'indisining qarama-qarshi ishora bilan olinganiga teng.

Chegirmalarning aniq integrallarni hisoblashga qo'llanilishi

1) Ratsional funksiyalarni integrallash

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ratsional funksiya bo'lib, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ mos ravishda m – hamda n – tartibli ko'phadlar bo'lsin. Agar $f(x)$ sonlar o'qining barcha nuqtalarida uzluksiz, $Q_n(x) \neq 0$ va $n \geq m + 2$, ya'ni maxrajning darajasi suratning darajasidan hech bo'lmaganda 2 ga ko'p bo'lsa, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma \quad (15.47)$$

bu yerda σ soni $f(x) = P_m(x)/Q_n(x)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi barcha qutblaridagi chegirmalari yig'indisini anglatadi.

15.22- Misol. Integralni hisoblang

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad (a > 0)$$

► Integral ostidagi funksiya juft, shuning uchun

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ funksiyaning kiritamiz, u haqiqiy o'qda, ya'ni $z = x$ da integral ostidagi funksiya bilan ustma-ust tushadi.

$f(z)$ funksiya ikkita $z = \pm ai$ ikkinchi tartibli qutbga ega. Yuqori yarim tekislikda bitta $z = ai$ qutb yotganligi uchun

$$\begin{aligned} \text{Res}f(ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ai)^2] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2z(z + ai)^2 - 2z^2(z + ai)}{(z + ai)^4} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2aiz}{(z + ai)^3} = \frac{1}{4ai} \end{aligned}$$

(15.47) tenglikga asosan

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}$$

qiymatga teng. ◀

$$2) \int_0^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx, \int_0^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

bu yerda $R(x)$ – to‘g‘ri ratsional kasr, $\lambda > 0$ ixtiyoriy haqiqiy son.

Bu ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash uchun quyidagi lemmadan foydalanish qulay.

Jordan lemmasi. $g(z)$ chekli sondagi nuqtalardan tashqari yuqori yarim tekislikning barcha nuqtalarida analitik funksiya ($0 < \arg z < \pi$) bo‘lib, $|z| \rightarrow \infty$ da bu yarim tekislikda nolga intilsin. U holda $\lambda > 0$ da

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) \cdot e^{i\lambda z} dz = 0,$$

bu yerda C_R markazi O nuqtada, radiusi R ga teng bo‘lgan yuqori yarim tekislikdagi yarim aylana.

15.23-Misol. Integralni hisoblang

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx, \quad (a > 0, k > 0)$$

► $f(z) = ze^{iaz}/(z^2 + k^2)$ yordamchi funksiyanı kiritamiz. Agar $z = x$ bo‘lsa, $\text{Im}f(z)$ integral ostidagi $\varphi(x) = x \sin ax/(x^2 + k^2)$ funksiya bilan ustma-ust tushadi. C_R konturnı qaraymiz. yetarlicha katta R larda $g(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$ funksiya

$$|g(z)| \leq \frac{R}{R^2 + k^2}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi va o‘z navbatida $R \rightarrow \infty$ da $g(z) \rightarrow 0$. Demak Jordan lemmasiga ko‘ra

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0$$

Ixtiyoriy $R > k$ uchun chegirmalar haqidagi teoremağa asosan

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \sigma$$

bu yerda σ sonı $f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi chegirmasi

$$\sigma = \text{Res}f(ik) = \lim_{z \rightarrow ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} \cdot (z - ik) \right] = \frac{1}{2} e^{-ak}$$

$R \rightarrow \infty$ da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2 + k^2} dx = \pi i e^{-ak}$$

Chap va o'ng tomondan haqiqiy va mavhum qismlarini ajratsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}$$

integralning qiymatini topamiz. Integral ostidagi funksiya juft bo'lganligi uchun

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}$$

berilgan integral qiymati hosil bo'ladi. ◀

$$3) I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \text{ ko'rinishdagi integrallar}$$

Bu yerda R , argumentlariga nisbatan ratsional funksiya. Integralda $z = e^{i\varphi}$ almashtirish bajaramiz, u holda

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad d\varphi = -i \frac{dz}{z}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ kabi bo'lganida z o'zgaruvchi $|z| = 1$ aylanani musbat yo'nalishda aylanib chiqadi. Shuning uchun yuqoridagi integral

$$\int_{|z|=1} R_1(z) dz$$

ko'rinishdagi yopiq kontur bo'yicha integralga keladi, bu yerda

$$R_1(z) = -\frac{i}{z} \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

Chegirmalar haqidagi teorema asosan

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z_k)$$

bu yerda $z_1, z_2, \dots, z_n$ lar $R_1(z)$ ratsional funksiyaning $|z| \leq 1$ doiradagi qutblari.

15.24-Misol. Quyidagi integralni hisoblang

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{7 + 3 \cos x}$$

► $z = e^{ix}$, $\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx = -i \frac{dz}{z}$, $|z| = 1$. Integralni yangi o'zgaruvchida shakl almashtiramiz

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(7 + 3 \frac{z^2+1}{2z} \right)} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{3z^2 + 14z + 3} = -2i \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k)$$

Integral ostidagi funksiyaning qutblari

$$z_1 = -\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}, \quad z_2 = -\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$$

bo'lib ulardani faqat z_2 qutb $|z| = 1$ aylananing ichiga tushadi. Bu nuqtadagi chegirmani hisoblaymiz

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{3 \left(z + \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \right) \left(z - \frac{2\sqrt{10}-7}{3} \right)} \left(z - \frac{2\sqrt{10}-7}{3} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{3 \left(z + \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \right)} = \frac{1}{4\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Demak,

$$I = -2i \cdot 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{10}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}$$

bo'ladi. ◀

Nazorat savollari

1. Kompleks tekislikda ochiq doira deb nimaga aytiladi?
2. Ko'rsatgichli funksiyaning ta'rifini keltiring.
3. Logarifmik funksiyaning ta'rifini keltiring.
4. Koshi- Riman shartlari deb nimaga aytiladi?
5. Qanday funksiyalar qo'shma garmonik deyiladi?
6. Konform akslantirishni ta'riflab bering.
7. Yopiq kontur uchun Koshi teoremasini ayting.
8. Koshining integral formulasini yozing.
9. Abel teoremasini aytib bering.
10. Loran qatorini yozib bering.
11. Yakkalangan maxsus nuqta turlarini ta'riflang.
12. Kompleks funksiya chegirmasi deb nimaga aytiladi?

Mashqlar

1. $|z + 2| < |z - 3i|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini aniqlang.
2. $2|z|\operatorname{Re} z = 10$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami tekislikda qanday chiziqni aniqlaydi?
3. $w = (z - i)/(z + i)$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajrating.
4. $w = \sin z$ funksiyaning $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$ nuqtadagi qiymatini toping.
5. Quyidagi funksiyalarni analitiklikka tekshiring

a) $w = z^3 + z$, b) $w = z + \operatorname{Im} z$.

6. Integrallarni hisoblang

a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$,

b) $\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{z^2 + 3z}$

c) $\int_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{(z^2 - 4)^2}$

d) $\int_{|z-i+1|=2} \frac{dz}{z(z+3)(z^2 - 1)}$

7. Funksiyalarni ko'rsatilgan xalqlarda Loran qatoriga yoying

a) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-5)}$, $2 < |z| < 3$,

c) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8}$, $1 < |z + 2| < 4$.

8. Funksiyaning yakkaqlangan maxsus nuqtalarini topib, turlarini aniqlang va bu nuqtalardagi chegirmalarni hisoblang

a) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + z - 2}$ b) $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{1 - z}$ c) $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$

9. Quyidagi integrallarni Koshining chegirmalar haqidagi teoremasi yordamida hisoblang

a) $\int_{|z|=4} \frac{(z+1)dz}{z^2 + 2z - 3}$,

b) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2 - 1)^2}$

XVI BOB. OPERATSION HISOB ELEMENTLARI

Operatsion hisob amaliy masalalarni yechishda, ayniqsa avtomatika, telemexanika va elektrotexnikada muhim ahamiyatga ega.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining eng muhim tadbirlaridan biri chiziqli differensial tenglamalarni Laplasning integral almashtirishiga (operatsion usul) asoslangan integrallash usulidir. Bu usulning qo'llanilishi differensial, integral tenglamalarni va bu amallar ishtirok etadigan tenglamalarni soddaroq algebraik tenglamalarni qarashga olib keladi.

Laplas almashtirishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaga, uning tasviri kompleks o'zgaruvchili funksiyani mos qo'yadi.

Bu holda tasvirlar ustida amal bajarish, berilgan funksiya (original) ustida amal bajarishga nisbatan ancha osonlashadi. Masalan, chiziqli oddiy differensial tenglama uning tasviri uchun algebraik tenglamaga almashinadi. Tasvir uchun hosil bo'lgan algebraik tenglamani yechib, yechimning originali tiklanadi, bu original esa berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

16.1. Laplas almashtirishi. Original va tasvir

Haqiqiy o'zgaruvchili $f(t)$ funksiyaning Laplas almashtirishi deb

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dp \quad (16.1)$$

formula bilan aniqlanuvchi kompleks o'zgaruvchili $F(p)$ funksiyaga aytiladi, bu yerda $p = s + i\tau$.

Integral kompleks p parametrغا bog'liq bo'lib, uni Laplas integrali deyiladi.

$f(t)$ funksiya qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakki, (16.1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, haqiqatan ham biror $F(p)$ funksiyani aniqlasin?

Faraz qilaylik quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $f(t)$ funksiya $t \geq 0$ da bo'lakli uzluksiz, demak funksiya uzluksiz yoki faqat birinchi tur uzilishga ega (har bir chekli oraliqda uzilishlar soni chekli);
2. Barcha $t < 0$ larda $f(t) = 0$;

3. $t \rightarrow +\infty$ da $|f(t)|$ funksiyaning o'sishi ko'rsatgichli funksiya oshmaydi, ya'ni shunday $M > 0$ va s mavjudki, barcha t larda

$$|f(t)| \leq Me^{st} \quad (16.2)$$

(16.2) tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha s qiymatlarning quyi chegarasi s_0 qiymatga funksiya o'sishining ko'rsatgichi deb ataladi.

3-shart Laplas integrali yaqinlashishini ta'minlaydi. Bu shartni barcha chegaralangan funksiyalar, shuningdek barcha t^k ($k > 0$) darajali funksiyalar qanoatlantiradi.

16.1-Ta'rif. 1-3 shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(t)$ funksiya original deb ataladi; (16.1) formula bilan aniqlanuvchi $F(p)$ funksiya esa, $f(t)$ funksiyaning tasviri deb ataladi

Original va unga mos tasvir orasidagi bog'lanishni

$$f(t) \leftarrow F(p), \quad F(p) \rightarrow f(t) \text{ yoki } L[f(t)] = F(p)$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, fizik jarayonlarni ifodalaydigan funksiyalarning aksariyati 1-3 shartlarni qanoatlantiradi.

Operatsion hisobning ustunlik jihati shundaki, differensiallash amali ko'paytirish bilan, integrallash esa bo'lish bilan almashinadi.

Operatsion hisob va uning tadbirlari uchun muhim bo'lgan ba'zi funksiyalarning tasvirlarini topishga doir misollar qaraymiz.

16.1-Misol. Quyidagi funksiyalarning tasvirlarini toping.

► a) Birlik funksiya va uning tasviri.

Xevisaydning birlik funksiyasini qaraymiz:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Bu funksiyaning tasvirini hisoblaymiz ($p = s + i\tau$, $s = \text{Rep}$)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Bu tenglik $\text{Rep} > 0$ shart bajarilganda o'rinli. Demak

$$\theta(t) \leftarrow \frac{1}{p} \quad (16.3)$$

Agar $g(t)$ funksiya uchun 1 va 3 shartlar bajarilib 2 shart o'rinli bo'lmasa, u holda

$$f(t) = \theta(t) \cdot g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ g(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

funksiya uchun 2 shart bajariladi va bu funksiya original bo'ladi.

(16.3) tenglikda $\theta(t)$ ko'paytuvchini tushirib qolamiz va funksiyaning $t < 0$ da nolga teng deb hisoblaymiz. Bu holda

$$1 \leftarrow \frac{1}{p};$$

b) $f(t) = e^{\alpha t}$ (α ixtiyoriy kompleks son).

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt$$

Bu integral $\operatorname{Re}(p - \alpha) > 0$, demak $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$ da yaqinlashuvchi va

$$F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$$

ya'ni:

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p - \alpha};$$

c) $f(t) = \cos \omega t$, bu yerda ω ixtiyoriy haqiqiy son.

Ma'lumki,

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}].$$

Shuning uchun ta'rif bo'yicha

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{i\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+i\omega)t} dt = \frac{1}{2(p-i\omega)} + \frac{1}{2(p+i\omega)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\cos \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \text{ bu yerda } \operatorname{Re} p > 0.$$

d) Xuddi yuqoridagi kabi amallarni bajarsak,

$$\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

munosabatni hosil qilamiz (tekshiring).

e) $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t$, α – kompleks son.

Ta'rifga ko'ra,

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha-i\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{2(p+\alpha-i\omega)} + \frac{1}{2(p+\alpha+i\omega)} = \\ &= \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(p+\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib:

$$e^{-\alpha t} \cos \omega t \leftarrow \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2};$$

f) Xuddi shu singari

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \leftarrow \frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

munosabat o'rinli bo'ladi (mashq sifatida tekshiring);

g) $f(t) = \text{shat}$, a – kompleks son

$$\text{shat} = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

Shuning uchun

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \text{shat} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-pt} (e^{at} - e^{-at}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{2(p-a)} - \frac{1}{2(p+a)} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \end{aligned}$$

bu yerda $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$

Demak, $\text{shat} \leftarrow a/(p^2 - a^2)$;

h) $\text{chat} \leftarrow p/(p^2 - a^2)$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|$ (mashq sifatida tekshiring). ◀

Endi har qanday original uchun tasvir mos kelishi haqidagi teorema o'tamiz. Quyidagi teorema o'rinli:

16.1-Teorema. Har qanday $f(t)$ original funksiya uchun, $\text{Rep} > s_0$ yarim tekislikda (1) tenglik bilan aniqlanuvchi $F(p)$ tasvir funksiya mavjud va ushbu yarim tekislikda $F(p)$ analitik funksiya iborat, bu yerda s_0 – original funksiyaning o‘shish ko‘rsatgichi.

◀ Original funksiya ta’rifining 3-shartiga ko‘ra $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$. Agar $p = s + it$ bo‘lsa, $|e^{-pt}| = e^{-st}$, shuning uchun

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{s_0 t} e^{-st} = Me^{-(s-s_0)t}$$

Bu yerdan:

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}$$

Shunday qilib

$$|F(p)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s-s_0}$$

Bu yerdan (1) integralning mutlaq yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya’ni tasvir funksiya mavjud. ►

Natija. Agar $f(t)$ original bo‘lsa, u holda $\lim_{\text{Rep} \rightarrow \infty} F(p) = 0$

◀ Agar $f(t)$ ning o‘shish ko‘rsatgichi s_0 , $s = \text{Rep}$ bo‘lsa yuqorida isbotlanganiga ko‘ra

$$|F(p)| \leq \frac{M}{s-s_0}$$

Agar bu tengsizlikda $s = \text{Rep} \rightarrow \infty$ da limitga o‘tsak $\lim_{\text{Rep} \rightarrow \infty} F(p) = 0$. ►

16.2. Laplas almashtirishining xossalari

Bevosita ta’rif yordamida tasvirni topish har doim ham mumkin bo‘lavermaydi, chunki hisoblanishi kerak bo‘lgan integral murakkablashib ketishi mumkin. Biz Laplas almashtirishining shunday xossalari to‘xtalamizki, ular bir qancha sinfdagi funksiyalarning tasvirini topish imkonini beradi. Bundan tashqari ular, tasvir ma’lum bo‘lsa, originalni tiklash usullarini ifodalaydi.

16.2-Teorema. (Originalning yagonaligi) Agar $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalarning tasvirlari o‘zaro teng bo‘lsa, bu funksiyalar uzluksiz bo‘ladigan

barcha $t > 0$ nuqtalarda ustma ust tushadi.

16.3-Teorema. (Chiziqlilik) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ va $g(t) \leftarrow G(p)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy λ va μ kompleks sonlari uchun

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \leftarrow \lambda F(p) + \mu G(p) \quad (16.4)$$

◀Ta'rif bo'yicha $\lambda f(t) + \mu g(t)$ funksiyaning originalini integralning chiziqliligidan foydalanib topamiz

$$\begin{aligned} L[\lambda f(t) + \mu g(t)] &= \int_0^{\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)] e^{-pt} dt = \\ &= \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \lambda F(p) + \mu G(p). \end{aligned} \blacktriangleright$$

Chiziqlilik teoremasiga misol tariqasida $\sin \omega t$ funksiyaning tasvirini topamiz.

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \leftarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

16.4-Teorema. (O'xshashlik) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a > 0$ uchun

$$f(at) \leftarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (16.5)$$

◀ $f(at)$ funksiyaning tasvirini hisoblash uchun, integralda $at = \tau$ almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} L[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(at) e^{-\frac{p}{a}at} d(at) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{a}\tau} d(\tau) = \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

(16.5) munosabatni hosil qoldik. ▶

16.5-Teorema. (Siljish) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$, $a = \text{const}$ bo'lsa, u holda

$$e^{at} f(t) \leftarrow F(p - a) \quad (16.6)$$

◀Ta'rif bo'yicha $e^{at} f(t)$ ning tasvirini topamiz

$$\begin{aligned} L[e^{at} f(t)] &= \\ L[e^{at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a). \end{aligned} \blacktriangleright$$

Demak, siljish teoremasiga ko'ra originalni e^{at} ga ko'paytirish, tasvir argumentining a qiymatga siljishiga olib kelar ekan. Bu teorema yordamida, agar $f(t)$ funksiyaning tasviri ma'lum bo'lsa, $e^{at}f(t)$ funksiyaning tasvirini topish mumkin. Masalan,

$$e^{at} \operatorname{ch} \omega t \leftarrow \frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2};$$

$$e^{at} \operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$$

16.6-Teorema. (Originalni differensiallash) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ va $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ lar bu $f(t)$ originalning hosilalari bo'lsa, u holda:

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0);$$

$$f''(t) \leftarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (16.7)$$

◀ Ta'rifga ko'ra

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt$$

Bu integralni bo'laklab integrallaymiz: $u = e^{-pt}, dv = f'(t)dt, du = -pe^{-pt}dt, v = f(t)$, demak

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = e^{-pt}f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$f(t)$ funksiyaning o'sish tezligi Rep dan katta bo'lganligi uchun $t \rightarrow \infty$ da $|e^{-pt}f(t)| \rightarrow 0$. Shuning uchun $f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0)$.

$f''(t)$ ning tasvirini topish uchun bu usulni ikki marta qo'llaymiz. Agar $f^{(n)}(t)$ tasviri uchun bu usulni n marta qo'llasak (16.7) formula kelib chiqadi. ►

Agar $f^{(k)}(0) = 0 \quad k = \overline{0, n-1}$ bo'lsa, (16.7) formula soddalashib

$$f^{(n)}(t) \leftarrow p^n F(p)$$

ko'rinishga keladi. Xususan $f'(t) \leftarrow pF(p)$.

16.2-Misol. $\alpha e^{at} \sin \omega t + \omega e^{at} \cos \omega t$ funksiyaning tasvirini toping.

► Ma'lumki, $e^{at} \sin \omega t \leftarrow \omega / ((p-a)^2 + \omega^2)$. Agar bu yerda originalni differensiallash teoremasini qo'llasak

$$(e^{\alpha t} \sin \omega t)' \leftarrow p \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2} - e^{-\alpha t} \sin \omega t|_{t=0}$$

yoki

$$\alpha e^{\alpha t} \sin \omega t + \omega e^{\alpha t} \cos \omega t \leftarrow p\omega / ((p - \alpha)^2 + \omega^2). \blacktriangleleft$$

16.7-Teorema. (Originalni integrallash) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ bo'lsa, u holda

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftarrow F(p)/p \quad (16.8)$$

$\blacktriangleleft$ Agar $f(t)$ original bo'lsa,

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

ham original bo'lib, $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$ tengliklar o'rinli. Agar $g(t) \leftarrow G(p)$ bo'lsa, $g(t)$ ni differensiallab, originalni differensiallash teoremasiga asosan $f(t) = g'(t) \leftarrow pG(p)$, ya'ni $F(p) = pG(p)$ ga ega bo'lamiz. Demak

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftarrow G(p) = F(p)/p. \blacktriangleright$$

16.8-Teorema. (Tasvirni differensiallash) Agar $F(p) \rightarrow f(t)$ bo'lsa, u holda

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-t)^n f(t). \quad (16.9)$$

$\blacktriangleleft$ $F(p)$ funksiya $\text{Rep } s_0$ ($s_0 - f(t)$ funksiyaning o'sish tezligi) yarim tekislikda analitik bo'lganligi uchun, uning ixtiyoriy tartibdagi hosilasi mavjud. Shunga asosan $F(p)$ funksiya dan hosila olsak,

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p} (e^{-pt} f(t)) dt = \int_0^\infty e^{-pt} (-t f(t)) dt$$

demak,

$$F'(p) \leftarrow (-t) f(t)$$

$$F''(p) = (F'(p))' \leftarrow (-t)(-t) f(t) = t^2 f(t)$$

(16.9) formulani keltirib chiqarish uchun induksiya usulini qo'llash mumkin. $\blacktriangleright$

16.3-Misol. t^n funksiyaning tasvirini toping

$\blacktriangleright$ Buning uchun $t, t^2, \dots$ funksiyalarning tasvirlarini yuqoridagi teorema ga asosan topamiz

$$t = t \cdot 1 \leftarrow -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}$$

$$t^2 = t \cdot t \leftarrow -\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3}$$

va hokazo bu jarayonni n marta takrorlasak

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$$

ni hosil qilamiz. Agar bu yerda siljish teoremasini qo'llasak,

$$e^{-at}t^n \leftarrow \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

bo'ladi. ◀

16.4-Misol. Quyidagi funksiyalarning tasvirlarini tasvirni differensiallash teoremasidan foydalanib hisoblang.

► a) $f(t) = t \cos \omega t$. Tasvirni differensiallash teoremasiga asosan

$$t \cos \omega t \leftarrow -\left(\frac{p}{p^2 + \omega^2}\right)' = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

b) $f(t) = t \sin \omega t$

$$t \sin \omega t \leftarrow -\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)' = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

c) $f(t) = t \cosh at$

$$t \cosh at \leftarrow -\left(\frac{p}{p^2 - a^2}\right)' = \frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2};$$

d) $f(t) = t \sinh at$

$$t \sinh at \leftarrow -\left(\frac{a}{p^2 - a^2}\right)' = \frac{2pa}{(p^2 - a^2)^2}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. ◀

16.9-Teorema. (Tasvirni integrallash) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ va $f(t)/t$ original bo'lsa, u holda

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow \int_p^\infty F(\xi) d\xi \quad (16.10)$$

◀ $f(t)/t \leftarrow \Phi(p)$ bo'lsin. $F(p)$ funksiyani ($\text{Re } p > a$ yarim tekislikda analitik) differensiallab topamiz

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

$$\Phi'(p) = -\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -F(p)$$

Bu tenglikni (p, ∞) da integrallasak

$$\Phi(p) - \Phi(\infty) = \int_p^{\infty} F(\xi) d\xi$$

16.1-Teoremaning natijasiga ko'ra $\Phi(\infty) = 0$ va

$$\Phi(p) = \int_p^{\infty} F(\xi) d\xi$$

ya'ni

$$f(t)/t \leftarrow \int_p^{\infty} F(\xi) d\xi. \blacktriangleright$$

16.5-Misol. Integral sinus sit ning tasvirini toping:

$$sit = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

$\blacktriangleright$ 16.9-Teoremaga asosan

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \int_p^{\infty} \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = \arctg \xi \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg p$$

Oxirgi munosabatga originalni integrallash teoremasini qo'llaymiz, u holda

$$sit \leftarrow \frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg p \right)$$

munosabatga ega bo'lamiz. $\blacktriangleleft$

16.10-Teorema. (Originalning kechikish teoremasi)

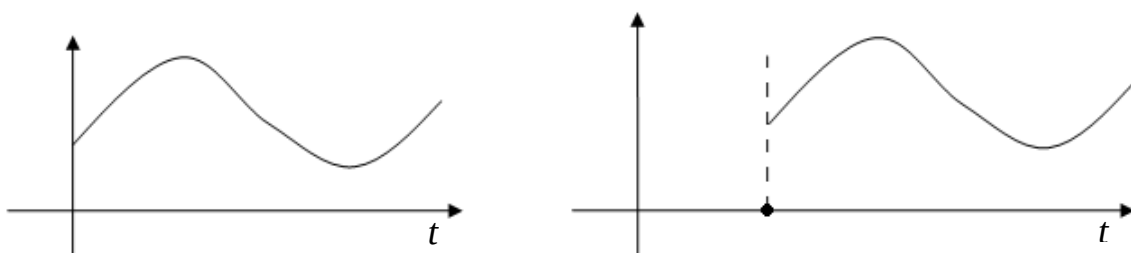
Agar $f(t) \leftarrow F(p)$ va $\tau > 0$ bo'lsa, u holda

$$f(t - \tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p). \quad (16.11)$$

$\blacktriangleleft$ $f(t - \tau)$ ning tasvirini topish uchun integralda o'zgaruvchini almashtiramiz

$$\begin{aligned} L[f(t - \tau)] &= \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t - \tau = t_1 \\ dt = dt_1 \end{matrix} \right| = \int_{-\tau}^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = \\ &= \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} e^{-p\tau} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} F(p). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Bu teoremada kechikish soʻzining maʼnosi quyidagicha: $f(t)$ va $f(t - \tau)$ bir xil funksiyalar boʻlib, farq shundaki, $f(t - \tau)$ funksiya grafigi $f(t)$ ga nisbatan τ birlik oʻngga surilgan (16.1 rasm).



16.1- rasm

Demak, fizik jihatdan $f(t)$ va $f(t - \tau)$ funksiyalar bir xil jarayonni ifodalaydi faqatgina $f(t - \tau)$ funksiya ifodalaydigan jarayon τ vaqtga kechikib boshlanadi.

16.2-Taʼrif. f va g funksiyalarning $f * g$ koʻrinishda belgilanadigan oʻramasi deb

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (16.12)$$

tenglik bilan aniqlanadigan funksiyaga aytiladi.

16.6-Misol. $f(t) = t$, $g(t) = e^t$ funksiyalarning oʻramasini toping.

► Bu funksiyalarning (16.12) oʻramasini boʻlaklab integrallaymiz

$$\begin{aligned} t * e^t &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} u = \tau \\ du = d\tau \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^{t-\tau} d\tau \\ v = -e^{t-\tau} \end{array} \right| = -\tau e^{t-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t e^{t-\tau} d\tau = \\ &= -t - e^{t-\tau} \Big|_0^t = -t - 1 + e^t \end{aligned}$$

Demak, $t * e^t = e^t - t - 1$. ◀

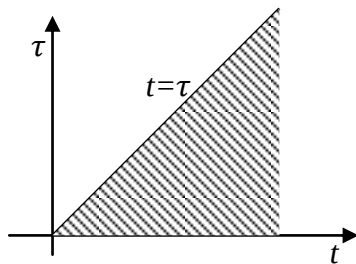
16.11-Teorema (Tasvirlar koʻpaytmasi) Agar $f(t) \leftarrow F(p)$, $g(t) \leftarrow G(p)$, u holda $f * g$ funksiyalar oʻramasining tasviri tasvirlar koʻpaytmasiga teng:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \leftarrow F(p)G(p) \quad (16.13)$$

◀ $f * g$ oʻramaning tasvirini hisoblaymiz

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt$$

Bu ikki karrali integralning integrallash sohasini qaraymiz: $0 \leq t < \infty$, $0 \leq \tau \leq t$ (16.2 rasm). Agar integrallash tartibini o'zgartirsak $0 \leq \tau < \infty$, $\tau \leq t < \infty$. Demak



16.2- rasmi

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) e^{-pt} dt$$

Ichki integralda $t - \tau = t_1$ ko'rinishda almashtirish bajaramiz, u holda

$$L[f(t) * g(t)] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-pt_1} dt_1$$

O'ng tomondagi ifoda ikkita integralning ko'paytmasi bo'lib, ular mos ravishda $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalarning tasvirlaridan iborat.

Demak $f * g \leftarrow F(p)G(p)$. ►

16.7-Misol. Funksiyaning originalini toping:

$$F(p) = \frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$$

► Tasvirni ko'paytma shaklida yozamiz:

$$\frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2} = 2 \cdot \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \cdot \frac{p\alpha}{p^2 - \alpha^2}.$$

Bu yerdagi ikkita ko'paytuvchi mos ravishda *shat* va *chat* funksiyalarning tasvirlari. Tasvirlar ko'paytmasi formulasiga asosan

$$\begin{aligned} F(p) &= 2 \cdot \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \cdot \frac{p\alpha}{p^2 - \alpha^2} \rightarrow 2 \int_0^t \text{sh}\alpha\tau \cdot \text{ch}\alpha(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (e^{\alpha\tau} - e^{-\alpha\tau})(e^{\alpha(t-\tau)} + e^{-\alpha(t-\tau)}) d\tau = \int_0^t [\text{sh}\alpha t + \text{sh}\alpha(2\tau - t)] d\tau = \\ &= \left[\tau \text{sh}\alpha t - \frac{1}{2\alpha} \text{ch}\alpha(2\tau - t) \right] \Big|_0^t = t \text{sh}\alpha t \end{aligned}$$

Demak

$$tshat \leftarrow \frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}$$

bo'lar ekan. ◀

Tasvirlar ko'paytmasining maxsus ko'rinishi, ya'ni $pF(p)G(p)$ ning originalini topish formulasini keltirib chiqaramiz. Quyidagicha almashtirish bajaramiz

$$pF(p)G(p) = (pF(p) - f(0))G(p) + f(0)G(p)$$

Originalni differensiallash teoremasiga ko'ra, $pF(p) - f(0) \rightarrow f'(t)$. Demak, tasvirlar ko'paytmasi va Laplas almashtirishining chiziqliligiga ko'ra,

$$pF(p)G(p) \rightarrow f'(t) * g(t) + f(0)g(t)$$

yoki

$$pF(p)G(p) \rightarrow \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau + f(0)g(t) \quad (16.14)$$

(16.14) tenglik *Dyuamel formulasi* deb ataladi.

Endi Laplas almashtirishining bu bo'limda o'rganilgan xossalari, ular yordamida hosil qilingan ba'zi elementar va tadbiqlarda ko'p uchraydigan maxsus funksiyalarning tasvirlari jadvalini keltiramiz.

Original- tasvirlar jadvali

Original	Tasvir
1. 1	$\frac{1}{p}$
2. $\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
3. $\cos \alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
4. $sh \alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
5. $ch \alpha t$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$
6. e^{at}	$\frac{1}{p - a}$
7. $e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

8.	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$
9.	$e^{at} \sin(\beta t + \varphi)$	$\frac{\beta \cos \varphi + (p - \alpha) \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
10.	$e^{at} \cos(\beta t + \varphi)$	$\frac{(p - \alpha) \cos \varphi - \beta \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
11.	t	$\frac{1}{p^2}$
12.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
14.	$t \sin \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
15.	$t \cos \alpha t$	$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$
16.	$t \sinh \alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2 - \alpha^2)^2}$
17.	$t \cosh \alpha t$	$\frac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}$
18.	$\sin(t - \tau)$ $t - \tau > 0$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
19.	$\cos(t - \tau)$ $t - \tau > 0$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
20.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$
21.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q) dq$
22.	$f(t - t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
23.	$f^{(n)}(t), f(0) =$ $\dots = f^{(n-1)}(0) = 0$	$p^n F(p)$
24.	$f * g$	$F(p) \cdot G(p)$

16.3. Originalni tasvir yordamida tiklash

Shu paytgacha, biz $f(t)$ funksiya ma'lum shartlarni qanoatlantirganda Laplas almashtirishi yordamida uning $F(p)$ tasvirini topish usullarini o'rgangan edik. Yuqorida keltirilgan jadval ko'p hollarda teskari masala, ya'ni, ma'lum tasvir yordamida originalni tiklash imkoniyatini beradi. Bundan tashqari siljish, tasvirni differensiallash va integrallash, tasvirlar ko'paytmasi teoremlari yordamida ham ba'zi originallarni topish mumkin. Umumiy holda, agar tasvir $F(p)$ ma'lum bo'lsa uning originalini topish imkonini beradigan teoremani keltiramiz.

16.12-Teorema. (teskari almashtirish) $f(t) \leftarrow F(p)$ bo'lsin. Agar $f(t)$ funksiya t nuqtada uzluksiz bo'lib, bu nuqtada bir tomonlama chekli hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{-pt} F(p) dp, \quad (16.15)$$

bu yerda integral ixtiyoriy $\operatorname{Re} p = b > S_0$ (S_0 — $f(t)$ funksiyaning o'sish ko'rsatgichi) to'g'ri chiziq bo'ylab olinadi va bosh qiymat ma'nosida olinadi.

(16.15) ga Laplasning teskari almashtirish formulasi yoki Mellin formulasi deyiladi.

Natija. $f(t)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgan barcha nuqtalarda, bu original $F(p)$ tasvir bo'yicha bir qiymatli aniqlanadi.

16.13-Teorema. (1-yoyilish teoremasi) $F(p)$ cheksizlikda analitik bo'lib $F(\infty) = 0$ shartni qanoatlantirsin va uning $p = \infty$ nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilmasi

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}$$

ko'rinishda bo'lsin, u holda $F(p)$ funksiyaning originali

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n \quad (16.16)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda qator $t > 0$ bo'lganda yaqinlashuvchi va $t < 0$ bo'lganda $f(t) = 0$ deb qabul qilinadi.

Juda ko‘p masalalarda tasvir ikkita ko‘phadning nisbati ko‘rinishida bo‘ladi. Bunday hollarda originalni topish uchun amaliy jihatdan qulay usul mavjud bo‘lib biz bu teoremani keltiramiz.

16.14-Teorema. (2-yoyilish teoremasi) Agar $F(p) = Q_n(p)/R_m(p)$, bu yerda $Q_n(p)$ va $R_m(p)$ umumiy nolga ega bo‘lmagan mos ravishda n va m darajali ko‘phadlar, hamda $n < m$ bo‘lsa, u holda

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dx^{m_k-1}} [F(p)e^{pt}(p - p_k)^{m_k}] \quad (16.17)$$

bu yerda $p_1, p_2, \dots, p_l$ sonlar $R_m(p)$ ko‘phadning turli nollari, m_k esa p_k nolning karraligi.

Amaliy masalalarda ratsional kasr ko‘rinishda berilgan funksiyalar uchun ularni sodda ratsional kasrlarga yoyib, ularning originallarini topish qulay.

Tasvir yordamida originallarni topishga doir misollar qaraymiz.

16.8-Misol. Quyidagi formula bilan berilgan tasvirning originalini toping

$$F(p) = \frac{5}{p^2 + 4} + \frac{20p}{p^2 + 9}$$

► Original tasvir jadvaliga ko‘ra:

$$F(p) = \frac{5}{2} \frac{2}{p^2 + 2^2} + 20 \frac{p}{p^2 + 3^2} \rightarrow \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t$$

$$f(t) = \frac{5}{2} \sin 2t + 20 \cos 3t. \blacktriangleleft$$

16.9-Misol. Quyidagi formula bilan berilgan tasvirning originalini toping

$$F(p) = \frac{p + 8}{p^2 + p - 2}$$

► Tasvir funksiyaning qutblari, ya’ni uning maxrajining nollari $p_1 = -2$, $p_2 = 1$ nuqtalardan iborat bo‘lib ularning tartibi birga teng. Shuning uchun (16.17) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{p + 8}{(p + 2)(p - 1)} e^{pt}(p + 2) + \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p + 8}{(p + 2)(p - 1)} e^{pt}(p - 1) = \\ &= -2e^{-2t} + 3e^t \end{aligned}$$

$F(p)$ funksiyani sodda kasrlarga yoyib ham xuddi shu natijani olish mumkin edi. Biz bu usulni ham qarab chiqamiz. Unga noma'lum koeffitsientlar usuli deb ataladi.

$$F(p) = \frac{p+8}{p^2+p-2} = \frac{p+8}{(p+2)(p-1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-1}$$

Endi o'ng tomonda turgan ifodaga umumiy maxraj berib, tenglikning ikki tomonidagi ifodalar suratlarini tenglashtiramiz

$$p+8 = A(p-1) + B(p+2)$$

$$p+8 = (A+B)p - A + 2B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+2B=8 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

Original-tasvir jadvaliga ko'ra:

$$-2(p+2) \rightarrow -2e^{-2t} \quad \text{va} \quad 3/(p-1) \rightarrow 3e^t$$

$$\text{Demak } f(t) = -2e^{-2t} + 3e^t. \blacktriangleleft$$

16.10-Misol. Quyidagi funksiyaga mos keluvchi originalni toping

$$F(p) = \frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}.$$

► Agar (16.17) formuladan foydalansak, qutblar ikkinchi tartibli bo'lganligi uchun murakkab ko'rinishdagi funksiyadan hosila olishga to'g'ri keladi. Shuning uchun biz boshqacha yo'l tutamiz, ya'ni funksiyani sodda kasrlarga yoyamiz:

$$F(p) = \frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2} = \frac{1+p^2+p^2}{(1+p^2)^2} = \frac{1}{1+p^2} + \frac{p^2-1}{(1+p^2)^2} + \frac{1}{(1+p^2)^2}$$

O'ng tomondagi ifodaning birinchi ikkita qo'shiluvchisi originallari jadvalga ko'ra $\sin t$ va $t \cos t$ funksiyalardan iborat.

$$F_1(p) = \frac{1}{(1+p^2)^2} \text{ ning originalini topish uchun tasvirlar ko'paytmasi, ya'ni}$$

$$(16.13) \text{ formuladan foydalanamiz. Bizning holimizda } F(p) = \frac{1}{1+p^2}, \quad G(p) = \frac{1}{1+p^2}$$

bo'lib ularning ikkalasining ham originallari $\sin t$ funksiyadan iborat. Demak, (16.13) formulaga ko'ra:

$$F_1(p) = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{1}{1+p^2} \rightarrow \int_0^t \sin \tau \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2\tau-t) - \cos t] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\tau - t) - \tau \cos t \right] \Big|_0^t = \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{t}{2} \cos t = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t.$$

Shunday qilib yuqoridagilarni hisobga olgan holda

$$f(t) = \sin t + t \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \cos t$$

tenglikka ega bo'lamiz. ◀

16.11-Misol. Quyidagi funksiyaning originali topilsin:

$$F_1(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}.$$

► Funksiyaning tarkibida e^{-p} funksiya qatnashmoqda, demak originalning kechikish teoremasidan foydalansak bo'ladi. Bizning holimizda

$$F(p) = \frac{1}{p+1}, \tau = 1, \quad \frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t}$$

Demak kechikish teoremasiga ko'ra,

$$F_1(p) = \frac{e^{-p}}{p+1} \rightarrow e^{-(t-1)} \cdot \theta(t-1) = f(t).$$

Bu yerda Xeyvisayd funksiya'sining qo'yilishi sababi original $t > 1$ bo'lganda o'rinli. ◀

16.12-Misol. $F(p) = \frac{1}{p(p^4+1)}$ funksiyaning originalini 1-yoyilish teoremasidan foydalanib toping.

► Funksiyada quyidagicha shakl almashtiramiz

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p(p^4+1)} = \frac{1}{p^5 \left(1 + \frac{1}{p^4}\right)} = \\ &= \frac{1}{p^5} \left(1 - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^8} - \dots\right) = \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^9} + \frac{1}{p^{13}} - \dots \end{aligned}$$

Bu qator $|p| > 1$ da yaqinlashuvchi va $F(\infty) = 0$, demak 1-yoyilish teoremasini qo'llab:

$$f(t) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \frac{t^{16}}{16!} + \dots$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

16.4. Operatsion hisobning differensial va integral tenglamalarni yechishga tadbiqlari

Laplas almashtirishining o'zgarmas koeffitsientli oddiy differensial tenglamalarni yechishga qo'llanilishi

Operatsion hisobning muhim tadbiqlaridan biri, o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalarni operatsion hisob usulida yechishdir.

Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan chiziqli differensial tenglamani qaraymiz

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \quad (16.18)$$

Bu tenglamaning quyidagi boshlang'ich shartlardagi xususiy yechimini topamiz

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \quad (16.19)$$

Differensial tenglamani operatsion hisob usulida yechishning mohiyati shundan iboratki, noma'lum funksiya $x(t)$ va uning hosilalari hamda $f(t)$ funksiyalarning tasvirlarini topib (16.18) tenglamada ularni almashtiramiz. Natijada, tasvirlardan tuzilgan chiziqli tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamada noma'lum funksiya $X(p)$ va $f(t)$ funksiyaning tasviri bo'lgan $F(p)$ funksiya qatnashadi. Noma'lum funksiya hosilalarining tasvirlarini topish uchun originalni differensiallash teoremasidan foydalanamiz:

$$x(t) \leftarrow X(p)$$

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - px_0 - x'_0$$

Hosil bo'lgan ifodalarni tasvirlar tenglamasiga qo'ysak,

$$p^2 X(p) - px_0 - x'_0 + a_1 pX(p) - x_0 + a_2 X(p) = F(p) \quad (16.20)$$

ko'rinishdagi $X(p)$ noma'lum tasvirga nisbatan algebraik tenglama hosil bo'ladi. Unga **operatorli tenglama** deb ataladi.

Bu tenglamani echamiz

$$X(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = F(p) + px_0 + x'_0 + x_0$$

yoki

$$X(p) = \frac{F(p) + px_0 + x'_0 + x_0}{p^2 + a_1p + a_2} \quad (16.21)$$

Shunday qilib, qidirilayotgan yechimning tasviri topildi. Endi jadval, teskari almashtirish teoremasi yoki boshqa biror usul bilan unga mos keluvchi $x(t)$ originalni topamizki, u berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Boshlang'ich shartlar nollardan iborat bo'lgan holda, $X(p)$ tasvir sodda ko'rinish oladi:

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1p + a_2}$$

Eslatma. 1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalarni yechish uchun keltirilgan usul ixtiyoriy tartibli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar uchun ham o'rinli bo'ladi.

2. Agar (16.21) formulada x_0 va x'_0 boshlang'ich shartlarni berilgan emas, ya'ni, ixtiyoriy sonlar deb hisoblasak, u holda tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi.

3. $x(t)$ original hisoblanganligi uchun, $t < 0$ da $x(t) = 0$ deb hisoblanadi, shuning uchun differensial tenglamaning yechimi $t \geq 0$ da o'rinli bo'ladi. Fizik jarayonlar o'rganilayotganda odatda jarayon vaqtning biror onidan boshlab hisoblanadi, biz uni $t = 0$ deb olamiz. Aniq misollar yechilganida yechim ko'p hollarda $t < 0$ da ham to'g'ri bo'lib qolaveradi.

Yuqoridagi formulaga doir misollar qaraymiz.

16.13-Misol. Koshi masalasini yeching

$$x''(t) + x(t) = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$$

► Original-tasvirlarni yozamiz

$$x(t) \leftarrow X(p),$$

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \leftarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1,$$

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Ularga ko'ra operatorli tenglama,

$$p^2 X(p) + X(p) + 1 = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

ko‘rinish oladi. Bu yerdan:

$$X(p)(p^2 + 1) = \frac{2p}{p^2 + 1} - 1$$

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$$

Original-tasvir jadvaliga ko‘ra,

$$\frac{1}{p^2 + 1} \rightarrow \sin t; \quad \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \rightarrow t \sin t.$$

Demak,

$$X(p) \rightarrow t \sin t - \sin t$$

Shunday qilib berilgan Koshi masalasining yechimi:

$$x(t) = t \sin t - \sin t. \blacktriangleleft$$

16.14-Misol. Koshi masalasini yeching

$$x''(t) + 3x'(t) = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$$

► Tasvirlarni

$$e^t \leftarrow \frac{1}{p - 1}$$

munosabatni hisobga olgan holda berilgan tenglamaga qo‘yamiz va operatorli tenglamani hosil qilamiz:

$$p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 3pX(p) - 3x(0) = \frac{1}{p - 1}$$

$$(p^2 + 3p)X(p) + 1 = \frac{1}{p - 1}$$

$$X(p) = \frac{2 - p}{(p - 1)(p^2 + 3p)}$$

Bu kasrni sodda kasrlarga yoyamiz

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p - 1} + \frac{C}{p + 3} = \frac{2 - p}{(p - 1)(p^2 + 3p)}$$

va noma'lum koeffitsientlarni topamiz

$$A(p^2 + 2p - 3) + B(p^2 + 3p) + C(p^2 - p) = 2 - p$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 2A + 3B - C = -1 \\ -3A = 2 \end{cases} \begin{cases} A = -2/3 \\ B = 1/4 \\ C = 5/12 \end{cases}$$

Demak,

$$X(p) = -\frac{2}{3p} + \frac{1}{4(p-1)} + \frac{5}{12(p+3)} \rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}e^{-3t},$$

$$x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}e^{-3t}$$

berilgan tenglamaning yechimini hosil qildik. ◀

16.15-Misol. Koshi masalasini yeching

$$x''(t) + x(t) = e^t, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 0$$

► $t - 1 = \tau$ kabi almashtirish bajarsak,

$$x(t) = x(\tau + 1) = y(\tau)$$

ni yozamiz.

Agar berilgan tenglamada bu almashtirishlarni bajarsak, quyidagi Koshi masalasini hosil qilamiz

$$y'' + y = e^{\tau+1}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Bu tenglamada tasvirlarga o'tib operatorli tenglamani yozamiz

$$y(t) \leftarrow Y(p)$$

$$y'(t) \leftarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y''(t) \leftarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p$$

$$p^2Y(p) - p + Y(p) = \frac{e}{p-1}$$

$$Y(p) = \frac{e}{(p-1)(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1}$$

$Y(p)$ funksiyani quyidagicha sodda kasrlarga yoyamiz:

$$Y(p) = \frac{e}{2(p-1)} + \left(1 - \frac{e}{2}\right) \frac{p}{p^2+1} - \frac{e}{2(p^2+1)}$$

va uning originalini topamiz

$$y(\tau) = \frac{e}{2}e^{\tau} + \left(1 - \frac{e}{2}\right) \cos \tau - \frac{e}{2} \sin \tau$$

Dastlabki o'zgaruvchi t ga qaytib Koshi masalasining yechimi

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{e}{2}e^{t-1} + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1) = \\
 &= \frac{1}{2}e^t + \left(1 - \frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1)
 \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. ◀

16.16-Misol. Quyidagi differensial tenglamani yeching.

$$x''(t) = \arctgt, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

► Agar bu tenglamada boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda operatorli tenglamaga o'tsak

$$p^2 X(p) = G(p) \quad \text{yoki} \quad X(p) = \frac{1}{p^2} G(p)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $X(p) \rightarrow x(t)$, $G(p) \rightarrow \arctgt$.

$X(p)$ funksiyaning originalini topish uchun (14) Dyamel formulasidan foydalanamiz. Buning uchun funksiyani quyidagicha yozib olamiz

$$X(p) = p \frac{1}{p^3} G(p)$$

Agar $f(t) = \arctgt$, $f(0) = 0$, $g(t) = t^2$ deb olsak, Dyamel formulasiga ko'ra:

$$\begin{aligned}
 X(p) &= p \frac{1}{p^3} G(p) \rightarrow \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau + f(0)g(t) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2} \cdot (t-\tau)^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{t^2 - 2t\tau + \tau^2}{1+\tau^2} d\tau = \\
 &= \frac{t^2}{2} \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2} d\tau - t \int_0^t \frac{\tau}{1+\tau^2} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\tau^2 + 1 - 1}{1+\tau^2} d\tau = \\
 &= \left(\frac{t^2}{2} \arctg\tau - \frac{t}{2} \ln(1+\tau^2) + \frac{1}{2} \tau - \frac{1}{2} \arctg\tau \right) \Big|_0^t = \\
 &= \frac{t^2}{2} \arctgt - \frac{t}{2} \ln(1+t^2) + \frac{t}{2} - \arctgt
 \end{aligned}$$

Demak, berilgan tenglamaning yechimi

$$x(t) = \frac{t^2 - 1}{2} \operatorname{arctgt} - \frac{t}{2} \ln(1 + t^2) + \frac{t}{2}$$

funksiya bo'ladi. ◀

Chiziqli differensial tenglamalar sistemalarini operatsion hisob usulida yechish

Ba'zi amaliy masalalar chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Bu sistemalar uchun ham operatsion hisob usulini qo'llash mumkin bo'lib, differensial tenglamalar uchun keltirilgani kabi operatorli sistema hosil qilinadi.

Biz eng sodda hol, ikki noma'lumli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_1 x' + b_1 y' + c_1 x + d_1 y = f_1(t), \\ a_2 x' + b_2 y' + c_2 x + d_2 y = f_2(t), \end{cases} \quad (16.22)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (16.23)$$

Bu sistemada

$$x(t) \leftarrow X(p), \quad y(t) \leftarrow Y(p)$$

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x_0, \quad y'(t) \leftarrow pY(p) - y_0$$

almashtirishlar yordamida operatorli tenglamalar sistemasiga o'tamiz

$$\begin{cases} a_1 pX(p) - a_1 x_0 + b_1 pY(p) - b_1 y_0 + c_1 X(p) + d_1 Y(p) = F_1(p), \\ a_2 pX(p) - a_2 x_0 + b_2 pY(p) - b_2 y_0 + c_2 X(p) + d_2 Y(p) = F_2(p) \end{cases}$$

Uni shakl almashtirib $X(p)$ va $Y(p)$ noma'lumlarga nisbatan ikki noma'lumli

$$\begin{cases} (a_1 p + c_1)X(p) + (b_1 p + d_1)Y(p) = F_1(p) + a_1 x_0 + b_1 y_0 \\ (a_2 p + c_2)X(p) + (b_2 p + d_2)Y(p) = F_2(p) + a_2 x_0 + b_2 y_0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan noma'lum $X(p)$ va $Y(p)$ larni topib ularning originaliga o'tsak (16.22) sistemaning (16.23) boshlang'ich shartlardagi yechimi hosil bo'ladi.

Agar (16.23) shartlar nol bo'lsa yoki (16.22) sistemadagi ba'zi koeffitsientlar nol bo'lganida operatorli sistema ancha soddalashadi. Biz (16.22)-(16.23) masalaga doir bir necha misollar qaraymiz.

16.17-Misol. Differensial tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0 \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

► Laplas almashtirishi yordamida

$$\begin{aligned} x(t) &\leftarrow X(p), & y(t) &\leftarrow Y(p), \\ x'(t) &\leftarrow pX(p) - x_0 = pX(p) - 1, \\ y'(t) &\leftarrow pY(p) - y_0 = pY(p) + 1 \end{aligned}$$

tasvirlarga o'tib, berilgan sistemaga mos operatorli sistemani yozib olamiz

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = 0, \\ pY(p) + 1 + X(p) = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} Y(p) = 1 - pX(p), \\ p(1 - pX(p)) + X(p) + 1 = 0 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $X(p)$ ni topamiz:

$$X(p)(p^2 - 1) = p - 1$$

yoki

$$X(p) = \frac{1}{p - 1}.$$

U holda

$$Y(p) = 1 - pX(p) = 1 - \frac{p}{p - 1} = \frac{-1}{p - 1}$$

Ularning originallari

$$X(p) \rightarrow e^t = x(t)$$

$$Y(p) \rightarrow -e^t = y(t)$$

sistemaning yechimi bo'ladi. ◀

16.18-Misol. Differensial tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5$$

► Sistemada tasvirlarga o'tamiz

$$\begin{aligned} x(t) &\leftarrow X(p), & y(t) &\leftarrow Y(p), \\ x'(t) &\leftarrow pX(p) - x_0 = pX(p), \\ y'(t) &\leftarrow pY(p) - y_0 = pY(p) - 5 \end{aligned}$$

U holda

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 2Y(p), \\ pY(p) - 5 = 2X(p) + Y(p) + 1 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Bu sistemani yechib

$$X(p) = \frac{10p + 2}{p(p + 1)(p - 3)},$$

$$Y(p) = \frac{5p^2 - 4p - 1}{p(p + 1)(p - 3)}$$

funksiyalarni hosil qilamiz. Ularning har birini sodda kasrlarga yoyamiz, natijada

$$X(p) = -\frac{2}{3p} - \frac{2}{p + 1} + \frac{8}{3(p - 3)},$$

$$Y(p) = \frac{1}{3p} + \frac{2}{p + 1} + \frac{8}{3(p - 3)}$$

funksiyalarga ega bo'lamiz. Ularning originallarini hisoblasak,

$$x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$$

ko'rinishdagi sistemaning yechimini hosil qilamiz. ◀

Integral tenglamalarni operatsion hisob usulida yechish

16.3-Ta'rif. Agar tenglamada noma'lum funksiya integral belgisi ostida qatnashsa, unga *integral tenglama* deb ataladi.

Masalan,

$$\int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \text{ yoki } x(t) = f(t) + \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

ko'rinishdagi tengliklar integral tenglamalarga misol bo'ladi.

Bu ko'rinishdagi tenglamalarda integral ikkita funksiyaning o'ramasidan iborat. Shuning uchun bunday tenglamalar uchun operator ko'rinishga o'tish maqsadga muvofiq. Integral tenglamalarni operatsion hisob usulda yechish differensial tenglamalar kabi bo'lganligi uchun biz bevosita misollar yechish bilan shug'ullanamiz

16.19-Misol Integral tenglamani yeching.

$$\int_0^t x(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = \sin t$$

► Tenglamaning chap tomoni $x(t)$ va $\cos t$ funksiyalarning o‘ramasidan iborat. Tenglamada qatnashayotgan funksiyalarning tasvirlarini topamiz

$$x(t) \leftarrow X(p), \quad \cos t \leftarrow \frac{p}{p^2+1}, \quad \sin t \leftarrow \frac{1}{p^2+1}.$$

(16.13) o‘ramaning tasviri formulasidan foydalansak:

$$x(t) * \cos t \leftarrow X(p) \frac{p}{p^2+1}$$

O‘z navbatida, tenglama tasvirlarda quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi

$$X(p) \cdot \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{1}{p}.$$

Bu funksiyaning originali berilgan integral tenglamaning yechimi bo‘ladi

$$x(t) = 1. \blacktriangleleft$$

16.20-Misol. Integral tenglamani yeching

$$\int_0^t x(\tau)(t - \tau)^3 d\tau = \frac{1}{3} t^4$$

► Tenglamadagi funksiyalarning tasvirlarini topamiz

$$x(t) \leftarrow X(p), \quad t^3 \leftarrow \frac{3!}{p^4}, \quad t^4 \leftarrow \frac{4!}{p^5}.$$

U holda tasvirlar ko‘paytmasi formulasiga ko‘ra, operatorli tenglama

$$X(p) \cdot \frac{6}{p^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^4}{p^5}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerdan

$$X(p) = \frac{8p^4}{p^5 6} \quad \text{yoki} \quad X(p) = \frac{4}{3p}$$

Berilgan tenglamaning yechimi $x(t) = 4/3$ bo‘ladi. ◀

16.21-Misol. Integral tenglamani yeching.

$$\int_0^t x(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = 1 + 2 \cos t - x(t)$$

► Funktsiyalarning tasvirlarini topamiz

$$x(t) \leftarrow X(p), \quad \sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}, \quad 1 \leftarrow \frac{1}{p}, \quad \cos t \leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Tasvirlar ko'paytmasi formulasini e'tiborga olgan holda operatorli tenglamani yozamiz

$$X(p) \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2 + 1} - X(p)$$

yoki

$$X(p) \left(\frac{1}{p^2 + 1} + 1 \right) = \frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2 + 1},$$

$$X(p) \cdot \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} + \frac{2p}{p^2 + 1},$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p^2 + 2)} + \frac{2p}{p^2 + 2}.$$

Bu funktsiyani sodda kasrlarga yoysak

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 2)} = \frac{1}{2p} + \frac{5}{2} \frac{p}{p^2 + 2}.$$

Berilgan tenglamaning yechimi esa $x(t) = (1 + 5 \cos \sqrt{2} t)/2$ funksiya bo'ladi. ◀

Nazorat savollari

1. Laplas almashtirishi ta'rifini keltiring.
2. Qanday funktsiyaga original deyiladi?
3. O'xshashlik teoremasini ayting.
4. Original va tasvirni differensiallash teoremlarini ayting.
5. Dyamel formulasini keltiring.
6. Funktsiyalar o'ramasi ta'rifini ayting.
7. Yoyilish teoremlarini keltiring.
8. Qanday matematik masalalarni operatsion hisob usulida yechish mumkin?
9. Operatsion hisob usulini qanday amaliy masalalarni hal qilishga qo'llash mumkin?

Mashqlar

1. Quyidagi funksiyalarning tasvirlarini toping

- a) $f(t) = 4\text{sh}6t - 2$, b) $f(t) = 2t - e^{3t}$,
c) $f(t) = \sin 4t \cos 2t$, d) $f(t) = t\text{ch}5t - 4$.

2. Quyidagi funksiyalarning tasvirlarini Laplas almashtirishining xossaligidan foydalanib toping

- a) $f(t) = \text{ch}^2 4t$, b) $f(t) = t(e^{3t} - \sin 2t)$,
c) $f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$, d) $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos 2\tau d\tau$,
e) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$, f) $f(t) = \frac{e^{-t} - 1 - t}{t}$,
g) $f(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \sin 2\tau d\tau$, h) $f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \text{sh} \tau d\tau$.

3. Quyidagi tasvirlarning originallarni toping

- a) $F(p) = \frac{p+1}{p^3 - 2p - 8p}$, b) $F(p) = \frac{1}{p^2 - p + 5}$,
c) $F(p) = \frac{p^2 + 5}{(p^2 + 9)(p^2 - 4)}$, d) $F(p) = \frac{4p - 5}{(p - 1)(p^2 + 4p + 8)}$.

4. Quyidagi differensial tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarda operatsion hisob usulida yeching.

- a) $y'' - 2y' = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$,
b) $y'' + 2y' = t \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$,
c) $y'' + 2y' + y = t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
d) $y'' + y' = te^t + 4\sin 4t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar tizimlarini operatsion hisob usulida yeching

- a) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2y - 2x = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$,
b) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$,

$$\text{c) } \begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4$$

6. Quyidagi berilgan tenglamalarning ko'rsatilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini Dyumel formulasidan foydalanib toping.

$$\text{a) } y'' - y' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

$$\text{b) } y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

XVII BOB. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI

Matematika tarixiga nazar soladigan bo'lsak, xususiy hosilali differensial tenglamalarga asoslangan matematik modellarning ko'pchilik qismi gidrodinamika, aeromexanika va elektrodinamikadagi fizik jarayonlarni ifodalaydigan masalalarni yechish uchun ishlab chiqilgan. Xuddi shu sababli ham xususiy hosilali differensial tenglamalar matematik fizika tenglamalari degan nomni oldi.

Hozirgi kunga kelib, bunday tenglamalar yordamida tabiatning turli xil: fizik, kimyoviy, biologik, ekologik, iqtisodiy va boshqa jarayonlar modellashtirilmoqda. Turli xil muhandislik masalalarini yechishda matematik fizika metodlari muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda.

17.1. Eng sodda xususiy hosilali differensial tenglamalar

17.1-Ta'rif. Erkli o'zgaruvchilar, ularning noma'lum funksiyasi va uning xususiy hosilalarini bog'lovchi tenglamaga *xususiy hosilali differensial tenglama* deb ataladi.

Noma'lum funksiyaning bir necha o'zgaruvchiga bog'liqligi xususiy hosilali tenglamalarni yechishni qiyinlashtiradi. Bunday tenglamalarning juda kam qisminigina aniq ko'rinishda yechib bo'ladi. Oddiy yechimga ega bo'lgan bir nechta tenglamalarni qaraymiz. Bunda barcha funksiyalar uzluksiz deb faraz qilinadi.

17.1-Misol. Ikki o'zgaruvchili $u = u(x, y)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ko'rinishdagi tenglama. Bu tenglamani x bo'yicha integrallasak $u = C$ yechimni hosil qilamiz. Bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas, biroq u y o'zgaruvchiga ham bog'liq bo'lishi mumkin. Boshqacha qilib aytganda, yechimni $u(x, y) = C(y)$ ko'rinishda yozish kerak bo'ladi, bu yerda $C(y)$ funksiya y o'zgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi. Bu ifodani qaralayotgan tenglamaga qo'yib, u bu tenglamaning yechimi ekanligiga guvoh bo'lamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(C(y)) = 0$$

17.2-Misol. Yana ikki o'zgaruvchili $u = u(x, y)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglama uchun yuqoridagi singari

$$u(x, y) = \int f(x)dx + C(y)$$

yechimni hosil qilamiz. ◀

17.3-Misol. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qatnashadigan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

ko'rinishdagi tenglamani yechish uchun uni

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz va $v = \frac{\partial u}{\partial y}$ tenglik yordamida yangi noma'lum funksiya kiritamiz. U holda berilgan tenglama

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

kabi yuqorida qaralgan tenglama ko'rinishini oladi va $v = C(y)$ yechimga ega bo'ladi, bu yerda $C(y)$ ixtiyoriy funksiya. Uni yuqoridagi tenglamaga qo'yib dastlabki noma'lum funksiya nisbatan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$$

tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimi

$$u(x, y) = \int C(y)dy + \varphi(x)$$

funksiyadan iborat bo'ladi, bu yerda $\varphi(x)$ – yana bitta ixtiyoriy funksiya. Integral ostidagi $C(y)$ ixtiyoriy funksiyaaligidan $\psi(y) = \int C(y)dy$ funksiyaning ham ixtiyoriyligi kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ tenglamaning yechimi

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) \quad (17.1)$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan, bu yerda φ va ψ o‘zlarining argumentlarining ixtiyoriy funksiyalari. Topilgan (17.1) ifoda $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ tenglamaning *umumiy yechimi* deb ataladi. ◀

17.4-Misol. $u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$ funksiya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi bo‘lishini tekshiramiz, bu yerda ham φ va ψ o‘zlarining argumentlarining ixtiyoriy funksiyalari. $x + y = v$ deb belgilash kiritib va murakkab funksiya differensiallash qoidasidan foydalanib,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(v) + x\varphi'(v) + y\psi'(v);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi'(v) + \psi(v) + y\psi'(v);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi'(v) + x\varphi''(v) + y\psi''(v);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi''(v) + 2\psi'(v) + y\psi''(v);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi'(v) + x\varphi''(v) + \psi'(v) + y\psi''(v)$$

ifodalarni hosil qilamiz. Bu ifodalarni tenglamaning chap tomoniga qo‘yib, uning aynan nolga aylanishiga ishonch hosil qilamiz. ◀

Yuqorida tahlil qilingan misollar shuni ko‘rsatadiki, umumiy yechimi ixtiyoriy o‘zgarmaslarga bog‘liq bo‘ladigan oddiy differensial tenglamalardan farqli ravishda xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimi ixtiyoriy funksiyalarga bog‘liq bo‘lar ekan.

Oddiy differensial tenglamalarda qabul qilingan qariyb barcha terminlar (atamalar) xususiy hosilali differensial tenglamalarda ham xuddi shu ma’noda

qo'llaniladi. Masalan, tenglama tarkibiga kirgan eng yuqori xususiy hosilaning tartibi shu *tenglamaning tartibi* deyiladi. Agar noma'lum funksiya va uning xususiy hosilalari tenglamada chiziqli bo'lib qatnashishsa, *tenglama chiziqli* deyiladi.

Matematik fizika tenglamalari kursida faqat ikkinchi tartibli o'zgaras koeffisiyentli chiziqli differensial tenglamalar o'rganiladi. Biz bu bobda matematik fizikaning klassik tenglamalari deb ataluvchi: to'lqin tenglamasini, Laplas tenglamasini va issiqlik tarqalishi tenglamasini o'rganamiz. Bunday tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = a(x, y) \quad (17.2)$$

bu yerda A, B, C, D, E va F – o'zgaras sonlar, o'ng tomonidagi $a(x, y)$ esa x va y o'zgaruvchilarning funksiyalari.

Bu tenglamaning yechimi uning koeffisiyentlariga bog'liqligini ta'kidlab o'tish kerak.

17.2. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi

17.2-Ta'rif. Agar (17.2) tenglamaning chap tomoni aynan nol, ya'ni

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (17.3)$$

ko'rinishda bo'lsa, *tenglama bir jinsli* deb ataladi.

(17.3) tenglik tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasini eslatadi. Shu sababli tekislikdagi chiziqlar uchun qo'llaniladigan terminlar differensial tenglamalar uchun ham qo'llaniladi.

17.3-Ta'rif. Agar (17.3) tenglamaning koeffisiyentlari uchun

$B^2 - AC > 0$ bo'lsa, bu tenglama giperbolik;

$B^2 - AC = 0$ bo'lsa, parabolik;

$B^2 - AC < 0$ bo'lsa, elliptik tenglama deb ataladi.

(17.3) tenglamani soddaroq ko‘rinishga keltirish maqsadida yangi ξ va η o‘zgaruvchilarni kiritamiz. Berilgan tenglama chiziqli bo‘lganligi uchun yangi o‘zgaruvchilarni x va y o‘zgaruvchilarga chiziqli qilib olish yetarli:

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \gamma x + \delta y, \end{cases} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (17.4)$$

bu tengliklardan

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha, \frac{\partial \xi}{\partial y} = \beta, \frac{\partial \eta}{\partial x} = \gamma, \frac{\partial \eta}{\partial y} = \delta$$

xususiy hosilalarni topamiz.

Murakkab fuksiyani differensiallash qoidalaridan foydalanib, (17.3) tenglamadagi xususiy hosilalarni so‘ngi tengliklarni inobatga olgan holda yangi ξ va η o‘zgaruvchilarning xususiy hosilalari orqali ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Olingan natijani simvolik ravishda

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

ko‘rinishda yozish qulay. Bunday belgilashlar yordamida ikkinchi tartibli xususiy hosilalar oson hisoblanadi:

$$\begin{aligned} A \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ 2B \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u = \alpha\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ C \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u = \left(\beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 u = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

Bu topilgan ifodalarni (17.3) tenglamaga qo‘yamiz:

$$\begin{aligned}
& A \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + 2B \left(\alpha\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \\
& + C \left(\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + D \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + E \left(\beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \\
& + Fu = 0
\end{aligned}$$

va uni ixchamlaymiz:

$$\begin{aligned}
& (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \\
& + (A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (D\alpha + E\beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (D\gamma + E\delta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = 0.
\end{aligned}$$

Bu yerda:

$$\begin{aligned}
a &= A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2, \\
b &= A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta, \\
c &= A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2, \\
-f \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= (D\alpha + E\beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (D\gamma + E\delta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu
\end{aligned}$$

deb belgilash kiritsak, so'ngi tenglama

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f \left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (17.5)$$

ko'rinishni oladi.

(17.5) formulada hech bo'lmaganda bitta ko'effitsiyent nolga aylansa, u soddalashgan bo'ladi. Tenglamaning turiga qarab u yoki bu ko'effitsiyent nolga aylanadi. Ana shu har bir tur uchun ko'effitsiyentlarni nolga aylantirishni alohida qaraymiz. Buning uchun (17.3) tenglamaning datlabki uchta ko'effitsiyentidan quyidagi kvadrat tenglamani tuzamiz:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0 \quad (17.6)$$

va bu yerda $A, C \neq 0$ deb faraz qilamiz.

17.1-Teorema. $B^2 - AC > 0$, ya'ni (17.6) kvadrat tenglama ikkita har xil λ_1 , λ_2 ildizlarga ega bo'lsin. Agar (17.4) almashtirishda koeffitsiyentlar $\alpha = \lambda_1\beta$, $\gamma = \lambda_2\delta$ ko'rinishda tanlanilsa, yangi a va c koeffitsiyentlar nolga aylanadi va (17.5) tenglama

$$2b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (17.7)$$

ko'rinishni oladi.

◀ λ_1, λ_2 sonlar (17.6) kvadratik tenglamaning har xil ildizlari bo'lganligi uchun

$$a = A(\lambda_1\beta)^2 + 2B(\lambda_1\beta)\beta + C\beta^2 = \beta^2(A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 + C) = \beta^2 \cdot 0 = 0,$$

$$c = A(\lambda_2\delta)^2 + 2B(\lambda_2\delta)\delta + C\delta^2 = \delta^2(A\lambda_2^2 + 2B\lambda_2 + C) = \delta^2 \cdot 0 = 0,$$

hamda $\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda_1\beta\delta - \beta\lambda_2\delta = \beta\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ ▶

(17.7) tenglamaning ikkala tomonini $2b$ songa bo'lsak, u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

ko'rinishni oladi va u giperbolik turdagi tenglamalarning *kanonik shakli* deb ataladi.

17.5-Misol. Quyidagi tenglamani kanonik shaklga keltiring:

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$$

▶ (17.3) tenglamaning koeffitsiyentlari $A = 3$, $B = -5$, $C = 3$, $D = -5$, $E = 3$, $F = -2$ bo'ladi va demak $B^2 - AC = 16 > 0$. Berilgan tenglama giperbolik turdagi ekan. Berilgan tenglamaga mos $3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$ kvadrat tenglama ikkita $\lambda_1 = 1/3$ va $\lambda_2 = 3$ har xil ildizga ega. U holda $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeffitsiyentlarni $\alpha = \beta/3$, $\gamma = 3\delta$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. Eng oddiy $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 3, \delta = 1$ variantni olamiz. Ularni a, b, c yangi koeffitsiyentlar uchun tuzilgan formulalarga qo'yib hisoblaymiz:

$$a = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 0;$$

$$b = A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta = 3 \cdot 1 \cdot 3 - 5(1 \cdot 1 + 3 \cdot 3) + 3 \cdot 3 \cdot 1 = -32;$$

$$c = A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2 = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 0;$$

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = (D\alpha + E\beta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (D\gamma + E\delta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = 4 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 12 \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2u.$$

U holda berilgan tenglama

$$-32 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 12 \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2u = 0$$

ko'rinishni oladi. Kanonik shakli esa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3}{8} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{16} u$$

bo'ladi. ◀

17.2-Teorema. $B^2 - AC = 0$, ya'ni (17.6) tenglama yagona $\lambda_1 = -B/A$ ildizga ega bo'lsin. Agar (17.4) almashtirishda koeffitsiyentlar $\alpha = \lambda_1 \beta = -B\beta/A$ ko'rinishda tanlanilsa, yangi a va b koeffitsiyentlar nolga aylanadi va (17.5) tenglama

$$c \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \quad (17.8)$$

ko'rinishni oladi.

◀ $\lambda_1 = -B/A$ son (17.8) kvadratik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} a &= A \left(-\frac{B\beta}{A}\right)^2 + 2B \left(-\frac{B\beta}{A}\right) \beta + C\beta^2 = \frac{B^2\beta^2}{A} - \frac{2B^2\beta^2}{A} + C\beta^2 = \\ &= -\frac{2B^2\beta^2}{A} + C\beta^2 = -\frac{\beta^2}{A} (B^2 - AC) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= A \left(-\frac{B\beta}{A}\right) \gamma + B \left(-\frac{B\beta}{A} \delta + \beta \gamma\right) + C\beta \delta = -B\beta \gamma - \frac{B^2\beta \delta}{A} + B\beta \gamma + C\beta \delta = \\ &= -\frac{\beta \delta}{A} (B^2 - AC) = 0, \end{aligned}$$

ya'ni, ikkita koeffitsiyent nolga aylandi. ▶

(17.8) tenglamaning ikkala tomonini c songa bo'lib, parabolik turdagi tenglamaning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

kanonik shaklini hosil qilamiz.

17.6-Misol. Quyidagi tenglamani kanonik shaklga keltiring:

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0$$

► (17.3) tenglamaning koeffitsiyentlari $A = 4$, $B = -6$, $C = 9$, $D = -1$, $E = 2$, $F = -1$ bo‘ladi va demak $B^2 - AC = 0$. Berilgan tenglama parabolik turdagi ekan. Berilgan tenglamaga mos $4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$ kvadrat tenglama yagona $\lambda = 3/2$ ildizga ega. U holda α, β koeffitsiyentlarni $\alpha = \lambda\beta = 3\beta/2$ bo‘ladigan qilib tanlaymiz. γ, δ koeffitsiyentlarga nisbatan $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ shartdan boshqa talab yo‘q. Shuning uchun $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = \delta = 1$ variantda to‘xtaymiz. Yangi koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$a = 4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2 = 0,$$

$$b = 4 \cdot 3 \cdot 1 - 6(3 \cdot 1 + 2 \cdot 1) + 9 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$c = 4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 1,$$

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - u.$$

Demak yangi tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - u = 0$$

yoki uning kanonik shakli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + u$$

kabi bo‘ladi. ◀

17.3-Teorema. $B^2 - AC < 0$, ya’ni (17.6) tenglama ikkita har xil kompleks $\lambda_{1,2} = (-B \pm i\sqrt{AC - B^2})/A$ ildizga ega bo‘lsin. Agar (17.4) almashtirishda koeffitsiyentlar $\alpha = -B/A$, $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{AC - B^2}/A$, $\delta = 0$ ko‘rinishda tanlanilsa, yangi b koeffitsiyent nolga aylanadi va $a = c = (AC - B^2)/A$ bo‘ladi, natijada (17.5) tenglama

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

ko‘rinishni oladi.

◀ Yangi koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} a &= A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = A\left(-\frac{B}{A}\right)^2 + 2B\left(-\frac{B}{A}\right) \cdot 1 + C \cdot 1^2 = \frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C = \\ &= C - \frac{B^2}{A} = \frac{AC - B^2}{A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta = A\left(-\frac{B}{A}\right) \cdot \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} + \\ &+ B\left(\left(-\frac{B}{A}\right) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\right) + C \cdot 1 \cdot 0 = -\frac{B}{A}\sqrt{AC - B^2} + \frac{B}{A}\sqrt{AC - B^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2 = A\left(\frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}\right)^2 + 2B\frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} \cdot 0 + C \cdot 0^2 = \\ &= \frac{AC - B^2}{A}. \end{aligned}$$

Koeffitsiyentlarni berilgan tenglamaga qo‘yib

$$\frac{AC - B^2}{A} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

tenglamani hosil qilamiz. ►

Tenglamaning ikkala tomonini $(AC - B^2)/A$ ifodaga bo‘lsak, elliptik turdagi tenglamalarning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

kanonik shakli hosil bo‘ladi.

17.7-Misol. . Quyidagi tenglamani kanonik shaklga keltiring:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 13 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 8u = 0.$$

► (17.3) tenglamaning koeffitsiyentlari $A = 1$, $B = -3$, $C = 13$, $D = 2$, $E = -2$, $F = 8$ boʻladi va demak $B^2 - AC = -4$. Berilgan tenglama elliptik turdagi ekan va unga mos $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ kvadrat tenglama ikkita har xil $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$ kompleks ildizga ega. U holda 17.3-Teoremaga koʻra $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeffitsiyentlarni $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ sonlarga teng qilib olamiz va yangi koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$a = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 1 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 + 13 \cdot 1^2 = 4;$$

$$b = A\alpha\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\beta\delta = 1 \cdot 3 \cdot 2 - 3(3 \cdot 0 + 1 \cdot 2) + 13 \cdot 1 \cdot 0 = 0;$$

$$c = A\gamma^2 + 2B\gamma\delta + C\delta^2 = 1 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 0 + 13 \cdot 0^2 = 4;$$

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + 8u.$$

Demak berilgan tenglama chiziqli almashtirishdan soʻng

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + 8u = 0$$

koʻrinishni oladi va demak uning kanonik shakli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2u$$

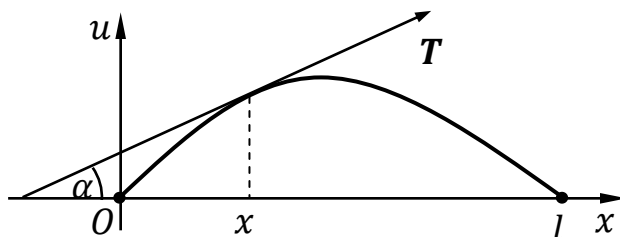
boʻladi. ◀

17.3. Tor tebranish tenglamasi

Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish.

Egiluvchan choʻzilmaydigan ingichka ipga *tor* deb ataymiz.

Torning uchlari mahkamlangan va u tarang tortilgan boʻlsin. Agar tor tashqi kuchlar taʼsirida muvozanat holatidan chiqarilsa, u tebrana boshlaydi. Torning tebranishi uning muvozanat holatiga perpendikulyar ravishda roʻy beradi, yaʼni tor vaqtning har bir momemtida bitta tekislikda yotadi deb faraz qilamiz.



17.1-rasm

Bu tekislikda Oxu koordinatalar sistemasini kiritamiz. Bunda torning bir uchiga O koordinatalar boshini va l uzunlikdagi torning o'zini Ox o'q bo'ylab joylashtiramiz. Bu holda u torning muvozanat holatidan chetlanishini anglatadi. Tebranish jarayonida u chetlanish miqdori tor nuqtasining x absissasiga va t vaqtga bog'liq bo'ladi. Shunday qilib vaqtning ixtiyoriy momentida tor ixtiyoriy nuqtasining holatini bilish uchun u chetlanishning x va t vaqtga bog'liqligini, ya'ni $u(x, t)$ funksiyani topishimiz kerak. Har bir o'zgarmas t momentda $u(x, t)$ funksiyaning grafigi torning t vaqt momentidagi tebranish shaklini tasvirlaydi (17.1-rasm). Bunda $\frac{\partial u}{\partial x}$ xususiy hosila bu grafikka absissasi x bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. x o'zgarmas bo'lganda $u(x, t)$ absissasi x bo'lgan nuqtaning Ou o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qonunini, $\frac{\partial u}{\partial t}$ hosila esa bu harakatning tezligini, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ikkinchi tartibli hosila esa tezlanishini beradi.

Bizga qo'yilgan masala $u(x, t)$ funksiya qanoatlantiradigan tenglamani tuzishdan iborat. Buning uchun bir necha soddalashtiruvchi farazlarni qilamiz. Torni *mutlaq egiluvchan* deb, ya'ni torning biror qismi olib tashlanadigan bo'lsa, ana shu olib tashlangan qismining ta'sirini almashtiruvchi T taranglik kuchi doimo torga o'tkazilgan urinma bo'ylab yo'nalgan deb hisoblaymiz (17.1-rasm). Tor *tarang* holatda va Guk qonuniga bo'ysinadi: bunda taranglik kuchi miqdorining o'zgarishi tor uzunligining o'zgarishiga proporsional. Torni bir jinsli deb hisoblaymiz; uning zichligini ρ orqali belgilaymiz (ρ —tor uzunlik birligining vazni)

Torga tebranish tekisligida tor bo'ylab va vaqt bo'yicha o'zgaruvchi Ou o'qqa parallel kuchlar ta'sir qiladi deb faraz qilamiz. Bu kuchlar tor bo'ylab uzluksiz taqsimlangan deb hisoblaymiz. Yuqoriga yo'nalgan kuchning miqdorini musbat, quyiga yo'nlannikini esa manfiy deb kelishib olamiz. Tor bo'ylab bu kuchlarning taqsimot zichligi x absissaning va t vaqtning funksiyasidan iborat va uni $g(x, t)$ orqali belgilaymiz. Agar xususiy holda yagona tashqi kuch torning og'irligi bo'lsa,

$g(x, t) = -\rho g$ bo'ladi, bu yerda ρ – torning zichligi, g – esa og'irlik kuchining tezlanishi.

Tor tebranayotgan muhitning qarshilik kuchini inobatga olmaymiz.

Biz faqat kichik tebranishlarni o'rganamiz. Agar $\alpha(x, t)$ orqali vaqtning t momentida abssissasi x bo'lgan nuqtada torga o'tkazilgan urinmaning abssissa o'qi bilan tashkil qilgan burchagini belgilasak, kichik tebranish deganda $\alpha^2(x, t)$ miqdorni inobatga olmasa ham bo'ladi, ya'ni

$$\alpha^2 \approx 0$$

deb tushunish kerak.

$\sin \alpha$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasi

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

ko'rinishda bo'lganligi tufayli, $\alpha^2 \approx 0$ taqribiy tenglikni inobatga olsak,

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

deb hisoblash mumkin. Yana $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha / 2 \approx \alpha^2 / 2$ munosabatdan

$$\cos \alpha \approx 1$$

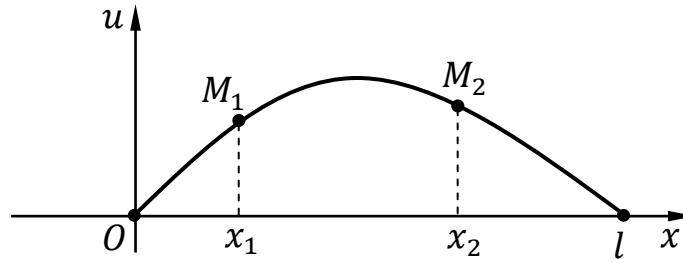
taqribiy tenglikni yozish mumkin. Nihoyat, $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \alpha)$ munosabatdan

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$$

tenglikni hosil qilamiz. Biz yuqorida $\frac{\partial u}{\partial x}$ xususiy hosila $u(x, t)$ funksiya grafigiga abssissasi x bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti, yani $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$ ekanligini ta'kidlagan edik. U holda yuqorida qilingan shartlardan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0 \quad (17.9)$$

deb xulosa qilishimiz mumkin.



17.2-rasm

Vaqtning t momentida tor yoyining $\widetilde{M_1 M_2}$ uzunligi

$$\widetilde{M_1 M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \quad (17.10)$$

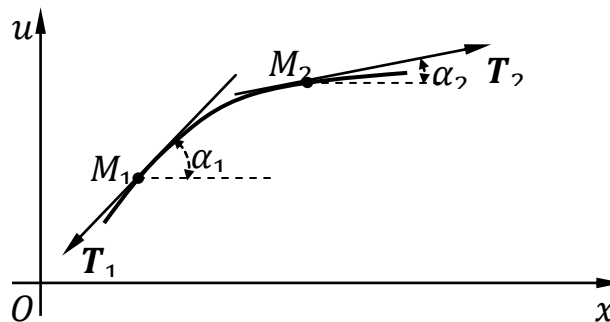
formulaga ko'ra hisoblanadi. Agar bu yerda (17.9) munosabatni inobatga olsak,

$$\widetilde{M_1 M_2} \approx x_2 - x_1 \quad (17.11)$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Demak tebranish jarayonida torning ixtiyoriy qismining uzunligi o'zgarishini inobatga olmasak ham bo'lar ekan.

T taranglik kuchi miqdorining ozgarmasligini, ya'ni u kuch qo'yilgan nuqtaga ham, t vaqtga ham bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun vaqtning t momentida torning $M_1 M_2$ qismini olamiz (17.3-rasm) va torning tashlab yuborilgan qismining ta'sirini T_1 va T_2 taranglik kuchlari bilan almashtiramiz. Shartga ko'ra torning barcha nuqtalari Ou o'qqa parallel harakat qiladi va tashqi kuchlar ham bu o'qqa parallel bo'ladi, u holda taranglik kuchlarining Ox o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak:

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0. \quad (17.12)$$

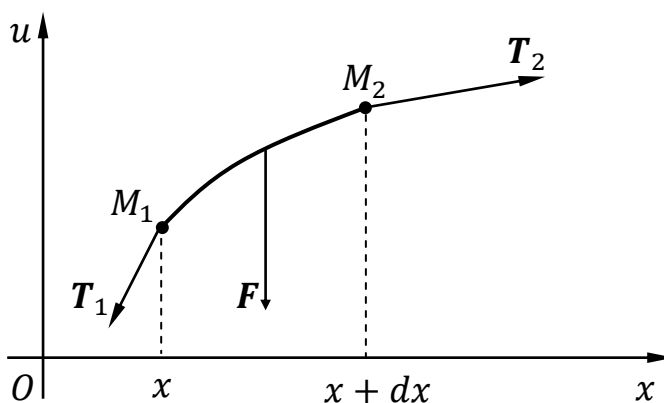


17.3-rasm

Bu yerda $\cos \alpha \approx 1$ munosabatni inobatga olsak $T_1 = T_2$ degan xulosaga kelamiz. M_1 va M_2 nuqtalar ixtiyoriy tanlangan, bu esa vaqtning ana shu momentida taranglik kuchlari barcha nuqtalarda o'zaro tengligini anglatadi.

Biz yuqorida tebranish jarayonida torning ixtiyoriy qismining uzunligi o'zgarishini inobatga olmasak ham bo'ladi degan xulosaga kelgan edik, u holda Guk qonuniga ko'ra torning tarangligi ham o'zgarmas bo'ladi. Shunday qilib, taranglik kuchining T miqdori o'zgarmas ekanligini ko'rsatdik:

$$T = T_0.$$



17.4-rasm

Endi tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaramiz. Torning absissalar o'qining $[x, x + dx]$ kesmasiga proyeksiyalanadigan M_1M_2 qismini ajratamiz (17.4-rasm). Unga torning tashlab yuborilgan qismi ta'sirining o'rniga T_1 va T_2 taranglik kuchlari ta'sir qiladi. Biz yuqorida T_1 va T_2 kuchlar mos ravishda M_1 va M_2 nuqtalarda o'tkazilgan urinmalar bo'ylab yo'nalganligini aytib o'tgan edik. Bu kuchlarning miqdori o'zgarmas T_0 qiymatga teng. (17.12) tenglikga ko'ra T_1 va T_2 kuchlarning Ox o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng. Bu kuchlarning Ou o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisini hisoblaymiz:

$$-T_0 \sin \alpha_1 + T_0 \sin \alpha_2 = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

Yuqorida olingan $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ munosabatga ko'ra,

$$\sin \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = u_x(x + dx, t), \sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = u_x(x, t).$$

Natijada,

$$T_0(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = T_0(u_x(x + dx, t) - u_x(x, t)) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (17.13)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda biz u_x hosilaning qavs ichidagi xususiy orttirmasini uning $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ xususiy differensial bilan almashtirdik.

Vaqtning t momentida torning $M_1 M_2$ qismiga qo'yilgan tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\mathbf{F}$ orqali belgilaymiz. $g(x, t)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra va (17.11) taqribiy tenglikni inobatga olsak,

$$F \approx g(x, t) \widetilde{M_1 M_2} \approx g(x, t) dx \quad (17.14)$$

deb hisoblash mumkin.

$\mathbf{F}$ teng ta'sir etuvchining yo'nalishi $g(x, t)$ funksiyaning ishorasi bilan aniqlanadi (17.4-rasmda $\mathbf{F}$ teng ta'sir etuvchining yo'nalishi $g(x, t) < 0$ holga mos keladi).

Torning $M_1 M_2$ qismiga ta'sir etuvchi barcha kuchlar aniqlangandan so'ng, unga Nyutonning ikkinchi qonunini qo'llaymiz. Unga ko'ra vaznning tezlanishga ko'paytmasi barcha ta'sir etuvchi kuchlar yig'indisiga teng ($M_1 M_2$ bo'lakning kichikligi tufayli uni biz moddiy nuqta sifatida qaradik).

$M_1 M_2$ bo'lakning vazni $\rho \widetilde{M_1 M_2} = \rho dx$ qiymatga teng bo'lganligi uchun (17.13) va (17.14) formulalardan foydalanib

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + g(x, t) dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Tenglikni dx ko'paytuvchiga qisqartirib va barcha hadlarni ρ o'zgarmasga bo'lsak, so'ngi tenglik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t) \quad (17.15)$$

ko'rinishni oladi ($a^2 = T_0/\rho$ — musbat o'zgarmas miqdor). Natijada biz o'zgarmas koefitsiyentli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani hosil qildik. (17.15) tenglama bir jinsli *tor tebranish tenglamasi* yoki *bir o'lchovli to'lqin*

tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama matematik fizikaning eng sodda va shuning bilan birga muhim tenglamasi hisoblanadi.

Agar $g(x, t) \equiv 0$ bo'lsa, (17.15) *tenglama bir jinsli* deb ataladi va u tashqi kuchlarning ta'sirisiz yuzaga keladigan *erkin tebranishni* tasvirlaydi.

Agar $g(x, t)$ aynan nol bo'lmasa tenglama bir jinslimas deyiladi, bu holda torning majburiy tebranishi qaraladi.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning qo'yilishi

Biz yuqorida ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar ikkita ixtiyoriy funksiyaga bog'liq bo'lgan cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lishini ta'kidlagan edik. Bunday yechimlar orasidan bizga keragini tanlash uchun qidirilayotgan $u(x, t)$ funksiyaga qo'shimcha shartlarni qo'yish kerak.

Torning tebranishi masalasini qarashda qo'shimcha shartlar ikki xil: *boshlang'ich* va *chegaraviy* shartlar.

Boshlang'ich shartlar tebranish boshlanishi momentida tor qanday holatda bo'lganligini ko'rsatadi. Tor tebranishni vaqtning $t = 0$ momentida boshlagan deb olish qulay. Nuqtalarning boshlang'ich holati

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (17.16)$$

shart bilan, boshlang'ich tezlik esa,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (17.17)$$

shart bilan aniqlanadi, bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ berilgan funksiyalardir.

$u(x, t)|_{t=0}$ yozuv $u(x, t)$ funksiya ixtiyoriy x va $t = 0$ uchun olinganligini, ya'ni $u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0)$ va xuddi shu singari $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_t(x, 0)$ ekanligini anglatadi.

Chegaraviy shartlar tor tebranayotgan paytda torning uchlari qanday holatda bo'lishini ko'rsatadi. Eng sodda holda torning uchlari mahkamlangan (torning bir uchi

koordinatalar boshiga, ikkinchi uchi $(l, 0)$ nuqtaga) bo‘ladi va bu holda $u(x, t)$ funksiya

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (17.18)$$

shartlarni qanoatlantirishi talab qilinadi.

Nihoyat, ikki uchi mahkamlangan torning erkin tebranishini o‘rganishga olib keladigan matematik masalani tuzamiz.

O‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l \quad (17.19)$$

xususiy hosilali differensial tenglamaning

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.19a)$$

boshlang‘ich shartlarni va

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (17.19b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish talab qilinadi.

17.4. Torning erkin tebranish tenglamasini Furiye usuli bilan yechish

Furiye usuli yoki o‘zgaruvchilarni ajratish usuli chegaralangan sohalarda matematik fizika masalalarini yechishda asosiy usullardan biri hisoblanadi. Bu usulni torning tebranishlari haqidagi masalalarni yechishga qo‘llab ko‘ramiz.

(17.19) tenglamaning (17.19a) boshlang‘ich va (17.19b) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi va aynan nolga teng bo‘lmagan xususiy yechimini ikkita $X(x)$ va $T(t)$ funksiyalar ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz, ulardan biri faqat x o‘zgaruvchiga, ikkinchisi esa t o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘ladi:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (17.20)$$

$u(x, t)$ funksiyaning (17.20) shaklini (17.19) tenglamaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

va bu tenglikning ikka tomonini $a^2 X(x)T(t)$ ifodaga bo‘lib,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (17.20a)$$

tenglikni hosil qilamiz. (17.20a) tenglik , $0 < x < l$ va $t > 0$ qiymatlarda o‘rinli bo‘lishi kerak. (17.20a) tenglikning chap tomoni x o‘zgaruvchiga, o‘ng tomoni esa t o‘zgaruvchiga bog‘liq emas. Shuning uchun (17.20a) tenglikning ikkala tomoni ham bitta o‘zgarmas $-\lambda$ songa teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Bu tengliklardan ikkita tenglama hosil qilamiz:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (17.20b)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (17.20c)$$

(17.20) ko‘rinishdagi xususiy yechimlar (17.19b) chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi uchun har qanday $t > 0$ qiymatda, $X(0) = 0$ va $X(l) = 0$ shartlarni bajarilishini talab etish zarurdir. Demak, $X(x)$ funksiyani topish uchun quyidagi masalaga kelamiz. (17.20b) ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning

$$X(0) = 0 \text{ va } X(l) = 0 \quad (17.20d)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraymiz.

Ixtiyoriy $\lambda = \text{const}$ bo‘lganda bu masala $X(x) = 0$ trivial yechimga ega. Biroq biz quyida musbat λ qiymatlar uchun (17.20b) va (17.20d) masalaning trivial yechimi mavjudligini ko‘rsatamiz. λ parametrning bunday qiymatlari xos *qiymatlar* ularga mos keluvchi $X(x)$ notrivial yechimlar esa (17.20b) va (17.20d) masalaning xos *funksiyalari* deb ataladi. Xos qiymat va xos funksiyalarni topish masalasi *Shturm-Liuvil masalasi* deb ataladi.

(17.20b) va (17.20d) masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topamiz. Bunda uchta holni ko‘rib chiqamiz.

1. $\lambda = 0$ bo‘lganda (17.20b) tenglamaning umumiy yechimi $X(x) = C_1 + C_2 x$ bo‘lib, (17.26) chegaraviy shartlardan $C_1 = C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $\lambda = 0$ bo‘lsa, (17.20b) va (17.20d) masala faqat trivial yechimga ega bo‘ladi.

2. $\lambda < 0$ bo'sa, (17.20b) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{|\lambda|x}) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{|\lambda|x})$$

bo'lib, (17.20d) chegaraviy shartlardan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{|\lambda|l}) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{|\lambda|l}) = 0. \end{cases}$$

kelib chiqadi. Bir jinsli sistemaning determinanti $\Delta = \operatorname{sh}(\sqrt{|\lambda|l})$ bo'lib, ixtiyoriy $\lambda < 0$ uchun noldan farqli bo'ladi. Demak sistema yagona $C_1 = C_2 = 0$ yechimga ega bo'ladi. Bundan (17.20b) va (17.20d) masalaning manfiy xos qiymatlari mavjud emasligi kelib chiqadi.

3. $\lambda > 0$ bo'lsa, (17.20b) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

bo'ladi. (17.20d) chegaraviy shartlardan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$$

bo'lib, birinchi tenglamadan $C_1 = 0$ kelib chiqadi. Bu sistema notrivial yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng, ya'ni

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0$$

bo'lishi kerak. Bundan esa $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ yoki $\sqrt{\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, \dots$

Demak, (17.20b) va (17.20d6) masalaning notrivial yechimi faqat

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

sonlar uchun mavjud bo'ladi. Bu sonlar (17.20b) va (17.20d) masalaning xos qiymatlari bo'ladi. Bu xos qiymatlarga mos keluvchi (17.20b) va (17.20d) masalaning xos funksiyalari

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

bo'ladi.

Har bir λ_n xos qiymatga $T_n(t)$ mos qo'yilib, uni

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T(t) = 0$$

tenglamaning yechimidan aniqlaymiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t$$

bo'lib, bu yerda a_n va b_n – ixtiyoriy o'zgarmaslar. $X_n(x)$ va $T_n(t)$ ifodalarni (17.20) formulaga qo'yib (17.19) tenglamaning (17.19b) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz. Bu yerda har bir $n = 1, 2, \dots$ uchun

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

yechim mos kelib, ularning

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.21)$$

yig'indisi ham, agar u yaqinlashuvchi, x va t o'zgaruvchilar bo'yicha ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, (17.19) tenglamaning (17.19b) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi. Endi (17.19) tenglamaning yechimi bo'lgan (17.21) qatorda (17.19a) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi a_n va b_n ($n = 1, 2, \dots$) o'zgarmaslarni topamiz. Buning uchun (17.21) qatorni t bo'yicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left[-a_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

va $t = 0$ bo'lganda boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini ta'minlayamiz:

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

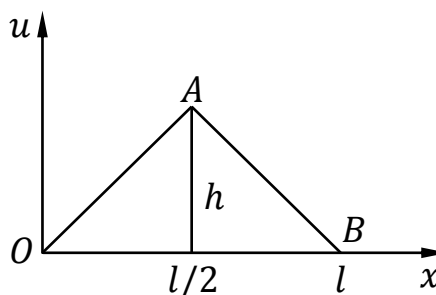
Bu tengliklarda berilan $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarni $(0, l)$ oraliqda ortogonal bo'lgan $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$ trigonometrik funksiyalar sistemasi bo'yicha Furiye qatoriga yoyamiz.

Shuning uchun a_n va $(n\pi a/a)b_n$ koeffitsiyentlar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar yoyilmasining φ_n va ψ_n Furiye koeffitsiyentlariga teng bo'ladi. Furiye formulasi bo'yicha bu koeffitsiyentlarni aniqlaymiz, ya'ni

$$\begin{aligned} a_n = \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n &= \frac{l}{n\pi a} \psi_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (17.21a)$$

Shunday qilib, a_n va b_n koeffitsiyentlari (17.21a) formula bilan aniqlanadigan (17.21) qator (17.19), (17.19a), (17.19b) masalaning yechimini ifodalaydi.

17.4-Teorema. $[0, l]$ kesmada $\varphi(x)$ – uchinchi tartibli uzluksiz hosilaga, $\psi(x)$ – esa ikkinchi tartibli bo'lakli uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. U holda (17.19), (17.19a), (17.19b) masalaning yechimi (17.21) yig'indi ko'rinishda bo'lib, uning koeffitsiyentlari (17.21a) formula orqali aniqlangan bo'ladi.



17.5-rasm

17.8-Misol. $x = 0$ va $x = l$ chetki nuqtalarida mahkamlangan tor berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik vaqtning boshlang'ich momentida tor 17.5-rasmda tasvirlangan OAB siniq chiziq shaklida bo'lsin. Agar boshlang'ich tezliklar yo'q bo'lsa, torning vaqtning ixtiyoriy momentdagi shaklini toping.

► OA to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $2h/l$ teng bo'lib, to'g'ri chiziqning tenglamasi $u = 2hx/l$ ko'rinishda bo'ladi. AB to'g'ri chiziq koordinata

o'qlarida l va $2h$ kesmalarni ajratadi. Bundan ko'rinadiki, AB to'g'ri chiziq tenglamasi $u = 2h(l - x)/l$ ko'rinishda bo'ladi. Demak,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2h}{l}(l - x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad \psi(x) = 0.$$

a_n va b_n koefitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4h}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{4h}{l^2} \int_{\frac{l}{2}}^l (l - x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Demak, berilgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{an\pi t}{l}$$

funksiyadan iborat bo'ladi. ◀

17.9-Misol. Agar $x = 0$ va $x = l$ chetki nuqtalari mahkamlangan tor vaqtning boshlang'ich momentida

$$w(x, 0) = \frac{4}{l^2} x(l - x).$$

parabola shakliga ega va boshlang'ich tezligi yo'q bo'lsa, vaqtning ixtiyoriy momentidagi shaklini toping.

► Masalaning shartiga ko'ra

$$\varphi(x, 0) = \frac{4}{l^2} x(l - x), \quad \psi(x) = 0.$$

a_n va b_n koefitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{4}{l^2} x(l - x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{32}{n^3 \pi^3}, & n = 2k + 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}, \quad b_n = 0.$$

U holda berilgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{a(2n+1)\pi t}{l}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ◀

17.5. Torning majburiy tebranish tenglamasini Furiye usuli bilan yechish

Yuqorida keltirilgan Furiye usuli bir jinsli bolmagan to‘lqin tenglamalari uchun ham chegaraviy masalalarni yechishga imkon beradi. Torning majburiy tebranish tenglamasi uchun quyidagi masalani qaraymiz.

Bu masala,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l \quad (17.22)$$

tenglamani

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.22a)$$

boshlang‘ich shartlarda va

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \quad (17.22b)$$

chegaraviy shartlarda yechishdan iborat.

Bu masalaning $u(x, t)$ yechimini quyidagi

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (17.22c)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerda $v(x, t)$ funksiya birjinsli bo‘lmagan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (17.23)$$

tor tebranish tenglamasining bir jinsli boshlang‘ich

$$v(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (17.23a)$$

va chegaraviy

$$v(x, t)|_{x=0} = 0, \quad v(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (17.23b)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi.

$w(x, t)$ funksiya esa bir jinsli

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (17.24)$$

tenglamaning quyidagi boshlang'ich

$$w(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (17.24a)$$

va chegaraviy

$$w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad w(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (17.24b)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

Yuqoridagi masalalardan ko'rinib turibdiki, $v(x, t)$ funksiya uchlari mahkamlangan bir jinsli torning $f(x, t)$ tashqi kuchlar ta'siridagi majburiy tebranishi, $w(x, t)$ esa shu torning erkin tebranishini ifodalaydi. $w(x, t)$ funksiyaga nisbatan (17.24), (17.24a), (17.24b) masala yechimining mavjudligi oldingi bandda isbot qilingan edi.

Shuning uchun bu yerda (17.23), (17.23a), (17.23b) masalaning $v(x, t)$ yechimini topish yetarli.

Bu masalaning $v(x, t)$ yechimini quyidagi qator

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.25)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yerda $T_n(t)$ hozircha noma'lum funksiya. (17.25) qatorni x va t o'zgaruvchilar bo'yicha hadma-had differensiallab, (17.23) tenglamaga qo'yib

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x, t) \quad (17.26)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Endi $f(x, t)$ funksiyaning $(0, l)$ intervalda x o'zgaruvchiga nisbatan sinuslar bo'yicha Furie qatoriga yozamiz

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (17.26a)$$

bu yerda f_n koeffitsiyentlar quyidagi

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (17.26b)$$

formula bilan aniqlanadi.

(17.26) va (17.26a) yoyilmalarni taqqoslab, $T_n(t)$ noma'lum funksiyaga nisbatan

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.27)$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerda $\omega_n = n\pi/l$.

(17.25) qator bilan aniqlanuvchi $v(x, t)$ yechim (17.23a) boshlang'ich shartni qanoatlantirishi uchun $T_n(t)$ funksiya

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.27a)$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak.

Demak, $T_n(t)$ funksiyaning topish uchun ikkinchi tartibli (17.27) differensial tenglamaning (17.27a) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini yechamiz. Bu masalaning yechimini o'zgarmasni variatsiyalash usuli yordamida topamiz. Bir jinsli (17.27) tenglamaning umumiy yechimi

$$T_n(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t,$$

funksiyadan iborat bo'ladi, bu yerda C_1, C_2 — ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Endi (17.27) tenglamaning umumiy yechimini

$$T_n(t) = C_1(t) \cos \omega_n t + C_2(t) \sin \omega_n t \quad (17.27b)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, $C_1'(t)$ va $C_2'(t)$ noma'lum funksiyalarga nisbatan quyidagi

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos \omega_n t + C_2'(t) \sin \omega_n t = 0, \\ C_1'(t) \omega_n \sin \omega_n t + C_2'(t) \omega_n \cos \omega_n t = f_n(t), \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bundan $C_1'(t)$ va $C_2'(t)$ funksiyalarni

$$C_1'(t) = -\frac{f_n(t)}{\omega_n} \sin \omega_n t, \quad C_2'(t) = \frac{f_n(t)}{\omega_n} \cos \omega_n t,$$

ko'rinishda topamiz va bu tenglamalarni integrallab, $C_1(t)$ va $C_2(t)$ funksiyalarni

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega_n} \int_0^l f_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau + \bar{C}_1,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l f_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau + \bar{C}_2,$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Bu yerda $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ — o'zgarmas sonlar.

Topilgan $C_1(t)$ va $C_2(t)$ funksiyalarni (17.27b) formulaga qo'yib, (17.27) tenglamaning umumiy yechimini

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau + \bar{C}_1 \cos \omega_n t + \bar{C}_2 \sin \omega_n t,$$

ko'rinishda topamiz. (17.27a) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirib, $T_n(t)$ yechimdan $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ natijaga ega bo'lamiz.

Agar $f_n(t)$ funksiya $[0, l]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda (17.27) tenglamaning (17.27a) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

formula bilan aniqlanadi.

$T_n(t)$ funksiyaning topilgan ifodasini (17.25) qatorga qo'yib, (17.23), (17.23a), (17.23b) masalaning $v(x, t)$ yechimini topamiz. Bunda (17.25) qator va bu qatordan x va t bo'yicha ikki marta hadma-had differensiallash natijasida hosil qilingan qator tekis yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. Bundan (17.22), (17.22a), (17.22b) masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.28)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda:

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l f_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

17.10-Misol. Chegaralangan torning majburiy tebranishi haqidagi masalani Furiye usuli bilan yeching:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (4t - 8) \sin 2x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0.$$

► Torda boshlang'ich chetlanishlar yo'q. Shu sababli chetki nuqtalarda mahkamlangan bir jinsli torning sof majburiy tebranishini qaraymiz. U holda berilgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ko'rinishga keladi. Bunda

$$T_n(t) = \frac{l}{n\pi} \int_0^l f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} (t - \tau) d\tau$$

bo'ladi, bu yerda:

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi.$$

Bundan, masala shartiga ko'ra

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^l (4t - 8) \sin 2\xi \sin n\xi d\xi = (\text{bunda } n = 2) = \frac{2(4t - 8)}{\pi} \int_0^l \sin^2 2\xi d\xi = \\ &= (4t - 8) \int_0^l (1 - \cos 4\xi) d\xi = (4t - 8) \left(\xi - \frac{1}{4} \sin 4\xi \right) \Big|_{\xi=0}^{\xi=\pi} = 4t - 8. \end{aligned}$$

$$T_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (4t - 8) \sin 2(t - \tau) d\tau = 2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + t - 2.$$

Demak, berilgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = \left(2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + t - 2 \right) \sin 2x$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

17.6. Uchlari qo'zg'aluvchan torning majburiy tebranishi

Torning uchlari mahkamlanmagan bo'lib, ular biror qoida asosida harakatlansin va tor biror tashqi kuch ta'sirida tebranayotgan bo'lsin. U holda bu masala bir jinsli bo'lmagan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l \quad (17.29)$$

tor tebranish tenglamasining quyidagi boshlang'ich

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.29a)$$

va chegaraviy

$$u(x, t)|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \gamma_2(t), \quad t \geq 0 \quad (17.29b)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga teng kuchli bo'ladi.

Masalaning yechimini topish uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $w(x, t)$ yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$w(x, t)|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad w(x, t)|_{x=l} = \gamma_2(t).$$

Bunday funksiyalardan birini

$$w(x, t) = \gamma_1(t) + (\gamma_2(t) - \gamma_1(t))x/l$$

ko'rinishda tanlashimiz mumkin.

U holda yechimni

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

ko'rinishda izlab, noma'lum $v(x, t)$ funksiya uchun quyidagi chegaraviy masalaga kelamiz:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l$$

$$v(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$v(x, t)|_{x=0} = 0, \quad v(x, t)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

bu yerda $f_1(x, t)$, $\varphi_1(x)$ va $\psi_1(x)$ funksiyalar quyidagicha aniqlangan:

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) - \left\{ \gamma_1''(t) + \frac{x}{l} [\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)] \right\};$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - w(x, 0) = \varphi(x) - \left\{ \gamma_1(0) + \frac{x}{l} [\gamma_2(0) - \gamma_1(0)] \right\};$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) - \left\{ \gamma_1'(0) + \frac{x}{l} [\gamma_2'(0) - \gamma_1'(0)] \right\}.$$

Shunday qilib, bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun birinchi chegaraviy masala (17.22), (17.22a), (17.22b) uchlari mahkamlangan torning majburiy tebranish masalasiga keltirildi.

17.11-Misol. Aralash masalani Furrye usuli bilan yeching:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 3t, \quad t \geq 0.$$

► Chegaraviy shartlar bir jinsli emas (torning chetki nuqtalari qo‘zg‘aluvchan).

Masalaning shartiga ko‘ra:

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = 3t.$$

Yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$w(x, t) = \gamma_1(t) + (\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) \frac{x}{l} = t + 2xt = t(1 + 2x), \quad t \geq 0.$$

Bu funksiya uchun $w|_{x=0} = t$, $w|_{x=1} = 3t$. Berilgan masalaning yechimi

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $v(x, t)$ noma’lum funksiya. $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$ funksiya uchun

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$v|_{t=0} = f(x) - \gamma_1(0) - (\gamma_2(0) - \gamma_1(0)) \frac{x}{l} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(x) - \gamma_1'(0) - (\gamma_2'(0) - \gamma_1'(0)) \frac{x}{l} = 2x + 1 - 1 - 2x = 0$$

bo‘ladi. Bu masala yagona $v(x, t) = 0$ yechimga ega bo‘ladi. Demak, berilgan masalaning yechimi $u(x, t) = t(1 + 2x)$ funksiya bo‘ladi. ◀

17.7. Gipربولik tenglamalar uchun Koshi masalasi.

Dalamber formulasi. Cheksiz uzunlikdagi ya’ni chetki nuqtalarining tebranish jarayoniga ta’sirini e’tiborga olmasa ham bo‘ladigan yetarlicha uzun torning erkin tebranish tenglamasini qaraymiz.

Bunday tebranishlarni yuzaga keltiruvchi sabablar torning boshlang‘ich muvozanat holatidan og‘ishi yoki tor nuqtalarining biror tezlikda taqsimlanishiga olib keluvchi torning boshlang‘ich impulsi bo‘lishi mumkin. Shuning uchun, cheksiz uzunlikdagi torning erkin tebranishini tavsirlovchi bu tebranishning bir jinsli tenglamasini yechishimiz kerak:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (17.30)$$

boshlang‘ich

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (17.30a)$$

shartlari bilan yechamiz. Bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar sonlar o‘qida berilgan funksiyalar.

(17.30a) boshlang‘ich shartlar cheksiz torning tebranishini bir qiymatli aniqlaydi. Shuning uchun (17.30) va (17.30a) masalani boshlag‘ich shartli masala yoki Koshi masalasi deyiladi. Bu masalaning yechimini Dalamber usuli bilani yechamiz.

(17.30) tenglamani yechish uchun yangi ξ va η o‘zgaruvchilar kiritamiz:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

$u(x, t)$ funksiya hosilalarining yangi o‘zgaruvchilardagi ko‘rinishini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} u_t &= u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -au_\xi + au_\eta = a(u_\eta - u_\xi); \\ u_{tt} &= a(u_{\eta\xi} \xi_t + u_{\eta\eta} \eta_t - u_{\xi\xi} \xi_t - u_{\xi\eta} \eta_t) = a^2(u_{\xi\xi} \xi_t - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}); \\ u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta; \end{aligned}$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Topilgan ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni (17.30) tenglamaga qo'yib, topamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Bu tenglamani

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz va integrallaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = h_1(\xi),$$

bu yerda $h_1(\xi)$ funksiya ξ o'zgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi. Bundan

$$u = \int_0^{\xi} h_1(z) dz + u_2(\eta),$$

bu yerda $u_2(\eta)$ had η o'zgaruvchining ixtiyoriy funksiyasi.

$$\int_0^l h_1(z) dz = u_1(\xi) \text{ deb belgilash kiritamiz. U holda}$$

$$u = u_1(\xi) + u_2(\eta)$$

bo'ladi. x va t o'zgaruvchilarga qaytib, topamiz:

$$u = u_1(x - at) + u_2(x + at), \quad (17.30b)$$

bu yerda u_1, u_2 — o'z argumentlari bo'yicha ikki marta differensiallanuvchi ixtiyoriy funksiyalar.

(17.30b) ifoda bilan aniqlanuvchi $u(x, t)$ funksiya (17.30) to'lqin tenglamasining umumiy yechimi (D'alamber yechimi) bo'ladi, ya'ni (17.30) tenglamaning har qanday yechimi u_1 va u_2 funksiyalarning mos tanlanishida (17.30b) ko'rinishda ifodalanadi. Xususan, (17.30b) ifodaning har bir qo'shiluvchisi ham (17.30) tenglamaning yechimi bo'ladi.

Endi (17.30a) boshlang'ich shartlardan foydalanib, u_1 va u_2 funksiyalarni aniqlaymiz. U holda

$$u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \quad (17.30c)$$

$$u_t(x, 0) = -au'_1(x) + au'_2(x) = \psi(x), \quad (17.30d)$$

(17.30d) tenglikni x_0 dan x gacha integrallaymiz

$$u_2(x) - u_1(x) = a^{-1} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \quad (17.30e)$$

bu yerda x_0 va C — o'zgarmas sonlar.

(17.30c) va (17.30e) tengliklardan u_1 va u_2 ni aniqlaymiz:

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{C}{2},$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{C}{2}.$$

u_1 va u_2 funksiyalarni (17.30) tenglikga qo'yib

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(z) dz + \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(z) dz,$$

yoki

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \quad (17.31)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar $\varphi(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi va $\psi(x)$ funksiya esa bir marta differensiyallanuvchi bo'lsa, (17.31) formula chegaralanmagan tor uchun (17.30), (17.30a) Koshi masalasining yagona yechimi bo'ladi. (17.31) formulaga *Dalamber formulasi* deyiladi.

17.12-Misol. Koshi masalasini Dalamber usuli bilan yeching:

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 1$$

$$b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = x.$$

► a) Masalaning shartiga ko'ra: $a = 3$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = 1$. U holda (17.31) formula bilan topamiz

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{\sin(x - 3t) + \sin(x + 3t)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} dz = \\
&= \sin x \cos 3t + \frac{z}{6} \Big|_{x-3t}^{x+3t} = \sin x \cos 3t + \frac{1}{6} (x + 3t - x + 3t) = \sin x \cos 3t + t.
\end{aligned}$$

b) $a = 2$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = x$. D'alamber formulasidan foydalanib

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{(x - 2t)^2 + (x + 2t)^2}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} z dz = \\
&= \frac{x^2 - 4xt + 4t^2 + x^2 + 4xt + 4t^2}{2} + \frac{z^2}{8} \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \\
&= x^2 + 4t^2 + \frac{1}{8} (x^2 + 4xt + 4t^2 - x^2 + 4xt - 4t^2) = x^2 + 4t^2 + xt
\end{aligned}$$

yechimni topamiz. ◀

17.8. Chegaralanmagan tor uchun bir jinsli bo'lmagan Koshi masalasini yechish

Bir jinsli bo'lmagan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad (17.32)$$

to'liq tenglamasining

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (17.32a)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ yechimini topish masalasini qaraymiz.

Bu masala yechimini

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$$

yig'indi ko'rinishda izlaymiz. Bunda $v(x, t)$ yechim (17.41), (17.41a) Koshi masalasining yechimi, $\omega(x, t)$ esa

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, -\infty < x < +\infty \quad (17.33)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning

$$\omega|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, -\infty < x < +\infty \quad (17.33a)$$

boshlang'ich shartni qanoatlatiruvchi yechimi.

Aytaylik $W(x, t, \tau)$ funksiya quyidagi Koshi masalasining yechimi bo'lsin:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ W|_{t=\tau} = 0; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (17.34)$$

Endi (17.33), (17.33a) masalaning yechimi $\omega(x, t)$

$$\omega(x, t) = \int_0^t W(x, t, \tau) d\tau \quad (17.34a)$$

ko'rinishda bo'lishini korsatamiz, bu yerda $W(x, t, \tau)$ funksiya (17.34) masalaning yechimi.

Haqiqatdan ham $\omega(x, 0) = 0$ va

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = W(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial W(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau,$$

hamda (17.34) masalaning boshlang'ich shartidan $\left. \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ bo'ladi.

(17.34a) yechim (17.33) tenglamani qanoatlantirilishini ko'rish mumkin:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \left. \frac{\partial W(x, t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\tau} + \int_0^t \left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] d\tau = f(x, t)$$

(17.34) masalaning yechimi D'alamber formulasiga ko'ra

$$W(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (17.34b)$$

formula orqali aniqlanadi.

(17.31), (17.34a) va (17.34b) formulalardan berilgan (17.32), (17.32a) masalaning yechimini

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

formula orqali yozishimiz mumkin. Bu formulaga *Dyuamel formulasi* deyiladi.

17.13-Misol. Tor uchun bir jinsli bo‘lmagan Koshi masalasini yeching:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t, t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x, \quad t \geq 0.$$

► Masalaning shartiga ko‘ra

$$a = 1, \quad \varphi(x) = \sin x, \quad \psi(x) = \cos x, \quad f(x, t) = x \sin t.$$

Masalaning yechimini Dyumel formulasi bilan topamiz

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{\sin(x + t) + \sin(x - t)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-t}^{x+t} \cos z dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \sin \tau d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Ifodadagi integrallarni alohida hisoblab olamiz:

$$\int_{x-t}^{x+t} \cos z dz = \sin(x + t) - \sin(x - t) = 2 \sin t \cos x,$$

$$\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \sin \tau d\xi d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau ((x + t - \tau)^2 - (x - t + \tau)^2) d\tau = 2x(t - \sin t).$$

Hosil qilingan ifodalarni yuqoridagi integralga qo‘yib, berilgan masalaning yechimini topamiz:

$$u(x, t) = \sin x \cos t + \sin t \cos x + xt - x \sin t = \sin(x + t) + xt - x \sin t. \quad \blacktriangleleft$$

17.9. Parabolik turdagi tenglamalar

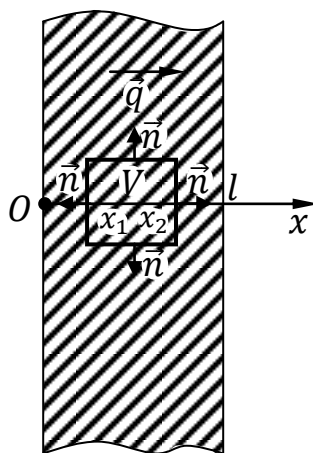
Issiqlik tarqalishi va diffuziya jarayonlari parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

Issiqlik tarqalishi tenglamasi

Jismning yuqoriroq isitilgan qismidan pastroq isitilgan qismiga issiqlik uzatish jarayoni jismning turli qismlaridagi haroratning o‘zgarishi bilan bog‘liq. Shuning

uchun bunday jarayonni tavsiflash mikroskopik nazariyada umumiy holda, jismda nostatsionar harorat maydonini aniqlashga keltiriladi.

$u(x, t)$ haroratni faqat bitta fazoviy o'zgaruvchi x ning funksiyasi deb hisoblab, izotrop materialning yassi qatlamidagi issiqlik o'tkazuvchanlikning bir o'lchamli issiqlik uzatish jarayonini qaraymiz (17.6-rasm).



17.6-rasm

Umumiy holda, materialning ρ zichligi, uning solishtirma massali issiqlik sig'imi C va issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti k ham faqat bitta x fazoviy koordinataga bog'liq deb hisoblaymiz.

Jarayonning matematik modelini tuzishda muhit qo'zg'almas, harorat o'zgarishi bilan material hajmining o'zgarishi esa hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik deb faraz qilamiz.

Bunday holda issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoni, mexanik ish bilan bog'liq emas deb hisoblash mumkin.

Materialning qaralayotgan qatlamida biror termodinamik sistema sifatida o'qi, Ox koordinata o'qiga parallel, asosining yuzi ΔS bo'lgan silindr ko'rinishidagi V hajmni ajratamiz.

Ajratilgan V hajm uchun, termodinamikaning birinchi qonunidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Q_1 + Q_2, \quad (17.35)$$

bu yerda $u(x, t)$ – sistemaning ichki energiyasi bo‘lib, uni $\varepsilon(x, t)$ ichki energiya hajmiy zichligini silindr bo‘yicha integrallash orqali topish mumkin, ya’ni:

$$u = \iiint_V \varepsilon dv = \Delta S \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x, t) dx.$$

Shuning uchun vaqt birligi ichida sistemaning ichki energiyasining o‘zgarishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta S \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_t(x, t) dx. \quad (17.35a)$$

Ajratilgan silindrning yopiq σ sirti orqali o‘tuvchi Q_1 issiqlik oqimini, ya’ni shu sirt orqali vaqt birligi ichida beriladigan issiqlik miqdorini, issiqlik oqimi zichligining $\vec{q}$ normal tashkil etuvchisini σ sirt bo‘yicha integrallab topish mumkin. Shuning uchun

$$Q_1 = \oint_{\sigma} \vec{q} \vec{n} ds,$$

bu yerda $\vec{n}$ vektor σ sirtning tashqi birlik normali.

Furyening fizik qonuniga asosan issiqlik uzatishda $\vec{q} = -k \cdot \text{grad } u$. Qaralayotgan holda issiqlik oqimining $\vec{q}$ zichlik vektori faqat bitta $q_x = -ku_x$ tashkil etuvchiga ega, u holda ajratilgan hajmdan chiquvchi issiqlik oqimi faqat silindrning asosi orqali o‘tadi, bundan tashqari

$$Q_1 = \Delta S \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1} - \Delta S \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} = -\Delta S \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (17.35b)$$

Ajratilgan hajm ichida endo yoki ekzotermik reaksiya jarayoni, elektr tokining o‘tishi, g‘ovakli materialdagi namlikning bug‘lanishi va boshqa sabablar natijasida issiqlik ajralishi yoki yutilishi mumkin.

Agar $\mathcal{F}(x, t)$ orqali issiqlik manbalarining hajmiy zichligini (solishtirma quvvatini) belgilasak, u holda qaralayotgan hajmda birlik vaqt ichida

$$Q_2 = \iiint_V \mathcal{F} dv = \Delta S \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x, t) dx \quad (17.35c)$$

issiqlik miqdori ajraladi ($\mathcal{F} > 0$) yoki yutiladi ($\mathcal{F} < 0$).

(17.35a), (17.35b), (17.35c) ifodalarni (17.35) tenglamaga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta S \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mathcal{F}(x, t) \right] dx = 0. \quad (17.35d)$$

x_1 va x_2 koordinatalarning ixtiyoriy tanlanganligi tufayli (17.45d) tenglik, integral ostidagi funksiya nolga teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, (17.45d) tenglikdagi integral ostidagi ifodani nolga tenglashtirib:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mathcal{F}(x, t) \quad (17.35e)$$

differensial munosabatni hosil qilamiz.

Qaralayotgan siqilmaydigan muhit ichki energiyasining $\varepsilon = \varepsilon(u)$ hajmiy zichligi haroratga bog'liq, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = \tilde{c}$ hosila esa materialning $\tilde{c} = \rho c$ hajmiy issiqlik sig'imini aniqlaydi. Shuning uchun

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

U holda (17.35e) ifodadan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mathcal{F}(x, t). \quad (17.36)$$

ρ, c va k xarakteristikalari haroratlariga bog'liq bo'lmagan bir jinsli material uchun (17.45f) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (17.37)$$

bu yerda $a^2 = k/\rho c$ materialning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti deb ataladigan o'zgaras va $f(x, t) = \mathcal{F}(x, t)/\rho c$.

(17.46)-(17.47) tenglamalar parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamalardir. Ular bir o'lchovli harorat maydonida bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan

jismlarda issiqlik uzatish jarayonini tavsiflovchi matematik modellarning asosini tashkil qiladi. Bu tenglamalarni *issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamalari* deb ataymiz.

(17.36) va (17.37) ko'rinishidagi tenglamalar faqat issiqlik o'tkazuvchanlik jarayoninigina emas, shuningdek, diffuziya turidagi bir qator boshqa fizik jarayonlarni ham tavsiflaydi.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning qo'yilishi

Chekli l uzunlikka ega va Ox o'qining $0 \leq x \leq l$ kesmasida joylashgan sterjen berilgan bo'lsin. Bunday sterjenda issiqlikning tarqalishi haqidagi masalani qo'yish uchun

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

tenglama va

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

boshlang'ich shartdan tashqari chegaraviy shartlar ham berilishi kerak bo'ladi.

Sterjenning $x = 0$ va $x = l$ uchlarida uning harorati yoki issiqlik oqimining zichligi ma'lum bo'lishi yoki atrof-muhit bilan issiqlik almashinish shartlarini berish mumkin. Bunda chegaraviy shartlar asosan uch turda beriladi.

Birinchi chegaraviy shartlarda sterjenning chetlarida

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t)$$

temperatura beriladi, bu yerda $\mu_1(t), \mu_2(t)$ —jarayon o'rganilayotgan $0 \leq t \leq T$ vaqt oralig'ida berilgan funksiyalar.

Ikkinchi turdagi chegaraviy shartlarda sterjenning uchlarida

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \gamma_2(t)$$

hosilalar beriladi. Bu shart agar sterjenning ko'ndalang kesimi bo'ylab o'tayotgan Q issiqlik oqimi berilganida ro'y beradi. Masalan $x = l$ uchun $Q(l, t)$ berilgan bo'lsa, u holda

$$Q(l, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$$

bo‘ladi. Bundan $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = v(t)$ kelib chiqadi, bu yerda $v(t) = -Q(l, t)/k$. Agar $\gamma_1(t)$ (yoki $\gamma_2(t)$) aynan nolga teng bo‘lsa, u holda sterjenning mos uchlarida izolyatsiyalangan deyiladi.

Uchinchi turdagi chegaraviy shartlarda sterjenning chetlarida funksiya va uning hosilasi orasidagi chiziqli moslik

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda(u(0, t) - p(t)), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \lambda(u(l, t) - p(t))$$

ko‘rinishda beriladi, bu yerda $p(t)$ – atrof muhit temperaturasi, λ – issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti. Bu chegaraviy shart Nyuton qonuniga ko‘ra temperaturasi $p(t)$ bo‘lgan atrof-muhit bilan jism sirtidagi issiqlik almashinishiga mos keladi.

Yuqorida keltirilgan chegaraviy shartlardan boshqa ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar ham berilishi mumkin. Masalan, sterjenning har xil uchlarida turli ko‘rinishdagi chegaraviy shartlar berilishi mumkin.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi turdagi chegaraviy shartlar bilan berilgan aralash masalani o‘rganish bilan chegaralanamiz.

Berilgan chekli $D = \{(x, t): 0 < x < l, 0 \leq t \leq T\}$ sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (17.38)$$

tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (17.38a)$$

boshlang‘ich shartni va

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) \quad (17.38b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ikki marta differensiallanuvchi $u(x, t)$ yechimini topish masalasi *birinchi chegaraviy masala* deb yuritiladi. Bu yerda $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – berilgan funksiyalar yetarlicha silliq deb faraz qilinadi.

Biz izlayotgan $u(x, t)$ yechim $\bar{D}$ yopiq sohada uzluksiz funksiya deb faraz qilamiz va shuning uchun berilgan $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ funksiyalar uzluksiz va ular uchun $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(l)$ shartlar bajarilishini talab qilamiz.

U holda (17.38), (17.38a), (17.38b) masala $u(x, t)$ yechimining yagona ekanligini ekstremum prinsipi yordamida ko'rsatamiz. Ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

17.5-Teorema (Ekstremum prinsipi). Yopiq $\bar{D}$ sohada uzluksiz bo'lgan va D soha ichida bir jinsli

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga Γ chiziqda erishadi.

Bu yerda Γ qaralayotgan D to'rtburchakning $t = 0$, $x = 0$ va $x = l$ chiziqlar ustida yotgan chegaralarining yig'indisi.

Ekstremum prinsipidan foydalanib, (17.38), (17.38a), (17.38b) birinchi chegaraviy masala yechimining yagonaligi va turg'unligini ifodalovchi quyidgi teoremlarini isbotsiz keltiramiz.

17.6-Teorema. Agar issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu yechim yagona bo'ladi.

17.7-Teorema. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalaning yechimi $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, va $\mu_2(t)$ funksiyalarga uzluksiz bog'liq bo'ladi.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi

Bir jinsli

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty \quad (17.39)$$

issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (17.39a)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ yechimini topish masalasini (Koshi masalasini) qaraymiz. Bu yerda $\varphi(x)$ – uzluksiz va chegaralangan funksiya.

Bu masala ushbu fizik ma'noga ega: bir jinsli cheksiz sterjenning boshlang'ich $t = 0$ vaqtdagi ma'lum $\varphi(x)$ temperaturasiga asosan istalgan $t > 0$ vaqtdagi temperaturasini toping. Bunda sterjenning yon sirti issiqlikdan izolyatsiyalangan, ya'ni sterjenning yon sirti bo'ylab tashqi muhit bilan issiqlik almashinish bo'lmaydi.

(17.39) tenglamaning xususiy yechimini

$$u(x, t) = T(t)X(x)$$

ko'paytma ko'rinishda qidiramiz.

Bu ko'rinishdagi yechimni (19.39) tenglamaga qo'yib, ushbu

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x)$$

yoki

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (17.39b)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(17.39b) tenglikning o'ng tomoni x o'zgaruvchiga, chap tomoni esa t o'zgaruvchiga bog'liq. Argument qiymatlarini o'zgarishi bilan, bu (17.39b) nisbat qiymati o'zgaras bo'ib qolaveradi. Bu qiymatni biz $-\lambda^2$ bilan belgilaymiz va

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

tenglikdan

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Ikkinchi tenglama yechimi $T(t)$ ifodasi oldidagi o'zgaras ko'paytuvchini birga teng deb, $T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$, $X(x)$ yechimni esa $X(x) = A(\lambda)e^{i\lambda x}$ ko'rinishda olamiz. U holda (17.39b) tenglamaning xususiy yechimi

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} \quad (17.39c)$$

bo‘ladi. Bu yerda λ ixtiyoriy: $-\infty < \lambda < +\infty$ haqiqiy son. (17.39c) tenglikni λ parametr bo‘yicha integrallab (17.39) tenglamaning yechimini hosil qilamiz

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda. \quad (17.39d)$$

(17.39a) boshlang‘ich shartdan

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i \lambda x} d\lambda$$

ni hosil qilamiz. Endi biz Furiye integralining teskari almashtirish formulasidan foydalanamiz

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i \lambda \xi} d\xi.$$

Bu funktsiyani (17.39d) formulaga qo‘yib, integrallash tartibini o‘zgartirib

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i \lambda \xi} d\xi \right] e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda \right] \varphi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (17.39e)$$

ega bo‘lamiz. (17.39e) integraldagi ichki integral uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda (x - \xi)} d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}} \quad (17.39f)$$

tenglik o‘rinli.

(17.39f) ifodani (17.39e) tenglikga qo‘yib integral ko‘rinishdagi yechimni hosil qilamiz:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

bu yerda

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}}. \quad (17.40)$$

(17.40) funksiya issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining *fundamental yechimi* deyiladi.

Agar boshlang'ich $t = 0$ vaqtda $x = \xi$ nuqtada $Q = c\rho$ miqdordagi issiqlik ajralib chiqadigan bo'lsa, $G(x, \xi, t)$ fundamental yechim cheksiz sterjenda temperaturaning taqsimlanishini beradi.

17.8-Teorema. $-\infty < x < +\infty$ sohada ixtiyoriy $\varphi(x)$ chegaralangan uzluksiz funksiya uchun (17.39), (17.39a) Koshi masalasi yagona yechimga ega va u

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda, \quad t > 0 \quad (17.41)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(17.41) formula *Puasson integrali* deb ataladi.

17.14-Misol. Koshi masalasini yeching:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2. \end{cases}$$

► $\varphi(x)$ funksiya $x_1 < x < x_2$ oraliqda o'zgarmas, uning tashqarisida nol bo'lgani uchun (17.41) formulaga asosan:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda.$$

Olingan natijani ehtimollik integraliga almashtirishimiz mumkin:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\mu^2} d\mu.$$

$(x - \xi)/2a\sqrt{t} = \mu$, $d\xi = -2a\sqrt{t}d\mu$ ekanligini e'tiborga olib $u(x, t)$ funksiyaning

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{(x-x_1)/2a\sqrt{t}}^{(x-x_2)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_1)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(x-x_2)/2a\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. U holda yechim

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$$

formula orqali ifodalanadi. ◀

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamalarini Furiye usuli bilan yechish

Chekli sterjenda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan (17.38), (17.38a), (17.38b) chegaraviy masala yechimining mavjudligini o'zgaruvchilarni ajratish usuli, ya'ni Furiye usuli bilan isbotlaymiz.

Uchlari o'zgarmas haroratda bo'lgan sterjenda issiqlik tarqalishi

Biz D sohada bir jinsli

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, 0 < x < l \quad (17.42)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.42a)$$

boshlang'ich va

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (17.42b)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Qaralayotgan (17.42), (17.42a), (17.42b) masala bir jinsli sterjenda issiqlik tarqalish jarayonining matematik modeli bo'lib, sterjenning uchlari doim nol darajadagi haroratni saqlaydi.

(17.42) tenglamaning D sohada xususiy yechimlarini

$$u(x, t) = T(t)X(x) \neq 0, \quad (17.43)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Bu ko'rinishdagi yechimni (17.42) tenglamaga qo'yib

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

yoki

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bundan esa quyidagi ikkita chiziqli oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (17.43a)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (17.43b)$$

(17.42) issiqlik tarqalish tenglamasining notrivial (17.43) ko‘rinishdagi $u(x, t)$ yechimini topish uchun (17.43b) oddiy differensial tenglamaning quyidagi

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (17.43c)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $X(x)$ yechimini topish zarur. Bu masala chegaralangan bir jinsli torning ko‘ndalang tebranishi haqidagi masalada o‘rganilgan edi. Ma’lumki, bu masala λ parametrning

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

xos qiymatlarida

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yechimlarga ega bo‘ladi.

λ parametrning $\lambda = \lambda_n$ qiymatlariga mos (17.43a) tenglamaning yechimlari

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

ko‘rinisha bo‘ladi, bu yerda A_n –ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Shunday qilib, quyidagi barcha

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.43d)$$

funksiyalar qaralayotgan (17.42) tenglamani va (17.42b) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu funksiyalardan ushbu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (17.43e)$$

qatorni tuzamiz.

(17.43e) yechim (17.42a) boshlang‘ich shartni qanoatlantirishi kerak, ya’ni

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Agar $\varphi(x)$ funksiya $(0, l)$ oralliqda sinuslar bo‘yicha Furiye qatoriga yoyilsa,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi$$

koeffitsiyentlarni topamiz.

Shunday qilib, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun yechim quyidagi cheksiz yig'indi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (17.44)$$

ko'rinishida bo'ladi.

17.9-Teorema. $\varphi(x)$ funksiya $[0, l]$ kesmada uzluksiz birinchi tartibli hosilaga ega va $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ bo'lsin. U holda (17.42), (17.42a), (17.42b) masalaning yagona yechimi mavjud bo'lib, u mutlaq va tekis yaqinlashuvchi (17.44) qator ko'rinishida bo'ladi.

(17.44) yechimni

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

ko'rinishda belgilaymiz. Bu yerda funksiya

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}$$

nuqtaviy manbaning oniy funksiyasi deyiladi.

$G(x, \xi, t)$ funksiyaning fizik ma'nosi shundan iboratki, agar $t = 0$ bo'lganda harorat nolga teng bo'lib va ayni shu paytda $x = \xi$ nuqtada biror Q miqdordagi issiqlik ajralib tursa, sterjenning chetki nuqtalarida nolga teng bo'lgan harorat doimiy ravishda ushlab turiladigan bo'lsa, argumentning funksiyasi sifatida $0 \leq x \leq l$ sterjendagi vaqtning t momentdagi issiqlik tarqalishini o'zida aks ettiradi.

17.15-Misol.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, 0 < x < l$$

bir jinsli tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq l/2, \\ l - x, & l/2 \leq x < l \end{cases}$$

boshlang'ich shart va

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

► (17.43e) formuladagi A_n –koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \xi \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l - \xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi.$$

Bo'laklab integrallab,

$$\begin{aligned} A_n &= \left| \begin{array}{l} u = \xi, \\ dv = \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \end{array} \quad \begin{array}{l} du = d\xi \\ v = -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} \xi \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{l} \left(-\frac{l\xi}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} \xi + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right) \Big|_0^{l/2} + \\ &+ \frac{2}{l} \left(-\frac{l^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} \xi + \frac{l\xi}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} \xi - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right) \Big|_{l/2}^l = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{(-1)^{k-1} 4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \end{aligned}$$

koeffitsiyent uchun ifodaga ega bo'lamiz. (17.44) formulaga ko'ra yechim

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}t} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l}x$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

Bir jinsli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi

Ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, 0 < x < l \quad (17.45)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.45a)$$

boshlang'ich sharti va

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0 \quad (17.45b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini ko'ramiz.

$f(x, t)$ funksiya uzluksiz va x o'zgaruvchisi bo'yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega, barcha $t > 0$ uchun $f(0, t) = f(l, t) = 0$ shart bajariladi deb faraz qilamiz.

Bu masalaning $u(x, t)$ yechimini

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (17.46)$$

yig'indi ko'rinishda izlaymiz.

Bunda $v(x, t)$ funksiya

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (17.47)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning

$$v|_{t=0} = 0 \quad (17.47a)$$

boshlang'ich shartni va

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad (17.47b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi.

$w(x, t)$ funksiya esa,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (17.48)$$

bir jinsli tenglamaning

$$w|_{t=0} = \varphi(x) \quad (17.48a)$$

boshlang'ich sharti va

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad (17.48b)$$

kabi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi.

(17.48), (17.48a), (17.48b) masalaning yechimini topish oldingi bandda ko'rsatilgan bo'lgani uchun (17.47), (17.47a), (17.47b) masalani qaraymiz.

Bu masalaning yechimini

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.49)$$

ko‘rinishda izlaymiz.

$f(x, t)$ funksiyani Furiye qatori ko‘rinishida yozamiz, ya’ni

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi. \quad (17.50)$$

(17.49) va (17.50) qatorlarni (17.47) tenglamaga qo‘yib

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 v_n(t) + \frac{\partial v_n(t)}{\partial t} - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Agar yoyilmaning har bir koeffitsiyentlari nolga teng bo‘lsa, u holda bu yuqoridagi tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\frac{\partial v_n(t)}{\partial t} = - \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 v_n(t) + f_n(t) \quad (17.51)$$

$v_n(t)$ funksiyani aniqlash uchun biz o‘zgarmas koeffitsiyentli oddiy differensial tenglamani hosil qildik.

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

(17.47a) boshlang‘ich shartdan

$$v_n(0) = 0 \quad (17.51a)$$

ekanligi kelib chiqadi.

(17.51a) shart (17.51) tenglamaning yechimini to‘liq aniqlaydi, shuning uchun

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \quad (17.51b)$$

Shunday qilib, (17.47), (17.47a), (17.47b) masalaning yechimini (17.49) va (17.51b) formulalardan quyidagicha yozamiz:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.51c)$$

U holda (17.45), (17.45a), (17.45b) masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17.52)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

17.16-Misol. Issiqlik o‘tkazuvchanlik masalasini yeching:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin 3x, t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi, u|_{t=0} = 2 \sin 2x, u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0.$$

► Masalaning shartiga ko‘ra $f(x, t) = t \sin 3x$, $\varphi(x) = 2 \sin 2x$. (17.43e) va (17.49) yechimlardagi A_n va $v_n(t)$ koefitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2\xi \sin n\xi d\xi = |n = 2| = 2.$$

$v_n(t)$ koefitsiyentni aniqlash uchun

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

ni hisoblaymiz:

$$f_n(t) = \frac{2t}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3\xi \sin n\xi d\xi = |n = 3| = t.$$

Bo‘laklab integrallash usuli bilan $v_n(t)$ koefitsiyentni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \tau \\ dv = e^{\tau} d\tau \end{array} \right|_{v = e^{\tau}} = \\ &= e^{-t} (\tau e^{\tau} - e^{\tau}) \Big|_0^t = e^{-t} (te^t - e^t + 1) = t - 1 + e^{-t}. \end{aligned}$$

U holda topilganlarni e‘tiborga olib berilgan masalaning yechimini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$u(x, t) = 2e^{-\frac{4}{9}t} \sin 2x + (t - 1 + e^{-t}) \sin 3x. \blacktriangleleft$$

**Bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir jinsli
bo‘lmagan chegaraviy shartlar**

Ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, 0 < x < l \quad (17.53)$$

bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (17.53a)$$

boshlang‘ich sharti va

$$u|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad u|_{x=l} = \gamma_2(t), \quad t \geq 0 \quad (17.53b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ yechimini toping.

(17.53b) chegaraviy shart bir jinsli bo‘lmaganligi sababli Furiye usulini to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llab bo‘lmaydi. Shu sababli (17.53), (17.53a), (17.53b) masalaning yechimini

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (17.54)$$

yig‘indi ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda

$$w(x, t) = \gamma_1(t) + (\gamma_2(t) - \gamma_1(t))x/l \quad (17.54a)$$

ko‘rinishda tanlashimiz mumkin.

U holda (17.53), (17.53a), (17.53b) masalaning yechimi $v(x, t)$ funksiya uchun (17.45), (17.45a), (17.45b) masalaning yechimiga kiritiladi.

17.17-Misol. Aralash masalani Furiye usuli bilan yeching.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2x, \quad t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u|_{t=0} = \sin 3x, \quad u|_{x=0} = e^t, \quad u|_{x=l} = e^{2t}.$$

► Masalaning shartiga ko‘ra $\gamma_1(t) = e^t$, $\gamma_2(t) = e^{2t}$. Yordamchi funksiya kiritamiz

$$w(x, t) = \gamma_1(t) + (\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) \frac{x}{l} = e^t + (e^{2t} - e^t) \frac{x}{\pi}.$$

Bu funksiya uchun

$$w|_{x=0} = e^t, \quad w|_{x=l} = e^{2t}.$$

Berilgan masalaning yechimini

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (17.55)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $v(x, t)$ –noma’lum funksiya.

Bu funksiya uchun

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sin 2x, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$v|_{t=0} = \sin 3x, \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0$$

bo‘ladi.

Bu masalada berilganlar $f(x, t) = \sin 2x$, $\varphi(x) = \sin 3x$ bo‘ladi. (17.43e) va (17.49) yechimlardagi A_n va $v_n(t)$ koefitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 3\xi \sin n\xi d\xi = |n = 3| = 1.$$

Bu yerda ham $v_n(t)$ koefitsiyentni aniqlash uchun $f_n(t)$ koefitsiyentni hisoblaymiz:

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin 2\xi \sin n\xi d\xi = |n = 2| = 1.$$

$v_n(t)$ koefitsiyentni aniqlaymiz:

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau = \int_0^t \tau e^{-16(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{16} (1 - e^{-16t}).$$

U holda topilganlarni e’tiborga olib berilgan masalaning yechimini (17.55) formulaga asosan

$$u(x, t) = \frac{1}{16} (1 - e^{-16t}) \sin 2x + e^{-6t} \sin 3x + e^t + (e^{2t} - e^t) \frac{x}{\pi}$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. ◀

17.10. Elliptik turdagi tenglamalar. Elliptik turdagi tenglamaga keltiruvchi masalalar

Siqilmaydigan suyuqlikning potensial harakati

Faraz qilaylik, suyuqlik $\vec{v} = v(x, y, z, t)$ tezlik bilan harakatlansin. Sirt bilan chegaralangan suyuqlikning biror ixtiyoriy fiksirlangan V hajmini qaraylik. Bu hajmda joylashgan suyuqlikning m massa, $\rho(x, y, z, t)$ zichlik bilan quyidagi munosabatda bog'langan

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dV \quad (17.56)$$

Bu massa suyuqlik oqimining S sirtidan o'tishi hisobiga o'zgarishi mumkin, shu bilan birgalikda

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS, \quad (17.57)$$

bu yerda $\vec{n}$ vektor S sirtning tashqi normali. U holda (17.56) va (17.57) tenglamalardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_S \rho \vec{v} \vec{n} dS \quad (17.58)$$

Sirt integralini Ostgradskiy formulasi bo'yicha almashtirib (17.58) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0.$$

Bundan, ajratilgan V hajmning ixtiyoriyligidan quyidagi munosabat kelib chiqadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0.$$

Bu tenglama *tutash muhitning uzluksizlik tenglamasi* deb ataladi. Siqilmaydigan suyuqliklar uchun zichlik $\rho = \text{const}$ va uzluksizlik tenglamasidan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (17.59)$$

$\vec{v} = v(x, y, z)$ uchun siqilmaydigan suyuqlikning barqarorlashgan oqimini qaraymiz. Agar bu oqim uyurmasiz bo'lsa, u holda $u(x, y, z)$ tezlik potentsialli mavjud bo'lib, u quyidagiga teng

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} u,$$

yoki

$$\Delta u = 0 \quad (17.60)$$

ya'ni tezlik potentsialli Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

Elektrostatik maydonning potentsialli tenglamasi

Dielektrik o'tkazuvchanlik muhitida, elektrik maydon bu $\vec{E}(x, y, z)$ maydonning kuchlanganligini tavsiflaydi. Vakumdagi elektrostatik maydon uchun Gauss teoremasini yozamiz

$$\oint_S \vec{E} \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (17.61)$$

Bu yerda ϵ_0 o'zgarmas SI sistemasidagi elektr doimiysi; $\rho(x, y, z)$ – elektr zaryadlarining hajmiy zichligi; V – yopiq S sirt bilan chegaralangan fazoning biror hajmi. Ostrogradskiy formulasi yordamida (17.61) munosabatni differensial formaga keltiramiz

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (17.61a)$$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ maydon kuchlanganligining shu maydon potentsiali $u(x, y, z)$ bilan bog'liqligini e'tiborga olib, (17.61a) munosabatdan elektrostatik maydonning potentsiali uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\Delta u = -f, \quad f = f(x, y, z) = \rho(x, y, z) / \epsilon_0. \quad (17.62)$$

Bir jinsli bo'lmagan (17.62) tenglama *Puasson tenglamasi* deb ataladi, bu yerda $f(x, y, z)$ – berilan funksiya.

Magnitostatik maydon tenglamasi

O'zgarmas magnit o'tkazuvchanlikka ega muhitda magnit maydon kuchlanganligi $\vec{H}(x, y, z)$ vaqtga bog'liq bo'lmasa, u holda bu maydon uchun quyidagi magnitostatik tenglamalar o'rinalidir:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (17.63)$$

bu yerda $\vec{j}(x, y, z)$ – tok o'tkazuvchanlik zichligi.

Vektor potentsialli moslashtirishning $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ qo'shimcha sharti asosida $\vec{H}(x, y, z)$ kuchlanganlik bilan $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ munosabatda bog'langan $\vec{A}(x, y, z)$ vektorli potentsialni kiritamiz. U holda (17.63) ning birinchi tenglamasi aynan bajariladi, ikkinchisidan esa quyidagini topamiz

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{j}. \quad (17.63a)$$

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$ shartni e'tiborga olib, vektor analizdan ma'lum bo'lgan

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

formulaga asosan (17.63a) dan vektor potentsiali uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j} \text{ yoki } \begin{cases} \Delta A_x = -j_x(x, y, z); \\ \Delta A_y = -j_y(x, y, z); \\ \Delta A_z = -j_z(x, y, z). \end{cases}$$

Shunday qilib, $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ vektorning komponentalari Puasson tenglamasini qanoatlantiradi, bu yerda $j_x(x, y, z)$, $j_y(x, y, z)$, $j_z(x, y, z)$ —berilgan funksiyalar.

Laplas va Puasson tenglamalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bo'lib, elliptik turdagi tenglamalarga tegishlidir. Bunday tenglamalarga bir jinsli jismlarning stasionar issiqlik holati haqidagi, barqaror diffuzion jarayonlar haqidagi, tortishish maydonining potentsiali haqidagi va boshqa bir qancha masalalar keltiriladi.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning qo'yilishi

Fazoning S sirt bilan chegaralangan V sohasida Laplas tenglamasi

$$\Delta u = 0$$

yoki Puasson tenglamasiga

$$\Delta u = -f(x, y, z)$$

bo'ysinuvchi biror $u(x, y, z)$ fizik kattalikni topish talab qilinsin. Shu bilan birgalikda chegaraviy shartlardan biri berilgan bo'lishi kerak (ya'ni chegaraviy masala qo'yilgan bo'lishi kerak). Ulardan asosiylarini ko'rib chiqamiz.

Agar sohaning chegaralarida noma'lum funksiyaning o'zi berilgan bo'lsa, u holda birinchi chegaraviy masala yoki Dirixle masalasi qo'yilgan bo'ladi, ya'ni

$$u|_S = f_1(x, y, z).$$

Agar sohaning chegarasida tashqi normalning yo'nalishi bo'yicha noma'lum funksiyaning hosilasi berilgan bo'lsa, ikkinchi chegaraviy masala qo'yilgan bo'ladi, yani

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f_2(x, y, z).$$

Agar sohaning chegarasida noma'lum funksiya va uning tashqi normal bo'yicha yo'nalgan hosilasining kombinatsiyasi berilgan bo'lsa, uchinchi chegaraviy masala qo'yilgan bo'ladi, ya'ni

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_S = f_3(x, y, z).$$

Sanab o'tilgan klassifikasiyalardan tashqari chegaraviy masalalar ichki (agar V soha S sirtning ichida yotsa) va tashqi (agar V soha S sirtning tashqarisida yotsa) chegaraviy masalalarga bo'linadi.

Garmonik funksiya va uning xossalari

S sirt bilan chegaralangan $V \subset R^3$ soha berilgan bo'lsin.

17.4-Ta'rif. Agar $u(x, y, z)$ funksiya uchun

1. Birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda $\bar{V}$ sohada uzluksiz;
2. V sohaning ichida ikkinchi tartibli hosilalari uzluksiz;
3. Ixtiyoriy $(x, y, z) \in V$ nuqtada Laplas tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u *garmonik funksiya* deb ataladi.

Garmonik funksiyalar qator ajoyib xossalarga ega bo'lib, biz ularni teoremlar shaklida va isbotsiz keltiramiz:

17.10-Teorema (manbaning yo‘qligi). Agar $u(x, y, z)$ funksiya S sirt bilan chegaralangan V sohada garmonik bo‘lsa, u holda

$$\oint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (17.64)$$

bu yerda σ integrallash sohasi S sirtida yotuvchi ixtiyoriy yopiq sirt.

17.11-Teorema (o‘rta qiymat haqida). Agar $u(x, y, z)$ funksiya V sohada garmonik bo‘lib, M_0 nuqta V sohaning uchki nuqtasi bo‘lsin, u holda

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\Sigma_a} u d\sigma \quad (17.65)$$

o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda Σ_a integrallash sohasi V sohada yotuvchi markazi M_0 nuqtada, radiusi a qiymatga teng bo‘gan sfera.

Demak, garmonik funksiyaning sfera markazidagi qiymati sferaning sirti bo‘yicha o‘rta qiymatiga teng.

O‘rta qiymat haqidagi teoremani quyidagicha ham bayon qilish mumkin. (17.65) formulani radiusi $\rho < a$ dan kichik sfera uchun yozamiz:

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \oint_{\Sigma_a} u d\sigma$$

va uni 0 dan a gacha ρ o‘zgaruvchi bo‘yicha integrallaymiz

$$\frac{4}{3}\pi a^2 u(M_0) = \oint_{V_a} u dV,$$

yoki

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \oint_{V_a} u dV$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, garmonik funksiyaning shar markazidagi qiymati sharining hajmi bo‘yicha o‘rta qiymatiga teng bo‘lar ekan.

17.12-Teorema (maksimal qiymat prinsipi). V soha va uning S chegarasida garmonik $u(x, y, z)$ funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga faqat S sirtida ega bo‘lishi mumkin.

Natija. Agar u va U funksiyalar V sohada garmonik, $\bar{V}$ da uzluksiz va S sirtida $u < U$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda V sohaning hamma nuqtalarida ham bu tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Laplas tenglamasi uchun to‘g‘ri to‘rtburchakdagi chegaraviy masala

Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masalalar to‘g‘ri to‘rtburchakda o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechiladi. Buning uchun Dirixle masalasini to‘g‘ri to‘rtburchak uchun qaraymiz:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (17.66)$$

Laplas tenglamasining

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad (17.66a)$$

$$u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x) \quad (17.66b)$$

chegaraviy shrtlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimini toping.

(17.66), (17.66a), (17.66b) masalani bitta o‘zgaruvchisi bo‘yicha bir jinsli bo‘lgan ikkita masalaga ajratamiz. Bu maslaning yechimini

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu yerda u_1 va u_2 quyidagi

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0,$$

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=a} = 0, \quad \text{va} \quad u_2|_{y=0} = 0, \quad u_2|_{y=b} = 0,$$

$$u_1|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u_1|_{y=b} = \psi_2(x) \quad u_2|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u_2|_{x=a} = \varphi_2(y)$$

masalalarning to‘g‘ri to‘rtburchakdagi yechimlari. Ushbu masalalarning har birini standart masala deb ataymiz.

$u_1(x, y)$ funksiya uchun standart masalani qaraymiz.

Laplas tenglamasning yechimini

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (17.67)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bu yechim bir jinsli

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0, \quad (17.67a)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantirsin.

(17.67) yechimni Laplas tenglamasiga qo'yib va o'zgaruvchilarni ajratib $X(x)$ va $Y(y)$ funksiyalar uchun

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (17.68)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (17.69)$$

tenglamalarni hosil qilamiz.

(17.67a) shartni e'tiborga olsak, $X(x)$ uchun

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < a,$$

$$X(0) = X(a) = 0, X(x) \neq 0,$$

Shturm-Liuvil masalasiga kelamiz. (17.68) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

kabi aniqlanadi. Bu yechim

$$X(0) = X(a) = 0 \quad (17.68a)$$

shartlarni qanoatlantirishi, ya'ni

$$C_1 = 0, \quad C_1 \cos \sqrt{\lambda}a + C_2 \sin \sqrt{\lambda}a = 0$$

bo'lishi kerak. Demak, (17.68) tenglama notrivial yechimga ega bo'lishi uchun

$C_2 \neq 0$ va $\sin \lambda a = 0$ bo'lishi kerak. Bundan

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, X_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

kelib chiqadi.

$\lambda = \lambda_n$ bo'lganda (17.69) tenglamaning umumiy yechimini

$$Y(y) = Y_n(y) = A \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} y + B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} (b - y)$$

ko'rinishda yozamiz. Shunday qilib, Laplas tenglamasining xususiy yechimining tuzulishi

$$u_n(x, y) = \{A_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} y + B_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (b - y)\} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.70)$$

ko'rinishda bo'ladi.

u_1 funksiya uchun standart masala yechimining (17.70) sistema bo'yicha yoyilmasini

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \frac{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}y}{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}b} + B_n \frac{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}(b-y)}{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}b} \right\} \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (17.70a)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda koeffitsiyentlar chegaraviy masalalardan

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_1(x) \sin \sqrt{\lambda_n}x dx, \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \psi_2(x) \sin \sqrt{\lambda_n}x dx \quad (17.70b)$$

aniqlanadi. Demak, $u_1(x, y)$ funksiya uchun standart masalaning yechimi (17.70a) va (17.70b) formulalar orqali beriladi.

Xuddi shu yo'l bilan $u_2(x, y)$ funksiya uchun standart masala yechiladi. Bu masalaning yechimi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \frac{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}x}{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}a} + D_n \frac{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}(b-x)}{\text{sh}\sqrt{\lambda_n}a} \right\} \sin \sqrt{\lambda_n}y \quad (17.71)$$

bo'ladi. Bu yerda $\lambda_n = (\pi n/a)^2, n = 1, 2, \dots$,

$$D_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_1(y) \sin \sqrt{\lambda_n}y dy, \quad C_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_2(y) \sin \sqrt{\lambda_n}y dy.$$

Demak, (17.66), (17.66a), (17.66b) masalaning yechimi

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

ko'rinishda bo'lib, u_1 va u_2 funksiyalar (17.70a) va (17.71) formulalar bilan aniqlanadi.

Xuddi shunday Laplas tenglamasi uchun to'g'ri to'rtburchakning chegaralari o'zgarganda ham masalani yechish mumkin.

17.18-Misol. Laplas tenglamasining to'g'ri ro'rtburchakning ichki qismida

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, & 0 \leq y \leq 1, \\ u|_{y=0} &= 0, \quad u|_{y=2} = \sin \frac{\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

► Masala yechimini (17.70a) va (17.71) formulalar ko‘rinishida aniqlaymiz.

Uning uchun koeffitsiyentlarini topamiz:

$$C_n = 0, D_n = 0, B_n = \frac{2}{2} \int_0^a \psi_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{2}{2} \int_0^2 0 \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x dx = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{2} \int_0^a \psi_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{2}{2} \int_0^2 \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{n\pi}{2} x dx = 1$$

Bundan berilgan masalaning yechimi (17.167) formulaga ko‘ra

$$u(x, y) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} x$$

ko‘rinishda bo‘ladi. ◀

Dirixle masalasini halqa uchun yechish

Markazi koordinatalar boshida, radiuslari R_1 va R_2 bo‘lgan ikkita L_1 va L_2 konsentrik aylana orasida joylashgan sohada Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimini topish masalasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2, \\ u|_{L_1} = f_1, \quad u|_{L_2} = f_2. \end{cases}$$

Bu masalani qutb koordinatalar sistemasida kurib chiqamiz:

Qutb koordinatalarida berilgan

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, R_1 < \rho < R_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (17.72)$$

Laplas tenglamasining

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi) \quad (17.72a)$$

davriylik shartini va

$$u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi) \quad (17.72b)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\rho, \varphi)$ yechimini toping. Bu yerda chegaraviy $f_1(\varphi)$ va $f_2(\varphi)$ funksiyalarni 2π davriy funksiyalar deb olamiz.

Masalaning yechimini Furye usulida topamiz. Yechimni $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ko'rinishda izlaymiz. $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ funksiyani (17.72) tenglamaga qo'yib, tenglamani o'zgartirib

$$\Phi\rho^2R'' + \Phi\rho R' + R\Phi'' = 0$$

ko'rinishga keltiramiz. Tenglamaning ikkala tomonini $R\Phi$ ifodaga bo'lib,

$$\frac{\rho^2R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} \quad (17.73)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning o'ng tomoni ρ va chap tomoni φ o'zgaruvchilarga bog'liq. ρ va φ o'zgaruvchilar bir-biriga bog'liq bo'lmagani sababli (17.73) tenglamaning har biri qismi o'zgarmas bo'ladi. Bu o'zgarmasni λ bilan belgilaymiz. U holda

$$\frac{\rho^2R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \quad (17.73a)$$

bo'ladi. Bundan ikkita oddiy differensialtenglamani hosil qilamiz:

$$\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \quad (17.74)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \quad (17.75)$$

$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$ davriylikni bajarilish shartidan $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, ya'ni $\Phi(\varphi)$ funksiyaning davri 2π bo'lgan davriy funksiyaligi kelib chiqadi.

$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ tenglamaning yechimi $\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$ bo'lib, $\Phi(\varphi)$ funksiyaning davriyligidan $\lambda = n^2$, ($n \geq 0$ –butun son) kelib chiqadi. (17.74) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\rho^2R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2R(\rho) = 0. \quad (17.74a)$$

Agar $n \neq 0$ bo'lsa, u holda (17.74a) tenglamaning yechimini $R(\rho) = \rho^\alpha$ ko'rinishda izlaymiz. Uni (17.74a) tenglamaga qo'yib va ρ^α ifodaga qisqartirib quyidagini topamiz:

$$\alpha^2 = n^2 \text{ yoki } \alpha = \pm n \quad (n > 0)$$

$n = 0$ bo'lganda (17.74a) tenglama

$$R(\rho) = A_0 \ln \rho + B_0 \quad (17.74b)$$

yechimga ega bo‘ladi. $n \neq 0$ bo‘lganda (17.74a) tenglamaning yechimi

$$R(\rho) = C\rho^n + \frac{D}{\rho^n}. \quad (17.74c)$$

U holda yechimlarning yig‘indisi ham yechim bo‘lishidan bizning holda Laplas tenglamasining yechimi

$$u(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n \rho^n + \frac{D_n}{\rho^n} \right) \sin n\varphi \right] \quad (17.75)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. So‘ngi yechimda noma’lum koefitsiyentlarni topish uchun $u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi)$, $u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi)$ chegaraviy shartlardan foydalanamiz. Buning uchun $f_1(\varphi)$ va $f_2(\varphi)$ funksiyalarni Furiye qatoriga yoyamiz:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \\ f_2(\varphi) &= c_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \end{aligned} \quad (17.76)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\tau) d\tau, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\tau) \cos n\tau d\tau, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\tau) \sin n\tau d\tau, \\ c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\tau) d\tau, c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \cos n\tau d\tau, d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\tau) \sin n\tau d\tau. \end{aligned} \quad (17.76a)$$

(17.72b) chegaraviy shartlardan foydalanib sinuslar va kosinuslar oldidagi koefitsiyentlarni tenglashtirib, quyidagi sistemalarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} A_0 \ln R_1 + B_0 = \frac{a_0}{2}, \\ A_0 \ln R_2 + B_0 = \frac{c_0}{2}. \end{cases} \begin{cases} A_n R_1^n + \frac{B_n}{R_1^n} = a_n, \\ A_n R_2^n + \frac{B_n}{R_2^n} = c_n. \end{cases} \begin{cases} C_n R_1^n + \frac{D_n}{R_1^n} = b_n, \\ C_n R_2^n + \frac{D_n}{R_2^n} = d_n. \end{cases} \quad (17.76b)$$

Bu sistemalardan noma’lum koefitsiyentlarni aniqlab va ularni (17.75) formulaga qo‘yib, (17.72), (17.72a), (17.72b) masalaning yechimini topamiz:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{c_0 - a_0}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} \ln \rho + \frac{a_0 \ln R_2 - c_0 \ln R_1}{2(\ln R_2 - \ln R_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(c_n R_2^n - a_n R_1^n) \rho^{2n} - (c_n R_1^n - a_n R_2^n) R_1^n R_2^n}{(R_2^{2n} - R_1^{2n}) \rho^n} \cos n\varphi + \right. \\
& \left. + \frac{(d_n R_2^n - b_n R_1^n) \rho^{2n} - (d_n R_1^n - b_n R_2^n) R_1^n R_2^n}{(R_2^{2n} - R_1^{2n}) \rho^n} \sin n\varphi \right) \quad (17.77)
\end{aligned}$$

17.19-Misol. Halqa chegaralarida o'zgarmas potensialga ega bo'lgan quyidagi masalani qaraymiz:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 2, u(2, \varphi) = 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

► Bu masalaning yechimini φ ga bog'liq bo'lmagan $u(\rho) = A_0 \ln \rho + B_0$ funksiya ko'rinishda izlaymiz. Bu funksiyaning berilgan chegaraviy shartlarga qo'yib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_0 \ln 1 + B_0 = 2, \\ A_0 \ln 2 + B_0 = 1. \end{cases}$$

Bu sistemadan $A_0 = -\log_2 e$, $B_0 = 2$ kelib chiqadi. Demak, berilgan masalaning yechimi

$$u(\rho) = 2 - \frac{\ln \rho}{\ln 2}$$

funksiyadan iborat bo'ladi. ◀

17.20-Misol. Dirixle masalasini yeching:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos 2\varphi, \quad u(2, \varphi) = 1 - \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

► Masala yechimining koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \sin 2\tau \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau \cos n\tau \, d\tau = |n = 2| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4\tau) \, d\tau = 1, \quad b_n = 0$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\tau + \frac{1}{4} \sin 4\tau \right) \Big|_0^{2\pi} = 1, \quad b_n = 0.$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \tau) \, d\tau = \frac{1}{\pi} (\tau + \cos \tau) \Big|_0^{2\pi} = 2. \quad c_n = 0.$$

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \tau) \sin n\tau d\tau = |n = 1| = -\frac{1}{\pi} \cos \tau \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\tau) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\tau - \frac{1}{2} \sin 2\tau \right) \Big|_0^{2\pi} = -1.$$

U holda (17.77) yechimga koʻra,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2-0}{2(\ln 2 - \ln 1)} \ln \rho + \frac{0-2 \ln 1}{2(\ln 2 - \ln 1)} + \frac{-\rho^2+4}{(4-1)\rho} \cos \varphi +$$

$$+ \frac{-\rho^2+2}{(4-1)\rho} \sin \varphi + \frac{-\rho^4+16}{(16-1)\rho^2} \cos 2\varphi + \frac{-4\rho^4+4}{(16-1)\rho^2} \sin 2\varphi =$$

$$= \frac{\ln \rho}{\ln 2} + \frac{4-\rho^2}{3\rho} \cos \varphi + \frac{2-\rho^2}{3\rho} \sin \varphi + \frac{16-\rho^4}{15\rho^2} \cos 2\varphi + \frac{4(1-\rho^4)}{15\rho^2} \sin 2\varphi.$$

hosil boʻladi. ◀

Dirixle masalasini doira uchun Furye usulida yechish

V soha markazi koordinatalar boshida, radiusi R teng boʻlgan doiradan iborat boʻlsin:

$$V = Q_R = \{(x, y) | x^2 + y^2 < R\},$$

$$\bar{V} = \bar{Q}_R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R\}.$$

Laplas tenglamasi uchun Q_R doirada Dirixle masalasini, yaʼni Q_R sohada ikki marta differensiallanuvchi, $\bar{Q}_R$ sohada uzluksiz, ixtiyoriy $(x, y) \in Q_R$ nuqtada

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi va doiraning chegarasida

$$u(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = R$$

qiymatni qabul qiluvchi $u(x, y)$ funksiyani topish masalasini qaraymiz.

Qutb koordinatalar sistemasida Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasini doirada quyidagicha ifodalash mumkin. $\rho < R$ doira ichida

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad -\infty < \varphi < \infty \quad (17.78)$$

Laplas tenglamasining

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi + 2\pi)$$

davriylik shartini va $\rho = R$ chegarada

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) \quad (17.78a)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiyani toping.

Masalaning yechimini

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \quad (17.78b)$$

ko'paytma ko'rinishda izlaymiz. (17.78b) yechimni (17.78) tenglamaga qo'yib

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} R(\rho) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Tenglamaning ikkala tomonini $\frac{1}{\rho^2} R(\rho)\Phi(\varphi)$ ifodaga bo'lib

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{R(\rho)} = - \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}{\Phi(\varphi)} \quad (17.79)$$

tenglamani hosil qilamiz. (17.79) tenglamaning o'ng tomon faqat φ o'zgaruvchining funksiyasi, chap tomoni esa faqat ρ – o'zgaruvchiniki. Shuning uchun (17.79) tenglikning o'ng va chap tomonlari argumentlarining o'zgarishida o'z qiymatlarini o'zgartirmaydi, ya'ni

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right)}{R(\rho)} = - \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}{\Phi(\varphi)} = \lambda \quad (17.79a)$$

Bu tenglikdan $R(\rho)$ funsiya quyidagi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \lambda R(\rho) = 0 \quad (17.80)$$

oddiy differensial tenglamaning yechimi, $\Phi(\varphi)$ funsiya uchun esa xos sonlar masalasiga kelimiz

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (17.81)$$

(17.81) masalaning noldan farqli davriy yechimlari xos sonning $\lambda = k^2, k = 0, 1, 2, \dots$ qiymatlarida mavjud bo'lib, u

$$\Phi(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin \varphi$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda A_k va B_k –ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

$\lambda = k^2$ bo'lganda (17.80) tenglamadan

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - k^2 R = 0 \quad (17.82)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning xususiy yechimini

$$R(\rho) = \rho^\alpha, \alpha = \text{const}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu yechimni (17.82) tenglamaga qo'yamiz va $\alpha = \pm k$ tengligini aniqlaymiz. Demak, (17.82) tenglamaning xususiy yechimi $R(\rho) = \rho^k$ yoki $R(\rho) = \rho^{-k}$ bo'ladi. (17.78) tenglamaning xususiy yechimi (17.78b) formulaga ko'ra

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin \varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ko'rinishda yozish mumkin. (17.82) tenglama chiziqli va bir jinsli bo'lgani sababli uning xususiy yechimlari yig'indisi ham berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi, ya'ni

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin \varphi). \quad (17.83)$$

(17.78a) chegaraviy shartni qanoatlantirib

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin \varphi) = f(\varphi) \quad (17.83a)$$

tenglikni hosil qilamiz.

$f(\varphi)$ funksiyani Furiye qatoriga yoyamiz

$$f(\varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin \varphi), \quad (17.84)$$

bu yerda a_0, a_k, b_k har doimgidek $f(\varphi)$ funksiyaning Furiye koeffitsiyentlari:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad (17.84a)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, k = 1, 2, \dots$$

(17.83a) va (17.84) qatorlarni taqqoslab

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \frac{a_k}{R^k}, \quad B_k = \frac{b_k}{R^k},$$

yoki

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, A_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, B_k = \frac{1}{\pi R^k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad (17.85)$$

formulalarni aniqlaymiz. Shunday qilib, Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimi $\rho < R$ doirada

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin \varphi) \quad (17.86)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda a_0, a_k, b_k –koeffitsiyentlar (17.84a) formulalar orqali aniqlanadi.

17.13-Teorema. $f(\varphi)$ funksiya $\rho = R$ doiraning chegarasida uzluksiz bo'lsin. U holda koeffitsiyentlari (17.84a) formulalar bilan aniqlangan (17.86) qatorning yig'indisi (17.78), (17.78a) masalaning yechimi bo'ladi.

Agar Dirixle masalasi doira tashqarisida qo'yilgan bo'lsa, u holda masalaning yechimi

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin \varphi) \quad (17.87)$$

ko'rinishda bo'lib, a_0, a_k, b_k – koeffitsiyentlar (17.84a) formulalar orqali aniqlanadi.

17.21-Misol. Birluk doira ichida garmonik bo'lgan va uning chegarasida x^2 qiymat qabul qiluvchi $u(x, y)$ funksiyani toping.

► Masala ushbu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 < 1,$$

Laplas tenglamasini

$$u(x, y) = x^2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 = 1$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimini topishga keltiriladi.

Qutb kordinatalar sistemasida Dirixle masalasi:

$$\Delta u = 0$$

Laplas tenglamasini $\rho = 1$ doira chegarasida

$$u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(\rho, \varphi)$ yechimini topish bilan ifodalanadi. (17.86) formulaga ko'ra yechim

$$u(\rho, \varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (17.88)$$

ko'rinishda bo'ladi. a_0, a_k, b_k – koeffitsiyentlarni (17.196) formulalar orqali aniqlanadi.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{\pi} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = 1.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \cos kt \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kt + \cos 2t \cos kt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \sin kt \right) \Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-2)t + \cos(k+2)t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{k-2} \sin(k-2)t + \frac{1}{k+2} \sin(k+2)t \right) \Big|_0^{\pi} = 0, \quad k \neq 2.$$

$k = 2$ bo'lganda

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \cos 2t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2t) \cos 2t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 4t) \, dt \right] = \frac{1}{2\pi} \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin kt \, dt = 0$$

Topilgan koeffitsiyentlarni (17.88) yechimga qo'yamiz va berilgan masalaning yechini topamiz

$$u(\rho, \varphi) = (1 + \rho^2 \cos 2\varphi)/2. \blacktriangleleft$$

(17.83) formulani almashtiramiz. A_k va B_k o'rniga (17.85) ifodalarini qo'yib va trigonometrik almashtirishlarni bajarib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t - \varphi) dt \left(\frac{\rho}{R}\right)^k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(t - \varphi) \right] dt. \end{aligned} \quad (17.89)$$

O'rta qavslardagi ifodani almashtiramiz

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \cos k(t - \varphi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k [e^{ik(t-\varphi)} + e^{-ik(t-\varphi)}] = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\rho}{R} e^{i(t-\varphi)}\right)^k + \left(\frac{\rho}{R} e^{-i(t-\varphi)}\right)^k \right] = \\ &= 1 + \frac{\frac{\rho}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{\rho}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{-i(t-\varphi)}} = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{\rho}{R} \cos(t - \varphi) + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(t - \varphi) + \rho^2}. \end{aligned} \quad (17.89a)$$

(17.89) formuladagi o'rta qavslar ichidagi ifodalarni (17.89a) ifoda bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(t - \varphi) + \rho^2} dt. \quad (17.90)$$

(17.90) formula *Puasson integrali* deyiladi. Bu formulani tahlil qilish yo'li bilan, agar $f(\varphi)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda (17.90) integral bilan aniqlangan $u(\rho, \varphi)$ funksiya (17.78) tenglamani qanoatlantirishi hamda $\rho \rightarrow R$ da $u(\rho, \varphi) \rightarrow f(\varphi)$ bo'lishi, ya'ni $u(\rho, \varphi)$ Dirixlening doira uchun qo'yilgan masalasining yechimi ekanligi isbotlanadi.

17.22-Misol. Yuqori yarmi 1^0 haroratda, pastki yarmi 0^0 haroratda saqlanadigan R radiusli tekis doiraviy plastinkada statsionar harorat taqsimotini toping.

► $f(t) = 0$ agar $-\pi < t < 0$ bo'lsa, $f(t) = 1$ agar $0 < t < \pi$ bo'lsa.

Haroratning taqsimlanishi qo'yidagi integral bilan ifodalanadi

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(t - \varphi) + \rho^2} dt.$$

Aytaylik (ρ, φ) nuqta yuqori yarim doirada joylashgan bo'lsin, ya'ni $0 < \varphi < \pi$ u holda $-\varphi < t - \varphi < \pi - \varphi$ bo'ladi va $\pm\pi$ nuqta shu π uzunlikdagi oraliqqa tegishli bo'lmaydi. Shuning uchun $\operatorname{tg}(t - \varphi)/2 = \tau$ almashtirish bajarib, $\cos(t - \varphi) = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $d\tau = 2\tau d\tau(1 + \tau^2)$ ifodalarni aniqlab olamiz. U holda:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg}(\varphi/2)}^{\operatorname{ctg}(\varphi/2)} \frac{R^2 - \rho^2}{(R - \rho)^2 + (R + \rho)^2 \tau^2} d\tau = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \tau \right) \Big|_{-\operatorname{tg}(\varphi/2)}^{\operatorname{ctg}(\varphi/2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{R + \rho}{R - \rho} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \right)^2} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - \rho^2}{2R\rho \sin \varphi}, \end{aligned}$$

yoki

$$\operatorname{tg}(u\pi) = -\frac{R^2 - \rho^2}{2R\rho \sin \varphi}.$$

Tenglikning o'ng tomoni manfiy u holda $0 < \varphi < \pi$ bo'lganda $1/2 < u < 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu hol uchun biz

$$\operatorname{tg}(\pi - u\pi) = \frac{R^2 - \rho^2}{2R\rho \sin \varphi},$$

yoki

$$u = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - \rho^2}{2R\rho \sin \varphi} \quad (0 < \varphi < \pi)$$

yechimni hosil qilamiz. ◀

Agar nuqta doiraning pastki qismida joylashgan bo'lsa, ya'ni $\pi < \varphi < 2\pi$ u holda $(t - \varphi)$ ayirmaning $]-\varphi, \pi - \varphi[$ oraliqda o'zgarishiga $-\pi$ nuqta tegishli

bo'lib, 0 nuqta tegishli bo'lmaydi. Biz $\operatorname{ctg}(t - \varphi)/2 = \tau$ almashtirish bajarib, $\cos(t - \varphi) = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $d\tau = 2\tau d\tau(1 + \tau^2)$ ifodalarni aniqlab olamiz. U holda φ qiymatlari uchun

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{\operatorname{tg}(\varphi/2)}^{\operatorname{ctg}(\varphi/2)} \frac{R^2 - \rho^2}{(R + \rho)^2 + (R - \rho)^2 \tau^2} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R - \rho}{R + \rho} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R - \rho}{R + \rho} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Yo'qoridagi kabi o'zgarishlarni amalga oshirib

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - \rho^2}{2R\rho \sin \varphi} \quad (\pi < \varphi < 2\pi)$$

ni topamiz. $\sin \varphi < 0$ bo'lgani uchun o'ng tomon musbat aniqlangan, u holda $0 < u < 1/2$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Puasson tenglamasi uchun chegaraviy masalani doirada yechish

Puasson tenglamasi uchun Dirixle yoki Neyman masalasini yechish uchun $\Delta u = f(x, y)$ Puasson tenglamasining biror u_1 xususiy yechimini topib va $u = u_1 + v$ almashtirish yordamida $\Delta v = 0$ Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masalani yechishga keltiriladi.

17.23-Misol. Ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

Puasson tenglamasining markazi koordinata boshida, R radiusli doirada $u(R, \varphi) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

► Qutb koordinatalar sistemasiga o'tsak,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$$

yoki $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)$ hosilani topib ρ^2 ga ko'paytirsak

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} \rho^4 \sin 2\varphi$$

tenglamani hosil qilamiz. U holda qutb koordinatalar sistemasida berilgan Puasson tenglamasi uchun chegaraviy masala quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} \rho^4 \sin 2\varphi, & 0 \leq \rho < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(R, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (17.91)$$

(17.91) tenglamaning xususiy yechimini

$$u_1(\rho, \varphi) = \omega(\rho) \sin 2\varphi$$

ko‘rinishda izlaymiz. $u_1(\rho, \varphi)$ funksiyani (17.91) masalaning tenglamasiga qo‘yib va $\sin 2\varphi$ ga qisqartirib ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\rho^2 \omega'' + \rho \omega' - 4\omega = -\rho^4/2. \quad (17.92)$$

$\rho = e^t$ almashtirish yordamida (17.92) tenglama o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamaga keltiriladi:

$$\omega_t'' - 4\omega = -e^{4t}/2. \quad (17.92a)$$

(17.92a) tenglamaning xususiy yechimi $\omega(t) = -e^{4t}/24$ funksiya bo‘ladi. Demak, $\omega(\rho) = -\rho^4/24$ funksiya (17.92) tenglamaning xususiy yechimi. Shunday qilib,

$$u_1(\rho, \varphi) = -\frac{1}{24} \rho^4 \sin 2\varphi$$

funksiya Puasson tenglamasining yechimi bo‘ladi.

$$v(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi) - u_1(\rho, \varphi)$$

funksiyani kiritamiz. $v(\rho, \varphi)$ funksiya Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasidan aniqlanadi:

$$\begin{cases} \rho^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < \rho < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ v(R, \varphi) = R^4 \sin 2\varphi / 24, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

(17.86) formulaga ko‘ra yechim

$$v(\rho, \varphi) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (17.93)$$

koʻrinishda boʻladi. a_0, a_k, b_k – koeffitsiyentlarni (17.84a) formulalar orqali aniqlanadi. $f(\varphi) = \frac{1}{24} R^4 \sin 2\varphi$ funksiya toq funksiya boʻlgani uchun $a_0 = 0, a_k = 0$ boʻlib, boshqa koeffitsiyentlar esa,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{24\pi} R^4 \int_0^{2\pi} \sin 2t \sin kt \, dt = |k = 2| = \frac{1}{24\pi} R^4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{48\pi} R^4 (t - \frac{1}{4} \sin 4t) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{24} R^4 \end{aligned}$$

kabi boʻladi. (17.93) tenglikdan yechim

$$v(\rho, \varphi) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \frac{1}{24} R^4 \sin 2\varphi = \frac{1}{24} \rho^2 R^2 \sin 2\varphi.$$

U holda berilgan masalaning yechimi

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{24} \rho^2 (R^2 - \rho^2) \sin 2\varphi$$

funksiyadan iborat boʻladi. ◀

Nazorat savollari

1. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaga taʼrif bering.
2. Xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimiga taʼrif bering.
3. Qanday tenglamalarga giperbolik turdagi tenglama deyiladi?
4. Qanday tenglamalarga parabolik turdagi tenglama deyiladi?
5. Qanday tenglamalarga elliptik turdagi tenglama deyiladi?
6. Koshi masalasi qanday qoʻyiladi?
7. Chegaraviy masala nima?
8. Aralash masala qanday qoʻyiladi?
9. Matematik fizikaning qanday asosiy tenglamalarini bilasiz?
10. Issiqlik oʻtkazuvchanlik tenglamasi qanday koʻrinishga ega?
11. Parabolik tenglama uchun qanday chegaraviy masalalar mavjud?
12. Issiqlik tenglamasi uchun Furiye usuli bilan qanday yechiladi?
13. Puasson integralining koʻrinishi qanday?

14. Parabolik tenglama uchun Koshi masalasi qanday qo'yiladi?
15. Fundamental yechim nima?
16. Siqilmaydigan suyuqlik potensial harakati tenglamasi qanday ko'rinishga ega?
17. Elliptik tenglama uchun chegaraviy masalalar qanday qo'yiladi?
18. Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi to'g'ri to'rtburchakga qanday qo'yiladi?
19. Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi doirada qanday qo'yiladi?
20. Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi halqada qanday qo'yiladi?
21. Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasi to'g'ri to'rtburchakda qanday qo'yiladi?

Mashqlar

Berilgan tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltiring:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Chegaralangan torning erkin tebranishi haqidagi masalani Fure usuli bilan yeching.

$$\begin{aligned}
 &6. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\
 &\quad u|_{x=0} = 0, u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, u|_{t=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;
 \end{aligned}$$

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4},$
 $u|_{x=0} = 0, u|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0, u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0;$
8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, 0 < x < l,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sin \frac{2\pi}{l} x;$
9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2},$
 $u|_{x=0} = 0, u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, u|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0;$
10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
 $u|_{x=0} = 0, u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -x;$

Chegaralangan torning majburiy tebranishi haqidagi masalani Fure usuli bilan yeching.

11. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t, \quad t > 0, 0 < x < \pi,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0;$
12. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \sin t, \quad t > 0, 0 < x < \pi,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0;$

Koshi masalasini Dalamber usuli bilan yeching.

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1;$
14. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -x;$

$$15. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = \frac{x}{a}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{x^2};$$

$$16. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos^2 x;$$

$$17. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, -\infty < x < +\infty, u|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1;$$

Tor uchun bir jinsli bo'lmagan Koshi masalasini yeching.

$$18. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^2, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = e^{-x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 4, \quad t \geq 0;$$

$$19. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5xt, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x, \quad t \geq 0;$$

$$20. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x, \quad t \geq 0;$$

$$21. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 2, \quad t \geq 0.$$

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasini yeching.

$$22. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

$$23. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, -\infty < x < +\infty, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{l}, & -l \leq x \leq 0, \\ 0, & x < -l, x > l, l > 0. \end{cases}$$

Issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarning yechimini Fure usuli bilan toping.

$$24. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t \geq 0, 0 \leq x \leq l, u(x, 0) = u_0, u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$25. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t \geq 0, 0 \leq x \leq l, u(x, 0) = Ax, u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0;$$

Laplas tenglamasining to'g'ri to'rtburchakning ichki qismida berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimini toping.

$$26. \quad u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = \sin \frac{\pi}{2} y, 0 \leq y \leq 2,$$

$$u|_{y=0} = 0, u|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq 1;$$

$$27. \quad u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq 1,$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=1} = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

Laplas tenglamasining halqaning ichki qismida berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\rho, \varphi)$ yechimini toping.

$$28. \quad u|_{\rho=1} = 2 + \sin \varphi, \quad u|_{\rho=2} = \cos \varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 2;$$

$$29. \quad u|_{\rho=2} = 2 \sin 3\varphi, \quad u|_{\rho=3} = 1 - \cos \varphi, \quad 2 \leq \rho \leq 3;$$

$$30. \quad u|_{\rho=R} = 2, \quad u|_{\rho=2R} = \cos \varphi, \quad R \leq \rho \leq 2R;$$

$$31. \quad u|_{\rho=R} = 1 - 2 \sin \varphi, \quad u|_{\rho=2R} = 1 + \cos \varphi, \quad R \leq \rho \leq 2R;$$

Laplas tenglamasining doirada berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\rho, \varphi)$ yechimini toping.

$$32. \quad u|_{\rho=R} = R(\cos \varphi + R \cos \varphi \sin \varphi), \quad \rho \leq R;$$

$$33. \quad u|_{\rho=R} = 4R^3 \sin^3 \varphi, \quad \rho \leq R;$$

XVIII BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

Ehtimollar nazariyasi bu matematik fan bo'lib, u o'zaro qandaydir ko'rinishda bog'langan hodisalardan birining ehtimolini boshqalarining ehtimollari bo'yicha topish imkonini beradi.

Ehtimollar nazariyasi ma'lum bir shart-sharoitda ko'p marta takrorlanadigan tasodifiy hodisalarning xususiyatlarini o'rganadi.

18.1. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Ma'lum bir shart-sharoitda yuz berishi ham, yuz bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisalarni *tasodifiy hodisalar* deb ataymiz. Ana shu shart-sharoitni yuzaga keltirish uchun bajarilgan harakatlar majmuasi *tajriba* deb yuritiladi.

Tajriba o'tkazilganda albatta yuz beradigan hodisa *muqarrar hodisa*, hech qachon yuz bermaydigan hodisa esa *mumkin bo'lmagan hodisa* deb ataladi.

Tasodifiy hodisalar $A, B, C, \dots$ harflar bilan, muqarrar hodisa Ω orqali va mumkin bo'lmagan hodisa $\emptyset$ orqali belgilanadi.

18.1-Misol. Tanga uch marta tashlandi. Mazkur tajriba natijasida yuz berishi mumkin bo'lgan barcha hodisalarni toping.

► Tanga tashlanganda tanganing yuqori qismiga gerb tushishini G orqali, raqam tushishini esa R orqali belgilaymiz. U holda:

$$\Omega = \{GGG, GGR, GRG, RGG, GRR, RGR, RRG, RRR\}.$$

Shunday qilib, mazkur tajriba natijasida 8 ta hodisa yuz berishi mumkin ekan. ◀

Agar tajriba natijasida A va B hodisalardan birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishini istisno qilsa, ya'ni bir vaqtda yuz berishmasa, ular *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi. Aks holda *birgalikda bo'lgan hodisalar* deyiladi.

18.2-Misol. O'yin toshi (narda toshi) tashlandi. Toshning ustki qismiga tushgan raqam kuzatiladi. $A = \{5 \text{ raqami tushdi}\}$, $B = \{\text{tushgan raqam juft}\}$, $C = \{\text{tushgan raqam 3 soniga karrali}\}$ hodisalardan A va B hamda A va C birgalikda bo'lmagan

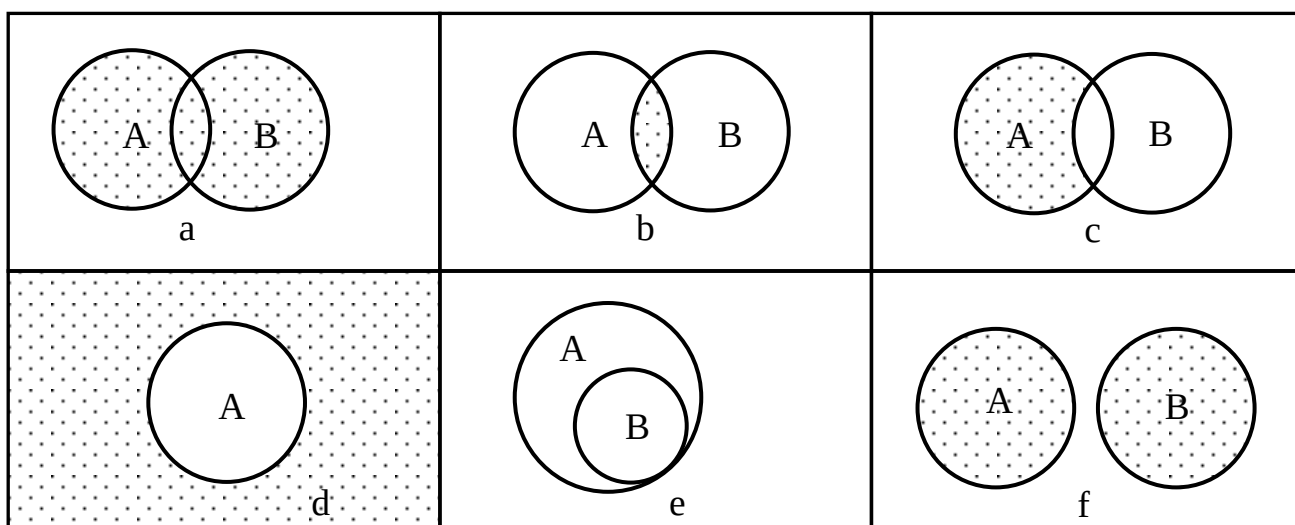
hodisalar, 6 raqami tushsa B hodisa ham C hodisa ham yuz beradiganligi tufayli, ular birgalikda bo'lgan hodisalar.

Ixtiyoriy ikkitasi birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi.

Tajriba natijasida albatta bittasi yuz beradigan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisa *hodisalarning to'liq guruhi* deyiladi.

18.3-Misol. O'yin toshi tashlandi. $A_i = \{i \text{ raqami tushdi}\}$ hodisalarni kiritamiz. U holda $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar va ular to'liq guruhni tashkil qiladi.

Endi tasodifiy hodisalar ustida amallarni geometrik talqini bilan kiritamiz. To'g'ri to'rtburchak bilan chegaralangan sohaga ixtiyoriy ravishda nuqta qo'yamiz, A va B orqali ana shu nuqtaning mos ravishda A va B doiralarga tushish hodisasini belgilaymiz (18.1a-18.1e rasmlar).



18.1-rasm

A va B hodisalardan hech bo'lmaganda biri yuz beradigan hodisaga A va B hodisalarning *yig'indisi* deyiladi va $A + B$ yoki $A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi (18.1a-rasm).

A va B hodisalarning birgalikda yuz berishidan iborat hodisaga A va B hodisalarning ko'paytmasi deyiladi va AB yoki $A \cap B$ ko'rinishda belgilanadi (18.1b-rasm).

A yuz berib, B esa yuz bermaydigan hodisaga A va B hodisalarning ayirmasi deyiladi va $A - B$ yoki $A \setminus B$ ko'rinishda belgilanadi (18.1c-rasm).

A yuz bermagandagina yuz beradigan hodisaga A hodisaga qarama-qarshi hodisa deyiladi va u $\bar{A}$ orqali belgilanadi (18.1d-rasm).

Agar A hodisa yuz berganda albatta B hodisa ham yuz bersa, B hodisa A hodisaning qismi deyiladi va $B \subseteq A$ ko'rinishda yoziladi (18.1e-rasm).

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, A va B hodisalar teng yoki ekvivalent hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

Birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar 18.1f-rasmda tasvirlangan.

Tasodifiy hodisalar ustida kiritilgan amallar quyidagi xossalarga ega:

- $A + B = B + A$, $AB = BA$ (o'rin almashtirish);
- $(A + B)C = AC + BC$ (taqsimot);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (guruhlash);
- $A + A = A$, $AA = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A\Omega = A$;
- $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \emptyset$;
- $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\bar{A}} = A$;
- $A - B = A\bar{B}$;
- $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ –De Morgan qonuni.

18.2. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi va statistik ehtimoli

n marta takrorlanuvchi tajribalarda A hodisa m^* marta yuz bersin.

18.1-Ta'rif. A hodisa m^* yuz berishlar sonining n barcha tajribalar soniga nisbatiga A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi va

$$P^*(A) = m^*/n \quad (18.1)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Nisbiy chastota quyidagi xossalarga ega:

- Har qanday hodisaning nisbiy chastotasi nol va bir oralig‘ida yotadi:

$$0 \leq P^*(A) \leq 1.$$

- Mumkin bo‘lmagan hodisaning nisbiy chastotasi nolga teng:

$$P^*(\emptyset) = 0.$$

- Muqarrar hodisaning nisbiy chastotasi birga teng:

$$P^*(\Omega) = 1.$$

18.4-Misol. Tanga tashlanganda gerb tomoni tushishlar sonini tahlil qilish uchun 8 qismdan iborat tajribalar o‘tkazildi:

- 1-qismda tanga 3 marta tashlandi va gerb tomoni 2 marta tushdi,
- 2-qismda tanga 7 marta tashlandi va gerb tomoni 3 marta tushdi,
- 3-qismda tanga 10 marta tashlandi va gerb tomoni 5 marta tushdi,
- 4-qismda tanga 50 marta tashlandi va gerb tomoni 26 marta tushdi,
- 5-qismda tanga 100 marta tashlandi va gerb tomoni 49 marta tushdi,
- 6-qismda tanga 200 marta tashlandi va gerb tomoni 102 marta tushdi,
- 7-qismda tanga 500 marta tashlandi va gerb tomoni 253 marta tushdi,
- 8-qismda tanga 1000 marta tashlandi va gerb tomoni 495 marta tushdi.

Tajribalar o‘tkazilgan har-bir qismda gerb tushishlarning nisbiy chastotasi mos ravishda $1 \rightarrow 2/3 \approx 0,67$; $2 \rightarrow 3/7 \approx 0,43$; $3 \rightarrow 5/10 = 0,5$; $4 \rightarrow 26/50 = 0,52$; $5 \rightarrow 49/100 = 0,49$; $6 \rightarrow 102/200 = 0,51$; $7 \rightarrow 253/500 = 0,506$; $8 \rightarrow 495/1000 = 0,495$ qiymatlarni qabul qiladi.

Olingan natijalarni tahlil qiladigan bo‘lsak, tajribalar soni nisbatan kichik bo‘lganda nisbiy chastotalar bir-biridan sezilarli farq qilar ekan. Tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastotalar bir-biridan juda kam farq qiladi va tajribalar soni oshgan sari bu farq kamayib boradi. Shuning uchun tajribalar soni

keskin osha boshlagan sari nisbiy chastota o'zining tasodifiyligini yoqota boshlaydi deb xulosa qilish mumkin.

Kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, shunday bir p soni mavjudki, tajribalar soni katta bo'lganda ayrim hollarni istisno qilgan ko'pchilik hollarda A hodisaning nisbiy chastotasi bu sondan kam farq qiladi. Ana shu sonni A hodisaning *statistik ehtimoli* yoki qisqacha A hodisaning *ehtimoli* deb ataymiz.

A hodisaning yuz berish ehtimolini $P(A)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib, $P(A) = p$ deb yozish mumkin. Tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda

$$P(A) \approx P^*(A) = m^*/n \quad (18.2)$$

Tajribalar soni n oshgan sari A hodisaning $P^*(A)$ nisbiy chastotasi uning $P(A)$ yuz berish ehtimoliga yaqinlashadi.

$P(A)$ statistik ehtimol ham nisbiy chastota singari quyidagi xossalarga ega:

- Har qanday hodisaning ehtimoli nol va birning oralig'ida joylashgan, ya'ni

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

- Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng, ya'ni

$$P(\emptyset) = 0.$$

- Muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng, ya'ni

$$P(\Omega) = 1.$$

18.3. Ehtimolning klassik ta'rifi

Ko'pgina hollarda qaralayotgan hodisaning ehtimolini o'tkazilayotgan tajribaning tahlilidan kelib chiqqan holda bevosita hisoblash mumkin.

18.3-Misolda qaralgan tajribani tahlil qilamiz. O'yin toshi simmetrikligidan A_i hodisalar bir xil imkoniyatga ega. Shuning uchun biz ularni *teng imkoniyatli hodisalar* deb ataymiz. O'yin toshi ko'p marta tashlanganda ixtiyoriy $i = \overline{1,6}$ qiymatda A_i hodisa taxminan $n/6$ marta yuz beradi, ya'ni $P^*(A)$ nisbiy chastota $1/6$ qiymatga yaqin bo'ladi. Shuning uchun o'yin toshining yuqori qismiga i raqamining tushish ehtimoli $1/6$ nisbatga teng deb hisoblash mumkin.

Birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli n ta hodisalarning to'liq guruhini qaraymiz. Bu guruhdan olingan hodisaning yuz berishi natijasida A hodisa ham yuz bersa, bunday hodisani A hodisaga *imkoniyat yaratuvchi hodisa* deb ataymiz.

18.2-Ta'rif. A tasodifiy hodisaning $P(A)$ ehtimoli deb, A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar m sonining barcha yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalar n soniga nisbatiga aytiladi:

$$P(A) = m/n. \quad (18.3)$$

A hodisaning ehtimoli uning statistik ehtimoli bilan bir xil xossalarga ega.

18.5-Misol. Qutida 8 ta oq va 3 ta qora shar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda olingan shar oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

► $A = \{\text{qutidan oq rangli shar olindi}\}$ hodisani kiritamiz. Teng imkoniyatli hodisalarning soni $n = 8 + 3 = 11$ ekanligi ravshan. Oq rangli sharlar soni 8 ta bo'lganligi tufayli, A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $m = 8$ bo'ladi. Shuning uchun (18.3) formulaga ko'ra $P(A) = 8/11$ bo'ladi. ◀

18.4. Kombinatorika elementlari

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra A hodisaning ehtimolini hisoblash unga imkoniyat yaratuvchi hodisalarning sonini hisoblashga, aniqrog'i kombinatorika masalalarini yechishga keltirilar ekan. Biz quyida tez-tez ishlatiladigan kombinatorika formulalarini keltiramiz.

Turli guruhlar elementlarining kombinatsiyasi. Elementlarning r guruhi berilgan bo'lsin: birinchi guruh n_1 ta $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}$ elementdan, ikkinchi guruh n_2 ta $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}$ elementdan va hokazo r – guruh n_r ta $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn_r}$ elementdan iborat. r ta elementdan iborat kombinatsiyalar shunday tuziladiki, bunda har bir kombinatsiyaga har bir guruhdan bittadan element qatnashadi. Barcha $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ri_r}$ kombinatsiyalar soni

$$N = n_1 n_2 \dots n_r \quad (18.4)$$

formula bilan aniqlanadi.

18.6-Misol. Birinchi guruhda 15 ta, ikkinchisida 18 ta va uchinchi guruhda 20 ta talaba bor. Har bir guruhga bittadan dam olish uyiga yo‘llanma ajratilgan. Har bir guruhdan bittadan talabani tanlab, dam olishga necha usul bilan “uchlik”larni jo‘natish mumkin?

► Shartga ko‘ra $n_1 = 15, n_2 = 18$ va $n_3 = 20$. U holda (18.4) formulaga ko‘ra “uchliklar” soni $N = n_1 n_2 n_3 = 15 \cdot 18 \cdot 20 = 5400$, ya’ni uchta yo‘llanma bilan uch guruhdan 5400 usul bilan uchta talabani jo‘natish mumkin ekan. ◀

O‘rinlashtirishlar. n ta $a_1, a_2, \dots, a_n$ element berilgan. Ularni k tadan qilib joylashish tartbini inobatga olgan holda barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalarini tuzamiz, boshqacha qilib aytganda n elementning r tasini r ta o‘ringa joylashtiriladi. Bunday kombinatsiyalar (o‘rinlashtirishalar) soni

$$N = A_n^k = n!/(n - r)! \quad (18.5)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi.

18.7-Misol. Guruhda 25 ta talaba bor. Guruh sardorini, yoshlar harakati yetakchisini, kasaba uyushmasi a’zosini va guruh tashkilotchisini saylash kerak. Agar har bir talaba faqat bitta lavozimni egallashi mumkin bo‘lsa, necha usul bilan bu lavozimlarni guruh talabalari o‘rtasida taqsimlash mumkin?

► Bu holda 25 elementni 4 tadan qilib o‘rinlashtirishlar sonini topish kerak. (18.5) formulaga ko‘ra $N = A_{25}^4 = 25!/(25 - 4)! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$, ya’ni 25 talabadan tortta lavozimga to‘rt kishini 303600 usul bilan saylash mumkin ekan. ◀

Takroriy o‘rinlashtirishlar. n ta elementan iborat $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plam berilgan. Bu to‘plamdan ketma-ket a_i elementlardan bittasi tanlanadi va yana to‘plamga qaytariladi. Natijada r – qadamda $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiya ro‘yxatga olinadi. Bunday barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalar soni

$$N = n^r \quad (18.6)$$

formula bilan hisoblanadi, bunda k – qadamda a_{i_k} element D to‘plamdan olingan. Bunday kombinatsiyalarda bitta element 1 tadan r tagacha ham qatnashishi mumkin, biroq kombinatsiyalar elementlarning o‘rni bilan farq qilishi mumkin.

18.8-Misol. 1, 2, 3 raqamlaridan tuzilgan barcha ikki xonali sonlarning soni nechta va ularni yozib chiqing.

► Bu yerda 3 ta elementni 2 tadan qilib takroriy o‘rinlashtirishlar sonini topish kerak: $N = 3^2 = 9$. Endi bu raqamlardan tuzilgan barcha ikki xonali sonlarni yozamiz: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. ◀

Guruhlashlar. $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plamning r ta elementidan tuzilgan $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ kombinatsiyalarda elementning tartibi inobatga olinmaydi va bitta element bitta kombinatsiyada faqat bir marta qatnashadi. Demak bir xil elementlardan tashkil topgan kombinatsiyalar teng hisoblanadi. Bunday kombinatsiyalarning soni

$$N = C_n^r = n! / [(n - r)! r!] \quad (18.7)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi.

18.9-Misol. Guruhda 25 ta talaba bor. Guruhga dam olish uyiga borish uchun uchta yo‘llanma ajratilgan. Necha usul bilan guruh talabalaridan uchtasini dam olish uyiga jo‘natish mumkin.

► 25 ta elementni 3 tadan qilib guruhlashlar sonini topish kerak: $N = C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = 2300$. Demak 25 talabani uchtdan guruhlab 2300 usul bilan dam olish uyiga jo‘natish mumkin ekan. ◀

O‘rin almashtirishlar. Bundan ta turli elementli $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ to‘plam elementlaridan faqat elementlarning tartibi bilan farq qiladigan barcha $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ kombinatsiyalar qaraladi. Har bir kombinatsiyada bitta element faqat bir marta qatnashadigan bunday kombinatsiyalar soni

$$N = P_n = n! \quad (18.8)$$

formula bilan hisoblanadi.

18.10-Misol. Axmedov, Botirov va Vohidov familiyalaridan necha usul bilan uchta familiyalai ro'yxat tuzish mumkin va bu ro'yxatlarni keltiring.

► 3 ta elementning o'rin almashtirishlar sonini topish kerak: $N = P_3 = 3! = 6$. Endi bu familiyalarning bosh harflaridan tuzilgan ro'yxatlarni keltiramiz: $\{A, B, V\}$, $\{A, V, B\}$, $\{B, A, V\}$, $\{B, V, A\}$, $\{V, A, B\}$, $\{V, B, A\}$. ◀

Stirling formulasi. Yuqorida keltirilgan formulalarning ko'p qismida $n!$ ifoda qatnashadi. n ning katta qiymatlarida uni hisoblash ko'p mehnatni talab qiladi. $n!$ ifodaning taqribiy qiymatini beruvchi sodda formula mavjud: n ning katta qiymatlarida

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \quad (18.9)$$

munosabat o'rinli. Bu formula Stirling formulasi deb yuritiladi. Stirling formulasining nisbiy xatoligi ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$0 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} - 1 < e^{\frac{1}{12n}} - 1$$

tengsizlik bilan baholanadi.

18.11-Misol. Qutida 100 ta tayyor mahsulot bor. Ulardan 10 tasi ixtiyoriy ravishda tanlanib olinib, sifat nazoratiga tekshiruvga jo'natildi. Agar tanlangan mahsulotlar orasida sifatsizi chiqmasa, barcha 100 ta mahsulot qabul qilinadi, aks holda ularning barchasi qo'shimcha nazoratga yuboriladi. Agar qutida 10 ta sifatsiz mahsulot mavjud bo'lsa, 100 ta mahsulotning qabul qilinish ehtimolini toping.

► 100 ta mahsulotdan 10 tadan qilib tanlashlar soni 100 dan 10 talab guruhlashlar soniga teng: $n = 100!/[10! \cdot 90!]$ va $A = \{\text{barcha tayyor mahsulot nazoratchi tomonidan qabul qilinadi}\}$ hodisasi 10 tanlangan mahsulotning barchasi sifatli bo'lgandagina yuz beradi. Masala shartiga ko'ra bunday sifatli mahsulotlarning umumiy soni 90 ga teng. Shuning uchun A hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni 90 dan 10 talab guruhlashlar soniga teng bo'ladi: $m(A) = 90!/[10! \cdot 80!]$. U holda (18.3) formulaga ko'ra qidirilayotgan ehtimol uchun

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{\frac{90!}{10! \cdot 80!}}{\frac{100!}{10! \cdot 90!}} = \frac{81 \cdot 82 \cdot \dots \cdot 90}{91 \cdot 92 \cdot \dots \cdot 100} \approx \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0,349$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

18.5. Geometrik ehtimol

Tajriba natijasi chekli sondagi teng imkoniyatli hodisalardan iborat bo'lsa, mazkur tajriba bilan bog'liq A hodisaning $P(A)$ ehtimoli bu hodisaga imkoniyat yaratuvchi hodisalarning “ulushi” sifatida aniqlanadi. Natijalari cheksiz sanoqsiz to'plamdan iborat bo'lgan murakkab tajribalarda ham ehtimollar ana shu “ulushlar”dan foydalanilib hisoblanadi.

Tekislikda yuzasi S_Ω bo'lgan Ω soha va bu sohaning qismi bo'lgan D soha berilgan bo'lsin. D qisman sohaning yuzi S_D bo'lsin. Ω sohaga ixtiyoriy ravishda X nuqta tashlansin, bunda X nuqtaning Ω sohaga tushishi muqarrar, D sohaga tushishi esa tasodifiy hodisa deb faraz qilamiz. Ω sohaning barcha nuqtalari “teng huquqli” deb hisoblaymiz. Ushbu $A = \{X \text{ nuqta } D \text{ sohaga tegishli: } X \in D\}$ hodisasini kiritamiz.

A hodisaning *geometrik ehtimoli* deb D soha yuzining Ω soha yuzi nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = S_D/S_\Omega. \quad (18.10)$$

Ehtimolning geometrik ta'rifini Ω va D sohalarning ikkalasi ham chiziqli yoki hajmli bo'lganda ham qo'llash mumkin: birinchi holda

$$P(A) = L_D/L_\Omega \quad (18.11)$$

va ikkinchi holda

$$P(A) = V_D/V_\Omega \quad (18.12)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda L mos sohaning uzunligi, V esa hajmi.

18.12-Misol. Uzunligi L bo'lgan kesmaga ξ nuqta ixtiyoriy ravishda tashlanmoqda. Tashlangan nuqtaning kesma markazidan chetlanishi l dan oshmaslik ehtimolini toping.

► ξ nuqta kesmaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkinligi tufayli, tajriba cheksiz ko‘p natijaga ega. Bundan tashqari masala shartidan kesmaning barcha nuqtalari teng imkoniyatli.

$A = \{\xi \text{ nuqtaning kesma markazidan chetlanishi } l \text{ dan oshmaydi}\}$ hodisasini kiritamiz. Bu hodisa ξ nuqta kesma markazidan uzog‘i bilan l masofada yotgan holdagina yuz beradi. Bunday nuqtalarning “ulushi” $L(A)/L$ nisbat sifatida aniqlanadi. Bu yerda L butun kesmaning uzunligi, $L(A) = 2l$ esa A hodisaga imkoniyat yaratuvchi kesmaning uzunligi. Shunday qilib

$$P(A) = \begin{cases} \frac{2l}{L}, & \text{agar } 2l < L \\ 1, & \text{agar } 2l \geq L \end{cases}$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

18.6. Ehtimollarni qo‘shish

Birgalikda bo‘lmagan A_1, A_2 hodisalar va ularning $A = A_1 + A_2$ yig‘indisini qaraymiz. Tajriba natijasida birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq guruhini tashkil qiluvchi n hodisadan biri yuz bersin. $m(A), m(A_1)$ va $m(A_2)$ mos ravishda bu tajriba natijasida A, A_1 va A_2 hodisalar yuz berishlariga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni bo‘lsin. Agar tajriba natijasida A hodisa yuz bersa, bu yoki A_1 hodisa yoki A_2 hodisa yuz berganligini anglatadi (A_1 va A_2 hodisalar bir vaqtda yuz bermaydi, chunki shartga ko‘ra ular birgalikda bo‘lmagan hodisalar). Shuning uchun $m(A), m(A_1)$ va $m(A_2)$ sonlar o‘zaro

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2)$$

tenglik bilan bog‘langan. U holda ularning ehtimollari uchun

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{m(A_1) + m(A_2)}{n} = \frac{m(A_1)}{n} + \frac{m(A_2)}{n} = P(A_1) + P(A_2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik.

18.1-Teorema. Birgalikda bo‘lmagan A_1, A_2 hodisalar yig‘indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (18.13)$$

Natija. Birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalar yig‘indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \quad (18.14)$$

A va $\bar{A}$ birgalikda bo‘lmagan hodisalar va ular to‘liq guruhni tashkil qiladi. Shuning uchun

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1,$$

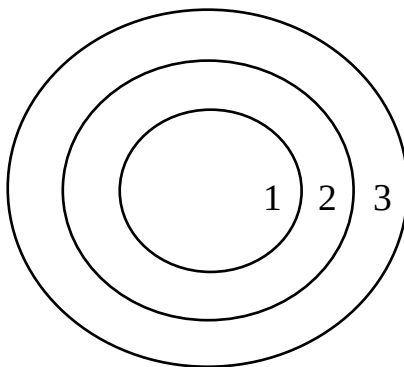
ya’ni qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng.

Hodisalar kombinatsiyalarining ehtimollari. Agar hodisalar o‘rtasidagi munosabatlar 18.1-rasm bo‘yicha geometrik talqin qilinadugan bo‘lsa, hodisalar ehtimollarining xossalari rasmdagi figuralar yuzalarining xossalari o‘xshash bo‘ladi. Xususan:

$$\left. \begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A) - P(AB) \\ P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

18.13-Misol. O‘zaro kesishmaydigan uch qismdan iborat nishonga qarab o‘q uzilmoqda (18.2-rasm). O‘q 1-qismga $P(B) = 0,04$, 2-qismga $P(C) = 0,09$ va 3-qismga $P(D) = 0,2$ ehtimol bilan tegadi. O‘qning nishonga tegish ehtimolini toping.

► $A = \{\text{o‘q nishonga tegdi}\}$ hodisasini kiritamiz. U holda (18.14) formulaga ko‘ra $P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 0,04 + 0,09 + 0,2 = 0,33$. ◀



18.2-rasm

18.7. Hodisalarning bog‘liqligi. Shartli ehtimol.

Bitta tajriba bilan bog‘liq bo‘lgan ikkita A va B hodisalarni qaraymiz. Tajriba natijasida B hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishiga qanday ta’sir qiladi degan savol tug‘iladi. A va B hodisalar orasidagi bog‘liqlikni quyidagi ikkita muhim holni misolda ko‘rish mumkin: B hodisaning yuz berishi A hodisaning albatta yuz berishiga olib keladi yoki aksincha B hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishini istisno qiladi.

18.3-Ta’rif. A hodisaning yuz berish ehtimoli B hodisaning yuz bergan yoki yuz bermaganligiga bog‘liq bo‘lsa, A hodisa B hodisaga bog‘liq deyiladi.

Ehtimollar nazariyasida A va B hodisalar orasidagi bog‘liqlikni B hodisa yuz bergan shartda A hodisaning $P(A|B)$ shartli ehtimoli tavsiflaydi va u

$$P(A|B) = P(AB)/P(B) \quad (18.16)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadi (B hodisaning ehtimoli noldan farqli deb faraz qilinadi).

A hodisa yuz bergan shartda B hodisaning $P(B|A)$ shartli ehtimoli ham xuddi shu singari aniqlanadi:

$$P(B|A) = P(AB)/P(A), \quad P(A) \neq 0. \quad (18.17)$$

18.4-Ta’rif. A hodisaning B hodisa yuz bergan shartda $P(A|B)$ shartli ehtimoli uning shartsiz ehtimoliga teng, ya’ni

$$P(A|B) = P(A) \quad (18.18)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyiladi.

18.2-Teorema. Agar A hodisa B hodisaga bog‘liq bo‘lmasa, B hodisa ham A hodisaga bog‘liq bo‘lmaydi.

◀ (18.18) tenglikni inobatga olgan holda (18.16) va (18.17) tengliklardan

$$P(B|A) = P(AB)/P(A) = P(A|B)P(B)/P(A) = P(A)P(B)/P(A) = P(B),$$

ya’ni B hodisaning shartli ehtimoli uning shartsiz ehtimoliga teng. ▶

Shunday qilib ikkita hodisadan biri ikkinchisiga bog‘liq bo‘lmasa, ikkinchisi ham birinchisiga bo‘g‘liq bo‘lmaydi, ya’ni ular *o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan* hodisalar.

18.5-Ta'rif. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning har biri qolganlarining har biriga va ularning ixtiyoriy ko'paytmasiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalarni *o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar* deb ataymiz.

Oddiy ehtimol qanday xossalarga ega bo'lsa shartli ehtimol ham xuddi shunday xossalarga ega, ya'ni

$$0 \leq P(A|B) \leq 1.$$

Agar B hodisa yuz berishi natijasida A hodisa ham albatta yuz bersa: $B \subseteq A$, u holda

$$P(A|B) = 1.$$

Agar B hodisa yuz berishi A hodisaning yuz berishini inkor qilsa: $AB = \emptyset$, u holda

$$P(A|B) = 0.$$

Agar A hodisa birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisalarning yig'indisidan iborat bo'lsa: $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, u holda

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^k P(A_i|B).$$

18.14-Misol. Qutida 5 ta oq va 4 ta qora rangli shar bor. Qutidan ketma-ket ikki marta bittadan shar olindi. Ushbu $B = \{\text{birinchi olinishda oq rangli shar bo'lgan}\}$, $A = \{\text{ikkinchi olinishda oq rangli shar bo'lgan}\}$ hodisalar uchun, $P(A|B)$ shartli ehtimolni toping.

► Masala shartiga ko'ra qutida jami 9 ta shar bo'lib, ulardan 5 tasi oq rangda bo'lgan. U holda birinchi olinishdan so'ng qutida 8 ta shar qoladi va ulardan 4 tasi oq rangda. Shuning uchun $P(A|B) = 4/8 = 1/2$.

Endi $P(A|B)$ ehtimolni (18.16) formulaga ko'ra topamiz. $P(B) = 5/9$ ekanligi ravshan. $P(AB)$ ehtimolni topamiz: $n = 9 \cdot 8 = 72$ va $m(AB) = 5 \cdot 4 = 20$. Demak $P(AB) = 20/72 = 5/18$. U holda (18.16) formuladan $P(A|B) = (5/18) : (5/9) = 1/2$ yuqorida topilgan ehtimolga ega bo'lamiz. ◀

18.8. Hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli

Shartli ehtimolning (18.16) va (18.17) formulalaridan

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \quad (18.19)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya’ni ikkita hodisa ko‘paytmasining ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining birinchisi yuz bergan shartdagi shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng.

(18.19) tenglik ehtimollarni ko‘paytirish teoremasi yoki qoidasi deb ataladi. Bu qoida n ta hodisa uchun quyidagi tenglik bilan umumlashtiriladi:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (18.20)$$

(18.19) tenglikdan o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan A va B hodisalarining ko‘paytmasi uchun

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (18.21)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya’ni o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng ekan.

O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ychun (18.20) tenglikdan

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \quad (18.22)$$

tenglikni hosil qilamiz.

18.15-Misol. Nishonga qarab uchta mergan o‘q uzishmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,3, ikkinchisining 0,4 va uchinchisining 0,6 ga teng bo‘lsa, uchta mergan ham nishonga tekkizish ehtimolini toping. Bu yerda har bir mergan o‘qining nishonga tegishi boshqalari o‘qining nishonga tekkan yoki tegmaganligiga bog‘liq emas deb faraz qilinadi.

►Quyidagi hodisalarni kiritamiz: $A_i = \{i \text{ —merganning o‘qi nishonga tegdi}\}$. Masala shartidan A_1, A_2, A_3 hodisalarining o‘zaro bog‘liq emasligi kelib chiqadi. Shuning uchun (18.22) formulaga ko‘ra uchala merganning ham o‘qlarining nishonga tegish ehtimolligi

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,072$$

bo'ladi. ◀

18.9. To'la ehtimol va Bayyes formulalari

Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlarini birgalikda qo'llashning natijalaridan biri sifatida to'la ehtimol formulasini ko'rsatish mumkin.

18.3-Teorema. Agar A hodisa birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalarning to'liq guruhidagi birorta hodisa yuz bergandagina yuz bersa, bu hodisaning yuz berish ehtimoli

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) \quad (18.23)$$

formulaga ko'ra hisoblanadi.

(18.23) formula *to'la ehtimol formulasi* deb ataladi.

◀Teorema shartidan A hodisa birgalikda bo'lmagan $H_1A, H_2A, \dots, H_nA$ hodisalardan biri yuz bergandagina yuz berishi kelib chiqadi, ya'ni $A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA$, u holda (18.14) formulaga ko'ra

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning har bir hadiga (18.19) tenglikni qo'llasak (18.23) tenglik hosil bo'ladi. ▶

(18.23) formulada $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalar ko'pincha taxminlar (gipotezalar) deb ataladi.

18.16-Misol. Birinchi qutida 4 ta oq va 8 ta qora, ikkinchi qutida esa 6 ta oq va 7 ta qora rangli shar bor. Ikkinchi qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi va birinchi qutiga solindi. So'ngra birinchi qutidagi sharlar yaxshilab aralashtirildi va ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Sharining oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

▶ Ushbu hodisalarni kiritamiz: $H_1 = \{\text{ikkinchi qutidan birinchi qutiga oq rangli shar olib solindi}\}$, $H_2 = \{\text{ikkinchi qutidan birinchi qutiga qora rangli shar olib solindi}\}$, $A = \{\text{birinchi qutidan tanlangan shar oq rangda}\}$.

Kiritilgan H_1 va H_2 hodisalar to'liq guruhni tashkil qilishi ravshan. U holda masala shartiga ko'ra $P(H_1) = 6/13$, $P(H_2) = 7/13$, $P(A|H_1) = 5/13$ va $P(A|H_2) = 4/13$ bo'ladi va ularni (18.23) formulaga qo'yib

$$P(A) = \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{58}{169}$$

ehtimolni topamiz. ◀

To'la ehtimol formulasining natijasi Bayyes formulasi yoki gipotezalar teoremasi bo'ladi. Bu formula tajribagacha qilingan H_i farazning ehtimolini tajribaning erishilgan natijasi A hodisa bo'yicha baholash imkonini beradi, ya'ni $P(H_i|A)$ shartli ehtimolni aniqlab beradi.

18.4-Teorema. $H_1, H_2, \dots, H_n$ birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq guruhini tashkil qilsin. U holda A hodisa yuz bergan shartda H_i ($i = \overline{1, n}$) hodisaning shartli ehtimoli

$$P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i)/P(A) \quad (18.24)$$

formulaga ko'ra hisoblanadi. (18.24) formula *Bayyes formulasi* deb ataladi.

◀ (18.19) formulaga ko'ra

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)},$$

bu yerda $P(A)$ ehtimol (18.23) to'la ehtimol formulasi bo'yicha topiladi:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n). \blacktriangleright$$

18.17-Misol. Yuqorida qaralgan 18.16-Misoldagi birinchi qutidan tanlangan shar dastlab ikkinchi qutidan bo'lganlik ehtimolini toping.

► H_1 farazning A hodisa (birinchi qutida tanlangan shar oq rangda) yuz bergan shartdagi $P(H_1|A)$ shartli ehtimolini topamiz:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{13} \cdot \frac{5}{13}}{\frac{58}{169}} = \frac{30}{58} = \frac{15}{29}$$

ehtimolni hosil qilamiz. ◀

18.10. Bernulli sxemasi

Takroriy tajriba deganda bitta tajribani n marta ketma-ket o'tkazish yoki bir vaqtda n ta bir xil tajriba o'tkazish tushuniladi. Masalan, uskunaning ishonchliligini nazorat qilishda bitta uskuna ustida n marta tajriba o'kaziladi yoki bir xil n ta uskuna ustida tajriba o'tkaziladi.

18.6-Ta'rif. *Bernulli sxemasi (yoki bir-biriga bog'liqsiz bir xil tajribalar ketma-ketligi yoki tajribalarning binomial sxemasi)* deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligiga aytiladi:

1) har bir tajribada faqat ikkita natija: birorta A hodisa yoki unga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisa yuz beradi;

2) tajribalar bir-biriga bog'liqsiz, ya'ni k –tajriba natijasi k –gacha bo'lgan tajribalar natijalariga bog'liq emas;

3) barcha tajribalarda A hodisa yuz berish ehtimoli o'zgarmas va

$$P(A) = p$$

bo'ladi.

$\bar{A}$ hodisa yuz berish ehtimollini q orqali belgilaymiz, ya'ni

$$P(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Bernulli sxemasiga “tushadigan” bir nechta tajribalarga misol keltiramiz.

1. Simmetrik tangani n marta tashlash (bu yerda A hodisa sifatida ehtimoli $p = 1/2$ bo'lgan “gerb”ning tushishi olinadi) yoki simmetrik o'yin toshini n marta tashlash (bu yerda A hodisa sifatida ehtimoli $p = 1/6$ bo'lgan olti raqamining tushishi olinadi). Bu ikki tajriba Bernulli sxemasiga to'liq mos tushadi.

2. Nishonga qarab n marta o'q uzishni Bernulli sxemasiga “taxminan” tushadi deb qarash mumkin, chunki o'q uzishning natijasi mergannning jismoniy holatiga qarab o'zgarishi mumkin, bu esa tajriba natijalarining bog'liqsizligi buzilishini anglatadi.

3. Uskunaning ishonchliligini nazorat qilishda n ta uskunani tajribadan o'tkazish Bernulli sxemasiga aynan mos keladi.

Bernulli sxemasini qarashda n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa k , $k = \overline{0, n}$ marta yuz berishining $P_n(k)$ ehtimolini topish asosiy masala hisoblanadi. Bu masalaning yechimi quyidagi teoremda keltirilgan.

18.5-Teorema. n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa k , $k = \overline{0, n}$ marta yuz berishining $P_n(k)$ ehtimoli *Bernulli formulasi* deb ataluvchi ushbu

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (18.25)$$

formula bilan hisoblanadi.

◀ Har bir tajribalar ketma-ketligining natijasini $A\bar{A}\bar{A} \dots A$ ketma-ketlik ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu ketma-ketlikni masalan, birinchi tajribada A hodisa yuz bergan, ikkinchisida esa A hodisa yuz bermagan va hokazo n –tajribada A hodisa yuz bergan deb tushunish kerak. Bunday ketma-ketliklar soni, ya'ni barcha yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalar soni 2^n ga teng bo'ladi. Ana shu har bir ketma-ketlikning ehtimolini topaylik: tajribalar bir-biriga bog'liq bo'lmaganligi tufayli $A, \bar{A}, \bar{A}, \dots, A$ hodisalar o'zaro bog'liq emas, shuning uchun (18.22) formulaga ko'ra

$$P(A\bar{A}\bar{A} \dots A) = P(A)P(\bar{A})P(\bar{A}) \dots P(A) = p^i q^{n-i}$$

bo'ladi, chunki A hodisa i marta yuz bersa $\bar{A}$ hodisa $(n - i)$ marta yuz beradi.

Agar $i = k$ bo'lsa, n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa k marta yuz bergan bo'ladi va har bir bunday natijaning ehtimoli $p^k q^{n-k}$ ga teng. Bunday natijalar soni esa n ta elementni k tadan qilib guruhlahlar soni C_n^k ga teng bo'ladi va ular birgalikda bo'lmagan hodisalar. Shuning uchun bu hodisalar ehtimollarining yig'indisi qidirilayotgan $P_n(k)$ ehtimolni beradi:

$$P_n(k) = \underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \dots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ ta qo'shiluvchi}} = C_n^k p^k q^{n-k}. \blacktriangleright$$

(18.25) formulaning o'ng tomoni

$$1 = (p + q)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n$$

Nyuton binomining $(k + 1)$ –hadi ko‘rinishida bo‘lganligi uchun bu formula yana *binomial formula* ham deb ataladi. $P_n(k), k = \overline{0, n}$ ehtimollar birgalkda *ehtimollarning binomial taqsimoti* deb ataladi.

Bernulli formulasidan ikkita muhim natija kelib chiqadi.

1. n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta yuz berish ehtimoli

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad (18.26)$$

formula bilan hisoblanadi.

2. $k_1 = 1$ va $k_2 = n$ bo‘lgan xususiyl holda (18.26) formuladan n marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa kamida 1 marta yuz berish ehtimoli uchun

$$P(k \geq 1) = 1 - q^n \quad (18.27)$$

formulani hosil qilamiz.

18.18-Misol. O‘yin toshi 8 marta tashlandi. Toshning ustki qismiga 6 raqamining:

- 1) 3 marta;
- 2) ko‘pi bilan 3 marta;
- 3) kamida bir marta tushish ehtimollarini hisoblaymiz.

► 1) Bu yerda $p = 1/6$ va $q = 5/6$ bo‘ladi, u holda (18.25) Benulli formulasiga ko‘ra

$$P_8(3) = C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{175000}{1679616} \approx 0,1042;$$

2) $k_1 = 0$ va $k_2 = 3$ va (18.26) formulaga ko‘ra,

$$\begin{aligned} P(k \leq 3) &= C_8^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + C_8^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7 + C_8^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^6 + C_8^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \\ &= \frac{5^8 + 8 \cdot 5^7 + 28 \cdot 5^6 + 56 \cdot 5^5}{1679616} = \frac{1206250}{1679616} \approx 0,718; \end{aligned}$$

3) (18.27) formulaga ko‘ra,

$$P(k \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 = \frac{1288991}{1679616} \approx 0,767$$

talab qilingan ehtimollarni topdik. ◀

18.19-Misol. Har 100 lotereya biletidan bittasida yutuq bo'lsa, kamida bitta biletga yutuq chiqish ehtimoli berilgan $P_0 = 0,9$ qiymatdan kam bo'lmasligi uchun nechta lotereya bileti sotib olish kerak.

► Faraz qilaylik n ta bilet sotib olingan bo'lsin. Masala shartiga ko'ra har bir biletga boshqa biletga bog'liq bo'lmagan holda $p = 0,01$ ehtimol bilan yutuq bor va $q = 1 - 0,01 = 0,99$ ehtimol bilan yutuq yo'q. U holda ana shu sotib olingan n ta biletga kamida bittasida yutuq bo'lish ehtimolini (18.27) formulaga ko'ra hisoblaymiz: $P(k \geq 1) = 1 - 0,99^n$. Masala shartiga ko'ra bu ehtimol $P_0 = 0,9$ qiymatdan kam bo'lmasligi kerak. Shuning uchun $1 - 0,99^n \geq 0,9$ tengsizlikni n ga nisbatan yechamiz: $0,99^n \leq 0,1$ yoki bundan

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,99} \approx 230,$$

ya'ni kamida 230 bilet sotib olinsa, bu biletlardan kamida bittasiga yutuq chiqish ehtimoli 0,9 qiymatdan kam bo'lmaydi. ◀

Agar $P_n(k)$ ehtimol $k = k_0$ bo'lganda eng katta qiymatni qabul qilsa, ya'ni $k = 0, 1, 2, \dots, n, k \neq k_0$ quymatlarda $P_n(k_0) \geq P_n(k)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, k_0 soni n

marta tajriba o'tkazilganda A hodisa yuz berishlarining *eng ehtimolli soni* deb ataladi.

Endi ana shu eng ehtimolli sonni topamiz. Buning uchun $P_n(k+1)$ va $P_n(k)$ ehtimollarning nisbatini qaraylik:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$$

tenglikka ega bo'ldik. Shuning uchun bu tengsizlikdan agar $(n-k)p > (k+1)q$ ya'ni $np - q > k$ bo'lsa, $P_n(k+1) > P_n(k)$ bo'lishi, agar $k = np - q$ bo'lsa

$P_n(k+1) = P_n(k)$ bo'lishi va nihoyat $k > np - q$ bo'lsa $P_n(k+1) < P_n(k)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ko'rinib turibdiki $P_n(k)$ ehtimol k yuz berishlar soni o'sishi bilan o'sib boradi, so'ngra u o'zining maksimum qiymatiga erishadi va nihoyat kamayib boradi. Shuning bilan birga agar $np - q$ butun son bo'lsa, $P_n(k)$ ehtimol k ning ikkita qiymatida, aniqrog'i $k_0 = np - q$ va $k'_0 = np - q + 1 = np + p$ bo'lganda maksimal qiymatga erishadi. Agarda $np - q$ butun son bo'lmasa $P_n(k)$ ehtimollik $np - q$ sonidan katta eng kichik butun sonda maksimal qiymatga erishadi. Shunday qilib, n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa yuz berishlarning eng ehtimolli k_0 soni

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \quad (18.28)$$

tengsizlik orqali aniqlanar ekan.

18.20-Misol. Teng kuchli raqibni to'rt partiyadan uchta yutishmi yoki sakkiz partiyadan beshta yutish ehtimolimi? Bu yerda partiyada durang natija istisno qilinadi deb faraz qilinadi.

► Masala shartiga ko'ra raqiblar teng kuchli, shuning uchun har bir partiyada yutish ham yutqazish ham teng: $p = q = 1/2$. To'rt partiyadan uchta yutish ehtimoli Bernulli formulasiga ko'ra hisoblaymiz:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Xuddi shu singari sakkiz partiyadan beshta yutish ehtimoligini hisoblaymiz:

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}.$$

$1/4 > 7/32$ bo'lganligi uchun, to'rt partiyadan uchta yutish ehtimoliroq. ◀

18.21-Misol. Sifat nazoratidan o'tayotgan 20 ta detallardan har birining sifatli bo'lish ehtimoli 0,92 ga teng bo'lsa, sifatli detallarning eng ehtimolli sonini toping.

► Bu misolda $n = 20, p = 0,92, q = 0,08$. U holda $np - q = 20 \cdot 0,92 - 0,08 = 18,32$ va $np + p = 20 \cdot 0,92 + 0,92 = 19,32$ bo'ladi, natijada (18.28)

tengsizlik $18,32 \leq k_0 \leq 19,32$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tengsizliklarning yechimi-sifatli detallarning eng ehtimoli soni esa $k_0 = 19$ bo‘ladi. ◀

18.11. Bernulli sxemasida taqribiy formulalar

Tajribalar soni n va k katta bo‘lganda Bernulli formulasidan foydalanish juda mushkul bo‘ladi, chunki bu yerda juda katta sonlar ustida amallar bajarishga to‘g‘ri keladi. Masalan, $n = 150, k = 100, p = 0,6$ bo‘lganda Bernulli formulasi $P_{200}(150) = C_{150}^{100}(0,6)^{100}(0,4)^{50}$ ko‘rinishda bo‘ladi va uni hisoblash amaliy jihatdan juda ham qiyin. Bu yerda $P_n(k)$ ehtimolni hisoblash uchun taqribiy formulalar juda qo‘l keladi.

Puasson formulasi

Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta, A hodisaning yuz berish p ehtimoli esa yetarlicha kichik va shuning bilan birga $\lambda = np$ ko‘paytma ham kichik bo‘lsin. U holda $P_n(k)$ ehtimol *Puasson formulasi* deb ataluvchi

$$P_n(k) \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k! , k = \overline{0, n} \quad (18.29)$$

taqribiy formula bilan hisoblanadi. $P(k; \lambda) \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k! , k = 0, 1, \dots$ ehtimollar birgalikda *Puasson taqsimoti* deb ataladi.

λ parametrning ayrim qiymatlarida $P(k; \lambda)$ Puasson taqsimotining qiymatlari jadvali 3-ilovada keltirilgan.

18.20-Misol. Shisha idish qopqog‘ini sifatsiz tayyorlash ehtimoli $p = 0,02$ ga teng. Bir o‘ramga 100 ta qopqoq joylashtiriladi. Ixtiyoriy ravishda tanlangan o‘ramda sifatsiz tayyorlangan qopqoq bo‘lmaslik ehtimolini toping.

► Bernulli sxemasida tajribalar soni katta va hodisaning yuz berish ehtimoli kichik bo‘lganligi tufayli, Puassonning taqribiy formulasidan foydalanamiz. Bu yerda $n = 100, p = 0,02$ va $k = 0$, u holda $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$ bo‘ladi. Berilgan va hisoblangan qiymatlarni (18.29) formulaga qo‘yib

$$P \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = P(0; 2)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. 3-ilovadan $P(0; 2) = 0,1353$ qiymatni, ya’ni qidirilayotgan ehtimolni topamiz. ◀

Muavr-Laplasning lokal formulasi

Agar Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta, A hodisaning yuz berish p ehtimoli va yuz bermaslik q ehtimoli ham katta bo‘lsa, u holda barcha k uchun

$$P_n(k) \approx \varphi(x)/\sqrt{npq} \quad (18.30)$$

Muavr-Laplasning lokal formulasi o‘rinli bo‘ladi, bu yerda

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$\varphi(x)$ funksiya standart normal (yoki gauss) taqsimotining zichlik funksiyasi deb ataladi.

x o‘zgaruvchining ayrim qiymatlarida $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlari 1-ilovada keltirilgan. $\varphi(x)$ funksiya juftligi tufayli x o‘zgaruvchining manfiy qiymatlarida $\varphi(x)$ funksiyaning qiymati

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

tenglikdan foydalanilib aniqlanadi.

18.21-Misol. Agar har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsa, 243 marta tajriba o‘tkazilganda A hodisa 70 marta yuz berish ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 243, k = 70, p = 0,25, q = 0,75$ bo‘ladi. x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37.$$

1-ilovadagi jadvaldan $\varphi(1,37) = 0,1561$ qiymatni topamiz. Uni (18.30) formulaga qo‘yib, qidirilayotgan

$$P_{243}(70) = 0,1561/6,75 = 0,0231$$

ehtimolni topamiz. ◀

18.22-Misol. Bir marta o'q uzilganda o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. Nishonga qarab 400 marta o'q uzilganda 300 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

► Tajribalar soni $n = 400$ va $p = 0,8$ yuz berishlar va $q = 1 - p = 0,2$ yuz bermasliklar ehtimollari nisbatan katta qiymatni qabul qilgan. Shuning uchun $k = 300$ bo'lganda Muavr-Laplasning lokal formulasidan foydalanamiz. Kerakli qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 8, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{8} = -2,5.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning juftligini inobatga olib, 1-ilovadagi jadvaldan $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,01753$ qiymatni topamiz. Uni (18.30) formulaga qo'yib

$$P \approx 0,01753/8 \approx 0,0022$$

qidirilayotgan ehtimolni topamiz. ◀

Muavr-Laplasning integral formulasi

Bernulli sxemasi bo'yicha tajribalar soni n va har bir tajribada A hodisaning yuz berish p va yuz bermaslik $q = 1 - p$ ehtimollari nisbatan katta qiymatlarni qabul qilsa, k yuz berishlar soni k_1 va k_2 qiymatlar oralig'ida yotish $P(k_1 \leq k \leq k_2)$ ehtimoli uchun

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (18.31)$$

taqribiy tenglik o'rinli. Bu yerda

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

va

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

(18.31) formula Muavr-Laplasning integral formulasi, $\Phi(x)$ funksiya esa *standart normal* (yoki *gauss*) *taqsimot funksiyasi* deb ataladi.

18.7-Ta’rif. Ushbu

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $\Phi_0(x)$ funksiya Laplas integrali deb ataladi. 2-ildovada x o‘zgaruvchining musbat qiymatlari uchun $\Phi_0(x)$ funksiyaning qiymatlar jadvali keltirilgan. $\varphi(x)$ funksiyaning juftligi tufayli $\Phi_0(x)$ Laplas integrali toq funksiya bo‘ladi, ya’ni

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

va bundan tashqari

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$$

tenglik o‘rinli.

Laplas integrali yordamida Muavr-Laplasning integral formulasini

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \quad (18.32)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

18.23-Misol. Fabrikada ishlab chiqarilgan maxsulotning 96% oliy navli. Sifat nazorati uchun 200 ta maxsulot tanlandi. Agar ular orasidan 10 ta maxsulot past navli bo‘lib chiqsa, ularning barchasi sexga qaytariladi. Tanlangan 200 ta maxsulotning sifat nazoratidan o‘tish ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 200, p = 0,04$ (past navli maxsulot ishlab chiqarish ehtimoli), $q = 0,96$. Tanlangan 200 maxsulotning sifat nazoratidan o‘tish ehtimolini, ya’ni $P_{200}(0 \leq k \leq 100)$ ehtimolni (18.32) formula bo‘yicha topamiz. Bu yerda $k_1 = 0$ va $k_2 = 10$, hamda kerakli qiymatlarni hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 200 \cdot 0,04}{\sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} \approx -2,89;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 200 \cdot 0,04}{\sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} \approx 0,72$$

va ularni (18.32) formulaga qo'yamiz:

$$P(0 \leq k \leq 10) \approx \Phi_0(0,72) - \Phi_0(-2,89) = \Phi_0(0,72) + \Phi_0(2,89) = 0,26424 + 0,49807 = 0,7623.$$

Shunday qilib, tanlangan maxsulotlarning sifat nazoratidan o'tish ehtimoli $P = 0,7623$ ga teng ekan. ◀

18.24-Misol. O'yin toshi 540 marta tashlanganda "olti" raqami 80 martadan 100 martagacha tushish ehtimolini hisoblang.

► Demak, masala shartiga ko'ra $n = 540, p = 1/6, q = 5/6$ va $k_1 = 80, k_2 = 100$ bo'ladi. U holda

$$x_1 = \frac{80 - 540 \cdot 1/6}{\sqrt{540 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx -1,1547, x_2 = \frac{100 - 540 \cdot 1/6}{\sqrt{540 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \approx 1,1547$$

va ularni (18.32) formulaga qo'yib, 3-ilovadagi jadval qiymatlaridan foydalanib

$P \approx \Phi_0(1,1547) - \Phi_0(-1,1547) = 2 \cdot \Phi_0(1,1547) \approx 2 \cdot 0,43875 = 0,8775$, "olti" raqamining 80 martadan 100 martagacha tushish ehtimolini topdik. ◀

Laplas integrali yordamida n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa yuz berishlar sonining $m(A)/n$ nisbiy chastotasining bu hodisa p ehtimolidan chetlanish ehtimolini topish mumkin.

$|m(A)/n - p| \leq \varepsilon$ tengsizlikdan $-\varepsilon \leq m(A)/n - p \leq \varepsilon$ va undan $np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi, bu yerda $\varepsilon > 0$ birorta son. Shuning uchun

$$P(|m(A)/n - p| \leq \varepsilon) = P(np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. O'ng tomondagi ehtimolda $k_1 = np - n\varepsilon, k_2 = np + n\varepsilon$ deb,

$$x_1 = \frac{np - n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad x_2 = \frac{np + n\varepsilon - np}{\sqrt{npq}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

qiymatlarni aniqlab olamiz. U holda (18.32) formulaga ko'ra

$$P(np - n\varepsilon \leq m(A) \leq np + n\varepsilon) = \Phi_0\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi_0\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

va demak $m(A)/n$ nisbiy chastotaning bu hodisa p ehtimolidan chetlanish ehtimoli

$$P(|m(A)/n - p| \leq \varepsilon) = 2 \cdot \Phi_0(\varepsilon \sqrt{n/pq}) \quad (18.33)$$

formula bilan hisoblanar ekan.

18.25-Misol. O‘qning nishonga tegish ehtimoli $p = 0,6$ ga teng. Nishonga qarab $n = 1200$ marta o‘q uzilganda nishonga tegishlar soni nisbiy chastotasining p ehtimoldan mutlaq chetlanishi $\varepsilon = 0,05$ dan oshmaslik ehtimolini toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 1200, p = 0,6, q = 1 - p = 0,4$ va $\varepsilon = 0,05$. Ularni (18.33) formulaga qo‘yamiz va:

$$P\left(\left|\frac{m(A)}{1200} - 0,6\right| \leq 0,05\right) = 2 \cdot \Phi_0\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{1200}{0,6 \cdot 0,4}}\right) = 2 \cdot \Phi_0(3,54) = 0,9996$$

ehtimolga ega bo‘lamiz. ◀

18.12. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Mazkur bobning oldingi mavzularida qandaydir tajribaning natijasi bo‘lgan birorta A tasodifiy hodisaning ehtimoli xossalarini o‘rgandik. Biroq ehtimollar nazariyasining fan sifatida yuzaga kelganidan buyon tajribalarning natijasi bo‘lgan tasodifiy hodisalarning ehtimoli xossalarini o‘rganish asosiy masala bo‘lmasdan, balki bu tajribalar bilan bog‘liq *tasodifiy miqdorlar* deb ataluvchi sonli miqdorlarni o‘rganish asosiy masala deb hisoblash mumkin. Mazkur mavzudan boshlab barcha keyingi mavzularda aynan shu tasodifiy miqdorlarni o‘rganamiz.

18.8-Ta’rif. Tajriba natijasida oldindan qaysi qiymatini qabul qilishi noma’lum bo‘lgan miqdorni *tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

Tasodifiy miqdorlar bosh lotin $X, Y, Z, \dots$ harflari bilan (yoki kichik grek ξ (ksi), η (eta), θ (teta), ψ (psi),... harflari bilan) belgilanadi. Ularning qabul qiladigan qiymatlari esa mos kichik $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ harflar bilan belgilanadi. Tasodifiy miqdorlarga misol sifatida o‘yin toshi tashlanganda toshning ustki qismiga tushgan

raqamni, nishonga birinchi marta tekkinga qadar otiladigan o'qlar soni, havoning temperaturasi, odamning bo'yi va shunga o'xshashlarni ko'rsatish mumkin.

18.9-Ta'rif. Chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdorni *diskret tasodifiy miqdor*, sanoqsiz sondagi qiymatlarni chekli yoki cheksiz oraliqlarni to'ldirib qabul qiluvchi miqdor esa *uzluksiz tasodifiy miqdor* deb ataladi.

Demak, diskret tasodifiy miqdor bir-biridan ajralgan qiymatlarni, uzluksiz tasodifiy miqdor esa birorta oraliqning ixtiyoriy qiymatini (masalan, kesmadagi yoki son o'qidagi ixtiyoriy qiymatni) qabul qilishi mumkin. O'yin toshida tushgan raqam, nishonga qarab otilgan o'qlar soni- diskret tasodifiy miqdor va havo temperaturasi, odamning bo'yi uzluksiz tasodifiy miqdor bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning ehtimoli xossalarini o'rganish uchun tasodifiy miqdor o'zining qiymatlari to'plamidan qiymatni qabul qilish ehtimolini topish qoidasini bilish kerak bo'ladi. Har qanday xildagi qoidani tasodifiy miqdor *ehtimollarining taqsimot qonuni* yoki tasodifiy miqdor (*ehtimollarining*) *taqsimoti* deb ataladi. Ko'pgina hollarda "ehtimol" so'zi qoldirib ketiladi.

Taqsimot funksiyasi barcha tasodifiy miqdorlarga xos bo'lgan umumiy taqsimot qonuni bo'ladi.

18.10-Ta'rif. X tasodifiy miqdor *ehtimollarining taqsimot funksiyasi* deb, x nuqtadagi qiymati $\{X < x\}$ hodisaning ehtimoliga teng bo'lgan $F(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (18.34)$$

Ko'pincha taqsimot funksiyasining x nuqtadagi qiymati X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatni qabul qilish ehtimoliga teng deb aytiladi.

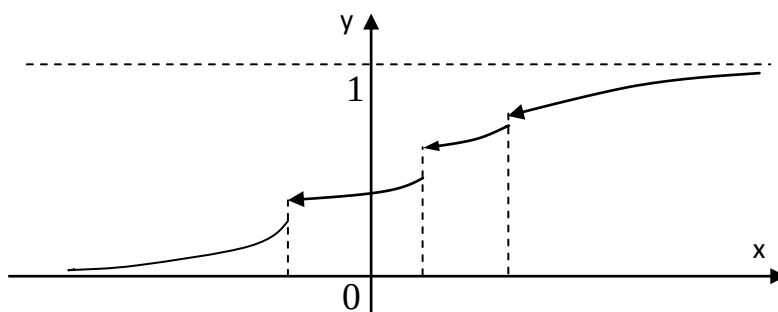
18.6-Teorema. Ehtimollarning taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $x_1 < x_2$ bo'lsa, $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'ladi (ya'ni $F(x)$ —kamaymaydi);
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;

$$4. P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1);$$

5. $F(x)$ chapdan uzluksiz funksiya.

18.3-rasm da taqsimot funksiyasiga xos bo'lgan funksiya grafigi keltirilgan.



18.3-rasm

18.1-Mulohaza. Ushbu

$$F(-\infty) = 0 \text{ va } F(+\infty) = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday kamaymaydigan chapdan uzluksiz $F(x)$ funksiya birorta X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bo'ladi.

18.13. Diskret tasodifiy miqdorlar

X – diskret tasodifiy miqdor o'zining chekli yoki sanoqli sondagi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymatlarini mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tajriba natijasida X tasodifiy miqdor x_i qiymatini qabul qilish ehtimolini aniqlovchi $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, n, \dots$ formula orqali berish qulay. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

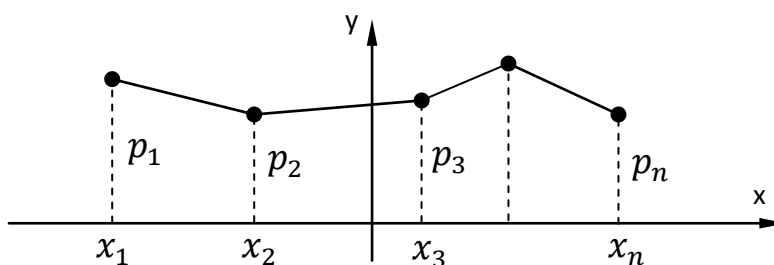
taqsimot jadvali ko'rinishida berilishi mumkin, bu yerda birinchi satrda tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (ko'pincha ular o'sib borish tartibida joylashtiriladi), ikkinchi satrga esa ularning mos ehtimollari joylashtiriladi. Bunday jadvalni diskret tasodifiy miqdor *taqsimot qatori* deb ataymiz.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq guruhini tashkil qiladi, shu sababli ular ehtimollarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\sum_i p_i = 1 \quad (18.35)$$

bo'ladi.

Diskret tasodifiy miqdor qiymatlarini abssissa o'qiga, ularning ehtimollarini esa ordinata o'qiga joylashtirib, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini grafik ko'rinishda tasvirlash mumkin. $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqni taqsimotning poligoni deb ataymiz (18.4-rasm).



18.4-rasm

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatori bo'yicha uning $F(x)$ taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \quad (18.36)$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda yig'indi $x_i < x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha i bo'yicha olinadi. (18.36) tenglik (18.34) tenglikdan bevosita kelib chiqadi.

Xususiyl holda X diskret tasodifiy miqdor chekli sondagi qiymatlarni qabul qilsin va

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

taqsimot qatorida qiymatlar o'sib borish tartibida joylashtirilgan bo'lsin. U holda barcha $x \leq x_1$ larda $\{X < x\}$ mumkin bo'lmagan hodisa va shuning uchun (18.36) formulaga ko'ra $F(x) = 0$ bo'ladi (18.5-rasm). Agar $x_1 < x \leq x_2$ bo'lsa, $\{X < x\}$ hodisa $\{X = x_1\}$ bo'lgandagina yuz beradi, shuning uchun $F(x) = P\{X = x_1\} = p_1$

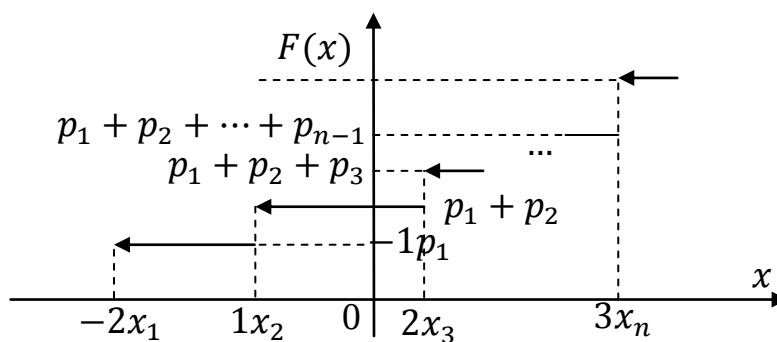
bo'ladi. Xuddi shunday $x_2 < x \leq x_2$ bo'lsa, $\{X < x\}$ hodisa yoki $\{X = x_1\}$ bo'lganda, yoki $\{X = x_2\}$ bo'lganda yuz beradi, ya'ni

$$\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\}$$

va demak

$$F(x) = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\} = p_1 + p_2$$

va hokazo. Nihoyat $x > x_n$ bo'lsa, $\{X < x\}$ muqarrar hodisa bo'ladi va $F(x) = 1$.



18.5-rasm

Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $(-\infty; x_1]$ oraliqda 0 qiymatni, $(x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i < n$ oraliqlarda $p_1 + p_2 + \dots + p_i$ va $(x_n, +\infty)$ oraliqda 1 qiymatni qabul qiluvchi bo'lakli o'zgarmas funksiya bo'lar ekan.

18.26-Misol. Taqsimot qatori

X	-1	1	3
P	0,2	0,5	0,3

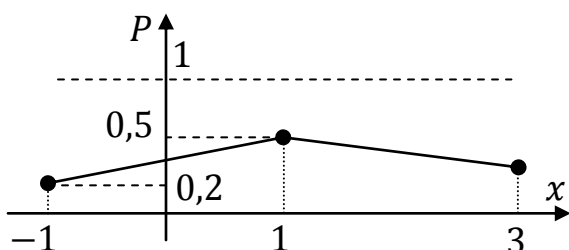
jadvalda berilgan X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing va taqsimot poligoni hamda taqsimot funksiyasining grafigini yasang.

► Yuqorida keltirilgan usul bo'yicha taqsimot funksiyasini tuzamiz. Unga ko'ra agar $x \leq -1$ bo'lsa, $F(x) = 0$ va $-1 < x \leq 1$ bo'lsa, $F(x) = 0,2$ hamda $1 < x \leq 3$ bo'lsa, $F(x) = 0,2 + 0,5 = 0,7$ va nihoyat $3 < x$ bo'lsa $F(x) = 0,2 + 0,5 + 0,3 = 1$ bo'ladi. Bularni umumlashtirib,

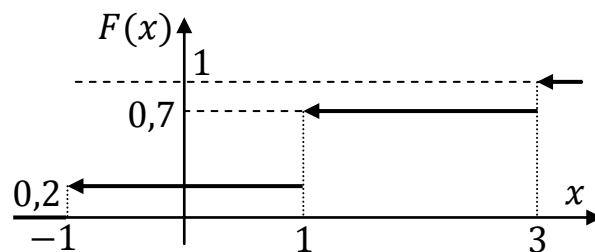
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 0,2, & -1 < x \leq 1, \\ 0,7, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

taqsimot funksiyasini hosil qildik.

X tasodifiy miqdor taqsimot poligoni 18.6-rasmda va taqsimot funksiyasining grafigi esa 18.7-rasmda tasvirlangan. ◀



18.6-rasm



18.7-rasm

Ayrim diskret tasodifiy miqdorlar

Biz quyida amaliyotda ko‘p uchraydigan ayrim tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz.

Binomial taqsimot. Agar X tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni

$$P\{X = i\} = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, i = \overline{0, n} \quad (18.37)$$

formulaga ko‘ra hisoblanadigan ehtimollar bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor *binomial taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataladi, bu yerda $0 < p, q < 1$ va $p + q = 1$. Uning taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^i p^i q^{n-i}$	...	p^n

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu taqsimot uchun (18.35) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i=0}^n P_n(i) = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i} = (p + q)^n = 1.$$

Ehtimolliklar taqsimoti formulasiga e'tibor beradigan bo'lsak, binomial taqsimot yuz berish ehtimoli p bo'lgan Bernulli sxemasidagi yuz berishlar soni ehtimollarining taqsimoti ekanligiga amin bo'lamiz.

Puasson taqsimoti. Butun nomanfiy qiymatlarni ehtimollari

$$P\{X = i\} = \lambda^i e^{-\lambda} / i!, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (18.38)$$

formulaga ko'ra hisoblanadigan tasodifiy miqdorlarga λ parametrli *Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdor* deb ataymiz. Bu tasodifiy miqdor taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$	...

ko'rinishda bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimoti uchun (18.35) tenglikning bajarilishini tekshiramiz.

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Geometrik taqsimot. Bernulli sxemasini qaraymiz. Har bir tajribada A hodisa p ehtimol bilan yuz bersin va $q = 1 - p$ ehtimol bilan yuz bermasin. A hodisa yuz bergunga qadar o'tkazilgan tajribalar soni X bo'lsin. U holda X diskret tasodifiy miqdor bo'lib, u $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ qiymatlarni qabul qiladi. $\{X = n\}$ hodisaning ehtimolini topamiz. Agar birinchi tajribada A hodisa yuz bersa, $X = 0$ ekanligi ravshan. Shuning uchun

$$P\{X = 0\} = p.$$

$X = 1$ bo'lishi uchun birinchi tajribada A hodisa yuz bermagan, ikkinchisida esa yuz bergan bo'lishi kerak. Bunday hodisaning ehtimoli qp ga teng bo'ladi, ya'ni

$$P\{X = 1\} = qp.$$

Xuddi shu singari, agar dastlabki ikki tajribada A hodisa yuz bermasa va uchinchi tajribada yuz bersa $X = 2$ bo'ladi va demak

$$P\{X = 2\} = qqp.$$

Bu mulohazalarni davom ettirib,

$$P\{X = i\} = q^i p, k = 0, 1, 2, \dots$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qatori

X	0	1	2	...	i	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^i p$	...

ko‘rinishda bo‘ladi. Taqsimot qatori bu jadvalda berilgan tasodifiy miqdorni *geometrik taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataymiz. Bu tasodifiy miqdor uchun ham (18.35) tenglik o‘rinli:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

18.14. Uzlüksiz tasodifiy miqdorlar

18.11-Ta’rif. Agar X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funksiyasini ixtiyoriy x uchun

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (18.39)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, uni biz *uzlüksiz tasodifiy miqdor* deb ataymiz, bu yerda nomanfiy $f(x)$ funksiya X tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining *zichlik funksiyasi* deb ataladi yoki qisqacha *zichlik funksiyasi* deb ataymiz.

Amaliyotda uchraydigan barcha taqsimotlarning zichlik funksiyalari uzlüksiz bo‘ladi (chekli sondagi nuqtalardan tashqari). Shu sababli uzlüksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari butun son o‘qida uzlüksiz bo‘ladi va yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integralning xossalariga ko‘ra $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining uzlüksizlik nuqtalarida

$$f(x) = F'(x) \quad (18.40)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

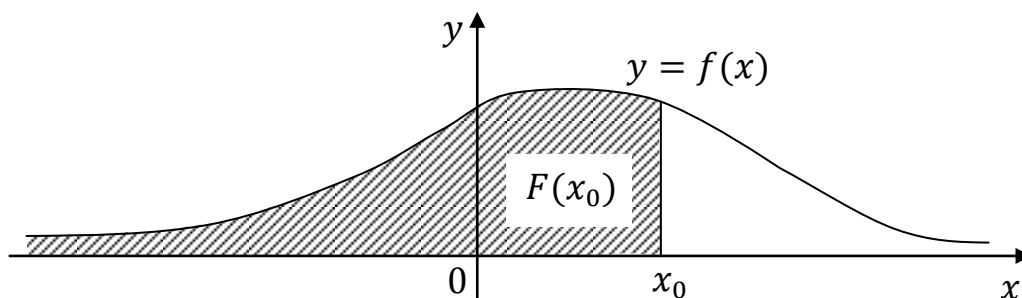
Amaliyotda ko‘pincha $F(x)$ taqsimot funksiyasini tasodifiy miqdor *taqsimotining integral qonuni*, taqsimotning $f(x)$ zichlik funksiyasini esa tasodifiy

miqdor taqsimotining differensial qonuni deb ataladi. Bunday ishlatiladigan terminalogiyani (18.39) va (18.40) tengliklar izohlaydi.

Taqsimotning zichlik funksiyasi uchun $f(x) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli aniq integralning geometrik talqiniga ko'ra

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(y) dy$$

integralning qiymati yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, quyidan Ox o'q va o'ng yon tomondan $x = x_0$ to'g'ri chiziq kesmasi bilan chegaralangan cheksiz figuraning yuziga teng (18.8-rasm).



18.8-rasm

18.7-Teorema. Taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1) P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx;$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

3) Zichlik funksiya uzluksiz bo'lgan nuqtalarda

$$P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx f(x) \Delta x.$$

◀1) Taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Bundan esa uzluksiz tasodifiy miqdorning ta'rifiga va xosmas integralning xossalari ko'ra

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

2) Xususiy holda $x_1 = -\infty$ va $x_2 = +\infty$ bo'lganda $\{x_1 \leq X < x_2\}$ hodisa muqarrar bo'ladi va shu sababli ikkinchi tasdiq o'rinli.

3) Taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan

$$P\{x \leq X < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Differensiallanuvchi funksiyaning orttirmasi yetarli kichik Δx larda uning differensialiga teng: $\Delta F(x) \approx dF(x) = f'(x)\Delta x$. ►

Ayrim uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Biz quyida amaliyotda ko'p uchraydigan ayrim uzluksiz tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz. Bu yerda keltiriladigan $F(x)$ funksiyalar taqsimot funksiyasi bo'lishi 18.1-Mulohazadan kelib chiqadi va uni tekshirib o'tirmaymiz.

Tekis taqsimot. Agar tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a \text{ yoki } x > b \end{cases}$$

tenglik bilan berilsa, bunday tasodifiy miqdorni $[a, b]$ kesmada *tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

$F(x)$ taqsimot funksiyasini (18.39) formulaga ko'ra topamiz. Agar $x < a$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x 0dy = 0,$$

agar $a \leq x \leq b$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^a 0dy + \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a},$$

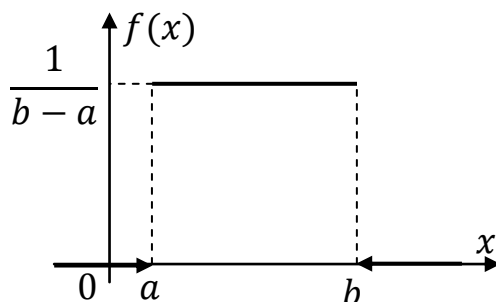
va nihoyat $x > b$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^a 0dy + \int_a^b \frac{1}{b-a} dy + \int_b^x 0dy = 1$$

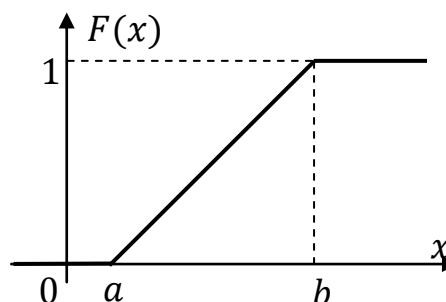
bo'ladi. Shunday qilib ularni umumlashtircak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

taqsimot funksiyasini hosil qilamiz.



18.9-rasm



18.10-rasm

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasi va $F(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 18.9 va 18.10-rasmlarda berilgan.

Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning $[a, b]$ kesmaning ichida yotgan (x_1, x_2) oraliqqa tushish ehtimoli $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)/(b - a)$ tenglik bilan aniqlanadi, ya'ni bu ehtimol (x_1, x_2) oraliq uzunligiga proporsional. Demak tekis taqsimot, nuqtani $[a, b]$ kesmaga tashlanganda hisoblanadigan geometrik ehtimol bilan bir xil ekan.

Ekspontensial taqsimot. Agar tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlansa, bunday tasodifiy miqdor *eksponensial (ko'rsatkichli) qonun* bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deb ataladi, bu yerda $\lambda > 0$ –eksponensial taqsimotning parametri.

Ekspontensial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini (18.39) formula bo'yicha topamiz. Agar $x < 0$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy = 0,$$

va agar $x \geq 0$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^0 0dy + \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = -e^{-\lambda y} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

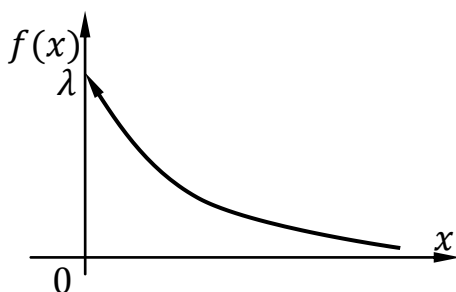
bo‘ladi. Ularni umumlashtirib

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

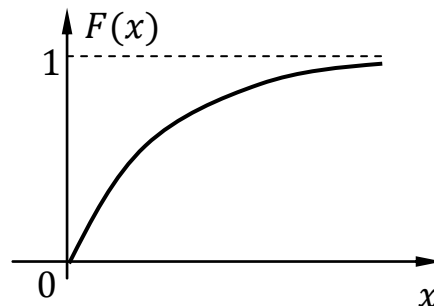
taqsimot funksiyasining formulasini hosil qildik.

Ekspontensial taqsimlangan tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasi va $F(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 18.11 va 18.12-rasmlarda berilgan.

Ekspontensial taqsimlangan tasodifiy miqdor faqat musbat qiymatlarnigina qabul qilishi mumkin.



18.11-rasm



18.12-rasm

Ekspontensial taqsimot bilan Puasson taqsimoti bir-biriga bog‘liq. Agar birorta hodisaning ketma-ket yuz berishlari orasidagi vaqt oraliqlari o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ekspontensial taqsimlangan (bir xil λ parametrli) tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda bu hodisaning t vaqt oralig‘ida yuz berishlari soni λt parametrli Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Normal taqsimot. Taqsimotning zichlik funksiyasi,

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < m < +\infty, \sigma > 0)$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor, *normal (gauss) qonuni* bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Bu funksiya uchun zichlikning 2-xossasi bajarilishini tekshiramiz. Buning uchun Puasson integrali deb ataluvchi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

integraldan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \left| t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}, dx = \sqrt{2}\sigma dt \right|_{x=-\infty, t=-\infty; x=\infty, t=\infty} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned}$$

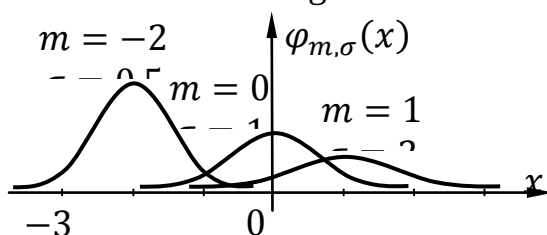
$\varphi_{m,\sigma}(x)$ funksiyaning boshlang'ichini elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

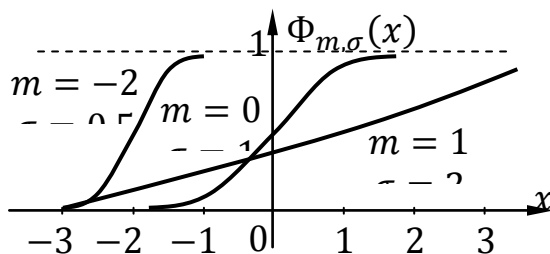
ko'rinishda bo'ladi.

m va σ parametrlarning turli qiymatlarida normal taqsimotning $\varphi_{m,\sigma}(x)$ zichlik funksiyasi va $\Phi_{m,\sigma}(x)$ taqsimot funksiyasining grafiklari 18.13 va 18.14-rasmlarda keltirilgan.

Rasmlardan ko'rinib turibdiki, m parametr normal taqsimot zichlik funksiyasining simmetriya markazini aniqlar ekan, ya'ni normal taqsimot zichlik funksiyasining grafigi $x = m$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi, σ – esa tasodifiy miqdor qiymatlarining simmetriya markaziga nisbatan sochilishini aniqlar ekan. Agar $m = 0$ va $\sigma = 1$ bo'lsa, taqsimot *normal standart taqsimot* deb ataladi va taqsimot funksiyasini $\Phi(x)$ orqali, zichlik funksiyasini esa $\varphi(x)$ orqali belgilanadi. Standart normal taqsimot funksiyasini va zichligini Muavr-Laplasning lokal va integral formulalarida ko'rgan edik.



18.13-rasm



18.14-rasm

m va σ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni $X = N[m, \sigma]$ orqali belgilaymiz.

Bir o'zgaruvchili funksiyalarning integral kursidan ma'lumki $\int e^{-x^2/2} dx$ integralni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun ko'pgina oily matematikaga oid adabiyotlarda standart normal taqsimot funksiyasining qiymatlari berilgan. 2-ilovadan foydalanib ixtiyoriy m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning (a, b) oraliqga tushish ehtimolini topishni ko'rsatamiz.

Taqsimot zichlik funksiyasining 1) xossasiga binoan m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning (a, b) intervalga tushish ehtimoli

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda $x = (y - m)/\sigma$ almashtirish olsak, so'ngi integralni

$$P\{a < X < b\} = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \varphi(x) dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan esa, oxirgi asosiy

$$P\{a < X < b\} = \Phi_0((b - m)/\sigma) - \Phi_0((a - m)/\sigma) \quad (18.41)$$

formulani hosil qilamiz.

Veybulla taqsimoti. Agar tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ko'rinishda bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor *Veybulla qonuni* bo'yicha taqsimlangan deyiladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ko'rinishda bo'lishini oson tekshirish mumkin.

Veybulla taqsimotlari oilasi ikki α, β –parametrli bo‘lib, ular musbat tasodifiy miqdorlarni aniqlaydi.

Ko‘pgina texnik jihozlarning buzilmasdan ishlash vaqti Veybulla taqsimotiga bo‘ysunadi. Agar $\beta = 1$ bo‘lsa, Veybulla taqsimoti eksponensial taqsimotga aylanadi. $\beta = 2$ bo‘lganda

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

Releya taqsimotiga ega bo‘lamiz.

Gamma-taqsimot. Ko‘pgina texnik jihozlarning buzilmasdan ishlash vaqtini tasvirlovchi boshqa bir taqsimot *gamma-taqsimot* bo‘lib, uning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\lambda^\gamma x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0, \gamma > 0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda,

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^\gamma e^{-x} dx$$

bo‘lib, u Eyler gamma-funksiasi deb ataladi. Bu funksiya ushbu muhim xossalarga ega: $\Gamma(\gamma + 1) = \gamma \Gamma(\gamma)$ va butun n uchun $\Gamma(n) = (n - 1)!$ bo‘ladi.

$\gamma = n$ –natural son bo‘lsa, n –tartibli *Erlang taqsimotini* hosil qilamiz. Agar $\gamma = n/2$, n – toq son va $\lambda = 1/2$ bo‘lsa, matematik statistikada juda ko‘p qo‘llaniladigan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

χ^2 (*xi kvadrat*) taqsimotni hosil qilamiz, bu yerda n – parametr χ^2 taqsimotning *erkinlik darajasi* deb ataladi. Nihoyat, $\gamma = 1$ bo‘lsa, yuqorida qaralgan eksponensial taqsimotni hosil qilamiz.

18.27-Misol. X tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} A \cos x, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

tenglik bilan berilgan bo'lsa,

- 1) A koeffitsiyentni toping;
- 2) $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining grafigini yasang;
- 3) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini yasang;
- 4) X tasodifiy miqdorning $(0, \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolligini toping.

► 1. A koeffitsiyentni topish uchun zichlik funksiyasining 2-xossasidan foydalanamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A \cos x dx = 2A = 1,$$

va bundan $A = 1/2$ qiymatni topamiz.

2. $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining grafigi 18.15-rasmda tasvirlangan.

3. $F(x)$ taqsimot funksiyasini (18.39) formulaga ko'ra topamiz:

agar $x < -\pi/2$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy = 0;$$

agar $|x| \leq \pi/2$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2} \cdot \cos y dy = \frac{1}{2}(\sin x + 1);$$

agar $x > \pi/2$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cdot \cos y dy + \int_{\pi/2}^x 0 dy = 1$$

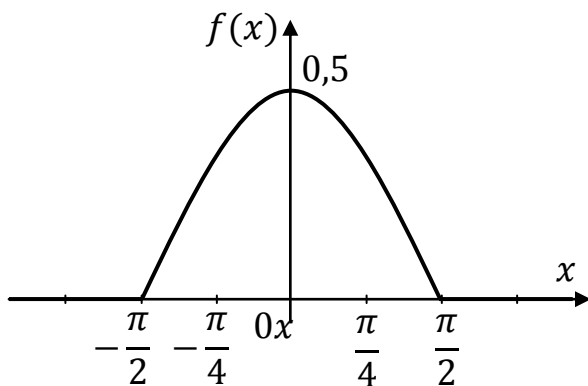
bo'ladi. Bu uchta ifodani birlashtirib taqsimot funksiyasining

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1), & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

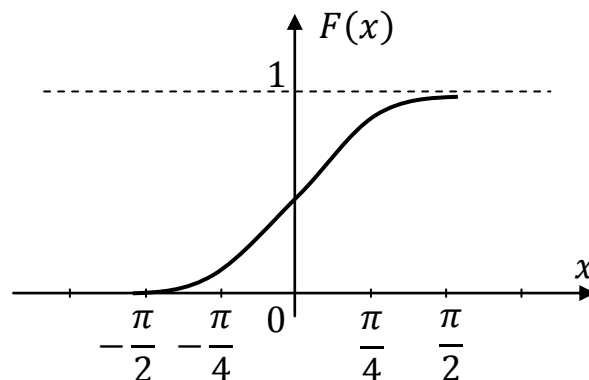
formulasini hosil qilamiz, uning grafigi 18.16-rasmda tasvirlangan.

4. X tasodifiy miqdorning $(0, \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolligini taqsimot funksiyasining 4-xossasiga binoan topamiz:

$$P\left\{0 \leq X < \frac{\pi}{4}\right\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sin \frac{\pi}{4} + 1\right) - (\sin 0 + 1)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



18.15-rasm



18.16-rasm

18.15. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Taqsimot qonuni tasodifiy miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Biroq ko'pgina amaliy masalalarni yechishda tasodifiy miqdor taqsimot qonunining alohida muhim xususiyatlarini tavsiflovchi sonli parametrlarni bilish yetarli. Bunday sonlar tasodifiy miqdorlarning *sonli xarakteristikalari* deb ataladi.

Ular orasida matematik kutilma (tasodifiy miqdor taqsimotining markazi), moda, mediana, dispersiya (tasodifiy miqdor qiymatlarining uning markazidan chetlanishi), o'rtacha kvadratik chetlanish muhim hisoblanadi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

18.12-Ta'rif. $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ taqsimot qonuniga ega bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* (yoki *o'rtacha qiymati*) deb bu tasodifiy miqdor barcha qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi.

Matematik kutilma MX (yoki $M[X]$, $M(X)$, EX , m_X , a_X) orqali belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (18.42)$$

Agar X diskret tasodifiy miqdorning qiymatlari soni cheksiz bo'lsa, u holda:

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (18.43)$$

va o'ng tomondagi qator yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi (aks holda X tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lmaydi).

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nazariy mexanikadagi og'irlik markazi tushunchasiga o'xshash. Massalari p_i ($\sum_i p_i = 1$) bo'lgan material nuqralar sistemasi to'g'ri chiziqda joylashgan va i —nuqtaning koordinatasi x_i bo'lsin. U holda bu sistemaning markazi

$$\bar{X} = \frac{\sum_i x_i p_i}{\sum_i p_i} = \frac{\sum_i x_i p_i}{1} = \sum_i x_i p_i$$

koordinataga ega bo'ladi. Bu koordinata X tasodifiy miqdorning MX matematik kutilmasiga teng bo'ladi.

18.28-Misol. Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{i=0}^n i P_n(i) = \sum_{i=0}^n i C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i! (n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=1}^n np \frac{(n-1)!}{(i-1)! (n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{n-1-j} = np \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np. \end{aligned}$$

18.29-Misol. Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

18.30-Misol. Geometrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz, bu yerda $i q^{i-1} = (q^i)'_q$ hosiladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
 MX &= \sum_{i=0}^{\infty} i p q^i = p q \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} = p q \sum_{i=0}^{\infty} (q^i)'_q = p q \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)'_q = p q \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \\
 &= \frac{p q}{(1-q)^2} = \frac{p q}{p^2} = \frac{q}{p}.
 \end{aligned}$$

18.13-Ta'rif. X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (18.44)$$

integralga aytiladi, bu yerda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty,$$

ya'ni matematik kutilmani aniqlovchi xosmas integral mutlaq yaqinlashadi deb faraz qilinadi.

18.31-Misol. $[a, b]$ kesmada tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz.

► $x < a$ va $x > b$ bo'lganda $f(x) = 0$ bo'lganligi uchun

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \frac{b+a}{2},$$

ya'ni MX matematik kutilma $[a, b]$ kesmaning o'rtasi bilan ustma-ust tushar ekan. ◀

18.32-Misol. Eksponensial taqsimotning matematik kutilmasini topamiz.

► Bu yerda ham $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$ ekanligini inobatga olib,

$$\begin{aligned}
 MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^b x e^{-\lambda x} dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{\lambda x} \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{\lambda b} \left(b + \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda},
 \end{aligned}$$

ya'ni eksponensial taqsimotning matematik kutilmasi λ parametrga teskari proporsional ekan. ◀

18.33-Misol. m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz.

► Normal taqsimotning aniqlanishiga ko'ra,

$$\begin{aligned}
MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[t = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}, \right. \\
&\quad \left. dx = \sqrt{2}\sigma dt \right] = \\
&= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma t + m) e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,
\end{aligned}$$

birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegaralari esa nolga nisbatan simmetrik, ikkinchisi esa Puasson integrali va u $\sqrt{\pi}$ ga teng, ya'ni $MX = m$. Shunday qilib, m –parametr matematik kutilma ekan. ◀

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarishning matematik kutilmasi o'ziga teng, ya'ni

$$Mc = c.$$

2. O'zgarish ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(cX) = cMX.$$

3. Yig'indining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

4. Tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan chetlanishining matematik kutilmasi nolga, ya'ni

$$M(X - MX) = 0.$$

5. O'zaro bog'liq bo'lmagan ikkita tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng, ya'ni agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa,

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

► 1. O'zgarishni faqat bitta c qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin. Shuning uchun $Mc = c \cdot P\{X = c\} = c \cdot 1 = c$.

2. cX tasodifiy miqdor cx_i ($i = \overline{1, n}$) qiymatlarni p_i ehtimollar bilan qabul qiladi, shu sababli

$$M(cX) = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cMX.$$

3. X va Y tasodifiy miqdorlar mos ravishda x_i ($i = \overline{1, m}$) va y_j ($j = \overline{1, n}$) qiymatlarni qabul qilsin, u holda

$$\sum_{j=1}^n \{X = x_i, Y = y_j\} = \left\{ X = x_i, \sum_{j=1}^n \{Y = y_j\} \right\} = \{x = x_i, \Omega\} = \{x = x_i\},$$

Bundan esa,

$$p_i = P\{x = x_i\} = P\left(\sum_{j=1}^n \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{j=1}^n P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

tenglikni yozish mumkin. 3-xossani ana shu tenglikdan foydalanib isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n p_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m p_{ij} = \sum_{i=1}^m x_i p_i + \sum_{j=1}^n y_j p_j = MX + MY. \end{aligned}$$

4. 1 va 3-xossalarga binoan $M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0$ bo'ladi. Bu yerda qaralayotgan $X - MX$ ayirma X tasodifiy miqdorning MX matematik kutilmadan chetlanishi deb ataladiva $\dot{X}$ orqali belgilanadi:

$$\dot{X} = X - MX.$$

Bu $\dot{X}$ tasodifiy miqdory ana *markazlashtirilgan* tasodifiy miqdor ham deb ataladi.

5. Shartga ko'ra X va Y o'zaro bog'liq emas, u holda $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} =$

$= P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j$ bo'ladi. Demak

$$\begin{aligned} M(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} = \\ &= \sum_{i=1}^m x_i p_i \sum_{j=1}^n y_j p_j = MX \cdot MY. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Diskret tasodifiy miqdorlarga isbotlangan barcha xossalar uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli. Masalan,

$$M(cX) = \int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = c \cdot MX.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi

18.13-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning DX dispersiyasi deb, bu tasodifiy miqdorning MX matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (18.45)$$

Endi (18.42)-(18.45) formulalar yordamida dispersiyani hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Agar X diskret tasodifiy miqdor chekli sondagi qiymatlarni qabul qilsa,

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i \quad (18.46)$$

va agar cheksiz sondagi qiymatlarni qabul qilsa,

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i. \quad (18.47)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \quad (18.48)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Amalda dispersiya uchun

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \quad (18.49)$$

formuladan foydalanish qulay. Bu formula (18.45) formuladan kelib chiqadi: $DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) = MX^2 - M(2X \cdot MX) + (MX)^2 = MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$.

O'z navbatida (18.49) formula dispersiyani hisoblash uchun

$$DX = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2 \quad (18.50)$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (MX)^2 \quad (18.51)$$

formulalardan foydalanish imkonini beradi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. O'zgarmasning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$Dc = 0.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(cX) = c^2DX.$$

3. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalari yig'indisiga teng, ya'ni agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

4. Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(XY) = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2.$$

$$\blacktriangleright 1. Dc = M(c - Mc)^2 - M(c - c)^2 = M0 = 0.$$

$$2. D(cX) = M(cX - M(cX))^2 = M(cX - cMX)^2 = M(c^2(X - MX)^2) = \\ = c^2M(X - MX)^2 = c^2DX.$$

3. (18.49) formuladan foydalanamiz:

$$D(X + Y) = M(X + Y)^2 - (M(X + Y))^2 = MX^2 + 2M(XY) + MY^2 - (MX)^2 - \\ - 2MX \cdot MY - (MY)^2 = MX^2 + 2MX \cdot MY + MY^2 - \\ - (MX)^2 - 2MX \cdot MY - (MY)^2 = MX^2 - (MX)^2 + MY^2 - (MY)^2 = DX + DY.$$

4. Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, X^2 va Y^2 ham o'zaro bog'liq bo'lmaydi. U holda (18.49) formuladan foydalanamiz:

$$D(XY) = M(XY)^2 - (M(XY))^2 = M(X^2Y^2) - (MX \cdot MY)^2 = \\ = MX^2 \cdot MY^2 - (MX)^2 \cdot (MY)^2. \blacktriangleleft$$

Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi

DX dispersiya X tasodifiy miqdor kvadrati o'lchovi bilan bir xil, bu esa taqqoslash uchun noqulay. Tasodifiy miqdor sochilishini baholovchi miqdor tasodifiy

miqdorning o'ldhovi bilan bir xil bo'lishi uchun yana bir sonly xarakteristikani- o'rtacha kvadratik chetlanish tushunchasini kiritamiz.

18.14-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* yoki *standart chetlanishi* deb, uning dispersiyasidan olingan kavadratik ildizga aytiladi va σ_X (yoki $\sigma[X]$, σ) orqali belgilanadi.

$$\text{Shunday qilib ta'rifga ko'ra } \sigma_X = \sqrt{DX}. \quad (18.52)$$

Dispersiyaning xossalardan o'rtacha kvadratik chetlanishning quyidagi xossalari kelib chiqdi: $\sigma c = 0$, $\sigma_{cX} = |c|\sigma_X$, $\sigma(c + X) = \sigma_X$.

$Z = (X - MX)/\sigma_X$ tasodifiy miqdorni standart tasodifiy miqdor deb ataymiz. Uning matematik kutilmasi 0 va dispersiyasi 1 ga teng, haqiqatdan ham:

$$\begin{aligned} MZ &= M\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} M(X - MX) = 0, \\ DZ &= D\left(\frac{X - MX}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X - MX) = \frac{DX}{DX} = 1. \end{aligned}$$

18.34-Misol. Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► 18.29-Misolda $MX = np$ ekanligini ko'rgan edik. U holda

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 P_n(i) = \sum_{i=0}^n i^2 C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^n i^2 \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n i^2 \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} - \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} + \sum_{i=0}^n i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n (i^2 - i) \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \sum_{i=0}^n i(i-1) \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} p^i q^{n-i} + np = \sum_{i=2}^n n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-i)!} p^{i-2} q^{n-i} + \\ &+ np = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} C_{n-2}^j p^j q^{n-2-j} + np = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} P_{n-2}(j) + np = \\ &= n(n-1)p^2 + np \text{ va (18.49) formulaga ko'ra} \\ DX &= MX^2 - (MX)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq. \end{aligned}$$

Oʻrtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}$ boʻladi. ◀

18.35-Misol. Puasson taqsimoti boʻyicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi va oʻrtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu taqsimot uchun $MX = \lambda$ ekanligini koʻrgan edik. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \right] = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

va (18.49) formulaga koʻra

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Oʻrtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{\lambda}$ boʻladi. ◀

18.36-Misol. Geometrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini va oʻrtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu yerda $iq^{i-2} = (q^i)'_q$, $i(i-1)q^{i-2} = (q^i)''_q$ hosilalardan foydalanamiz.

Dastlab MX^2 matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} MX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 pq^i = pq^2 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-2} = pq^2 \sum_{i=0}^{\infty} [i(i-1)q^{i-2} + iq^{i-2}] = \\ &= pq^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} + \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-2} \right) = pq^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)q^{i-2} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} \right) = \\ &= pq^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)''_q + \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)'_q \right] = pq^2 \left[\left(\frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{1-q} \right)' \right] = \\ &= pq^2 \left(\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{q(1+q)}{p^2} \end{aligned}$$

va (18.49) formulaga koʻra

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{q(1+q)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Oʻrtacha kvadratik chetlanishi esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{q/p}$ boʻladi. ◀

18.37-Misol. $[a, b]$ kesmada tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► $x < a$ va $x > b$ bo'lganda $f(x) = 0$ bo'lganligi uchun

$$DX = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3 \Big|_a^b =$$

$$\frac{1}{3(b-a)} \left(\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{b+a}{2}\right)^3 \right) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

o'rtacha kvadratik chetlanish esa $\sigma_X = \sqrt{DX} = (b-a)/2\sqrt{3}$ bo'ladi. ◀

18.38-Misol. Ekspontensial taqsimotning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Bu yerda ham $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$ ekanligini inobatga olib,

$$DX = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2, du = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) dx \\ dv = \lambda e^{-\lambda x}, v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{\lambda}, du = dx \\ dv = e^{-\lambda x}, v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{array} \right| =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left(b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \Big|_0^b \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(b - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda} \left(b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

va o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma_X = \sqrt{DX} = 1/\lambda$ bo'ladi. ◀

18.39-Misol. m va σ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

► Normal taqsimotning aniqlanishiga ko'ra,

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

va bu yerda $y = (x - m)/\sigma$ deb almashtirish olamiz. U holda

$$DX = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

bo'ladi va bu yerda $u = y/\sqrt{2\pi}$, $dv = ye^{-y^2/2} dy$ deb bo'laklab integrallasak

$$DX = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = \sigma^2$$

qiymatni hosil qilamiz, undan kvadrat ildiz chiqarib, $\sigma_X = \sigma$ o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz. Shunday qilib normal taqsimot qonunining σ parametri tasodifiy miqor o'rtacha kvadratik chetlanishiga teng ekan. ◀

Tasodifiy miqdorning momentlari.

18.15-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning k – tartibli m_k momenti deb X tasodifiy miqdor k – darajasining matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni:

i) agar X diskret tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$m_k = MX^k = \sum_i x_i^k p_i;$$

ii) agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$m_k = MX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Ba'zan k – tartibli momentni k – tartibli boshlang'ich moment ham deb aytiladi.

18.16-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning k – tartibli $\dot{m}_k$ markaziy momenti (k – markaziy moment) deb markazlashtirilgan $\dot{X} = X - MX$ tasodifiy miqdor k – darajasining matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mos ravishda:

$$\dot{m}_k = M(X - MX)^k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i,$$

$$\dot{m}_k = M(X - MX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x) dx.$$

Birinchi tartibli moment matematik kutilma bilan, birinchi tartibli markaziy moment nolga, ikkinchi tartibli markaziy moment dispersiya bilan ustma-ust tushishini ta'kidlab o'tamiz.

Agar ixtiyoriy x uchun

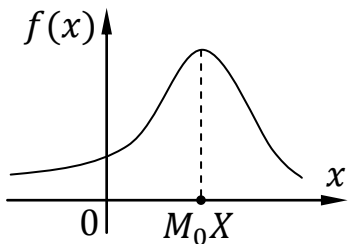
$$P\{X < MX - x\} = P\{X > MX + x\}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, X tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilmasiga nisbatan *simmetrik taqsimlangan* deyiladi.

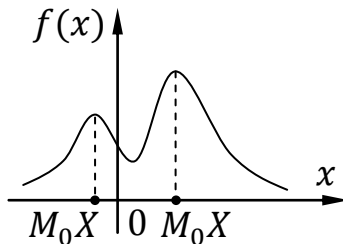
Tasodifiy miqdorning boshqa sonly xarakteristikalari.

18.17-Ta'rif. $f(x)$ taqsimot zichlik funksiyasining maksimum nuqtasini *uzluksiz tasodifiy miqdorning modasi* deb ataymiz va M_0X orqali belgilanadi.

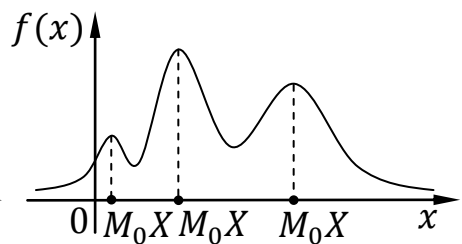
Agar moda yagona bo'lsa, tasodifiy miqdorning taqsimoti *unimodal* (18.17-rasm), ikkita bo'lsa *bimodal* (18.18-rasm) va bir nechta bo'lsa *multimodal* (18.19-rasm) deb ataladi.



18.17-rasm



18.18-rasm



18.19-rasm

Diskret tasodifiy miqdorning modasiga ta'rif berish uchun dastlab uning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari o'sib borish tartibida joylashgan deb faraz qilamiz.

18.18-Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor x_i qiymatining p_i ehtimoli uchun

$$p_{i-1} < p_i \text{ va } p_{i+1} < p_i$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, x_i qiymatni *diskret tasodifiy miqdorning modasi* deb ataymiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarda ham moda unimodal, bimodal va multimodal bo'lishi mumkin.

18.19-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = 1/2 \quad (18.53)$$

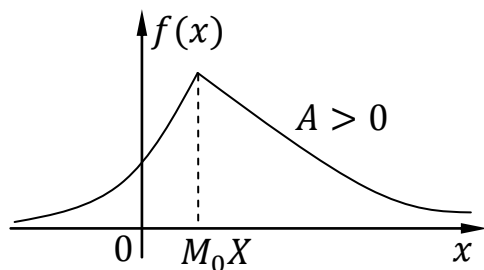
tenglikni qanoatlantiruvchi x_p qiymatiga uning *medianasi* deyiladi.

18.40-Misol. Normal taqsimotning zichlik funksiyasi $x = m$ nuqtada yagona maksimumga erishadi. Shuning uchun normal taqsimotning modasi uning matematik kutilmasi bilan ustma-ust tushadi. U yana tasodifiy miqdorning medianasi hamdir.

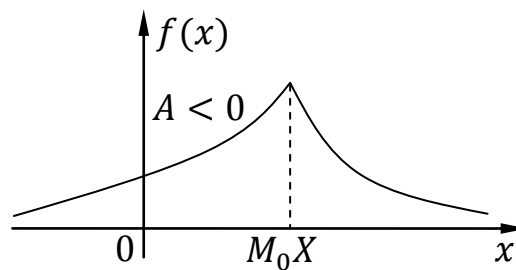
18.20-Ta'rif. X tasodifiy miqdor $\dot{m}_3$ markaziy momentining σ o'rtacha kvadratik chetlanishi kubiga nisbati bu tasodifiy miqdorning *asimmetriyasi* deyiladi va u A orqali belgilanadi:

$$A = \frac{\dot{m}_3}{\sigma^3} = \frac{M(X - MX)^3}{(DX)^{\frac{3}{2}}}.$$

Agar matematik kutilmasiga nisbatan simmetrik taqsimlangan X tasodifiy miqdorning uchinchi tartibli momenti mavjud bo'lsa, uning asimmetriyasi nolga tengligini ta'kidlab o'tamiz.



18.20-rasm



18.21-rasm

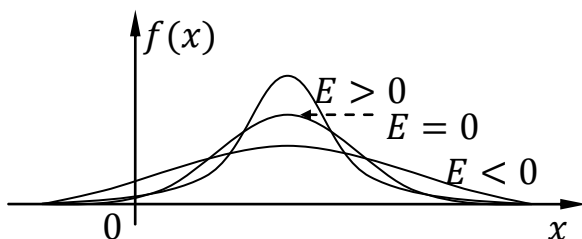
Agar $A > 0$ bo'lsa, taqsimot egri chizig'i M_0X modadan o'ngda sekin kamayadi (18.20-rasm).

Agar $A < 0$ bo'lsa, taqsimot egri chizig'i M_0X modadan chapda sekin o'sadi (18.21-rasm).

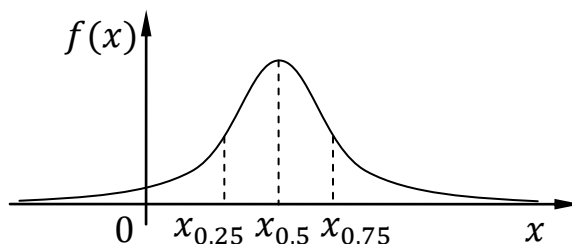
18.21-Ta'rif. X tasodifiy miqdor $\dot{m}_4$ markaziy momentining σ o'rtacha kvadratik chetlanishi to'rtinchi darajasiga nisbatidan uchni ayirishdan hosil bo'lgan E miqdorga bu tasodifiy miqdorning *eksessi* deyiladi:

$$E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{(DX)^2} - 3.$$

E miqdor taqsimot zichligining o'tkir uchlilikini yoki yassi uchlilikini tavsiflaydi. Normal taqsimot uchun $A = 0$ va $E = 0$ ekanligini keyingi misolda ko'ramiz; qolgan taqsimotlar normal taqsimot bilan taqqoslanadi: agar $E > 0$ bo'lsa o'tkir uchli va $E < 0$ bo'lsa yassi uchli bo'ladi (18.22-rasm).



18.22-rasm



18.23-rasm

18.41-Misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning asimmetriyasi va eksessini hisoblang.

► Dastlab $\dot{m}_3$ va $\dot{m}_4$ markaziy momentlarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \dot{m}_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^3 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} y = x - m, \\ dy = dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \end{aligned}$$

va integral ostidagi funksiya toqligi, integrallash chegaralari nolga nisbatan simmetrikligi tufayli so'ngi integral nolga teng, ya'ni $\dot{m}_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{m}_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^4 \varphi_{m,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m)^4}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{(x - m)^3}{\sqrt{2\pi}}, du = 3 \cdot \frac{(x - m)^2}{\sqrt{2\pi}} \\ dv = \frac{x - m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, v = -\sigma e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= -\sigma \frac{(x-m)^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 0 + 3\sigma^2\sigma^2 = 3\sigma^4.$$

U holda yuqoridagi ta'riflarga ko'ra

$$A = \frac{\dot{m}_3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sigma^3} = 0, \quad E = \frac{\dot{m}_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Shunday qilib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning asimetriyasi va eksnessi nolga teng ekan. ◀

18.22-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning

$$F(x_p) = P(X < x_p) = p$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x_p qiymatiga p saviyali kvantil deb ataladi, bu yerda $0 < p < 1$.

Tasodifiy miqdorning yuqorida kiritilgan medianasi 0,5 saviyali kvantil, ya'ni $Me(X) = x_{0,5}$ ekanligi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi. $x_{0,25}$ va $x_{0,75}$ mos ravishda quyi va yuqori kvantillar deb ataladi. $x_{0,25}$, $x_{0,5}$, $x_{0,75}$ kvantillar son o'qini 4 bo'lakka bo'ladi va X tasodifiy miqdorning bu har bir bo'lakka tushish ehtimoli 0,25 ga teng (18.23-rasm).

18.16. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar

Amaliy masalalarda ko'pincha tajriba natijasi sifatida bir necha tasodifiy miqdorlarni kuzatishga to'g'ri keladi. Bir necha tasodifiy miqdorni birgalikda qarash ko'p olchovli tasodifiy miqdorlarga olib keladi.

Bitta tajribaning natijalari bo'lgan X_i , ($i = \overline{1, n}$) tasodifiy miqdorlarning $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tartiblangan to'plamini n o'lchovli tasodifiy miqdor deb ataymiz.

Bir o'lchovli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar n o'lchovli $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy miqdorning komponentalari deb ataladi.

Bir o'lchovli tasodifiy miqdorlarga ta'lluqli bo'lgan barcha tushuncha va ta'riflar qaryib o'zgarishsiz ko'p olchovli tasodifiy miqdorlarga o'tkaziladi. Bayon qilish sodda bo'lganligi tufayli biz ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni qarash bilan

chegaralanamiz va komponentalari soni ko'p bo'lgan holga hech qiyinchiliksiz umumlashtiriladi.

Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorni $M(X, Y)$ tasodifiy nuqta orqali tasvirlash mumkin.

18.42-Misol. Ikkita o'yin toshi tashlanmoqda. X tasodifiy miqdor-birinchi toshda tushgan raqam, Y tasodifiy miqdor esa ikkinchisida tushgan raqam bo'lsin. U holda barcha yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalar $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$ to'plamdan iborat bo'ladi. $(3,4)$ hodisaga $x = 3, y = 4$ sonlari mos keladi.

Komponentalarining turiga qarab, ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar diskret, uzluksiz va aralash bo'lishi mumkin.

(X, Y) tasodifiy miqdorning to'liq tavsifi uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari sohasini va bu qiymatlarning ehtimollarini ko'rsatuvchi ehtimollarning taqsimot qonuni hisoblanadi. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar oddiy tasodifiy miqdorlar singari turli ko'rinishdagi taqsimot qonunlari (jadval, taqsimot funksiyasi, zichlik funksiyasi, ...) orqali tavsiflanishi mumkin.

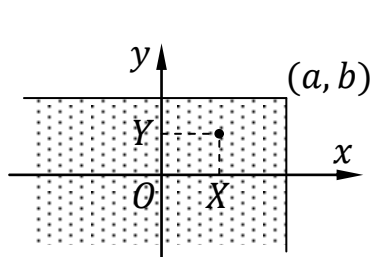
Bir o'lchovli tasodifiy miqdorlarni o'rganishni uning taqsimot qonunining berilish usullarini muhokama qilishdan boshlaganimizni eslatib o'tamiz. Xususan bir o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini taqsimot funksiyasi yordamida berish mumkin. Buni ikki o'lchovli tasodifiy miqdorga nisbatan ham aytish mumkin.

18.23-Ta'rif. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning $F(x, y) = F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasi deb, $(x, y) \in R^2$ nuqtadagi qiymati $\{X < x\}$, $\{Y < y\}$ hodisalarining birgalikda yuz berish ehtimoliga teng, ya'ni

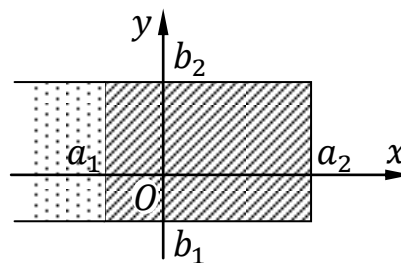
$$F(x, y) = F_{X,Y}(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

funksiyaga aytiladi.

$F(x, y)$ funksiyani yana X, Y tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi ham deb ataladi.



18.24-rasm



18.25-rasm

Ikki o'lchovli taqsimot funksiyasining (a, b) nuqtadagi qiymati koordinatalari (X, Y) bo'lgan nuqtaning 18.24-rasmida tasvirlangan uchi (a, b) nuqtada bo'lgan kvadrantga tushish ehtimoliga teng.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi xossalari bir o'lchovli taqsimot funksiyasi xossalariga o'xshash va ular quyidagi teormada keltirilgan.

18.8-Teorema. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

- 1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
- 2) $F(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarning har biri bo'yicha kamaymaydigan funksiya.
- 3) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$.
- 4) $F(+\infty, +\infty) = 1$.
- 5) $P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1)$.
- 6) $F(x, y)$ funksiya ixtiyoriy $(x, y) \in R^2$ nuqtada x va y o'zgaruvchilarning har biri bo'yicha chapdan uzluksiz.

$$7) F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x), F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y).$$

◀5) va 7) xossalarni isbotlaymiz, chunki boshqa barcha xossalar bir o'lchovli tasodifiy miqdordagi singari isbotalanadi.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $\{a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ to'g'ri to'rtburchakga (18.22-rasmida shtrixlangan qism) tushish ehtimolini topish uchun

dastlab $\{x < a_2, b_1 \leq y < b_1\}$ cheksiz yarim yo'lga (18.25-rasmda nuqtali qilib ajratilgan qismi) tushish ehtimolini topamiz. Bu ehtimol esa $\{x < a_2, y < b_2\}$ kvadrantga tushish ehtimolidan $\{x < a_2, y < b_1\}$ kvadrantga tushish ehtimolini ayirganiga teng, ya'ni

$$P\{x < a_2, b_1 \leq y < b_1\} = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1). \quad (18.54)$$

Yuqoridagidek mulohazalarni yuritib, $\{x < a_1, b_1 \leq y < b_1\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimoli uchun

$$P\{x < a_1, b_1 \leq y < b_1\} = F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1) \quad (18.55)$$

tenglikni yozish mumkin.

18.25-rasmdan ko'rinib turibdiki, $\{a_1 \leq x < a_2, b_1 \leq y < b_2\}$ to'g'ri to'rtburchakga tushish ehtimoli $\{x < a_2, b_1 \leq y < b_1\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimolidan $\{x < a_1, b_1 \leq y < b_1\}$ cheksiz yarim yo'lga tushish ehtimolini ayirilganiga teng:

$P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} = P\{x < a_2, b_1 \leq y < b_1\} - P\{x < a_1, b_1 \leq y < b_1\}$. So'nggi tenglikning o'ng tomoniga (18.54) va (18.55) tengliklarning o'ng tomonlarini qo'yib, 5) xossani hosil qilamiz.

7) xossani isbotlaymiz. $\{Y < +\infty\}$ hodisaning muqarrarligidan

$$\{X < x, Y < +\infty\} = \{X < x\} \cap \{Y < +\infty\} = \{X < x\}$$

ekanligi kelib chiqadi va xuddi shu singari

$$\{X < +\infty, Y < y\} = \{X < +\infty\} \cap \{Y < y\} = \{Y < y\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu ikki tenglikdan 7) xossa kelib chiqadi. ►

Oxirgi xossa (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}$ taqsimot funksiyasi yordamida bir o'lchovli F_X , F_Y taqsimot funksiyalarni topish imkonini beradi. Biroq aksincha har doim ham o'rinli emas, aniqrog'i bir o'lchovli F_X , F_Y taqsimot funksiyalari asosida (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}$ taqsimot funksiyasini ular o'zaro bog'liq bo'lmagan hollardagina topib bo'ladi.

18.24-Ta'rif. Agar ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlarda $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa, X va Y o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

18.9-Teorema. X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmashligi uchun ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi uning komponentalari taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (18.56)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◀ Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda $\{X < x\}$ va $\{Y < y\}$ hodisalar o'zaro bog'liq emas. Shuning uchun $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$, ya'ni $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

(18.56) o'rinli ekanligidan $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emasligini anglatadi.



18.17. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlar

18.25-Ta'rif. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning har bir X va Y komponentalari diskret bo'lsa, uni biz *diskret tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

Bayon qilish oson bo'lishi uchun X va Y diskret tasodifiy miqdorlar chekli sondagi qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilamiz.

Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \quad (18.57)$$

formula orqali, yoki

X	Y				
	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3m}

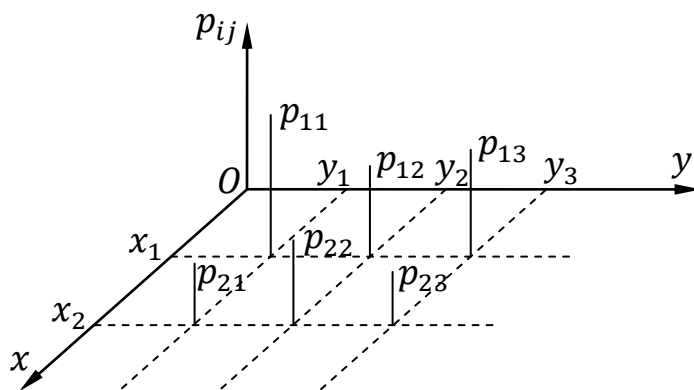
...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	...	p_{nm}

18.1-jadval

jadval ko‘rinishida berilishi mumkin. Bunda birgalikda bo‘lmagan va to‘liq guruh tashkil qiluvchi $\{X = x_i, Y = y_j\}$ hodisalarning ehtimollari sifatida barcha p_{ij} ehtimollarning yig‘indisi birga teng:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1. \quad (18.58)$$

18.26-rasmda ikki o‘lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdor taqsimotining grafigiga misol keltirilgan.



18.26-rasm

18.8-Teoremaning 7) xossasiga ko‘ra ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda har bir komponentasining taqsimot qonunini topish mumkin. $\{X = x_1, Y = y_1\}, \{X = x_1, Y = y_2\}, \dots, \{X = x_1, Y = y_m\}$ hodisalar birgalikda emas va shu tufayli birgalikda bo‘lmagan hodisalarni qo‘shish teoremasiga ko‘ra,

$$p_{x_1} = P\{X = x_1\} = p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1m}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shu singari

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n p_{ij}. \quad (18.59)$$

18.43-Misol. Qutida 3 ta oq, 2 ta qora, 1 ta qizil va 1 ta ko‘k sharlar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda tanlangan 4 ta sharlar olindi. X –tanlamadagi oq sharlar soni, Y –tanlamadagi qora sharlar soni. (X, Y) ikki o‘lchovli hamda X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzing.

► X tasodifiy miqdor 0,1,2,3 qiymatlarni, Y esa 0,1,2 qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib bu qiymatlarning ehtimollarini topamiz. Barcha yuz berishi mumkin bo‘lgan hodisalar soni $n = C_7^4 = 35$. Ikkalasi ham nol bo‘lgan holga imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $m\{X = 0, Y = 0\} = 0$, chunki tanlangan to‘rtta sharning ikkitasi qizil va ko‘k bo‘lsa, qolgan ikkitasida albatta oq yoki qora shar bo‘lishi kerak. Xuddi shunday mulohaza yuritib, $m\{X = 1, Y = 0\} = m\{X = 0, Y = 1\} = 0$ ekanligiga amin bo‘lamiz. Bundan tashqari tanlangan sharlar soni to‘rtta bo‘lganligi uchun $m\{X = 3, Y = 2\} = 0$ bo‘ladi. $X = 1$ va $Y = 1$ bo‘lishi uchun tanlamada qizil va ko‘k sharlar bo‘lishi kerak hamda jami oq sharlar soni uchta bo‘lganligi uchun oq sharni $C_3^1 = 3$ usul bilan, qora sharni esa $C_2^1 = 2$ usul bilan tanlash mukin. Shuning uchun $m\{X = 1, Y = 1\} = 3 \cdot 2 = 6$ bo‘ladi. Xuddi shu singari huloahaza yuritib, $m\{X = 1, Y = 2\} = 3 \cdot 2 = 6$, $m\{X = 2, Y = 0\} = 3$, $m\{X = 2, Y = 1\} = 12$, $m\{X = 2, Y = 2\} = 3$, $m\{X = 3, Y = 0\} = 2$, $m\{X = 3, Y = 1\} = 2$ imkoniyat yaratuvchi hodisalar sonini topamiz. U holda mos ehtimollar $p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = m\{X = 0, Y = 0\}/n = 0/35 = 0$, $p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = 0$, $p_{13} = P\{X = 0, Y = 2\} = 1/35$, $p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$, $p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = 6/35$, $p_{23} = P\{X = 1, Y = 2\} = 6/35$, $p_{31} = P\{X = 2, Y = 0\} = 3/35$, $p_{32} = P\{X = 2, Y = 1\} = 12/35$, $p_{33} = P\{X = 2, Y = 2\} = 3/35$, $p_{31} = P\{X = 3, Y = 0\} = 2/35$, $p_{32} = P\{X = 3, Y = 1\} = 2/35$, $p_{33} = P\{X = 3, Y = 2\} = 0$ bo‘ladi va ulardan 18.1-jadvalni tuzamiz:

X	Y		
	0	1	2
0	0	0	1/35

1	0	6/35	6/35
2	3/35	12/35	3/35
3	2/35	2/35	0

Bu jadvaldan esa (18.59) formulalarga ko'ra $P\{X = 0\} = 1/35$, $P\{X = 1\} = 6/35 + 6/35 = 12/35$, $P\{X = 2\} = 3/35 + 12/35 + 3/35 = 18/35$, $P\{X = 3\} = 2/35 + 2/35 = 4/35$, $P\{Y = 0\} = 3/35 + 2/35 = 5/35$, $P\{Y = 1\} = 6/35 + 12/35 + 2/35 = 20/35$, $P\{Y = 2\} = 1/35 + 6/35 + 3/35 = 10/35$ ehtimollarni topamiz. Bu ehtimollardan X va Y tasodifiy miqdorlarning

X	0	1	2	3
P	1/35	12/35	18/35	4/35

Y	0	1	2
P	5/35	20/35	10/35

taqsimot qatorlarini tuzamiz. ◀

18.10-Teorema. Ikki o'lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning X va Y komponentalari o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun ixtiyoriy $i = 1, 2, \dots, m$ va $j = 1, 2, \dots, n$ larda

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \quad (18.60)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

(18.60) tengliklarni

$$p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (18.61)$$

ko'rinishda ham ifodalash mumkin.

18.1-jadvaldan foydalanib ikki o'lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning $F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasini topish mumkin. Buning uchun $x_i < x$, $y_j < y$ bo'ladigan barcha i va j bo'yicha p_{ij} ehtimollarning yigindisini olish kerak:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\substack{i: x_i < x \\ j: y_j < y}} p_{ij} \quad (18.62)$$

Agar X va Y diskret tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa (18.62) tenglik

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{i: x_i < x} p_{x_i} \cdot \sum_{j: y_j < y} p_{y_j}$$

ko‘rinishni oladi.

18.18. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar

18.26-Ta’rif. Agar (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$$

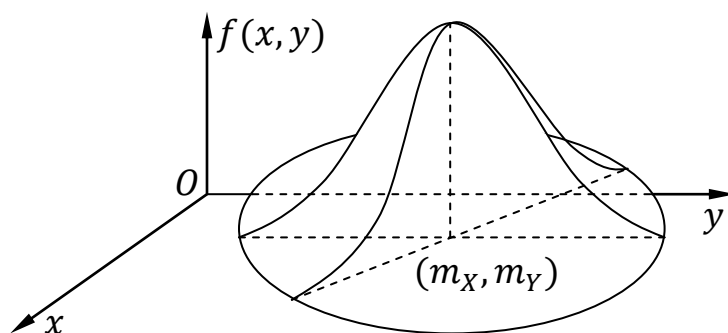
taqsimot funksiyasini yaqinlashuvchi

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv \quad (18.63)$$

xosmas integral ko‘rinishida tasvirlash mumkin bo‘lsa, uni biz *ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor* deb ataymiz.

$f(x, y) = f_{X,Y}(x, y)$ funksiya (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimotining *zichlik funksiyasi* deb ataladi.

Geometrik jihatdan (X, Y) tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining $f(x, y)$ zichlik funksiyasi *taqsimot sirti* deb ataluvchi sirtni tasvirlaydi (18.27-rasm).



18.27-rasm

Ikki o‘lchovli integralda integrallash sohasi uchi (x, y) nuqtada bo‘lgan $\{s < x, t < y\}$ kvadrantdan iborat. Shuning uchun ikki o‘lchovli integralni karrali integral ko‘rinishida tasvirlash mumkin:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f(u, v) dv = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^x f(u, v) du.$$

Bu yerda ham bir o‘lchovlidagi singari $f(x, y)$ funksiyani uzluksiz (ayrim nuqta va chiziqlardan tashqarida) deb faraz qilamiz. U holda yuqori chegarasi

o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralning xossalriga ko'ra, $f(x, y)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalarida $F(x, y) = F_{X,Y}(x, y)$ taqsimot funksiyasi ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilalarga ega bo'ladi va

$$f(x, y) = F''_{xy} = F''_{yx} \quad (18.64)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

18.11-Teorema. Ikki o'lchovli taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

$$1) f(x, y) \geq 0;$$

$$2) P\{a_1 < X < a_2, b_1 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1;$$

$$4) P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y;$$

$$5) P\{X = x, Y = y\} = 0;$$

$$6) P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy;$$

$$7) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy;$$

$$8) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

◀1) Ehtimollarning $F(x, y)$ taqsimot funksiyasi har bir argument bo'yicha kamaymaydi va kamaymaydigan funksiya dan olingan xususiy hosilalar nomanfiy bo'ladi.

2) Taqsimot funksiyasining 5) xossasiga binoan

$$P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1).$$

Zichlik funksiyasining aniqlanishiga ko'ra

$$F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) = \int_{-\infty}^{a_2} dx \int_{-\infty}^{b_2} f(x, y) dy - \int_{-\infty}^{a_2} dx \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{a_2} dx \left[\int_{-\infty}^{b_2} f(x, y) dy - \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y) dy \right] = \int_{-\infty}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy; \\
&\quad -F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1) = - \left[\int_{-\infty}^{a_1} dx \int_{-\infty}^{b_2} f(x, y) dy - \int_{-\infty}^{a_1} dx \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y) dy \right] = \\
&- \left[\int_{-\infty}^{a_1} dx \left(\int_{-\infty}^{b_2} f(x, y) dy - \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y) dy \right) \right] = - \int_{-\infty}^{a_1} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy;
\end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned}
P\{a_1 \leq X \leq a_2, b_1 \leq Y \leq b_2\} &= \int_{-\infty}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy - \int_{-\infty}^{a_1} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy = \\
&= \int_{b_1}^{b_2} dy \left(\int_{-\infty}^{a_2} f(x, y) dx - \int_{-\infty}^{a_1} f(x, y) dx \right) = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy.
\end{aligned}$$

3) xossa $\{-\infty < X < +\infty, -\infty < Y < +\infty\}$ hodisaning muqarrarligidan kelib chiqadi.

4) Taqsimot funksiyasining 5) xossasiga va differensialnuvchi funksiyalarning xossalriga binoan

$$\begin{aligned}
P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - \\
&\quad - F(x, y + \Delta y) + F(x, y) \approx F'_y(x + \Delta x, y)\Delta y - F'_y(x, y)\Delta y = \\
&= \left(F'_{yx}(x + \Delta x, y) - F'_{yx}(x, y) \right) \Delta y \approx F''_{yx}(x, y)\Delta x\Delta y = f(x, y)\Delta x\Delta y.
\end{aligned}$$

$$5) P\{X = x, Y = y\} = \int_x^x du \int_y^y f(u, v) dv = 0.$$

6) Bu xossa 2- xossaning umumlashganidan iborat.

7), 8) Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining 7- xossasiga binoan

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= F_{X,Y}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dudv, \\
F_Y(y) &= F_{X,Y}(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(u, v) dudv.
\end{aligned}$$

Birinchi tenglikni x bo'yicha, ikkinchisini esa y bo'yicha differensiallab X va Y tasodifiy miqdorlar taqsimotlarining zichlik funksiyalarini hosil qilamiz:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \text{ va } f_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \blacktriangleright$$

18.44-Misol. Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

ko'rinishda bo'lsa, 1) A o'zgarmasni; 2) $F(x, y)$ taqsimot funksiyasini; 3) $P\{1 \leq X \leq \sqrt{3}, 1 \leq Y \leq \sqrt{3}\}$ ehtimolni; 4) X va Y tasodifiy miqdorlarning $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ zichlik funksiyalarini toping.

► 1) Ikki o'lchovli taqsimotning zichlik funksiyasining 3-xossasiga binoan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = 1,$$

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)} dy = A \cdot \arctg x|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \arctg y|_{-\infty}^{+\infty} = A \cdot \pi^2.$$

Demak, $A = 1/\pi^2$ bo'lar ekan.

2) $F(x, y)$ taqsimot funksiyasini (18.63) formulaga ko'ra topamiz:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+s^2)(1+t^2)} ds dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^x \frac{ds}{1+s^2} \cdot \int_{-\infty}^y \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan s \Big|_{-\infty}^x \cdot \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^y = \left(\frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

3) Taqsimot funksiyasining 5-xossasiga binoan

$$\begin{aligned} P\{1 \leq X \leq \sqrt{3}, 1 \leq Y \leq \sqrt{3}\} &= F(\sqrt{3}, \sqrt{3}) - F(\sqrt{3}, 1) - F(1, \sqrt{3}) + F(1, 1) = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{144}. \end{aligned}$$

4) Zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalariga binoan

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\
&= \frac{1}{\pi^2(1+y^2)} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}
\end{aligned}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. ◀

18.12-Teorema. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasligi uchun ixtiyoriy x va y qiymatlarda (X, Y) ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

◀ X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasin. U holda 18.9-Teoremaga ko‘ra,

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

(18.40) va (18.64) formulalarga ko‘ra esa,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} \right) = f_X(x)f_Y(y),$$

ya’ni teoremaning zaruriy qismi isbot bo‘ldi.

Yetarliligini isbotlash uchun zichlik funksiyasining 18.25-Ta’rifidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(u)f_Y(v) du dv = \\
&= \left(\int_{-\infty}^x f_X(u) du \right) \left(\int_{-\infty}^y f_Y(v) dv \right) = F_X(x) \cdot F_Y(y)
\end{aligned}$$

va yana 18.9_teoremaga murojaat qilisak, teoremening yetarlilik qismini isbotlagan bo‘lamiz. ►

Ayrim ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar

Biz quyida amaliyotda ko‘p uchraydigan ayrim ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarni qarab chiqamiz.

Tekislikdagi tekis taqsimot qonuni. Agar (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlansa, (X, Y) tasodifiy miqdor tekislikda *tekis taqsimlangan* deyiladi, bu yerda c — o‘zgarmas son, D esa Oxy tekislikning biror sohasi. U holda zichlik funksiyasining 3-xossasidan $c = 1/S_D$ kelib chiqadi, bu yerda S_D berilgan D sohaning yuzi.

Berilgan soha $D = \{(x, y): a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$ to‘g‘ri to‘rt burchakdan iborat bo‘lsa

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

bo‘ladi. Uning taqsimot funksiyasini (18.63) formulaga ko‘ra topamiz. Agar $a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2$ bo‘lsa,

$$F(x, y) = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \int_{a_1}^x \int_{b_1}^y dudv = \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)},$$

agar $x \leq a_1, y \leq b_1$ bo‘lsa, $F(x, y) = 0$ va $x \geq a_2, y \geq b_2$ bo‘lsa, $F(x, y) = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib ularni umumlashtirsak

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - a_1)(y - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}, & a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2 \\ 0, & x \leq a_1, y \leq b_1 \\ 1, & x \geq a_2, y \geq b_2 \end{cases}$$

taqsimot funksiyasini hosil qilamiz.

Zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalaridan foydalanib ikki o'lchovli tasodifiy miqdor X va Y komponentalarining

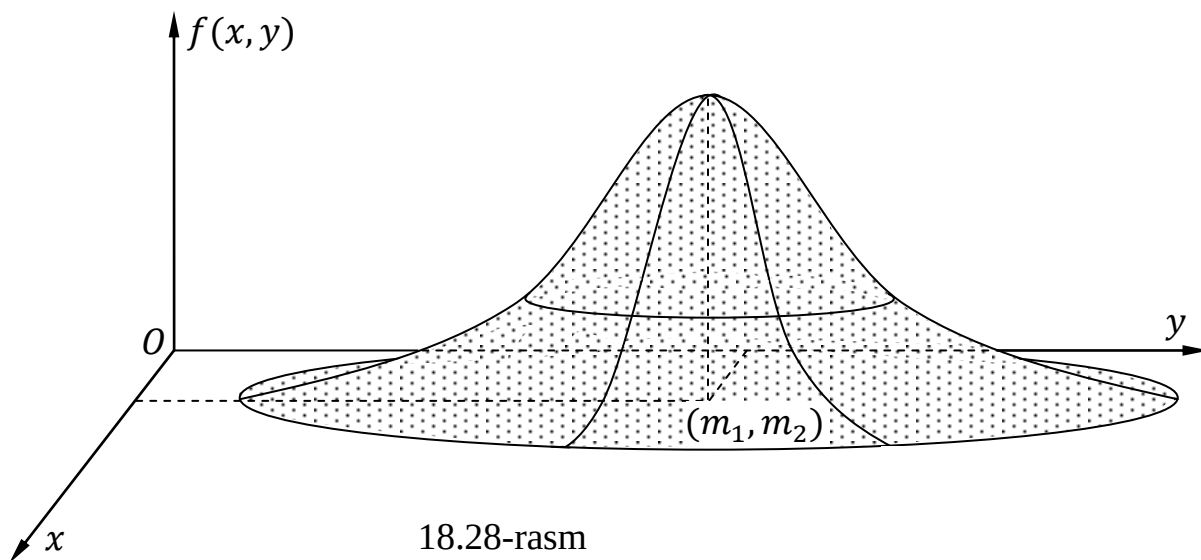
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 < x < a_2, \\ 0, & x < a_1 \text{ yoki } x > a_2 \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y - b_1}{b_2 - b_1}, & b_1 < y < b_2, \\ 0, & y < b_1 \text{ yoki } y > b_2 \end{cases}$$

taqsimot funksiyalarini hosil qilamiz. Demak, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, ya'ni 18.9-teoremaga ko'ra X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas ekan.

Ikki o'lchovli normal taqsimot qonuni. Agar (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

ko'rinishda bo'lsa, u *normal taqsimlangan tasodifiy miqdor* deb ataladi.



Ikki o'lchovli normal taqsimot tarkibida beshta parameter: $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ bor. Ularning dastlabki m_1, m_2 – ikkitasi (m_1, m_2) taqsimot simmetriya markazini aniqlaydi. Bu nuqtaga taqsimot sirti cho'qqisi proyeksiyalanadi. Bu sirt esa to'laligicha Oxy tejislikdan yuqorida yotadi va (m_1, m_2) nuqta orqali Oxy tekislikka perpendikulyar bo'lib o'tuvchi to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik (18.28-rasm).

Normal taqsimot sirtining Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimida markazi simmetriya o'qida bo'lgan ellipslar, Oxy tekislikka perpendikulyar tekisliklar bilan kesimida esa normal egri chiziqlar hosil bo'ladi.

Zichlik funksiyasining 7-xossasiga binoan X tasodifiy miqdor ehtimollarining $f_X(x)$ zichlik funksiyasini topamiz:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)} dy = \left| t = \frac{x-m_1}{\sqrt{2}\sigma_1}, z = \frac{y-m_2}{\sqrt{2}\sigma_2} \right| = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}(z^2-2rtz)} dz = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{t^2}{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-r^2}((z-rt)^2-r^2t^2)} dz = \\
 &= \frac{e^{-\frac{t^2}{1-r^2}+\frac{r^2t^2}{1-r^2}}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-rt)^2}{1-r^2}} dz = \left| u = \frac{z-rt}{\sqrt{1-r^2}}, dz = \sqrt{1-r^2} du \right| = \\
 &= \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_1} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}},
 \end{aligned}$$

ya'ni:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Shunday qilib X , matematik kutilmasi m_1 va dispersiyasi σ_1^2 bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ekan. Biz bu yerda $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ Puasson integralidan foydalandik.

Xuddi shu singari Y matematik kutilmasi m_2 va dispersiyasi σ_2^2 bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ekanligini va uning zichlik funksiyasi

$$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

ko‘rinishda bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

18.19. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

Amaliyotda qaralayotgan Y sonli miqdor boshqa bir X yoki bir nechta $X_1, X_2, \dots, X_n$ sonli miqdorlarning funksiyasi bo‘lgan hol ko‘p uchraydi, ya’ni bu holda Y miqdor bu miqdor yoki miqdorlar bilan $Y = Y(X)$ yoki $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funksional bog‘langan bo‘ladi. Agar X miqdor yoki $X_1, X_2, \dots, X_n$ miqdorlar tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, Y ham tasodifiy miqdor bo‘lishi ravshan. Shunday qilib biz bitta X tasodifiy miqdorning yoki bir necha o‘lchovli $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy miqdorning funksiyasi tushunchasiga keldik.

Bitta tasodifiy miqdorning funksiyasi

Agar X tasodifiy miqdorning har bir qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatiga biror qonun yoki qoidaga ko‘ra Y tasodifiy miqdorning qabul qiladigan birorta qiymati mos qo‘yilsa, Y miqdorni X tasodifiy miqdorning funksiyasi deyiladi va $Y = \varphi(X)$ ko‘rinishda yoziladi.

Diskret tasodifiy miqdorning funksiyasi. X – diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsin, ya’ni $p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$. U holda Y tasodifiy miqdor o‘zining $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n)$ qiymatlarini mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilishi ravshan, ya’ni $p_i = P\{Y = y_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$.

X tasodifiy miqdorning turli qiymatlariga Y tasodifiy miqdorning bitta qiymati mos kelishi mumkin. Bu holda takrorlanadigan qiymatlarning ehtimollari qo‘shiladi.

Y tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi

$$MY = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i, DY = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - MY)^2 p_i$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

18.45-Misol. X diskret tasodifiy miqdor o'zining

X	-2	1	2	5
P	0,2	0,1	0,3	0,4

taqsimot qatori bilan berilgan. Agar 1) $Y = X^2$, 2) $Y = 1/X$ bo'lsa, MY matematik kutilmani toping.

► 1) Y tasodifiy miqdor $y_1 = \varphi(x_1) = (-2)^2 = 4$, $y_2 = 1^2 = 1$, $y_3 = 2^2 = 4$, $y_4 = 5^2 = 25$ qiymatlarni qabul qiladi. y_1 va y_3 qiymatlar teng. Shuning uchun mos ehtimollar qo'shiladi: $p_1 = P\{Y = 4\} = P\{X = -2\} + P\{X = 2\} = 0,2 + 0,3 = 0,5$. Qolgan qiymatlar esa X tasodifiy miqdor mos qiymatining ehtimoli bilan bir xil bo'ladi: $p_2 = P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} = 0,1$, $p_3 = P\{Y = 25\} = P\{X = 5\} = 0,4$. Shuning uchun $MY = 4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 = 12,1$.

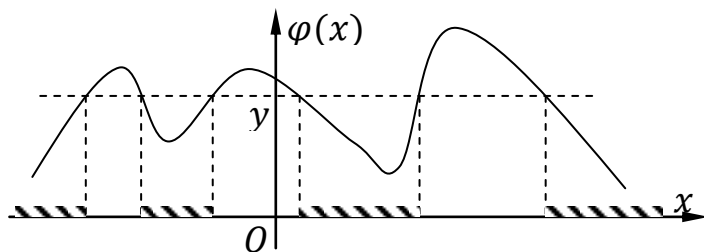
2) Bu holda Y tasodifiy miqdorning qiymatlari $y_1 = 1/(-2) = -0,5$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0,5$ va $y_4 = 0,2$ qiymatlarni mos ravishda $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,3$, $p_4 = 0,4$ ehtimollar bilan qabul qiladi. U holda $MY = -0,5 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,23$ bo'ladi. ◀

Uzluksiz tasodifiy miqdorning funksiyasi

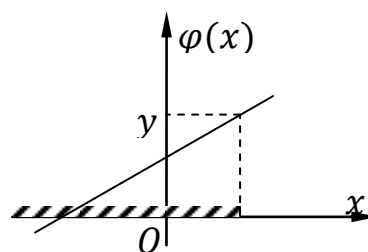
X uzluksiz tasodifiy miqdor $F_X(x)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan va $Y = \varphi(X)$ uning funksiyasi bo'lsin. Agar $F_Y(y)$ yangi Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa,

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X \in \varphi^{-}(-\infty; y)\} \quad (18.65)$$

bo'ladi, bu yerda $\varphi^{-}(-\infty; y)$ orqali $(-\infty; y)$ oraliqning $y = \varphi(x)$ akslantirishdagi asl obrazi belgilangan. 18.29-rasmda bu asl obraz to'plam shtrixlab ko'rsatilgan.



18.29-rasm



18.30-rasm

Tasodifiy miqdorni monoton almashtirish.

$\varphi(x)$ – funksiya X tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarining (a, b) oralig‘ida (u cheksiz $(-\infty; +\infty)$ oraliq bo‘lishi ham mumkin) o‘tuvchi va differensiallanuvchi va $\varphi^-(y)$ – uning teskarisi bo‘lsin. $Y = \varphi(X)$ tasodifiy miqdorning $F_Y(y)$ taqsimot funksiyasi uchun

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\varphi(X) < y\} = P\{X < \varphi^-(y)\} = F_X(\varphi^-(y)) \quad (18.66)$$

tenglikni yozish mumkin. Xuddi shunday mulohaza yuritib, kamayuvchi $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$F_Y(y) = 1 - F_X(\varphi^-(y)) \quad (18.67)$$

formulani yozish mumkin. Xususiyl holda $\varphi(x) = ax + b$ chiziqli bo‘lsin, u holda $\varphi^-(y) = (y - b)/a$ bo‘ladi. Shuning uchun $a > 0$ bo‘lganda (18.30-rasm)

$$F_Y(y) = F_{aX+b}(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

va $a < 0$ bo‘lganda

$$F_Y(y) = F_{aX+b}(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

bo‘ladi.

(18.66) va (18.67) formulalardan foydalanib Y tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Y(y)$ zichlik funksiyasini X tasodifiy miqdor taqsimotining $f_X(x)$ zichlik funksiyasiga bog‘lash mumkin:

$\varphi(x)$ – o‘tuvchi bo‘lgan holda

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = (F_X(x))' \Big|_{x=\varphi^-(y)} (\varphi^-(y))' = f_X(\varphi^-(y))(\varphi^-(y))';$$

$\varphi(x)$ – kamayuvchi bo‘lgan holda

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = -(F_X(x))' \Big|_{x=\varphi^-(y)} (\varphi^-(y))' = -f_X(\varphi^-(y))(\varphi^-(y))'.$$

Ikkala holni ham bitta

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^-(y)) \Big| (\varphi^-(y))' \Big| \quad (18.68)$$

tenglik bilan yozish mumkin.

Nihoyat $\varphi(x)$ funksiya (a, b) oraliqda monoton bo'lsin. U holda bu oraliqni har birida $\varphi(x)$ funksiya monoton bo'ladigan qilib n ta qisman oraliqlarga ajratamiz. Har bir i – qisman oraliqda $\varphi(x)$ funksiyaning $\varphi_i^-(y)$ teskarisini topamiz va bu qisman oraliqda taqsimotning zichlik funksiyasi $f_X(\varphi_i^-(y)) \left| (\varphi_i^-(y))' \right|$ ko'rinishda bo'ladi. Ularning yig'indisi esa Y tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasini beradi:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_X(\varphi_i^-(y)) \left| (\varphi_i^-(y))' \right|.$$

$X = N[m, \sigma]$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni chiziqli almashtirish. $a > 0$ bo'lganda $Y = aX + b$ tasodifiy taqsimot funksiyasini topamiz:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = F_{aX+b}(y) &= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(y-b)/a} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{matrix} u = ax + b \\ du = adx \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(u-am-b)^2}{2a^2\sigma^2}} du, \end{aligned}$$

ya'ni, $Y = aX + b$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlangan bo'lib, uning parametrlari $am + b, a\sigma$ bo'ladi: $Y = N[am + b, a\sigma]$. Xususiyl holda $Y = (X - m)/\sigma$ bo'lsa, $Y = N[0, 1]$ bo'ladi.

Zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdordan tuzilgan $Y = \varphi(X)$ tasodifiy miqdorning sonly xarakteristikalarini topish uchun uning taqsimot funksiyasini topish shart emas. Matematik kutilma va dispersiya uchun

$$MY = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx, DY = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - MY)^2 f(x)dx$$

formulalardan foydalanish mumkin.

18.46-Misol. Agar X tasodifiy miqdor standart normal taqsimlangan bo'lsa, $Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimotini topng.

► Demak bu yerda $\varphi(x) = x^2$ va shuning uchun

$$F_Y(y) = \int_{x^2 < y} f_X(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^2 < y} e^{-x^2/2} dx.$$

$y \leq 0$ bo'lganda $x^2 < y$ bo'ladigan x o'zgaruvchining qiymatlari yo'q, va demak $Y = X^2 < y$ bo'ladigan X tasodifiy miqdorning qiymatlari ham yo'q. U holda,

$$F_Y(y) = 0 \text{ agar } y \leq 0.$$

Agar $y > 0$ bo'lsa, $\{x^2 < y\}$ soha, $\{-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}$ soha bilan bir xil bo'ladi, va demak:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx,$$

$\varphi(x)$ funksiya juftligi tufayli,

$$F_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx.$$

So'ngi integralda $z = x^2$ deb yangi o'zgaruvchi kiritsak, $y > 0$ bo'lganda

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z/2} dz$$

bo'ladi. Shuning uchun:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy,$$

bu yeda,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-y/2}, & y > 0. \end{cases}$$

$\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$, bu yerda $\Gamma(x)$ – Eylerning gamma-funksiyasi bo'lganligi uchun, Y tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Y(y)$ zichlik funksiyasi parametrlari $\lambda = 1/2$ va $\gamma = 1/2$ bo'lgan gamma-taqsimot bilan bir xil bo'ladi. ◀

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning funksiyasi

Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning har bir qiymatiga biror qonun-qoida asosida boshqa bir Z tasodifiy miqdorning bitta qiymatini mos qo'yuvchi moslikka

ikki o'ldovli tasodifiy miqdorning funksiyasi deb ataladi va $Z = \varphi(X, Y)$ ko'rinishda belgilanadi.

Ikki o'ldovli diskret tasodifiy miqdorning funksiyasi

Ikki o'ldovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning $\varphi(X, Y)$ funksiyasi ham diskret tasodifiy miqdor bo'lishi ravshan. Bu tasodifiy miqdor $\varphi(x_i, y_j)$ qiymatlarini

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m,$$

ehtimollar bilan qabul qiladi, bu yerda x_i va y_j – mos ravishda X va Y tasodifiy miqdorlarning qiymatlari.

$Z = \varphi(X, Y)$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatorini tuzishda bir xil $\varphi(x_i, y_j)$ qiymatlarni birlashtirib, ularning ehtimollarini qo'shish kerak. Uning matematik kutilmasi esa bir o'zgaruvchili singari topiladi:

$$MZ = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

Endi diskret tasodifiy miqdorlar ustida *arifmetik amallarni* kiritamiz.

$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ ehtimollar bilan x_i qiymatlarni qabul qiluvchi X va $\bar{p}_j = P\{Y = y_j\}, j = 1, 2, \dots, m$ ehtimollar bilan y_j qiymatlarni qabul qiluvchi Y tasodifiy miqdorlarning *yig'indisi* (*ayirmasi*, *ko'paytmasi*) deb barcha ko'rsatilgan i va j uchun $z_{ij} = x_i + y_j$ ($z_{ij} = x_i - y_j, z_{ij} = x_i y_j$) qiymatlarni $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi $Z = X + Y$ ($Z = X - Y, Z = XY$) diskret tasodifiy miqdorga aytiladi. Bir nechta $x_i + y_j$ yig'indi ($x_i - y_j$ ayirma, $x_i y_j$ ko'paytma) teng bo'lib qolsa, mos ehtimollar qo'shiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning *c o'zgarvas songa ko'paytmasi* deb cx_i qiymatlarni $p_i = P\{X = x_i\}$ ehtimollar bilan qabul qiluvchi cX tasodifiy miqdorga aytiladi.

18.47-Misol. Taqsimot qatorlari

X	-1	1	3
P	0,2	0,5	0,3

Y	2	3	5	6
P	0,1	0,4	0,3	0,2

va o'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar berilgan. $X + Y$, XY va $4X$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qatorlarini tuzing.

► $Z = X + Y$ yig'indi $z_{11} = x_1 + y_1 = -1 + 2 = 1$, $z_{12} = x_1 + y_2 = -1 + 3 = 2$, $z_{13} = -1 + 5 = 4$, $z_{14} = -1 + 6 = 5$, $z_{21} = 1 + 2 = 3$, $z_{22} = 1 + 3 = 4$, $z_{23} = 1 + 5 = 6$, $z_{24} = 1 + 6 = 7$, $z_{31} = 3 + 2 = 5$, $z_{32} = 3 + 3 = 6$, $z_{33} = 3 + 5 = 8$, $z_{34} = 3 + 6 = 9$ qiymatlarni mos ravishda $p_{11} = P\{X = -1, Y = 2\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 2\} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$, $p_{12} = P\{X = -1, Y = 3\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 3\} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$, $p_{13} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$, $p_{14} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$, $p_{21} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$, $p_{22} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$, $p_{23} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, $p_{24} = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$, $p_{31} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$, $p_{32} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$, $p_{33} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$, $p_{34} = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ ehtimollar bilan qabul qiladi.

Bu yerda $z_{13} = z_{22} = 4$ bo'lganligi uchun mos ehtimollar qo'shiladi, ya'ni $P\{Z = X + Y = 4\} = p_{13} + p_{22} = 0,06 + 0,2 = 0,26$, xuddi shunday $z_{14} = z_{31} = 5$ va $z_{23} = z_{32} = 6$ bo'lganligi sababli $P\{Z = 5\} = p_{14} + p_{31} = 0,04 + 0,03 = 0,07$, $P\{Z = 6\} = p_{23} + p_{32} = 0,15 + 0,12 = 0,27$ bo'ladi. Qolgan qiymatlar turlicha, shuning uchun taqsimot qatori 2 ta satr va $3 \cdot 4 - 3 = 9$ ta ustundan iborat bo'ladi:

$Z = X + Y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,02	0,08	0,05	0,26	0,07	0,27	0,1	0,09	0,06

Ehtimollar uchun (18.58) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 0,02 + 0,08 + 0,05 + 0,26 + 0,07 + 0,27 + 0,1 + 0,09 + 0,06 = 1.$$

Xuddi shu singari $Z = XY$ ko'paytmaning qiymatlarini topamiz:

$z_{11} = x_1 y_1 = -1 \cdot 2 = -2$, $z_{12} = x_1 y_2 = -1 \cdot 3 = -3$, $z_{13} = -1 \cdot 5 = -5$, $z_{14} = -1 \cdot 6 = -6$, $z_{21} = 1 \cdot 2 = 2$, $z_{22} = 1 \cdot 3 = 3$, $z_{23} = 1 \cdot 5 = 5$, $z_{24} = 1 \cdot 6 = 6$, $z_{31} = 3 \cdot 2 = 6$, $z_{32} = 3 \cdot 3 = 9$, $z_{33} = 3 \cdot 5 = 15$, $z_{34} = 3 \cdot 6 = 18$. Bu qiymatlarni yig'indidagi singari mos ravishda $p_{11} = P\{X = -1, Y = 2\} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 2\} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$, $p_{12} = P\{X = -1, Y = 3\} = P\{X = -1\} \cdot$

$P\{Y = 3\} = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$, $p_{13} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$, $p_{14} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$,
 $p_{21} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$, $p_{22} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$, $p_{23} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, $p_{24} = 0,5 \cdot$
 $0,2 = 0,1$, $p_{31} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$, $p_{32} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$, $p_{33} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$,
 $p_{34} = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$ ehtimollar bilan qabul qiladi.

Bu yerda teng qiymatlar faqat bitta: $z_{24} = z_{31} = 6$, shuning uchun $P\{Z = XY = 6\} = p_{24} + p_{31} = 0,1 + 0,03 = 0,13$ bo'ladi. U holda taqsimot qatori 11 ta ustundan iborat bo'ladi. Manfiy ko'paytuvchining hisobiga qiymatlarning o'sib borish tartibi buzildi, lekin biz ularni o'sib borish tartibida joylashtiramiz:

$Z = XY$	-6	-5	-3	-2	2	3	5	6	9	15	18
P	0,04	0,06	0,08	0,02	0,05	0,2	0,15	0,13	0,12	0,09	0,06

Ehtimollar uchun (18.58) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 0,04 + 0,06 + 0,08 + 0,02 + 0,05 + 0,2 + 0,15 + 0,13 + 0,12 + 0,09 + \\ + 0,06 = 1.$$

$4X$ tasodifiy miqdor $z_1 = 4x_1 = 4 \cdot (-1) = -4$, $z_2 = 4 \cdot 1 = 4$, $z_3 = 4 \cdot 3 = 12$ qiymatlarni mos ravishda $p_1 = P\{X = -1\} = 0,2$, $p_2 = P\{X = 1\} = 0,5$,
 $p_3 = P\{X = 3\} = 0,3$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Shuning uchun bu ko'paytma tasodifiy miqdorning taqsimot qatori

$Z = 4X$	-4	4	12
P	0,2	0,5	0,3

ko'rinishda bo'ladi. ◀

18.48-Misol. a parametrli X va b parametrli Y Puasson taqsimotli diskret tasodifiy miqdorlar $Z = X + Y$ yig'indisining taqsimotini toping.

► X va Y tasodifiy miqdorlar

$$P\{X = i\} = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, i = 0, 1, 2, \dots; P\{Y = j\} = \frac{b^j}{j!} e^{-b}, j = 0, 1, 2, \dots$$

taqsimot qonunlari bilan berilgan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emasligini e'tiborga olsak

$$\begin{aligned}
P\{Z = k\} &= \sum_i \sum_j P\{X = i, Y = j\} = \sum_{i=0}^k P\{X = i, Y = k - i\} = \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} e^{-a} \frac{b^{k-i}}{(k-i)!} e^{-b} = e^{-(a+b)} \sum_{i=0}^k \frac{a^i b^{k-i}}{i! (k-i)!} = \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} a^i b^{k-i} = \\
&= \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i} = \frac{(a+b)^k}{k!} e^{-(a+b)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

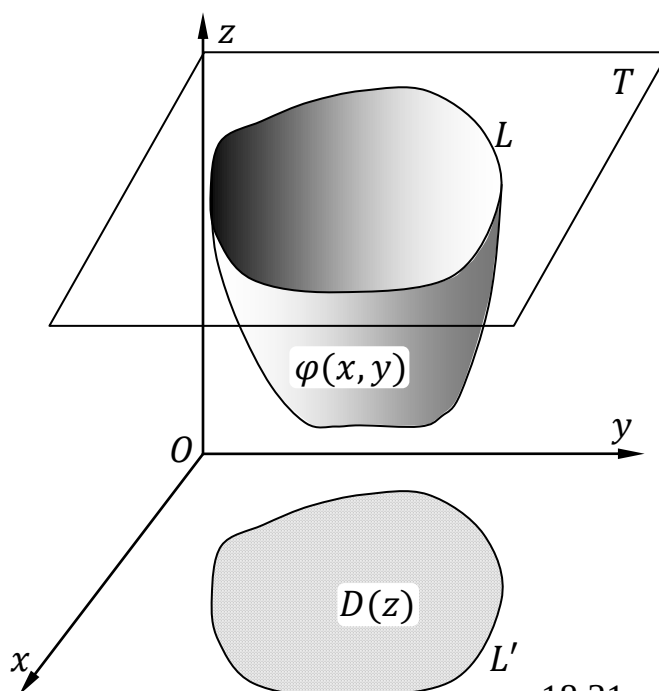
ya'ni yig'indi ham $(a + b)$ parametrli Puasson taqsimotli tasodifiy miqdor bo'lar ekan. ◀

Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning funksiyasi

Agar (X, Y) –ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi $f_{X,Y}(x, y)$ bo'lsa, $Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_Z(z) = \iint_{\varphi(x,y) < z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (18.69)$$

tenglik bilan aniqlanadi.



18.31-rasm

(18.69) tenglikni geometrik talqin bilan izohlaymiz. $z = \varphi(x, y)$ funksiya bilan aniqlangan sirt “piyola” shaklda bo‘lsin (18.31-rasm) va z yuqorida aniqlangan $Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning ixtiyoriy qiymati bo‘lsin. $(0, 0, z)$ nuqta orqali Oz o‘qqa perpendikulyar qilib T tekislik o‘tkazamiz. T tekislik bilan $z = \varphi(x, y)$ sitrning kesishuvidan hosil bo‘lgan chiziqni L orqali va uning Oxy tekislikdagi proyeksiyasini esa L' orqali belgilaymiz. Oxy tekislikning L' chiziq bilan chegaralangan qismi $D(z)$ bo‘lsin. U holda (X, Y) tasodifiy nuqtaning $D(z)$ sohaga tushishi $\{Z < z\}$ hodisaning yuz berishiga olib keladi. $Z = \varphi(X, Y)$ ekanligini inobatga olsak

$$D(z) = \{(x, y): \varphi(x, y) < z\} = \{\varphi(x, y) < z\}$$

Shunday qilib, $\{Z < z\}$ va $\{(X, Y) \in D(z)\}$ hodisalar teng kuchli hodisalar ekan. U holda ikki o‘lchovli taqsimot zichlik funksiyasining 6-xossasiga binoan

$$P\{Z < z\} = P\{(X, Y) \in D(z)\} = \iint_{\varphi(x, y) < z} f_{X, Y}(x, y) dx dy$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. $P\{Z < z\} = F_Z(z)$ ekanligidan (18.69) kelib chiqadi.

$Z = \varphi(X, Y)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$MZ = M\varphi(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X, Y) f_{X, Y}(x, y) dx dy$$

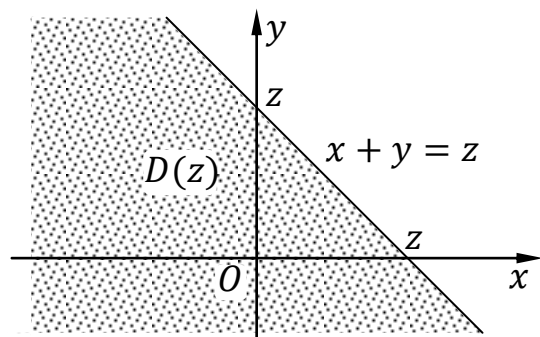
formulaga ko‘ra topiladi.

Ikki tasodifiy miqdor yig‘indisining, ya’ni $Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini topamiz.

$f_{X, Y}(x, y)$ ikki o‘lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi bo‘lsin. (18.69) formulaga ko‘ra,

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_{D(z)} f_{X, Y}(x, y) dx dy,$$

bu yerda: $D(z) = \{(x, y): x + y < z\}$ (18.32-rasm).



18.32-rasm

O'ng tomondagi ikki o'chovli integralni hisoblaymiz:

$$\iint_{D(z)} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx.$$

Demak:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx,$$

bu tenglikni ichki integralning yuqori chegarasiga kirgan z o'zgaruvchi bo'yicha differensiallasak, $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasini hosil qilamiz:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx. \quad (18.70)$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ bo'lishi ma'lum. U holda (18.70) formula

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx \quad (18.71)$$

ko'rinishni oladi. Bu holda Z tasodifiy miqdor taqsimotining $f_Z(z)$ zichlik funksiyasi X va Y tasodifiy miqdorlar $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ zichlik funksiyalarining *kompozitsiyasidan* iborat deyiladi yoki boshqacha qilib aytganda ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yigindisining taqsimot qonuni qo'shiluvchilar taqsimot qonunlarining *kompozitsiyasiga* teng.

18.49-Misol. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ikkita $X = N[m_X, \sigma_X]$, $Y = N[m_Y, \sigma_Y]$ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar $Z = X + Y$ yig‘indisi taqsimotining zichlik funksiyasini toping.

► (18.71) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m_X, \sigma_X}(x) \varphi_{m_Y, \sigma_Y}(z-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dx = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(Ax^2-2Bx+C)} dx, \end{aligned}$$

bu yerda

$$A = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}, \quad B = \frac{m_X}{\sigma_X^2} + \frac{z - m_Y}{\sigma_Y^2}, \quad C = \frac{m_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^2}.$$

U holda:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(Ax^2-2Bx+C)} dx = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(x^2-2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)} dx = \\ &\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(\left(x-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)} dx = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{A}{2}\left(x-\frac{B}{A}\right)^2} dx = \\ &= \left| t = \sqrt{\frac{A}{2}}\left(x - \frac{B}{A}\right), dx = \sqrt{\frac{2}{A}} dt \right| = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \sqrt{\frac{2}{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} \sqrt{\frac{2}{A}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{\frac{B^2-AC}{2A}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{\frac{B^2-AC}{2A}}. \end{aligned}$$

Endi $(B^2 - AC)/2A$ ifodaga yuqoridagi mos ifodalarni qo‘yamiz:

$$\begin{aligned} \frac{B^2 - AC}{2A} &= \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\left(\frac{m_X}{\sigma_X^2} + \frac{z - m_Y}{\sigma_Y^2} \right)^2 - \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \left(\frac{m_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right) \right) = \\ &= \frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\frac{m_X^2}{\sigma_X^4} + 2 \frac{m_X(z - m_Y)}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} + \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^4} - \frac{m_X^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} - \frac{m_X^2}{\sigma_X^4} - \frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_Y^4} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \Bigg) = -\frac{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)} \left(\frac{(z - m_Y)^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} - 2 \frac{m_X(z - m_Y)}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} + \frac{m_X^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \right) =$$

$$= -\frac{(z - m_X - m_Y)^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}.$$

Demak,

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} e^{-\frac{(z-m_X-m_Y)^2}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}},$$

bu esa $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlanganligini anglatadi va uning parametrlari $(m_X + m_Y), \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ bo'ladi: $Z = N[m_X + m_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}]$. ◀

18.20. Tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi va korrelyatsiya koeffitsiyenti

(X, Y) – ikki o'ldovli tasodifiy miqdor bo'lsin.

18.27-Ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning $\text{cov}(X, Y)$ kovariatsiyasi (korrelyatsion momenti) deb markazlashtirilgan $\dot{X} = X - m_X$ va $\dot{Y} = Y - m_Y$ tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\text{cov}(X, Y) = M(\dot{X}\dot{Y}) = M((X - m_X)(Y - m_Y)).$$

Kovariatsiyani hisoblash formulalarini keltiramiz.

Diskret X va Y tasodifiy miqdorlar uchun

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij},$$

uzluksiz X va Y tasodifiy miqdorlar uchun

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y)f_{X,Y}(x, y)dx dy.$$

18.12-Teorema. Kovariatsiya quyidagi xossalarga ega:

1. $\text{cov}(X, X) = DX$;
2. O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y tasodifiy miqdorlar uchun $\text{cov}(X, Y) = 0$;
3. Agar $X = a_1U + b_1$ va $Y = a_2V + b_2$ bo'lsa, $\text{cov}(X, Y) = a_1a_2\text{cov}(U, V)$

bo'ladi;

$$4. D(X + Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y)$$

$$5. -\sqrt{DX \cdot DY} \leq \text{cov}(X, Y) \leq \sqrt{DX \cdot DY}$$

6. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro zhiziqli bog'langan, ya'ni shunday o'zgarmas a va b sonlar topilib, ular uchun $Y = aX + b$ bo'lsa,

$$|\text{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$$

bo'ladi.

$$7. \text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y.$$

► 1. Kovariatsiyaning ta'rifiga ko'ra,

$$\text{cov}(X, X) = M((X - m_X)(X - m_X)) = M(X - m_X)^2 = DX.$$

2. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi bu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasiga teng, shuning uchun

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= M((X - m_X)(Y - m_Y)) = M(X - m_X) \cdot M(Y - m_Y) = \\ &= (MX - m_X)(MY - m_Y) = 0. \end{aligned}$$

3. $X = a_1U + b_1$ va $Y = a_2V + b_2$ bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= M((X - m_X)(Y - m_Y)) = \\ &= M((a_1U + b_1 - a_1m_U - b_1)(a_2U + b_2 - a_2m_V - b_2)) = \\ &= M((a_1U - a_1m_U)(a_2U - a_2m_V)) = a_1a_2M((U - m_U)(V - m_V)) = \\ &= a_1a_2\text{cov}(U, V). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. D(X + Y) &= M((X + Y) - M(X + Y))^2 = M((X - m_X) + (Y - m_Y))^2 = \\ &= M(X - m_X)^2 + 2M((X - m_X)(Y - m_Y)) + M(Y - m_Y)^2 = \\ &= DX + DY + 2\text{cov}(X, Y). \end{aligned}$$

5. Bu xossani isbotlash uchun yangi $(X - m_X)/\sigma_X$ va $(Y - m_Y)/\sigma_Y$ tasodifiy miqdorlarni kiritamiz va ularga nisbatan 4-xossani qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) &= D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) + D\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) \pm \\ &\pm 2M\left[\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right)\right)\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - M\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right)\right)\right] = 1 + 1 \pm \end{aligned}$$

$$\pm 2M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = 2 \pm \frac{2}{\sigma_X \sigma_Y} M((X - m_X)(Y - m_Y)) = 2\left(1 \pm \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right)$$

va har qanday dispersiya nomanfiyligini inobatga olsak

$$1 \pm \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \geq 0$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan esa $-\sigma_X \sigma_Y \leq \text{cov}(X, Y) \leq \sigma_X \sigma_Y$ kelib chiqadi.

6. $Y = aX + b$ bo‘lsin, u holda

$$DY = D(aX + b) = a^2 DX = a^2 M(X - m_X)^2 \text{ yoki } \sqrt{DY} = a\sqrt{M(X - m_X)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}(X, aX + b) = M((X - m_X)(aX + b - M(aX + b))) = \\ &= M((X - m_X)(aX + b - aMX - b)) = aM(X - m_X)^2 = \\ &= a\sqrt{M(X - m_X)^2} \sqrt{M(X - m_X)^2} = \sqrt{DY} \sqrt{DX}. \end{aligned}$$

7. Kovariatsiyaning ta’rifiga ko‘ra

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= M((X - m_X)(Y - m_Y)) = M(XY - Xm_Y - Ym_X + m_X m_Y) = \\ &= M(XY) - m_Y MX - m_X MY + m_X m_Y = M(XY) - m_Y m_X - m_X m_Y + m_X m_Y = \\ &= M(XY) - m_X m_Y. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

18.28-Ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi nolga teng, ya’ni

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

bo‘lsa, ular korrelyatsiyalanmagan, aks holda korrelyatsiyalangan deyiladi.

Agar $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ bo‘lsa, 2-xossaga binoan X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liq bo‘ladi. Biroq $\text{cov}(X, Y) = 0$ ekanligidan ularning o‘zaro bog‘liq emasligi kelib chiqmaydi.

18.50-Misol. X tasodifiy miqdor $(-1, 1)$ oraliqda tekis taqsimlangan va $Y = X^2$ bo‘lsin. X va Y tasodifiy miqdorlarning bunday funksional bog‘likligiga qaramasdan $\text{cov}(X, Y) = 0$ bo‘lishini ko‘rsatamiz.

► Dastlab $MX = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{1 - (-1)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Kovariatsiyaning 7-xossasiga binoan

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - MX \cdot MY = MX^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

bo‘ladi. ◀

Kovariatsiyaning xossaligidan u tasodifiy miqdorlarning bog‘liqlik darajasini va ularning (m_X, m_Y) nuqta atrofida qanday darjada sochilishini tavsiflashi kelib chiqadi.

Kovariatsiyaning muhim bir kamchiligi shundan iboratki, uning o‘lchovi tasodifiy miqdorlar o‘lchovlari ko‘paytmasiga teng. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi xarakteristika o‘lchovsiz bo‘lsa, bog‘liqlikni izohlash ancha oson kechadi. Bu muammoni oson hal qilish mumkin-tasodifiy miqdorlar kovariatsiyasini ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari ko‘paytmasiga bo‘lish yetarli.

18.29-Ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyenti deb, bu tasodifiy miqdorlar kovariatsiyasining ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari ko‘paytmasiga nisbatiga aytiladi:

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

18.13-Teorema. Korrelyatsiya koeffitsiyenti quyidagi xossalarga ega:

1. $r(X, X) = 1$;
2. Korrelyatsiya koeffitsiyenti mutlaq qiymati bo‘yicha birdan oshmaydi, ya’ni

$$|r(X, Y)| \leq 1;$$

3. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, u holda

$$r(X, Y) = 0$$

bo‘ladi.

4. X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun

$$|r(X, Y)| = 1$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀1. Kovariatsiyaning 1-xossasiga binoan

$$r(X, X) = \frac{\text{cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{DX}{\sigma_X^2} = 1.$$

2. Kovariatsiyaning 5-xossasiga binoan $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y$ bo'ladi, u holda

$$|r(X, Y)| = \frac{|\text{cov}(X, Y)|}{\sigma_X \sigma_Y} \leq \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1.$$

3. Kovariatsiyaning 2-xossasiga binoan X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmasa, $\text{cov}(X, Y) = 0$ va demak $r(X, Y) = \text{cov}(X, Y)/\sigma_X \sigma_Y = 0$ bo'ladi.

4. Zarurligi. X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro chiziqli bog'liq, ya'ni $Y = aX + b$ bo'lsin. U holda kovariatsiyaning 6-xossasiga binoan $|\text{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY}$ bo'ladi, bundan esa

$$|r(X, Y)| = \frac{|\text{cov}(X, Y)|}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sqrt{DX \cdot DY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 1.$$

Yetarliligi. $r(X, Y) = 1$ bo'lsin. U holda kovariatsiyaning 5-xossasini isbotlashda qaralgan $(X - m_X)/\sigma_X$ va $(Y - m_Y)/\sigma_Y$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = 2\left(1 - \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan esa,

$$D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni:

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = c.$$

Biroq,

$$c = Mc = M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) - M\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = 0 - 0 = 0,$$

ya'ni $c = 0$. Demak,

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y},$$

ya'ni,

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y$$

va agar $r(X, Y) = -1$ bo'lsa,

$$Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y$$

bo'ladi. Shunday qilib, $r(X, Y) = \pm 1$ bo'lganda X va Y tasodifiy miqdorlar chiziqli bog'langan bo'ladi. ►

18.51-Misol. (X, Y) ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan. Uning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

X	Y		
	0	2	3
-1	0,1	0,15	0,09
3	0,11	0,14	0,11
4	0,09	0,11	0,1

► Uning X va Y komponentalarining taqsimot qatorlarini tuzamiz:

X	-1	3	4
P	0,34	0,36	0,3

va

Y	0	2	3
P	0,3	0,4	0,3

Bu komponentalarning matematik kutilmasi va dispersiyalarini topamiz:

$$MX = -1 \cdot 0,34 + 3 \cdot 0,36 + 4 \cdot 0,3 = 1,94;$$

$$MY = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 1,7;$$

$$DX = (-1)^2 \cdot 0,34 + 3^2 \cdot 0,36 + 4^2 \cdot 0,3 - 1,94^2 = 4,6164;$$

$$DY = 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,3 - 1,7^2 = 1,41.$$

$$\text{Demak } \sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{4,6164} \approx 2,15, \sigma_Y = \sqrt{DY} = \sqrt{1,41} \approx 1,19.$$

Endi $M(XY)$ matematik kutilmani X va Y tasodifiy miqdorlar qiymatlarining ko'paytmasini mos ehtimollarga ko'paytirib, so'ngra qo'shib topamiz:

$$M(XY) = -1 \cdot 0 \cdot 0,1 - 1 \cdot 2 \cdot 0,15 - 1 \cdot 3 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0 \cdot 0,11 + 3 \cdot 2 \cdot 0,14 + \\ + 3 \cdot 3 \cdot 0,11 + 4 \cdot 0 \cdot 0,09 + 4 \cdot 2 \cdot 0,11 + 4 \cdot 3 \cdot 0,1 = 3,34.$$

$\text{cov}(X, Y)$ kovariatsiyani 7-xossaga asosan topamiz:

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y = 3,34 - 1,94 \cdot 1,7 = 0,042$$

va nihoyat

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0,042}{2,15 \cdot 1,19} = 0,0103$$

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bogʻliqlikni darajasini ifodalovchi korrelyatsiya koeffitsiyentini hosil qildik va u musbat korrelyatsiyani tashkil qilar ekan. ◀

18.52-Misol. (X, Y) ikki oʻlchovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Bu tasodifiy miqdorning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

► Dastlab X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini topamiz:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^1 (x + y) dy = \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^1 (x + y) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + yx \right) \Big|_0^1 = y + \frac{1}{2}.$$

Endi bu zichliklar yordamida X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma va dispersiyalarni topamiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12};$$

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \left(y + \frac{1}{2} \right) dy = \left(\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12};$$

$$DX = MX^2 - (m_X)^2 = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx - \frac{49}{144} = \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{11}{144};$$

$$DY = MY^2 - (m_Y)^2 = \int_0^1 y^2 \left(y + \frac{1}{2} \right) dy - \frac{49}{144} = \left(\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}.$$

Demak, $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{11}/12$ ekan. Endi $M(XY)$ matematik kutilmani topamiz:

$$\begin{aligned} M(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y) dy = \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kovariatsiyaning 7-xossasiga binoan

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - m_X \cdot m_Y = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{3}{144}$$

va nihoyat korrelyatsiya koeffitsiyentini

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{3}{144}}{\frac{\sqrt{11}}{12} \frac{\sqrt{11}}{12}} = -\frac{3}{11}$$

topamiz, manfiy korrelyatsiya ekan. ◀

18.21. Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari va sonli xarakteristiklari

Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari

Birorta tasodifiy miqdorning boshqa bir tasodifiy miqdor o'zgarishiga ta'sirini o'rganish uchun shartli taqsimot tushunchasi kiritiladi. Bu tushunchalar ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor uchun dastlab diskret so'ngra uzluksiz hol uchun kiritamiz.

Diskret hol.

Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdor

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \quad (18.72)$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin.

Agar tajriba natijasida X tasodifiy miqdor o'zining birorta x_i qiymatini qabul qilsa, Y tasodifiy miqdorigicha qoladi va o'zining $y_1, y_2, \dots, y_m$ qiymatlaridan birini $p(x_i, y_1), p(x_i, y_2), \dots, p(x_i, y_m)$ ehtimollar bilan qabul qilishi mumkin. $p(y_j|x_i)$ shartli ehtimolni shartsiz ehtimollar orqali har bir $i = 1, 2, \dots, n$ da barcha $j = 1, 2, \dots, m$ uchun

$$p(y_j|x_i) = p(x_i, y_j)/p(x_i) \quad (18.73)$$

formula bilan ifodalash mumkin.

Xuddi shu singari har bir $j = 1, 2, \dots, m$ da barcha $i = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$p(x_i|y_j) = p(x_i, y_j)/p(y_j)$$

formulani yozish mumkin.

(18.73) formulaga ko'ra hisoblanadigan $p(y_1|x_i), p(y_2|x_i), \dots, p(y_m|x_i)$ shartli ehtimollar to'plamiga Y tasodifiy miqdorning $X = x_i$ shartdagi *shartli taqsimoti*, $p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), \dots, p(x_n|y_j)$ to'plamga esa X tasodifiy miqdorning $Y = y_j$ shartdagi *shartli taqsimoti* deb ataladi. Shartli ehtimollar yig'indisi birga teng:

$$\sum_{j=1}^m p(y_j|x_i) = 1 \text{ va } \sum_{i=1}^n p(x_i|y_j) = 1.$$

18.53-Misol. (X, Y) ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor

X	Y			
	-1	2	3	P_X
0	0,1	0,15	0,09	0,34
2	0,11	0,14	0,11	0,36
3	0,09	0,11	0,1	0,3
P_Y	0,3	0,4	0,3	

taqsimot qatori bilan berilgan. Bu taqsimot qatori asosida $p(y_j|x_i)$ va $p(x_i|y_j)$ shartli taqsimotlar qatorini tuzing.

► $p(y_j|x_i)$ shartli taqsimotlarni (18.73) formulaga ko'ra topamiz:

$$P\{Y = -1|X = 0\} = P\{X = 0, Y = -1\}/P_X\{X = 0\} = 0,1/0,34 = 0,29,$$

$$P\{Y = 2|X = 0\} = P\{X = 0, Y = 2\}/P_X\{X = 0\} = 0,15/0,34 = 0,44, \dots$$

Xuddi shu singari $p(x_i|y_j)$ shartli taqsimotlarni topamiz:

$$P\{X = 0|Y = -1\} = P\{X = 0, Y = -1\}/P_Y\{Y = -1\} = 0,1/0,3 = 0,33,$$

$$P\{X = 2|Y = -1\} = P\{X = 2, Y = -1\}/P_Y\{Y = -1\} = 0,11/0,3 = 0,37, \dots$$

topilgan qiymatlardan

$p(y_j|x_i)$ – shartli taqsimot

X	Y			
	-1	2	3	P_X
0	0,29	0,44	0,27	1
2	0,31	0,39	0,3	1
3	0,3	0,37	0,33	1

$p(x_i|y_j)$ – shartli taqsimot

X	Y		
	-1	2	3
0	0,33	0,38	0,30
2	0,37	0,35	0,37
3	0,30	0,27	0,33
P_Y	1	1	1

jadvallarni hosil qilamiz. ◀

Uzluksiz hol.

Ikki o‘lchovli (X, Y) uzluksiz tasodifiy miqdor uchun shartli taqsimot $f(y|x)$ va $f(x|y)$ zichliklar bilan beriladi. Ularni aniqlovchi formulalarni (18.73) formuladagi $p(y_j|x_i)$, $p(x_i|y_j)$, $p(x_i)$, $p(y_j)$ ehtimollarni mos zichliklar bilan almashtirib

$$\begin{aligned} f_Y(y|x) &= f_{X,Y}(x, y)/f_X(x) \\ f_X(x|y) &= f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y) \end{aligned} \quad (18.74)$$

tenglilarni hosil qilamiz.

Shartsiz taqsimotlar zichlik funksiyalari qanday xossalarga ega bo‘lsa ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor komponentalarining shartli taqsimotlari zichlik funksiyalari ham xuddi shunday xossalarga ega.

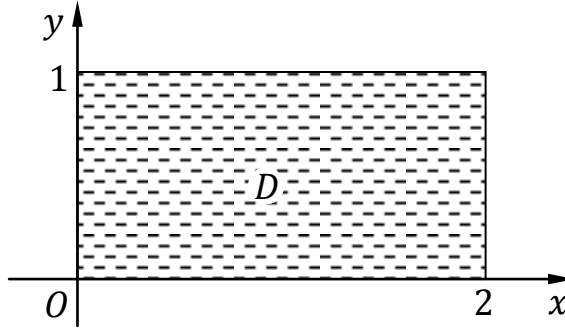
(X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor komponentalarining shartli taqsimot funksiyasi (18.39) formula asosida (18.74) formulalardan bevosita hosil qilinadi:

$$\begin{aligned} F_Y(y|x) &= \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, v) dv, \\ F_X(x|y) &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du \end{aligned}$$

18.54-Misol. (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$ (18.33-rasm). X va Y tasodifiy miqdorlarning shartli va shartsiz taqsimot zichliklarini toping.



18.33-rasm

► Dastlab c koeffitsiyentni zichlik funksiyasining 3-xossasiga binoan topamiz:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^1 c(x + y) dy = c \int_0^2 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \\ &= c \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = c \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) \Big|_0^2 = 3c. \end{aligned}$$

Demak, $c = 1/3$ bo'ladi.

Shartsiz taqsimot zichliklarini zichlik funksiyasining 7 va 8-xossalaridan topamiz:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (x + y) dy = \frac{1}{3} \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (2x + 1), \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (x + y) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (1 + y), \end{aligned}$$

ya'ni,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} (2x + 1), & x \in (0, 2), \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} (1 + y), & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Topilgan zichlik funksiyalar uchun $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = 1$ shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(2x+1)dx = \left(\frac{1}{6}(x^2+x)\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6} \cdot (4+2) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(1+y)dy = \left(\frac{2}{3}(y+\frac{1}{2}y^2)\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot (1+\frac{1}{2}) = 1.$$

$f_X(x|y), f_Y(y|x)$ shartli taqsimot zichlik funksiyalarini (18.74) formulaga ko'ra topamiz:

$$f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{2}{3}(1+y)} = \frac{x+y}{2(1+y)}, \quad (x,y) \in D,$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{6}(2x+1)} = \frac{2(x+y)}{1+2x}, \quad (x,y) \in D$$

X, Y – tasodifiy miqdorlarning shartsiz $f_X(x), f_Y(y)$ va shartli $f_X(x|y), f_Y(y|x)$ zichlik funksiyalari teng emas ekan. Shuning uchun ular o'zaro bog'liq. ◀

Tasodifiy miqdorlarning shartli sonly xarakteristikalarini

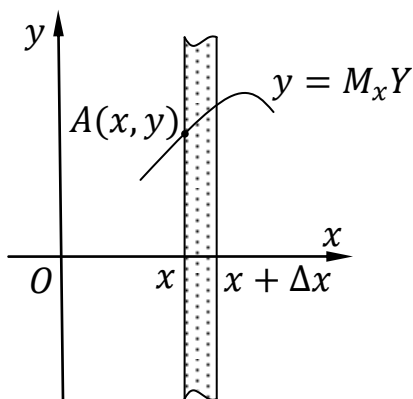
Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlarni o'rganishda faqat X va Y komponentalarining sonly xarakteristikalarini o'rganmasdan, balki shartli taqsimotning sonli xarakteristikalarini-shartli matematik kutilma va shartli dispersiya ham o'rganiladi.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni qaraymiz. Y tasodifiy miqdorning $M[Y|X=x] = M_x Y$ shartli matematik kutilmasi

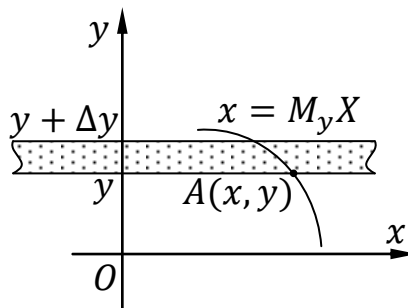
$$M[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy} \quad (18.75)$$

formulaga ko'ra topiladi.

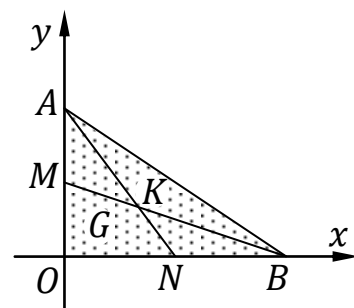
Agar mexanik talqin qiladigan bo'lsak, ordinatasi (18.75) formula bilan hisoblanadigan $A(x, y)$ nuqta 18.34-rasmda tasvirlangan vertikal yo'lak og'irlik markazining $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lgandagi limit holatini ifodalaydi. x o'zgarganda $A(x, y)$ nuqta Y tasodifiy miqdorning x bo'yicha regressiya chizig'i deb ataluvchi $y = M_x Y$ chiziqni tasvirlaydi.



18.34-rasm



18.35-rasm



18.36-rasm

Shunday qilib Y tasodifiy miqdorning x bo'yicha regressiya chizig'i x o'zgarganda Y ning o'rtacha qiymati qanday o'zgarishini ko'rsatar ekan.

O'zgaras $Y = y$ qiymatda X tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasi ham xuddi shu singari kiritiladi:

$$M[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy} \quad (18.76)$$

$x = M_y X$ egri chiziq X tasodifiy miqdorning y bo'yicha regressiya chizig'i deb ataladi va u y o'zgarganda X tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati qanday o'zgarishini ko'rsatadi. $f_{X,Y}(x, y)$ funksiya bilan berilgan plastinka gorizontall kichik yo'laklarga bo'linganda bu yo'laklar og'irlik markazlari ana shu egri chiziqni chizadi (18.35-rasm).

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor uchlari A, O, B nuqtalarda bo'lgan G uchburchakda tekis taqsimlangan bo'lsin (18.36-rasm). Mexanik talqindan

tushunarliki, regressiya chiziqlari uchburchakning og'irlik markazi bo'lgan $K(m_X, m_Y)$ nuqtalarda kesishuvchi AN va BM medianalardan iborat bo'ladi. Bu holda regressiya chiziqlari to'g'ri chiziq kesmalaridan iborat bo'ladi. Bu chiziqli regressiya deb ataluvchi muhim hol hisoblanadi.

Agar X va Y o'zaro bog'liq bo'lmasa, yana bir chiziqli regressiyaga ega bo'lamiz. Bunda $f_Y(y|x) = f_{X,Y}(x,y)/f_X(x) = f_X(x)f_Y(y)/f_X(x) = f_Y(y)$ va $M[Y|X = x] = MY$ bo'ladi.

Xuddi shu singari $f_X(x|y) = f_X(x)$ va $M[X|Y = y] = MX$ bo'ladi.

Endi diskret holda qisqacha to'xtalib o'taylik. X tasodifiy miqdor qiymatlarining birorta $X = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ qiymatini qo'zg'almas deb qarab, Y tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasini

$$M[Y|X = x_i] = \sum_{j=1}^m y_j p(y_j|x_i) = \frac{\sum_{j=1}^m y_j p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu formula Y tasodifiy miqdor o'rtacha qiymatining x_i qiymatga qanaday bog'liqligini aniqlaydi. Uzluksiz holdan farqli ravishda bu bog'liqlik diskret bo'ladi. $i = 1, 2, \dots, n$ uchun Oxy tekislikda $(x_i, M[Y|X = x_i])$ nuqtalarni olamiz. Ularning har biri $x = x_i$ to'g'ri chiziqlarda yotuvchi p_{ij} nuqtaviy massalarning o'g'irlik markazini aniqlaydi. Qo'shni nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirsak siniq chiziq hosil bo'ladi va uni biz Y tasodifiy miqdorning x bo'yicha regressiya chizig'i deb ataymiz.

Xuddi shu singari, X tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasini

$$M[X|Y = y_j] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i|y_j) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}, (j = 1, 2, \dots, m)$$

formula bilan aniqlaymiz.

Agar X va Y o‘zaro bog‘liq bo‘lamasa, $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j}$ bo‘ladi va ixtiyoriy i va j uchun $M[Y|X = x_i] = MY$ va $M[X|Y = y_j] = MX$ ekanligini osongina ko‘rsatish mumkin.

Yuqorida kiritilgan regressiya chiziqlari o‘rtacha kvadratik ma’noda minimallikning muhim xossasiga ega.

X tasodifiy miqdor x qiymatni qabul qilgan bo‘lsin. Bu shartda Y komponenta uchun barcha notasodifiy $\tau(x)$ funksiyalar orasidan $M[(Y - \tau(x))|X = x]$ matematik kutilma minimal bo‘ladigan $\tau_{min}(x)$ funksiyani topishga harakat qilamiz. Natijada X tasodifiy miqdorning $\tau(X)$ funksiyasi o‘rtacha kvadratik ma’nosida Y tasodifiy miqdorga eng yaxshi yaqinlashadi.

◀ Matematik kutilmaning xossalarini ketma-ket qo‘llab,

$$\begin{aligned} M[(Y - \tau(x))^2|X = x] &= M[\{(Y - M_x Y) + (M_x Y - \tau(x))\}|X = x] = \\ &= M[(Y - M_x Y)^2|X = x] + 2(M_x Y - \tau(x))M[(Y - M_x Y)|X = x] + \\ &\quad + (M_x Y - \tau(x))^2 = M[(Y - M_x Y)^2|X = x] + (M_x Y - \tau(x))^2 \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $M[(Y - M_x Y)|X = x] = M[Y|X = x] - M[Y|X = x] = 0$ tenglikdan foydalandik. $(M_x Y - \tau(x))^2 \geq 0$ ekanligini inobatga olsak,

$$M[(Y - \tau(x))^2|X = x] \geq M[(Y - M_x Y)^2|X = x]$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan esa, o‘rtacha kvadratik ma’nosida eng yaxshi yaqinlashish Y tasodifiy miqdorning x bo‘yicha regressiya funksiyasi, ya’ni $\tau_{min}(x) = M_x Y$ ekanligi kelib chiqadi. ▶

18.55-Misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

bo‘lgan ikki o‘lchovli (X, Y) normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning regressiya chizig‘ini toping.

► (18.74) formulalardan murakkab bo‘lmagan almashtirishlardan so‘ng

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(\sigma_2\sqrt{1-r^2})^2} \left(y - m_2 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)\right)^2}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ko‘rinib turibdiki, o‘ng tomondagi ifoda $m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$ va $\sigma_2\sqrt{1-r^2}$ parametrli normal taqsimot zichlik funksiyasidan iborat. Bu esa $M_x Y$ shartli matematik kutilma va demak regressiya funksiyasi uchun

$$y = M_x Y = m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$$

formula o‘rinli ekanligini anglatadi. Hosil qilingan Y tasodifiy miqdorning x bo‘yicha regressiya tenglamasini yanada simmetrikroq bo‘lgan

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = r \frac{x - m_1}{\sigma_1}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Xuddi shu singari X tasodifiy miqdorning y bo‘yicha regressiya tenglamasi

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x - m_1}{\sigma_1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Tekislikdagi normal taqsimot uchun regressiya chiziqli bo‘lar ekan. Regressiya to‘g‘ri chiziqlari (m_1, m_2) sochilish markazi orqali o‘tadi va bu to‘g‘ri chiziqlar $k_{y|x} = r\sigma_2/\sigma_1$, $k_{x|y} = \sigma_2/(r\sigma_1)$ burchak koeffitsiyentlarga ega (bitta Ox o‘qqa nisbatan). ◀

18.30-Ta’rif. Agar Y tasodifiy miqdorning x bo‘yicha va X tasodifiy miqdorning y bo‘yicha regressiya chiziqlari to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bogliqlik chiziqli korrelyatsiya deb ataladi.

Biz yuqoridagi misolda (X, Y) ikki o‘chovli normal taqsimotning X va Y komponentalari orasidagi bogliqlik chiziqli korrelyatsiya ekanligini ko‘rsatdik.

To‘liq matematik kutilma formulasi

Oddiy matematik kutilma qanday xossalarga ega bo'lsa shartli matematik kutilma ham xuddi shunday xossalarga ega bo'lishini osongina tekshirib ko'rish mumkin. Biz bu yerda faqat shartli matematik kutilmalargagina xos bo'lgan xossada to'xtalamiz. (18.74) formulaga ko'ra $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y|x)$. U holda

$$\begin{aligned} MY &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} M[Y|X = x] f_X(x) dx. \end{aligned} \quad (18.77)$$

Agar $M[Y|X = x] = \varphi(x)$ deb olsak, (18.77) formulaning o'ng tomonidagi integralni $\varphi(X)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb qarash mumkin va biz uni $M[Y|X]$ orqali belgilaymiz: $M[Y|X] = \varphi(X)$. Shunday qilib,

$$\begin{aligned} M[Y|X] &= M[Y|X = x], \\ MY &= M[M[Y|X]]. \end{aligned} \quad (18.78)$$

(18.78) formula *to'liq matematik kutilma* formulasi deb ataladi.

18.22. Katta sonlar qonuni

Matematik olim A.N.Kolmogorov ta'biri bo'yicha katta sonlar qonunini keng ma'noda quyidagicha ifodalash mumkin: *ayrim keng ma'nodagi shartlar bajarilganda katta sondagi tasodifiy faktorlarning birgalikdagi ta'siri tasodifiylikdan holi bo'lgan natijaga olib keladi*. Boshqacha qilib aytganda, *katta sondagi tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi tasodifiy bo'lmay qoladi va oldindan katta aniqlik bilan qonuniyatlari aytilishi mumkin*.

Katta sonlar qonuni tor ma'noda har biri u yoki bu shart basjarilganda katta sondagi tajribalarning o'rtacha xarakteristikalarini aniq bir o'zgarmaslarga yaqinlashishini ifodalovchi bir qator teoremlar tushuniladi.

18.14-Teorema. Agar X tasodifiy miqdor $MX = m_X$ matematik kutilmaga va DX dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$P\{|X - m_X| \geq \varepsilon\} \leq DX/\varepsilon^2 \quad (18.79)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

◀ (18.79) tengsizlikni zichlik funksiyasi $f(x)$ bo'lgan uzluksiz X tasodifiy miqdor uchun isbotlaymiz. $P\{|X - m_x| \geq \varepsilon\}$ ehtimolning ma'nosi X tasodifiy miqdorning $[m_x - \varepsilon, m_x + \varepsilon]$ kesmadan tashqariga tushishidan iborat. Shuning uchun bu ehtimolni zichlik funksiyasining xossalariidan foydalanib ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} P\{|X - m_x| \geq \varepsilon\} &= \int_{-\infty}^{m_x - \varepsilon} f(x)dx + \int_{m_x + \varepsilon}^{+\infty} f(x)dx = \int_{|x - m_x| \geq \varepsilon} f(x)dx \leq \\ &\leq \int_{|x - m_x| \geq \varepsilon} \frac{(x - m_x)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \frac{DX}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

bu yerda $|x - m_x| \geq \varepsilon$ integrallash sohasini $(x - m_x)^2 \geq \varepsilon^2$ ko'rinishda yozib olish mumkinligidan va $1 \leq (x - m_x)^2 / \varepsilon^2$ tengsizlikdan, hamda integrallash sohasi kengaytirilganda integralning qiymati oshishidan foydalanilgan. ▶

(18.80) ikkala tomonini 1 dan ayirib

$$P\{|X - m_x| < \varepsilon\} \geq 1 - DX/\varepsilon^2 \quad (18.80)$$

tengsizlikni yozish mumkin. (18.79) va (18.80) tengsizliklar *Chebishev tengsizliklari* deb ataladi.

18.56-Misol. $[a, b]$ kesmada tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning kesma o'rtasidan chetlanishi $(b - a)/2$ qiymatdan oshmaslik ehtimolini quyidan baholang.

▶ 18.31 va 18.37-Misollarda bu tasodifiy miqdor uchun $MX = (b + a)/2$ va $DX = (b - a)^2/12$ ekanligini topgan edik. Demak kesmaning o'rtasi MX ekan. U holda (18.81) formulaga ko'ra

$$P\left\{\left|X - \frac{b + a}{2}\right| < \frac{b - a}{2}\right\} \geq 1 - \frac{\frac{(b-a)^2}{12}}{\frac{(b-a)^2}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

ya'ni tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor kesma o'rtasidan chetlanishi $(b - a)/2$ qiymatdan oshmaslik ehtimoli kamida 0,75 ga teng ekan. ◀

Chebishev tengsizliklari ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar uchun, shu jumladan $X = m$ binomial taqsimot uchun ham o'rinli. Bu taqsimot uchun 18.29 va 18.34-

Misollarda $MX = np$ va $DX = npq$ ekanligini ko'rgan edik. Bu tasodifiy miqdor uchun (18.80) tengsizlik

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geq 1 - npq/\varepsilon^2 \quad (18.81)$$

ko'rinishni oladi. Xususan, $X = m/n$ chastota uchun $MX = M(m/n) = p$ va $DX = D(m/n) = pq/n$ bo'ladi va Chebishev tengsizligi

$$P\{|m/n - p| < \varepsilon\} \geq 1 - pq/n\varepsilon^2 \quad (18.82)$$

ko'rinishda bo'ladi.

X tasodifiy miqdorning $[\varepsilon, +\infty)$ oraliqqa tushish ehtimoli Markov tengsizligi yordamida baholanadi.

18.15-Teorema. m_X –matematik kutilmaga ega bo'lgan ixtiyoriy nomanfiy X tasodifiy miqdor uchun

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq m_X/\varepsilon \quad (18.83)$$

tengsizlik o'rinli.

◀ $\{X \geq \varepsilon\}$ hodisaning indekatori deb ataluvchi Y_ε tasodifiy miqdorni kiritamiz:

$$Y_\varepsilon = \begin{cases} 1, & X \geq \varepsilon, \\ 0, & 0 \leq X < \varepsilon. \end{cases}$$

U holda $MY_\varepsilon = 1 \cdot P\{X \geq \varepsilon\} + 0 \cdot P\{0 \leq X < \varepsilon\} = P\{X \geq \varepsilon\}$.

X nomanfiy bo'lganligi tufayli $X \geq XY_\varepsilon$ va $\{X \geq \varepsilon\}$ hodisa uchun $XY_\varepsilon \geq \varepsilon Y_\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu ikki tengsizlikdan esa $X \geq \varepsilon Y_\varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Hosil qilingan tengsizlik ularning matematik kutilmasi uchun ham o'rinli:

$$MX \geq M[\varepsilon Y_\varepsilon] = \varepsilon MY_\varepsilon = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}.$$

Bu tengsizlikdan esa (18.84) tengsizlik hosil bo'ladi. ►

(18.83) Markov tengsizligi deb ataladi.

$\{X \geq \varepsilon\}$ va $\{X < \varepsilon\}$ qarama-qarshi hodisalar bo'lganligi uchun, $P\{X \geq \varepsilon\}$ ehtimolni $1 - P\{X < \varepsilon\}$ ehtimol bilan almashtirib,

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - m_X/\varepsilon \quad (18.84)$$

Markov tengsizligining boshqa ko'rinishini hosil qilamiz.

18.57-Misol. Tez yordam stansiyasida bir soatda oʻrtacha 300 ta chaqiruv boʻladi. Keyingi soatda chaqiruvlar soni 1) kamida 400 ta boʻlishi; 2) 500 dan kam boʻlishi ehtimollarini baholang.

► 1) Masala shartiga koʻra chaqiruvlar soni X uchun $MX = 300$. U holda 18.83 tengsizlikka koʻra $P\{X \geq 400\} \leq 300/400 = 0,75$, yaʼni chaqiruvlar soni 400 dan oshish ehtimoli 0,75 dan oshmaydi.

2) (18.84) tengsizlikka koʻra $P\{X < 500\} \geq 1 - 300/500 = 0,4$, yaʼni chaqiruvlar soni 500 dan kam boʻlish ehtimoli kamida 0,4 ga teng boʻladi. ◀

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ uzluksiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini qaraymiz.

18.31-Taʼrif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| \geq \varepsilon\} = 0 \text{ yoki}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1 \quad (18.85)$$

tenglik oʻrinli boʻlsa, $\{X_n\}$ ketma-ketlik a soniga ehtimol boʻyicha yaqinlashadi deyiladi.

18.16-Teorema (Chebishev). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ juft-jufti bilan oʻzaro bogʻliq boʻlmagan tasodifiy miqdorlar mos ravishda $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ matematik kutilmalarga va $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ dispersiyalarga ega, hamda shunday $C > 0$ son topilib, barcha k uchun $D_k \leq C$ tengsizliklar oʻrinli boʻlsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \quad (18.86)$$

yaʼni tasodifiy miqdorlarning oʻrta arifmetigi ular matematik kutilmalarining oʻrta arifmetigiga ehtimol boʻyicha yaqinlashadi.

◀ $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ tasodifiy miqdorni qaraymiz. Dispersiyaning 2-xossasiga koʻra,

$$DY_n = D\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n DX_k \leq \frac{1}{n^2} nC = \frac{C}{n}.$$

Matematik kutilmaning 3-xossasiga binoan:

$$MY_n = M \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right] = \frac{1}{n} M \left[\sum_{k=1}^n X_k \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n MX_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_k.$$

(18.79) Chebishev tengsizligini qo'llasak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - MY_n| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{DY_n}{\varepsilon^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{C}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ya'ni (18.86) o'rinli. ►

Mulohaza. Chebishev teoremasiga ko'ra, hadlar soni katta bo'lganda tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi o'zining tasodifiylik xususiyatini yo'qotadi va uni tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining o'rta arifmetigi, ya'ni notasodifiy miqdor bilan almashtirish mumkin.

18.16-Teorema Chebishev ta'biridagi katta sonlar qonunini ifodalaydi.

Natija (Chebishev teoremasining xususiy holi). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ juft-jufti bilan o'zaro bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan, m matematik kutilmaga va chekli dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m \right| \geq \varepsilon \right\} = 0, \quad (18.87)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

18.58-Misol. 200 qutidan iborat to'plamdagi elektrolampaning o'rtacha yonish vaqtini hisoblash uchun har bir qutidan bittadan lampa tanlandi. Agar har bir qutidagi lampalar yonish vaqtining o'rtacha kvadratik chetlanishi 7 soatdan kam bo'lsa, tanlab olingan 200 ta elektrolampalarning o'rtacha yonish vaqti butun to'plamdagi lampalarning o'rtacha yonish vaqtidan chetlanishi 5 soatdan oshmaslik ehtimolini toping.

► i -qutidan olingan lampaning yonish vaqti X_i bo'lsin. Masala shartiga ko'ra dispersiya $D(X_i) < 7^2 = 49$ bo'ladi. Tanlab olingan 200 ta lampaning o'rtacha yonish vaqti $(X_1 + X_2 + \dots + X_{200})/200$ va bu yonish vaqtlari matematik

kutilmalarining o'rtachasi $(M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_{200}))/200 = (m_1 + m_2 + \dots + m_{200})/200$ bo'ladi. U holda qidirilayotgan ehtimolni (18.80) tengsizlikka ko'ra baholaymiz:

$$P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{200}}{200} - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{200}}{200} \right| \leq 5 \right\} \geq 1 - \frac{49}{200 \cdot 5^2} \approx 0,9902,$$

ya'ni, qidirilayotgan ehtimol kamida 0,9902 bo'ladi. ◀

18.59-Misol. O'rganilayotgan hududda kimyoviy element miqdorini aniqlash uchun burg'ulab namuna olinadi. Agar har bir namunadagi kimyoviy element miqdori hududdagi kimyoviy elementning haqiqiy miqdoridan o'rtacha kvadratik chetlanishi 5 dan oshmasa, namunalardagi kimyoviy element miqdori haqiqiy miqdordan chetlanishi 1 dan oshmaslik ehtimoli kamida 0,95 bo'lishi uchun necha marta namuna olish kerak.

► i -namunadagi kimyoviy element miqdori X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bo'lsin. m – kimyoviy elementning haqiqiy miqdori, ya'ni barcha i uchun $M(X_i) = m$ bo'lsin.

$$P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m \right| \leq 1 \right\} \geq 0,95$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan n namunalar sonini topish kerak. Mazkur tengsizlik (18.80) munosabatga ko'ra, agar

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{5^2}{n \cdot 1^2} \geq 0,95$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa bajariladi. Bu tengsizlikni yechsak $n \geq 500$ bo'ladi, ya'ni kamida 500 marta namuna olish kerak. ◀

Katta miqdordagi bir jinsli materialning sifati haqida uncha ko'p bo'lmagan namuna bo'yicha xulosa chiqarish mumkinligini ifodalovchi statistikada keng qo'llaniladigan *tanlama usuli* Chebishev teoremasiga asoslangan.

Katta sonlar qonunining eng sodda va birinchi ko'rinishi Bernulli teoremasi hisoblanadi. U nisbiy chastotaning turg'unlik xususiyatini nazariy jihatdan asoslab beradi.

18.16-Teorema (Bernulli). Bir-biriga bog‘liqsiz bir xil n ta tajribalarning har birida A hodisaning yuz berish ehtimoli p va bu hodisaning yuz berishlar soni m bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (18.88)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

◀ $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritamiz, bunda agar k -tajribada A hodisa yuz bergan bo‘lsa, $X_k = 1$ va yuz bermagan bo‘lsa, $X_k = 0$ deb olamiz. U holda X_k tasodifiy hodisaning taqsimot qatori

X_k	0	1
P	$1 - p$	p

ko‘rinishda, matematik kutilmasi $MX_k = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$, dispersiyasi esa $DX_k = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p(1 - p) = pq$ bo‘ladi. Tajribalar bir-biriga bog‘liqsiz bo‘lganligi uchun $X_1, X_2, \dots, X_n$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar va ularning dispersiyasi bitta $1/4$ soni bilan chegaralangan:

$$pq = p(1 - p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Kiritilgan tasodifiy miqdorlar yordamida A hodisaning yuz berishlar sonini $m = \sum_{k=1}^n X_k$ ko‘rinishda yozib olish mumkin. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasining xususiy holi bo‘lgan natijani qo‘llaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - p \right| < \varepsilon \right\} = \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 1, \end{aligned}$$

isbotlash talab qilingan munosabatni hosil qildik. ►

Bernulli teoremasining ma’nosi shundan iboratki, bir-biriga bog‘liqsiz o‘tkazilgan bir xil tajribalar soni n katta bo‘lganda, kuzatilayotgan hodisaning

tasodifiy miqdor bo'lgan m/n chastotasi bu hodisaning p yuz berish ehtimolidan juda kam farq qiladi, ya'ni amalda u tasodifiylik xususiyatini yo'qotadi.

Bernulli teoremasining bevosita umumlashtirilishi Puasson teoremasi bo'lib, unda o'tkazilayotgan har bir tajribada kuzatilayotgan hodisaning yuz berish ehtimoli har xil bo'ladi.

18.17-Teorema (Puasson). Bir-biriga bog'liqsiz bir xil n ta tajribalarning har birida kuzatilayotgan A hodisa mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimollar bilan yuz bersin. Tajribalar soni n cheksiz o'sganda A hodisaning nisbiy chastotasi hodisa yuz berish ehtimollarining o'rta arifmetigiga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1 \quad (18.89)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◀ Bu yerda ham Bernulli teoremasining isbotidagi singari $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini kiritiladi. X_k tasodifiy miqdorning taqsimot qatori bu yerda

X_k	0	1
P	$1 - p_k$	p_k

ko'rinishda va

$$M(X_k) = p_k, D(X_k) = p_k q_k = p_k(1 - p_k) = p_k - p_k^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

bo'ladi. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo'llab, (18.89) munosabatga ega bo'lamiz. ►

Yuqorida qaralgan katta sonlar qonuni ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi tayinli bir o'zgarmasga yaqinlashishini ifodalaydi. Ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining ta'siri ostida yuzaga keladigan qonuniyatlar bu bilan chegaralanib qolmas ekan. Ayrim shartlar bajarilganda ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi normal taqsimotga intilar ekan. Bu tasdiq markaziy limit teorema deb ataluvchi ushbu teorema keltirilgan.

18.18-Teorema. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning barchasi bitta $M(X_k) = m$ matematik kutilmaga va $D(X_k) = \sigma^2$ dispersiyaga ega bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x \right\} = \Phi(x) \quad (18.90)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $\Phi(x)$ – normal standart taqsimot funksiyasi.

(18.90) munosabat katta n qiymatlarda tasodifiy miqdorlarning yig‘indisi bilan bog‘liq bo‘lgan hodisalarning ehtimollarini hisoblash imkonini beradi. Masalan,

$$\begin{aligned} P \left\{ \alpha \leq \sum_{k=1}^n X_k \leq \beta \right\} &= P \left\{ \frac{\alpha - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{\beta - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \right\} \approx \\ &\approx \Phi \left(\frac{\beta - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \right) \end{aligned} \quad (18.91)$$

18.60-Misol. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ tasodifiy miqdorning har biri $M(X_k) = 2$ matematik kutilma va $D(X_k) = 1$ dispersiyaga ega bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorlar yig‘indisi uchun $P\{204 < X_1 + X_2 + \dots + X_{100} < 216\}$ ehtimolni toping.

► Masala shartiga ko‘ra $n = 100$, $\alpha = 204$ va $\beta = 216$. U holda (18.91) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} P \left\{ 204 \leq \sum_{k=1}^{100} X_k \leq 216 \right\} &\approx \Phi \left(\frac{216 - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 1}} \right) - \Phi \left(\frac{204 - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 1}} \right) = \\ &= \Phi(1,6) - \Phi(0,4) = 0,5 + 0,4452 - (0,5 + 0,1554) = 0,2898, \end{aligned}$$

ya’ni, yuqorida aytilgan 100 ta sonning yig‘indisi (204,216) oraliqqa tushish ehtimoli taxminan 0,2898 ga teng. ◀

Nazorat savollari

1. Ehtimollar nazariyasi nimani o‘rganadi?
2. Muqarrar va mumkin bo‘lmagan hodisalarga ta’rif bering.
3. Qanday hodisalarni birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb ataymiz?

4. Bir nechta hodisa to'liq guruhni tashkil qilishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
5. Ikkita hodisaning yig'indisi, ko'paytmasi, ayirmasiga ta'rif bering.
6. Qanday hodisalarga qarama-qarshi hodisalar deb ataymiz?
7. Hodisaning nisbiy chastotasi nima?
8. Nisbiy chastota qanday xossalarga ega?
9. Ehtimolning klassik ta'rifini bayon qiling.
10. Geometrik ehtimol nima?
11. Shartli ehtimol formulasini keltiring.
12. To'la ehtimol va Bayyes formulalarini keltiring.
13. Bernulli sxemasi deganda nimani tushunasiz?
14. Puasson formulasini keltiring.
15. Muavr-Laplasning lokal va integral formulalari nima haqida?
16. Tasodifiy miqdorlarga ta'rif bering.
17. Ehtimollarning taqsimot funksiyasi qanday xossalarga ega?
18. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi qanday aniqlanadi?
19. Uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining zichlik funksiyasi qanday xossalarga ega?
20. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi qanday aniqlanadi?
21. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi qanday aniqlanadi?
22. Tasodifiy miqdorning k – tartibli boshlang'ich markaziy momentlari qanday aniqlanadi?
23. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasiga ta'rif bering.
24. Ikkita tasodifiy miqdor o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
25. Ikkita tasodifiy miqdorning kovariatsiyasi nima?

26. Ikkita tasodifiy miqdorning korrelyatsiya koeffitsiyenti qanday aniqlanadi?
27. Shartli matematik kutilma qanday aniqlanadi?
28. Katta sonlar qonuni deganda nimani tushunasiz?

Mashqlar.

1. O'yin toshi va tanga birgalikda tashlandi. Barcha yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalarni toping.
2. Qutida 10 ta oq va 15 ta qora sharlar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda olingan sharning qora rangda bo'lish ehtimolini toping.
3. Qutida 11 ta oq, 12 ta qora va 15 ta qizil sharlar bor. Qutidan ixtiyoriy ravishda ikkita shar olindi. Olingan sharlarning biri oq ikkinchisi qora rangda bo'lish ehtimolini toping.
4. Qutida 6 ta oq va 7 ta qora rangli sharlar bor. Qutidan ketma-ket ikki marta bittadan shar olindi. Ushbu $B = \{\text{birinchi olinishda qora rangli shar bo'lgan}\}$, $A = \{\text{ikkinchi olinishda oq rangli shar bo'lgan}\}$ hodisalar uchun, $P(A|B)$ shartli ehtimolni toping.
5. Birinchi qutida 10 ta oq va 9 ta qora, ikkinchi qutida esa 7 ta oq va 8 ta qora rangli sharlar bor. Ikkala qutidan ixtiyoriy ravishda bittadan shar olindi. Olingan sharlarning ikkalasi ham oq rangda bo'lish ehtimolini toping.
6. Birinchi qutida 7 ta oq va 9 ta qora, ikkinchi qutida esa 5 ta oq va 4 ta qora rangli sharlar bor. Ikkinchi qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi va birinchi qutiga solindi. So'ngra birinchi qutidagi sharlar yaxshilab aralashtirildi va ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Sharining oq rangda bo'lish ehtimolini toping.
7. Birinchi qutida 3 ta oq va 2 ta qora, ikkinchi qutida esa 4 ta oq va 3 ta qora rangli shar bor. Ikkinchi qutidan ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi va birinchi qutiga solindi. So'ngra birinchi qutidagi sharlar yaxshilab aralashtirildi va ixtiyoriy ravishda bitta shar tanlandi. Agar ana shu tanlangan shar oq rangda bo'lsa, u dastlab ikkinchi qutida bo'lganlik ehtimolini toping.

8. Har bir tajriba natijasida A hodisa $p = 0,2$ ehtimol bilan yuz beradi. Tajriba 6 marta o'tkazilganda A hodisa:

- 1) 5 marta;
- 2) ko'pi bilan 3 marta;
- 3) kamida bir marta yuz berish ehtimolini toping.

9. Har bir tajriba natijasida A hodisa $p = 0,02$ ehtimol bilan yuz beradi. Tajriba 100 marta o'tkazilganda A hodisa 5 marta yuz berish ehtimolini toping.

10. Agar har bir tajribada A hodisaning yuz berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 200 marta tajriba o'tkazilganda A hodisa 80 marta yuz berish ehtimolini toping.

11. O'yin toshi 400 marta tashlanganda 5 raqami 90 martadan 100 martagacha tushish ehtimolini hisoblang.

12. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatori ushbu jadvalda berilgan.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,05	0,2	0,35	0,25	0,05

X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing va taqsimot poligoni hamda taqsimot funksiyasining grafigini yasang.

13. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qatori ushbu jadvalda berilgan.

x_i	0	1	2	3	4	5
P	0,11	0,06	0,2	0,32	0,21	0,1

X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

14. X tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ c(x-2), & 2 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

ko'rinishda, bu yerda c – o'zgarmas son. c – o'zgarmas sonni, $F(x)$ taqsimot funksiyasini va $P\{1,5 < X < 2,5\}$ ehtimolni toping.

15. X tasodifiy miqdor $[1, 7]$ kesmada tekis taqsimlangan. X tasodifiy miqdorning $(2, 5)$ oraliqqa tushish ehtimolini, matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

16. $\lambda = 2$ parametrli eksponensial taqsimotning zichlik va taqsimot funksiyasini yozing. Bu tasodifiy miqdorning $(0, 1)$ oraliqqa tushish ehtimolini, matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

17. O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qatorlari

x_i	1	2	3	4
$P(x_i)$	0,1	0,23	0,36	0,31

y_j	-1	0	1	5
$P(y_j)$	0,15	0,25	0,31	0,29

ko'rinishda bo'lsa, $X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qatorini tuzing, matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

18. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimoti

X	Y			
	1	2	4	6
2,1	0,03	0,15	0,061	0,08
3,2	0,031	0,04	0,123	0,07
6,4	0,145	0,037	0,051	0,182

jadvalda keltirilgan. X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qatorlarini tuzing.

19. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, uning $x = 0, x = \pi/4, y = \pi/6, y = \pi/3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

20. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$$

ko'rinishda bo'lsa, uning taqsimot funksiyasini toping.

21. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimoti

X	Y			
	-1	0	1	2
-1,1	0,035	0,151	0,061	0,079
0,2	0,031	0,045	0,123	0,07
1,4	0,161	0,037	0,051	0,156

jadvalda keltirilgan. Uning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

22. (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{y}{8}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

taqsimotning zichlik funksiyasi bilan berilgan, bu yerda $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$. Bu tasodifiy miqdorning $r(X, Y)$ korrelyatsiya koeffitsiyentini toping.

XIX BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

Matematik statistika-matematikaning bir bo‘limi bo‘lib, u kuzatishlar yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida ommaviy hodisalar va jarayonlar haqida ilmiy asoslangan xulosalar chiqarishning usullarini ishlab chiqish bilan shug‘ullanadi.

Matematik statistikada olingan ma’lumotlar tasodifiylik xususiyatiga ega deb faraz qilinadi va shu sababli ehtimollar nazariyasining tushunchalariga va usullariga tayanadi. Matematik statistika masalalarini qandaydir ma’noda ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari deb hisoblash mumkin. Agar ehtimollar nazariyasida biror tasodifiy hodisaning ehtimoliy modeli berilgan deb hisoblab, bu model asosida bizni qiziqtiruvchi hodisalarning ehtimollarini hisoblasak, matematik statistikada esa, ehtimoliy model berilmagan, biroq tajriba natijasida qandaydir tasodifiy hodisaning amalga oshgani ma’lum deb faraz qilinadi. Statistik ma’lumot asosida qaralayotgan hodisa yoki jarayon haqida xulosa olish uchun matematik statistika mos ehtimoliy modelni tanlaydi.

19.1. Bosh va tanlama to‘plam

Biror shart-sharoitda o‘tkaziladigan tajribalarning mumkin bo‘lgan natijalari to‘plamiga *bosh to‘plam* deb ataladi.

Bosh to‘plam chekli va cheksiz bo‘lishi mumkin. Bosh to‘plam chekli sondagi elementdan iborat bo‘lsa, u chekli bo‘ladi. Cheksiz bosh to‘plamda cheksiz sondagi elementlar bo‘ladi.

Masalan, N ta tayyor mahsulotning sifati nazorat qilinayotgan bo‘lsin. Bunda tajriba tayyor mahsulotlar to‘plamidan nazorat uchun bittasi tanlanishidan iborat. Barcha tayyor mahsulotlar to‘plami bosh to‘plamni tashkil qiladi, chunki tajriba natijasi N ta mahsulotdan ixtiyoriy bittasining tanlanishidan iborat. Mazkur misolda bosh to‘plam chekli.

Detal o'lchamining haqiqiy o'lchamdan chetlanishining barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami cheksiz bosh to'plamdan iborat.

Biror T tajriba natijasida o'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning x qiymatlari kuzatilayotgan bo'lsin.

19.1-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamiga *bosh to'plam* deb ataladi.

Bevosita o'tkazilgan tajribalardan olingan natijalar to'plamiga bosh to'plamdan olingan *tanlama* deb ataladi. Tanlamadagi elementlar soni n chekli bo'lib, tanlamaning hajmi deb ataladi.

19.2-Ta'rif. X tasodifiy miqdorning kuzatilgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari to'plamiga *tanlama* deb ataymiz.

Boshqacha qilib aytganda, tanlama bu bosh tasodifiy miqdor deb ataluvchi X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan o'zaro bog'liq bo'lmagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari to'plamidan iborat.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar *tanlamaning elementlari*, ularning n soni esa *tanlamaning hajmi* deb ataladi.

Ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorni o'rganish uchun sonlar juftligining $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ chekli ketma-ketligi tuziladi. Xuddi shu singari ixtiyoriy o'lchamli tanlama tuzish mumkin.

Bosh to'plamning xarakteristikalarini yaxshi baholash uchun tanlama bosh to'plamning o'rganilayotgan belgilarini yetarlicha to'liq tasvirlamog'i lozim. Buning uchun katta sonlar qonuniga ko'ra tasodifiy tanlanishga qat'iy rioya qilinmog'i lozim, ya'ni bosh to'plamning barcha elementlari tanlamada bir xil imkoniyat bilan qatnashishini ta'minlash kerak.

Tanlamalar *qaytariladigan* va *qaytarilmaydigan* ko'rinishda bo'ladi. Birinchi holda tanlangan element keyingi elementni tanlashdan oldin bosh to'plamga qaytariladi; ikkinchi holda esa qaytarilmaydi.

Qaytariladigan tanlamada agar bitta element ikki marta tanlansa, u bir marta hisobga olinadi.

Qaytariladigan tanlamaning matematik statistikada ahamiyatga ega bo'lgan uchta muhim xususiyatini keltirib o'tamiz.

1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamani bir necha bor takrorlab, umumiy holda biz har safar tanlamaning yangi elementini hosil qilamiz, shu sababli tanlamaning elementlari tasodifiy miqdor sifatida qaraladi. Ular bitta bosh to'plamdan qiymatlar qabul qilishganligi tufayli bosh to'plamni hosil qiluvchi X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama X tasodifiy miqdorning n ta nusxasi. Tanlamaning har bir elementi boshqalaridan bog'liqsiz ravishda tanlangan, u holda tanlamaning barcha elementlari o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor sifatida qaraladi.

Shunday qilib, nazariy jihatdan $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama komponentalari o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan n o'lchovli $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy miqdorning qiymatlaridan iborat.

2. Bosh to'plamning barcha elementlaridan tanlama olinishi mumkin. Bunda har bir elementga tanlanishga teng imkoniyat beriladi.

3. Aniq bir tanlamaning har bir x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) elementi tanlashning teng shartlarida tanlangan.

Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamaning tasodifiylik xususiyatini ta'kidlash maqsadida biz uni ayrim joylarda bir xil taqsimlangan va o'zaro bog'liq bo'lmagan n ta $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdor sifatida ham qaraymiz.

O'tkazilayotgan tajribadagi shart-sharoitga qarab tanlash turlicha olib boriladi: *oddiy*-bunda bosh to'plamdan bittadan element tanlanadi; *biror belgiga ko'ra*-bunda bosh to'plam biror belgilarga ko'ra qismlarga ajratiladi va har bir qismdan tanlanadi (masalan, o'tkazilgan referendum haqida fikrlarni jinsiga, yoshiga, ... qarab bo'lingan qismlardan ixtiyoriy ravishda tanlab so'raladi); *mexanik*-bunda tanlash ma'lum bir o'zgarmas intervalda bajariladi (masalan, har ellikta odamdan keyin fikr so'raladi);

guruhli-bunda bosh to'plamdan elementlar guruhlar bilan tanlanadi va ular yalpi tajribadan o'tkaziladi.

Amaliyotda, yuqorida ko'rsatilgan usullardan bir nechtasining uyg'unlashgan ko'rinishidan ko'proq foydalaniladi.

19.2. Variatsion va statistik qator. Taqsimotning empirik funksiyasi

X tasodifiy miqdor o'rganilayotgan bo'lsin. Shu maqsadda X tasodifiy miqdor ustida qator tajribalar o'tkaziladi. Har bir tajribada X tasodifiy miqdor u yoki bu qiymatni qabul qiladi.

Bu tajribalar natijasida X tasodifiy miqdor x_1 qiymatni n_1 marta, x_2 qiymatni n_2 marta, ..., x_m qiymatni n_m marta qabul qilsin va bunda $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ bo'lib, n tanlamaning hajmi bo'lsin. $x_1, x_2, \dots, x_m$ qiymatlar X tasodifiy miqdorning variantalari deb ataladi.

19.3-Ta'rif. Tanlama elementlarining kamaymaydigan tartibda joylashtirilishiga *variatsion qator* deb ataladi, bunda bir xil elementlar takrorlanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra X tasodifiy miqdorning $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlaridan tuzilgan $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qatori uchun $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ va $x_{(1)} =$

$$\min_{1 \leq i \leq n} x_i, \dots, x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i \text{ munosabatlar o'rinli bo'lar ekan.}$$

Tanlamaning minimal va maksimal elementlari chetki elementlar deb ataladi. Boshqacha qilib aytganda, variatsion qatorda ekstremal elementlar $x_{\min} = x_{(1)}$, $x_{\max} = x_{(n)}$ bo'ladi. Tanlamaning maksimal va minimal elementlari orasidagi

$$R = x_{\max} - x_{\min} \quad (19.1)$$

farqni *tanlamaning kengligi* deb ataymiz.

19.1-Misol. Fevral oyining kunlari bo'yicha o'rtacha kunlik temperaturalardan $n = 28$ hajmli tanlama tuzildi:

-4, -6, -9, -8, -6, -6, -5, -3, -3, 0, 1, 2, 2, 0, -3, -6, -8, -9, -11, -8, -6, -4, -3, -1, 1, 2, 2, 3.

Bu tanlamaning variatsion qatorini tuzing va tanlama kengligini aniqlang.

► Tanlamaning variatsion qatori

-11, -9, -9, -8, -8, -8, -6, -6, -6, -6, -6, -5, -4, -4, -3, -3, -3, -3, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3 ko‘rinishda bo‘ladi va $x_{\min} = -11$; $x_{\max} = 3$; $R = 3 - (-11) = 14$. ◀

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qator elementlari orasida tenglari ham bo‘lishi mumkin. Bu variatsion qatordan m ta turli qiymatli variantalarni ajratamiz va ularni $x_1, x_2, \dots, x_m$ orqali belgilaymiz (belgilashlarni ko‘paytirmaslik uchun, yana x_i belgilashdan foydalandik). Ularning har biri $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ variatsion qatorda mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_m$ marta uchrasin.

19.4-Ta’rif. Tanlamadagi x_i variantaning necha marta uchrashini ko‘rsatuvchi n_i songa bu variantaning chastotasi, uning tanlama hajmiga nisbati p_i^* nisbiy chastota deyiladi, ya’ni

$$p_i^* = n_i/n, \quad (19.2)$$

bu yerda $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

19.5-Ta’rif. Variantalar va ularga mos chastota yoki nisbiy chastotalardan iborat

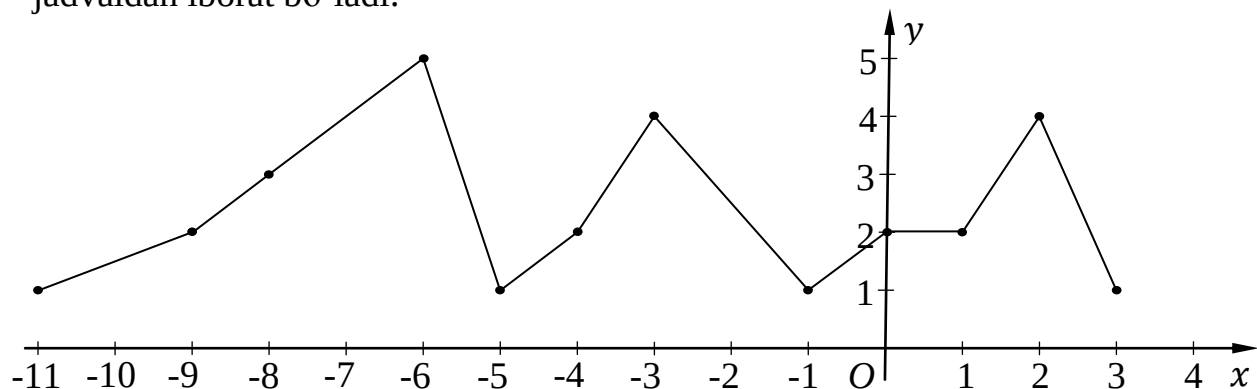
x	x_1	x_2	$\dots$	x_m	yoki	x	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n	n_1	n_2	$\dots$	n_m		p^*	p_1^*	p_2^*	$\dots$	p_m^*

ko‘rinishdagi jadvalga *statistik qator* yoki *tanlamaning statistik taqsimoti* deb ataladi.

19.2-Misol. 19.1-Misoldagi variatsion qator uchun statistik qator

x	-11	-9	-8	-6	-5	-4	-3	-1	0	1	2	3
n	1	2	3	5	1	2	4	1	2	2	4	1

jadvaldan iborat bo‘ladi.



19.1-rasm
287

Ox o'qqa statistik qatorning x_i elementlarini, Oy o'qqa esa ularning n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) chastotalarini joylashtirib statistik qatorni *chastotalarning poligoni* sifatida tasvirlash mumkin. Hosil qilingan nuqtalarning yonma-yonlarini kesmalar bilan tutashtirib siniq chiziq hosil qilinadi.

19.3-Misol. 19.2-Misoldagi statistik qator uchun chastotalar poligoni 19.1-rasmda tasvirlangan.

Tanlamaning statistik taqsimoti noma'lum taqsimotga taqriban teng bo'ladi. 18.16-Bernulli teoremasiga ko'ra $n \rightarrow \infty$, ya'ni tanlama hajmi cheksiz oshganda p_i^* – nisbiy chastotalar mos p_i ehtimollarga yaqinlashadi. Shuning uchun n tanlama hajmi katta bo'lganda statistik taqsimot haqiqiy taqsimotdan kam farq qiladi.

19.6-Ta'rif. *Empirik* (grekcha “empeiria”-tajribaga asoslangan degan ma'noni anglatadi) *taqsimot funksiyasi* deb, har bir x uchun berilgan tanlama bo'yicha $\{X < x\}$ hodisaning nisbiy chastotasiga aytiladi:

$$F_n^*(x) = P^*\{X < x\}. \quad (19.3)$$

Empirik funksiyaning qiymatlarini hisoblash uchun $F_n^*(x)$ funksiyani

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

ko'rinishda yozish qulay, bu yerda n – tanlamaning hajmi, n_x – tanlamaning x qiymatdan kichik elementlari soni.

18.16-Bernulli teoremasiga ko'ra tajribalar soni n oshgan sayin $\{X < x\}$ hodisaning nisbiy chastotasi bu hodisaning ehtimoliga yaqinlashadi. $F_n^*(x)$ empirik funksiya $\{X < x\}$ hodisa ehtimolining baholovchisi, ya'ni $F_n^*(x) \approx P\{X < x\}$ bo'ladi.

19.1-Teorema. Ixtiyoriy o'zgarmas x qiymatda n cheksiz oshganda $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasi X tasodifiy miqdorning $F_X(x)$ taqsimot funksiyasiga ehtimol bo'yicha intiladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|F_n^*(x) - F_X(x)| > \varepsilon\} = 0$$

bo'ladi.

◀Bernulli teoremasiga ko‘ra $n \rightarrow \infty$ da hodisaning nisbiy chastotasi ehtimol bo‘yicha bu hodisaning ehtimoliga intiladi. Qaralayotgan holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|P_n^*(X < x) - P_X(X > x)| > \varepsilon\} = 0.$$

U holda $P_n^*(X < x) = F_n^*(x)$, $P_X(X > x) = F_X(x)$ ekanligidan teoremaning tasdig‘i kelib chiqadi. ►

Bu teoremadan $F_n^*(x)$ empirik funksiya X tasodifiy miqdor $F_X(x)$ taqsimot funksiyasiga taqriban teng, ya’ni $F_n^*(x) \approx F_X(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

19.5-Misol. 19.1-Misolda qaralgan Fevral oyining dastlabki 10 kuni bo‘yicha o‘rtacha kunlik temperaturalardan $n = 10$ hajmli tanlama tuzildi: -4, -6, -9, -8, -6, -6, -5, -3, -3, 0. Bu tanlama bo‘yicha empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

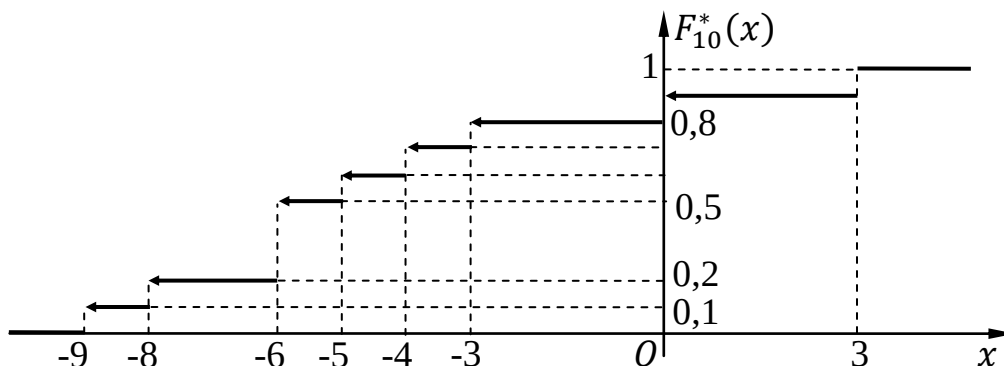
► Dastlab tanlamaning variatsion qatorini tuzamiz: -9, -8, -6, -6, -6, -5, -4, -3, 0, 3. Bu yerda $n = 10$. Demak, $x \leq -9$ bo‘lsa, $F_{10}^*(x) = 0/10 = 0$ (-9 dan kichik qiymat yo‘q); $-9 < x \leq -8$ bo‘lsa, $F_{10}^*(x) = 1/10 = 0,1$ (bu yerda $n_x = 1$); $-8 < x \leq -6$ bo‘lsa, $F_{10}^*(x) = 2/10 = 0,2$ (bu yerda $n_x = 2$) va hokazo. Ularni umumlashtirib

$$F_{10}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -9, \\ 0,1, & -9 < x \leq -8, \\ 0,2, & -8 < x \leq -6, \\ 0,5, & -6 < x \leq -5, \\ 0,6, & -5 < x \leq -4, \\ 0,7, & -4 < x \leq -3, \\ 0,8, & -3 < x \leq 0, \\ 0,9, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

empirik taqsimot funksiyasini hosil qilamiz, uning grafigi 19.2-rasmda tasvirlangan.

X tasodifiy miqdor qiymatlarining soni katta yoki u uzluksiz bo‘lganda *intervalli statistik qator* tuziladi. Jadvalning birinchi satriga uzunliklari bir xil $h = x'_1 - x'_0 = x'_2 - x'_1 = \dots = x'_m - x'_{m-1}$ bo‘lgan $[x'_0, x'_1)$, $[x'_1, x'_2)$, ..., $[x'_{m-1}, x'_m)$ qismaniy oraliqlar yoziladi. Tanlamaning hajmi $n < 150$ bo‘lganda intervallarning soni uchun $m = [1,72\sqrt[3]{n}] + 1$ va $n \geq 150$ bo‘lganda $m = [1,72\sqrt[3]{n}]$ deb olish maqsadga

muvoqif bo'lad, intervalning uzunligini esa $h = R/m$ deb olish kerak, bu yerda $[1,72\sqrt[3]{n}]$ sonning butun qismi va $R = x_{\max} - x_{\min}$ tanlamaning kengligi. x'_0 sifatida $x_{\min}$ olinadi.



19.2-rasm

Jadvalning ikkinchi satriga har bir intervalga tushgan qiymatlarning n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) soni yoki ularning $p_i^* = n_i/n$ nisbiy chastotasi yoziladi.

19.7-Ta'rif. $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ tanlamaga mos taqsimotning *empirik zichlik funksiyasi* deb,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{p_i^*}{h}, & x \in [x'_{i-1}, x'_i), i = \overline{1, m} \\ 0, & x \notin [x'_{i-1}, x'_i) \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi.

$[x_1, x_m]$ kesmada bo'lakli o'zgarmas bo'lgan $f_n(x)$ funksiyaning grafigi *gistogramma* deb aytiladi.

19.4-Misol. Geologik qidiruv guruhi ma'dandan namuna olish uchun burg'ulash ishlarini olib boradi. Bu guruhning 30 kunlik ishi o'rganildi va har kungi burg'ilash ishlari 10 santimetrgacha aniqlikda quyidagicha bajarilgan:

19,5	18,6	17,3	16,3	15,4	13,9	11,2	9,6	7,2	6,6
9,1	5,4	9,7	10,2	14,3	16,7	13,8	7,3	8,4	5
4,7	7,1	9,5	4,2	8,4	13,1	11,8	12,9	14,7	10,3

Bu tanlamaning intervalli statistik qatorini tuzing, empirik zichlik funksiyasini toping va gistogrammasini yasang.

► Tanlamaning variatsion qatorini tuzamiz:

4,2 4,7 5 5,4 6,6 7,1 7,2 7,3 8,4 8,4
 9,1 9,5 9,6 9,7 10,2 10,3 11,2 11,8 12,9 13,1
 13,8 13,9 14,3 14,7 15,4 16,3 16,7 17,3 18,6 19,5

Bir kungi burg‘ulangan chuqurlik X – uzluksiz tasodifiy miqdor va bu qiymat takrorlanmaydi (turli kunlarda burg‘ulangan chuqurlik bir xil bo‘lish ehtimoli nolga teng, hech bo‘lmaganda millimetrlarda farq qiladi).

Variatsion qatordan ko‘rinib turibdiki $x_{\min} = 4,2$ va $x_{\max} = 19,5$; qisman oraliqlarning soni $k = [1,72\sqrt[3]{30}] + 1 = 6$, oraliqlarning uzunligi esa $h \approx (19,5 - 4,2)/6 \approx 2,6$ bo‘ladi.

Demak, yuqoridagi variatsion qatorni uzunliklari $h = 2,6$ bo‘lgan 6 oraliqqa ajratamiz: $[4,2, 6,8)$, $[6,8, 9,4)$, $[9,4, 12)$, $[12, 14,6)$, $[14,6, 17,2)$, $[17,2, 19,8]$.

Har bir intervalga tushgan kunlarning n_i sonini hisoblab, tanlamaning

x_i	$[4,2, 6,8)$	$[6,8, 9,4)$	$[9,4, 12)$	$[12, 14,6)$	$[14,6, 17,2)$	$[17,2, 19,8]$
n_i	5	6	7	5	4	3
p_i^*	0,17	0,2	0,23	0,17	0,13	0,1

intervalli statistik qatorini hosil qilamiz.

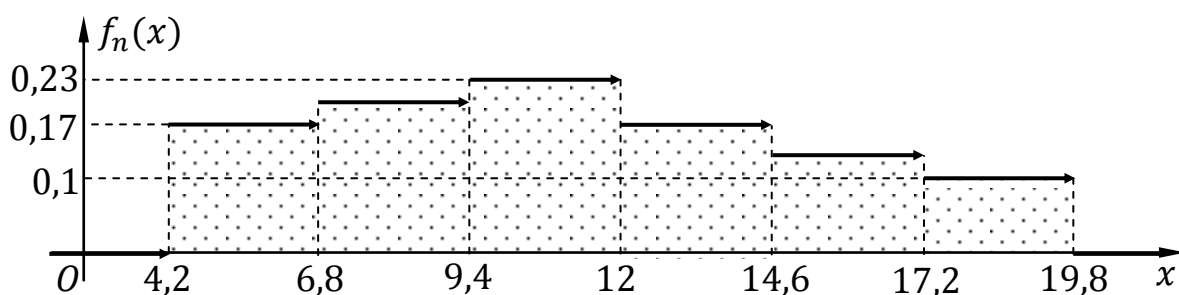
Empirik zichlik funksiyasini intervalli statistik qator jadvaliga qarab tuzamiz:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0,17, & x \in [4,2, 6,8), \\ 0,2, & x \in [6,8, 9,4), \\ 0,23, & x \in [9,4, 12), \\ 0,17, & x \in [12, 14,6), \\ 0,13, & x \in [14,6, 17,2), \\ 0,17, & x \in [17,2, 19,8], \\ 0, & x \notin [4,2, 19,8]. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi tanlamaning gistogrammasi bo‘ladi va u 19.3-rasmda tasvirlangan. ◀

Ba‘zan, asosi h balandligi esa p_i^* bo‘lgan to‘g‘ri to‘rt burchaklardan iborat diagramma ham gistogramma deb ataladi (19.3-Misolda yasalgan gistogrammada bu to‘g‘ri to‘rt burchaklar ajratib ko‘rsatilgan). Bunday diagrammani hosil qiluvchi barcha to‘g‘ri to‘rt burchaklar yuzlarining yig‘indisi birga teng bo‘ladi:

$$\sum_{i=1}^m \frac{p_i^*}{h} h = \sum_{i=1}^m p_i^* = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i = 1.$$



19.3-rasm

n_i/n nisbiy chastota Bernulli teoremasiga ko‘ra $n \rightarrow \infty$ da X tasodifiy miqdorning $[x_{i-1}, x_i)$ oraliqqa tushish ehtimoliga ehtimol bo‘yicha intiladi, ya‘ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_i}{n} - P\{x_{i-1} \leq X < x_i\} \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

yoki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_i}{n} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x) dx \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

bu yerda $f_X(x)$ funksiya X tasodifiy miqdorning zichligi. Agar oraliqlarning uzunligi h kichik, tanlama hajmi n katta bo‘lsa, 1 ga yaqin ehtimol bilan

$$\frac{n_i}{n} \approx f(x_i^*)h \quad \text{yoki} \quad \frac{n_i}{nh} \approx f(x_i^*)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi deb aytish mumkin, bu yerda x_i^* nuqta $[x_{i-1}, x_i)$ oraliqning o‘rtasi. Chap tomondagi ifoda $f_n(x)$ empirik zichlik funksiyasining $[x_{i-1}, x_i)$

oraliqdagi qiymati. Shunday qilib taqsimotning empirik zichlik funksiyasi taqriban X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasiga teng ekan: $f_n(x) \approx f_X(x)$.

19.3. Tanlamaning sonli xarakteristiklari

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorlarga aniqlangan sonli xarakteristikalar tanlamalar uchun ham aniqlanishi mumkin.

n hajmli tanlamaning

x	x_1	x_2	$\dots$	x_m
n	n_1	n_2	$\dots$	n_m

statistik taqsimoti berilgan bo'lsin.

19.8-Ta'rif. *Tanlamaning $\bar{x}$ o'rtachasi* deb, barcha variantalar va ularning mos chastotalari ko'paytmalari yig'indisining tanlama hajmi nisbatiga aytiladi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i, \quad (19.4)$$

bu yerda x_i – diskret qatorning variantalari yoki intervalli statistik qator intervallarining o'rtalari; n_i – mos chastotalar; m – takrorlanmaydigan variantalar soni yoki intervallar soni: $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Tanlamaning o'rtachasini yana

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i p_i^* \quad (19.5)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda $p_i^* = n_i/n$ – nisbiy chastota.

19.9-Ta'rif. *Tanlamaning s^2 dispersiyasi* deb, tanlama qiymatlarining tanlama $\bar{x}$ o'rtachasidan chetlanishlari kvadratlarining o'rta arifmetigiga aytiladi:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (19.6)$$

yoki (19.5) singari

$$s^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 p_i^* \quad (19.7)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Tasodifiy miqdorlarning dispersiyasidagi singari

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + (\bar{x})^2) n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 n_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m 2\bar{x}x_i n_i + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\bar{x})^2 n_i = \overline{x^2} - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i n_i + (\bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i = \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

tenglikdan tanlama dispersiyasini hisoblash uchun

$$s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \quad (19.8)$$

formulani yozish mumkin.

Tanlama dispersiyasidan olingan kvadrat ildizning arifmetik qiymatiga, tanlamaning *o‘rtacha kvadratik chetlanishi* deb ataladi:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i} \quad (19.9)$$

Ehtimollar nazariyasidagi tasodifiy miqdorlar uchun kiritilgan k -tartibli boshlang‘ich va markaziy momentlar tanlama uchun ham mos ravishda

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^k n_i, \quad \dot{\bar{x}}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^k n_i \quad (19.10)$$

kabi formulalar bilan hisoblanadi.

19.10-Ta’rif. Variatsion qatorning o‘rtasiga to‘g‘ri keluvchi qiymatga *tanlamaning medianasi* deb ataladi va M_e^* orqali belgilanadi.

Agar tanlamaning hajmi $n = 2k$, ya’ni variatsion qator juft sondagi $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(2k)}$ elementlardan iborat bo‘lsa, $M_e^* = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$; agar $n = 2k + 1$ bo‘lsa, $M_e^* = x_{(k+1)}$ bo‘ladi.

19.11-Ta’rif. Variatsion qatorning eng katta chastotaga ega bo‘lgan elementiga *tanlamaning modasi* deb ataladi va M_o^* orqali belgilanadi.

19.5-Misol. 500 talabaning bo‘ylari o‘lchandi. O‘lchash natijalaridan ushbu

$[x'_{i-1}, x'_i)$	[145, 150)	[150, 155)	[155, 160)	[160, 165)	[165, 170)
n_i	3	5	25	85	165
$[x'_{i-1}, x'_i)$	[170, 175)	[175, 180)	[180, 185)	[185, 190)	[190, 195)
n_i	142	55	16	3	1

intervalli statistik qator tuzildi (oraliqlar santimetrlarda). Bu statistik qatorning sonli xarakteristikalarini toping.

► Dastlab oraliqlarning o'rtalarini topamiz: $x_1 = (145 + 150)/2 = 147,5$, $x_2 = 152,5$, $x_3 = 157,5$, $x_4 = 162,5$, $x_5 = 167,5$, $x_6 = 172,5$, $x_7 = 177,5$, $x_8 = 182,5$, $x_9 = 187,5$, $x_{10} = 192,5$. Bu topilgan qiymatlardan va yuqoridagi jadvaldagi chastotalardan

x_i	147,5	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
n_i	3	5	25	85	165	142	55	16	3	1

kabi statistik taqsimotni tuzamiz.

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 500 \text{ ekanligini eslatib o'tamiz. U holda (19.4) formulaga ko'ra,}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{500} (147,5 \cdot 3 + 152,5 \cdot 5 + 157,5 \cdot 25 + 162,5 \cdot 85 + 167,5 \cdot 165 + \\ &+ 172,5 \cdot 142 + 177,5 \cdot 55 + 182,5 \cdot 16 + 187,5 \cdot 3 + 192,5 \cdot 1) = \frac{1}{500} \cdot 84525 = \\ &= 169,05 \text{ qiymatni hisoblab topamiz, ya'ni 500 talabani o'rtacha boyi 169,05 sm} \\ &\text{ekan.} \end{aligned}$$

Tanlamaning dispersiyasini (19.6) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 169,05)^2 n_i = \frac{1}{500} ((-21,55)^2 \cdot 3 + (-16,55)^2 \cdot 5 + \\ &+ (-11,55)^2 \cdot 25 + (-6,55)^2 \cdot 85 + (-1,55)^2 \cdot 165 + 3,45^2 \cdot 142 + 8,45^2 \cdot 55 + \\ &+ 13,45^2 \cdot 16 + 18,45^2 \cdot 3 + 23,45^2 \cdot 1) = 20223,75/500 = 40,4475. \end{aligned}$$

U holda tanlamaning o'rtacha kvadratik chetlanishi (19.9) formulaga ko'ra,

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{40,4475} \approx 6,36$$

bo‘ladi.

Variantalar soni juft bo‘lganligi uchun tanlamaning medianasi

$$M_e^* = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{167,5 + 172,5}{2} = 170$$

va $x_5 = 167,5$ element eng katta $n_5 = 165$ chastotaga ega bo‘lganligi uchun, tanlamaning modasi $M_o^* = 167,5$ bo‘ladi. ◀

19.4. Taqsimotning parametrlarini nuqtaviy baholash

Taqsimotning noma’lum parametrlarini baholash matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Bu holda taqsimotning turi ma’lum, biroq uning parametrlari noma’lum bo‘ladi. Masalan, X tasodifiy miqdor normal taqsimlanganligi ma’lum, uning m va σ parametrlari haqida hech qanday ma’lumot yo‘q bo‘ladi. Ana shu noma’lum parametrlarni tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari asosida baholash kerak bo‘ladi.

O‘tkazilgan n ta tajriba natijasida olingan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlama bo‘yicha noma’lum θ parametрни baholash talab qilinadi.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlardan X_1 –birinchi tajriba natijasi, X_2 –ikkinchi tajriba natijasi va hokazo. Shu bilan birga $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ tasodifiy miqdorlar X tasodifiy miqdor singari taqsimlangan; aniq bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning qiymatlari ekanligini eslatib o‘tamiz.

19.12-Ta’rif. Qiymati θ qiymatiga taqriban teng bo‘lgan kuzatishlar natijasining $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyasiga taqsimotning noma’lum θ parametrining *nuqtaviy bahosi* deb ataladi.

19.13-Ta’rif. Kuzatishlar natijasining ixtiyoriy funksiyasiga *statistika* deb ataladi.

19.6-Misol. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$$

ko‘rinishda bo‘lgan normal taqsimotning bosh to‘plamidan olingan bo‘lsin. Bu yerda, θ –noma’lum parameter bo‘lib, u taqsimotning matematik kutilmasiga, medianasiga va modasiga teng: $\theta = m = M_e = M_0X$.

Uning nuqtaviy bahosi sifatida turli statistiklarni olish mumkin, masalan tanlama o‘rtachasini

$$\hat{\theta}_n = \bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i p_i^*$$

yoki tanlama medianasini $\hat{\theta}_n = M_e^*$. ◀

Bosh to‘plamning o‘rganilayotgan ixtiyoriy xarakteristikasi uchun nuqtaviy baholashlar ko‘p sonli bo‘ladi. Ularning taqsimotini kamdan-kam hollardagina olish mumkin bo‘ladi. U holda $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika θ parametrining qandaydir ma’nodagi “yaxshi” bahosi bo‘lishi uchun u qanday xossalarga ega bo‘lishi kerak degan tabiiy savol tug‘iladi. Biz quyida ana shu xossalarga to‘xtalib o‘tamiz. Bu xossalar yuqorida aytilgan ko‘p sonli nuqtaviy baholashlardan “yaxshilarini” tanlab olishga imkon beradi.

19.14-Ta’rif. Agar θ parametrining $\hat{\theta}_n$ bahosi katta sonlar qonunini qanoatlantirsa, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} = 0$$

bo‘lsa, u *asosli statistik baho* deb ataladi.

Boshqacha qilib aytganda tanlamaning hajmi katta bo‘lganda $\hat{\theta}_n$ asosli statistik bahoning θ parametrdan chetlanishi ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonidan katta bo‘lishi juda kam ehtimolli bo‘ladi. Bahoning bu xossasi juda katta ahamiyatga ega, chunki, asosli bo‘lmagan baho amaliy jihatdan befoyda. Shuning uchun har qanday bahodan asoslilik xossasini qanoatlantirilishi talab etiladi (asossiz baholardan foydalanilmaydi).

19.7-Misol. A hodisa yuz berishlarining $P^*(A) = m(A)/n$ nisbiy chastotasi bu hodisaning $P(A)$ ehtimoli uchun asosli baholash bo‘ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m(A)}{n} - P(A) \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

bu Bernulli teoremasidan bevosita kelib chiqadi. ◀

19.8-Misol. Tanlamaning $\bar{x}$ o'rtachasi MX matematik kutilma uchun asosli baholash bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{x} - MX| > \varepsilon\} = 0.$$

Bu Chebishev teoremasidan bevosita kelib chiqadi. ◀

Asoslilik xossasi tanlamaning hajmi keskin oshganda bahoning asimptotik holatini tavsiflaydi. Biroq amalda ba'zan noma'lum parametrni kam hajmdagi tanlama asosida baholashga ham to'g'ri keladi.

19.15-Ta'rif. Ixtiyoriy hajmdagi tanlama uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng, ya'ni, $M\hat{\theta}_n = \theta$ bo'lgan statistika *siljimagan baho* deb ataladi.

19.9-Misol. Bernulli sxemasi bo'yicha n ta tajribada A hodisa X marta yuz bersin. A hodisa yuz berishi p ehtimolining bahosi sifatida bu hodisaning X/n nisbiy chastotasini olamiz. Demak, bu holda $\theta = p$, $\hat{\theta}_n = X/n$ bo'ladi. X , matematik kutilmasi np bo'lgan binomial taqsimlangan tasodifiy miqdor, shuning uchun

$$M\hat{\theta}_n = M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}MX = \frac{1}{n}np = p = \theta.$$

Shunday qilib, hodisa yuz berishining nisbiy chastotasi bu hodisa ehtimoli uchun siljimagan baho bo'lar ekan. ◀

19.10-Misol. X tasodifiy miqdor $m = MX$ matematik kutilmasining bahosi sifatida n hajmli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning o'rtacha arifmetigini olamiz:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Bu bahoning matematik kutilmasini hisoblaymiz:

$$M\hat{\theta}_n = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m = m = \theta.$$

Demak, o'rtacha arifmetik matematik kutilma uchun siljimagan baho bo'lar ekan. ◀

19.11-Misol. Tanlamaning $s^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$ dispersiyasi bosh dispersiya uchun siljigan baholash bo'lishini ko'rsating va bosh dispersiya uchun siljimagan baholash tuzing.

► $MX = m, DX = \sigma^2$ bo'lsin. U holda x_i tasodifiy miqdor, X bosh tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlanganligidan $MX_i = m, DX_i = \sigma^2$ kelib chiqadi. Shuning uchun

$$M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m,$$

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

bo'ladi. Endi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - m) - (\bar{x} - m)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - 2(\bar{x} - m) \sum_{i=1}^n (X_i - m) + n(\bar{x} - m)^2 \end{aligned} \quad (19.11)$$

tenglikni yozib olamiz va

$$\sum_{i=1}^n (X_i - m) = \sum_{i=1}^n X_i - nm = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - nm = n\bar{x} - nm = n(\bar{x} - m)$$

bo'lganligi uchun (19.11) tenglik

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - n(\bar{x} - m)^2 \quad (19.12)$$

ko'rinishni oladi. (19.12) tenglikning har ikkala tomonining matematik kutilmasini topamiz:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) &= \sum_{i=1}^n M(X_i - m)^2 - nM(\bar{x} - m)^2 = \\ &= n\sigma^2 - nD\bar{x} = n\sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2, \end{aligned}$$

bu yerda $DX_i = M(X_i - MX_i)^2 = M(X_i - m)^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ tenglik inobatga olingan. U holda tanlama dispersiyasining matematik kutilmasi uchun

$$Ms^2 = M\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n},$$

tenglikni hosil qilamiz. Ko‘rinib turibdiki, tanlama dispersiyasi bosh dispersiyadan $-\sigma^2/n$ miqdorga farq qilar ekan, ya’ni shu miqdorga siljigan.

Shuning uchun

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

statistika dispersiya uchun siljimagan baho bo‘ladi. Chunki

$$M\hat{\theta}_n = M\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{n}{n-1} M\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2\right) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

bosh dispersiyani hosil qildik. ◀

Asoslilik va siljimaganlik talablari “yaxshi” baholashlar to‘plamini sezilarli darajada qisqartirganligiga qaramay, bitta parametrlarning bir nechta asosli va siljimagan baholashlari bo‘lishi mumkin. Bularning orasidan “eng yaxshisini” tanlash kerak bo‘ladi. Agar bahoning baholanayotgan parametrga yaqinlik darajasini belgilovchi o‘lchov tanlansa, bu yaqinlik o‘lchovini minimallashtiruvchi bahoni “eng yaxshi” deb tanlash mumkin. Bahoning tabiiy yaqinlik o‘lchovi albatta dispersiya hisoblanadi. Bu holda dispersiyasi katta bo‘lgan baholarga nisbatan dispersiyasi kichik asosli va siljimagan baho baholanayotgan parametrdan o‘rtacha kichik chetlanadi.

Barcha qaralayotgan baholarda dispersiya chekli deb faraz qilinadi.

19.16-Ta’rif. Asosli va siljimagan baholarning T sinfidagi eng kam dispersiyali bahoga *samarali baholash* deb ataladi:

$$D\hat{\theta}_{\text{samarali}} = \min_T D\hat{\theta}_n. \quad (19.11)$$

Ayrim hollarda siljimagan baholar orasidan samarali bahoni Rao-Kramerning

$$D\hat{\theta}_n \geq \frac{1}{n \cdot I}$$

tensizligi yordamida ajratish mumkin, bu yerda $I = I(\theta)$ –Fisher informatsiyasi deb ataluvchi miqdor diskret holda

$$I = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X, \theta) \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p'_\theta(x_i, \theta)}{p(x_i, \theta)} \right]^2 \cdot p(x_i, \theta) \quad (19.12)$$

formula bilan, bu yerda $p(x, \theta) = P\{X = x\}$ va uzluksiz holda

$$I = M \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f'_\theta(x, \theta)}{f(x, \theta)} \right]^2 \cdot f(x, \theta) dx \quad (19.13)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $f(x, \theta)$ bosh X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasidir.

19.12-Misol. Bosh to'planning m o'rtachasi ma'lum va dispersiyasi $\theta = \sigma^2$ noma'lum bo'lgan $N[m, \theta]$ normal taqsimot uchun samarali statistikani toping.

► σ^2 parametrning bahosi sifatida

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

statistikani olamiz va uning siljimagan baho ekanligini ko'rsatamiz:

$$M\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n} n\sigma^2 = \sigma^2,$$

ya'ni $\hat{\theta}_n$ statistika σ^2 parametrning siljimagan bahosi bo'lar ekan. Uning Rao-Kramer bo'yicha samarali ekanligini isbotlaymiz. Dastlab $\hat{\theta}_n$ statistikaning dispersiyasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} D\hat{\theta}_n &= M\hat{\theta}_n^2 - (M\hat{\theta}_n)^2 = M \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \right)^2 - \sigma^4 = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M(X_i - m)^4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n M((X_i - m)^2 (X_j - m)^2) - \sigma^4 = \\ &= \frac{n \cdot m_4}{n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2} \sigma^4 - \sigma^4 = \frac{3\sigma^4}{n} + \frac{n-1}{n} \sigma^4 - \sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n}, \end{aligned}$$

bu yerda $(X_i - m)$ va $(X_j - m)$ tasodifiy miqdorlarning o'zaro bog'liq emasligi inobatga olindi va 18.41-Misoldagi $m_4 = 3\sigma^4$ tenglikdan foydalanildi.

Endi bosh taqsimotning

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

zichlik funksiyasini logarifmlaymiz:

$$\ln \varphi_{m,\sigma}(x) = -\ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2. \quad (19.14)$$

Undan σ^2 bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln \varphi_{m,\sigma}(x) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^4}.$$

U holda Fisher informatsiyasi

$$\begin{aligned} I &= M \left(\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln \varphi_{m,\sigma}(X) \right)^2 = M \left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(X-m)^2}{2\sigma^4} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4\sigma^4} - \frac{2}{4\sigma^6} M(X-m)^2 + \frac{1}{4\sigma^8} M(X-m)^4 = \frac{1}{4\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^6} \sigma^2 + \frac{1}{4\sigma^8} m_4 = \\ &= -\frac{2}{\sigma^4} + \frac{3\sigma^4}{4\sigma^8} = \frac{1}{2\sigma^4} \end{aligned}$$

ifoda bilan hisoblanadi. Bu topilgan ifodani Rao-Kramer tengsizligiga qoysak, $\hat{\theta}_n$ statistika uchun tenglikni hosil qilamiz:

$$D\hat{\theta}_n = \frac{2\sigma^4}{n} = \frac{1}{n \frac{1}{2\sigma^4}} = \frac{1}{nI},$$

ya'ni $\hat{\theta}_n$ samarali statistika ham bo'ladi. ◀

19.5. Nuqtaviy baholarni tuzish usullari

X bosh to'plamning $P(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ taqsimotini aniqlovchi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning nuqtaviy baholovchilarini tuzish usullarini qaraymiz.

Berilgan tasodifiy tanlamalar asosida noma'lum parametrlarning nuqtaviy baholovchilarini tuzishning ko'p usullari ishlab chiqilgan. Ulardan

- *momentlar usuli*;
- *maksimal ehtimollik usuli*;

- eng kichik kvadratlar usuli;
- grafik usul (yoki nomogrammalar usuli).

Biz ulardan dastlabki uchta usulga to'xtalamiz.

Momentlar usuli. Taqsimotning noma'lum parametrlarini topishga mo'ljallangan bu usul taqsimotning nazariy momentlarini tanlama asosida olingan mos empirik momentlarga tenglashtirishdan iborat.

Taqsimoti $P(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ bo'lgan X bosh to'plamning $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy tanlamasi berilgan va bu tanlama bo'yicha $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning bahosini topish talab qilingan bo'lsin.

X tasodifiy miqdorning dastlabki r ta boshlang'ich $m_k = MX^k, k = 1, 2, \dots, r$ momentlari mavjud deb faraz qilamiz. m_k miqdorlar noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlarning funksiyasi bo'lishi ravshan: $m_k = m_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$.

Tanlamaning $\bar{x}_k$ boshlang'ich yoki $\dot{\bar{x}}_k$ markaziy momentlarini qaraymiz. Tanlamaning boshlang'ich va markaziy momentlari bosh to'plamning mos momentlariga asosli baholash bo'ladi. Shuning uchun katta hajmli tanlamalarda m_k va $\dot{m}_k, k = 1, 2, \dots, r$ momentlarni mos ravishda $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlamaning $\bar{x}_k$ va $\dot{\bar{x}}_k$ statistik momentlari bilan almashtirish mumkin.

Natijada r ta noma'lum parametrga nisbatan

$$\bar{x}_k = \bar{x}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), k = 1, 2, \dots, r$$

yoki

$$\dot{\bar{x}}_k = \dot{\bar{x}}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), k = 1, 2, \dots, r$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimlarini noma'lum parametrlarning statistikasi sifatida qabul qilinadi.

Momentlar usuli parametrlarni baholashning eng sodda usuli hisoblanadi va u 1894 yili ingliz statisti K.Pirson tomonidan taklif qilingan.

19.13-Misol. Normal taqsimotning noma'lum m va σ parametrlarini momentlar usuli bilan baholang.

► Demak ikkita $\theta_1 = m, \theta_2 = \sigma$ parametrlarni baholaymiz va ularning bahosini $\tilde{\theta}_1 = \tilde{m}, \tilde{\theta}_2 = \tilde{\sigma}$ orqali belgilaymiz. Empirik matematik kutilma va dispersiyani

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \bar{x}_2 - (\bar{x})^2$$

formulalarga ko'ra hisoblaymiz.

Normal taqsimot uchun m parametr matematik kutilma va σ o'rtacha kvadratik chetlanish, $\sigma^2 = m_2 - m^2$ esa dispersiyadan iborat bo'lganligi uchun momentlar usuli

$$\tilde{m} = \bar{x}, \tilde{\sigma}^2 + \tilde{m}^2 = \bar{x}_2$$

tenglamalarni hosil qiladi. Ularning

$$\tilde{m} = \bar{x}, \tilde{\sigma} = \sqrt{\bar{x}_2 - \bar{x}^2}$$

yechimi normal taqsimotning statistik baholari bo'ladi. Biroq 19.11-Misolda

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 = \bar{x}_2 - (\bar{x})^2$$

statistika dispersiya uchun siljigan baho ekanligini ko'rdik. Shuning uchun uni biz $n/(n-1)$ ifodaga ko'paytirib, yani siljimagan

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

statistikani olamiz. ◀

Maksimal ehtimollik usuli

R.Fisher tomonidan taklif qilingan *maksimal ehtimollik usuli* baholashning eng universal usuli hisoblanadi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ zichlik funksiyasi $f(x, \theta)$ bo'lgan bosh to'plamdan olingan tasodifiy tanlama bo'lsin.

19.17-Ta'rif. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama asosida qurilgan

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta)$$

yoki

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (19.15)$$

funksiyaga *ehtimolli funksiya* deb ataladi.

Agar X diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, ehtimolli funksiya

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $p(x_i, \theta) = P\{X = x_i, \theta\}$.

19.18-Ta'rif. Berilgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarda ehtimolli funksiya maksimal qiymatni qabul qiluvchi θ noma'lum parametrning θ_{me} qiymatiga *maksimal ehtimolli baholash* deb ataladi.

Agar ehtimolli funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, uning statsionar nuqtalari

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (19.16)$$

tenglama bilan aniqlanadi. Ayrim statsionar $\bar{\theta}$ qiymatlarning lokal maksimum bo'lishining yetarli sharti albatta

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{\partial^2 \theta} < 0 \quad (19.17)$$

tengsizlik bo'ladi. Ehtimolli funksiyaning lokal maksimum nuqtalari topilgach, agar ular bir nechta bo'lsa, ehtimolli funksiya eng katta qiymatni beruvchisi tanlanadi. Ana shu nuqta qo'yilgan masalaning yechimi bo'ladi.

$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ va $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ funksiyalar θ parametrning bitta qiymatida maksimumga erishadi, shu sababli $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ funksiyaning maksimumini qidirgandan ko'ra, $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ funksiyaning maksimumini qidirish oson.

Bir nechta $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrni baholashda $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ baholar

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases} \quad (19.18)$$

ehtimolli tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi.

19.14-Misol. $N[m, \theta]$ normal taqsimotning m matematik kutilmasini va σ^2 dispersiyasini maksimal ehtimollik usuli bilan baholang.

► 19.12-Misolda zichlik funksiya uchun hosil qilingan ifodadan foydalanib ehtimolli funksiyaning logarifmi uchun

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Uni m va σ^2 bo'yicha differensiallab

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m), \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m), \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \sigma^2 \right) \end{cases}$$

ehtimolli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan esa matematik kutilma uchun maksimal ehtimolli baholash tanlamaning $\bar{x}$ o'rtachasi: $m_{me} = \bar{x}$ va σ^2 dispersiya uchun esa, $s^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ tanlama dispersiyasi: $\sigma_{me}^2 = s^2$ bo'lishi kelib chiqadi. ◀

Eng kichik kvadratlar usuli

Tanlama xarakteristikalarining qidirilayotgan θ parametrdan chetlanishlari kvadratlarining yig'indisini minimallashtirishga asoslangan usul *eng kichik kvadratlar usuli* deb ataladi.

Boshqacha qilib aytganda eng kichik kvadratlar usuli

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \rightarrow \min$$

yigʻindini minimallashtiradigan $\hat{\theta}$ qiymatni topishdan iborat.

19.15-Misol. Eng kichik kvadratlar usuli bilan Puasson taqsimotining a parametri uchun baho toping.

► $F(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$ funksiyaning minimum nuqtasini $F'(\theta) = 0$

tenglamaning ildizi sifatida topamiz:

$$F'(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right)' = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \theta = 0, \text{ ya'ni } \sum_{i=1}^n x_i = n\theta, \theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Ikkinchi tartibli hosila bu nuqtada

$$F''(\theta) = \left(-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \right)' = -2 \sum_{i=1}^n (-1) = 2n > 0$$

boʻlganligi uchun $\theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ nuqta $F(\theta)$ funksiyaning minimum nuqtasi boʻladi.

Shunday qilib, eng kichik kvadratlar usuliga koʻra Puasson taqsimotining a parametri uchun $\hat{\theta}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ statistika baho boʻladi. ◀

19.6. Taqsimotning parametrlari va sonli xarakteristikalarini oraliqli baholash

Nomaʼlum parametrlarni baholashda yuqorida qaralgan nuqtaviy baholash bilan bir qatorda intervalli baholashdan ham foydalaniladi. Nuqtaviy baholashdan farqli ravishda intervalli baholash nomaʼlum parametr bahosi aniqligining ehtimoliy xarakteristikasini olish imkonini beradi.

19.19-Taʼrif. Agar chegaralari $\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tasodifiy boʻlgan (θ_1, θ_2) oraliq uchun

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu oraliq bosh to‘plam taqsimotining noma’lum θ parametri yoki sonli xarakteristikasi uchun γ ehtimolli ishonchlilik oralig‘i, γ esa bu oraliqning ishonchlilik ehtimoli yoki ishonchlilik darajasi deb ataladi.

Ko‘pincha (ammo har doim emas), ishonchlilik oralig‘i siljimagan $\hat{\theta}$ nuqtaviy bahoga nisbatan simmetrik ravishda olinadi, ya’ni $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)$ ko‘rinishdagi oraliqni

$$P\{\theta \in (\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)\} = P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = \gamma$$

bo‘ladigan qilib tanlanadi. $\varepsilon > 0$ son baholashning aniqliligini tavsiflaydi: $|\hat{\theta} - \theta|$ ayirma qanchalik kichik bo‘lsa, baholash shunchalik aniq bo‘ladi.

γ miqdor oldindan qo‘yilgan masalaning xususiyatiga qarab tanlanadi. Masalan, havo yo‘lovchisining havo kemasiga nisbatan ishonchlilik darajasi, xaridorning muzlatkichga bo‘lgan ishonchlilik darajasidan albatta katta bo‘lishi kerak. γ ishonchlilikni 0,9; 0,95; 0,99 yoki 0,999 qiymatlarga teng qilib olish qabul qilingan. Bu holda θ parametrning (θ_1, θ_2) ishonchlilik oralig‘iga tushishi amalda muqarrar deb hisoblash mumkin.

Ko‘pincha γ ishonchlilik ehtimoli o‘rniga ahamiyatlilik darajasi deb ataluvchi $\alpha = 1 - \gamma$ ehtimol qaraladi.

θ parametrning ishonchlilik oralig‘i yagona emasligi tabiiy. Turli xil usullar turli xil θ_1 va θ_2 statistikalarga olib keladi. Bundan tashqari har bir aniq tanlama o‘zining ishonchlilik oralig‘iga ega bo‘ladi.

Endi tanlama hajmi katta bo‘lganda ishonchlilik oralig‘ini qurish ususlini qarab chiqamiz. Noma’lum θ parametr uchun ishonchlilik oralig‘ini uning $\hat{\theta}$ nuqtaviy bahosining taqsimotidan kelib chiqqan holda qurish mumkin. Biz quyida $\hat{\theta}$ normal taqsimlanganda yoki taqriban normal taqsimlanganda ishonchlilik intervalini qurishni ko‘rib chiqamiz. Bu ko‘p uchraydigan hol. Aniqrog‘i markaziy limit teorema yordamida isbotlanadigan quyidagi tasdiq o‘rinli: *momentlar yoki maksimal ehtimollik usuli bilan olingan baholar taqsimoti tanlama hajmi keskin oshganda*

normal taqsimotga intiladi. Demak, empirik matematik kutilma tanlama hajmi oshgan sari normal taqsimotning matematik kutilmasiga intiladi.

$\hat{\theta}$ nuqtaviy baho normal yoki qariyb normal bo'lganda θ parametr uchun ishonchlilik intervalini qurishning umumiy qoidasini bayon qilamiz. $\hat{\theta}$ statistika θ parametrning siljimagan bahosi deb faraz qilamiz, ya'ni $M\hat{\theta} = \theta$. Endi $\hat{\theta}$ bahoga nisbatan simmetrik, ya'ni $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon), \varepsilon > 0$ ko'rinishdagi ikki tomonli ishonchlilik intervalini quramiz. Masala shartiga ko'ra berilgan γ ishonchlilik darajasi va tanlama asosida olingan $\hat{\theta}$ baho uchun

$$P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = \gamma \quad (19.19)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\varepsilon > 0$ sonni topish kerak. $X = N[m, \sigma]$ tasodifiy miqdor uchun

$$P\{|X - m| < \varepsilon\} = 2\Phi(\varepsilon/\sigma) - 1 \quad (19.20)$$

tenglikni isbotlaymiz, bu yerda $\Phi(z)$ – standart normal taqsimot funksiyasi.

Haqiqatdan ham, (18.41) formulaga va $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$ tenglikka ko'ra:

$$\begin{aligned} P\{|X - m| < \varepsilon\} &= P\{m - \varepsilon < X < m + \varepsilon\} = \\ &= \Phi\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

$\Phi(z)$ standart normal taqsimot funksiyasining xossaligidan $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ tenglikning o'rinli bo'lishini osongina ko'rsatish mumkin. Buni tekshirib ko'rishni kitobxonga havola qilamiz.

Shuning uchun

$$P\{|X - m| < \varepsilon\} = \Phi(\varepsilon/\sigma) - (1 - \Phi(\varepsilon/\sigma)) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma) - 1,$$

(19.20) tenglikni hosil qildik.

$$\{\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon\} = \{-\theta - \varepsilon < -\hat{\theta} < -\theta + \varepsilon\} = \{\theta - \varepsilon < \hat{\theta} < \theta + \varepsilon\}$$

hodisalarning ekvivalent ekanligini ta'kidlab o'tamiz. U holda yuqorida hosil qilingan formulalarga va (19.19) hamda (19.20) formulalarga asosan

$$\gamma = P\{\theta - \varepsilon < \hat{\theta} < \theta + \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\hat{\theta})}\right) - 1$$

yoki

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\hat{\theta})}\right) = \frac{1 + \gamma}{2}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $\sigma(\hat{\theta}) = \sqrt{D(\hat{\theta})}$.

Bundan esa,

$$\varepsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \gamma}{2}\right) \sigma(\hat{\theta}) \quad (19.21)$$

tenglik kelib chiqadi. γ ishonchlilik darajasining berilgan qaiymatiga ko'ra $(1 + \gamma)/2$ ifodaning qiymatini hisoblab, $\Phi^{-1}((1 + \gamma)/2)$ qiymatni topish mumkin. Agar $D(\hat{\theta})$ dispersiya noma'lum bo'lsa, uning o'rniga asosli, siljimagan

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

statistikani olishimiz mumkin.

Shunday qilib, θ parametr uchun ishochlilik darajasi γ bo'lgan $\hat{\theta}$ bahoga nisbatan simmetrik $(\hat{\theta} - \varepsilon, \hat{\theta} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ ko'rinishdagi ikki tomonli ishonchlilik oralig'ini qurdik, bu yerda ε qiymat (19.21) tenglikka ko'ra hisoblanadi.

γ ishonchlilik darajasi 0,95 va 0,99 bo'lganda $\Phi^{-1}((1 + \gamma)/2)$ mos ravishda 1,96 va 2,58 qiymatlarga teng bo'ladi.

19.16-Misol. Bernulli sxemasida A hodisa yuz berishining p ehtimoli uchun ishochlilik darajasi γ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini quring.

► Aytaylik, n marta tajriba o'tkazilganda (n yetarlich katta) A hodisa x_n marta yuz bersin. 19.9-Misolda $\theta_n = x_n/n$ statistika p ehtimol uchun siljimagan baho bo'lishini ko'rgan edik. Bernulli teoremasiga ko'ra u asosli baho ham bo'ladi. Bundan tashqari $D(\theta_n) = pq/n$ bo'ladi. Markaziy limit teoremasiga ko'ra bu statistika tanlama hajmi n keskin oshganda normal taqsimotga intiladi. θ_n statistika p parametrning asosli

bahosi bo'lganligi tufayli, $1 - X/n$ statistika q parametr uchun shunday baho bo'ladi. Shuning uchun

$$\widehat{D}(\theta_n) = \frac{1}{n^2} x_n \left(1 - \frac{1}{n} x_n\right)$$

statistika $D(\theta_n) = pq/n$ dispersiya uchun asosli baho bo'ladi.

Ishonchlilik chegarasi uchun (19.21) formuladan

$$\varepsilon = \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{n^2} x_n \left(1 - \frac{1}{n} x_n\right)}$$

qiymatni topamiz. Shunday qilib, p ehtimol uchun ishonchlilik darajasi γ bo'lgan ikki tomonli ishonchlilik oralig'I,

$$\left(\frac{x_n}{n} - \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \sqrt{\frac{x_n}{n^2} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)}; \frac{x_n}{n} + \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \sqrt{\frac{x_n}{n^2} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)} \right) \quad (19.22)$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

19.17-Misol. Bir xil turdagi dastgohlarning buzilmaslik ehtimolini baholash uchun ixtiyoriy ravishda 200 dastgoh tanlandi. Dastgoh sinovlari natijasida 10 dastgoh sinovdan o'tmadi. p buzilmaslik ehtimoli uchun ishonchlilik darajasi $\gamma = 0,99$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini toping.

► $\gamma = 0,99$ bo'lganligi uchun $\Phi^{-1}((1 + \gamma)/2) = 2,58$ bo'ladi. Masala shartiga ko'ra $n = 200$ va $x_n = 190$ (sinovdan o'tgan dastgohlar soni). U holda $x_n/n = 0,95$ va

$$\varepsilon = \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \sqrt{\frac{x_n}{n^2} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)} = 2,58 \sqrt{\frac{0,95}{200} 0,05} \approx 0,0398$$

bo'ladi. Shuning uchun qidirilayotgan oraliq $(0,95 - 0,0398; 0,95 + 0,0398)$ yoki $(0,9102; 0,9898)$ ko'rinishda, ya'ni $P(0,9102 < p < 0,9898) = 0,99$ bo'ladi. ◀

Endi matematik kutilma uchun ishonchlilik oralig'ini quramiz. X tasodifiy miqdorni kuzatish uchun o'tkazilgan n marta bir-biriga bog'liqsiz o'tkazilgan tajribalarning natijasi $x_1, x_2, \dots, x_n$ bo'lsin. X noma'lum m matematik kutilma va σ^2

dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamaning tasodifiyligini ta'kidlash maqsadida ularni $X_1, X_2, \dots, X_n$ ko'rinishda yozib olamiz. $X_1, X_2, \dots, X_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, shuning uchun $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = m$ va $DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = \sigma^2$. Tanlamaning $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ o'rtachasi o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan va m matematik kutilmaga, σ^2 dispersiyaga ega bo'lgan n ta tasodifiy miqdorning yig'indisidan iborat. Hamda:

$$M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} nm = m,$$

$$D\bar{x} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Shartga ko'ra, X tasodifiy miqdorning σ^2 dispersiyasi noma'lum. Biroq uning o'rniga σ^2 dispersiyaning asosli bahosi bo'lgan

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$$

empirik dispersiyani olishimiz mumkin. Uni (19.21) formulaga qo'yib

$$\varepsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \sqrt{s^2/n}$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, m matematik kutilma uchun ishonchlilik darajasi γ bo'lgan ishonchlilik oralig'i

$$\left(\bar{x} - \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \sqrt{s^2/n}; \bar{x} + \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \sqrt{s^2/n}\right) \quad (19.23)$$

ko'rinishda bo'ladi.

19.18-Misol. $n = 400$ hajmli tanlamada $\bar{x} = 4,54$ va $s^2 = 4,1209$ qiymatlar topilgan. O'rganilayotgan bosh to'plamning m matematik kutilmasi uchun ishonchlilik darajasi $\gamma = 0,99$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ini toping.

► Bu hol uchun $\Phi^{-1}((1 + 0,99)/2) = 2,58$ bo'ladi, u holda (19.23) ifodaga ko'ra,

$$P\left(4,54 - 2,58 \cdot \frac{2,03}{20} < m < 4,54 + 2,58 \cdot \frac{2,03}{20}\right) = 0,99.$$

Bundan esa, $P(4,27813 < m < 4,80187) = 0,99$ tenglikka ega bo‘lamiz. ◀

Endi tanlamaning zarur bo‘ladigan hajmini topish masalasini qaraymiz. Yuqorida tanlamaning hajmi o‘zgaras deb qaralgan. Statistik tadqiqotlardan ko‘pincha buning aksi bo‘ladi: oldindan berilgan aniqlik va ishonchlilik darjasiga erishish uchun tanlamaning kerakli bo‘lgan hajmi tanlanadi. Agar oraliq γ ishonchlilik ehtimoliga mos kelsa, bu degani $\bar{\theta}$ bahoning θ haqiqiy qiymatdan mutlaq chetlanishi γ ehtimol bilan $\varepsilon > 0$ qiymatdan kichik bo‘lishini anglatadi, ya’ni

$$P\{|\bar{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = \gamma.$$

Demak, mutlaq chetlanish γ ehtimol bilan $\varepsilon > 0$ qiymatdan oshmaydi. Agar $\bar{\theta}$ statistika θ parametr uchun asosli baho bo‘lsa, tanlamaning n hajmi oshganda $D(\bar{\theta})$ dispersiya nolga intiladi. Shu sababli, γ ishonchlilik darajasi o‘zgaras bo‘lganda (19.21) tenglikdan ε miqdorning qiymati kamayadi. Tanlamaning qanday minimal n hajmida ε mutlaq chetlanish γ ehtimol bilan berilgan qiymatdan katta bo‘lmaydi? Bu savolga javob berish uchun ε miqdor berilgan deb, hosil qilingan tensizlikni n hajmga nisbatan yechish kerak.

Dastlab p ehtimolni baholash kerak bo‘ladigan tanlama hajmini aniqlaymiz. Bu holda $D(\bar{\theta}) = pq/n$, shuning uchun:

$$\varepsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\sqrt{pq/n}$$

bundan esa,

$$n = \left[\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right)/\varepsilon\right]^2 p(1-p). \quad (19.24)$$

Bu ifodada p ehtimol noma’lum. Uni ko‘pincha uncha katta bo‘lmagan n_0 hajmdagi tanlama asosida p ehtimolning taqribiy qiymati chiqaradi. Agar m_0/n_0 hodisaning bu tanlamadagi chastotasi bo‘lsa, p ehtimolning taqribiy qiymati sifatida ana shu chastota olinadi. U holda kerakli hajm,

$$n = \left[\left(\Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \right) / \varepsilon \right]^2 \frac{m_0}{n_0} \left(1 - \frac{m_0}{n_0} \right) \quad (19.25)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ixtiyoriy $0 < p < 1$ uchun $p(1-p) < 1/4$ bo'lganligi uchun n hajm umumiy holda

$$n \leq \left[\left(\Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \right) / \varepsilon \right]^2 \frac{1}{4}$$

tengsizlik bilan aniqlanishi mumkin.

Endi m matematik kutilmani baholash uchun tanlamaning zarur bo'lgan n hajmini topamiz. Bu yerda $D(\bar{\theta}) = \sigma^2/n$. U holda (19.21) tenglik

$$\varepsilon = \Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \sqrt{\sigma^2/n}$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda ham σ^2 dispersiyani katta bo'lmagan n_0 hajmli tanlama bo'yicha, $s^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2$ formulaga ko'ra esa empirik dispersiya hisoblanadi.

Uni so'ngi formulaga qo'yib, so'ngra kerakli hajm miqdori hisoblanadi:

$$n = \left[\left(\Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \right) / \varepsilon \right]^2 s^2. \quad (19.26)$$

19.19-Misol. O'rganilayotgan hududda kimyoviy elementning miqdorini aniqlash uchun namuna olinadi. Ishonchlilik darajasi $\gamma = 0,95$ bo'lganda yo'l qoyilishi mumkin bo'lgan mutlaq xatolik $\varepsilon = 10^{-2}$ miqdordan oshmasligi uchun n tanlama hajmi qancha bo'lishi, ya'ni necha marta namuna olish kerak?

► Faraz qilaylik dastlabki sinov natijasida $s^2 = 0,028$ olingan bo'lsin. $\gamma = 0,95$ qiymatda $\Phi^{-1}((1+\gamma)/2) = 1,96$ bo'ladi. U holda

$$n = (1,96/10^{-2})^2 \cdot 0,028 = 1076,$$

ya'ni 1076 marta namuna tekshirilganda $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan yo'l qo'yilgan xatolik 10^{-2} miqdordan oshmaydi. ◀

19.7. Statistik gipotezalarni tekshirish

Statistik tadqiqotlarning maqsadi tasodifiy hodisalarni tavsiflovchi qonuniyatlarni izlab topishdan iborat. Bunday qonuniyatlar sonli, funksional, grafik va o'rganilayotgan tasodifiy miqdorning boshqa xarakteristikalarini bilan berilishi mumkin ekanligini ko'rdik. Ana shu qonuniyatlar o'tkazilgan tajribalar natijasi va nazariy mulohazalardan kelib chiqqan holda izlab topiladi. Biroq bu natijalar va nazariy mulohazalar asosida qilingan taxminlar (gipotezalar) har doim ham to'g'ri bo'lmaydi. Qilingan taxminning to'g'ri yoki noto'g'riligini *statistik gipotezalarni tekshirish usullari* aniqlab beradi.

19.20-Ta'rif. Tajriba natijalari bo'yicha kuzatiladigan tasodifiy miqdorning taqsimoti yoki uning sonli xarakteristikalarini haqida aytilgan har qanday taxminga *statistik gipoteza* (yoki qisqacha *gipoteza*) deb ataladi.

19.21. Ta'rif. Tekshiriladigan gipoteza asosiy (yoki nolinchisi) gipoteza deb ataladi va H_0 orqali belgilanadi. H_0 bilan raqobatlashuvchi H_1 gipoteza esa alternativ gipoteza deb ataladi.

Nolinchisi va alternativ gipotezalarni yozish uchun maxsus belgilardan foydalaniladi.

19.20-Misol. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tanlama bo'yicha X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi biror a o'zgarmas songa teng haqidagi H_0 asosiy gipoteza, H_1 esa matematik kutilma a songa teng emasligidan iborat yoki H_2 esa $m > a$ haqida bo'lsin. U holda gipotezalar,

$$H_0: m = a,$$

$$H_1: m \neq a$$

$$H_2: m > a$$

ko'rinishda yoziladi.

19.22-Ta'rif. Agar H gipoteza X tasodifiy miqdor taqsimotini yoki uning parametrini bir qiymatli aniqlasa, uni biz *sodda gipoteza*, aks holda *murakkab gipoteza* deb ataymiz.

Yuqorida qaralgan 19.20-Misolda H_0 sodda gipoteza bo‘ladi. Chunki gipoteza matematik kutilmaning aniq bitta songa tengligini nazarda tutgan. H_1 va H_2 gipotezalar esa murakkab, chunki H_1 gipoteza tarkibida $H_i: m = a_i$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p taxminlar bor, bu yerda a_i sifatida a sonidan farqli ixtiyoriy sonni olish mumkin. H_2 gipotezada esa a_i son sifatida a sonidan katta har qanday sonni olish mumkin.

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan biri bu, H_0 gipotezada ko‘rsatilgan taxminning tajriba natijalariga mos kelishini tekshirishdan iborat. Shu maqsadda tekshiriladigan H_0 gipotezaga nisbatan bo‘lgan $F(z|H_0)$ shartli taqsimoti ma’lum deb faraz qilinadigan $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistika tuziladi. Bu statistika yordamida gipotezani tekshirish qoidasi qabul qilinadi.

19.23-Ta’rif. Qiymatlari bo‘yicha H_0 gipoteza qabul yoki rad qilinadigan $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistikaga *statistik kriteriya (muvofiglik kriteriyasi, muhimlik kriteriyasi yoki hal qiluvchi qoida)* deb ataladi.

Masalan, bizni qiziqtiradigan A hodisaning ehtimoli p qiymatga tengligi haqidagi $H_0: P(A) = p$ gipotezani tekshirish uchun A hodisaning ehtimolidan nisbiy chastotaning muqarrar chetlanishini ifodalovchi

$$Z = \left| \frac{m(A)}{n} - p \right| \quad (19.27)$$

statistikani olish mumkin.

Agar gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, n o‘sishi bilan nisbiy chastota p qiymatga ehtimol bo‘yicha intiladi va demak, Z nolga intiladi. Katta n qiymatlarda Z statistikaning noldan sezilarli farq qilishi kam ehtimolli.

19.24-Ta’rif. Z statistik kriteriyning H_0 gipotezani rad qildiradigan $\bar{S}$ qiymatlari to‘plamiga uning *kritik sohasi* deb yuritiladi.

19.25-Ta’rif. Z statistik kriteriyning H_0 gipotezani qabul qildiradigan S qiymatlari to‘plamiga uning *ishonchlilik sohasi* deb ataladi.

Masalan, statistik kriteriya sifatida quyidagi qoidani qabul qilish mumkin:

- 1) agar $Z = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statistikaning $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati $\bar{S}$ kritik sohada yotsa, H_0 gipoteza rad qilinadi va H_1 alternativ gipoteza qabul qilinadi;
- 2) agar $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymat S ishonchlilik sohasida yotsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi.

Bu qoidani amalga oshirish jarayonida ikki xil ko'rinishdagi xatolikka yo'l qo'yilishi mumkin:

19.26-Ta'rif. H_0 gipoteza to'g'ri bo'lishiga qaramasdan uning rad qilinishidan iborat hodisaga *birinchi tur xatolik* deb ataladi.

19.27-Ta'rif. H_1 gipoteza to'g'ri bo'lib, biroq H_0 gipoteza qabul qilinishidan iborat hodisaga *ikkinchi tur xatolik* deb ataladi.

19.28-Ta'rif. Birinchi tur xatolikning $\alpha = P\{Z \in \bar{S} | H_0\}$ ehtimoliga statistik kriteriyning *muhimlik darajasi* deb ataladi. Birinchi tur xatolikning α ehtimolini $F(z | H_0)$ shartli taqsimot bo'yicha hisoblash mumkin.

Ikkinchi tur xatolikning $\beta = P\{Z \in S | H_1\}$ ehtimolini esa Z statistikaning $F(z | H_1)$ shartli taqsimoti bo'yicha hisoblash mumkin.

Ikkala ehtimol uchun $\alpha = P(H_1 | H_0)$ va $\beta = P(H_0 | H_1)$ shartli ehtimolli tengliklar o'rinli.

19.29-Ta'rif. $1 - \beta$ miqdor, ya'ni ikkinchi tur xatolikka yo'l qo'ymaslik (noto'g'ri H_0 gipoteza rad qilinib, to'g'ri H_1 gipoteza qabul qilinishi) ehtimoliga kriteriy quvvati deyiladi.

$1 - \beta = P(H_1 | H_1) = P\{Z \in \bar{S} | H_1\}$ tenglikning o'rinli ekanligini osongina izohlash mumkin. Kriteiyning quvvati qancha katta bo'lsa, ikkinchi tur xatoga yo'l qo'yilish ehtimoli shuncha kichik bo'ladi.

Birinchi tur xatolikning α ehtimolining kamayishi hisobiga ikkinchi tur xatolikning β ehtimoli o'sishi va aksincha bo'lishi ravshan, ya'ni kritik va ishochlilik sohalarini tanlashda murosaga kelishilishi kerak. Shuning uchun birinchi tur xatolik α

ehtimolining o'zgaras qiymatida kritik sohani ikkinchi tur xato minimal bo'ladigan qilib tanlash kerak.

Ikkala turdagi xatolikni ham kamaytirish uchun tanlama hajmini ko'paytirish kerak. Shuning uchun berilgan α muhimlik darajasi uchun eng katta quvvatli kriteiy qidiriladi.

Aksar hollarda statistik kriteriyning α muhimlik darajasi sifatida $\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$ qiymatlar olinadi.

Statistik gipotezani tekshirishni quyidagi bosqichlarga bo'lish mumkin:

- 1) H_0 asosiy va unga alternativ bo'lgan H_1 gipotezalar shakllantiriladi;
- 2) α muhimlik darajasi tanlanadi;
- 3) H_0 gipotezani tekshirish uchun Z statistika tanlanadi;
- 4) Kuzatishlarning $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamasi bo'yicha Z statistik kriteriyaning $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati hisoblanadi;
- 5) Z statistik kriteriyning hisoblangan $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymati va α muhimlik darajasi bo'yicha $\bar{S}$ kritik soha va S ishonchlilik sohasi aniqlanadi;
- 6) $1 - \alpha$ ishonchlilik darajasida statistik qaror qabul qilinadi: agar $z \in \bar{S}$ bo'lsa, H_0 gipoteza tajriba natijalariga mos emas deb rad qilinadi, agar $z \in S$ bo'lsa, H_0 gipoteza tajriba natijalariga zid emas deb qabul qilinadi.

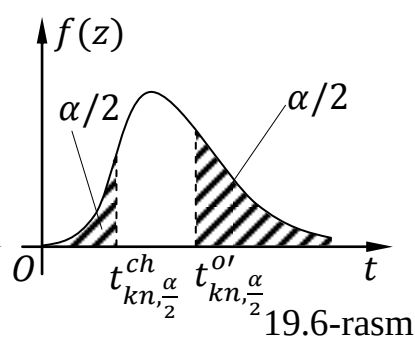
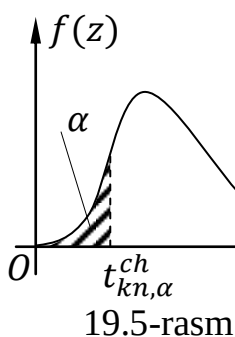
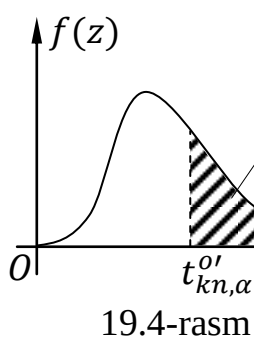
Statistik gipotezalar ikki turga bo'linadi: *parametrik gipotezalar*, bunda ma'lum taqsimotning parametrlari haqida taxmin qilinadi va noma'lum taqsimotning turi haqidagi *noparametrik gipotezalar*.

Parametrik gipotezalar

$H_0: \theta = \theta_0$ gipotezani tekshiramiz, bu yerda θ_0 son, θ parametr qiymatlari sohasidan olingan birorta o'zgaras son.

H_1 alternativ gipotezadagi tasdiq va α muhimlik darajasi Z statistika qiymatlari to'plamidagi $\bar{S}$ kritik sohaning hajmini va joylashish o'rnini aniqlab beradi. $\bar{S}$ kritik

sohani aniqlash uchun $\bar{S}$ va S sohalarni ajratib turuvchi t_{kn} – *kritik nuqtani* (yoki kvantilni) topish yetarli.



Masalan, alternativ gipoteza $H_1: \theta > \theta_0$ (yoki $H_1: \theta < \theta_0$) ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ o‘ng tomonli (19.4-rasm) (yoki chap tomonli (19.5-rasm)) soha bo‘ladi va kritik nuqta

$$P(z > t_{kn}) = \alpha \text{ (yoki } P(z < t_{kn}) = \alpha)$$

munosabatdan aniqlanadi. Agar alternativ gipoteza $H_1: \theta \neq \theta_0$ ko‘rinishda bo‘lsa, $\bar{S}$ kritik soha ikki tomonlama (19.6-rasm) bo‘ladi va chap va o‘ng kritik nuqtalar

$$P(z < t_{kn}^{ch}) = P(z > t_{kn}^{o'}) = \alpha/2$$

munosabatdan aniqlanadi.

19.21-Misol. $N[m, \sigma]$ normal taqsimotning σ parametri ma’lum bo‘lganda m parametr haqidagi $H_0: m = m_0$ gipotezani tekshirish talab qilingan bo‘lsin.

Alternativ gipoteza sifatida $H_1: m < m_0$ gipotezani olamiz. Statistik kriteriya sifatida m matematik kutilmaning $\bar{x}$ nuqtaviy bahosini olamiz: $Z = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

Ko‘rsatilgan H_0 gipotezani sonli ma’lumotlar asosida tekshirish va birinchi hamda ikkinchi tur xatoliklarni hisoblash talab qilinadi.

Bunday hol muhandislik amaliyotida ko‘p uchraydi. Masalan, tarkibida m foizli zararli modda bo‘lgan mahsulot ishlab chiqarilmoqda. Texnologik jarayondagi o‘zgartirish mahsulot tarkibida bu modda miqdorining kamayishiga olib keldi.

Sonli ma’lumotlar: $m_0 = 2\%$, $\sigma = 0,4\%$, o‘lchashlar soni $n = 16$, $\alpha = 0,05$;
a) $\bar{x} = 1,8\%$; b) $\bar{x} = 1,9\%$;

► 1) Kritik sohani aniqlaymiz. Alternativ gipoteza $H_1: m < m_0$ bo'lganligi va $Z = \bar{x} = 1,8$ statistik kriteriy tekshirilayotgan miqdorning kamayganligini berdi, u holda $\bar{S}$ kritik soha sifatida Z statistika uchun kam ehtimolli bo'lgan uning kichik qiymatlari sohasini olamiz: $Z < t_{kn,\alpha}^{ch}$. Bundagi $t_{kn,\alpha}^{ch}$ qiymatni tanlama $\bar{x}$ o'rtachasining taqsimoti yordamida topish mumkin. Masala shartiga ko'ra bu taqsimot parametrlari $m_0 = 2$, $\sigma/\sqrt{n} = 0,4/4 = 0,1$ bo'lgan normal taqsimotdan iborat. U holda:

$$P(Z < t_{kn,\alpha}^{ch}) = \Phi\left(\frac{t_{kn,\alpha}^{ch} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha,$$

$$\Phi\left(\frac{t_{kn,\alpha}^{ch} - 2}{0,1}\right) = 0,05, \quad 0,5 + \Phi_0\left(\frac{t_{kn,\alpha}^{ch} - 2}{0,1}\right) = 0,05,$$

$$\Phi_0\left(\frac{t_{kn,\alpha}^{ch} - 2}{0,1}\right) = -0,45, \quad \Phi_0\left(\frac{2 - t_{kn,\alpha}^{ch}}{0,1}\right) = 0,45$$

Bu yerda $\Phi_0(x)$ –Laplas integrali. Uning qiymatlari jadvalidan

$$\frac{2 - t_{kn,\alpha}^{ch}}{0,1} = 1,645, \quad t_{kn,\alpha}^{ch} = 1,8355 \approx 1,84$$

qiymatni topamiz. Shunday qilib, $\bar{S} = \{Z: Z < 1,84\}$ va $S = \{Z: Z \geq 1,84\}$.

2. Tanlama o'rtachasining $\bar{x}$ qiymati bilan $t_{kn,\alpha}^{ch} = t_{kn,0,05}^{ch} = 1,84$ kritik qiymatni taqqoslaymiz.

a) $\bar{x} = 1,8 < 1,84$: $\bar{x} \in \bar{S}$, ya'ni tanlama o'rtachasi kritik sohaga tushdi, shuning uchun H_0 gipoteza rad qilinadi va texnologik jarayondagi o'zgartirish mahsulot tarkibida zararli modda miqdorining kamayishiga olib kelganligini anglatuvchi H_1 alternativ gipoteza qabul qilinadi.

b) $\bar{x} = 1,9 > 1,84$: $\bar{x} \in S$, ya'ni H_0 asosiy gipoteza qabul qilinadi.

3. Agar haqiqatda H_0 gipoteza to'g'ri bo'lib, a) $\bar{x} = 1,8$ holda H_0 gipotezani rad qilib va H_1 gipoteza qabul qilsak birinchi tur xatolikka yo'l qo'ygan bo'lamiz. Bu xatolikning ehtimoli $\alpha = 0,05$ ga teng bo'ladi.

4. Haqiqatda H_1 gipoteza to'g'ri bo'lib, b) $\bar{x} = 1,9$ holda H_0 gipotezaning qabul qilinish natijasida biz ikkinchi tur xatolikka yo'l qo'ygan bo'lamiz.

m matematik kutilmaning haqiqiy qiymati noma'lum bo'lganligi uchun ikkinchi tur xatolikning β ehtimolini hisoblab topolmaymiz.

Biroq m matematik kutilmaga turli qiymat berib, ya'ni m ga nisbatan gipotezalar qilib va har safar β ehtimolni hisoblab uni m matematik kutilmaning funksiyasi sifatida topishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}\beta &= P\{Z \in S|H_1\} = P(Z \geq 1,8355) = 1 - P(Z < 1,8355) = 1 - \Phi\left(\frac{t_{kn,\alpha}^{ch} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1,8355 - m}{0,1}\right) = 0,5 - \Phi_0\left(\frac{1,8355 - m}{0,1}\right).\end{aligned}$$

So'ngi ifodada m matematik kutilmaga turli qiymatlar berib

m	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5
β	0.7405	0,3613	0,0877	0,0093	0,0004

jadvalni hosil qilamiz. Agar asosiy H_0 va alternativ H_1 gipotezadagi qiymatlar bir-biriga yaqin bo'lsa, ikkinchi tur xatolikning β ehtimoli katta bo'ladi. Bu qiymatlar orasidagi farqning kattalashishi bilan xatolikning ehtimoli kamayar ekan. ◀

Noma'lum taqsimotning turi haqidagi gipotezalar

O'rganilayotgan tasodifiy miqdorning keng qamrovli tavsifi albatta uning taqsimot qonuni bo'ladi. Tadqiqotchilarning bu qonunni statistik ma'lumotlar asosida taqribiy qurishga intilishi tabiiy.

Dastlab taqsimot qonunining ko'rinishi haqidagi gipoteza oldinga suriladi, bir o'lchovli hol uchun u normal, ko'rsatkichli, Puasson va hokazolar bo'lishi mumkin. Bunday gipotezalar gistogrammalarni tahlil qilish asosida nazariy mulohazalardan kelib chiqishi mumkin.

$F(x)$ taqsimot qonuni noma'lum bo'lgan X tasodifiy miqdor bosh to'plamining $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamasi berilgan bo'lsin. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$\bar{F}(x, \theta)$ ko'rinishga ega degan H_0 gipotezani tekshirish kerak, ya'ni $H_0: F(x) = \bar{F}(x, \theta)$. Bunday gipotezani tekshirish uchun *xi-kvadrat statistik kriteriydan (Pirson kriteriysi)* foydalanish mumkin. Bu tekshirish quyidagicha amalga oshiriladi.

1) X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ parametrlari noma'lum bo'lgan $\bar{F}(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ ko'rinishga ega degan H_0 gipoteza shakllantiriladi $H_0: F(x) = \bar{F}(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ (masalan m va σ^2 parametrlari noma'lum bo'lgan normal taqsimot yoki a va b parametrlari noma'lum bo'lgan tekis taqsimot).

2) Maksimal ehtimollik usuli bilan noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ paramaetrlarning $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$ paramaetrlari nuqtaviy bahosi topiladi.

3) R son o'qini $-\infty = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \alpha_{l+1} = \infty$ nuqtalar yordamida o'zaro kesishmaydigan $(l + 1)$ ta $\Delta_i = [\alpha_i, \alpha_{i+1})$ oraliqlarga ajratamiz, bu yerda $\alpha_1 \leq x_{(1)}$, $\alpha_{l+1} \geq x_{(n)}$ va $x_{(1)}$ va $x_{(l)}$ berilgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama variatsion qatorning eng kichik va eng katta elementlari. Aksariy hollarda $\Delta_i, i = \overline{1, l-1}$ oraliqlarning uzunligini $h_i = (\alpha_l - \alpha_1)/(l - 1)$ bir xil qilib olinadi. So'ngra tanlamaning har bir $\Delta_i, i = \overline{1, l-1}$ oraliqqa tushgan elementlarining n_i soni hisoblanadi. $n_0 = n_l = 0$ deb olinadi.

4) X tasodifiy miqdorning $\Delta_i, i = \overline{1, l}$ oraliqqa tushish p_i nazariy ehtimolini

$$p_i = P\{\alpha_i \leq X \leq \alpha_{i+1}\} = \bar{F}(\alpha_{i+1}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) - \bar{F}(\alpha_i, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$$

tenglik yordamida topiladi.

5) X tasodifiy miqdorning $\Delta_i, i = \overline{1, l}$ oraliqqa tushadigan elementlarning nazariy soni np_i ko'paytma bilan topiladi va

Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_l
$n'_1 = np_1$	$n'_2 = np_2$	$\dots$	$n'_l = np_l$

(19.28)

jadval tuziladi.

Agar n_i empirik chastotalar nazariy $n'_i = np_i$ chastotalardan sezilarli farq qilsa, H_0 gipoteza rad qilinadi; aks holda qabul qilinadi.

Empirik va nazariy chastotalar orasidagi farqning o'lchovi sifatida K.Pirson taklif qilgan

$$\chi^2 = np_0 + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} + np_l \quad (19.29)$$

miqdorni (Pirson kriteriysi) olish mumkin.

Pirson teoremasiga ko'ra $n \rightarrow \infty$ da (19.29) formula bilan hisoblanadigan χ^2 statistika erkinlik darajasi $k = l - r - 1$ bo'lgan χ^2 taqsimotga ehtimol bo'yicha intiladi, bu yerda l –oraliqlar soni, r –esa taqsimotdagi noma'lum parametrlar soni.

6) Endi χ^2 kriteriyni quyidagi tartibda qo'llaymiz:

6.1. (19.29) formulaga ko'ra berilgan tanlama boyicha statistik kriteriyning χ^2_{tanlama} qiymati hisoblanadi.

6.2. α muhimlik darajasini tanlab, uning qiymati bo'yicha χ^2 taqsimot jadvaliga ko'ra $\chi^2_{\text{kn},\alpha}$ kritik nuqta topiladi.

6.3. Agar $\chi^2_{\text{tanlama}} \leq \chi^2_{\text{kn},\alpha}$ bo'lsa, H_0 gipoteza tajriba natijalariga zid emas deb qabul qilinadi; agar $\chi^2_{\text{tanlama}} > \chi^2_{\text{kn},\alpha}$ bo'lsa, H_0 gipoteza rad qilinadi.

Pirson kriteriysini qo'llash uchun har bir $\Delta_i, i = \overline{1, l-1}$ oraliqda kamida 5 ta kuzatish natijasi bo'lishi, ya'ni $n_i > 5$ tengsizliklarning bajarilishi zaruriy shart. Agar ayrim oraliqlarda bu tengsizlik bajarilmasa, qo'shni intervallarni birlashtirish hisobiga intervallar sonini kamaytirish kerak.

19.22-Misol. O'rganilayotgan hududda kimyoviy elementning miqdorini aniqlash uchun burg'ulanib, 100 marta namuna olindi. 1kg namuna tarkibidagi bizni qiziqtirgan kimyoviy elementning grammlardagi miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan. Bu tanlama bo'yicha bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipotezani tekshiring.

26,7	37,0	30,5	28,1	27,4	25,4	36,1	33,4	29,7	25,4
34,0	26,6	27,9	35,4	35,3	29,6	29,4	25,3	37,0	28,7
33,7	31,2	34,5	31,8	25,5	30,2	32,7	28,3	39,9	33,5

34,1	30,0	35,8	30,7	25,9	30,6	34,4	31,5	31,8	27,4
24,7	33,4	33,1	33,2	30,3	31,6	34,8	32,2	35,2	30,8
37,0	26,3	30,2	31,8	32,5	29,7	28,0	32,4	32,3	31,9
26,7	34,7	33,6	29,7	31,9	30,8	32,3	30,4	33,8	29,5
29,7	31,8	30,1	32,4	30,6	28,1	32,2	30,5	30,8	33,4
28,7	32,6	32,7	32,3	29,8	30,6	36,2	38,4	35,0	33,1
30,6	35,4	25,6	33,5	32,0	31,6	26,1	29,4	36,4	28,0

► Jadvaldan tanlama uchun $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^{100} x_i = 31,3$, $s^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - (\bar{x})^2 =$

$10,1$, $s = 3,18$, $x_{\min} = 24,7$; $x_{\max} = 39,9$ qiymatlarini hosil qilamiz. R son o'qini o'nta oraliqlarga bo'lamiz: $\Delta_1 = (-\infty; 24,7)$, $\Delta_1 = [24,7, 26,6)$, $\Delta_2 = [26,6, 28,5)$, $\Delta_3 = [28,5, 30,4)$, $\Delta_4 = [30,4, 32,3)$, $\Delta_5 = [32,3, 34,2)$, $\Delta_6 = [34,2, 36,1)$, $\Delta_7 = [36,1, 38)$, $\Delta_8 = [38, 40)$, $\Delta_9 = [40, +\infty)$. U holda tanlamaning bu oraliqlarga tushgan elementlari soni mos ravishda $n_1 = 9$, $n_2 = 11$, $n_3 = 16$, $n_4 = 27$, $n_5 = 19$, $n_6 = 11$, $n_7 = 5$, $n_8 = 2$ bo'ladi. $n_0 = n_9 = 0$ deb olamiz.

Pirson kriteriysini qo'llashning zaruriy sharti oxirgi oraliqda bajarilmagan, ya'ni $n_8 = 2 < 5$. Shuning uchun 7- va 8-oraliqlarni birlashtiramiz. Natijada oraliqlar soni $l = 7$ bo'ladi. Demak, H_0 gipoteza nazarda tutgan normal taqsimotning zichlik funksiyasi sifatida

$$\varphi_{31,3;3,18}(x) = \frac{1}{3,18\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-31,3)^2}{20,2}}$$

funksiyani olsak bo'ladi. Bu funksiya bo'yicha p_i ehtimollarni (18.41) formulaga ko'ra hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{24,7 < X < 26,6\} = \Phi_0\left(\frac{26,6 - 31,3}{3,18}\right) - \Phi_0\left(\frac{24,7 - 31,3}{3,18}\right) = \\ &\approx \Phi_0(-1,478) - \Phi_0(-2,075) = -\Phi_0(1,478) + \Phi_0(2,075) = \\ &= \Phi_0(2,075) - \Phi_0(1,478) \approx 0,4809 - 0,4303 = 0,0506; \\ p_2 &= P\{26,6 < X < 28,5\} = \Phi_0(1,478) - \Phi_0(0,881) \approx 0,1194; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= P\{28,5 < X < 30,4\} = \Phi_0(0,881) - \Phi_0(0,283) \approx 0,1995; \\
p_4 &= P\{30,4 < X < 32,3\} = \Phi_0(0,314) - \Phi_0(-0,283) \approx 0,235; \\
p_5 &= P\{32,3 < X < 34,2\} = \Phi_0(0,912) - \Phi_0(0,314) \approx 0,1957; \\
p_6 &= P\{34,2 < X < 36,1\} = \Phi_0(1,509) - \Phi_0(0,912) \approx 0,1153; \\
p_6 &= P\{36,1 < X < 40\} = \Phi_0(2,736) - \Phi_0(1,509) \approx 0,0623; \\
p_0 &= P\{X \leq 24,7\} = P\{X < 31,3\} - P\{24,7 < X < 31,3\} = 0,5 - 0,4809 = \\
&= 0,0191; p_7 = P\{40 \leq X\} = P\{31,3 < X\} - P\{31,3 < X < 40\} = 0,5 - 0,4969 = \\
&= 0,0031.
\end{aligned}$$

Hisoblangan bu ehtimollar va tanlama ma'lumotlari asosida (19.29) formulaga ko'ra statistik kriteriyning χ^2_{tanlama} qiymatini hisoblab topamiz: $\chi^2_{\text{tanlama}} = 2,29$.

Normal taqsimotda baholanadigan noma'lum parametrlar soni 2 ga teng. U holda, χ^2 statistika erkinlik darajasi $k = l - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$ bo'ladi.

$\alpha = 0,05$ muhimlik darajasini tanlaymiz va xi-kvadrat taqsimot jadvalidan erkinlik darajasi 4 uchun $\chi^2_{\text{kn},0,05} = 9,5$ kritik nuqtani topamiz.

Hisoblangan $\chi^2_{\text{tanlama}} = 2,29$ va $\chi^2_{\text{kn},0,05} = 9,5$ qiymatlarni taqqoslab, ular uchun $\chi^2_{\text{tanlama}} < \chi^2_{\text{kn},0,05}$ ekanligini ko'ramiz va kimyoviy element miqdori normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipotezani qabul qilamiz.

Hisoblangan χ^2_{tanlama} qiymat kritik nuqtadan ancha kichik, bunga sabab tanlama qiymatlarining mos oraliqlarga tushgan n_i soni bilan ularning np_i matematik kutilmalarining bir-biriga yaqinligidir. Bu esa, o'lchash natijalarining H_0 gipotezaga juda ham yaxshi mos kelishini anglatadi. ◀

19.23-Misol. Tez yordam stansiyasiga tushadigan chaqiruvlar sonini tahlil qilish uchun 40 kun davomida har kuni bir xil vaqt oralig'ida kuzatuvlar olib borildi. Kuzatuvlar natijasida chaqiruvlar soni bo'yicha quyidagi jadvaldagi tanlama hosil qilindi.

3	0	0	4	1	1	2	3	1	2
2	1	5	0	3	1	2	3	2	1
1	2	1	5	3	4	2	1	4	4
3	6	5	1	0	2	0	3	2	3

Chaqiruvlar soni Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan degan H_0 gipotezani $\alpha = 0,05$ muhimlik darajasida Pirson kriteriyasi bo'yicha tekshiring.

► Dastlab, 9.15-Misolda Puasson taqsimotining a parametriga berilgan $\hat{\theta}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i$ baho bo'yicha a parametrning $\hat{\theta} \approx 2,1$ taqribiy qiymatini topamiz. Son o'qini 9 o'zaro kesishmaydigan $\Delta_i: (-\infty, 0); [0, 1); [1, 2); [2, 3); [3, 4); [4, 5); [5, 6); [6, 7); [7, +\infty)$ oraliqlarga ajratamiz.

X tasodifiy miqdorning Δ_i oraliqqa tushish ehtmolini

$$p_i = \frac{e^{-\hat{\theta}} \hat{\theta}^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i = \overline{1, 7},$$

$$p_8 = 1 - \sum_{i=1}^6 p_i, \quad p_0 = P(X < 0) = 0$$

tengliklar bilan hisoblaymiz. Bu qiymatlardan ushbu jadvalni tuzamiz:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Δ_i	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, 7)$	$[7, \infty)$
p_i	0,122	0,257	0,274	0,189	0,099	0,042	0,015	0,002

Bu jadval asosida xi-kvadrat kriteriyaning statistikasini hisoblab,

$$\chi_{\text{tanlama}}^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} + np_7 = 1,779$$

qiymatni hosil qilamiz. Oraliqlar soni $l = 8$, Puasson taqsimotida bitta a parametr bor, ya'ni $r = 1$, u holda χ^2 statistika erkinlik darajasi $k = l - r - 1 = 8 - 1 - 1 = 6$ bo'ladi.

$\alpha = 0,05$ muhimlik darajasini tanlaymiz va xi-kvadrat taqsimot jadvalidan erkinlik darajasi 6 uchun $\chi_{\text{kn},0,05}^2 = 12,6$ kritik nuqtani topamiz, tanlama bo'yicha

kritik soha $\bar{S} = \left(\chi_{\text{kn},0,05}^2, +\infty \right) = (12,6, +\infty)$ oraliqdan, ishonchlilik oralig'i esa $S = [0, 12,6]$ kesmadan iborat. Tanlama bo'yicha statistikaning qiymati 0,95 ehtimol bilan S ishonchlilik oralig'iga tushadi, shuning uchun kuzatish natijalari H_0 gipotezaga muvofiq keladi deb hisoblab, bu gipoteza qabul qilinadi. ◀

19.8. Regression tahlil

Regression bog'liqlik eng keng tarqalgan model bo'lib, u ayrim tasodifiy miqdorning boshqa tasodifiy miqdorlarga bog'liqligini ifodalaydi. Regression bog'liqlik yoki qisqacha regressiya bu bog'liqlikni taqriban ifodalaydigan chiziqli yoki chiziqli bo'lmagan funksiyalar orqali ifodalanadi. Barcha parametrli fizik qonunlar, tayyor mahsulot xossalarining xom ashyo xossalariga bogliqligini aks ettiruvchi muhandislik bog'liqliklar aynan shunday ifodalanadi. "Regressiya" so'zining o'zi ingliz olimi Frensis Galton tomonidan kiritilgan bo'lib, avlodlar o'lchamining ajdodlar o'lchamiga bog'liqligini ana shu so'z bilan atagan.

X va Y o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar bo'lsin va ularning $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlari bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X miqdordan bog'liqligi haqida asosli xulosa chiqarish talab etilgan bo'lsin.

19.30-Ta'rif. Agar $Y = \varphi^*(X) = M[Y|X]$ bog'liqlik o'rtacha kvadratik ma'noda Y tasodifiy miqdorga eng yaxshi taqribiy yaqinlashish bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $\varphi(X)$ funksiya uchun

$$M \left[(Y - \varphi^*(X))^2 \right] \leq M \left[(Y - \varphi(X))^2 \right]$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\varphi^*(X)$ funksiya *nazariy regressiya* deb ataladi.

Shartli matematik kutilmani hisoblash uchun X va Y tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasini bilish kerak bo'ladi. Aksariyat hollarda tadqiqotchi bunday ma'lumotga ega bo'lmaydi. Bu qiyinchilikni bartaraf qilish uchun $x_1, x_2, \dots, x_n$ va $y_1, y_2, \dots, y_n$ tanlamalar bo'yicha baholanadigan $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$

noma'lum parametrlarga bog'liq bo'lgan $\varphi(x) = \varphi(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ funksiyalar sinfini qarash bilan chegaralanish mumkin.

y funksiyaning kuzatilayotgan qiymati ikkita hadning

$$y = \varphi(x) + \varepsilon \quad (19.30)$$

yig'indisi ko'rinishida bo'ladi deb faraz qilamiz, bu yerda $\varphi(x)$ kuzatilayotgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarning funksiyasi, ε esa (19.30) regressiv modelning xatoligi deb ataluvchi tasodifiy miqdor. ε tasodifiy xatolik tasodifiy faktorlarning ta'sirini ham, tasodifiy o'zgarishning o'ziga xos xususiyatini ham, o'lchashlardagi xatoliklarni ham ifoda etishi mumkin.

Shunday qilib, o'zaro

$$y_i = \varphi(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (19.31)$$

tengliklar bilan bog'langan (x_i, y_i) juftliklar tanlamasi bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga funksional bog'liqligining $\hat{y} = \hat{\varphi}(x)$ bahosini topish talab qilinadi.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan, matematik kutilmasi $M\varepsilon_i = 0$ va dispersiyasi $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$ bo'lgan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, $\varphi(x)$ esa yuqorida aytib o'tganimizdek, noma'lum $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ parametrlarning funksiyasidan iborat deb faraz qilinadi:

$$y_i = \varphi(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (19.32)$$

Bu holda $\hat{\varphi}$ regressiya bahosini tuzish bu funksiyaning noma'lum parametrlarining bahosini topishga keltiriladi.

Oddiy chiziqli regressiya

Biz quyida noma'lum parametrlar soni ikkita va $\varphi(x_i, \theta_1, \theta_2)$ funksiya noma'lum parametrlarga nisbatan chiziqli bo'lgan holda batafsil to'xtalamiz.

19.31-Ta'rif. Agar regressiv model

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (19.32)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u *oddiy chiziqli regressiya* deb ataladi, bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlama X tasodifiy miqdorning aniq qiymatlari, ya’ni ular tasodifiy emas, $y_1, y_2, \dots, y_n$ esa Y tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlari, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan, matematik kutilmasi $M\varepsilon_i = 0$ va dispersiyasi $D\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$ bo‘lgan normal taqsimlangan $N[0, \sigma]$ tasodifiy miqdorlar va nihoyat θ_0, θ_1 baholanishi lozim bo‘lgan noma’lum parametrlar.

ε_i tasodifiy miqdorlarni normal taqsimlangan deb talab qilishdan maqsad, u regressiya tenglamasini va uning parametrlarining aniqligini baholashda kerak bo‘ladi.

(19.32) oddiy chiziqli regressiyaning bahosi $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ regressiya tenglamasi bo‘ladi. Bu tenglamaning $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ koeffitsiyentalrini topish masalasini qaraymiz.

Regressiv modelning parametrlarini baholashda turli xil usullardan foydalaniladi. Bu masalaga keng tarqalgan yondashuvlardan biri, bu quyidagicha: kuzatilayotgan va regressiv funksiya qiymatlarining muvofiqlashmaganlik o‘lchovi (kriteriy) kiritiladi va noma’lum parametrlar muvofiqlashmaganlik o‘lchovi eng kichik bo‘ladigan qilib aniqlanadi. Kriteriy kuzatilayotgan qiymatlarning va regressiv funksiya qiymatlaridan chetlanishlari kvadratlarining yig‘indisi

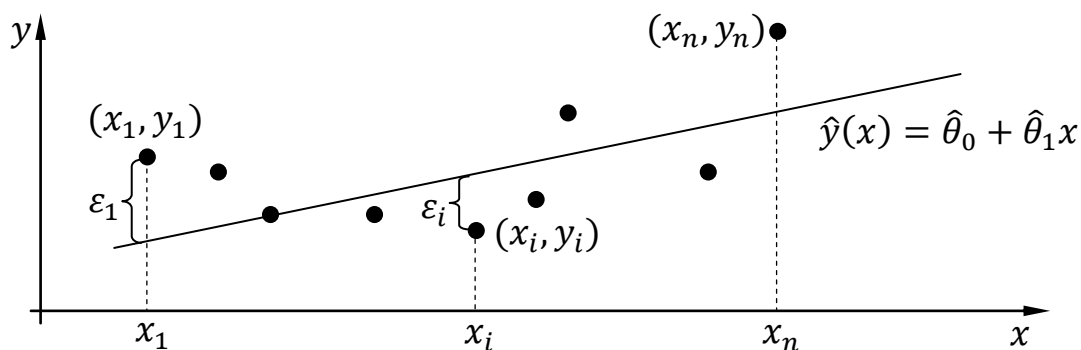
$$Q(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 \quad (19.33)$$

ko‘rinishda tanlanilsa, hisoblash formulalari sodda bo‘ladi.

19.32-Ta’rif. (19.32) kvadratik kriteriyani minimallashtirish

$$Q(\theta_0, \theta_1) \rightarrow \min_{\theta_0, \theta_1} \quad (19.34)$$

masalasiga *eng kichik kvadratlar usuli masalasi* deb yuritiladi, θ_0, θ_1 parametrlarning (19.33) kriteriyini minimallashtiruvchi $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ bahosi esa *eng kichik kvadratlar usuli bahosi* deb ataladi.



19.7-rasm

Eng kichik kvadratlar usuli bilan qidirilayotgan bahoning grafik tasviri $\hat{y}(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, u tanlama nuqtalari orasidan ko'rsatilgan ma'noda o'tadi (19.7-rasm).

Eng kichik kvadratlar usulining $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ bahosini topish uchun (19.33) kriteriyga ekstremumning zaruriy shartini yozamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \theta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) x_i = 0. \end{cases} \quad (19.35)$$

Kerakli almashtirishlardan so'ng (19.35) sistemani

$$\begin{cases} n\theta_0 + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \theta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

ko'rinishda yozib olamiz va hosil qilingan sistemaning ikkala tenglamasini ham n ga bo'lsak,

$$\begin{cases} \theta_0 + \theta_1 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i \\ \theta_0 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \theta_1 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (19.36)$$

sistemani hosil qilamiz. Tanlamaning birinchi va ikkinchi tartibli boshlang'ich momentlari uchun

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

belgilashlardan foydalanib, (19.36) sistemani

$$\begin{cases} \theta_0 + \bar{x}\theta_1 = \bar{y}, \\ \bar{x}\theta_0 + \overline{x^2}\theta_1 = \overline{xy} \end{cases} \quad (19.37)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlamaning elementlari orasida turli qiymatlilari mavjud deb faraz qilamiz. U holda bu sistemaning bosh determinanti noldan farqli:

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2 > 0,$$

shuning uchun (19.37) sistema yagona

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}), \quad \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) \quad (19.38)$$

yechimga ega bo‘ladi. Bu kritik nuqtada $Q(\theta_0, \theta_1)$ funksiya minimumga erishishi uchun ikki o‘zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli shartining bajarilishini ko‘rsatamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} &= 2n, & \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_1} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2n\overline{x^2}, & \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} &= 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}. \\ \Delta &= \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_1} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_0 \partial \theta_1} \right)^2 = 4n^2 \overline{x^2} - 4n^2 (\bar{x})^2 = 4n^2 (\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = \\ &= 4n^2 \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = 4n^2 s^2 > 0, \end{aligned}$$

hamda

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \theta_0} = 2n > 0$$

ekanligi, $Q(\theta_0, \theta_1)$ funksiya $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ nuqtada minimumga erishishini ta’minlaydi.

19.24-Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo‘yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini toping.

x_i	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12	13,4	14,7	15,2
y_i	17	16,2	13,3	13	9,7	8,1	6,2	5,8	5,7	4,6

► Tanlamaning (19.38) formulaga kerak bo‘ladigan $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{xy}$, s^2 sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$\bar{x} = \frac{2,7 + 4,6 + 6,3 + 7,8 + 9,2 + 10,6 + 12 + 13,4 + 14,7 + 15,2}{10} = 9,96;$$

$$\bar{y} = \frac{17 + 16,2 + 13,3 + 13 + 9,7 + 8,1 + 6,2 + 5,8 + 5,7 + 4,6}{10} = 9,65;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 109,67; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 78,654; \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 16,545.$$

(19.38) formulalar bo‘yicha θ_0 va θ_1 parametrlarning bahosini topamiz:

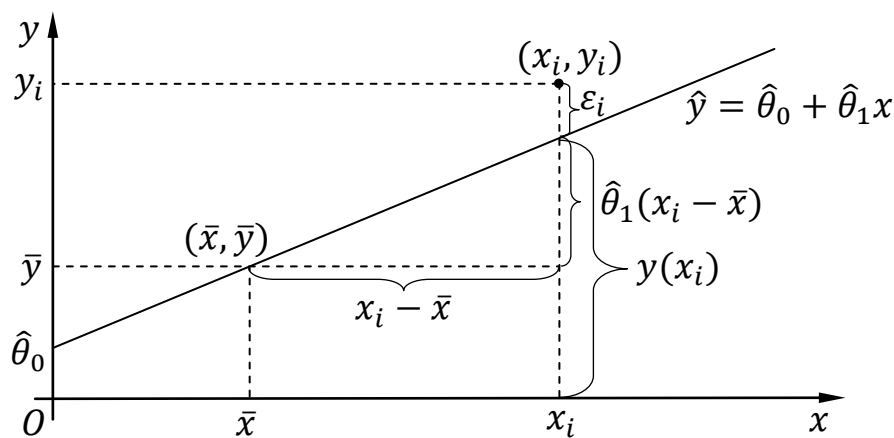
$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}) = 20,144; \quad \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = -1,0553.$$

Demak, $\hat{y} = 20,144 - 1,0553x$ bo‘ladi. ◀

O‘lchashdagi xatoliklar dispersiyasini baholash. (19.32) oddiy chiziqli regressiya modelida noma’lum θ_0, θ_1 parametrlardan boshqa yana bitta noma’lum bor, u ε_i xatoliklarning σ^2 dispersiyasidan iborat. Regressiyaning olingan baholarining aniqligi bu parametrlarning qiymatlariga bog‘liq. Shuning uchun bu dispersiyaga ham baho tuzish kerak. σ^2 dispersiya uchun baho sifatida

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)}{n-2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i)^2 \quad (19.39)$$

ifodani olamiz va $\hat{\sigma}^2$ qoldiq dispersiya, $\hat{\sigma}$ esa qoldiq o‘rtacha kvadratik chetlanish deb ataladi.



19.8-rasm

Regressiya funksiyasini oraliqli baholash

Regressiya funksiyasi, ya'ni noma'lum $M[Y|X]$ shartli matematik kutilma uchun γ ehtimolli ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Dastlab yuqorida topilgan $(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ baho uchun (19.37) sistemani qaytadan yozamiz:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_0 + \bar{x}\hat{\theta}_1 = \bar{y} \\ \bar{x}\hat{\theta}_0 + \overline{x^2}\hat{\theta}_1 = \overline{xy} \end{cases}$$

va bu sistemaning birinchi tenglamasidan $\hat{\theta}_0$ bahoni topib, uni $\hat{y}(x) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x$ regressiya tenglamasiga qo'yamiz. Natijada regressiya tenglamasi

$$\hat{y}(x) = \bar{y} + \hat{\theta}_1(x - \bar{x}) \quad (19.40)$$

ko'rinishni oladi. (19.40) tenglamadagi $\hat{\theta}_1$ koeffitsiyent Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdor bo'yicha *regressiya koeffitsiyenti* deb ataladi. Shunday qilib, (19.40) funksiya $M[Y|X]$ shartli matematik kutilmaning tanlama bahosi bo'ladi. 19.8-rasmda regressiya chizig'i tasvirlangan. Rasmda kuzatilayotgan ixtiyoriy y_i qiymat uchun $\bar{y}$ o'rtacha, $\hat{\theta}_1(x_i - \bar{x})$ orttirma va ε_i xatolik ko'rsatilgan.

(19.38) tengliklarning ikkinchisida $\hat{\theta}_1$ baho formulasini statistik tahlil uchun qulayroq ko'rinishga keltiramiz:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2}(\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i.$$

Endi $y_i, \bar{y}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_0$ tasodifiy miqdorlarning va regressiya funksiyasi $\hat{y}$ bahosining matematik kutilmalari va dispersiyalarini topamiz:

$$\begin{aligned}
My_i &= M(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i) = \theta_0 + \theta_1 x_i + M\varepsilon_i = \theta_0 + \theta_1 x_i; \\
M\bar{y} &= M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n My_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_0 + \theta_1 x_i) = \frac{1}{n} \left(n\theta_0 + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_i\right) = \\
&= \theta_0 + \theta_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \theta_0 + \theta_1 \bar{x}; \\
M\hat{\theta}_1 &= M\left(\frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i\right) = \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})My_i = \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 x_i) \\
&= \frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 \bar{x} + \theta_1(x_i - \bar{x}))] = \frac{\theta_1}{S^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \\
&\quad + \frac{\theta_0 + \theta_1 \bar{x}}{S^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{\theta_1}{S^2} \cdot S^2 = \theta_1, \\
M\hat{\theta}_0 &= M(\bar{y} - \bar{x}\hat{\theta}_1) = M\bar{y} - \bar{x}M\hat{\theta}_1 = \theta_0 + \theta_1 \bar{x} - \bar{x}\theta_1 = \theta_0, \\
M\hat{y} &= M(\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x) = M\hat{\theta}_0 + xM\hat{\theta}_1 = \theta_0 + \theta_1 x = y(x) \\
\sigma_{y_i}^2 &= D(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i) = D(\theta_0 + \theta_1 x_i) + D\varepsilon_i = \sigma^2, \quad (19.41) \\
\sigma_{\bar{y}}^2 &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Dy_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (19.42) \\
\sigma_{\hat{\theta}_1}^2 &= D\left(\frac{1}{nS^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i\right) = \frac{1}{n^2 S^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 Dy_i = \frac{\sigma^2}{nS^4} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\
&= \frac{\sigma^2}{nS^4} S^2 = \frac{\sigma^2}{nS^2}, \quad (19.43) \\
\sigma_{\hat{\theta}_0}^2 &= D(\bar{y} - \bar{x}\hat{\theta}_1) = D\bar{y} + \bar{x}^2 D\hat{\theta}_1 = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}^2 \frac{\sigma^2}{nS^2} = \frac{\sigma^2}{nS^2} (S^2 + \bar{x}^2). \quad (19.44)
\end{aligned}$$

Keyin kerak bo‘ladigan yana foydali ikkita tenglikni keltirib o‘tamiz:

$$M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) = M\varepsilon_i = 0, \quad M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2.$$

(19.39) tenglikdagi

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

va

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i)$$

tasodifiy miqdorlar normal taqsimlangan ε_i tasodifiy miqdorning chiziqli kombinatsiyalari bo'lganligi uchun ular ham normal taqsimlangan. Endi ularning korrelyatsiyanmaganligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\bar{y}, \hat{\theta}_1) &= M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) \cdot \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2 s^2} \left[M \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. M \left(\sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x})(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)(y_j - \theta_0 - \theta_1 x_j) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2 s^2} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x}) M(y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i) M(y_j - \theta_0 - \theta_1 x_j) \right] = \frac{\sigma^2}{n^2 s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\bar{y}$ va $\hat{\theta}_1$ tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyanmagan va ular normal taqsimlangan, shuning uchun ular o'zaro bog'liq emas.

(19.39) tenglikning o'ng tomonidagi $\bar{y}$ va $\hat{\theta}_1$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmaganligi va $(x - \bar{x})$ ko'paytuvchining notasodifiy miqdor bo'lganligi uchun bu tenglikdan dispersiya olsak

$$\sigma_{\hat{y}(x)}^2 = \sigma_{\bar{y}}^2 + \sigma_{\hat{\theta}_1}^2 (x - \bar{x})^2 \quad (19.43)$$

tenglik hosil bo'ladi (bu yerda $(x - \bar{x})$ o'zgarmas son dispersiya belgisidan tashqariga kvadrati bilan chiqdi). Bu tenglikdagi $\sigma_{\bar{y}}^2$ va $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2$ dispersiyalar o'rniga (19.41) va (19.42) tengliklarni qo'yamiz:

$$\sigma_{\hat{y}(x)}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{ns^2} (x - \bar{x})^2 = \frac{\sigma^2}{s^2 n} (s^2 + (x - \bar{x})^2). \quad (19.44)$$

19.2-Teorema. Ushbu tenglik bilan aniqlanuvchi

$$t = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{y} - M\hat{y}}{\sqrt{\sigma_{\hat{y}(x)}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{y} - M\hat{y}}{\sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}},$$

$$z = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_1 - M\hat{\theta}_1}{\sqrt{\sigma_{\hat{\theta}_1}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot (\hat{\theta}_1 - M\hat{\theta}_1),$$

$$u = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0}{\sqrt{\sigma_{\hat{\theta}_0}^2}} = \frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0}{\sqrt{s^2 + \bar{x}^2}}$$

tasodifiy miqdorlar erkinlik darajasi $n - 2$ bo'lgan Styudent taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan.

19.2-Teoremani qo'llab regressiya funksiyasi va uning parametrlari uchun ishonchlilik oralig'ini tuzamiz.

19.3-Teorema. $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiya uchun ishonchlilik darajasi γ bo'lgan ishonchlilik oralig'ining chegaralari

$$\hat{y} \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2} \quad (19.45)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ – erkinlik darajasi $(n-2)$ bo'lgan Styudent taqsimotining $(1 + \gamma)/2$ saviyali kvantili.

► 19.2-Teoremaga ko'ra $P\{|t| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)\} = \gamma$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan esa γ ehtimol bilan

$$\frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{|\hat{y} - M\hat{y}|}{\sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda kerakli almashtirishlardan so'ng

$$|\hat{y} - M\hat{y}| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz, ya'ni γ ehtimol bilan

$$\begin{aligned} \hat{y} - t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2} < y(x) < \\ < \hat{y} + t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + (x - \bar{x})^2} \end{aligned}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. ◀

19.4-Teorema. $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiya θ_0 va θ_1 parametrlari uchun ishonchlilik darajasi γ bo‘lgan ishonchlilik oralig‘ining chegaralari mos ravishda

$$\hat{\theta}_0 \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2} \quad (19.46)$$

$$\hat{\theta}_1 \pm t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \quad (19.47)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

► 19.2-Teoremaga ko‘ra $P\{|u| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)\} = \gamma$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bundan esa γ ehtimol bilan

$$\frac{s\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \cdot \frac{|\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0|}{\sqrt{s^2 + \bar{x}^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda kerakli almashtirishlardan so‘ng,

$$|\hat{\theta}_0 - M\hat{\theta}_0| < t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz, ya’ni γ ehtimol bilan

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_0 - t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2} < \hat{\theta}_0 < \\ < \hat{\theta}_0 + t_{(1+\gamma)/2}(n-2) \cdot \frac{\hat{\sigma}}{s\sqrt{n}} \cdot \sqrt{s^2 + \bar{x}^2} \end{aligned}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (19.46) tasdiq isbot bo‘ldi. (19.47) tasdiq ham xuddi shu singari isbot qilinadi. ◀

19.25-Misol. Ma'lum bir hududning 24 ta maydonida kimyoviy elementning zahirasi bo'yicha qilingan bashoratlar quyidagi jadvalda keltirilgan. x_i maydonning yuzasi (km^2) va y_i kimyoviy elementning zahirasi (shartli birliklarda).

x_i	3,3	10,5	4,5	14,4	13,1	15,4	17,8	18,2	13,5	12,3	2,23	5,48
y_i	5,8	18,4	8,2	26,3	25,8	29,2	30,9	37,8	23,9	25,3	4,9	9,8
x_i	2,87	2,14	4,35	11,9	10,6	39,1	2,1	23,3	10,5	3,3	19,03	11,8
y_i	6,3	4,7	9,6	24,3	21,4	75,8	4,5	48,3	23	7,2	34,3	22,1

Bu tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini, chiziqli regressiya va uning parametrlari uchun ishonchlilik darajasi 0,95 bo'lgan ishonchlilik oralig'larini toping.

► Jadval bo'yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini topamiz: $\bar{x} = 11,3$, $\bar{y} = 21,99$, $\overline{xy} = 389,33$, $\overline{x^2} = 200,84$, $s^2 = 78,7$. Topilgan bu qiymatlarni (19.38) formulalarga qo'yib, θ_0 va θ_1 parametrlarning bahosini topamiz:

$$\hat{\theta}_0 = \frac{1}{s^2} (\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}) = 0,217; \quad \hat{\theta}_1 = \frac{1}{s^2} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = 1,79.$$

Shunday qilib, $\hat{y} = 0,217 + 1,79x$.

ε_i xatoliklar σ^2 dispersiyasining bahosini (19.39) formulaga ko'ra topamiz:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i)^2 = 7,12.$$

Tanlamaning hajmi $n = 24$ bo'lganligi uchun erkinlik darajasi $n - 2 = 22$ bo'lgan Student taqsimotining jadvalidan $\gamma = 0,95$ qiymatda $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(22) = 2,07$ kvantilni hosil qilamiz. U holda regressiya uchun ishonchlilik darajasi 0,95 bo'lgan ishonchlilik oralig'ining chegaralarini (19.45) formulaga ko'ra topamiz:

$$\begin{aligned} 0,217 + 1,79x - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} = \\ = 0,217 + 1,79x - 0,13\sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} \end{aligned}$$

$$0,217 + 1,79x + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2} =$$

$$= 0,217 + 1,79x + 0,13\sqrt{78,7 + (x - 11,3)^2}.$$

Chiziqli regressiya θ_0 va θ_1 parametrlari uchun ishonchlilik darajasi $\gamma = 0,95$ bo'lgan ishonchlilik oralig'ining chegaralarini mos ravishda (19.46) va (19.47) formulalarga ko'ra topamiz: θ_0 parametr uchun

$$0,217 - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + 11,3^2} = -1,65,$$

$$0,217 + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} \cdot \sqrt{78,7 + 11,3^2} = 2,09,$$

ya'ni, θ_0 parametr 0,95 ehtimol bilan $(-1,65, 2,09)$ oraliqda yotadi. θ_1 parametr uchun

$$1,79 - 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} = 1,66, \quad 1,79 + 2,07 \cdot \frac{\sqrt{7,12}}{\sqrt{78,7}\sqrt{23}} = 1,92,$$

ya'ni θ_1 parametr 0,95 ehtimol bilan $(1,66, 1,92)$ oraliqda yotadi. ◀

19.9. Korrelyatsion tahlil

Inson faoliyatining turli sohalaridagi amaliy masalalarni yechishda, xususan muhandislik faolyatida tadqiqotchi tasodifiy ham bo'lishi mumkin bo'lgan o'zgaruvchan miqdorlar orasidagi funksional yoki boshqa ko'rinishdagi bog'liqliklarni aniqlash zaruriyatiga duch keladi. Aytilganlarni tasdiqlash uchun bir nechta misol qaraylik.

19.26-Misol. Qurilish mahsulotlaridan pishgan g'ishtning mustahkamlik darajasi Y miqdor pishirish pechlaridagi X_1 temperaturaga, g'isht tayyorlashga ishlatiladigan tuproqning X_2 turiga va hokazolarga bog'liq bo'ladi.

19.27-Misol. Oziq-ovqat ishlab chiqarishda uskunaning Y_1 samaradorligi, Y_2 sifatsiz mahsulotlar miqdori xom ashyoning X_1 namligiga, uskuna ichidagi X_2 temperaturaga bog'liq bo'ladi.

Nazorat qilinadigan X_1 va X_2 o'zgaruvchilarning Y_1 , Y_2 miqdorlarga ta'sir darajasini qanday aniqlash kerak? Agar bu miqdorlarning X_1 va X_2 miqdorlarga bog'liqligining ko'rinishi aniqlansa, texnologik jarayonning optimal holatini tanlash mumkin bo'ladi.

Tasodifiy miqdorlar orasidagi bo'g'liqlikni o'rganish *korrelyatsion tahlil* usullari yordamida amalga oshiriladi.

Shunday qilib, *korrelyatsion tahlil* matematik statistikaning bir bo'limi bo'lib, u tanlamalar bo'yicha olingan baholar asosida tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni o'rganadi.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $\{x_i, y_i\}_1^n$ tanlama qiymatlari bo'yicha

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

korrelyatsiya koeffitsiyentini baholash talab qilingan bo'lsin. $r(X, Y)$ uchun tanlamaning korrelyatsiya koeffitsiyenti ko'rinishidagi K. Pirson taklif qilgan

$$\hat{r} = r(X, Y) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}} = \frac{K_{XY}}{s_X s_Y} \quad (19.30)$$

bahoni olish mumkin, bu yerda K_{XY} , s_X^2 , s_Y^2 o'rganilayotgan X va Y tasodifiy miqdorlarning tanlama kovariatsiyasi va dispersiyalari. Uni yana ham qulayroq

$$\hat{r} = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2\right) \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2\right)}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{s_x s_y} \quad (19.31)$$

kabi ko'rinishda yozish mumkin.

19.26-Misol. 19.25-Misolda keltirilgan jadval bo'yicha tanlama korrelyatsiya koeffitsiyentining $\hat{r}$ bahosini hisoblang.

► Yuqorida tanlamaning ayrim $\bar{x} = 11,3$, $\bar{y} = 21,99$, $\bar{xy} = 389,33$, $s_x^2 = 78,7$ sonli xarakteristikalarini hisoblagan edik. Endi s_y qiymatini hisoblaymiz:

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 57,5178 - 483,5601 \approx 273,96.$$

U holda (19.31) formulaga ko‘ra,

$$\hat{r} = \frac{389,33 - 11,3 \cdot 21,99}{\sqrt{78,7} \cdot \sqrt{273,96}} \approx 0,96$$

bahoni hosil qilamiz. ◀

Amaliy tadqiqotlarda o‘rganilayotgan miqdorlar orasidagi bog‘liqlik haqida bosh to‘plamning r korrelyatsiya koeffitsiyenti bo‘yicha emas (aksar hollarda bu koeffitsiyent noma’lum bo‘ladi), balki tanlama bo‘yicha (19.31) formulaga ko‘ra hisoblangan $\hat{r}$ bahoga qarab xulosa chiqariladi.

Hisoblangan qiymat $\hat{r} \neq 0$ bo‘lsin. Bu qiymat bosh to‘plamda mavjud bo‘lgan X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘liqlikning mavjudligini anglatadimi, yoki tanlamani tanlashdagi tasodifiylikning natijasimi (ya’ni, boshqa tanlamada $\hat{r} = 0$ yoki $\hat{r}$ o‘z ishorasini o‘zgartiradimi) degan savol tug‘iladi.

Bunday hollarda bosh to‘plamning miqdorlari orasida chiziqli korrelyatsion bog‘liqlikning yo‘qligi haqidagi $H_0: r = 0$ gipoteza $H_1: r \neq 0$ alternativ gipotezada tekshiriladi.

19.5-Teorema. Agar bosh to‘plamning X va Y tasodifiy miqdorlari orasida chiziqli korrelyatsion bog‘liqlik mavjud bo‘lmasa, ya’ni $r = 0$ bo‘lsa,

$$t = \frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}}$$

statistika erkinlik darajasi $(n-2)$ bo‘lgan Styudent taqsimoti bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Gipotezani tekshirish uchun γ ishonchlik darajasi tanlanadi va u bo'yicha Styudent taqsimotining $t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ kvantili, hamda tanlama bo'yicha $\hat{r}$ koeffitsiyent hisoblanadi. Kritik soha $|t| > t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Bu tengsizlik esa,

$$|\hat{r}| > \frac{t_{(1+\gamma)/2}(n-2)}{\sqrt{n-2 + t_{(1+\gamma)/2}^2(n-2)}} \quad (19.32)$$

tengsizlikka teng kuchlidir (buni tekshirishni kitobxonga havola qilamiz). Agar bu tengsizlik o'rinli bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinmaydi va γ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 alternativ gipoteza qabul qilinadi.

19-27-Misol. Quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	3,5	4,1	5,4	3,2	6	7,3	7,5	7,6	7,8	7,9	8
y_i	1,7	5,7	3,2	4,7	1,3	9,2	3,8	-0,6	7,7	1,1	5,8
x_i	8,1	8,2	8,5	8,7	11,2	13,3	11,9	12,1	12,5	13	13,1
y_i	-7,4	2,5	0,9	7,2	3,8	4,8	6,4	5,7	3,1	2,8	6,3

tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 alternativ gipotezada tekshiring.

► Jadvaldagi qiymatlar bo'yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 8,586, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 3,623, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 83,05,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 32,53, \quad s_x^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 9,32,$$

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 11,64, \quad \hat{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} = 0,137.$$

$\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasini tanlaymiz va bu daraja bo'yicha Student taqsimoti jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ kvantilni topamiz. Kvantilning bu qiymatini (19.32) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodaga qo'yib hisoblaymiz:

$$t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)} \approx 0,4234. \text{ Ko'rinib turibdiki (19.32) tengsizlik o'rinli}$$

emas ekan, ya'ni $\hat{r} = 0,137 < 0,4234 \approx t_{0,975}(20)/\sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)}$. Shuning uchun H_0 asosiy gipoteza qabul qilinadi, ya'ni $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q deb tasdiqlashimiz mumkin. ◀

$\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun r bosh korrelyatsiya koeffitsiyentini γ ehtimol bilan qoplaydigan ishonchlilik oralig'ini tuzish maqsadga muvofiq. Bunday oraliqni tuzish uchun $\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyentining tanlama taqsimotini bilish kerak. $r \neq 0$ bo'lganda bu taqsimot nosimmetrik bo'lib, n tanlama hajmining o'sishi bilan normal taqsimotga sekinlik bilan yaqinlashadi.

Topilgan baho normal taqsimlangan hol uchun ishonchlilik oralig'ini tuzishning umumiy usulidan foydalanib, ishonchlilik ehtimoli γ bo'lganda oraliqli baholashning quyi va yuqori chegaralari uchun mos ravishda

$$\underline{r} = \hat{r} + \frac{\hat{r}(1 - \hat{r}^2)}{2n} - \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \gamma}{2}\right) \frac{1 - \hat{r}^2}{\sqrt{n}}, \quad (19.33)$$

$$\bar{r} = \hat{r} + \frac{\hat{r}(1 - \hat{r}^2)}{2n} + \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \gamma}{2}\right) \frac{1 - \hat{r}^2}{\sqrt{n}} \quad (19.34)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Biroq (19.33) va (19.34) baholardan tanlama hajmi katta (kamida 500) bo'lgandagina foydalanish mumkin.

Kichik hajmli tanlamalarda ishonchlilik oralig'ini tuzishning R.Fisherning

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{r}}{1 - \hat{r}} \quad \text{yoki} \quad z = \operatorname{arcth} \hat{r} \quad (19.35)$$

almashtirishiga asoslangan usulidan foydalanish mumkin, bu yerda $\operatorname{arcth} x$ – giperbolik arctangens..

Kichik hajmli tanlamalarda (19.35) formula bilan aniqlangan tasodifiy miqdor taqriban

$$Mz \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}, \quad \sigma_z^2 \approx \frac{1}{n-3}$$

parametrli normal taqsimotga ega bo'lar ekan. Bundan esa,

$$\underline{r} = \text{th } \underline{z}, \bar{r} = \text{th } \bar{z} \quad (19.36)$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda:

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{2(n-1)} - \Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (19.37)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{2(n-1)} + \Phi^{-1} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (19.38)$$

(19.37) va (19.38) formulalardan bosh to'plamning taqsimoti normal bo'lmaganda ham foydalanish mumkinligini ta'kidlab o'tish kerak. Bu holda baholashning sifati pasayadi, ya'ni $(\underline{z}, \bar{z})$ oraliq kengayadi va demak baholashning aniqligi pasayadi.

19.28-Misol. Quyidagi jadvalda (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $\{x_i, y_i\}_1^n$ tanlama qiymatlari keltirilgan.

x_i	1,2	1,8	2,1	2,5	2,9	3	3,5	3,9	4,7	5,6	6,2
y_i	23,2	22,2	19,9	19,7	18,1	17	17	17	15,3	13,1	12
x_i	6,3	7,5	8,4	8,8	8,9	9	9,3	9,5	9,9	10,1	10,5
y_i	11,2	9,2	7,1	5,2	4,9	4,2	3,6	3,1	2,4	2,3	1,2

Bu tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 alternativ gipotezada tekshiring va agar H_1 gipoteza qabul qilinsa, $\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasida $\hat{r}$ korrelyatsiya koeffitsiyenti uchun ishonchlilik oralig'ini tuzing.

► Jadvaldagi qiymatlar bo'yicha tanlamaning sonli xarakteristikalarini hisoblaymiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 6,164, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 11,291, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 47,421,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 47,955, \quad s_x^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 9,431,$$

$$s_y^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 50,061, \quad \hat{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y} = -0,996.$$

$\gamma = 0,95$ ishonchlilik darajasini tanlaymiz va bu daraja bo'yicha Student taqsimoti jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ kvantilni topamiz. Kvantilning bu qiymatini (19.32) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodaga qo'yib hisoblaymiz:

$$t_{0,975}(20) / \sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)} \approx 0,4234. \text{ Ko'rinib turibdiki, (19.32) tengsizlik o'rinli}$$

ekan, ya'ni, $|\hat{r}| = 0,996 > 0,4234 \approx t_{0,975}(20) / \sqrt{20 + t_{0,975}^2(20)}$. Shuning uchun

H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi, ya'ni, $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud deb tasdiqlashimiz mumkin.

Endi bosh to'plamning r korrelyatsiya koeffitsiyentini $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan qoplaydigan $(\underline{r}, \bar{r})$ ishonchlilik oralig'ini tuzamiz. Dastlab, $\Phi^{-1}((1+\gamma)/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$ qiymatni topamiz. Endi (19.37) va (19.38) formulalarga ko'ra Fisher almashtirishi ichun $(\underline{z}, \bar{z})$ oraliqni $\underline{z} = -3,5160435$, $\bar{z} = -2,6167338$ topamiz. Topilgan bu qiymatlarni (19.36) formulalarga qo'yib, $\underline{r} = -0,9982354$ va $\bar{r} = -0,9893866$ qiymatlarni topamiz. Demak, $(-0,9982354, -0,9893866)$ oraliq $\gamma = 0,95$ ehtimol bilan bosh to'plamning r korrelyatsiya koeffitsiyentini qoplaydi. ◀

$H_0: r = 0$ (ya'ni normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas degan) gipotezani tekshirishda erkinlik darajasi $(n-2)$ bo'lgan Student qonuni bo'yicha taqsimlangan

$$t = \frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} \quad (19.39)$$

statistikadan foydalanish mumkin. Agar

$$\frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} < t_{(1+\gamma)/2}(n-2)$$

bo'lsa, H_0 gipoteza qabul qilinadi, ya'ni qaralayotgan tasodifiy miqdorlar γ ehtimol bilan o'zaro bog'liq emas deb tasdiqlash mumkin.

19.29-Misol. 19.27-Misolda qaralgan tanlama uchun $H_0: r = 0$ gipotezani tekshiramiz. Styudent taqsimotining kvantillari jadvalidan $t_{(1+\gamma)/2}(n-2) = t_{0,975}(20) = 2,09$ qiymatni topamiz va

$$\frac{\hat{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} = 0,137 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1-0,137^2}} = 0,619$$

qiymat bilan taqqoslaymiz. $0,619 < 2,09$ bo'lganligi uchun $r = 0$ gipotezani qabul qilamiz. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday to'plamga bosh to'plam deb ataladi?
2. Tanlama nima?
3. Tanlamalar qanday ko'rinishlarda bo'ladi?
4. Tanlamaning hajmi qanday aniqlanadi?
5. Variatsion qator nima?
6. Tanlamaning kengligi qanday aniqlanadi?
7. Tanlamaning statistik taqsimoti nima?
8. Chastotalar poligoni qanday yasaladi?
9. Empirik taqsimot funksiyasi qanday aniqlanadi?
10. Gistogramma nima?
11. Tanlamaning o'rtachasi deb qanday miqdorga aytiladi?
12. Tanlamaning dispersiyasi qanday aniqlanadi?
13. Tanlamaning medianasi nima?
14. Parametrni nuqtaviy baholash deganda nimani tushunasiz?
15. Qanday bahoga asosli statistik baho deyiladi?

16. Qanday bahoga siljimagan baho deyiladi?
17. Qanday bahoga samarali baho deyiladi?
18. Nuqtaviy baholashning qanday usullarini bilasiz?
19. Ehtimolli funksiya nima?
20. Parametrni eng kichik kvadratlar usuli bilan baholash qanday amalga oshiriladi?
21. Parametrni oraliqli baholash deganda nimani tushunasiz?
22. Statistik gipoteza nima?
23. Asosiy va alternativ gipotezalar qanday farqlanadi?
24. Statistik kriteriyga ta'rif bering.
25. Statistik kriteriyning ishonchlilik sohasi nima?
26. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklarga ta'rif bering.
27. Pirson kriteriysi qanday aniqlanadi?
28. Regression tahlil nima?
29. Regressiv modelning ko'rinishini yozing.
30. Korrelyatsion tahlil nimani o'rganadi?

Mashqlar

1. Kuzatilayotgan miqdorning $n = 25$ hajmli

11, 4, 3, 9, 12, 11, 7, 4, 6, 3, 5, 11, 7, 9, 8, 9, 4, 7, 8, 3, 6, 4, 6, 1, 5, 8

tanlamasining variatsion qatorini tuzing va tanlama kengligini aniqlang.

2. Kuzatilayotgan miqdorning $n = 25$ hajmli

6, -1, 3, 4, -2, 11, 7, 4, 6, 3, 5, -1, 7, 9, 8, 3, 4, 7, -2, 3, 7, 4, 6, 1, 5, 11

tanlamasi berilgan. Uning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.

3. $n = 10$ hajmli 1, -1, 3, 4, 3, 5, -1, 6, 4, 7 tanlama bo'yicha empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

4. X uzluksiz tasodifiy miqdor qiymatlarining $n = 30$ hajmli

0,5	0,9	-2,1	5,6	-2,9	6,6	-2,6	1,9	-3,8	2,8
-5,1	-4,2	1,3	-0,5	4,2	-0,7	4,8	2,1	-1,2	-4,5

0 0,8 3,8 1,7 7,1 -1,5 5,1 3,1 0,3 -1,7

tanlamasi berilgan. Bu tanlamaning intervalli statistik qatorini tuzing, empirik zichlik funksiyasini toping va gistogrammasini yasang.

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor qiymatlarining $n = 550$ hajmli intervalli statistik qatori keltirilgan jadval bo'yicha qatorning sonli xarakteristikalarini toping.

$[x'_{i-1}, x'_i)$	[11, 16)	[16, 21)	[21, 26)	[26, 31)	[31, 36)
n_i	15	28	56	97	151
$[x'_{i-1}, x'_i)$	[36, 41)	[41, 46)	[46, 51)	[51, 56)	[56, 61)
n_i	96	54	32	18	3

6. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor qiymatlarining $n = 110$ hajmli tanlamasi quyidagi jadvalda berilgan. Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasi $\sigma^2 = 5,64$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $\alpha = 0,05$ muhimlik darajasida bu tanlama bo'yicha $H_0: m = \bar{x}$ asosiy gipotezani $H_1: m \neq \bar{x}$ alternativ gipotezada tekshiring.

5,1	10,7	9,8	14,4	7,6	12,2	10,4	9,7	13,3	14,7
12,3	10,3	7,8	12,4	9,9	8,1	12,9	6,2	12,6	11,1
7,7	11,6	11,8	6,5	10,8	13	7,3	10	9,5	12,8
14,3	7,1	11,3	9,6	10,3	9,3	10,4	12,7	8,2	8
10,1	10,9	8,7	11,6	10,8	5,4	13,1	9	11,7	11,2
5,2	9,5	10,5	7,9	7,2	11,5	9,5	8,3	9	6,3
9,9	10,2	6,6	9,4	10,2	8,7	6	12,1	13,4	11,9
6,7	10,5	8,6	11,4	8	11	9,6	9,4	9,6	8,4
10	12,5	8,6	5,3	10,6	7,4	14,2	7,5	13,7	12
8,5	10,1	14	9,2	8,8	10,6	9,1	13,9	6,9	9,8
5	14,1	6,8	8,8	13,2	5,7	10,7	8,9	9,7	6,4

7. $n = 110$ hajmli tanlama quyidagi jadvalda berilgan. Bu tanlama bo'yicha bosh to'planning normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipotezani tekshiring.

1,9	7,5	6,6	11,2	4,4	9	7,2	6,5	10,1	11,5
9,1	7,1	4,6	9,2	6,7	4,9	9,7	3	9,4	7,9
4,5	8,4	8,6	3,3	7,6	9,8	4,1	6,8	6,3	9,6
11,1	3,9	8,1	6,4	7,1	6,1	7,2	9,5	5	4,8
6,9	7,7	5,5	8,4	7,6	2,2	9,9	5,8	8,5	8
2	6,3	7,3	4,7	4	8,3	6,3	5,1	5,8	3,1
6,7	7	3,4	6,2	7	5,5	2,8	8,9	10,2	8,7
3,5	7,3	5,4	8,2	4,8	7,8	6,4	6,2	6,4	5,2
6,8	9,3	5,4	2,1	7,4	4,2	11	4,3	10,5	8,8
5,3	6,9	10,8	6	5,6	7,4	5,9	10,7	3,7	6,6
1,8	10,9	3,6	5,6	10	2,5	7,5	5,7	6,5	3,2

8. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini toping.

x_i	2,1	3,2	3,9	4,1	4,4	5,6	6,1	6,5	6,9	7,2
y_i	6,25	9,21	11,13	11,69	12,45	15,67	17,02	18,19	19,21	20,04

9. O'zaro bog'liq X va Y tasodifiy miqdorlarning qiymatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

x_i	3,1	6,7	6,9	5,7	4,7	4,8	5,1	5,5	4,6	6,2
y_i	6,33	15,12	15,34	12,73	10,21	10,39	11,15	12,15	9,89	13,91
x_i	2,7	6,1	5,2	2,9	3,4	4,2	4,9	5,8	6,5	7,1
y_i	5,29	13,63	11,41	5,82	6,87	8,96	10,58	12,78	14,45	16,15

Bu tanlama bo'yicha Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdordagi $y = \theta_0 + \theta_1 x$ chiziqli regressiyasi parametrlarining bahosini, chiziqli regressiya va uning parametrlari uchun ishonchlilik darajasi 0,95 bo'lgan ishonchlilik oraliklarini toping.

10. Quyidagi jadvalda (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning tanlama qiymatlari berilgan. Bu tanlama bo'yicha korrelyatsiya koeffitsiyentining $\hat{r}$ bahosini hisoblang.

x_i	4,3	7,9	8,1	6,9	5,9	6	6,3	6,7	5,8	7,4	5	7,8
y_i	2,48	4,41	4,51	3,91	3,36	3,35	3,49	3,68	3,12	4,16	2,91	4,29
x_i	3,8	7,2	6,3	4	4,5	5,3	6	6,9	7,6	8,2	8,4	3,7
y_i	2,23	4,11	3,43	2,34	2,62	3,12	3,41	3,93	4,27	4,55	4,56	2,18

11. Quyidagi jadvalda keltirilgan

x_i	1,2	1,5	1,6	2	2,1	2,4	2,6	3,1	3,5	4,2	4,3
y_i	2,19	2,43	2,55	2,84	2,89	3,11	3,3	3,8	4,11	6,52	4,7
x_i	4,5	4,6	5,1	5,2	6,1	6,3	6,6	6,8	7,2	7,7	7,8
y_i	4,83	4,87	5,32	5,5	6,12	6,42	6,54	6,73	7,14	7,41	7,62

tanlama bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik yo'q degan H_0 asosiy gipotezani tasodifiy miqdorlar orasida bog'liqlik mavjud degan H_1 alternativ gipotezada tekshiring.

ILOVALAR

1-Ilova $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ funksiyaning qiymatlari

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002

4,	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

2-Ilova $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}$ funksiyaning qiymatlari

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2,	0,4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4961

3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000 ¹

¹Aniq qiymati $5 \cdot 10^{-5}$ dan kam farq qiladi.

3-Ilova $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ Puasson funksiyasining qiymatlari

$\lambda \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2223	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1216	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0,0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005
7	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001
$\lambda \backslash m$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
0	0,1353	0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0001	0000
1	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005	0002
2	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023	0010
3	1805	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076	0037
4	0902	1681	1954	1755	1339	0912	0572	0337	0189	0102
5	0361	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378	0224
6	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631	0411
7	0034	0216	0595	1045	1377	1490	1396	1171	0901	0646
8	0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126	0888
9	0002	0027	0132	0363	0689	1014	1241	1318	1251	1085
10	0000	0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251	1194

11	0000	0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137	1194
12	0000	0001	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0948	1094
13	0000	0000	0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729	0926
14	0000	0000	0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521	0728
15	0000	0000	0000	0002	0009	0033	0090	0194	0347	0534
16	0000	0000	0000	0000	0003	015	0045	0109	0217	0367
17	0000	0000	0000	0000	0001	0006	0021	0058	0128	0237
18	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0009	0029	0071	0145
19	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004	0014	0037	0084
20	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0006	0019	0046

4-Ilova. χ^2 Pirson taqsimotining $\chi^2_{\alpha,k}$ kvantillari (k – erkinlik darajasi)

k	α – muhimlik darajasini					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001	0,0002
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66

15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,12	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,85	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,59	10,28	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,34	10,98	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,09	11,69	10,20
24	43,0	39,4	36,4	13,85	12,40	10,86
25	44,3	40,6	37,7	14,61	13,12	11,52
26	45,6	41,9	38,9	15,38	13,84	12,20
27	47,0	43,3	40,1	16,15	14,57	12,88
28	48,3	44,5	41,3	16,93	15,31	13,56
29	49,6	45,7	42,6	17,71	16,05	14,26
30	50,9	47,0	43,8	18,49	16,79	14,95
35	57,3	53,2	49,8	22,47	20,57	18,51
40	63,7	59,3	55,8	26,51	24,43	22,16
45	70,0	65,4	61,7	30,61	28,37	25,90
50	76,2	71,4	67,6	34,76	32,36	29,71
75	106,4	100,8	96,2	56,05	52,94	49,48
100	135,8	129,6	124,3	77,93	74,22	70,06

5-Ilova. Student taqsimotining t –kvantillari (k –erkinlik darajasi)

k	γ ishonchlilik darajasi (ikki tomonlama kritik soha)					
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	637,00
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6

3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66

30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,47
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	7,09	8,29

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Александрова Е.Б., Свиницкая Т.А., Тимофеева Л.Н. Теория функций комплексного переменного. СПб, 2014.
2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Задачник.: Учебное пособие для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 192 с.
3. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016. - 281 с.
4. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.1 в 2 книгах. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для академического бакалавриата / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: -Юрайт, 2016. - 501 с.
5. Бугров, Я.С. Высшая математика в 3 т. Т.3 в 2 книгах. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - Люберцы: - Юрайт, 2016. - 507 с.
6. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике / Я.Б. Зельдович. - М.: Физматлит, 2016. - 520 с.
7. Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н. Операционное исчисление. Примеры и задачи. Томск. 2007.
8. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. - М.: Физматлит, 2013. - 384 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001.
10. Писменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс- М: Айрис-пресс, 2009.
11. Соатов Ё.У. Олий математика 2-жилд, Т.: Ўқитувчи, 1994.
12. Шипачев В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 1: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 288 с.

13. Шипачев В.С. Высшая математика. полный курс в 2 т. том 2: Учебник для академического бакалавриата / В.С. Шипачев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 341 с.
14. John Bird. Basic Engineering Mathematics (5a Ed.), 2010, X+563 pp. ISBN-13: 978-1-85-617697-2.
15. Peter V. O'Neil, Advanced Engineering Mathematics (7th edition), 2011, X+912 pp, ISBN-10: 1111427410.
16. Glyn James, Modern Engineering Mathematics (5th Edition) 2015, XII+1152 pp. ISBN: 1292080736.
17. Jr. Tomas. Calculus. Copyright, 2005.

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
15-BOB. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI.....	4
15.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya va uning limiti. Kompleks tekislik nuqtalari to'plami.....	4
15.2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni differensiallash	11
15.3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni integrallash. Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralining ta'rifi.....	20
15.4. Qatorlar va maxsus nuqtalar. Sonli qatorlar	29
15.5. Chegirmalar nazariyasi. Funksiyaning maxsus nuqtalardagi chegirmasi va ularni hisoblash.....	46
Nazariy savollar. Mashqlar.....	56
16-BOB. OPERATSION HISOB ELEMENTLARI	58
16.1. Laplas almashtirishi. Original va tasvir.....	58
16.2. Laplas almashtirishining xossalari.....	62
16.3. Originalni tasvir yordamida tiklash.....	72
16.4. Operatsion hisobning differensial va integral tenglamalarni yechishga tadbiqlari.....	76
16.5. Nazariy savollar. Mashqlar.....	85
17-BOB. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI	88
17.1. Eng sodda xususiy hosilali differensial tenglamalar.....	88
17.2. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi	91
17.3. Tor tebranish tenglamasi. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish.....	98
17.4. Torning erkin tebranish tenglamasini Furiye usuli bilan yechish	105
17.5. Torning majburiy tebranish tenglamasini Furiye usuli bilan yechish....	111
17.6. Uchlari qo'zg'aluvchan torning majburiy tebranishi	116

17.7.	Giperbolik tenglamalar uchun Koshi masalasi.....	118
17.8.	Chegaralanmagan tor uchun bir jinsli bo'lmagan Koshi masalasini yechish.....	121
17.9.	Parabolik turdagi tenglamalar	123
17.10.	Elliptik turdagi tenglamalar. Elliptik turdagi tenglamaga keltiruvchi masalalar.....	141
	Nazariy savollar. Mashqlar.....	163
18-BOB.	EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI	168
18.1.	Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar.....	168
18.2.	Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi va statistik ehtimoli.....	170
18.3.	Ehtimolning klassik ta'rifi.....	172
18.4.	Kombinatorika elementlari.....	173
18.5.	Geometrik ehtimol	177
18.6.	Ehtimollarni qo'shish.....	178
18.7.	Hodisalarning bog'liqligi. Shartli ehtimol.....	180
18.8.	Hodisalar ko'paytmasining ehtimoli.....	182
18.9.	To'la ehtimol va Bayyes formulalari	183
18.10.	Bernulli sxemasi	185
18.11.	Bernulli sxemasida taqribiy formulalar	190
18.12.	Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari	195
18.13.	Diskret tasodifiy miqdorlar.....	197
18.14.	Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.....	202
18.15.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar.....	211
18.16.	Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar.....	225
18.17.	Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlar.....	229
18.18.	Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar.....	233
18.19.	Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari.....	241
18.20.	Tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi va korrelyatsiya koeffitsiyenti	253
18.21.	Tasodifiy miqdorlarning shartli taqsimot qonunlari va	

xarakteristikalar.....	260
18.22. Katta sonlar qonuni.....	269
Nazariy savollar. Mashqlar.....	277
19-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI	283
19.1. Bosh va tanlama to'plam	283
19.2. Variatsion va statistik qator. Taqsimotning empirik funksiyasi.....	286
19.3. Tanlamaning sonli xarakteristikalar.....	293
19.4. Taqsimotning parametrlarini nuqtaviy baholash	296
19.5. Nuqtaviy baholarni tuzish usullari	302
19.6. Taqsimotning parametrlari va sonli xarakteristikalarini oraliqli baholash	307
19.7. Statistik gipotezalarni tekshirish.....	315
19.8. Regression tahlil.....	327
19.9. Korrelyatsion tahlil.....	339
Nazariy savollar. Mashqlar.....	346
Ilovalar.....	350
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	358

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
15-ГЛАВА ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.....	4
15.1. Функция комплексного переменного и ее предел. Множество точек комплексной плоскости	4
15.2. Дифференцирование функций комплексного переменного.....	11
15.3. Интегрирование функций комплексного переменного. Определение интеграла функции комплексного переменного.....	20
15.4. Ряды и особые точки. Числовые ряды	29
15.5. Теория вычетов. Вычет функции в особой точке и их вычисление.....	46
Теоретические вопросы. Задания.....	56
16-ГЛАВА ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.....	58
16.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.....	58
16.2. Свойства преобразования Лапласа.....	62
16.3. Востановление оригинала по изображению.....	72
16.4. Применение операционного исчисления решению дифференциальных и интегральных уравнений.....	76
16.5. Теоретические вопросы. Задания.....	85
17-ГЛАВА УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	88
17.1. Простейшие дифференциальные уравнения в частных производных.....	88
17.2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.....	91
17.3. Уравнение колебания струны. Выведение уравнения колебания струны.....	98
17.4. Решение методом Фурье уравнения свободного колебания струны.....	105

17.5.	Решение методом Фурье уравнения вынужденного колебания струны.....	111
17.6.	Вынужденные колебания струны с подвижными концами.....	116
17.7.	Задача Коши для гиперболических уравнения.....	118
17.8.	Решение неоднородной задачи Коши для неограниченной струны.....	121
17.9.	Уравнения параболического типа.....	123
17.10.	Уравнения эллиптического типа. Задачи приводящиеся к эллиптическим уравнениям.....	141
	Теоретические вопросы. Задания.....	163
18-ГЛАВА	ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	168
18.1.	Случайные события и действия над ними.....	168
18.2.	Относительная частота и статистическая вероятность случайного события.....	170
18.3.	Классическое определение вероятности.....	172
18.4.	Элементы комбинаторики.....	173
18.5.	Геометрическая вероятность.....	177
18.6.	Сложение вероятностей.....	178
18.7.	Зависимые события. Условная вероятность.....	180
18.8.	Вероятность произведения событий.....	182
18.9.	Формула полной вероятности. Формула Бейеса.....	183
18.10.	Схема Бернулли.....	185
18.11.	Приближенные формулы в схеме Бернулли.....	190
18.12.	Случайные величины и их функция распределения.....	195
18.13.	Дискретные случайные величины.....	197
18.14.	Непрерывные случайные величины.....	202
18.15.	Числовые характеристики случайных величин.....	211
18.16.	Двумерные случайные величины.....	225
18.17.	Двумерные дискретные случайные величины.....	229

18.18.	Двумерные непрерывные случайные величины.....	233
18.19.	Функции случайных величин.....	241
18.20.	Ковариация и корреляционный коэффициент случайных величин.....	253
18.21.	Законы условных распределений и характеристики случайных величин.....	260
18.22.	Закон больших чисел.....	269
	Теоретические вопросы. Задания.....	277
19-ГЛАВА	ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.....	283
19.1.	Генеральная совокупность и выборка.....	283
19.2.	Вариационный и статистический ряд. Эмпирическая функция распределения.....	286
19.3.	Числовые характеристики выборки.....	293
19.4.	Точечные оценки параметров распределения	296
19.5.	Методы составления точечных оценок.....	302
19.6.	Интервальные оценки параметров и числовых характеристик распределения.....	307
19.7.	Проверка статистических гипотез.....	315
19.8.	Регрессионный анализ.....	327
19.9.	Корреляционный анализ.....	339
	Теоретические вопросы. Задания.....	346
	Приложения.....	350
	ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	358

CONTENTS

INTRODUCTION.....	3
15-CHAPTER THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE.....	4
15.1. Function of a complex variable and its limit. Set of points of the complex space.....	4
15.2. Differentiation of complex variable functions.....	11
15.3. Integration of complex variable functions. Determination of the integral of a function of a complex variable.....	20
15.4. Rows and singular points. Number series	29
15.5. Residue theory. Deduction of a function at a singular point and their calculation.....	46
Theoretically questions. Tasks.....	56
16-CHAPTER ELEMENTS OF OPERATIONAL CALCULATION.....	58
16.1. Laplace transform. Original and Image.....	58
16.2. Laplace transform properties.....	62
16.3. Restoration of the original from the image.....	72
16.4. Application of operational calculus to solving differential and integral equations.....	76
16.5. Theoretical questions. Tasks.....	85
17-CHAPTER EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS.....	88
17.1. The simplest partial differential equations.....	88
17.2. Classification of second order partial differential equations.....	91
17.3. String vibration equation. Derivation of the string vibration equation.....	98
17.4. Solution by the Fourier method of the equation of free vibration of a string.....	105
17.5. Solution by the Fourier method of the equation of forced	

vibration of a string.....	111
17.6. Forced vibrations of a string with moving ends.....	116
17.7. Cauchy problem for hyperbolic equations.....	118
17.8. Solution of the nonhomogeneous Cauchy problem for an unbounded string.....	121
17.9. Parabolic equations.....	123
17.10. Equations of elliptic type. Problems Reducing to Elliptic Equations.....	141
Theoretically questions. Tasks.....	163
18-CHAPTER ELEMENTS OF THE THEORY OF PROBABILITY.....	168
18.1. Random events and actions on them.....	168
18.2. Relative frequency and statistical probability of a random even.....	170
18.3. Classical definition of probability.....	172
18.4. Combinatorial elements.....	173
18.5. Geometrical probability.....	177
18.6. Addition of probabilities.....	178
18.7. Dependent events. Conditional probability.....	180
18.8. The probability of producing events.....	182
18.9. Formula of total probability. Bayes' formula.....	183
18.10. Bernoulli scheme.....	185
18.11. Approximate formulas in the Bernoulli scheme.....	190
18.12. Random variables and their distribution function.....	195
18.13. Discrete random variables.....	197
18.14. Continuous random variables.....	202
18.15. Numerical characteristics of random variables	211
18.16. Two-dimensional random variables	225
18.17. Two-dimensional discrete random variables.....	229
18.18. Two-dimensional continuous random variables.....	233

18.19.	Function of random variables.....	241
18.20.	Covariance and correlation coefficient of random variables.....	253
18.21.	Conditional distribution laws and characteristics of random variables.....	260
18.22.	The law of large numbers.....	269
	Theoretical equations. Tasks.....	277
19-CHAPTER	ELEMENTS OF MATHEMATICAL STATISTICS.....	283
19.1.	General population and sample.....	283
19.2.	Variational and statistical series. Empirical distribution function..	286
19.3.	Numerical characteristics of the sample.....	293
19.4.	Point estimates of distribution parameters	296
19.5.	Point Estimation Methods.....	302
19.6.	Interval estimates of parameters and numerical characteristics of the distribution.....	307
19.7.	Testing statistical hypotheses.....	315
19.8.	Regression analysis.....	327
19.9.	Correlatsion analysis.....	339
	Theoretical equations. Tasks.....	346
	Applications.....	350
REFERENCES.....		358