

6023
N 72
YU. P. APAKOV

OLIIY MATEMATIKA

I

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

TOSHKENT

512/512(075.8)
A-72

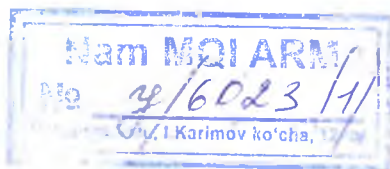
**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
NAMANGAN MUHANDISLIK-QURILISH INSTITUTI**

YU. P. APAKOV

OLIY MATEMATIKA

Birinchi jild

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan Muhandis-texnik ta'lim sohasi bo'yicha ta'lim olayotgan
bakalavriat talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan*



TOSHKENT – 2022

UO‘K: 512/512(075.8)

KBK 22.11ya7

A 72

A 72

Yu. P. Apakov. Oliy matematika. 1-jild.
/Darslik/. –T.: «Fan va texnologiyalar nashriyot-
matbaa uyi», 2022. 324 bet.

ISBN 978–9943–8122–6–0

Darslik muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan. Kitob ikki jildidan iborat. Ushbu birinchi jild chiziqli algebra, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi bo'limlarini o'z ichiga oladi. Darslikdan kunduzgi, kechki va sirtqi bo'lim talabalari foydalanishlari mumkin.

UO‘K: 512/512(075.8)

KBK 22.11ya7

Mas'ul muharrir:

A. S. Sharipov – fizika-matematika fanlari doktori, O'zMU professori.

Taqrizchilar:

V. R. Xodjibayev – fizika-matematika fanlari doktori, NamQI professori;

M. M. Raxmatullayev – fizika-matematika fanlari doktori, NamDU professori.

ISBN 978–9943–8122–6–0

© «Fan va texnologiyalar nashriyot-matbaa uyi», 2022.

SO'Z BOSHI

Mamlakatimizda ta'lim tizimini isloh qilishga va uni zamon talablari bilan uyg'unlashtirishga katta ahamiyat berilmoqda.

Ayniqsa, matematika fanining o'rni hamda uning barcha fanlarni o'zlashtirishga va ularning rivojiga asos ekanligini hisobga olib, unga alohida e'tibor qaratilmoqda. Qolaversa, hozirgi paytda maktabgacha ta'limdan boshlab oliy ta'limga qadar mavjud o'quv dasturlari va o'quv adabiyotlarini zamon talablariga moslashtirish jarayoni ketmoqda.

Oliy matematika fani bo'yicha ma'ruza darslarida va mustaqil ta'lim olishda foydalanish mumkin bo'lgan o'zbek tilida, lotin alifbosida yozilgan darsliklarni topish mushkul ishdir. Mavjud adabiyotlarning aksariyati hozirgi o'quv dasturlar bilan muvofiq emas.

Oliy ta'limni Yevropa ta'lim tizimiga moslash va modul tizimiga o'tilishi munosabati bilan, muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta'lim yo'nalishlari uchun Oliy matematika fanidan ma'ruza mashg'ulotlari to'rt semestr davomida o'tiladigan 288 soat qisqartirilib, uch semestrda 105 soatga (ayrim yo'nalishlarda 90 soatga) tushirildi, mustaqil ta'lim uchun esa 255 soat (ayrim yo'nalishlarda 240 soat) ajratildi. Raqamlarni tahlilidan ma'lum bo'ladiki talabanning oladigan bilimlarning taxminan 30 foizini dars jarayonida, 70 foizini esa mustaqil ta'limda olishiga to'g'ri keladi. Shularni e'tiborga olib, yoziladigan darslikda faqat auditoriyada o'tiladigan mavzularnigina emas, balki mustaqil ta'lim uchun ajratilgan mavzularni ham yoritishga to'g'ri keladi.

Yuqoridagilardan kelib chiqib, ushbu darslik namunaviy o'quv dasturida ma'ruza mashg'ulotlarda o'tishni rejalashtirilgan hamda talabalar mustaqil ta'limda o'zlashtirishi rejalashtirilgan mavzularni ham bayon etishga e'tibor qaratilgan. Darslikka sharqning buyuk mutafakkirlarining matematika rivojiga qo'shgan hissalari, uchinchi tartibli tenglamalarni yechishning Kardano formulasi, algebraning

asosiy teoremasi, ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish, aniq integralning geometrik, fizik masalalarni yechishga tatbiqlari, aniq integralni taqribiy hisoblash mavzulari bilan to'ldirilgan.

Darslikning birinchi jildi 7 ta bobdan iborat bo'lib, chiziqli algebra, tekislikda va fazoda analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi kabi bo'limlarni o'z ichiga oladi. Berilgan har bir nazariy ma'lumot misollar yechish bilan mustahkamlangan. Mavzu yakunida o'z-o'zini tekshirish uchun savollar keltirilgan.

Darslikni yozishda foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatida keltirilgan kitoblardan ijodiy foydalanilgan, ayrim mavzular esa muallifning fikri bo'yicha bayon etilgan.

Muallif darslik qo'lyozmasini o'qib, uning sifatini yanada oshirish borasidagi fikr va mulohazalari uchun Namangan muhandislik-qurilish instituti Oliy matematika kafedrasida professor-o'qituvchilariga va Namangan davlat universiteti professori M.M.Raxmatullayev hamda Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti professori A.S.Sharipovlarga o'z minnatdorligini bildiradi.

Darslikning kamchiliklarini bartaraf etishga oid takliflarni muallif mamnuniyat bilan qabul qiladi. Fikr-mulohaza va takliflar uchun quyidagi elektron manzilga murojaat qilishingiz mumkin: e-mail: yusupjonapakov@gmail.com.

Muallif.

I BOB. OLIY ALGEBRA ELEMENTLARI

Oliy o'quv yurtlarida oliy matematikani o'qitishdan maqsad talabalarni mutaxassisligi va iqtisod bo'yicha nazariy hamda amaliy masalalarni yechish uchun zarur bo'lgan matematikaviy apparat bilan tanishtirish, talabalarda matematikadan o'quv adabiyotlarini mustaqil o'rganish va undan foydalana bilish malakasini hosil qilish, mantiqiy fikrlashni o'stirish va matematikaviy madaniyatni umumiy saviyasini ko'tarish, amaliyotda uchraydigan masalalarni matematikaviy tomondan tekshirish malakasini hosil qilish va ularga muhandislik masalalarini matematikaviy tilda ifodalab, hal etishni o'rgatishdan iborat. Oliy matematika fanini o'rganish bilan talaba hisoblash texnikasi va uni dastur bilan ta'minlash, fizika, kimyo, chizmachilik, materiallar qarshiligi, iqtisod, nazariy mexanika va boshqa fanlarda uchraydigan masalalarining matematik algoritmini tuzish va uni yechishni o'rganadi.

1-§. Sharqning buyuk mutafakkirlarining matematika rivojiga qo'shgan hissasi

Qadimgi Sharq, xususan Markaziy Osiyo mamlakatlari mutafakkirlari matematika rivojiga ulkan hissa qo'shganlar, ulardan ayrimlari to'xtalib o'tamiz.

Al-Xorazmiy. (783-850) Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy Xorazmda tug'ilib, diniy maktab va madrasada ta'lim oladi. Bag'dodda "Bayt Al-Hikmat" ("Donishmandlar uyi") tashkil etib, o'z davrining ilg'or olimlarini to'plab, ularga rahbarlik qiladi. Xorazmiy "Hind hisobi" nomli risolasida 0,1...,9 dan iborat raqamlar sistemasini birinchi bor arab tilida bayon etadi va undan Yevropaga bu sistema o'tadi. U "Al-Jabr val-muqobala" asarida birinchi bo'lib chiziqli va kvadrat tenglamalarni ajratdi hamda ularni yechish usulini bayon etdi. Algebra so'zi "Al-Jabr" so'zining lotincha yozuvidan

olingan. Al-Xorazmiy birinchi bo'lib zij-matematik va astronomik jadvalning muallifidir.

Beruniy. (973-1048). Abu Rayhon Beruniy Muhammad ibn Ahmad o'rta asrning buyuk qomuschi olimidir. U o'zining "Geodeziya" asarida Qiyot shahrining geografik kengligini aniqlaganini yozadi. Beruniy "Hindiston tarixi" asarida yer shari meridiani 110,895 km ekanini yozadi. Bu esa hozirgi hisobdan (111,1km) kichik, ya'ni 205 m xato qilgan xolos. Uning "Qonuni Mas'udiy" asari astronomiyaga bag'ishlangan bo'lib, unda trigonometriya, sferik trigonometriyaga oid kashfiyotlarini yozadi. Jami matematikaga doir 22 ta, astronomiyaga doir 10 ta, mineralogiyaga, fizikaga doir 38 ta va hokazo asarlar muallifidir.

Ulug'bek. (1394-1449). Muhammad Tarag'ay-Ulug'bek, Shohruh Mirzo farzandi va Amir Temurning nabirasi bo'lib, buyuk olim va davlat arbobidir. Ulug'bekning asosiy asari "Ziji Ko'ragoniy" deb atalib, unda yil hisobi, to'rtta xonagacha aniqlikdagi trigonometrik jadval mavjud bo'lib, bunda sinus va kosinuslarning bir daqiqa oraliq bilan farqlanuvchi qiymatlari keltirilgan. Trigonometrik jadvallari 10 ta o'nli xona aniqligida hisoblangan va bu jadvallarda sinus va kosinusning qiymatlari bir daqiqa oraliq bilan tuzilgan.

Zijda Ulug'bek bir gradusni sinusini hisoblash uchun alohida risola yozgan. Astronomiyaga taalluqli ekvator og'ishi, osmon yoritgichlari koordinatasini aniqlash, yerning ixtiyoriy nuqtasining geografik kengligini aniqlash, yulduz va sayyoralar orasidagi masofani aniqlash masalalari bayon etilgan. Ulug'bek Oy va Quyosh tutilishlari kalendarini va 1018 yulduzning ro'yxatini hamda ularning joylashishini hisoblab chiqqan, 1437-yildagi teng kunlilik nuqtasiga nisbatan uzunligi kengligi berilgan. U 55 yoshida ilm-fan dushmanlari tomonidan qatl etirilgan.

Ahmad Farg'oniy. (797-865) Abul Abbos ibn Muhammad ibn Kasr Farg'oniy-buyuk astronom, matematik va geograf bo'lgan. Ahmad Farg'oniy, Muso Xorazmiy va boshqa olimlar bilan Bag'dodda "Bayt Al-Hikmat" da ishlab izlanishlar olib borgan. Uning "Astronomiyaga kirish" nomli asarida o'zigacha bo'lgan astronomlar ishlarini bayon qilib, kamchiliklarini tuzatib, 812 yildagi

quyosh tutilishini oldindan aytib bergan. Fargʻoniyning “Osmon harakatlari va astronomiya fani toʻplami haqida” kitobi boʻlib u arab tilidagi astronomiyaga taalluqli birinchi kitobdir. Unda astronomik asboblari yasash va undan foydalanish, eng zarur asboblardan biri boʻlgan quyosh soati bayon etilgan. Fargʻoniy “Asturlab yasash haqida” asarida sfera va uning turli holatdagi kesimlarining xossalari bayon etgan.

Umar Xayyom. (1048-1123). Gʻiyosiddin Abdulfatx Umar ibn Ibrohim al-Xayyom Noshipurda tugʻilib, Buxoro va Samarqand shaharlarida taʼlim olgan. Umar Xayyom “Al-Jabr val muqobala isbotlari haqida risola” kitobida son tushunchasini haqiqiy musbat songacha kengaytirdi, yaʼni kvadrat va kub tushunchalarini kiritdi va ayrim kub tenglama va ularni yechish usullarini bayon etdi. Umar Xayyom “Evklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar” kitobida Evklidning mashhur 5 postulatini teorema sifatida buyon etib, uni rivojlantiradi va geometriya rivojiga katta hissa qoʻshadi. U oʻzining “Zij malik shoxi” nomli asarida taklif etilgan kalendar 33 yildan 8 tasi kabisa yili boʻlib, yilning davomiyligi $365\frac{8}{33}$ sutkaga teng, bu kalendarining xatoligi yiliga 19 sekundni tashkil etadi.

Gʻiyosiddin Koshiy. (XIV-XV asr). Jamshid ibn Masʼud ibn Mahmud Gʻiyosiddin Al-Koshiy Oʻrta Osiyoning atoqli matematik va astronomidir. Koshiy Ulugʻbek astronomiya maktabi qoshidagi madrasada astronomiya va matematika fanlaridan dars bergan. U “Hisob kaliti”, “Aylana haqida risola”, “Vatar va sinus haqida risola” nomli asarlar muallifidir. Uning matematikadagi yangiligi n-darajali ildiz chiqarish amali boʻlgan. Al-Koshiy aylanaga doir asarida $\pi=3,14159265$ ni hisoblagan va Sin3 orqali Sin1 ni topishni keltirgan. U $x^3+q=px$ tenglamaning ildizlarini iteratsiya usulida (ketma-ket yaqinlashish) topishni bayon qilgan. Al-Koshiy oʻzining “Arifmetika kaliti” asarida birinchi boʻlib oʻnli kasr kashf etdi va ular ustida amallarni bajarish qoidalarini koʻrsatib berdi va manfiy son tushunchasini kiritdi.

Forobiy. (873-950) Abu Nasr Muhammad ibn Uslugʻ Tarxon, hozirgi Qozogʻiston Respublikasining Chimkent viloyatining Aris

shahrida tug'ilgan. Dastlabki ta'limni o'z yurtida, keyinchalik Shosh (Toshkent), Buxoro va Samarqandda madrasada ta'lim oladi. Keyinchalik o'sha paytdagi sharqning ilm-fan markazi bo'lgan Bag'dodda ilmiy faoliyatini davom ettiradi. Forobiy o'rta asr fanlarining turli sohalariga doir 160 ga yaqin asar yozgan. U "Ilmning kelib chiqishi va tasnifi" nomli asarida o'rta asrlarda mavjud bo'lgan 30 dan ortiq fanning ta'rifini berdi va ularning har birining tutgan o'rni haqida gapiradi. Farobiy matematikaga buyumlarning miqdor va fazoviy nisbatlarini o'rganuvchi fan deb ta'rif beradi. Son haqidagi fan – mavjud narsalarning bir qismini boshqa bir qismiga ko'paytirish, bo'lish, qo'shish va ayirish, ildizning mavjud qismlarini topish va h.k. haqidagi fan deb ta'riflaydi. Farobiy "Tatbiqlar kitobi" da asosiy trigonometrik chiziqlar, ularni hosil qilish va shu chiziqlar bilan bog'liq trigonometrik jadvallarni tuzish qoidalarini beradi. U "Geometrik figuralarning tabiiy nozik sirlari va aqliy mohir usullari kitobi" da esa turli geometrik figuralar- doira, uchburchak, to'rtburchak kvadrat, sferalarning yasash usullarini bayon qilgan.

Ibn Sino. (980-1037) Abu Ali ibn Sino Buxoro viloyati Vobkent tumani Lag'laqa qishlog'ida tavallud topgan. Ibn Sino o'n yasharlighida algebra, geometriya va hatto falsafani ham o'rgandi, hamma yulduz turkumlarining qanday atalishini bilar va aniq ko'rsatib bera olar edi. Ibn Sino meditsinadagi ulkan tajribasi va falsafa, algebra, astronomiya, kimyo hamda fanning boshqa sohalaridagi beqiyos bilimini "Shifo kitobi", "Tib qonunlari", "Bilimlar kitobi"da bayon etgan. Ibn Sino asarlarining hammasi 280 dan oshadi. U o'zining "Shifo kitobi" ning arifmetikaga doir qismida natural sonlar va ularning xossalari yoritadi. Ibn Sino natural sonlar ustida amallar bajarilishini 9 yordamida tekshiradi, ya'ni u sonlarni to'qqiz moduliga ko'ra taqqoslaydi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Oliy matematika fanini oliy o'quv yurtlarida o'rganishdan maqsad nima?
2. Sharqning buyuk mutafakkirlaridan kimlarni bilasiz?
3. Muso Xorazmiy matematika rivojiga qanday hissa qo'shgan?

4. Abu Rayhon Beruniy matematika rivojiga qanday hissa qo'shgan?

5. Muhammad Tarag'ay-Ulug'bek matematika rivojiga qanday hissa qo'shgan?

6. Ahmad Farg'oniy matematika rivojiga qanday hissa qo'shgan?

2-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari

1. Ikkinchi tartibli determinantlar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ifxla ikkinchi tartibli determinant, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ayirma esa uning son qiymati deyiladi.

Determinantni tashkil qiluvchi sonlar uning elementlari deb ataladi. Ikkinchi tartibli determinant ikkita satr va ikkita ustunga ega. Birinchi indeks satrining, ikkinchi indeks ustunining tartibini bildiradi.

a_{11}, a_{12} - birinchi satr, a_{21}, a_{22} - ikkinchi satr elementlari,

a_{11}, a_{21} - birinchi ustun, a_{12}, a_{22} - ikkinchi ustun elementlari,

a_{11}, a_{22} - bosh diagonal elementlari,

a_{21}, a_{12} - yordamchi diagonal elementlari deb ataladi.

Demak, ikkinchi tartibli determinantning son qiymati bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayirmasiga teng ekan.

1-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

Yechish: Hisoblash formulasiga asosan:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 3(-2) = -4 + 6 = 2$$

2-misol.

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$$

tenglama yeching.

Yechish: Hisoblash formulasiga asosan:

$$-3x - 6 = 8 \Rightarrow -3x = 14 \Rightarrow x = -\frac{14}{3} = -4\frac{2}{3}.$$

2. Uchinchi tartibli determinant

Ta'rif bo'yicha quyidagicha

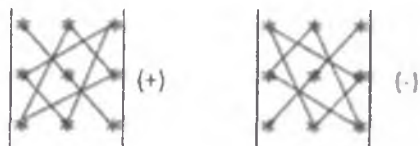
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

belgilanadigan va son qiymati

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1)$$

ga teng bo'lgan ifodaga 3-tartibli determinant deb aytiladi. Uchinchi tartibli determinantlar uchun satr, ustun, bosh va yordamchi diagonal tushunchalari yuqoridagi kabi kiritiladi.

(1) tenglikning o'ng tomonida qaysi ko'paytmalar «+», qaysilari «-» ishora bilan olinishini eslab qolish uchun quyidagi uchburchak qoidasidan foydalanish qulaydir:



Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrius usulini ham keltirib o'tamiz.

(+) (+) (+)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(-) (-) (-)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Bu usulda uchinchi tartibli determinant jadvali yoniga 1- va 2-ustunlar takroriy yoziladi, 1- asosiy diagonalga parallel uchta diagonal elementlarni o'zaro ko'paytirib, ularni yig'indisi olinadi. 2-yordamchi diagonal va unga parallel uchta diagonal elementlari ko'paytirilib, ularning ayirmalari olinadi. Natijada (1) formula hosil bo'ladi.

3-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-2) =$$

$$= -2 - 6 + 0 - 12 + 5 + 0 = -20 + 5 = -15.$$

3. Determinantning xossalari

Determinantning xossalari ularning tartibiga bog'liq bo'lmagani uchun, xossalarni asosan uchinchi tartibli determinantlar uchun keltiramiz.

1⁰. Determinantning mos satrlari va ustunlari o'rinlari almashtirilganda uning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaning isboti (1) formulaga asosan kelib chiqadi.

2⁰. Agar determinantning ikki satr (ustun) elementlari o'zaro almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ishorasi esa qarama-qarshisiga almashadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Bu xossa isboti bevosita hisoblashdan kelib chiqadi.

3⁰. Agar determinant ikkita bir xil elementli satrlarga (ustunlarga) ega bo'lsa, u nolga teng.

Isbot. Ikki parallel bir xil elementli satrlar (ustunlar) o'zaro almashtirilsa, 2⁰- xossaga asosan qiymat o'zgarishsiz qolib, ishora o'zgaradi. Demak, $\Delta = -\Delta$, $2\Delta = 0$ yoki $\Delta = 0$.

4-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 24 - 8 + 2 - 24 = 0.$$

4⁰. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini ixtiyoriy α songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaning isboti ham bevosita hisoblashlardan kelib chiqadi.

Natija. Biror satr (ustun) elementlardan umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

5⁰. Agar determinant nollardan iborat satrga (ustunga) ega bo'lsa, u nolga teng. Bu xossa 4⁰-xossadan $\alpha = 0$ da kelib chiqadi.

6⁰. Agar determinantning ikkita satr (ustun) elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, u nolga teng.

Isbot. Proporsional satrdan (ustundan) umumiy ko'paytuvchini 4⁰-xossaga ko'ra determinant tashqarisiga chiqarsak, hosil bo'lgan ikkita bir xil satrli (ustunli) determinant 3⁰-xossaga asosan nolga teng.

7⁰. Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi ikkita qo'shiluvchining yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda bu determinant (quyidagi ko'rinishdagi) ikkita determinantlar yig'indisidan iborat bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossani bevosita hisoblash orqali isbotlanadi.

8⁰. Agar biror satr (ustun) elementlarini istalgan $\lambda \neq 0$, umumiy ko'paytuvchiga ko'paytirib boshqa satrning (ustunning) mos elementlarga qo'shilsa, determinant qiymati o'zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaga ishonch hosil qilish uchun 7⁰-xossaga asosan o'ng tomoni ikki determinant yig'indisi ko'rinishida yozib, 4⁰-xossaga asosan λ ni determinantdan chiqarsak, 3⁰-xossaga ko'ra ikkinchi determinant nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrius usulini aytib bering.
3. Determinant xossalarini aytib bering.

3-§. Yuqori tartibli determinantlar. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli

Avvalgi mavzuda 2, 3-tartibli determinantlar bilan tanishdik, endi n - tartibli ($n \geq 4$) determinantlar va ularni hisoblashni o'rgatamiz. Ishni osonlashtirish maqsadida yordamchi tushunchalar kiritamiz.

1. Minor va algebraik to'ldiruvchi

Determinantning biror elementining **minori** deb, determinantning shu element turgan satrini va ustunini o'chirishdan qolgan elementlardan tuzilgan determinantga aytiladi. Soddalik uchun quyidagi uchinchi tartibli determinantni olaylik.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinant a_{ik} elementining minori M_{ik} , ($i, k = 1, 2, 3$) bilan belgilanadi. Masalan, a_{12} element minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a_{33} elementning minori esa,

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinant a_j elementining **algebraik to'ldiruvchisi** deb $A_j = (-1)^{i+j} M_{ij}$ songa aytiladi. Masalan, a_{11} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi, a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi esa

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Bu kiritilgan tushunchalar yordamida quyidagi xossani isbotlash mumkin (xossalar tartibini saqlab qolamiz).

9°. Determinantning biror satrdagi (ustundagi) barcha elementlarni mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Bu xossani birinchi satr uchun keltiramiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantning birinchi satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Bundan

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

Demak,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (2)$$

Xuddi shu kabi ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari orqali (2) formula kabi natijani hosil qilish mumkin. (2) formula determinantning birinchi satr elementlari orqali yoyilmasi deyiladi.

1-misol. Ushbu determinant hisoblansin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Yechish: Birinchi satr elementlari orasida nol bo'lgani uchun birinchi satr elementlari bo'yicha yoyish qulay, ya'ni

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

determinantning biror qatoridagi bitta elementidan tashqari barcha elementlari nolga teng bo'lganda, bu qator bo'yicha yoyilmadan foydalanib, natijani hisoblash ishini yanada osonlashtiradi.

2-misol.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

Yechish: 8-xossadan foydalanamiz, ya'ni birinchi ustunni o'zgarishsiz qoldirib, ikkinchi ustunga birinchi ustunni 3 ga ko'paytirib qo'shamiz, uchinchi ustunga birinchi ustunni (-2) ga ko'paytirib qo'shamiz, natijada

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & -9 \\ 3 & 11 & -10 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmadan foydalansak,

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 19 & -9 \\ 11 & -10 \end{vmatrix} = -190 + 99 = -91.$$

2. Yuqori tartibli determinantlar

To'rtinchi tartibli determinantni qaraymiz.

Determinantlarning yuqorida keltirilgan 9^o-xossasini qo'llab, 4-tartibli determinantni biror ustun yoki satr elementlari bo'yicha yoyilganda hosil bo'ladigan determinantlar 3-tartibli bo'ladi. 3-tartibli determinant tushunchasi esa bizga ma'lum. Shu jarayonni ketma-ket davom ettirib n-tartibli determinantni hisoblash tushunchasi kiritiladi. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi n -tartibli determinantlar uchun yuqorida aytilgan barcha xossalar, jumladan, determinantning biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish formulasi ham o'rinli bo'ladi.

Istalgan tartibli determinantni hisoblashda aynan algebraik to'ldiruvchilar yordamida satr yoki ustun bo'yicha yoyish usulidan foydalanish ancha qulay.

3-Misol. Determinant hisoblansin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish: Determinantni hisoblash uchun uni ikkinchi satrida ikkita 0 turganidan foydalanib, ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz. U holda

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = \\ &= -5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -5(12 + 60 + 3 - 90 + 3 + 8) + (-4 + 3 + 30 + 3 - 30 - 4) = 20 - 2 = 18 \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak, yuqori tartibli determinantni hisoblash, determinant tartibini ketma-ket pasaytirish yo'li bilan amalga oshiriladi.

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yechish

Ikkita x_1 va x_2 noma'lumli chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (4)$$

Systema ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - (4) sistemaning koeffitsiyentlari, b_1, b_2 - ozod hadlardir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

asosiy determinant,

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta} \quad (5)$$

Xuddi shuningdek, uchta x_1, x_2 va x_3 noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

systema uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu systema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

asosiy determinant,

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{a_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi, agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (6) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{a_3}}{\Delta} \quad (7)$$

(5) va (7) formulalar (4) va (6) tenglamalar sistemasini yechishning Kramer formulasi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, systema yagona yechimga ega bo'ladi. $\Delta = 0$ hamda $\Delta_{a_1}, \Delta_{a_2}, \Delta_{a_3}$ lardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistemaning yechimi



mavjud emas. $\Delta = 0$ va $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

4-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 15 = -14, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7,$$

u holda, Kramer formulasiga asosan,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1.$$

Demak, sistemaning yechimi $(2; -1)$.

5-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

sistemaning yeching.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Demak, berilgan sistemaning yechimi mavjud emas.

6-misol. Quyidagi sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

Yechish: Bu holda asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, ixtiyoriy $\left(t; \frac{1-2t}{3}\right)$ ko'rinishdagi ($t \in \mathbb{R}$) sonlar juftligi

sistemaning yechimi bo'ladi, ya'ni cheksiz ko'p yechim mavjud.

7-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

Systema yechilsin.

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20$$

U holda, Kramer formulasidan

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-10} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2.$$

Demak, (1;0;2) sistemaning yechimi bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Determinantning minori deb nimaga aytiladi?
2. Determinantning algebraik to'ldiruvchilarini topish ta'rifini ayting va hisoblash usulini ko'rsating.
3. Tenglamalar sistemasi Kramer usulida qanday yechiladi?
4. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda bir qiymatli yechimga ega?
5. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda yechim mavjud emas?
6. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi?

4-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Quyidagi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(8)

ko'rinishdagi jadval $(m \times n)$ -tartibli matritsa deyiladi. a_{ik} element xuddi determinantdagi kabi i -satr, k -ustunga joylashgan bo'ladi. Ba'zan, (8) yozuv, qisqalik uchun, $\|a_{ik}\|$, $(i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n})$ ko'rinishda yoki $A = \|a_{ik}\|$ ko'rinishda ham belgilanadi. Ravshanki, (8) matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat.

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan matritsa nol matritsa deyiladi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Xususiyl holda, $m = n$ bo'lganda,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

ko'rinishidagi matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (9) matritsaning bosh diagonal elementlari deyiladi. Agar (9) matritsada bosh diagonalda turgan elementlardan boshqa barcha elementlari nol bo'lsa, uni diagonal matritsa deyiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

(10) matritsada $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ bo'lsa, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matritsa deb ataladi.

(9) kvadrat matritsaning elementlaridan tashkil topgan determinant A matritsaning determinanti deyiladi va $\det(A)$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Shu o'rinda eslatib o'tamiz: matritsa sonlarning

tartibli jadvali, determinant esa elementlarning ma'lum kombi-
natsiyasidan hosil qilingan birgina sonidir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Agar $\det(A) = 0$ bo'lsa, bu holda A matritsa xos matritsa, $\det(A) \neq 0$ bo'lsa, A xosmas matritsa deyiladi. Kvadrat (9) matritsaning satr elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa transponirlangan matritsa deyiladi va A^T kabi belgilanadi. Determinantning 1° xossasiga asosan $\det(A) = \det(A^T)$

Ikkita

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

matritsalar berilgan bo'lib, A matritsaning har bir elementi B matritsaning mos elementiga teng, ya'ni $a_k = b_k$ bo'lsa, u holda A va B o'zaro teng matritsalar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi. Ta'rif bo'yicha ikkita (11) ko'rinishdagi $(n \times n)$ tartibli matritsalarining yig'indisi va ayirmasi mos ravishda $A \pm B$ kabi belgilanib,

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}$$

qoida bo'yicha hisoblanadi, ya'ni mos elementlari qo'shiladi yoki ayriladi. Matritsalarini qo'shish quyidagi xossalarga ega:

1°. $A + 0 = A$

$$2^{\circ}. A+B=B+A$$

A matritsani $\alpha \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, uning har bir elementini α songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi. Matritsani songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

$$3^{\circ}. \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

$$4^{\circ}. \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$5^{\circ}. (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

1-misol. Agar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

bo'lsa, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ matritsalar topilsin.

Yechish:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 4-2 & 1-1 \\ -1-1 & 0-1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A-3B &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4-0 & 8-6 & 2-3 \\ -2-3 & 0-3 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ikki matritsa ko'paytmasi tushunchasini kiritaylik.

Ta'rif. $(m \times n)$ tartibli A matritsaning $(n \times k)$ tartibli B matritsaga ko'paytmasi deb $(m \times k)$ tartibli shunday C matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matritsa i -satri elementlarini B matritsa j -ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (12)$$

Matritsalar ko'paytmasi $C = A \cdot B$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, ko'paytiriladigan matritsalar birinchisining ustunlar soni ikkinchisining satrlar soniga teng bo'lishi talab qilinadi.

2-misol. Matritsalar ko'paytmasi topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Yechish: $A \cdot B$ mavjud, chunki A matritsa ikkita ustundan B matritsa esa ikkita satrdan iborat.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot A$ ko'paytma esa mavjud emas, chunki B matritsada 2 ta ustun, A matritsada esa 3 ta satr mavjud.

Agar A va B matritsalar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa $A \cdot B$ va $B \cdot A$ ni hisoblash mumkin.

3-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

bo'lsa, $A \cdot B$ va $B \cdot A$ topilsin.

Yechish:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 & -2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 \\ 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & -5 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -24 \\ 22 & -9 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 & -4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & -2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -15 \\ 34 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu misoldan ko'rinadiki, umuman olganda, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Matritsalar ni ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad 2^\circ. (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$3^\circ. (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda(A \cdot B) \quad 4^\circ. A \cdot E = E \cdot A = A$$

$$5^\circ. A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deganda nimani tushunasiz?
2. Matritsalarining qanday turlari mavjud?

3. Matritsalar ustida amallar bajarishda nimalarga e'tibor berish kerak?

4. Matritsalar ustida amallarning qanday xossalari bilasiz?

5-§. Teskari matritsa, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsa usuli

Ushbu kvadrat matritsani qaraylik:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta'rif. Agar $A \cdot B = B \cdot A = E$ bo'lsa, B matritsa A matritsaga teskari matritsa deb ataladi. A matritsaga teskari matritsani A^{-1} kabi belgilash qabul qilingan. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1. $\det(A)$ hisoblanadi. (Bu o'rinda $\Delta = \det(A) \neq 0$ bo'lishi kerakligini eslatib o'tamiz, aks holda teskari matritsa mavjud bo'lmaydi).

2. A matritsa determinantining har bir a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) elementi algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} ni hisoblaymiz va A^{-1} matritsani quyidagicha tuzamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Satr bo'yicha hosil qilingan algebraik to'ldiruvchilarni mos ustun elementi qilib yozilishiga e'tibor qaratish kerak. Ishonch hosil qilish uchun $A \cdot A^{-1} = E$ ekanini tekshirib ko'rish yetarli.

1-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 - 2 = -10 \neq 0.$$

Demak, teskari matritsa A^{-1} mavjud. Matritsa determinantining barcha elementlari algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -12, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Topilganlarni (13) ga qo'ysak,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -12 & 2 & -6 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tekshirish.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -12 & 2 & -6 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} 4-12-2 & 0-4+4 & -8+0+8 \\ -12+6+6 & 0+2-12 & 24+0-24 \\ 7-6-1 & 0-2+2 & -14+0+4 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{10} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demak, A^{-1} matritsa, A matritsaga teskari matritsa ekanligi kelib chiqdi.

Bizga quyidagi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (14)$$

Tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari a_{ij} , ($i, j=1,2,3$), x_1, x_2, x_3 noma'lumlar va b_i , ($i=1,2,3$) ozod hadlardan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

matritsalarini tuzamiz.

Matritsalarini ko'paytirish amaliga asosan, (14) sistemani, quyidagicha yozish mumkin

$$A \cdot X = B. \quad (15)$$

Bu tenglamalar sistemasining matritsalar ko'rinishidagi yozilishidir. Aytaylik A matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. (15) tenglikning har ikki tomonini A^{-1} ga chapdan ko'paytirib

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

ni hosil qilamiz.

$A^{-1} \cdot A = E$ va $E \cdot X = X$ ekanini e'tiborga olsak,

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (16)$$

hosil bo'ladi.

Bu (15) tenglamalar sistemasini teskari matritsa yordamida yechish formulasidir.

2-misol. Kramer usuli bilan yechilgan 7-misoldagi tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechilsin.

Yechish: Tegishli matritsalarini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \det(A) = -10 \neq 0,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

(13) formulaga asosan

$$A^{-1} = -0,1 \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

teskari matritsa topamiz. Bundan (16) formulaga binoan

$$X = A^{-1} \cdot B = -0,1 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -0,1 \cdot \begin{pmatrix} -12 - 1 + 3 \\ 20 - 5 - 15 \\ 4 - 3 - 21 \end{pmatrix} = -0,1 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Javob (1; 0; 2)

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday matritsa berilgan matritsaning teskari matritsasi bo'ladi?
2. Teskari matritsani qanday topiladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko'rinishda qanday yoziladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa usulida qanday yechiladi?

6-§. Matritsaning rangi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

Biror $(m \times n)$ -tartibli $A = \|a_{mn}\|$ matritsa berilgan bo'lsin. A matritsaning ixtiyoriy k ta satrini va ixtiyoriy k ta ustunini olib ($k \leq \min(m, n)$), $(k \times k)$ - tartibli kvadrat matritsa tuzamiz. Bu kvadrat matritsaning determinanti A matritsaning k - tartibli **minori** deyiladi.

1-misol. Quyidagi 4×5 -tartibli

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsani qaraylik. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -40, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

determinantlar qaralayotgan matritsaning mos ravishda ikkinchi, uchinchi hamda to'rtinchi tartibli minorlaridir.

A matritsa yordamida hosil qilish mumkin bo'lgan barcha minorlar orasida noldan farqli bo'lgan eng yuqori tartibli minorni topish muhimdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar A matritsaning barcha k -tartibli ($k = \min(m, n)$) minorlari nolga teng bo'lsa, undan yuqori tartibli bo'lgan barcha minorlari ham nolga teng bo'ladi.

Ta'rif. A matritsaning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibi uning **rangi** deyiladi va $\text{rang}A$ kabi belgilanadi.

2-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini toping.

Yechish:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Demak, A matritsaning noldan farqli minorlarining eng katta tartibi 2 ga teng ekan. Bundan $\text{rang}A = 2$. Ta'rif bo'yicha 0 matritsaning rangi 0 deb olinadi.

Matritsalarining rangini topish ko'p hollarda murakkab bo'ladi. Chunki unda bir qancha turli tartibdagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi.

Quyidagi elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi:

- 1) ikki qator elementlarini o'zaro almashtirish;
- 2) biror qatorni o'zgarmas songa ko'paytirish;
- 3) biror qator o'zgarmas songa ko'paytirib boshqa qatorga qo'shish.

Bu tasdiqlar determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

Agar $(m \times n)$ - tartibli A matritsaning asosiy diagonalida joylashgan $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, ($0 \leq s \leq \min(m, n)$) elementlarining har biri noldan farqli bo'lib, qolgan barcha elementlari nolga teng bo'lsa,

u holdi A diagonal ko'rinishdagi matritsa deyiladi. Ravshanki, bunday diagonal ko'rinishdagi matritsaning rangi s ga teng bo'ladi. Aynan shu va yuqorida aytilgan elementar almashtirishlardan foydalanib, matritsani rangini topishning ikkinchi usulini bayon qilamiz.

Bizga quyidagi A matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

u uning rangini topish talab etilsin. Bu matritsaning rangini yuqorida aytilgan elementar almashtirishlar yordamida diagonal ko'rinishli matritsaga keltirib topamiz.

A matritsaning hech bo'lmaganda bitta elementi noldan farqli bo'lsin. Bu elementning satrlari va ustunlarini o'zaro almashtirish yordamida birinchi satr birinchi ustunga chiqaramiz va birinchi satr elementlarini shu elementga bo'lib, ushbu

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \quad (17)$$

matritsani hosil qilamiz. (17) matritsaning birinchi ustunini $-a'_{12}$ ga ko'paytirib, ikkinchi ustunga qo'shsak, so'ng $-a'_{13}$ ga ko'paytirib uchinchi ustunga qo'shsak va h. k. birinchi ustunni $-a'_{1n}$ ga ko'paytirib n -ustunga qo'shsak, natijada hosil bo'lgan matritsaning birinchi satrdagi elementi $a'_{11} = 1$, qolgan elementlari esa nollar bo'lib qoladi.

Xuddi shunga o'xshash (17) matritsaning birinchi ustundagi $a'_{11} = 1$ dan boshqa elementlari nolga aylantiriladi. Natijada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo'lamiz. Bundan $\text{rang} A = \text{rang} A_1$ kelib chiqadi.