

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ



“ЎЗБЕКИСТОН”

517
0-49

Т. ЖУРАЕВ, А. САЪДУЛЛАЕВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
Х. МАНСУРОВ, А. ВОРИСОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

2

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун
дарслик сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»

лий
ма-
унк-
нал
алар

рни
кни

аст-
ўз-
ниш
тлар

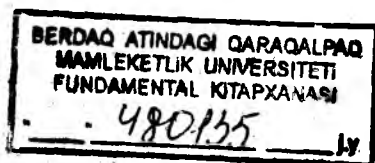
муна
атта.
сида

бир
тади.
рини
аброк

янада
истон
. Али-
дилар
и учун

22.11
0 46

Таъризчилар: ЎзР ФА мухбир аъзоси, физика-математика
фанлари доктори, проф. Ш. А. АЛИМОВ
ЎзР ФА мухбир аъзоси, физика-математика
фанлари доктори, проф. Н. Ю. САТИМОВ
Мухаррир М. Саъдуллаев



- Математик анализ
- Оддий дифференциал тенгламалар

О 46 Олий математика асослари: Олий ўқув юрти талабалари
учун дарслик, қ. 2. Т. Жураев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов
ва бошқ. — Т.: Ўзбекистон, 1999—303 б.
1. Жураев Т. ва бошқ.

ISBN 5-640-01777-5

Мазкур китоб университетнинг қатор факультетлари, шунингдек техника
олий ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган.

Китобнинг бу қисмида математик анализ курсининг аниқмас ва аниқ
интеграллар, қўп ўзгарувчи функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги,
дифференциал ҳисоби, сонли ва функционал қаторлар мавзулари ҳамда
дифференциал тенгламалар курси баёни ўрин олган.

22.11.я73

№ 153—96
Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

1602000000 — 51
О ————— 99
M351(04)96

СУЗ БОШИ

Ушбу китоб «Ўзбекистон» нашриётида чоп этилган «Олий математика асослари», 1-томининг давоми бўлиб, олий математиканинг аниқмас ва аниқ интеграллар, кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби, сонли ва функционал қаторлар мавзуларини ҳамда оддий дифференциал тенгламалар курсини ўз ичига олади.

Бу китобни ёзишда ҳам асосий тушунчалар ҳамда тасдиқларни содда, равоён баён этилишига, айни пайтда математик қатъийликни сақлашга эътиборни қаратдик.

Кўп ўзгарувчили функцияларга доир бобларни ёзишда, даст-аввал икки ўзгарувчили функциялар келтирилди. Унда бир ўзгарувчили функциялардаги мос маълумотлардан фойдаланиш билан бир қаторда улар орасидаги ўхшашлик ва тафовутлар кўрсатила борилди.

Маълумки, назарий маълумотларни ўзлаштиришда намуна сифатида келтириладиган мисол ва масалаларнинг аҳамияти катта. Айниқса бу ҳол оддий дифференциал тенгламалар назариясида яққол кўринади.

Ўқувчи дифференциал тенгламалар курси баёнида ҳар бир мавзу мисол ва масалалар билан таъминланганлигини кузатади. Мисол ва масалаларни келтиришда ҳамда уларни ечиш усулларини кўрсатишда, аввал содда, кўникма ҳосил қилгач мураккаброк мисолларга ўтиш принципига амал қилдик.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини ўқиб унинг сифатини янада яхшилаш борасидаги фикр ва мулоҳазалари учун Ўзбекистон Фанлар Академиясининг мухбир аъзолари, профессорлар Ш. О. Алимов, Н. Ю. Сатимовларга ўз миннатдорчиликларини изҳор қиладилар ва китобнинг камчиликларини бартараф этишга оид таклифлари учун китобхонларга аввалдан ташаккур билдирадилар.

1-БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Кўп ҳолларда функциянинг ҳосиласига кўра шу функцияни топиш масаласини ҳал қилиш лозим бўлади. Бу эса функцияларни интеграллаш тушунчасига олиб келади.

Ушбу бобда функциянинг аниқмас интегралли, унинг хоссалари, интеграллаш усуллари ҳамда интегралларни ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

1-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

✓ $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар (a, b) интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласи берилган $f(x)$ га тенг бўлса, яъни

$$F'(x) = f(x)$$

бўлса, y ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.)

Мисоллар. 1. $f(x) = x^2$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ даги бошланғич функцияси

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

бўлади, чунки

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

2. $f(x) = \cos x$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x) = \sin x$ бўлади, чунки

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x).$$

3. $f(x) = \sqrt{1-x}$ функциянинг $[-1, 1]$ ораликдаги бошланғич функцияси

$$F(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3}$$

бўлади, чунки

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(-\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3}\right)' = -\frac{2}{3} \left[(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]' = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (1-x)^{\frac{3}{2}-1} \cdot (-1) = \sqrt{1-x} = f(x). \end{aligned}$$

Агар $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у холда $F(x) + C$ ҳам $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, бунда C — ўзгармас сон. Ҳақиқатан ҳам,

$$F'(x) = f(x)$$

бўлишидан фойдаланиб

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

$F(x) + C$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканини топамиз.

Лемма. Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, бу $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади.

Исбот. $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x),$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Бу тенгликлардан

$$F'(x) = \Phi'(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

Ердамчи

$$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) \quad (1)$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ да унинг ҳосиласи

$$\varphi'(x) = [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = 0 \quad (2)$$

бўлади.

(a, b) интервалда ихтиёрий x ва тайинланган x_0 нуқталарни олиб, $[x_0, x]$ ёки $[x, x_0]$, сегментни қараймиз. Бу $\varphi(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига кўра

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c) (x - x_0) \quad (x_0 < c < x)$$

бўлади. (2) тенгликдан фойдаланиб

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0,$$

яъни

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

бўлишини топамиз. Энди $\varphi(x_0) = C$ деб оламиз. Унда (1) тенгликка биноан $\Phi(x) - F(x) = C$ бўлади. Бундан

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса леммани исботлайди.

Юқорида айтилганлардан:

1) (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўп бўлиши,

2) $f(x)$ функциянинг ихтиёрий иккита бошланғич функцияси бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилиши келиб чиқади.

Демак, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг (a, b) интервалдаги бошланғич функцияси бўлса, $F(x) + C$ (бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон) кўринишидаги ҳар бир функция ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлиб, улар $\{F(x) + C\}$ тўпламини ташкил этади.

2-таъриф. $f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги барча бошланғич функцияларидан иборат тўплам унинг аниқмас интеграл дейилади ва $\int f(x) dx$ каби белгиланиб,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, (C = \text{const})$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\int$ — интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x) dx$ эса интеграл остидаги ифода дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int x^{10} dx$$

аниқмас интегрални топинг. Бу аниқмас интеграл шундай функция (аниқроғи шундай функциялар тўплами) бу функциянинг ҳосиласи (тўпламдаги ҳар бир функциянинг ҳосиласи) интеграл остидаги функция x^{10} га тенг. Равшанки, агар

$$F(x) = \frac{x^{11}}{11}$$

бўлса, унда

$$F'(x) = \left(\frac{x^{11}}{11} \right)' = \frac{11x^{10}}{11} = x^{10}$$

бўлади. Демак, аниқмас интеграл таърифига кўра

$$\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C, (C = \text{const}).$$

2. Ушбу

$$\int e^{3x} dx$$

аниқмас интегрални топинг. Қуйидаги $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$ функция учун

$F'(x) = \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right)' = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}$ бўлади. Демак,

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Кейинчалик, аниқмас интеграл ибораси ўрнига, қискача, интеграл сўзини ҳам ишлатамиз.

Қўпинча $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўладиган (a, b) интервал кўрсатилмайди. Бундай ҳолда оралик сифатида $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси тушунилади.

Одатда, функциянинг ҳосиласига кўра унинг ўзини топиш, яъни функциянинг аниқмас интегрални топиш *интеграллаш* дейилади.

Демак, функцияларни интеграллаш амали дифференциаллаш амалига нисбатан тескари амал экан.

2-§. АНИКМАС ИНТЕГРАЛНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Қуйида аникмас интегралнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. $f(x)$ функциянинг аникмас интеграли $\int f(x) dx$ нинг ҳосиласи $f(x)$ га, дифференциали эса $f(x) dx$ га тенг:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

Исбот. Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x).$$

У ҳолда

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C = \text{const})$$

бўлади. Шунинг эътиборга олиб топамиз:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

$$d \left(\int f(x) dx \right) = d[F(x) + C] = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

Бу эса 1°-хоссани исботлайди.

2°. Функция дифференциалнинг аникмас интеграли шу функция билан ўзгармас сон йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Исбот. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x) = f(x)$. У ҳолда.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (3)$$

бўлади. Агар

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = \int dF(x) \quad (4)$$

эканини эътиборга олсак, (3) ва (4) тенглаклардан

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

бўлиши келиб чиқади.

3°. Ўзгармас сонни интеграл белгиси остидан чиқариш мумкин:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k = \text{ўзгармас сон, } k \neq 0).$$

Исбот. Фараз қилайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x) = f(x)$. Унда

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлиб,

$$k \int f(x) dx = kF(x) + C_1 \quad (C_1 = kC) \quad (5)$$

бўлади. Равшанки, $kF(x)$ функция $kf(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x).$$

Демак,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1. \quad (6)$$

Натижада, (5) ва (6) муносабатларга кўра

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

бўлишини топамиз.

4°. Икки функция алгебраик йиғиндисининг аниқмас нитегралли шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Исбот. Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг, $G(x)$ функция эса $g(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$$

Унда

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2$$

бўлиб,

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) \pm G(x)] + (C_1 \pm C_2) \quad (7)$$

бўлади.

Равшанки, $F(x) \pm G(x)$ функция $f(x) \pm g(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Демак,

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x) + C. \quad (8)$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$\int (3x^2 + 2e^{3x})'dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интегралнинг 3°- ва 4°- хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 2e^{3x})'dx &= \int 3x^2dx + \int 2e^{3x}dx = \\ &= 3 \int x^2dx + 2 \int e^{3x}dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot e^{3x} \cdot \frac{1}{3} + C = x^3 + \frac{2}{3}e^{3x} + C. \end{aligned}$$

3-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ.

МИСОЛЛАР.

Ушбу параграфда кейинчалик кўп фойдаланиладиган интегралларни келтирамиз.

$$1^\circ. \int 0 \cdot dx = C, \quad C - \text{const};$$

$$2^\circ. \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$$

- 3⁰. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$
 4⁰. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$
 5⁰. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
 6⁰. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C;$
 7⁰. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1);$
 8⁰. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
 9⁰. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
 10⁰. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
 11⁰. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
 12⁰. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
 13⁰. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$
 14⁰. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
 15⁰. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$

Бу интеграллардан бирининг, масалан

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (9)$$

нинг тўғрилигини кўрсатамиз. Бунинг учун тенгликнинг ўнг томонидаги функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right)' &= \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{x^2+a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}. \end{aligned}$$

Натижада (9) тенгликнинг чап томонидаги интеграл остидаги функция ҳосил бўлди. Демак, (9) тенглик ўринли.

Юқорида келтирилган 1⁰ — 15⁰ формулалар *жадвал интеграллари* дейилади.

Аниқмас интегралнинг $3^0 - 4^0$ - хоссаларидан ҳамда интеграллар жадвалидан фойдаланиб, интегралларни бевосита ҳисоблаш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int (1 + \sin x + 2^x) dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$\begin{aligned} \int (1 + \sin x + 2^x) dx &= \int 1 \cdot dx + \int \sin x dx + \\ &+ \int 2^x dx = x - \cos x + \frac{2^x}{\ln 2} + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

интегрални ҳисобланг. Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\ &= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} \left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + 1 \right) + C. \end{aligned}$$

3. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги

$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

функцияни $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ айниятдан фойдаланиб

$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

4. Ушбу

$$\int x^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни

$$x^{\frac{n}{n}} = x \cdot x^{\frac{1}{n}} = x^{1 + \frac{1}{n}} = x^{\frac{n+1}{n}}$$

кўринишда ёзиб, сунг 3⁰- формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int x^{\frac{n}{n}} \sqrt[n]{x} dx &= \int x^{\frac{n+1}{n}} dx = \frac{x^{\frac{n+1}{n} + 1}}{\frac{n+1}{n} + 1} + C = \\ &= \frac{n}{2n+1} x^{\frac{2n+1}{n}} + C = \frac{n}{2n+1} x^2 \sqrt[n]{x} + C. \end{aligned}$$

4-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

Берилган функциянинг бошланғич функциясини топишда, яъни аниқмас интегрални ҳисоблашда турли усуллар мавжуд. Қуйида ўзгарувчини алмаштириш ҳамда бўлаклаб интеграллаш усуллари келтирамиз.

1⁰. Ўзгарувчини алмаштириш усули: $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x). \quad (10)$$

Унда

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

бўлади. Энди x ўзгарувчи

$$x = \varphi(t)$$

муносабат ёрдамида t ўзгарувчи билан боғланган бўлсин, бунда $\varphi(t)$ узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлган функция.

Лемма. Ушбу

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

муносабат ўринли.

Исбот. Бу тенгликнинг ўнг томонида турган $F(\varphi(t)) + C$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$(F(\varphi(t)) + C)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

(10) тенгликка кўра

$$F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Демак, $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ нинг бошланғич функцияси бўлади:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Лемма исбот бўлди.

Леммага кўра $\int f(x) dx$ интегрални ҳисоблаш $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ интегрални ҳисоблашга келар экан:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (11)$$

(11) формула аниқмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int (2+3x)^{100} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда ўзгарувчи x ни $2+3x=t$ тарзида алмаштирамиз. Бунда $x=\frac{t-2}{3}$ бўлиб, $dx=\frac{1}{3}dt$ бўлади. Натижада:

$$\begin{aligned} \int (2+3x)^{100} dx &= \int t^{100} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{100} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{1}{303} (2+3x)^{101} + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} \quad (a>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x=\sqrt{a}t$ алмаштириш бажариб, уни ҳисоблаймиз. Равшанки, $dx=\sqrt{a}dt$. Натижада

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} &= \int \frac{\sqrt{a} dt}{\sqrt{a-(\sqrt{a}t)^2}} = \int \frac{\sqrt{a} dt}{\sqrt{a} \sqrt{1-t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C. \end{aligned}$$

3. Ушбу

$$\int e^{\arctg x} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\arctg x=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$d(\arctg x) = dt \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

бўлиб, натижада

$$\int e^{\arctg x} \frac{1}{1+x^2} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\arctg x} + C.$$

4. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ эканини эътиборга олиб, берилган интегрални

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Сўнг $\operatorname{tg} x = t$ алмаштириш бажарамиз.

Натижада $\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int (1 + t^2) dt = \int dt + \int t^2 dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c.$$

2°. Бўлаклар интеграллаш усули.

Фараз қилайлик, $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар берилган бўлиб, улар узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Икки функция кўпайтмасининг дифференциалини топиш қондасига кўра

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

бўлади. Кейинги тенгликдан

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

бўлиши келиб чиқади. Равшанки,

$$\int u \cdot dv = \int [d(u \cdot v) - v \cdot du].$$

Аникмас интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int u \cdot dv &= \int [d(u \cdot v) - v \cdot du] = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du = \\ &= u \cdot v - \int v \cdot du. \end{aligned}$$

Натижада ушбу

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (12)$$

формулага келамиз. (12) формула *бўлаклар интеграллаш формуласи* дейилади.

Бўлаклар интеграллаш формуласи $\int u dv$ интегрални ҳисоблашни $\int v du$ интегрални ҳисоблашга келтиради. Бу формуладан фойдаланиш учун интеграл остидаги ифода u ҳамда dv лар кўпайтмаси кўринишида ёзиб олинади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int x e^x dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода xe^x ни $u=x$, $dv=e^x dx$ лар қўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Э с л а т м а. Агар $\int xe^x dx$ интегралда $u=e^x$, $dv=xdx$ деб олинадиган бўлса, унда $du=e^x dx$, $v=\frac{x^2}{2}$ бўлиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

бўлади. Бундан кўринадики, қаралаётган интегрални ҳисоблаш ундан мураккаброк $\int x^2 e^x dx$ интегрални ҳисоблашга қелади.

Демак, бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланишда u ва dv ларни танлаш муҳимдир.

2. Ушбу

$$\int x \sin x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу ҳолда $u=x$, $dv=\sin x dx$ деб оламиз. Натижада

$$du=dx, v=\int \sin x dx = -\cos x$$

бўлиб, (12) формулага кўра:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

3. Ушбу

$$\int x^2 \ln x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $u=\ln x$, $dv=x^2 dx$ деб оламиз. У ҳолда

$du=\frac{1}{x} dx$, $v=\frac{x^3}{3}$ бўлиб, (12) формулага кўра

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

4. Ушбу

$$\int \arctg x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Агар $u=\arctg x$, $dv=dx$ дейилса, унда $du=\frac{1}{1+x^2} dx$, $v=x$ бўлиб,

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

бўлади. $= x \cdot \arctg x - \int \frac{d(1+x^2)}{2(1+x^2)} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

5. Ушбу

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (a \neq 0),$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало $n=1$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a} dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Энди берилган $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ интегралда $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$ деб оламыз. Унда

$$\begin{aligned} du &= d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) = d[(x^2+a^2)^{-n}] = \\ &= -n(x^2+a^2)^{-n-1} \cdot 2x \cdot dx = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx, \\ v &= x \end{aligned}$$

бўлиб, (12) формулага қўра

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \quad (13)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қуйидагича ёзиб оламыз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx - \\ &- a^2 \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = J_n - a^2 J_{n+1}. \end{aligned}$$

Унда (13) тенглик ушбу

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$$

тенгликка келади. Бу тенгликдан эса

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_n \quad (14)$$

келиб чиқади. (14) тенглик рекуррент формула дейилади. Маълумки, $n=1$ да

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

(14) формула ва J_1 нинг бу кийматидан, фойдаланиб J_2 топилади.
 (14) формула ва J_2 нинг кийматидан фойдаланиб J_3 топилади ва х. к.
 Масалан,

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} J_1 = \\ = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Эслатма. Ушбу

$$\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arccos x dx \\ \int x^n \operatorname{arctg} x dx, \int x^n (\operatorname{arctg} x)^2 dx, \int x^n \sin x dx \\ \int x^n \cos x dx, \int x^n e^x dx, \int e^{ax} \cos bx dx \\ \int e^{ax} \sin bx dx, \int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx$$

каби интеграллар бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида ҳисобланиб, уларнинг баъзилари учун бу формула бир неча марта қўлланиши мумкин.

5-§. СОДДА КАСРЛАР ВА УЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Ушбу

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

қўринишдаги функциялар *содда касрлар* дейилади. Бу ерда A, B, C, p, q — ўзгармас сонлар, x^2+px+q квадрат учхад эса ҳақиқий илдизга эга эмас, яъни

$$\frac{p^2}{4} - q < 0. \quad (15)$$

Содда касрларнинг аникмас интегралларини ҳисоблаймиз.

1⁰. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аникмас интеграли $\int \frac{A}{x-a} dx$ ни ҳисоблаш учун $x-a=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dx=dt$ бўлиб,

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A dt}{t} = A \cdot \ln|t| + C_1 = A \cdot \ln|x-a| + C_1$$

бўлади.

2⁰. $\frac{A}{(x-a)^m}$ содда касрнинг аникмас интеграли қуйидагича ҳисобланади:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \\ = \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C_2 \quad (m \neq 1).$$

3°. Энди

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз.

Аввало касрнинг махражидаги x^2+px+q квадрат учҳаднинг кўринишини ўзгартириб ёзамиз:

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

(15) шартга кўра $q-\frac{p^2}{4}>0$. Уни a^2 орқали белгилаймиз: $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Демак, каралаётган содда касрнинг интегрални учун

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} dx$$

бўлади. Кейинги интегралда $x+\frac{p}{2}=t$ алмаштириш бажарамиз.

Унда $x=t-\frac{p}{2}$ ва $dx=dt$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} dx &= \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2} dt = \\ &= B \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллар қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{t^2+a^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+a^2) + C_1 = \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right) + C_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2+px+q) + C_1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_2 = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_2 \quad (18)$$

(қаралсин — 4-§, 5- мисол)

(16), (17) ва (18) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \\ + \frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C^* \quad (16)$$

(бунда C^* — ўзгармас сон).

4°. Ушбу

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} \quad (m > 1)$$

содда қасрнинг интегралли

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx$$

ни ҳисоблашда 3° ҳолдаги каби белгилаш ва алмаштиришлар бажарамиз. Натижада:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{Bt + \left(C - \frac{1}{2}Bp\right)}{(t^2+a^2)^m} dt = \\ = B \int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} \quad (19)$$

Равшанки,

$$\int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-m} d(t^2+a^2) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C.$$

(19) тенгликнинг ўнг томонидаги $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл эса 4-§ да келтирилган 5- мисолдаги рекуррент формула орқали ҳисобланади.

6-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Рационал функцияларни интеграллашни баён этишдан аввал, рационал функциялар тўғрисида баъзи бир маълумотларни, шунингдек алгебранинг кўпхад ва унинг илдиэларига оид теоремаларини исботсиз келтирамиз.

1°. Рационал функциялар. Ушбу

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (20)$$

функция бутун рационал функция (кўпхад) деб аталар эди. (Каралсин [1], 1-боб). Бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, n — натурал сон бўлиб, у (20) кўпхаднинг даражасидир.

Иккита

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

хамда

$$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

бутун рационал функциялар нисбати

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} \quad (21)$$

каср рационал функция деб аталар эди (Каралсин [1], 1-боб). Бунда $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

Агар (21) касрда суратдаги кўпхаднинг даражаси махраждаги кўпхаднинг даражасидан кичик бўлса, яъни $n < m$ бўлса, у ҳолда (21) тўғри каср дейилади.

Агар (21) касрда суратдаги кўпхаднинг даражаси махраждаги кўпхаднинг даражасидан кичик бўлса, яъни $n \geq m$ бўлса, у ҳолда (21) нотўғри каср дейилади.

2⁰. Кўпхадни илдизлари оркали ифодалаш.

Айталик,

$$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \quad (22)$$

кўпхад берилган бўлсин. Алгебранинг асосий теоремасига кўра бу кўпхад m та илдизга эга.

1) Агар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ сонлар (22) кўпхаднинг ҳақиқий илдизлари бўлса, у ҳолда бу кўпхад

$$Q_m(x) = b_m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)$$

кўринишда ифодаланади.

2) Агар $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ сонлар (22) кўпхаднинг мос равишда $k_1, k_2, \dots, k_s$ каррали ҳақиқий илдизлари бўлса, у ҳолда

$$Q_m(x) = b_m(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

($k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$) бўлади.

3) Агар $a = \alpha + i\beta$ комплекс сон $Q_m(x)$ кўпхаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $\bar{a} = \alpha - i\beta$ (комплекс сонга қўшма бўлган комплекс сон) ҳам шу кўпхаднинг илдизи бўлади. Бу ҳолда $Q_m(x)$ кўпхад ифодасида $(x - a)(x - \bar{a})$ кўпайтувчи ушбу

$$\begin{aligned} (x - a)(x - \bar{a}) &= [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = \\ &= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q \\ (p &= -2\alpha, q = \alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

кўринишда катнашади.

4) Агар $a = \alpha + i\beta$ комплекс сон $Q_m(x)$ кўпхаднинг k каррали илдизи бўлса, $\bar{a} = \alpha - i\beta$ ҳам шу кўпхаднинг k каррали илдизи бўлиб, $Q_m(x)$ нинг ифодасида $(x^2 + px + q)^k$ кўпайтувчи катнашади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$3x^2 + 3x - 6$$

кўпхад $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$ илдизларга эга бўлганлиги сабабли:

$$3x^2 + 3x - 6 = 3(x - 1)(x + 2).$$

2. Ушбу

$$x^3 - 3x + 2$$

кўпхад учун $\alpha_1 = 1$ икки каррали илдиз ва $\alpha_2 = -2$ бўлганлигидан:

3. Ушбу

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$$

$$x^4 + x^3 - x - 1$$

кўпхаднинг илдизлари $x_1 = 1, x_2 = -1,$

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

бўлиб, у

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - x - 1 &= (x-1)(x+1) \left[x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] \times \\ &\times \left[x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

кўринишда бўлади.

Фараз қилайлик,

$$Q_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m, (b_m \neq 0)$$

кўпхад берилган бўлиб, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ лар унинг мос равишда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ каррали ҳақиқий илдизлари, $h_1, h_2, \dots, h_s$ ($h_j = c_j + id_j, j = 1, 2, \dots, s$) лар эса $Q_m(x)$ кўпхаднинг мос равишда $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ каррали илдизлари бўлсин.

1-теорема. **Ушбу $Q_m(x)$ кўпхад**

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= b_m(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x-\alpha_k)^{\lambda_k} \times \\ &\times (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s} \end{aligned}$$

кўринишда ифодаланади, бунда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s) = m$$

бўлиб, $x^2 + p_jx + q_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) квадрат тенгламалар ҳақиқий илдизга эга эмас.

3⁰. Тўғри касрларни содда касрлар орқали ифодалаш. Ушбу пунктда тўғри касрларнинг содда касрлар орқали ифодаланишини кўрсатадиган теоремани исботсиз келтирамыз.

Фараз қилайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

тўғри каср ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m$) берилган бўлиб, унинг махражидаги $Q_m(x)$ кўпхад илдизлари орқали (2^0 -пунктдаги сингари)

$$Q_m(x) = b_m(x-\alpha_1)^{\lambda_1} \cdot (x-\alpha_2)^{\lambda_2} \dots \cdot (x-\alpha_k)^{\lambda_k} \times$$

$$\times (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2} \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s}$$

ифодалансин.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

тўғри каср содда касрлар йиғиндиси орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{\lambda_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\lambda_1}} + \\ & + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_{\lambda_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{\lambda_2}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-\alpha_k)^2} + \dots + \frac{A_{\lambda_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{\lambda_k}} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{\gamma_1}^{(1)}x + C_{\gamma_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1}} + \\ & + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{B_2^{(2)}x + C_2^{(2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{\gamma_2}^{(2)}x + C_{\gamma_2}^{(2)}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{B_2^{(s)}x + C_2^{(s)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{B_{\gamma_s}^{(s)}x + C_{\gamma_s}^{(s)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s}} \end{aligned}$$

Бу ерда $A_1^{(1)}, \dots, A_{\lambda_k}^{(k)}, B_1^{(1)}, \dots, B_{\gamma_s}^{(s)}, C_1^{(1)}, \dots, C_{\gamma_s}^{(s)}$ ўзгармас сонлар (коэффициентлар).

(23) тенгликдаги ўзгармас сонлар (номаълум коэффициентлар) қуйидагича топилади.

(23) тенгликнинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғиндиси умумий махражга келтирилади. Натижада

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{q_n(x)}{Q_m(x)}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$P_n(x) = q_n(x)$$

тенгликка келамиз. Бу тенглик барча x лар учун ўринли бўлганлигидан унинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

Нихоят, шу системадан номаълум коэффициентлар топилади. Мисоллар қараймиз.

1. Ушбу

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}$$

тўғри касрни содда касрлар орқали ифодаланг.

Аввало берилган касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-x+2 &= x^2(x-2) - (x-2) = \\ &= (x-2)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

Унда

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўғри каср 2-теоремага кўра

$$\frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

бўлади. Уни куйидагича

$$\begin{aligned} \frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} = \\ &= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада

$$\begin{aligned} 5-7x &= A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) = \\ &= (A+B+C)x^2 - (A+3B)x - 2A + 2B - C \end{aligned}$$

бўлади. Икки кўпхаднинг тенглигидан

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B=7 \\ -2A+2B-C=5 \end{cases}$$

келиб чиқади. Бу системани ечиб $A=1$, $B=2$, $C=-3$ эканини топамиз. Шундай қилиб, берилган тўғри каср учун:

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2}$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\frac{1}{x^4-1}$$

тўғри касрни содда касрлар орқали ифодаланг.

Равшанки,

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Унда 2- теоремага кўра:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

У ҳолда

$$1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1),$$

яъни

$$1 = (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D).$$

Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб, $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$

$C = 0, D = -\frac{1}{2}$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

3. Ушбу

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3}$$

тўғри касрни содда қасрлар орқали ифодаланг.

Юқорида келтирилган 2- теоремага кўра:

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)^3}.$$

Бу тенгликни

$$\frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A(x - 1)^3 + Bx(x - 1)^2 + Cx(x - 1) + Dx}{x(x - 1)^3}$$

кўринишда ёзиб оламиз. У ҳолда

$$x^3 + 1 = A(x - 1)^3 + Bx(x - 1)^2 + Cx(x - 1) + Dx$$

яъни

$$x^3 + 1 = (A + B)x^3 - (3A + 2B - C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A.$$

Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B+C=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб $A=-1, B=2, C=1, D=2$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Энди бутун ҳамда каср рационал функцияларни интеграллашни караймиз.

4⁰. Бутун рационал функцияни интеграллаш. Аникмас интегралнинг содда, коидаларидан ҳамда интеграллар жадвалидан фойдаланиб

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

бутун рационал функциянинг интегралини топамиз:

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) dx = \\ &= \int a_0 dx + \int a_1x dx + \int a_2x^2 dx + \dots + \int a_nx^n dx = \\ &= a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \end{aligned}$$

5⁰. Тўғри касрларни интеграллаш. Ушбу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

тўғри каср берилган бўлиб, унинг аникмас интегрални $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$

ни ҳисоблаш талаб этилсин. Бу интегрални ҳисоблаш учун $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ тўғри касрни (юқорида кўрсатилган усул билан) содда

касрлар йиғиндиси сифатида ифодалаб олинади. Натижада тўғри касрни интеграллаш содда касрларни интеграллашга келади. Содда касрларни интеграллаш эса 5-§ да батафсил баён этилди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)}$$

аниқмас интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги тўғри каср $\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)}$ ни содда касрлар оркали ифодаalayмиз:

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги касрларни умумий махражга келтириб, сўнг суратдаги қўпхадларни тенглаштириб

$$1 = A(x-1)(x-3) + B(x+2)(x-3) + C(x+2)(x-1),$$

яъни

$$1 = (A+B+C)x^2 - (4A+B-C)x + (3A-6B-2C)$$

тенгликка келамиз.

Натижада A, B, C ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-B+C=0 \\ 3A-6B-2C=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб, $A = \frac{1}{15}, B = -\frac{1}{6}, C = \frac{1}{10}$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{x-3}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)} &= \frac{1}{15} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-1} + \\ &+ \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{15} \ln|x+2| - \frac{1}{6} \ln|x-1| + \\ &+ \frac{1}{10} \ln|x-3| + C = \frac{1}{30} \ln \frac{(x+2)^2 \cdot |x-3|^3}{|x-1|^5} + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\frac{1}{x^3+1}$ тўғри касрни, $x^3+1 = (x+1) \times (x^2-x+1)$ эканини эътиборга олиб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Унда

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Cx + Bx + C,$$

яъни

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A+C.$$

Натижада A, B, C ларга нисбатан

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб топамиз:

$$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}. \text{ Демак,}$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Шундай қилиб

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx.$$

Равшанки,

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C.$$

Мазкур бобнинг 5-§ да $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг аниқмас интегралли топилган эди. Ўша (16) формуладан фойдаланиб ($B=1, C=-2, p=-1, q=1$) топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| + \frac{-4+1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_1. \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^* = \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^*. \end{aligned}$$

6°. Нотўғри касрларни интеграллаш. Айтайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} \quad (24) /$$

функция нотўғри каср (суратдаги кўпхаднинг даражаси махраждаги кўпхаднинг даражасидан катта ёки тенг, яъни $n \geq m$) бўлсин. Бу ҳолда суратдаги кўпхадни махраждаги кўпхадга бўлиб (кўпхадни кўпхадга бўлиш қонидасидан фойдаланиб) берилган нотўғри касрни бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида куйидагича:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = q(x) + \frac{S_k(x)}{Q_m(x)}, k < m$$

ифодалаб олинади. Масалан, бизга $\frac{x^4}{x^2-x+1}$ нотўғри каср берилган бўлсин. Бу касрнинг сурати x^4 ни махражи x^2-x+1 га бўлиб топамиз:

$$\begin{array}{r} x^4 \\ x^4 - x^3 + x^2 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ x^2 + x \end{array} \right. \\ \hline -x^3 - x^2 \\ x^3 - x^2 + x \\ \hline -x \end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x^2 + x - \frac{x}{x^2-x+1}$$

Шундай қилиб, (24) нотўғри касрни интеграллаш бутун рационал функция ҳамда тўғри касрни интеграллашга келади:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{S_k(x)}{Q_m(x)} dx.$$

Бутун рационал функция ҳамда тўғри касрни интеграллаш юқоридаги 4^о ва 5^о пунктларда келтирилган эди.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги нотўғри каср $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ нинг суратини махражига бўламиз:

$$\begin{array}{r} x^3+x+1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2+1 \\ x \end{array} \right. \\ \hline x^3+x \\ \hline 1 \end{array}$$

Натижада $\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}$ бўлиб,

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 + \operatorname{arctg} x + C.$$

7-§. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз 6-§ да рационал функцияларнинг интегралланишини кўрдик. Иррационал функцияларни интеграллашда эса вазият бирмунча мураккаб бўлади.

Ушбу параграфда баъзи иррационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Бунда асосан иррационал функцияларни интеграллаш мос алмаштиришлар ёрдамида рационал функцияларни интеграллашга келтирилади.

1⁰. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция x ва унинг турли каср даражалари (рационал даражалари) устида арифметик амаллар бажарилишидан юзага келган функция бўлсин. Масалан,

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 + x^3};$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}};$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Равшанки, $\int f(x) dx$ интеграл иррационал функциянинг интегралли бўлади. Бу ҳолда, аввало $f(x)$ ифодасидаги x ларнинг даражаларида қатнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчисини топамиз. Айтайлик, у σ бўлсин. Агар $\int f(x) dx$ интегралда $x = t^\sigma$ алмаштириш бажарилса, у ҳолда иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}}$$

интегрални ҳисоблайлик.

Интеграл остидаги функция

$$\frac{1}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}} = \frac{1}{\left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right) x^{\frac{1}{2}}}$$

ифодасидаги x нинг даражалари $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$ бўлиб, бу каср махражлари 2 ва 3 нинг энг кичик умумий бўлинувчиси 6 га тенг бўлади.

Агар қаралаётган интегралда $x=t^6$ алмаштириш бажарилса, унда $dx=6t^5dt$ бўлиб,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(1+x^{1/3})x^{1/2}} = \int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3} dt$$

бўлади. Натижада иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Равшанки,

$$\begin{aligned} \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} &= 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 6 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \\ &= 6 \left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right] = 6t - 6 \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

2. Ушбу

$$\int \frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\sqrt[6]{x}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$, $dx=6t^5dt$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})x} &= \int \frac{6(t^6-1) \cdot t^5 dt}{(t^3+t^4)t^6} = \\ &= 6 \int \frac{t^6-1}{t^4(1+t)} dt = \int \frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4} dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln |t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) + C. \end{aligned}$$

20. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $ax+b$ иккиҳаднинг (a, b — ўзгармас сонлар) турли қаср даражалари устида арифметик амаллар бажаришидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

$$1) f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}};$$

$$2) f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}};$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{1+\sqrt[3]{2x-5}}.$$

Бу ҳолда ҳам $\int f(x)dx$ интегрални ҳисоблаш учун аввало $f(x)$ ифодасидаги $ax+b$ ларнинг даражаларида катнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчиси топилади. Айтайлик, у σ га тенг бўлсин. Агар $\int f(x)dx$ интегралда $ax+b=t^\sigma$ алмаштириш бажарилса, иррационал функциянинг интегралини ҳисоблаш рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1) \cdot \sqrt{3x+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $3x+1=t^6$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$dx = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot t^5 dt, \quad \sqrt[3]{3x+1} = t^2, \quad \sqrt{3x+1} = t^3$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1) \sqrt{3x+1}} &= \int \frac{2t^5 dt}{(t^2-1)t^3} = \\ &= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-1} = 2 \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = 2 \left[t + \int \frac{dt}{t^2-1} \right] = \\ &= 2 \left(t - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt \right) = 2 \left(t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) + C = \\ &= 2 \left(\sqrt[6]{3x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt[6]{3x+1}-1} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

3°. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $\frac{ax+b}{cx+d}$ нинг (a, b, c, d — ўзгармас сонлар, $ad \neq bc$) турли каср даражалари устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

- 1) $f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}};$
- 2) $f(x) = \frac{1}{(2+x)^2 \cdot (3-x)} \cdot \sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}};$
- 3) $f(x) = \frac{1}{1-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

Бу ҳолда ҳам, $\frac{ax+b}{cx+d}$ ларнинг даражаларида катнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчиси σ дейилса, унда ушбу $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\sigma$ алмаштириш натижасида иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\frac{1+x}{x} = t^2$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$\frac{1+x}{x} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1},$$

$$dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1) t \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = \\ &= -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\ &= -2 \sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln \left| x \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1 \right)^2 \right| + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1}$$

бўлади. Равшанки,

$$\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C.$$

Демак,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} &= 2 (t - \operatorname{arctg} t) + C = \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) + C. \end{aligned}$$

4°. Фараз килайлик, $f(x)$ функция x ва $\sqrt{ax^2+bx+c}$ лар устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}};$$

$$2) f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x\sqrt{x^2-x+1}};$$

$$3) f(x) = \frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Равшанки, бу ҳолда $\int f(x)dx$ интеграл иррационал функциянинг интегралли бўлади. Куйидаги уч ҳолни қараймиз.

Биринчи ҳол. Агар $a > 0$ бўлса, қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t \quad (25)$$

алмаштириш бажарилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда, $a=1 > 0$ бўлганлиги учун (25) каби

$$\sqrt{x^2+6x+5} - x = t$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\sqrt{x^2+6x+5} - x = t \Rightarrow x^2+6x+5 = x^2+2tx+t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-5}{6-2t},$$

$$dx = 2 \frac{-t^2+6t-5}{(6-2t)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+6x+5} = \frac{-t^2+6t-5}{6-2t}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} &= \int \frac{6-2t}{-t^2+6t-5} \cdot 2 \cdot \frac{-t^2+6t-5}{(6-2t)^2} dt = \\ &= \int \frac{2dt}{6-2t} = -\ln|3-t| + c. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} = -\ln|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}|+c.$$

Иккинчи хол. Агар $c>0$ бўлса, қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \quad (26)$$

алмаштириш ёзилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $c=4>0$ бўлганлиги учун (26) алмаштиришдан фойдаланамиз

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=xt+2.$$

Натижада

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=xt+2 \Rightarrow -x^2-3x+4=x^2t^2+4xt+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-3=xt^2+4t \Rightarrow x=-\frac{4t+3}{t^2+1},$$

$$dx=2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=-\frac{2t^2+3t-2}{t^2+1}$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}} = \int -\frac{t^2+1}{2t^2+3t-2} \cdot 2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2} dt =$$

$$= -\int \frac{2dt}{t^2+1} = -2\operatorname{arctg}t + c.$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}} = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x} + c.$$

Учинчи хол. Агар $b^2 - 4ac > 0$ бўлса, у холда

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

квадрат тенглама α ва β илдизларга эга ва қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha) \quad (27)$$

алмаштириш бажарилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу холда

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0, \\ -x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(3 - x)$$

бўлади. Берилган интегралда

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{(x - 1)(3 - x)} = (x - 1)t$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$\sqrt{(x - 1)(3 - x)} = (x - 1)t \Rightarrow (x - 1)(3 - x) = (x - 1)^2 t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3 - x) = (x - 1)t^2 \Rightarrow (t^2 + 1)x = t^2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2 + 3}{t^2 + 1} \left(t = \sqrt{\frac{3 - x}{x - 1}} \right),$$

$$dx = \left(\frac{t^2 + 3}{t^2 + 1} \right)' dt = -\frac{4t}{t^2 + 1} dt,$$

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

булиб,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} = \int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \left(-\frac{4t}{(t^2 + 2)^2} \right) dt =$$

$$= -2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -2 \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3 - x}{x - 1}} + c.$$

8-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $\sin x$ ҳамда $\cos x$ функциялар устида аналитик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

$$1) f(x) = \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$$

$$2) f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{\cos x \sqrt{\sin^2 x}}$$

Бундай $f(x)$ функциянинг интегрални $\int f(x) dx$ ни ҳисоблаш учун $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ($x = 2 \operatorname{arctg} t$) алмаштириш бажарилади. Унда $\sin x$ ҳамда $\cos x$ лар t орқали қуйидагича

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

ифодаланиб, тригонометрик функцияларни интеграллаш рационал функцияларни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 4\cos x + 5}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \text{ бўлиб,}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x + 4\cos x + 5} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = \\ &= 2 \int (t+3)^{-2} d(t+3) = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда ҳам $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Эслатма. Айрим ҳолларда тригонометрик функцияларни интеграллашда $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$ алмаштиришлар қулай бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \sin x$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dt = \cos x dx$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1 - t^2) dt}{t^5} = \\ &= \frac{t^{-4}}{4} - \frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{4 \sin^4 x} + \frac{1}{2 \sin^2 x} + C. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \operatorname{tg} x$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ бўлиб,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int (1 + t^2)^2 dt = \int (1 + 2t^2 + t^4) dt = \\ &= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.\end{aligned}$$

Эслатма. Ушбу $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ кўри-
нишдаги интегралларни ҳисоблашда

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки,

$$\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4}(\cos 2x - \cos 4x).$$

Натижада:

$$\int \sin x \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$$

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

Функциянинг аниқ интегралини таърифлашдан аввал бу тушунча билан боғлиқ бўлган эгри чизикли трапециянинг юзини топиш масаласини келтирамиз.

1. Эгри чизикли трапециянинг юзи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Юкоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиклар ҳамда пастдан Ox — абсцисса ўқи билан чегараланган шаклни қарайлик (1-чизма). Одатда бундай шаклни *эгри чизикли трапеция* деб аталади. Биз кейинги бобда текис шаклнинг, жумладан эгри чизикли трапециянинг юзи тушунчаси ва у билан боғлиқ бўлган масалаларни батафсил ўрганамиз.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас, яъни

$$f(x) = C = \text{const}$$

бўлса, у ҳолда $aABb$ шакл тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг юзи

$$S = C \cdot (b - a)$$

формула билан аниқланади.

Агар $f(x)$ функция учун $f(x) \neq C = \text{const}$ бўлса, у ҳолда $aABb$ шаклнинг юзини топиш учун $[a, b]$ сегментни

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$$

нукталар билан n та бўлакка бўламиз ва ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) сегментда ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нукта оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) сегментда $f(x)$ функцияни ўзгармас ва уни $f(\xi_k)$ га тенг қилиб олсак, у ҳолда $x_k A_k B_k x_{k+1}$ эгри чизикли трапециянинг юзи

$$f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

га яқин бўлиб, $aABb$ шаклнинг юзи S эса

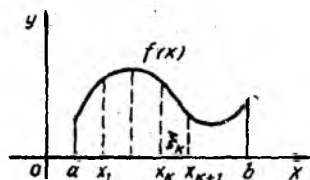
$$f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \dots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

га яқин микдор билан аниқланади. Демак,

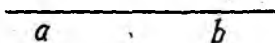
$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$

бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Равшанки, $aABb$ эгри чизикли трапециянинг юзини ифодаловчи (1) формула тақрибий формуладир. Энди $[a, b]$ сегментни бўлувчи нукталари сонини шундай орттириб бораёликки, бунда ҳар бир сегмент узунлиги Δx_k нолга интила бориши. У ҳолда $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ йиғиндининг миқдори ҳам ўзгара

боради ва бу миқдорлар борган сари $aABb$ эгри чизикли трапециянинг юзини аниқроқ ифодалайди. Умуман, жуда кўп масалаларнинг ечими юқоридаги (1)га ўхшаш йиғиндиларнинг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндиларнинг лимити математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири — аниқ интеграл тушунчасига олиб келади.



1- чизма



2- чизма

2. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши. Маълумки, $[a, b]$ сегмент ушбу

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат. У геометрик нуктаи-назардан тўғри чизикда (сонлар ўқида) учлари a ва b нукталарда бўлган кесмани ифодалайди (2-чизма).

$[a, b]$ сегментда

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0 = a, x_n = b)$$

нукталар оламир. Бу нукталар системасини $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши деб атаёмиз ва уни

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

каби белгилаймиз. Равшанки, $[a, b]$ сегментнинг P бўлиниши уни n та

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

бўлакларга ажратади.

Ҳар бир $x_k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ нукта P бўлинишнинг бўлувчи нуктаси, $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент ($k=0, 1, \dots, n-1$) эса P бўлинишнинг бўлаги (бўлакчаси) дейилади.

P бўлиниш бўлаклари узунликлари

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

нинг энг каттаси, яъни ушбу

$$\lambda = \max_k \{\Delta x_k\} = \max \{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$$

микдор унинг диаметри дейилади. Бу λ микдор P га боғлиқ бўлади ($\lambda = \lambda_P$). Хусусан, $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлишдан ҳосил қилинган ушбу

$$P = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b\}$$

бўлинишнинг диаметри

$$\lambda = \frac{b-a}{n}$$

бўлади.

$[a, b]$ сегмент берилган ҳолда унинг турли усуллар билан исталган сондаги бўлинишларини тузиш мумкин. Бу бўлинишлардан иборат тўплам $\mathcal{P}$ бўлсин:

$$\mathcal{P} = \{P\}$$

3. Интеграл йиғинди. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлинишини қарайлик; ($a < b$). Бу бўлинишга мос келувчи ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, n-1$) ораликда ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нукта олиб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_k)\Delta x_k + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}, \quad (2)$$

бунда

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0, \Delta x_1 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \dots, \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

Одатда (2) йиғинди $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисини дейилади. Уни йиғинди белгиси Σ орқали қисқача қуйидагича

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (2')$$

ҳам ёзиш мумкин.

Интеграл йиғинди σ нинг тузилишидан кўринадики, у $f(x)$ функцияга, $[a, b]$ сегментнинг бўлинишига ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, n-1$) бўлакчадан олинган ξ_k нукталарга боғлиқ бўлади.

4. Аниқ интеграл таърифи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

$[a, b]$ сегментнинг шундай

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_m, \dots \quad (3)$$

($P_m \in \mathcal{P}$, $m=1, 2, \dots$) бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \lambda_{P_3}, \dots, \lambda_{P_m}, \dots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \rightarrow 0$

Бундай P_m ($m=1, 2, \dots$) бўлинишларга нисбатан $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_m, \dots \quad (4)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

1-таъриф. Агар $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик ξ_k нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт ягона I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити деб аталади ва

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = I \quad (5)$$

каби белгиланади.

(2') йиғинди лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $[a, b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлгани ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий ξ_k нуқталарда

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда I сон σ йиғиндининг $\lambda_P \rightarrow 0$ даги лимити деб аталади ва у юқоридагидек ((5) га қаранг) белгиланади.

3-таъриф. Агар $\lambda_P \rightarrow 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси (2') чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) дейилади, σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги аниқ интеграли ёки Риман интеграли деб аталади ва у

$$\int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Бунда a сон интегралнинг қуйи чегараси, b сон эса интегралнинг юқори чегараси, $[a, b]$ сегмент интеграллаш оралиғи деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = c \quad (c = \text{const})$$

функцияни $[a, b]$ сегментда қарайлик, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0 = a, x_n = b)$$

бўлинишини олиб, берилган функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Ҳар доим

$$f(\xi_k) = c$$

бўлгани сабабли

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot \Delta x_k = c \cdot \Delta x_0 + c \cdot \Delta x_1 + \dots + c \cdot \Delta x_{n-1} = \\ &= c \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \\ &= c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a) \end{aligned}$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $\lambda \rightarrow 0$ да ($\lambda = \max\{\Delta x_n\}$) лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} c \cdot (b - a) = c(b - a).$$

Демак, $f(x) = c$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи ва

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

Хусусан, $f(x) = 1$ бўлса, унда

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$$

бўлади.

2. Ушбу

$$f(x) = x$$

функцияни $[a, b]$ сегментда қарайлик. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $x_0 = a$, $x_n = b$) бўлинишини олайлик. Унинг диаметри

$$\lambda = \max\{\Delta x_k\} \quad (k=0, n-1)$$

бўлсин. Бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлагиди ихтиёрий ξ_k пунктани олиб, берилган функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз. Равшанки, бу ҳолда $f(\xi_k) = \xi_k$ бўлиб,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k \quad (6)$$

бўлади, бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Энди (6) йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \cdot \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \cdot \Delta x_k + \alpha, \end{aligned} \quad (7)$$

бунда

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \Delta x_k.$$

(7) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳаддини ҳисоблаймиз.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \cdot \Delta x_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} + x_k) (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) = \frac{1}{2} [(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \dots + \\ &\quad + (x_n^2 - x_{n-1}^2)] = \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Энди (7) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ҳаддини баҳолаймиз. Агар

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$\lambda = \max_k (x_{k+1} - x_k) \quad (k=0, n-1)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|\alpha| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right) \cdot \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \right| \Delta x_k \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} \max_k (x_{k+1} - x_k) \Delta x_k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lambda (b - a)$$

эканини топамиз. Демак,

$$|\alpha| \leq \lambda (b - a). \quad (9)$$

(7), (8), (9) муносабатлардан $\lambda \rightarrow 0$ да σ йиғиндининг limiti $\frac{b^2 - a^2}{2}$ бўлишини кўрамиз. Бу эса таърифга кўра

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

эканини билдиради.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МАВЖУДЛИГИ

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ бўлинишини олайлик. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда ихтиёрий ξ_k нукта олиб, $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Берилишига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган:

$$m \leq f(x) \leq M \quad (\forall x \in [a, b]) \quad (10)$$

Демак, у ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да ҳам чегараланган. Унда $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ да аниқ чегаралари

$$m_k = \inf \{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}], (k = \overline{0, n-1}) \quad (11)$$

$$M_k = \sup \{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}], (k = \overline{0, n-1}) \quad (12)$$

мавжуд бўлади. Бу сонлардан фойдаланиб қуйидаги

$$s = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \dots + m_{n-1} \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad (13)$$

$$S = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \quad (14)$$

йиғиндиларни тузамиз. Одатда бу йиғиндилар мос равишда $f(x)$ функциянинг P бўлинишга нисбатан қуйи ҳамда юқори интеграл йиғиндилари дейилади. Равшанки,

$$s \leq S.$$

Юқоридаги (10), (11) ва (12) муносабатлардан барча $k (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ учун

$$m \leq m_k, M_k \leq M$$

ҳамда

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \geq m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = m \cdot (b-a),$$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b-a)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$m \cdot (b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a). \quad (15)$$

1-лемма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлиб, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ эса $[a, b]$ нинг ихтиёрий бўлиниши бўлса, у ҳолда шу бўлинишга нисбатан $f(x)$ функциянинг қуйи, юқори ҳамда интеграл йиғиндилари учун

$$s \leq \sigma \leq S$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11) ва (12) муносабатлардан фойдаланиб $\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ да

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

бўлишини топамиз. Бу тенгсизликларни Δx_k га кўпайтирсак, $(\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0)$ унда

$$m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$$

келиб чиқади. Кейинги тенгсизликларни k нинг $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ қийматлари учун ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Демак,

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Фараз қилайлик,

$$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \{x_0 < x_1 < \dots < x_n, x_0 = a, x_n = b\}$$

$[a, b]$ сегментнинг бирор бўлишини бўлсин. Бу бўлинишнинг бўлувчи нукталари каторига битта x^* нукта ($x^* \in [a, b]$) қўшиб, $[a, b]$ нинг бошқа P_2 бўлинишини ҳосил қилайлик. Аниқлик учун бу x^* нукта x_k ҳамда x_{k+1} лар орасида жойлашган бўлсин.

$$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_k, x^*, x_{k+1}, \dots, x_n\},$$

$$(x_0 < x_1 < \dots < x_k < x^* < x_{k+1} < \dots < x_n; x_0 = a, x_n = b).$$

2-лемма. $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган $f(x)$ функциянинг P_1 ҳамда P_2 бўлинишларга нисбатан тузилган қуйи интеграл йиғиндилари s_1, s_2 ва юқори интеграл йиғиндилари S_1, S_2 лар учун

$$s_1 \leq s_2,$$

$$S_1 \geq S_2$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг P_1 ҳамда P_2 бўлинишларига нисбатан юқори интеграл йиғиндиларини ёзамиз:

$$S_1 = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \dots + M_k \Delta x_k + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

$$S_2 = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \dots + (M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k) + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

бунда

$$M'_k = \sup\{f(x)\}, x \in [x_k, x^*],$$

$$M''_k = \sup\{f(x)\}, x \in [x^*, x_{k+1}]$$

$$\text{ва } \Delta x'_k = x^* - x_k, \Delta x''_k = x_{k+1} - x^*.$$

S_1 ҳамда S_2 йиғиндилар бир-биридан битта ҳадга фарк қилиб, S_1 да $M_k \Delta x_k$ қўшилувчи бўлган ҳолда S_2 да унга мос қўшилувчи

$$M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k$$

ифодадан иборатдир.

Равшанки,

$$[x_k, x^*] \subset [x_k, x_{k+1}],$$

$$[x^*, x_{k+1}] \subset [x_k, x_{k+1}].$$

Унда $M'_k \leq M_k$, $M''_k \leq M_k$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$M'_k \cdot \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k = M'_k(x^* - x_k) + M''_k(x_{k+1} - x^*) \leq \\ \leq M_k \cdot [(x^* - x_k) + (x_{k+1} - x^*)] = M_k \cdot \Delta x_k$$

бўлади. Бундан эса

$$S_1 \geq S_2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш

$$s_1 \leq s_2$$

бўлиши кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Энди функция аниқ интеграли мавжудлигининг зарур ва етарли шартини келтирамиз. Аслида функциянинг интегралланувчи бўлиши ёки бўлмаслигини таъриф ёрдамида текшириш мумкин. Лекин кўпчилик ҳолларда интеграл йиғиндининг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатиш жуда мураккаб бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

1-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан

$$S - s < \varepsilon \quad (16)$$

тенгсизлиكنинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, \overline{n-1}$) ораликдаги тебранишини ω_k оркали белгиласак, ($\omega_k = M_k - m_k$), у ҳолда (16) тенгсизлик

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \quad (16')$$

кўринишга эга бўлади. Кўпчилик ҳолларда теореманинг (16') кўринишдаги шарт ишлатилади.

2-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлса, у шу ораликда интегралланувчи бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлганлигидан Вейерштрасс теоремасига кўра у чегараланган бўлади. Иккинчи томондан Кантор теоремасига биноан у шу сегментда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлақларга ажратилганда функциянинг ҳар бир бўлагидаги тебраниши учун

$$\omega_k < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_P < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)$$

бўлади. Бу эса (16') га кўра $[a, b]$ ораликда $f(x)$ функциянинг интегралланувчи эканини билдиради.

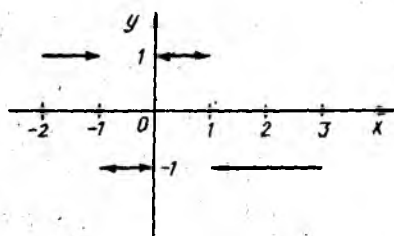
3-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу ораликда интегралланувчи бўлади.*

4-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда чегараланган ва бу ораликнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу ораликда интегралланувчи бўлади.*

Масалан,

$$f(x) = \operatorname{sgn} [x(1-x^2)]$$

функция $[-2, 3]$ сегментда интегралланувчи бўлади, чунки у шу сегментнинг $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлади (3-чизма).



3-чизма

Юқорида келтирилган теоремадан кўринадики $f(x)$ функция интегралланувчи бўлса, у ҳолда интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ сегментнинг бўлиниш усулига ҳам, ҳар бир бўлакдан олинган ξ_k нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p \rightarrow 0$ да ягона

$$\int_a^b f(x) dx$$

га (сонга) интилади. Демак, интегралланувчи функция учун унинг интегралини топишда ҳисоблаш учун қулай бўлган бирорта бўлиниш ҳамда топилган ξ_k ларга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади.

Масалан, бизга маълум $\int_a^b x dx$ интегрални қарайлик. $[a, b]$ сегментда $f(x) = x$ функция узлуксиз бўлгани сабабли у 2-теоремага кўра интегралланувчи. Қаралаётган интегрални ҳисоблаш учун $[a, b]$ сегментнинг

$$P = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = a + n \frac{b-a}{n} = b\}$$

бўлинишини (бунда $\lambda = \frac{b-a}{n}$) ҳамда $\xi_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ ни оламин.

Унда $f(x) = x$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \cdot \frac{b-a}{n} = \\
 &= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \\
 &= \frac{b-a}{n} \cdot \left[n \cdot a + \frac{b-a}{n} (1+2+\dots+n-1) \right] = \\
 &= \frac{b-a}{n} \left[n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right] = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b-a}{2} \lambda
 \end{aligned}$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{b-a}{2} \lambda \right] = \frac{b^2-a^2}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

Энди $f(x)$ функция аниқ интегралнинг хоссаларини ўрганамиз ва улардан баъзиларининг исботини ҳам келтирамыз.

1°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x)$ функция ҳам интегралланувчи ва

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (c = \text{const})$$

тенгелик ўринли.

Исбот. $c \cdot f(x)$ ҳамда $f(x)$ функцияларнинг $\forall P$ бўлинишга нисбатан интеграл йиғиндиларини ёзамиз:

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} c \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \quad \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Унда

$$\sigma^* = \sum_{k=0}^{n-1} c f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sigma$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} c \cdot \sigma = c \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

бўлади.
Агар

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} c f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b c \cdot f(x) dx$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

бўлишини топамиз.

3°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлганлиги учун

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b g(x) dx$$

бўлади.

Энди $f(x) \pm g(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги мос интеграл йиғиндисини ёзамиз:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) \pm g(\xi_k)] \cdot \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_1 \pm \sigma_2 \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан $\lambda \rightarrow 0$ да

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_1 \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_2 = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

формулага эга бўламиз. Бу 3°-хоссанинг ўринлилигини кўрсатади.

Н а т и ж а. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad (c_i = \text{const}, i = \overline{1, n})$$

функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади ва

$$\begin{aligned} & \int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx = \\ & = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x) dx \end{aligned}$$

формула ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи юқоридаги 2°, 3°-хоссалардан келиб чиқади.

4°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади.

5°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ ораликларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ ораликда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

формула ўринли бўлади.

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$$

бўлади.

И с б о т. $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geq 0$ бўлганлигидан

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$$

ва

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу ораликда интегралланувчи бўлади ва

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

8°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $\xi (a < \xi < b)$ нуқта топиладики

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлганлигидан унинг шу сегментда, чегараланганлиги келиб чиқади. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ учун

$$m \leq f(x) \leq M$$

бўлади. Кейинги тенгсизликларни интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow \\ \Rightarrow m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \end{aligned}$$

Бу тенгсизликларни $b - a$ га бўлсак, ушбу

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Демак,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

микдор $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциянинг энг кичик киймати m ҳамда энг катта киймати M лар орасида экан. Узлуксиз функциянинг хоссасига кўра $[a, b]$ сегментда шундай ξ нукта

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

бўлади.

Одатда

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

микдор $f(x)$, функциянинг $[a, b]$ сегментдаги ўрта киймати, 8°- хосса эса ўрта киймати ҳақидаги теорема деб юритилади.

Энди $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функцияни қарайлик. У ҳолда бу функция $[a, b]$ сегментнинг истаган $[a, x]$ қисмида ($a \leq x \leq b$) ҳам узлуксиз бўлади. Бинобарин, функция $[a, x]$ да интегралланувчи.

Равшанки, бу интеграл x га боғлиқ бўлиб, биз уни $F(x)$ орқали белгиләйлик:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (17)$$

Бу (17) интеграл юкори чегараси *ўзгарувчи аниқ интеграл* дейилади.

9°. $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ҳосилага эга ва

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ сегментда ихтиёрий x_0 ички нукта олиб, $\Delta F(x_0)$ ни топамиз:

$$\begin{aligned}\Delta F(x_0) &= F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt\end{aligned}\quad (18)$$

(18) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi), \quad (x_0 < \xi < x).$$

Равшанки, $x \rightarrow x_0$ да $\xi \rightarrow x_0$ бўлиб, $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан $\xi \rightarrow x_0$ да $f(\xi) \rightarrow f(x_0)$ эканлигини топамиз. Демак, (18) тенгликда $x \rightarrow x_0$ лимитга ўтсак,

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

бўлади.

x_0 нукта $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий нуктаси бўлганлигидан

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b])$$

бўлади.

Н а т и ж а . Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция $[a, b]$ сегментда бошланғич функцияга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, 9°-хоссага кўра

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функция учун $F'(x) = f(x)$ бўлади. Бу эса $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция эканини билдиради.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Унда бу функция $[a, b]$ нинг ихтиёрий $[x, b]$ қисмида ($a \leq x \leq b$) ҳам узлуксиз бўлиб,

$$\int_x^b f(t) dt$$

интеграл мавжуд бўлади. Уни

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t) dt$$

оркали белгилайлик. Бу қуйи чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегралдир.

10°. $\Phi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ҳосилага эга ва

$$\Phi'(x) = -f(x)$$

формула ўринли.

Исбот. Аниқ интегралнинг 5°-хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = F(x) + \Phi(x).$$

Бундан

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t) dt - F(x)$$

бўлиб,

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^b f(t) dt \right)' - F'(x) = -f(x)$$

бўлади (чунки, $\left(\int_a^b f(t) dt \right)' = 0$, $F'(x) = f(x)$).

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Равшанки, функциянинг аниқ интеграли

$$\int_a^b f(x) dx$$

мавжуд. Бу интегрални ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

1°. Ньютон-Лейбниц формуласи. 3-§ да келтирилган формулага кўра

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

функция $f(x)$ нинг $[a, b]$ да бошланғич функцияси бўлади. Маълумки, $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ учун

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

бўлади, бунда c — ихтиёрий ўзгармас сон. Демак,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Бу тенгликда $x=a$ деб олиб

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt + c = 0 + c = c,$$

сўнг $x=b$ деб олиб,

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx + c$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки тенгликдан

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (19)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\int_a^b f(x) dx$$

интеграл бошланғич функция $\Phi(x)$ нинг $x=b$ нуктадаги қийматидан $x=a$ нуктадаги қийматининг айирмасига тенг экан.

(19) формула Ньютон-Лейбниц ёки интеграл ҳисобнинг асосий формуласи деб юритилади. Одатда $\Phi(b) - \Phi(a)$ айирмани $\Phi(x) \Big|_a^b$ каби ёзилади:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Унда

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_a^b x dx$$

аниқ интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(x) = x$ ниқг бошланғич функцияси $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^2$ бўлади. Унда Ньютон Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

2. Ушбу

$$\int_0^1 x^n dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги $f(x) = x^n$ функциянинг бошланғич функцияси-ни топиш учун $\int x^n dx$ аниқмас интегрални ҳисоблаймиз: $\int x^n dx =$

$= \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Демак, бошланғич функция $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласига кўра.

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

3. Ушбу

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3 + x^3} dx \quad (a > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топамиз:

$$\int \frac{x^2 dx}{a^3 + x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{d(a^3 + x^3)}{a^3 + x^3} = \frac{1}{3} \ln(a^3 + x^3).$$

Унда (19) формулага кўра

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x^2 dx}{a^3 + x^3} &= \frac{1}{3} \ln(a^3 + x^3) \Big|_0^a = \frac{1}{3} \ln(a^3 + a^3) - \frac{1}{3} \ln a^3 = \\ &= \frac{1}{3} \ln 2a^3 - \frac{1}{3} \ln a^3 = \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

2°. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан аниқ интегралларни ҳисоблаш.

Функцияларнинг аниқ интегралларини ўзгарувчиларини алмаштириш усули ёрдамида ҳам ҳисоблаш мумкин. $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x) dx$ ни ҳисоблаш мақсадида $x = \varphi(t)$ муносабат билан x ўзгарувчини алмаштирамиз.

5-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда, $x = \varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ да ўзгарганда $x = \varphi(t)$ нинг қийматлари $[a, b]$ ни ташкил этсин.

Агар $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлиб, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (20)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз. Бинобарин, у бошланғич функцияга эга. Уни $\Phi(x)$ билан белгилайлик:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Ньютон-Лейбниц формуласига кўра:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Энди $[\alpha, \beta]$ сегментда $\Phi(\varphi(t))$ мураккаб функцияни қарайлик. Равшанки, $\Phi(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи

$$[\Phi(\varphi(t))] = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

бўлади. Натижада

$$[\Phi(\varphi(t))] = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

тенгликка келамиз. Бу эса $[\alpha, \beta]$ да $\Phi(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси эканлигини билдиради. Яна Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)).$$

Шартга кўра $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бўлганлигидан

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (21)$$

бўлади. (19) ва (21) муносабатлардан

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x = \sqrt{t^2 - 1}$ алмаштириш бажарамиз. Унда $x=0$ да $t=1$, $x=1$ да $x = \sqrt{2}$ бўлиб, қаралаётган алмаштириш $[1, \sqrt{2}]$ сегментни $[0, 1]$ сегментга ўтказди. Равшанки,

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2t dt = \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

бўлади. (20) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2-1} \cdot t \cdot \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \\ &= \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. \end{aligned}$$

2. Ушбу

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x = a \sin t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада, (20) формулага кўра:

$$\begin{aligned}\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \\ &= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt.\end{aligned}$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (2 \sin t \cdot \cos t)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cdot dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \left[\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 4t dt \right] = \frac{1}{8} \left[t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4t}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^4}{16}.$$

3°. Бўлаклаб интеграллаш усули билан аник интегралларни ҳисоблаш.

6-теорема. Агар $U(x)$ ва $V(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу сегментда узлуксиз $U'(x)$ ҳамда $V'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b U(x) dV(x) = U(x) \cdot V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) dU(x) \quad (22)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Равшанки,

$$[U(x) \cdot V(x)]' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x).$$

Демак, $[a, b]$ сегментда $U(x) \cdot V(x)$ функция $U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b [U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)] dx = U(x) \cdot V(x) \Big|_a^b.$$

Кейинги тенгликдан

$$\begin{aligned} \int_a^b U'(x) V(x) dx + \int_a^b U(x) \cdot V'(x) dx &= U(x) \cdot V(x) \Big|_a^b \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b V(x) \cdot dU(x) + \int_a^b U(x) \cdot dV(x) &= U(x) \cdot V(x) \Big|_a^b \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b U(x) \cdot dV(x) &= U(x) \cdot V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) \cdot dU(x) \end{aligned}$$

келиб чикади. Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $U(x) = x$, $dV(x) = \cos x$ деб олиб, $dU(x) = dx$, $V(x) = \sin x$ бўлишини топамиз. Унда (22) формулага кўра:

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 - (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -2.$$

Демак,

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = -2.$$

2. Ушбу

$$\int_0^1 \arctg x \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $U(x) = \arctg x$, $dV(x) = dx$ деб олиб, $dU(x) = \frac{1}{1+x^2} dx$, $V(x) = x$ бўлишини топамиз. Унда (22) формулага кўра:

$$\int_0^1 \arctg x \, dx = x \cdot \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

Демак,

$$\int_0^1 \arctg x dx = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

3. Ушбу

$$\int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $u = \ln^2 x$, $dv = x^2 dx$ деб олинса, унда $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^3}{3}$ бўлади. (22) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \cdot \ln x dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\int_1^e x^2 \ln x dx$ интегралда $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ деб, сўнг унга яна (22) формулани қўллаб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln x dx &= \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Натижада

$$\int_1^e (x \cdot \ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

бўлади.

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Фаннинг турли соҳаларида, айниқса, физика ва техникада учрайдиган масалаларни ҳал қилиш кўпинча аниқ интегралларни ҳисоблаш билан боғлиқ бўлади. Агар интеграл остидаги функция мураккаб бўлса, равшанки, интегралларни ҳисоблаш кийин бўлади. Бундай ҳолларда уларни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблайдиган бир қанча усуллар мавжуд. Ушбу параграфда улардан учтасини; тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ҳамда параболалар (Симпсон) усулларини келтирамиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар усули.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу

функциянинг аниқ интегрални $\int_a^b f(x) dx$ ни тақрибий ҳисоблаймиз.

$[a, b]$ сегментни

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

$(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ нукталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўламиз. Унда аниқ интегралнинг хоссасига кўра:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Ҳар бир $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) интегралга ўрта қиймат

ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = f(\tau_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(\tau_k) \cdot \Delta x_k \quad (x_k < \tau_k < x_{k+1})$$

Равшанки,

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b \\ = a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n} - \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n}.$$

Энди

$$\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{b-a}{n} \quad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1})$$

деб олиб, $f(\tau_k) \cdot \Delta x_k$ ($x_k < \tau_k < x_{k+1}$) ифодани қуйидагича

$$f(\tau_k) \cdot \Delta x_k = [f(\bar{x}_k) + (f(\tau_k) - f(\bar{x}_k))] \cdot \Delta x_k = \\ = f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k + [f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)] \cdot \Delta x_k$$

ёзиб оламиз. Агар $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ миқдор асоси $[x_k, x_{k+1}]$ баландлиги $f(\bar{x}_k)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини ифода-лайди. Натижада

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k + [f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)] \cdot \Delta x_k$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} [f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)] \cdot \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) + R_n$$

бўлади. Бу тенгликдаги

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)] \cdot \Delta x_k \quad (x_k < \tau_k < x_{k+1}),$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, у шу сегментда текис узлуксиз. Унда $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлган $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакларга ажратилганда ҳар бир $x' \in [x_k, x_{k+1}]$, $x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ да

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

бўлади. Унда $\lambda < \delta$ бўлганда $\left(\lambda = \max_k |\Delta x_k| = \frac{b-a}{n} \right)$

$$|f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$|R_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\tau_k) - f(\bar{x}_k)| \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

Бундан $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)$$

деб олиш имконини беради.

Шундай қилиб, берилган аниқ интегрални ҳисоблаш учун ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_k) + \dots + f(\bar{x}_{n-1})] \quad (23)$$

$(\bar{x}_k = a + (\frac{1}{2} + k) \frac{b-a}{n}, k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ тақрибий формулага келамиз. (23) формула тўғри тўртбурчаклар формуласи дейилади.

Э с л а т м а. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу сегментда узлуксиз ҳосилата эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_k) + \dots + f(\bar{x}_{n-1})] + R_n$$

бўлиб,

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \quad (a < c < b)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

М и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$[0, 1]$ ораликни 5 та тенг:

$$\left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

бўлакка бўламыз. Бу ҳолда ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{5}$ га тенг бўлиб,

$$\bar{x}_0=0,1, \bar{x}_1=0,3, \bar{x}_2=0,5, \bar{x}_3=0,7, \bar{x}_4=0,9$$

бўлади.

$f(x)=e^{-x^2}$ функциянинг $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ нукталардаги қиймати қуйидагича бўлади:

$$f(\bar{x}_0)=0,99005,$$

$$f(\bar{x}_1)=0,91393,$$

$$f(\bar{x}_2)=0,77680,$$

$$f(\bar{x}_3)=0,61263,$$

$$f(\bar{x}_4)=0,44486.$$

(23) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{5} (0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + \\ &+ 0,44486) = \frac{1}{5} 3,74027 \approx 0,74805. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,74805.$$

2. Трапециялар усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Берилган функциянинг аниқ интегралини тақрибий ҳисоблаш учун, бу ҳолда ҳам $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўламыз. Сўнг

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$$

деб ёзиб оламиз. Ҳар бир

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

интегралга яна ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = f(\tau_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(\tau_k) \cdot \Delta x_k \quad (x_k < \tau_k < x_{k+1}).$$

Энди $f(\tau_k) \cdot \Delta x_k$ ифодани куйидагича

$$f(\tau_k) \cdot \Delta x_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x_k + \left[f(\tau_k) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] \cdot \Delta x_k$$

ёзиб оламиз. (Агар $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x_k$ микдор асослари $[x_k, f(x_k)]$ ва $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$, баландлиги эса Δx_k бўлган трапеция юзини ифодалайди.) Натижада

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x_k + \left[f(\tau_k) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] \cdot \Delta x_k$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] \cdot \Delta x_k + R_n$$

бўлади, бунда

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\tau_k) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] \cdot \Delta x_k, \\ (x_k < \tau_k < x_{k+1}).$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да текис узлуксиз бўлишидан фойдаланамиз. $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топиладики, $\lambda < \delta$ бўлганда $(\lambda = \max_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n})$

$$|f(\tau_k) - f(x_k)| < \varepsilon, \quad |f(\tau_k) - f(x_{k+1})| < \varepsilon$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\tau_k) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right] \cdot \Delta x_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(\tau_k) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \cdot \Delta x_k \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} [|f(\tau_k) - f(x_k)| + |f(\tau_k) - f(x_{k+1})|] \Delta x_k < \\ &< \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon \cdot (b-a) \end{aligned}$$

бўлиб, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_n = 0$ бўлади. Натижада ушбу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x_k$$

такрибий формулага келамиз. Бу муносабатни куйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) + \dots + f(x_{n-1}) \right] \quad (24)$$

$$(x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, k=0, 1, 2, \dots, n).$$

(24) формула трапециялар формуласи дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу сегментда узлуксиз $f''(x)$ хосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_k) + \dots + f(x_{n-1}) \right] + R_n$$

бўлиб,

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(c) \quad (a < c < b)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални трапециялар формуласи ёрдамида такрибий ҳисобланг. $[0, 1]$ сегментни 5 та тенг бўлакка бўламиз.

$$\left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

Равшанки, ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{5}$ га тенг бўлади. Интеграл остидаги $f(x) = e^{-x^2}$ функциянинг $x_0=0, x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{2}{5}, x_3=\frac{3}{5},$

$x_4=\frac{4}{5}, x_5=1$ нукталардаги қийматлари куйидагича бўлади:

$$f(x_0) = f(0) = 1,00000,$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{5}\right) = 0,96079,$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{2}{5}\right) = 0,85214,$$

$$f(x_3) = f\left(\frac{3}{5}\right) = 0,69768,$$

$$f(x_4) = f\left(\frac{4}{5}\right) = 0,52729,$$

$$f(x_5) = f(1) = 0,36788.$$

(24) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{5} \left(\frac{1,00000 + 0,36788}{2} + \right. \\ \left. + 0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 \right) = \\ = \frac{1}{5} \cdot 3,72184 \approx 0,74437.$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,74437.$$

3. Параболалар (Симпсон) усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг аниқ интегрални

$$\int_a^b f(x) dx$$

ни тақрибий ҳисоблаш учун аввало $[a, b]$ ни

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \dots, x_{2n-2}, \\ x_{2n-1}, x_{2n} = b \quad (x_0 < x_1 < \dots < x_{2n})$$

нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўламиз ва интегрални ушбу

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx$$

қўринишда ёзиб оламиз. Сўнг ҳар бир $\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)

интегралда $f(x)$ функция учта

$$A_k(x_{2k-2}, f(x_{2k-2})), B_k(x_{2k-1}, f(x_{2k-1})), \\ D_k(x_{2k}, f(x_{2k}))$$

нуқталардан ўтувчи $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ квадрат учҳад (парабола) билан тақрибан алмаштирилади:

$$f(x) \approx \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Унда

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. Бу формуладаги

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx$$

интегрални хисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx &= \alpha \frac{x^3}{3} \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} + \beta \frac{x^2}{2} \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} + \gamma \cdot x \Big|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} = \\ &= \alpha \cdot \frac{x_{2k}^3 - x_{2k-2}^3}{3} + \beta \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2} + \gamma (x_{2k} - x_{2k-2}) = \\ &= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} [2\alpha (x_{2k}^2 + x_{2k} \cdot x_{2k-2} + x_{2k-2}^2) + \\ &+ 3\beta (x_{2k} + x_{2k-2}) + 6\gamma] = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \{ (\alpha \cdot x_{2k-2}^2 + \gamma) + \\ &+ \beta \cdot x_{2k-2} + (\gamma) + 4\alpha \left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} \right)^2 + \beta \cdot \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} + \gamma + \\ &+ (\alpha \cdot x_{2k}^2 + \beta x_{2k} + \gamma) \} = \\ &= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \left[f(x_{2k-2}) + 4f\left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right) + f(x_{2k}) \right]. \end{aligned}$$

Натижада берилган аниқ интегрални такрибий ифодалайдиган куйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \left[f(x_{2k-2}) + 4f\left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right) + f(x_{2k}) \right]. \end{aligned}$$

Агар

$$\begin{aligned} x_{2k-2} &= a + (2k-2) \cdot \frac{b-a}{n}, \quad x_{2k-1} = a + (2k-1) \cdot \frac{b-a}{n}, \\ x_{2k} &= a + 2k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

($k=1, 2, 3, \dots, n$) бўлишини эътиборга олсак, унда такрибий формулани куйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{6n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + \\ &+ f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))] \end{aligned} \quad (25)$$

Бу (25) формула параболалар (Симпсон) формуласи дейилади.

Э с л а т м а. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у ш сегментда узлуксиз $f^{(IV)}(x)$ хосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \{ [f(x_0) + f(x_{2n})] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})] \} + R_n$$

бўлиб,

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot n^4} f^{(IV)}(c)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

М и с о л. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални параболалар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$$[0, 1] \text{ сегментни } x_0=0, x_1=\frac{1}{10}, x_2=\frac{2}{10}, x_3=\frac{3}{10}, x_4=\frac{4}{10}, x_5=\frac{5}{10}, x_6=\frac{6}{10}, x_7=\frac{7}{10}, x_8=\frac{8}{10}, x_9=\frac{9}{10}, x_{10}=1$$

нуқталар ёрдамида 10 та тенг бўлакка бўламиз. Бунда ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{10}$ га тенг бўлади.

Интеграл остидаги

$$f(x) = e^{-x^2}$$

функциянинг x_i , ($i=0, 1, \dots, 10$) нуқталардаги қийматлари қуйидагича бўлади:

$$f(x_0) = f(0) = 1,00000,$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{10}\right) = 0,99005,$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{2}{10}\right) = 0,96079,$$

$$f(x_3) = f\left(\frac{3}{10}\right) = 0,91393,$$

$$f(x_4) = f\left(\frac{4}{10}\right) = 0,85214,$$

$$f(x_5) = f\left(\frac{5}{10}\right) = 0,77680,$$

$$f(x_6) = f\left(\frac{6}{10}\right) = 0,69768,$$

$$f(x_7) = f\left(\frac{7}{10}\right) = 0,61263,$$

$$f(x_8) = f\left(\frac{8}{10}\right) = 0,52729,$$

$$f(x_9) = f\left(\frac{9}{10}\right) = 0,44486,$$

$$f(x_{10}) = f(1) = 0,36788.$$

(25) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{30} [(1,00000 + 0,36788) + 4(0,99005 + \\ &+ 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) + \\ &+ 2(0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729)] = \\ &= \frac{1}{30} (1,36788 + 6,07580 + 14,96108) \approx 0,74682. \end{aligned}$$

Демак, $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,74682.$

Шундай қилиб,

$$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0,74805$, трапециялар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0,74437$, параболалар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0,74682$ бўлишини топдик.

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

Аниқ интегралнинг татбиқ доираси кенгдир. Жумладан ё узунлигини, текис шаклнинг юзини, ўзгарувчи кучнинг бажарган ишини, айланма жисмнинг ён сиртини, жисмнинг оғирлик марказини ва ҳоказоларни топиш масалалари аниқ интеграл ёрдамида ҳал этилади.

1-§. ЁЙ УЗУНЛИГИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

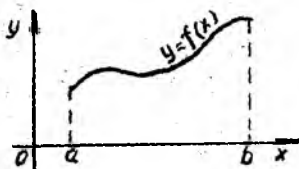
Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, бу функция графиги 4-чизмада кўрсатилган эгри чизик ёйини тасвирласин. Уни AB деб белгилайлик.

$[a, b]$ сегментнинг бирор $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$) бўлинишини олиб, унинг бўлувчи x_k ($k = 0, n$) нукталари орқали O_y ўқиға параллел тўғри чизиклар ўтказамиз.

Уларнинг AB ёйи билан кесишган нукталари

$$A_k = (x_k, f(x_k))$$

$$(A_0 = (a, f(a)), A_n = B = (b, f(b))), k = \overline{1, n-1} \text{ бўлсин.}$$



4-чизма

AB ёйдаги A_k ($k = \overline{0, n}$) нукталарни бир-бири билан тўғри чизик кесмалари ёрдамида бирлаштириб AB ёйига чизилган синик чизикни ҳосил қиламиз. Бу синик чизик периметрини L билан белгилайлик. Унда текисликда икки нукта орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб, $A_k = (x_k, f(x_k))$ ва $A_{k+1} = (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$

нукталар орасидаги масофа

$$|A_k - A_{k+1}| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

ва L синик чизик периметри

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \quad (1)$$

бўлишини топамиз.

Равшанки, синик чизик периметри $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ сегментнинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$L = L_p(f).$$

P бўлинишнинг бўлувчи нукталар сонини орттириб борилса, AB ёйига синик чизиклар шу AB ёйига яқинлаша боради.

1-таъриф. Агар AB ёйига чизилган синик чизик ($[a, b]$ ораликнинг ихтиёрий P бўлинишида) периметри

$$L_p = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

$\lambda_p \rightarrow 0$ да чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда AB ёй узунлигига эга деб аталади ва ушбу

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p = l$$

AB ёйнинг узунлиги дейилади.

Қаралаётган $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши билан бирга у шу сегментда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага ҳам эга бўлсин. Юқоридагидек, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлинишини олиб,

AB ёйига чизилган унга мос синик чизикни ҳосил қиламиз. Бу синик чизик периметри (1) формулага кўра

$$L_p = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Унда бу теоремага кўра шундай $\tau_k (x_k \leq \tau_k \leq x_{k+1})$ нукта топиладики,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k) (x_{k+1} - x_k)$$

бўлади. Натижада

$$\begin{aligned} L_p &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'(\tau_k)^2 (x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\tau_k)^2} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\tau_k)^2} \Delta x_k \end{aligned} \quad (2)$$

тенгликка келамиз.

Равшанки, $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ функция $[a, b]$ да узлуксиз. Бинобарин, у шу сегментда интегралланувчи. Бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'(\xi_k)^2} \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, унинг limiti $\{x_k, x_{k+1}\}$ ораликлардан олинган нукталарга боғлиқ эмас, Демак, $\xi_k = \tau_k$ ларда

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'(\tau_k)^2} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx \quad (3)$$

бўлади.

(2) ва (3) муносабатлардан

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_p = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса AB ёйининг узунлигига эга ва у

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx \quad (3')$$

бўлишини билдиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

функция тасвирлаган эгри чизик ёйининг узунлигини топинг.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Унда

$$1+f'^2(x) = 1 + \frac{9}{4}x, \quad \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$$

бўлиб, (3') формулага биноан

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

бўлади. Кейинги интегралда $1 + \frac{9}{4}x = t$ алмаштириш бажарамиз.

Унда $dx = \frac{4}{9}dt$ $1 \leq t \leq 10$ бўлиб,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx &= \frac{4}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{8}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \\ &= \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$l = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

2. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2p} \quad (p > 0)$$

параболанинг $[0, a]$ ораликдаги ($a > 0$) қисмининг узунлигини топинг. Аввало $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ни топамиз:

$$f'(x) = \frac{x}{p}, \quad 1+f'^2(x) = \frac{p^2+x^2}{p^2}, \quad \sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2}.$$

(3') формулага кўра қаралаётган эгри чизикнинг узунлиги

$$l = \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2+p^2} dx$$

бўлади. Энди ушбу

$$\int \sqrt{x^2+p^2} dx$$

аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$u = \sqrt{x^2+p^2}, \quad dv = dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+p^2}}, \quad v = x$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2+p^2} dx = x\sqrt{x^2+p^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+p^2}} &= \int \frac{x^2+p^2-p^2}{\sqrt{x^2+p^2}} dx = \int \frac{x^2+p^2}{\sqrt{x^2+p^2}} dx - p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \\ &= \int \sqrt{x^2+p^2} dx - p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \int \sqrt{x^2+p^2} dx - p^2 \ln|x + \sqrt{x^2+p^2}|. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int \sqrt{x^2+p^2} dx = x \cdot \sqrt{x^2+p^2} - \int \sqrt{x^2+p^2} dx + p^2 \ln|x + \sqrt{x^2+p^2}|.$$

Бу тенгликдан

$$2 \cdot \int \sqrt{x^2+p^2} dx = x \sqrt{x^2+p^2} + p^2 \ln|x + \sqrt{x^2+p^2}|$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + p^2}|$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{x^2 + p^2} dx = \frac{1}{p} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + p^2}| \right]_0^a = \\ &= \frac{1}{2p} a \sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln|a + \sqrt{a^2 + p^2}| - \frac{p}{2} \ln p \end{aligned}$$

бўлади.

Фараз қилайлик, AB ёй (эгри чизик)

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

тенгламалар системаси, билан яъни параметрик ҳолда берилган бўлиб, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да аниқланган, узлуксиз ва $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Бунда AB ёйи узунликка эга бўлиб, унинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (4)$$

формула ёрдамида топилади.

(4) тенгликнинг ўринлилигини (3') формула ёрдамида ҳамда аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласидан фойдаланиб келтириб чиқариш мумкин.

М и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} \varphi(t) = a \cdot (t - \sin t), \\ \psi(t) = a \cdot (1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

тенгламалар системаси билан аниқланган эгри чизикнинг (циклоиданинг) узунлигини топимиз.

$\varphi(t) = a(t - \sin t)$, $\psi(t) = a(1 - \cos t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(1 - \cos t), \\ \psi'(t) &= a \cdot \sin t. \end{aligned}$$

Унда

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2 \cdot 2 \cdot (1 - \cos t)$$

бўлиб,

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = a \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

бўлади.

(4) формулага кўра эгри чизикнинг узунлиги

$$l = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Демак,

$$l = 8a$$

Фараз қилайлик, AB эгри чизик кутб координата системасида

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \quad (5)$$

тенглик билан берилган бўлсин. Бунда $\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга.

Аввало (4) муносабат билан берилган эгри чизик тенгламасини параметрик кўринишда ифодалаб оламиз:

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos \theta, \\ \psi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

Сўнг (4) формуладан фойдаланиб AB эгри чизик ёйининг узунлигини топамиз:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\theta) \cdot \cos \theta - \rho(\theta) \cdot \sin \theta)^2 + (\rho'(\theta) \cdot \sin \theta + \rho(\theta) \cdot \cos \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'(\theta) \cdot \cos \theta - \rho(\theta) \cdot \sin \theta)^2 + (\rho'(\theta) \cdot \sin \theta + \rho(\theta) \cdot \cos \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Демак, (5) муносабат билан берилган эгри чизик ёйининг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \quad (6)$$

бўлади.

$$\rho = 2a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

эгри чизик (кардиода) ёйининг узунлигини топинг.

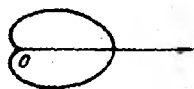
Бу ёпик чизик бўлиб, кутб ўкига нисбатан симметрик жойлашган (5- чизма). Шунинг учун эгри чизикнинг узунлиги, унинг кутб ўкининг юкорисида жойлашган қисми узунлигининг иккиланганига тенг бўлади. (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(2a(1 + \cos\theta))'^2 + (2a(1 + \cos\theta))^2} d\theta = \\ &= 2 \cdot 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2} d\theta = 4\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta = \\ &= 8a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 16a. \end{aligned}$$

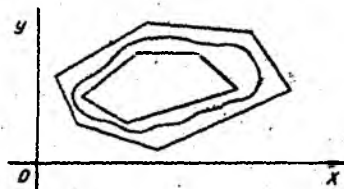
Демак, кардоида ёйининг узунлиги

$$l = 16a$$

бўлади.



5- чизма



6- чизма

2- §. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ЮЗИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

1°. Маълумки китобхон текис шакллар — учбурчак, тўғри тўртбурчак ва хоказоларнинг юзи тушунчаси билан мактаб математика курсидан таниш. Ушбу параграфда текисликда чегараланган шаклнинг юзи тушунчаси ва уни интеграл орқали ифодаланиши билан шуғулланамиз.

Текисликда бирор чегараланган (ρ) шаклни қарайлик (6- чизма). Бу шаклнинг ичига кўпбурчак чизамиз. Бундай кўпбурчаклар чексиз кўп бўлиб, улар ташкил топган тўпламни (A) орқали белгилаймиз. Худди шунга ўхшаш (ρ) шаклни ўз ичига олувчи кўпбурчак қараймиз. Бундай кўпбурчаклар ҳам чексиз кўп бўлиб, улардан ташкил топган тўплам (B) бўлиб.

(A) кўпбурчакларнинг юзини S_A билан, (B) кўпбурчакларнинг юзини S_B билан белгилаш натижасида (ρ) шаклга ички чизилган

кўпбурчак юзаларидан иборат $\{S_A\}$ тўплам, $\{p\}$ шаклни ўз ичига олган кўпбурчак юзаларидан иборат $\{S_B\}$ тўплам ҳосил бўлади. Равшанки, $\{S_A\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган. Шунинг учун $\{S_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{S_B\}$ тўплам эса аниқ қуйи чегарага эришади.

$$\sup\{S_A\}=P, \inf\{S_B\}=\bar{P}$$

2- т а ъ р и ф. Агар $p=\bar{p}$, яъни

$$\sup\{S_A\}=\inf\{S_B\}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (P) шакл юзага эга дейилади ва $P=\bar{P}=P$ миқдор (1) шаклнинг юзи дейилади.

2°. Энди (p) шакл сифатида юқоридан узлуксиз $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) функция графиги, ён томондан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиклар ҳамда пастдан Ox — ўқи билан чегараланган эгри чизикли трапецияни қарайлик (7- чизма). Бу эгри чизикли трапеция юзага эга эканини ва у аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

$[a, b]$ ораликнинг бирор $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$) бўлинишини олайлик. $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлгани учун бу ораликда чегараланган ва

$$\inf\{f(x)\}=m_k, \\ \sup\{f(x)\}=M_k$$

($x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, n-1$) лар мавжуд. (Каралсин, [7], 11- боб.)

Қуйидаги йиғиндиларни тузамиз.

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

Бу йиғиндилардан биринчиси $aABb$ эгри чизикли трапециянинг ичига чизилган кўпбурчак — тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисидан, иккинчиси эса бу эгри чизикли трапецияни ўз ичига олган кўпбурчак — тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисидан иборатдир.

Равшанки, бу кўпбурчаклар юзалари $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ ораликнинг бўлинишларига боғлиқ бўлади:

$$s=s_p(f), \quad S=S_p(f).$$

$[a, b]$ ораликнинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан $aABb$ эгри чизикли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу эгри чизикли трапецияни ўз ичига олган турли кўпбурчаклар ҳосил бўлади. Натижада бу кўпбурчаклар юзаларидан иборат қуйидаги $\{s_p(f)\}$, $\{S_p(f)\}$ тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{s_p(f)\}$ тўплам юқоридан $\{S_p(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг

$$\sup\{s_p(f)\} \quad \inf\{S_p(f)\}$$

аниқ чегаралари мавжуд.

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ихтиёрий бўлинишлари P учун ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда

$$\begin{aligned} \inf\{S_p(f)\} - \sup\{s_p(f)\} &\leq S_p(f) - s_p(f) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам бу бўлинишга мос $aABb$ эгри чизикли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу трапецияни ўз ичига олган қўлбурчак юзалари учун ҳар доим

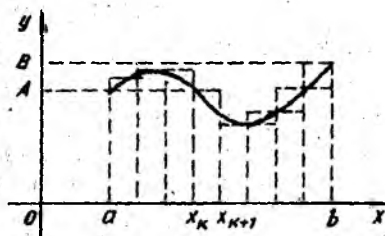
$$0 \leq \inf\{S_p(f)\} - \sup\{s_p(f)\} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

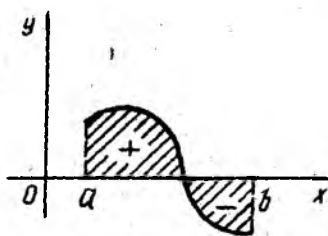
$$\inf\{S_p(f)\} = \sup\{s_p(f)\} \quad (7)$$

тенглик келиб чиқади.

(7) тенглик $aABb$ эгри чизикли трапециянинг юзага эга бўлишини билдиради.



7- чизма



8- чизма

3°. Энди бу трапеция юзининг интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. Маълумки, $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унинг интеграл йиғиндиси $\sigma_p = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$ учун

$$s_p < \sigma_p < S_p$$

тенгсизликлар ўринли. $\lambda_p \rightarrow 0$ да $s_p \rightarrow I$, $S_p \rightarrow I$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $\lambda_p \rightarrow 0$ да $\sigma_p \rightarrow I$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб $aABb$ эгри чизикли трапеция юзи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги интегралига тенг экан. Демак,

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

1-эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлиб, унда ишора сакламаса (8) формуладаги интеграл эгри чизикли трапециялар юзларининг йиғиндисидан иборат бўлади. Бунда Ox ўқининг юқорисидagi юза мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидagi юза манфий ишора билан олинади (8-чизма).

2-эслатма. Агар $f_1(x), f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз ва $\forall x \in [a, b]$ ларда $f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0$ бўлса, юқоридан $f_1(x)$, пастдан $f_2(x)$ функциялар графиги, ён томонларидан $x=a, x=b$ вертикал чизиклар билан чегараланган шаклнинг юзи

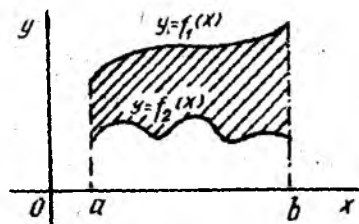
$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \quad (9)$$

формула орқали ифодаланади (9-чизма).

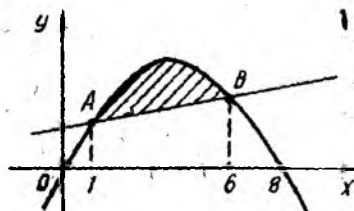
Мисол. Ушбу

$$4y = 8x - x^2, \quad 4y = x + 6$$

чизиклар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.



9-чизма



10-чизма

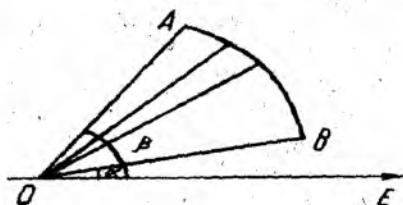
Бу чизиклардан бири парабола, иккинчиси тўғри чизик бўлиб, улар бир-бири билан $A(1; \frac{7}{5})$ ва $B(6; 3)$ нуқталарда кесишади (10-чизма). (9) формулага кўра

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \int_1^6 [(8x - x^2) - (x + 6)] dx = \frac{1}{4} \int_1^6 (7x - x^2 - 6) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 6x \right) \Big|_1^6 = 5\frac{5}{24} \text{ кв. бир} \end{aligned}$$

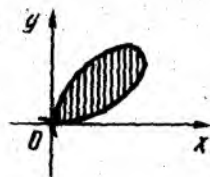
4°. Энди кутб координаталари системасида ушбу $\rho = \rho(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) функция тасвирлаган AB ёй ҳамда OA ва OB радиус — векторлар билан чегараланган шакл — эгри чизикли секторни қарайлик (11-чизма). Юқоридагига ўхшаш бу эгри чизикли сектор ҳам юзага эга эканлиги кўрсатилади ва у ушбу

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \quad (10)$$

формула орқали ҳисобланади.



11- чизма



12- чизма

Мисол. Ушбу

$$S = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}, \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

чизик билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Қаралаётган шаклнинг юзини (10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \right]^2 d\varphi = \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^{-2} d(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi) = \\ &= -\frac{1}{3} (1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^{-1} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Демак,

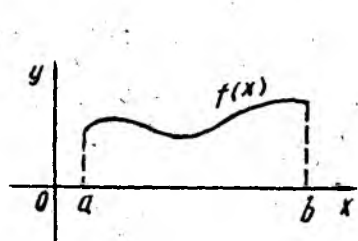
$$S = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3a^2}{2} \text{ кв. бир.}$$

Одатда, $\varphi = \frac{3a \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) чизик Декарт япроғи дейилади. Декарт япроғи билан чегараланган шакл 12- чизмада тасвирланган.

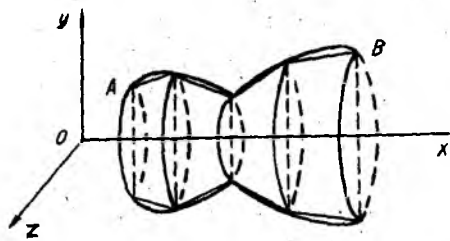
3-§. АЙЛАНМА СИРТ ЮЗИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geq 0$ бўлсин (13- чизма). $f(x)$ функция графигининг Ox ўқи атрофида айлантиришдан айланма сирт ҳосил бўлади (14- чизма).

Бу сирт юзасининг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $[a, b]$ ораликнинг ихтиёрий $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$) бўлинишини олайлик. P бўлинишнинг ҳар бир x_k ($k=0, 1, \dots, n$) бўлувчи нукталари орқали Oy ўқиға параллел



13- чизма



14- чизма

тўғри чизиклар ўтказиб, уларни AB ёй билан кесишган нукталарини $A_k(x_k, f(x_k))$ билан белгилайлик. Бу $A_k(x_k, f(x_k))$ ($k=0, 1, \dots, n$),

$$A_0=A, A_n=B$$

нукталарни ўзаро тўғри чизик кесмалари билан бирлаштириб AB ёйга L синик чизик чизамиз. AB ёйни ва L чизикни Ox ўқи атрофида айлантираемиз. Натижада L нинг айланишидан кесик конус сиртларидан ташкил топган сирт ҳосил бўлади. Бу сиртнинг юзи ушбу

$$Q=2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + [f(x_{k+1})-f(x_k)]^2} \quad (11)$$

формула билан ифодаланади.

P бўлинишнинг диаметри $\lambda_P \rightarrow 0$ да AB ёйига чизилган L синик чизик периметри AB ёйи узунлигига интилади. Демак, $\lambda_P \rightarrow 0$ да L синик чизикни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг юзаси Q нинг лимити биз қараётган айланма сиртнинг юзасини аниқлайди. Бу юзанинг аниқ интеграл орқали ифодасини топамиз.

Бунинг учун $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга деб оламиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлгани учун $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда шундай ξ_k нукта топиладики,

$$\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = f(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

тенглик ўринли бўлади. Иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда шундай τ_k нукта топиладики

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k)(x_{k+1} - x_k), \quad \tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. Натижада (11) мундсабат ушбу

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\tau_k)(x_{k+1} - x_k)^2} = \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot \Delta x_k \end{aligned} \quad (12)$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \Delta x_k$$

йиғинди

$$f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} \quad (12')$$

функциянинг интеграл йиғиндисини эслатади. (12') функция интегралланувчи бўлганлиги сабабли ξ_k нукта сифатида τ_k ни олиш мумкин.

$\lambda_p \rightarrow 0$ да (12) тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} Q &= \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot \Delta x_k = \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, айланма сиртнинг юзи учун ушбу

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

формула ўринли.

4-§. ЎЗГАРУВЧИ КУЧНИНГ БАЖАРГАН ИШИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

Фараз қилайлик, бирор жисм Ox ўқи бўйлаб F қуч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин. Бунда F қуч жисмнинг Ox ўқидаги ҳолатига боғлиқ. Шу $F = F(x)$ қучнинг йўналиши ва ҳаракат йўналиши устма-уст тушсин. Бу қуч таъсирида жисмни a нуктадан b нуктага ўтказишда бажарилган ишни топиш масаласи юзага келади. Маълумки, $F = F(x)$ қуч $[a, b]$ ораликда $F(x) = c$ ($c = \text{const}$) бўлса, жисмни a нуктадан b нуктага ўтказишда бажарган иш $A = c(b - a)$ формула билан ифодаланади.

$F=F(x)$ куч $[a, b]$ ораликда x ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлсин. $[a, b]$ ораликнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b)$$

бўлинишини олиб, бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) оралиғида ихтиёрий ξ_k ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$) нукта оламиз.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда жисмга таъсир этаётган $F(x)$ кучни ўзгармас $F(\xi_k)$ га тенг деб олсак, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда бажарилган иш тахминан $F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ формула билан, $[a, b]$ оралиғида бажарилган иш эса тахминан

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k \quad (13)$$

формула билан ифодаланади. Бу формула тақрибий бўлиб, $\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$ йиғинди $F=F(x)$ функция билан бир қаторда $[a, b]$ ораликнинг бўлинишига ҳамда $[x_k, x_{k+1}]$ ораликдан олинган ξ_k нукталарга боғлиқдир. P бўлиниш диаметри $\lambda_P \rightarrow 0$ да (13) йиғинди қиймати изланаётган иш микдорини тобора аниқроқ ифодалайди. $\lambda_P \rightarrow 0$ да (13) йиғинди $[a, b]$ ораликнинг бўлиниш усулига ҳамда ξ_k нукталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли A сонга интилса, бу A сон ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ ораликдаги бажарган иши деб аталади.

Демак,

$$A = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k.$$

$F(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз эканлигини эътиборга олсак,

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

формулага эга бўламиз.

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ ораликда бажарган иши

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

форма билан ифодаланади.

5-§. ГЕОМЕТРИК ШАКЛЛАРНИНГ СТАТИК МОМЕНТЛАРИ ВА ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИ ТОПИШ

Агар геометрик шакл юқоридан $y=y(x)$ пастдан Ox ўқи, ён томонидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган бўлса, бундай фигуранинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2(x) dx, \quad M_y = \int_a^b x \cdot y(x) dx$$

формулалар ёрдамида, оғирлик маркази эса

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S} \right)$$

формула топилади, бунда $S = \int_a^b y(x) dx$ — геометрик шаклнинг юзи.

4-БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§. СОНЛИ ҚАТОР ТУШУНЧАСИ. СОДДА ТЕОРЕМАЛАР

Бирор $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

кикий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ифода сонли қатор (қисқача қатор) дейилади, у $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ каби ёзилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots$ сонлар (1) қаторнинг ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади дейилади.

Масалан,

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

қаторда ҳар бир $1, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots$ сонлар шу қаторнинг ҳадлари $\frac{1}{(n-1)n}$ эса унинг умумий ҳади бўлади.

(1) қатор ҳадлари ёрдамида қуйидаги

$$A_1 = a_1,$$

$$A_2 = a_1 + a_2,$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\dots$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу (1) қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

Натижада (1) қатор берилган ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади.

2-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг limiti мавжуд ва чекли бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлса, (1) қатор яқинлашувчи дейилади. Бу мумосабатдаги A сон қаторнинг йиғиндиси дейилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A.$$

3-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг limiti чексиз ёки limiti мавжуд бўлмаса, (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Сўнг $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтамыз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси 2 га тенг.

2. Ушбу

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

қаторни қарайлик. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланиб берилган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

булишини топамиз. Равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

3. Ушбу

$$-1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{агар } n \text{ -- жуфт сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } n \text{ -- тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да унинг лимити мавжуд эмас. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4. Ушбу

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳадлари геометрик прогрессияни ташкил этгани учун уни геометрик қатор дейилади. Қаралаётган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

бўлиб, $|q| < 1$ бўлганда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

бўлади. Демак, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади. Геометрик қатор $|q| \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

5. Ушбу

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

қатор узоқлашувчи бўлади, чунки унинг қисмий йиғиндиси учун

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$$

бўлади.

Энди қатор ҳақидаги содда теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot A$ га тенг бўлади (c — ўзгармас сон).

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлади. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ қаторнинг қисмий йиғиндиси A'_n билан белгиласак, у ҳолда

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cA_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cA$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ қаторнинг яқинлашувчилигини ҳамда унинг йиғиндиси $c \cdot A$ бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B бўлсин. Унда бу қаторларнинг қисмий йиғиндилари

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{aligned}$$

учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$$

бўлади.

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қаторнинг қисмий йиғиндиси C_n билан белгилайлик. Унда

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \\ = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A + B$$

бўлади. Бу эса $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қаторнинг яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad (A \text{ — чекли сон})$$

бўлади. Равшанки,

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = A_{n-1} + a_n.$$

Бундан эса

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = A - A = 0$$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Эслатма. Бирор қаторнинг умумий хади $n \rightarrow \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши, ҳар доим келиб чиқмайди. Масалан,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

қаторнинг умумий хади $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да нолга интилади. Бирок бу қатор узоклашувчидир. Демак, 3-теорема қатор яқинлашишининг зарурий шартини ифода қилмайди.

2-§. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР. СОЛИШТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор берилган бўлсин. Агар бу қаторда

$$a_n \geq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

бўлса, у мусбат ҳадли қатор, қисқача мусбат қатор дейилади.

4-теорема. Мусбат

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ нинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

(Исбот. Зарурлиги. (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

бўлади. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликларнинг чегараланган бўлиши маълум. Шунинг учун $\{A_n\}$ юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлилиги. (2) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлсин. Равшанки,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$$

(чунки, $a_n \geq 0$). Бу эса $\{A_n\}$ нинг ўсувчи кетма-кетлик эканини билдиради. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Унда монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра, $\{A_n\}$ кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлади. Бу эса (2) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Натижа. Мусбат қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Энди 4-теоремадан фойдаланиб қуйида келтириладиган теоремаларни исботлаймиз.

5-теорема. Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

мусбат қаторлар берилган бўлсин. Агар бу қаторларда

$$a_n \leq b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

бўлса, у ҳолда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Исбот. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг қисмий йиғиндилари

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

учун (3) шартдан фойдаланиб

$$A_n \leq B_n \quad (4)$$

бўлишини топамиз.

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{B_n\}$ кетма-кетлик чегараланган, жумладан юқоридан чегараланган бўлади. (4) тенгсизликдан $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланган бўлиши келиб чиқади. 4-теоремага мувофиқ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади

Энди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Унда $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлади. (4) тенгсизликдан эса $\{B_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланмаганлиги келиб чиқади.

Натижага биноан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор узоқлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам исботланади.

6-теорема. Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

мушбат қаторлар берилган бўлсин. Агар бу қаторларда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

бўлса, у ҳолда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Одатда 5- ва 6- теоремалар солиштириш теоремалари дейилади.
Энди мусбат қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлашда кўп фойдаланиладиган Коши ҳамда Даламбер аломатларини келтирамиз.

Коши аломати. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

мусбат қаторнинг умумий ҳади a_n учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади,

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

И с б о т. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликдан

$$a_n \leq q^n$$

тенгсизлик келиб чиқади. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ геометрик қаторнинг яқинлашувчи

эқанини эътиборга олиб, 5-теоремадан фойдаланиб берилган

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

бўлса, унда $a_n \geq 1$ бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да a_n нинг лимити нолга тенг бўлмайди. Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди. Демак, бу ҳолда қатор узоқлашувчи. Коши аломати исбот бўлди.

Бу аломатнинг қуйидаги кўринишидан амалиётда кенг фойдаланилади.

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

бўлса, $q < 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи, $q > 1$ бўлганда қатор узоқлашувчи бўлади.

Даламбер аломати. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ мушбат қаторнинг a_n ва a_{n+1} ҳадлари ($n=1, 2, \dots$) учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мушбат қатор учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликни қуйидагича

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad (5)$$

ёзиш мумкин. Равшанки, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ геометрик қатор ($0 < q < 1$) яқинлашувчи. Унда (5) муносабатни эътиборга олиб, 6-теоремадан фойдаланиб берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

бўлса, унда $a_{n+1} \geq a_n$ бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да a_n нинг limiti нолга тенг бўлмайди. Бу ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади. Даламбер аломати исбот бўлди.

Бу аломатнинг қуйидаги кўринишидан амалиётда кенг фойдаланилади:

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

- бўлса, $q < 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи, $q > 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

қаторни солиштириш теоремаларидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Қаралаётган қаторда $a_n = \frac{1}{n^n}$.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

геометрик қатор бўлиб, у яқинлашувчидир. Бу қатор учун

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

$n \geq 3$ лар учун

$$a_n \leq b_n$$

эканлигини эътиборга олсак, 5-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ қаторнинг яқинлашувчилигидан $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ қаторнинг ҳам яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

2. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

қаторни солиштириш теоремаларидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг барча ҳадлари $a_n = \frac{1}{\ln n}$ учун $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатор узоқлашувчидир.

5-теоремага кўра $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Демак, қаралаётган қатор узоқлашувчи.

3. Ушбу

$$()) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

қаторни Коши аломатидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Қаралаётган қаторнинг умумий хади $a_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ учун

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

бўлади. $\frac{1}{e} < 1$ бўлгани учун Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

4. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$$

қаторни Даламбер аломатидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қатор учун

$$a_n = \frac{5^n n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$$

эканлигини эътиборга олиб $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нисбатни ҳисоблаймиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n n!} = \frac{5 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e}.$$

$5e > 1$ бўлгани учун Даламбер аломатига кўра берилган қатор узоқлашувчи.

3-§. ИХТИЁРИЙ ҚАТОРЛАР. ЛЕЙБНИЦ ТЕОРЕМАСИ

Биз 2-§ да мусбат ҳадли қаторларни қарадик. Энди ихтиёрий ҳадли сонли (ҳадларининг ишораси ихтиёрий бўлган) қаторларни қараймиз. Аввало бундай қаторларнинг яқинлашишини ифодалай диган теоремани исботсиз келтирамиз.

Фараз қилайлик

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (6)$$

ихтиёрий ҳадли сонли қатор бўлсин.

7-теорема. (6) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ сон топилиб, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \dots$ ларда $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Энди (6) ихтиёрий ҳадли қатор ҳадларининг абсолют кийматидан ушбу

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (6')$$

қаторни тузамиз. Равшанки, бу мусбат ҳадли қатор бўлади.

8-теорема. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи. Унда 7-теоремага биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \dots$ бўлганда

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Абсолют киймат хоссасидан фойдаланиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ қаторнинг ҳадлари учун}$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

7-теоремага асосан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Эслатма. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ихтиёрий ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқмайди.

4-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

5-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

Энди ихтиёрий ҳадли қаторларнинг битта муҳим хусусий холини — ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторларни қараймиз.

Ушбу

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + (-1)^{n-1} C_n + \dots \quad (7)$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади, бунда

Лейбниц теоремаси. Агар (7) қаторда $C_{n+1} < C_n$ ($n=1, 2, \dots$) бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

бўлса, (7) қатор яқинлашувчи бўлади.

И с б о т. Берилган (7) қаторнинг $2n$ ҳадидан иборат йиғиндиси

$$A_{2n} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + C_{2n-1} - C_{2n}$$

ни олайлик. Теореманинг $C_{n+1} < C_n$ ($n=1, 2, \dots$) шартидан фойдаланиб $\{A_{2n}\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи ҳамда юқоридан чегараланганлигини топамиз.

Аввало

$$A_{2n+2} = A_{2n} + (C_{2n+1} - C_{2n+2}) \geq A_{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлишидан $\{A_{2n}\}$ нинг ўсувчи экани келиб чиқади. Сўнг

$$\begin{aligned} A_{2n} &= C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + C_{2n-1} - C_{2n} = \\ &= C_1 - (C_2 - C_3) - (C_4 - C_5) - \dots - (C_{2n-2} - C_{2n-1}) - C_{2n} < C_1 \end{aligned}$$

бўлишидан эса $\{A_{2n}\}$ нинг юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. Шундай қилиб $\{A_{2n}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ҳамда юқоридан чегараланган. Демак, бу кетма-кетлик чекли лимитга эга:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} = A. \quad (8)$$

Энди берилган қаторнинг $2n+1$ та ҳадидан иборат қисмий йиғиндиси

$$A_{2n+1} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots - C_{2n} + C_{2n+1}$$

ни олайлик. Равшанки,

$$A_{2n+1} = A_{2n} + C_{2n+1}$$

бўлади. Теореманинг

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

шартидан ҳамда (8) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2n} + C_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n+1} = A + 0 = A. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган қаторнинг қисмий йиғиндиларида иборат кетма-кетлик $n \rightarrow \infty$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатдик. Бу эса қаторнинг яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

қаторни абсолют ёки шартли яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, бу қатор ишораси навбат билан ўзгариб келаётган қатор бўлиб, у Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиради:

$$1) C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, C_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{ лар учун } C_{n+1} < C_n,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Демак, қатор яқинлашувчи.

Энди қаторни абсолют ёки шартли яқинлашувчиликка текшира-
миз.

$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ учун $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатор узок-
лашувчи экани маълум (1-§ га қаралсин). Бундан берилган қаторни
шартли яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n(n+1)}$ қаторни абсолют яқинлашувчиликка
текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади $a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n(n+1)}$ учун

$$|a_n| = \left| (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ қатор яқинлашувчидир (1-§
га қаралсин). Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи.

4-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАР

1. Функционал кетма-кетлик тушунчаси.

Натурал сонлар тўплами N ва бирор X соҳада ($X \subset R$) аниқланган функциялар тўплами F берилган бўлсин. Ҳар бир натурал $n \in N$ сонга F тўпламдаги битта функцияни мос қўйиш

$$n \rightarrow u_n(x)$$

натижасида ҳосил бўлган

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (9)$$

тўплам функционал кетма-кетлик дейилади ва $\{u_n(x)\}$ каби белгиланади. Одатда $u_n(x)$ функция (9) функционал кетма-кетликнинг умумий ҳади дейилади.

Мисоллар. 1. Ҳар бир натурал n сонга $\frac{1}{n^2+x^4}$ функцияни мос қўйиш натижасида $(-\infty; +\infty)$ да берилган

$$\frac{1}{1^2+x^4}, \frac{1}{2^2+x^4}, \frac{1}{3^2+x^4}, \dots, \frac{1}{n^2+x^4}, \dots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади.

2. Ҳар бир натурал n сонга $n \sin \frac{x}{n}$ функцияни мос қўйиш натижасида $(-\infty, +\infty)$ да берилган ушбу

$$\sin x, 2 \sin \frac{x}{2}, 3 \sin \frac{x}{3}, \dots, n \sin \frac{x}{n}, \dots$$

функционал кетма-кетликка келамиз.

Фараз қилайлик, X тўпламда ($X \subset R$) бирор

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. X тўпламда x_0 нуқтани олиб, берилган функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадининг шу нуқтадаги қийматларини қарайлик. Улар

$$u_1(x_0), u_2(x_0), u_3(x_0), \dots, u_n(x_0), \dots \quad (9')$$

сонлар кетма-кетлигини ташкил этади.

6-таъриф. Агар (9') сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, у ҳолда $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади, x_0 нуқта эса яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.

$\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам, унинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси дейилади.

Айтайлик, M тўплам ($M \subset R$) $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. Унда M тўпламдан олинган ҳар бир

x нуктада функционал кетма-кетлик сонлар кетма-кетлиги айланиб, у яқинлашувчи, яъни чекли лимит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

га эга бўлади. M тўпладан олинган ҳар бир x га унга мос келади сонли кетма-кетликнинг чекли лимитини мос қўйсак, унда функцияга эга бўламиз. Уни $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси дейилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x).$$

Бу ҳолда $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M соҳада (M соҳанинг ҳар бир нуктасида) $f(x)$ га яқинлашади дейилади. Бошқача қилиб айтганда, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон ҳамда ҳар қандай x ($x \in M$) нукта олинганда ҳам шундай n натурал сон n (n олинган ε ва x ларга боғлиқ) топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

7- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, фақат ε га боғлиқ шундай n_0 натурал сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўплада $f(x)$ га текис яқинлашади дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{2+x}, \frac{1}{3+x}, \dots, \frac{1}{n+x}, \dots$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x) = 0$ бўлади, чунки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x} = 0.$$

2. Ушбу

$$\sin x, 2\sin \frac{x}{2}, 3\sin \frac{x}{3}, \dots, n\sin \frac{x}{n}, \dots$$

функционал кетма-кетлик ихтиёрий x ($x \in \mathbb{R}$) нуктада яқинлашувчи бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x) = x$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\sin \frac{x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot x = \\ &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \cdot 1 = x. \end{aligned}$$

2°. Функционал катор тушунчаси.
Энди функционал катор тушунчаси билан танишамиз.
Бирор X тўпламда ($X \subset R$)

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (9)$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

8-таъриф. (9) кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топган

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ифода функционал қатор дейилади. Уни қисқача $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби

ҳам ёзилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (10)$$

$u_1(x), u_2(x), \dots$ функциялар (10) қаторнинг ҳадлари, $u_n(x)$ эса унинг умумий ҳади дейилади.

(10) функционал қатор ҳадлари ёрдамида қуйидаги

$$\begin{aligned} s_1(x) &= u_1(x), \\ s_2(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ s_3(x) &= u_1(x) + u_2(x) + u_3(x), \\ &\vdots \\ s_n(x) &= u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \end{aligned}$$

йиғиндиларни тузамиз. Улар (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

Натижада (10) функционал қатор берилган ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{s_n(x)\}$:

$$s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), \dots \quad (11)$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади.

9-таъриф. Агар $n \rightarrow \infty$ да $\{s_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада ($x_0 \in X$) яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади.

$\{s_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси мос $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг яқинлашиш соҳаси дейилади. $\{s_n(x)\}$ нинг лимит функцияси $s(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг йиғиндисини дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

функционал (геометрик) қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳар би $u_n(x) = x^{n-1}$ ҳади $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган функциядир.

Геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисини топиш формуласи дан фойдаланиб берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унда $\forall x \in (-1, 1)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Берилган функционал қатор $(-1; 1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндисини $S(x) = \frac{1}{1-x}$ бўлади.

Агар $x > 1$ бўлса,

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty$$

бўлади.

Агар $x = 1$ бўлса,

$$S_n(x) = n$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty$$

бўлади.

Агар $x \leq -1$ бўлса,

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

бўлиб, $n \rightarrow \infty$ да $S_n(x)$ нинг limiti мавжуд бўлмайди.

Шундай қилиб, берилган геометрик қатор $|x| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|x| > 1$ ва $x = \pm 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Фараз қилайлик, M тўпلامда ($M \subset R$) бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (10)$$

функционал қатор берилган ва шу тўпلامда яқинлашувчи бўлиб, шунинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

10-таъриф. Агар (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик M тўпلامда $S(x)$ га текис яқинлашувчи бўлса, (10) функционал қатор M да текис яқинлашувчи дейилади.

9-теорема. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпلامда $S(x)$ га текис яқинлашиши учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. M тўпلامда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор текис яқинлашувчи бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик $S(x)$ га текис яқинлашади. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда M тўпلامнинг барча x нукталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса барча $n > n_0$ лар учун

$$\sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Етарлилиги. (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпلامда лимит функция $S(x)$ га ўга бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Равшанки,

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| \quad (x \in M).$$

Кейинги тенгликлардан эса $\forall x \in M$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (10) функционал қаторнинг $S(x)$ текис яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Қуйида функционал қаторнинг текис яқинлашишини таъминладиган, айти пайтда масалаларни ечишда кенг фойдаланиладиган аломатни исботсиз келтирамиз.

Вейерштрасс аломати. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $M (M \subset R)$ тўпламда

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

5-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Фараз қилайлик, $[a, b]$ сегментда бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг хусусий йиғиндиси $S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$, йиғиндиси эса $S(x)$ бўлсин.

1-хосса. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади

$u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлади.

Исбот. Аввало $[a, b]$ сегментда ихтиёрий x_0 нукта оламиз.

Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи. Унда

$\forall \varepsilon > 0$ сон олийганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (12)$$

тенгсизлик бажарилади. Жумладан $x = x_0$ да ҳам

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (12')$$

бўлади. Равшанки,

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, у $x = x_0$ нуктада ҳам узлуксиз. Унда таърифга биноан; юкоридаги $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (12'')$$

бўлади.

(12), (12') ва (12'') муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x_0)| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + \\ &+ S_n(x_0) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - \\ &- S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Таърифга кўра $S(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз. 1- хосса исбот бўлди.

2- хосса. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, қатор шу сегментда $S(x)$ га текис яқинлашувчи бўлса, ҳолда

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

бўлади.

И с б о т. Берилган $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $[a, b]$ да $S(x)$ га

текис яқинлашсин: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$. Унда таърифга биноан,

$\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in \mathbb{N}$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

тенгсизлик бажарилади, бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Шартга кўра ҳар бир $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) функция $[a, b]$ да узлуксиз.
Демак,

$$\int_a^b u_n(x) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

ҳам мавжуд.

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\begin{aligned} & \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx = \\ &= \int_a^b [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] dx = \int_a^b S_n(x) dx \end{aligned}$$

ни олиб

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx$$

айирмани қараймиз. Аниқ интегралнинг хоссасидан ҳамда (13) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\left| \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a)$$

Бундан эса

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx - \left(\int_a^b u_1(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

яъни

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

эқани келиб чиқади. 2- хосса исбот бўлди.

Одатда бу хоссани функционал қаторнинг ҳадлаб интеграллаш хоссаси дейилади.

3-хосса. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $[a, b]$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) $[a, b]$ да узлуксиз $u'_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) ҳосилага эга бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots$$

функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ қатор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S^*(x)$ дейлик:

$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (14)$$

Унда 2-хоссага кўра бу қаторни $[a, x]$ сегмент ($a < x \leq b$) бўйича хадлаб интеграллаш мумкин

$$\int_a^x S^*(t) dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt.$$

Равшанки,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Big|_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = \\ &= S(x) - S(a) \end{aligned}$$

Демак,

$$S(x) - S(a) = \int_a^x$$

Агар

$$\left(\int_a^x S^*(t) dt \right)' =$$

теңгизилсин
қатор абсолют
дарх
хнинг

эканини эътиборга олсак (2- боб, 3- § га қаралсин), унда

$$[S(x) - S(a)]' = \left(\int_a^x S^*(t) dt \right)' = S^*(x)$$

бўлиб,

$$S'(x) = S^*(x) \quad (14')$$

бўлади. Унда (14) ва (14') муносабатлардан

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

бўлишини топамиз. Хосса исбот бўлди.

Бу хоссани функционал каторнинг *хадлаб дифференциаллаш хоссаси* дейилади.

6- §. ДАРАЖАЛИ КАТОРЛАР

1. Даражали катор тушунчаси. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (15)$$

кўринишдаги катор *даражали катор* дейилади, бунда $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ ўзгармас ҳақиқий сонлар. Улар (15) даражали каторнинг *коэффициентлари* дейилади.

Масалан,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

даражали каторлардир.

Даражали каторлар 5- §. да ўрганилган функционал каторларнинг хусусий, яъни

$$u_n(x) = a_n x^n$$

бўлган ҳолидир.

10-теорема (Абель теоремаси). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

даражали катор $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда x нинг

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталарида даражали катор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Модомики даражали қатор $x=x_0$ ($x_0 \neq 0$) нуктада яқинлашувчи экан, унда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлади. Қатор яқинлашишининг зарурий шартидан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас $M > 0$ сон мавжуд бўлиб,

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad (16)$$

Равшанки, $|x| < |x_0|$ тенгсизликдан $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ бўлиши келиб чиқади. Демак, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

геометрик қатор яқинлашувчи. Унда (16) муносабатдан ҳамда 2-§ даги теоремадан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз. Бу эса берилган

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x_0 ($x_0 \neq 0$) нуктада яқинлашувчи бўлса, $y(-|x_0|, |x_0|)$ интервалда абсолют яқинлашувчи бўлишини ифодалайди (15-чизма).

11-теорема. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

даражали қатор $x=x_1$ нуктада узоқлашувчи бўлса, у ҳолда x нинг

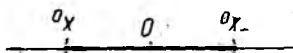
$$|x| > |x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

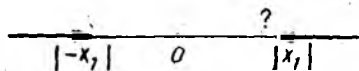
Исбот. Тескарисини фараз қилайлик. Берилган даражали қатор x_1 нуктада узоқлашувчи бўлса ҳам $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор x^* нуктада ($|x^*| > |x_1|$) яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда Абель теоремасига кўра бу қатор $|x| < |x^*|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нукталарда яқинлашувчи бўлади. Жумладан юқоридаги x_1 нуктада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса қаторнинг x_1 нуктада узоқлашувчи бўлиши шартига зиддир. Демак, қаралаётган даражали қатор x нинг $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Теорема исбот бўлди.

Бу теорема $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x_1 нуктада узоқлашувчи бўлса, у $(-\infty; -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ тўпلامда ҳам узоқлашувчи бўлишини ифодалайди (16- чизма).



15- чизма



16- чизма

2. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (15)$$

даражали қатор берилган бўлсин. Айтайлик, бу қатор x_0 ($x_0 \neq 0$) нуктада яқинлашувчи, x_1 нуктада узоқлашувчи бўлсин. Унда (15) даражали қатор 10- теоремаларга мувофиқ x нинг

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида яқинлашувчи,

$$|x| > |x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади. Равшанки, бунда $|x_0| < |x_1|$ бўлади. Агар (15) даражали қатор яна бирор x^* нуктада яқинлашувчи бўлса, унда

$$|x_0| \leq |x^*| < |x_1| \quad (17)$$

тенгсизлик бажарилади. Берилган даражали қаторнинг яқинлашувчи бўладиган нукталар тўпلامини $\{|x|\}$ билан белгилайлик. (17) муносабатдан $\{|x|\}$ тўпلامнинг юқоридан чегараланган бўлишини топамиз. Маълумки, бундай тўпلامнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Уни r билан белгилайлик:

$$\sup\{|x|\} = r. \quad (18)$$

Энди x нинг

$$|x| < r$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (15) даражали қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

(17) тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x олинганда ҳам, аниқ юқори чегара таърифига кўра шундай x^* топиладики, $|x| < |x^*| < r$ бўлиб, x^* нуктада қатор яқинлашувчи бўлади. Унда Абель теоремасига кўра x нуктада даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш x нинг

$$|x| > r$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (15) даражали қатор узоклашувчи бўлиши кўрсатилади.

Натижада, шундай r ($r > 0$) сон топиладики, (15) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоклашувчи бўлади.

11-таъриф. (18) *муносабат билан аниқланган r сони*
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади.*

$(-r, r)$ интервал шу даражали қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

(15) даражали қатор $x = \pm r$ нуктада яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоклашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

даражали қатор (геометрик қатор)нинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади. Бу қатор $r = \pm 1$ нуктада узоклашувчи, чунки

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots, \\ 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

сонли қаторлар узоклашувчидир.

2. Ушбу

$$1 + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, +1)$ бўлади. Бу қатор $r = \pm 1$ нуктада яқинлашувчи бўлади. Чунки,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots, \\ 1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots \end{aligned}$$

қаторлар яқинлашувчидир. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1, 1]$ сегментдан иборат.

Энди даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топиш имконини берадиган теоремаларни келтирамиз.

12-теорема. Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

даражали қатор берилган бўлсин. Агар бу қаторда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

лимит мавжуд бўлиб, $l \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{l}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l, \quad l \neq 0$$

бўлсин. Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = l \cdot |x|.$$

Коши аломатига кўра

$$l \cdot |x| < 1, \quad \text{яъни} \quad |x| < \frac{1}{l}$$

бўлганда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатор яқинлашувчи,

$$l \cdot |x| \geq 1, \quad \text{яъни} \quad |x| \geq \frac{1}{l}$$

бўлганда эса қатор узоклашувчи бўлади.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \frac{1}{l}$ га тенг бўлар экан. Теорема исбот бўлди.

13-теорема. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

даражали қаторда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

лимит мавжуд бўлиб, $l \neq 0$ бўлсин, у ҳолда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{l}$$

бўлади.

И с б о т. Айтайлик, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad l \neq 0,$$

бўлсин. Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = l \cdot |x|.$$

Даламбер аломатига кўра

$$l \cdot |x| < 1, \text{ яъни } |x| < \frac{1}{l}$$

бўлганда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатор яқинлашувчи,

$$l \cdot |x| > 1, \text{ яъни } |x| > \frac{1}{l}$$

бўлганда эса қатор узоклашувчи бўлади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \frac{1}{l}$ га тенг экан. Теорема исбот бўлди.

Э с л а т м а. Юкоридаги 12 ва 13-теоремаларда $l = 0$ бўлса, унда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \infty$ бўлади.

М и с о л л а р. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}} x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш интервалини топинг.

Берилган даражали қатор учун

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}} : \frac{(-1)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{3}$$

бўлади. Демак, қаралаётган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=3$, яқинлашиш интервали эса $(-3, 3)$ бўлади.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш интервалини топинг.

Берилган қатор учун

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2}$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

бўлади. Демак, қаралаётган қаторнинг яқинлашиш радиуси 2, яқинлашиш интервали эса $(-2, 2)$ бўлади.

3. Даражали қаторнинг хоссалари

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (15)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

1-хосса. Агар (15) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r ($r > 0$) бўлса, у ҳолда бу қатор $[-x_0, x_0]$ сегментда ($0 < x_0 < r$) текис яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $x_0 \in (-r, r)$ бўлганлиги сабабли

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot x_0^n = |a_0| + |a_1| \cdot x_0 + |a_2| \cdot x_0^2 + \dots + |a_n| x_0^n + \dots \quad (19)$$

сонли қатор яқинлашувчи. Равшанки, $\forall x \in [-x_0, x]$ учун

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot x_0^n \quad (19')$$

бўлади. Унда (19') муносабатдан ҳамда (19) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (Вейерштрасс аломатига қўра) берилган (15) даражали қаторнинг $[-x_0, x_0]$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Хосса исбот бўлди.

2-хосса. Агар (15) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r ($r > 0$) бўлса, у ҳолда бу қаторнинг йиғиндиси $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$(-r, r)$ да узлуксиз функция бўлади.

Исбот. Берилган даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ га тегишли бўлган ихтиёрий x_0 нуктани олайлик. Равшанки, $|x_0| < r$ бўлади. Унда $|x_0| < c < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи

c сони учун $[-c', c] \subset (-r, r)$ бўлиб, 1-хоссага кўра $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ да-

ражали катор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Текис яқинлашувчи функционал каторларнинг 1-хоссасидан фойдаланиб, берилган катор йиғиндиси $S(x)$ нинг $[-c, c]$ да узлуксиз, жумладан x_0 нуктада узлуксиз бўлишини топамиз. x_0 нукта $(-r, r)$ га тегишли ихтиёрий нукта бўлганлигидан катор йиғиндиси $S(x)$ нинг $(-r, r)$ интервалда узлуксиз экани келиб чиқади. Хосса исбот бўлди.

Текис яқинлашувчи функционал каторларнинг ҳадлаб интеграллаш ҳамда ҳадлаб дифференциаллаш хоссаларидан фойдаланиб даражали каторларнинг қуйидаги хоссалари ҳам исботланади.

3-хосса. Агар (15) даражали каторнинг яқинлашиш радиуси $r(r > 0)$ бўлса, бу каторни $[a, b]$ ($[a, b] \subset (-r, r)$) сегментда ҳадлаб интеграллаш мумкин.

4-хосса. Агар (15) даражали каторнинг яқинлашиш радиуси $r(r > 0)$ бўлса, $(-r, r)$ да бу каторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

4. Функцияни даражали каторга ёйиш. Маълумки, $f(x)$ функция $x=0$ нуктанинг $(-\delta, \delta)$ атрофида ($\delta > 0$) $f', f'', \dots, f^{(n)}$ тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (20)$$

Тейлор формуласи ўринли бўлар эди, бунда $r_n(x)$ қолдик ҳад.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(-\delta, \delta)$ да исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлсин. Бу ҳол

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

йиғинди ҳадлари сонини ҳар қанча катта қилиб олиш имконини бериб, қуйидаги

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots \quad (20')$$

даражали каторни ҳосил қилиш мумкин бўлади.

Одатда (20') даражали катор $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори дейилади.

14-теорема. $f(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда ($r > 0$) исталган тартибдаги ҳосиллага эга бўлсин. Бу функциянинг Тейлор қатори

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (20'')$$

яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлиши учун унинг Тейлор формуласи

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

даги $r_n(x)$ қолдик ҳад $n \rightarrow \infty$ да нолга интилиши зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги*. (20') қатор яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлсин:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots$$

Бу тенгликни куйидагича

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad (21)$$

ёзиш мумкин, бунда

$$S_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(20') қаторнинг қисмий йиғиндиси, $r_n(x)$ — қолдиқ ҳад. Равшанки, $\forall x \in (-r, r)$ да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Энди

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0 \quad (\forall x \in (-r, r))$$

бўлсин. Унда (21) муносабатга кўра

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

бўлиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0,$$

яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

бўлади. Бу эса (20') қаторнинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Демак, $f(x)$ функция $(-r, r)$ да ($r > 0$) 14-теореманинг шартларини қаноатлантирганда

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x)$ функция даражали қаторга ёйилган дейилади.

Энди баъзи элементар функцияларнинг Тейлор қаторларини келтирамиз.

а) $f(x) = e^x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x) = e^x$ функция ихтиёрий $[-a, a]$ да ($a > 0$) исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг Тейлор формуласи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

бўлади. Бунда қолдик ҳад Лагранж кўринишида қўйидагича

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1)$$

бўлади (қаралсин, [1], 20-боб). Ихтиёрий $x \in [-a, a]$ да

$$e^{\theta x} \leq e^a$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$|r_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a.$$

Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x) = e^x$ функциянинг Тейлор қатори

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

бўлади.

б) $f(x) = \sin x$ функциянинг Тейлор қатори. $f(x) = \sin x$ функция ихтиёрий $[-a, a]$ да ($a > 0$) исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг Тейлор формуласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x)$$

бўлади. Бу формуладаги қолдик ҳад $r_{2n}(x)$ нинг Лагранж кўринишидан фойдаланиб

$$|r_{2n}(x)| \leq \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n}(x) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x) = \sin x$ функциянинг Тейлор қатори

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

бўлади.

... в) $f(x) = \cos x$ функциянинг Тейлор қатори. б) ҳолдаги каби $f(x) = \cos x$ функциянинг Тейлор қатори

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

бўлиши келиб чиқади.

Функцияларни даражали қаторларга ёйишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд. Қуйида бундай усуллардан бирини келтирамиз. Айтайлик, $f(x) = \ln(1+x)$ функцияни даражали қаторга ёйиш лозим бўлсин. Бунинг учун, аввало, ушбу

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

қаторни қараймиз. Бу геометрик қатор бўлиб, $(-1, 1)$ да текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндиси $\frac{1}{1+x}$ га тенг ($q = -x$, қаралсин, [1], 20-боб). Демак,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

Кейинги тенгликни $[0, x]$ оралик бўйича ҳадлаб интеграллаб

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \dots,$$

яъни

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (22)$$

бўлишини топамиз. Равшанки, $x=1$ бўлганда (22) тенгликнинг ўнг томонидаги қатор

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

қўринишдаги сонли қатор бўлиб, у Лейбниц теоремасига қўра яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

қатор $(-1, 1]$ да яқинлашувчи бўлар экан.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интегрални тақрибий ҳисобланг.

$F(x) = e^x$ функциянинг даражали қаторга ёйилмаси

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

дан фойдаланиб

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

булишини топамиз.

Равшанки, ушбу

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}$$

тақрибий формуладан

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} \right) dx$$

келиб чиқади. Бу тақрибий тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} \right) dx = \\ & = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \frac{x^9}{4! \cdot 9} - \frac{x^{11}}{5! \cdot 11} + \frac{x^{13}}{6! \cdot 13} \right) \Big|_0^1 = \\ & = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0,7469. \end{aligned}$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,7468.$$

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ

Биз «Олий математика асослари»нинг 1- томида $y=f(x)$ функция тушунчаси билан танишдик ва уни батафсил ўргандик. Бунда функция битта эркли ўзгарувчи x гагина боғлиқ эди. Шунинг учун уни бир ўзгарувчи (бир аргументли) функция дейилган эди.

Табиатда, техникада учрайдиган кўпгина микдорлар бир неча эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, томонлари x ва y бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$S = x \cdot y$$

бўлиб, у икки x ва y ўзгарувчига боғлиқ.

Ер юзининг ҳар бир нуктасидаги ҳаво ҳарорати учта ўзгарувчи — шу нуктани аниқловчи параллел, меридиан ҳамда вақтга боғлиқ бўлади.

Шунга ўхшаш мисоллар жуда кўплаб учрайди.

Бир неча ўзгарувчига боғлиқ бўлган микдорларни ўрганиш: кўп ўзгарувчилик функция тушунчасини киритилишини ҳамда уни ўрганишни тақозо этади.

Соддалик учун икки ўзгарувчилик функцияларни қараймиз. Аввало R^2 фазо тушунчаси билан танишамиз.

1-§. R^2 ФАЗО ВА УНДАГИ БАЪЗИ БИР ТЎПЛАМЛАР

Икки x ва y ўзгарувчи микдорлар ($x \in R$, $y \in R$) берилган бўлиб, уларнинг қийматларидан (x, y) жуфтликларни ҳосил қиламиз. Бундай жуфтликлардан ташкил топган

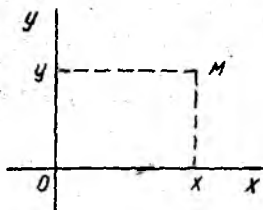
$$\{(x, y) : x \in R, y \in R\} \quad (1)$$

тўпламни қараймиз. (1) тўпламнинг элементи нукта дейилади ва уни битта ҳарф билан, масалан, M ҳарфи билан белгиланади:

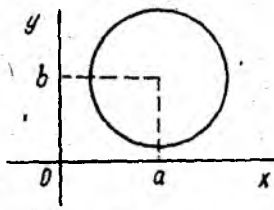
$$M = (x, y).$$

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, абсцисса ўқида x ўзгарувчининг қийматларини, ордината ўқида эса y ўзгарувчининг қийматларини жойлаштирамиз. У ҳолда (x, y) жуфтлик, текисликда координаталари x ва y бўлган M нуктани ифодалайди (17- чизма).

Ушбу $\{(x, y) : x \in R, y \in R\}$ тўпламда ихтиёрий икки (x_1, y_1) ҳамда (x_2, y_2) нукталарни олайлик. Равшанки, бу нукталар текисликда



17- чизма



18- чизма

координаталари x_1 ва y_1 бўлган M_1 нуктани, координаталари x_2 , y_2 бўлган M_2 нуктани ифодалайди. Аналитик геометрияда келтирилган формулага кўра бу нукталар орасидаги масофа

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

бўлади. Бу масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Ҳар доим $\rho(M_1, M_2) \geq 0$ бўлиб, $\rho(M_1, M_2) = 0$ да $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ва аксинча $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлганда $\rho(M_1, M_2) = 0$ бўлади.

2°. $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.

3°. $\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$

(бунда M_3 — координаталари x_3 ҳамда y_3 бўлган нукта).

Одатда

$$\{(x, y) : x \in R, y \in R\}$$

тўплам R^2 фазо (икки ўзгарувчи Евклид фазоси) дейилади.

Юқорида айтилганлардан R^2 фазонинг геометрик тасвири текисликдан иборат бўлишини кўрамыз.

Энди R^2 фазодаги (текисликдаги) баъзи бир тўпламларга мисоллар келтирамыз.

1. $(a, b) \in R^2$ нукта ҳамда бирор ўзгармас мусбат r сон берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in R^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\} \\ \{(x, y) \in R^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

тўплам R^2 фазода ёпиқ доира (очиқ доира) дейилади. Бунда (a, b) нукта доира маркази, r эса доира радиуси дейилади (18- чизма).

Қуйидаги

$$\{(x, y) \in R^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

тўплам айлана дейилади. У (2) доиранинг чегараси бўлади.

2. Айтайлик, a, b, c, d — ўзгармас ҳақиқий сонлар бўлиб, $a < b$, $c < d$ бўлсин. Ушбу

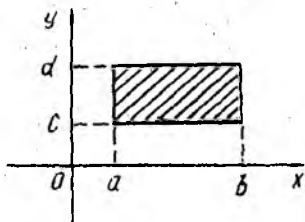
$$\begin{aligned} \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \\ \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\} \end{aligned}$$

тўплам R^2 фазода ёпиқ тўғри тўртбурчак (очиқ тўғри тўртбурчак) дейилади (19- чизма).

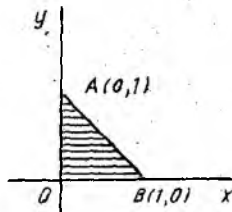
3. Ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: x \geq y, y \geq 0, x + y \leq h\}$$

тўплам R^2 фазода симплекс дейилади, бунда h — мусбат сон. Симплекс (simplex) латинча сўз бўлиб, у содда деган маънони англатади (20- чизма).



19- чизма



20- чизма

2- §. R^2 ФАЗОДА ОЧИҚ ҲАМДА ЁПИҚ ТЎПЛАМЛАР

R^2 фазода бирор $A = (a, b)$ нукта ҳамда ϵ мусбат сонни олайлик.

1- таъриф. Ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$$

очик доира A нуктанинг атрофи (ϵ -атрофи) дейилади ва уни $U(A, \epsilon)$ каби белгиланади:

$$U(A, \epsilon) = \{(x, y) \in R^2: (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}.$$

R^2 фазода бирор G тўплам берилган бўлсин.

2- таъриф. Агар G тўпламнинг $A = (a, b)$ нуктаси ўзининг бирор $U(A, \epsilon)$ атрофи билан бирга шу тўпламга тегишли, яъни

$$A = (a, b) \in G \Rightarrow \exists \epsilon > 0, U(A, \epsilon) \subset G$$

бўлса, у ҳолда A нукта G тўпламнинг ички нуктаси дейилади.

3- таъриф. Фақат ички нукталардан ташкил топган тўплам очик тўплам дейилади. Масалан, R^2 фазода очик доира очик тўплам бўлади.

4- таъриф. Агар $A = (a, b)$ нуктанинг исталган $U(A, \epsilon)$ атрофида ($\forall \epsilon > 0$) G тўпламнинг A нуктадан фарqli камида битта нуктаси бўлса, A нукта G тўпламнинг лимит нуктаси дейилади.

Равшанки, A нукта G тўпламнинг лимит нуктаси бўлса, A нуктанинг ихтиёрий атрофида G тўпламнинг чексиз кўп нукталари бўлади.

R^2 фазодаги қуйидаги

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$$

ёпиқ доиранинг ҳар бир нуктаси шу тўпламнинг лимит нуктаси бўлади.

R^2 фазодаги

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \quad (3)$$

очик доира

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

тўпламнинг ҳар бир нуктаси лимит нуктаси бўлади.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, тўпламнинг лимит нуктаси шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам мумкин, тегишли бўлмасдан қолиши ҳам мумкин экан.

5- таъриф. Агар F тўпламнинг ($F \subset R^2$) барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам дейилади.

Масалан, R^2 фазода ёпиқ доира ёпиқ тўплам бўлади. R^2 фазода бирор M тўпламни олайлик. Унда

$$R^2 \setminus M$$

тўплам M ни R^2 га тўлдирувчи тўплам дейилади.

Агар $A = (a, b) \in R^2$ нуктанинг ихтиёрий $U(A, \epsilon)$ атрофида ($\forall \epsilon > 0$) M тўпламнинг ҳам, $R^2 \setminus M$ тўпламнинг ҳам нуқталари бўлса, A нукта M тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади. M тўпламнинг барча чегаравий нуқталари унинг чегарасини ташкил этади. Одатда M тўпламнинг чегараси $\partial(M)$ каби ёзилади.

6- таъриф. Агар R^2 фазода шундай

$$U_0 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < r^2\}$$

очик доира топилсаки,

$$M \subset U_0$$

бўлса, M чегараланган тўплам дейилади.

Чегараланган ёпиқ тўплам компакт тўплам (ёки компакт) дейилади.

R^2 фазонинг (x, y) :

$$x = \alpha_1 t + \beta_1, \quad (c_1 \leq t \leq c_2)$$

$$y = \alpha_2 t + \beta_2$$

(бунда $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — ўзгармас сонлар) нуқталаридан ташкил топган

$$\{(x, y) \in R^2: x = \alpha_1 t + \beta_1, y = \alpha_2 t + \beta_2\}$$

тўплам равшанки, тўғри чизик ташкил қилади. R^2 фазода ихтиёрий (a_1, b_1) ва (a_2, b_2) нуқталарни олайлик. Унда ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: (x = a_1 + t(b_1 - a_1), y = a_2 + t(b_2 - a_2))\}$$

$$0 \leq t \leq 1$$

тўплам (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нукталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси бўлади. Чекли сондаги тўғри чизик кесмаларини бирлаштиришдан ташкил топган чизик *синик чизик* дейилади.

7-таъриф. R^2 фазода M тўпламни қарайлик. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини шу тўпламга тегишли бўлган синик чизик билан бирлаштириш мумкин бўлса, M боғламли тўплам дейилади.

8-таъриф. R^2 фазода очик ва боғламли бўлган тўплам соҳа деб аталади.

Масалан, R^2 фазодаги очик доира соҳа бўлади.

3-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Фараз қилайлик, R^2 фазода бирор M тўплам берилган бўлсин.

9-таъриф. Агар M тўпламдаги ҳар бир (x, y) нуктага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий u сони ($u \in R$) мос қўйилган бўлса, M тўпламда икки ўзгарувчили функция берилган (аниқланган) деб аталади ва уни

$$u = f(x, y)$$

каби белгиланади. Бунда M — функциянинг аниқланиш тўплами, x ва y эркин ўзгарувчилар функция аргументлари, u эса x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. R^2 фазонинг ҳар бир (x, y) нуқтасига $x^2 + y^2$ сонни мос қўйиб, ушбу

$$u = x^2 + y^2$$

функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами R^2 бўлади.

2: R^2 фазода $M = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ тўпламни олиб, унинг ҳар бир (x, y) нуқтасига $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ сонни мос қўйиш натижасида

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функция ҳосил бўлади. Бу функциянинг аниқланиш тўплами маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган ёпик доира $M = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ дан иборат.

Айтайлик, $u = f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \subset R$) берилган бўлсин. (x, y) нуқта M тўпламда ўзгарганда функция қийматлари ҳақиқий сонлар тўпламида ўзгариб, ушбу

$$\{f(x, y): (x, y) \in M\}$$

ҳақиқий сонлар тўпламини ҳосил қилади. Бу функциянинг қийматлари тўплами ёки функциянинг ўзгариш соҳаси (тўплами) дейилади.

Масалан, $u = x^2 + y^2$ функциянинг қийматлари тўплами $\{0, +\infty\}$ ярим интервалдан, $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциянинг қийматлари тўплами эса $[0, 1]$ сегментдан иборат бўлади.

Одатда ушбу

$$u = P_n(x, y) = C_{00} + C_{10}x + C_{01}y + C_{20}x^2 + C_{11}xy + C_{02}y^2 + \dots + C_{n0}x^n + \dots + C_{0n}y^n$$

функция n -тартибли *кўпхад* дейилади, бунда $C_{00}, C_{10}, \dots, C_{0n}$ — ўзгармас хақиқий сонлар. Бу функциянинг аниқланиш тўплами R^2 фазодан (бутун текисликдан) иборат.

Икки $P_n(x, y)$ ҳамда $Q_m(x, y)$ кўпхадлар нисбатидан ташкил топган

$$U = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$$

функция *рационал функция* дейилади. Унинг аниқланиш тўплами

$$M = \{(x, y) \in R^2: Q_m(x, y) \neq 0\}$$

бўлади.

Маълумки, бир ўзгарувчили функциянинг геометрик тасвири (графики) текисликда, умуман айтганда эгри чизикдан иборат бўлади.

Бир ўзгарувчили функциялар каби икки ўзгарувчили функцияларни ҳам геометрик тасвирлаш мумкин. Икки ўзгарувчили функцияларнинг геометрик тасвирлари (графиклари) умуман айтганда сиртлар бўлади.

Айтайлик, $u = f(x, y)$ функция M тўпланда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. M тўпландан (x_0, y_0) нуктани олиб, функциянинг шу нуктадаги қиймати $u_0 = f(x_0, y_0)$ ни топамиз. Натижада координаталари x_0, y_0, u_0 бўлган (x_0, y_0, u_0) нуктага эга бўламиз. Бу эса фазода нуктани тасвирлайди (21-чизма).

Фазода (x, y, u) нукталарнинг ушбу

$$\{(x, y, u): (x, y) \in M, u = f(x, y)\}$$

тўплами $u = f(x, y)$ функциянинг *графики* дейилади.

Масалан, $u = x^2 + y^2$ функциянинг графики 22-чизмада тасвирланган параболоидни ифодалайди.

Мазкур параграфнинг пировардида R^2 фазо нукталари кетма-кетлиги тушунчасини келтирамиз.

Фараз қилайлик, ҳар бир натурал n сонга R^2 фазонинг битта (x_n, y_n) нуктани мос қўювчи коида берилган бўлсин:

$$n \rightarrow (x_n, y_n).$$

Бу мослик R^2 фазо нукталаридан иборат ушбу

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

кетма-кетликни ҳосил қилади. Уни $\{(x_n, y_n)\}$ каби белгиланади. Равшанки, $\{(x_n, y_n)\}$ нукталар кетма-кетлигининг координаталаридан ташкил топган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар сонлар кетма-кетликлари бўлади.

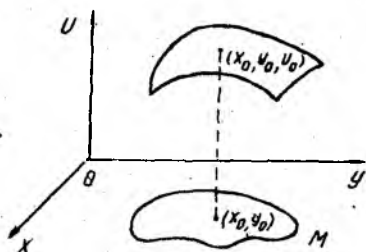
Масалан,

$$(1,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

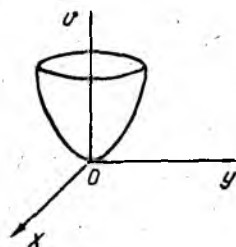
$$(1,0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, 0\right), \dots$$

$$(1,1), (-1, -1), \dots, ((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}), \dots$$

кетма-кетликлар R^2 фазо нукталаридан иборат кетма-кетликлардир.



21- чизма



22- чизма

4- §. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1°. Кетма-кетлик лимити. Аввало R^2 фазода кетма-кетлик лимити тушунчаси билан танишамиз.

Айтайлик, R^2 фазода бирор

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

кетма-кетлик ҳамда (a, b) нукта $((a, b) \in R^2)$ берилган бўлсин.

10- таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $\forall n > n_0$ учун

$$\rho((x_n, y_n), (a, b)) < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, (a, b) нукта $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

каби белгиланади.

Бу ҳолда $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик (a, b) нуктага интилади деб ҳам айтилади.

Масалан, $(0,0)$ нукта $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0).$$

1-теорема. Фараз қилайлик, R^2 фазода $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик (a, b) лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

У ҳолда бу $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик координаталаридан таъкил топган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, улар мос равишда (a, b) нуқтанинг координаталарига тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Исбот. Шартга кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Кетма-кетлик лимити таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\rho((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$\rho((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

Унда

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

бўлиб, кейинги тенгсизликдан

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon, \\ |y_n - b| &< \varepsilon \end{aligned}$$

келиб чиқади. Сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифидан фойдаланиб,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Фараз қилайлик, R^2 фазода $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, улар (a, b) нуқтанинг мос координаталарига тенг бўлсин:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

У ҳолда $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлиб, у (a, b) га тенг бўлади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Исбот. Теореманинг шартига кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ сонга кўра шундай натурал n'_0 сон топилади

$\forall n > n'_0$ учун

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

тенгсизлик бажарилади.

Шунингдек, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ сонга кўра шундай натурал n'_0 сон топиладики, $\forall n > n'_0$ учун

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

тенгсизлик бажарилади.

Айтайлик, $\max\{n'_0, n'_0'\} = n_0$ бўлсин. У ҳолда $\forall n > n_0$ учун би вақтда (4), (4') тенгсизликлар бажарилади. Шунинг эътиборга оли топамиз:

$$\begin{aligned} \rho((x_n, y_n), (a, b)) &= \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Келтирилган теоремалардан ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases}$$

муносабат келиб чиқади.

Демак, R^2 фазода кетма-кетликни ўрганиш сонлар кетма-кетлигининг лимитини ўрганишга келар экан.

Айтайлик, R^2 фазода M тўплам берилган бўлиб, (x_0, y_0) нукта $((x_0, y_0) \in R^2)$ шу M нинг лимит нуктаси бўлсин. Унда M тўплам нукталаридан тузилган ҳамда нуктага интилувчи $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $((x_n, y_n) \in M, n = 1, 2, \dots)$ мавжуд бўлади. Бундай кетма-кетлик чексиз кўп бўлади. Бу ҳолда 1-теоремага кўра $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги x_0 га, $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги эса y_0 га интилади.

2°. Функция лимити. M тўпламда $u = f(x, y)$ функция берилган бўлсин.

11-таъриф. Агар M тўплам нуқталаридан тузилган, (x_0, y_0) нуқтага интилувчи ҳар қандай $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0), n=1,2,\dots$ олинганда ҳам мос $\{f(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим ягона l га интилса, у ҳолда l $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги limiti дейилади ва уни

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \text{ ёки } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = l$$

каби белгиланади.

Функция лимитига қуйидагича ҳам таъриф бериш мумкин:

12-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $0 < \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y) \in M$ нуқталарда

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, l сон $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги limiti дейилади.

Функция лимитининг бу таърифлари ўзаро эквивалент таърифлардир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

функциянинг $(1, 1)$ нуқтадаги лимитини топинг.

R^2 нинг нуқталаридан тузилган ва $(1, 1)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетликни $(x_n, y_n) \neq (1, 1), n=1,2,\dots$ оламыз.

Унда

$$\{f(x_n, y_n)\} = \{x_n^2 + x_n \cdot y_n + y_n^2\}$$

бўлиб,

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (1,1)} f(x_n, y_n) = \lim_{\substack{x_n \rightarrow 1 \\ y_n \rightarrow 1}} (x_n^2 + x_n \cdot y_n + y_n^2) = 3$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 + xy + y^2) = 3.$$

2. Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $M = \{(x, y) \in R^2: x+y \neq 0\}$ тўпламда аниқланган. Берилган функция $(0,0)$ нуқтада лимитга эга бўлмайди, чунки $(0,0)$ нуқтага интилувчи

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}, \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$$

кетма-кетликлар учун

$$\left\{f\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\} = \left\{\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0}\right\} = \{1\},$$

$$\left\{f\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{-\frac{1}{n}+0}{0+\frac{1}{n}}\right\} = \{-1\}$$

бўлиб, уларнинг лимити 1 ва -1 , яъни бир-бирига тенг эмас.

3°. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари.

Фараз қилайлик, $\alpha(x, y)$ функция M тўпلامда аниқланган бўлиб, (x_0, y_0) эса M нинг лимит нуктаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \alpha(x, y) = 0$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x, y)$ функция $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да чексиз кичик функция дейилади.

3-теорема. *M тўпلامда берилган $f(x, y)$ функциянинг $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да чекли l лимитга эга бўлиши учун*

$$\alpha(x, y) = f(x, y) - l$$

нинг чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи функция лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

Биз [1] нинг 18-бобида чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларини келтирган эдик. Чекли лимитга эга бўлган икки ўзгарувчи функциялар ҳам мос хоссаларга эга бўлади. Қуйида лимитга эга бўлган икки ўзгарувчи функциянинг хоссаларини келтирамыз.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпلامда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in R^2$ эса M тўпلامнинг лимит нуктаси бўлсин.

1°. Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада чекли лимитга эга бўлса, шу (x_0, y_0) нуктанинг етарли кичик атрофида чегараланган бўлади.

2°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада чекли лимитга эга бўлиб, шу нуктанинг $U((x_0, y_0), \delta)$ атрофидаги барча нукталарида

$$f(x, y) \leq g(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y)$$

бўлади.

3°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \pm \lim_{y \rightarrow y_0} g(x, y)$$

бўлади.

4°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y) \cdot g(x, y)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \cdot \lim_{y \rightarrow y_0} g(x, y).$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада лимитга эга бўлиб, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)}{\lim_{y \rightarrow y_0} g(x, y)}$$

бўлади.

4°. Каррали ва такрорий лимитларни солиштириш. Юқорида келтирилган икки ўзгарувчилик функциянинг (x_0, y_0) нуктадаги лимити унинг *каррали лимити* дейилади.

Икки ўзгарувчилик функцияга нисбатан каррали лимитдан бошқача лимит тушунчаси ҳам киритилади.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция R^2 фазонинг

$$M = \{(x, y) \in R^2: |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$$

тўпламида берилган бўлсин.

$f(x, y)$ да y ўзгарувчини тайинласак (ҳозирча ўзгармас ҳисобласак), натижада у фақат x гагина боғлиқ бўлган функцияга айланади.

$x \rightarrow x_0$ да бу функциянинг лимити $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ мавжуд бўлсин дей-

лик. Равшанки, бу лимит тайинланган y нинг қийматига боғлиқ, бинобарин y нинг функцияси бўлади:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Энди $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(y)$ функциянинг лимитини қараймиз. Фараз қилайлик, $y \rightarrow y_0$ да $\varphi(y)$ функциянинг лимити

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$$

мавжуд бўлсин. Натижада $f(x, y)$ функциянинг аввал $x \rightarrow x_0$ да, сўнг $y \rightarrow y_0$ да лимити

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

га эга бўламиз. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг *такрорий лимити* дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳаза юритиш билан $f(x, y)$ функциянинг аввал $y \rightarrow y_0$ да, сўнг $x \rightarrow x_0$ даги

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

такрорий лимитига келамиз.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада битта

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$$

карралаи лимитга, иккита

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

такрорий лимитга эга бўлиши мумкин экан.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x-y}{x+3y}, & \text{агар } x+3y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x+3y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктада такрорий лимитларини топинг.

Бу функциянинг такрорий лимитларини топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{-y}{3y} = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{2x}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 2$$

бўлади.

2. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктадаги каррали ва такрорий лимитларини топинг.

Равшанки,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

бўлади. Бирок $x \rightarrow 0$ да $\sin \frac{1}{x}$ функция лимитга эга бўлмаганлиги сабабли берилган функциянинг

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$$

такрорий лимити мавжуд эмас.

Энди ушбу

$$|f(x, y) - 0|$$

айирмани баҳолаймиз:

$$|f(x, y) - 0| = \left| x + y \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|, \quad x \neq 0.$$

Бу тенгсизликдан эса $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ да $f(x, y) \rightarrow 0$ бўлишини кўрамыз.

Шундай қилиб, берилган функциянинг $(0, 0)$ нуктада битта такрорий ҳамда каррали лимити мавжуд бўлиб, улар нолга тенг бўлар экан.

Энди $f(x, y)$ функциянинг такрорий ҳамда каррали лимитлари орасидаги муносабатни ифодаловчи теоремаларни келтирамыз.

4-теорема. Агар $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг каррали лимити

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$$

мавжуд бўлиб, ҳар бир тайинланган x да

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

лимит мавжуд бўлса, y ҳолда ушбу

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = l$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг карралаи лимити

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$$

мавжуд. Лимит таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шунда $\delta > 0$ сон топиладики, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $(x, y) \in M$ нукталари учун

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon \quad (5)$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

лимитнинг мавжудлигини эътиборга олиб, (5) тенгсизликда $y \rightarrow y_0$ да лимитга ўтиб тодамиз:

$$|\varphi(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Бу эса

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = l$$

эканини билдиради. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = l.$$

Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

5-теорема. Агар $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг карралаи лимити

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$$

мавжуд бўлиб, ҳар бир тайинланган y да

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \Psi(y)$$

лимит мавжуд бўлса, y ҳолда ушбу

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = l$$

бўлади.

Энди $u = f(x, y)$ функциянинг лимити (карралаи лимити) мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Фараз қилайлик, $u=f(x, y)$ функция M тўпلامда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, (x_0, y_0) эса M нинг лимит нуктаси бўлсин.

6-теорема (Коши теоремаси). $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $0 < \rho((\bar{x}, \bar{y}), (x_0, y_0)) < \delta$ $0 < \rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x, y) \in M$, $(x, y) \in M$ ларда

$$|f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, y)| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

5-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЎЗЛУКСИЗЛИГИ

$u=f(x, y)$ функция M тўпلامда ($M \subset R^2$) берилган. (x_0, y_0) нукта M тўпلامнинг лимит нуктаси бўлиб, тўпلامга тегишли бўлсин.

13-таъриф. Агар $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлиб,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (6)$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада ўзлуксиз деб аталади.

Масалан, $f(x, y) = x^2 + y^2$ функция ихтиёрий $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтада ўзлуксиздир, чунки

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0).$$

Энди M тўпلامдаги (x_0, y_0) нуктанинг координаталарига мос равишда Δx ва Δy орттирмалар берамизки, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in M$ бўлсин. Агар

$$\begin{aligned} x_0 + \Delta x &= x, \\ y_0 + \Delta y &= y \end{aligned}$$

дейилса, u ҳолда $f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ бўлади.

Ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

айирма $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўлиқ орттирмаси дейилади.

$$x \rightarrow x_0 \text{ да } \Delta x \rightarrow 0 \text{ ва } y \rightarrow y_0 \text{ да } \Delta y \rightarrow 0$$

бўлишини эътиборга олиб, (6) тенгликдан топамиз:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \rightarrow 0 \\ y \rightarrow y_0 \rightarrow 0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow x_0 \\ \Delta y \rightarrow y_0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0.$$

Бу эса

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow x_0 \\ \Delta y \rightarrow y_0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

бўлганда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада узлуксиз дейилади дегараши мумкинлигини кўрсатади.

Функциянинг (x_0, y_0) нуктадаги узлуксизлигини куйидагича хатърифлаш мумкин.

14-таъриф. Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва (x_0, y_0) нуқтага интилувчи ҳар қандай $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $(x_n, y_n) \in M$, $n=1, 2, 3, \dots$ олинганда ҳам, мос $\{f(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим $f(x_0, y_0)$ га интилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади.

15-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y) \in M$ нуқталарда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади.

16-таъриф. Агар $f(x, y)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция M тўпламда узлуксиз дейилади.

Биз юқорида $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлигини таърифларини келтирдик. Бу таърифлар ўзаро эквивалент таърифлар.

17-таъриф. Агар $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, ёки

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty$$

бўлса, ёки

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \neq f(x_0, y_0)$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узилишга эга дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & \text{агар } x+y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x+y=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга бўлади, чунки $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас.

2. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x, y) \neq (0, 0) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } (x, y) = (0, 0) \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функция $(0, 0)$ нуктада узилишга эга бўлади, чунки

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

бўлиб, у $f(x, y)$ функциянинг $(0, 0)$ нуктасидаги қийматига ($f(0, 0) = 0$) тенг эмас.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ нуктада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$f(x, y) \pm g(x, y), f(x, y) \cdot g(x, y), \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (g(x, y) \neq 0)$$

функциялар ҳам (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлади.

Бу тасдиқлардан бирини, масалан икки функция йиғиндисининг узлуксизлиги исботини келтирамиз.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлганлигидан таърифга биноан $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $\rho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y) \in M$ нукталарда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} & |[f(x, y) + g(x, y)] - [f(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)]| = \\ & = |[f(x, y) - f(x_0, y_0)] + [g(x, y) - g(x_0, y_0)]| \leq \\ & \leq |f(x, y) - f(x_0, y_0)| + |g(x, y) - g(x_0, y_0)| < \\ & < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$|[f(x, y) + g(x, y)] - [f(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)]| < \epsilon$$

тенгсизликка келамиз.

Бу эса $f(x, y) + g(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлишини билдиради.

УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Узлуксиз функциялар қатор хоссаларга эга. Одатда улар теоремалар орқали ифодаланадилар.

1°. Больцано-Коши теоремаси. Агар $f(x, y)$ функция D соҳада ($D \subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу соҳадаги

иккита турли (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталарда ҳар хил ишорат қийматларга эга бўлса, у ҳолда D да шундай (ξ, η) нуқта топиладики,

$$f(\xi, \eta) = 0$$

бўлади.

Исбот. Аниклик учун $f(x, y)$ функциянинг (x_1, y_1) нуқтада қиймати $f(x_1, y_1)$ манфий ишорали: $f(x_1, y_1) < 0$, (x_2, y_2) нуқтада қиймати $f(x_2, y_2)$ мусбат ишорали: $f(x_2, y_2) > 0$ деб оламиз.

D соҳа, яъни боғламли очик тўпلام бўлганлигидан (x_1, y_1) , (x_2, y_2) нуқталарни бирлаштирувчи ҳамда D га тегишли бўлган P сини чизик мавжуд бўлади.

Бу P сини чизикнинг учлари (c_1, d_1) , (c_2, d_2) , ..., (c_n, d_n) бўлсин. Ушбу икки ҳолдан биттаси албатта бажарилади:

1) бирорта (c_i, d_i) нуқтада $f(c_i, d_i) = 0$ бўлади (бу ҳолда теорема исбот бўлади),

2) барча (c_i, d_i) ($i=1, 2, 3, \dots, n$) нуқталар учун $f(c_i, d_i) \neq 0$ бўлиб, бунда сини чизикнинг шундай (c_j, d_j) , (c_{j+1}, d_{j+1}) учлари мавжуд бўладики,

$$f(c_j, d_j) < 0, f(c_{j+1}, d_{j+1}) > 0$$

бўлади.

Энди (c_j, d_j) ва (c_{j+1}, d_{j+1}) нуқталарни бирлаштирувчи сини чизик кесмасини қараймиз. Бу кесманинг параметрик тенгламаси куйидагича

$$x = c_j + t(c_{j+1} - c_j), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$y = d_j + t(d_{j+1} - d_j)$$

бўлади.

Берилган $f(x, y)$ функцияни шу кесмада қарасак, унда $[0, 1]$ ораликда берилган ушбу

$$\varphi(t) = f(c_j + t(c_{j+1} - c_j), d_j + t(d_{j+1} - d_j)) \quad (7)$$

функция ҳосил бўлади. Бу функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\varphi(0) = f(c_j, d_j) < 0,$$

$$\varphi(1) = f(c_{j+1}, d_{j+1}) > 0$$

бўлади. Унда $[1]$ нинг 19- бобида келтирилган теоремага кўра, шундай t_0 нуқта ($t_0 \in [0, 1]$) топиладики,

$$\varphi(t_0) = 0$$

бўлади. (7) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$f(c_j + t_0(c_{j+1} - c_j), d_j + t_0(d_{j+1} - d_j)) = 0.$$

Энди

$$\xi = c_j + t_0(c_{j+1} - c_j), \eta = d_j + t_0(d_{j+1} - d_j)$$

деб оламиз. Равшанки, $(\xi, \eta) \in D$,

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Бу эса теоремани исботлайди. Узлуксиз функция кейинги хоссаларини ифодаловчи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

2°. Вейерштрасснинг биринчи теоремаси. Агар $f(x, y)$ функция M компакт тўпلامда ($M \subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция M да чегараланган бўлади.

3°. Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси. Агар $f(x, y)$ функция M компакт тўпلامда ($M \subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция M да ўзининг аниқ юкори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни M тўпلامда шундай (x_0, y_0) , (x_1, y_1) нукталар топиладики,

$$f(x_0, y_0) = \sup \{f(x, y)\},$$

$$f(x_1, y_1) = \inf \{f(x, y)\}$$

бўлади.

18- таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, M тўпلامнинг ($M \subset R^2$) $\rho((x', y'), (x'', y'')) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрый $(x', y') \in M$, $(x'', y'') \in M$ нукталарида

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ функция M тўпلامда текис узлуксиз дейилади.

7-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x, y)$ функция компакт $K \subset M \subset R^2$ тўпلامда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпلامда текис узлуксиз бўлади.

ИККИ ҲАДАРАВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ

$u=f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, (x_0, y_0) нукта шу M тўпламга тегишли бўлсин. Бу (x_0, y_0) нуктанинг биринчи координатаси x_0 га шундай Δx орттирма берайлики, $(x_0 + \Delta x, y_0) \in M$ бўлсин. Натижада $f(x, y)$ функция x ҳадаравчиси бўйича

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

орттирмага эга бўлади.

1-таъриф. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктада x ҳадаравчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \text{ ёки } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ ёки } f'_x(x_0, y_0)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктада y ҳадаравчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланади:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Мисоллар.

1. Ушбу

$$f(x, y) = e^{xy}$$

функциянинг $(1, 1)$ нуктадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Таърифга кўра:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1, 1 + \Delta y) - f(1, 1)}{\Delta y}$$

бўлиб,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{1+\Delta x} - e}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e.\end{aligned}$$

Худди шунга ўхшаш:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1, 1+\Delta y) - f(1, 1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{e^{1+\Delta y} - e}{\Delta y} = e.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = e, \quad \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = e.$$

2. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуктадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.
Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y}.$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta y^3}}{\Delta y} = 1.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 1.$$

Демак, $f(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланганда y ни ўзгармас, y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланганда x ни ўзгармас деб ҳисобланар экан. Бу ҳол 1-том, 20-боб, 4-§ да келтирилган бир ўзгарувчилик функциянинг ҳосиласини ҳисоблашда маълум бўлган жойда ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$u = f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Берилган функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи ни ҳисоблашда y ни ўзгармас деб топамиз:

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} + y\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}.$$

Худди шунга ўхшаш, функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда x ни ўзгармас деб топамиз:

$$f'_y(x, y) = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y + \frac{1}{x} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}.$$

2. Ушбу

$$u = x \cdot \ln \frac{y}{x}$$

функция қуйидаги

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

тенгламани каноатлантиришини кўрсатинг.

Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \ln \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [x(\ln y - \ln x)] = \\ &= 1 \cdot \ln y - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = \ln \frac{y}{x} - 1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [x \ln y - x \ln x] = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}.$$

Унда

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) + y \cdot \frac{x}{y} = x \cdot \ln \frac{y}{x} - x + x = x \cdot \ln \frac{y}{x} = u$$

бўлади. Бу эса берилган функция тенгламани каноатлантиришини билдиради.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \subset \mathbb{R}^2$) берилган бўлсин. Бу M тўпламда (x_0, y_0) ҳамда $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нуқталарни олиб функциянинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ни қараймиз.

2-таъриф. Агар $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ ни

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y \quad (1)$$

қўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда A, B — ўзгармас, α, β лар эса Δx ва Δy ларга боғлиқ ва $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$.

Агар $f(x, y)$ функция M тўпламининг ҳар бир нуктасида дифференциалланувчи бўлса, $f(x, y)$ функция M тўпланда дифференциалланувчи дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

функцияни $\forall (x_0, y_0) \in R$ да дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг (x_0, y_0) нуктадаги орттормасини топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) - x_0^2 - y_0^2 - x_0 y_0 = \\ &= (2x_0 + y_0)\Delta x + (2y_0 + x_0)\Delta y + (\Delta x + \Delta y)\Delta x + \Delta y\Delta y. \end{aligned}$$

Агар $A = 2x_0 + y_0$, $B = 2y_0 + x_0$, $\alpha = \Delta x + \Delta y$, $\beta = \Delta y$ дейилса,

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $\forall (x_0, y_0) \in R^2$ нуктада дифференциалланувчи эканини билдиради.

1-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуктада узлуксиз бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, функция шу нуктада $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B$$

бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу тенгликда, аввал $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ деб

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (2)$$

сўнг $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$ деб

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = B\Delta y + \beta\Delta y \quad (3)$$

бўлишини топамиз.

Юқоридаги (2) ва (3) тенгликларнинг ҳар икки томонида Δx ҳамда Δy ларга бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да ҳамда $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A,$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (B + \beta) = B$$

бўлади. Демак,

$$f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Теорема исбот бўлди.

Эслатма. $f(x, y)$ функциянинг бирор $(x_0, y_0) \in M$ нуктада $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжуд бўлишидан, функциянинг шу нуктада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

функцияни $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчанликка текширинг.

Маълумки бу функция $(0, 0)$ нуктада $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар 1 га тенг (2- мисолга қаранг). Функциянинг $(0, 0)$ нуктадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0, 0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3}.$$

Фараз қилайлик берилган функция $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Унда $\Delta f(0, 0) = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ бўлиб, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$.

$f'_x(0, 0) = 1$, $f'_y(0, 0) = 1$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\Delta f(0, 0) = \Delta x + \Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

келиб чиқади. Натижада ушбу

$$\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан $\Delta x = \Delta y$ бўлганда

$$\Delta x \sqrt[3]{2} = 2\Delta x + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta x,$$

яъни

$$\sqrt[3]{2} - 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow 0$ бўлишига зиддир. Зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб, функциянинг

$(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин деб қаралишидир. Демак, қаралаётган функция $(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас.

Энди $f(x, y)$ функциянинг $(x_0, y_0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодаловчи теоремани исботсиз келтирамиз.

3-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктанинг бирор атрофида (бу атроф M тўпламга тегишли) $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (x_0, y_0) нуктада узлуксиз бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлади.

Энди мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $F=f(u, v)$ функция $(u_0, v_0) \in R^2$ нуктанинг бирор $U(u_0, v_0)$ атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. u ҳамда v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u=\varphi(x, y), v=\psi(x, y)$$

бўлиб, $u_0=\varphi(x_0, y_0)$, $v_0=\psi(x_0, y_0)$ бўлсин. Бу функциялар ёрдамида қуйидаги

$$F=f(\varphi(x, y), \psi(x, y))=F(x, y)$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ҳамда $f(u, v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, u ҳолда мураккаб функция ҳам хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Бу хусусий ҳосилаларни қуйидагича топамиз:

x ўзгарувчига Δx орттирма берсак, унда $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ функциялар

$$\Delta_x u = \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y),$$

$$\Delta_x v = \psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)$$

орттирмаларга, $F=f(u, v)$ функция эса

$$\Delta_x F = f(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - f(u, v)$$

орттирмага эга бўлади. Бу $\Delta_x F$ нинг ифодасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\Delta_x F = \{f(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - f(u, v + \Delta_x v)\} + \{f(u, v + \Delta_x v) - f(u, v)\}.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан (қаралсин, 1-том, 20-боб. 7-§) фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} f(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - f(u, v + \Delta_x v) &= f'_u(u + \theta_1 \Delta_x u, v + \Delta_x v) \cdot \Delta_x u, \\ f(u, v + \Delta_x v) - f(u, v) &= f'_v(u, v + \theta_2 \Delta_x v) \Delta_x v \\ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

Натижада

$$\Delta_x F = f'_u(u + \theta_1 \Delta_x u, v + \Delta_x v) \cdot \Delta_x u + f'_v(u, v + \theta_2 \cdot \Delta_x v) \Delta_x v$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўлиб,

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = f'_u(u + \theta_1 \cdot \Delta_x u, v + \Delta_x v) \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u, v + \theta_2 \Delta_x v) \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

сўнг $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтсак,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'_u(u + \theta_1 \cdot \Delta_x u, v + \Delta_x v) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'_v(u, v + \theta_2 \Delta_x v) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \\ &= f'_u(u, v) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u, v) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \end{aligned}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлишини эътиборга олсак, кейинги тенгликдан

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди юқоридагидек

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4')$$

бўлиши топилади.

Шундай қилиб, (4) ва (4') формулалар

$$F(x, y) = f(u, v) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ларни топиш формулалари бўлар экан.

Мисол. Ушбу

$$F = (x+1)^{y+1}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Бу функция

$$F = u^v, \quad u = x+1, \quad v = y+1$$

функциялардан тузилган мураккаб функциядир. (4) ва (4') формулалардан фойдаланиб топамиз:

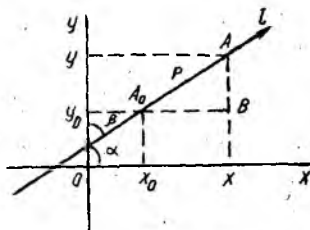
$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \cdot u^{v-1} \cdot 1 + u^v \ln u \cdot 0 = \\ &= (y+1)(x+1)^y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \cdot u^{v-1} \cdot 0 + u^v \cdot \ln u \cdot 1 = \\ &= (x+1)^{y+1} \cdot \ln(x+1).\end{aligned}$$

2-§. Йўналиш бўйича ҳосила

$f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий $A_0 = (x_0, y_0)$ нуктани олиб, у орқали тўғри чизик ўтказамиз ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул қиламиз. Йўналган бу тўғри чизикни l дейлик. l нинг мусбат йўналиши билан Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак α , Oy ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак эса β бўлсин (23- чизма).

Агар $A_0 = (x_0, y_0)$ ҳамда $A = (x, y) \in l$ нукталар орасидаги масофани ρ десак, унда тўғри бурчакли учбурчак A_0AB дан



23- чизма

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \cos \alpha, \quad \frac{y - y_0}{\rho} = \cos \beta$$

бўлиши келиб чиқади.

3- таъриф. Агар A нуқта l тўғри чизик бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A \rightarrow A_0$) ушбу

$$\frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A_0, A)} = \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\rho((x_0, y_0), (x, y))}$$

нисбатнинг limiti мавжуд бўлса, бу лимит $f(x, y) = f(A)$ функциянинг $A_0 = (x_0, y_0)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} \text{ ёки } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \lim_{A \rightarrow A_0} \frac{f(A) - f(A_0)}{\rho(A, A_0)}$$

$f(x, y)$ функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласининг мавжудлигини ҳамда $\frac{\partial f(x, y)}{\partial l}$ ни топишни қуйидаги теорема ифодалайди. Бу теоремани исботсиз келтирамиз.

4-теорема. Агар $f(x, y)$ функция $A_0 = (x_0, y_0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, y ҳолда функция шу нуктада ҳар қандай l йўналиш бўйича ҳосиллага эга ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

функциянинг $(1, 1)$ нуктадаги $(0, 0)$ нуктадан $(1, 1)$ нуктага қараб йўналган l чизик бўйича ҳосиласини топинг.

Равшанки, берилган функция $A_0 = (1, 1)$ нуктада дифференциалланувчи. Унда 4-теоремага кўра

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} \cos \frac{\pi}{4}$$

бўлади.

Энди

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

эканини топамиз.

3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

$f(x, y)$ функция M тўпلامда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. Унда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши таърифига кўра $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктадаги ортитирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

учун

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

бўлади, бунда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

4-таъриф. $f(x, y)$ функция орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ нинг Δx ҳамда Δy ларга нисбатан чизиқли бош қисми

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

$f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциали (тўлиқ дифференциал) деб аталади ва

$$df \text{ ёки } df(x_0, y_0)$$

каби белгиланади. Демак,

$$df = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Одатда $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$ лар $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги хусусий дифференциаллари дейилади ва улар мос равишда $dx f$, $dy f$ каби белгиланади:

$$dx f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x, \quad dy f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + 5xy^2 - y^3$$

функциянинг $(x, y) \in R^2$ нуқтадаги дифференциални топинг.

Берилган функциянинг (x, y) нуқтадаги хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 5xy^2 - y^3)_x = 2x + 5y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 5xy^2 - y^3)_y = 10xy - 3y^2$$

бўлиб, унинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = (2x + 5y^2) \Delta x + (10xy - 3y^2) \Delta y$$

бўлади.

Агар Δx ва Δy ларни мос равишда dx ва dy -га алмаштирсак, унда $f(x, y)$ функциянинг дифференциали куйидаги

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \quad (5)$$

кўринишга келади.

Фараз қилайлик, $F = f(u, v)$ функциянинг u ва v ўзгарувчилари ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

бўлиб, улар ёрдамида куйидаги

$$F = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y)$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуктада дифференциалланувчи бўлиб, $F = f(u, v)$ функция мос (u_0, v_0) нуктада ($u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$) дифференциалланувчи бўлса у ҳолда

$$dF = df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (6)$$

бўлади. Шунинг исботлаймиз.

$F = F(x, y)$ функциянинг дифференциали

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (7)$$

бўлади. Мураккаб функциянинг хусусий ҳосиласини топиш формулаларидан фойдалансак, унда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (8')$$

ҳосил бўлади. Натижада (6), (8) ва (8') муносабатлардан

$$\begin{aligned} dF = df &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right] + \frac{\partial f}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right] = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (9)$$

(6) ҳамда (9) муносабатларни солиштириб, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам унинг дифференциалининг кўриниши (6) дагидек бўлишини аниқлаймиз. Одатда бу хосса дифференциал шаклининг инвариантлиги деб аталади.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \subset R^2$) берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \end{aligned}$$

бўлади. Агар

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(x_0, y_0)}{df(x_0, y_0)} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y}{f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y} = 1$$

бўлиб, ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0),$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (10)$$

тақрибий тенгликка келамиз.

Мисол. Ушбу $1,08^{3,96}$ миқдорни тақрибий ҳисобланг.

Куйидаги

$$f(x, y) = x^y$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун (x_0, y_0) нуктада (10) формула-
ни ёзамиз:

$$(x_0 + \Delta x)^{y_0 + \Delta y} \approx x_0^{y_0} + y \cdot x^{y-1} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta x + x^y \ln x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot \Delta y.$$

Агар

$$x_0 = 1, y_0 = 4, \Delta x = 0,08, \Delta y = -0,04$$

дейилса, у ҳолда

$$(1 + 0,08)^{4 - 0,04} \approx 1 + y \cdot x^{y-1} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=4}} \cdot 0,08 + x^y \cdot \ln x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=4}} \cdot (-0,04) = \\ = 1 + 4 \cdot 0,08 = 1,32.$$

бўлади. Демак,

$$1,08^{3,96} \approx 1,32.$$

4-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

$f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \in \mathbb{R}^2$) берилган бўлиб, $\forall (x, y) \in M$ нуктада $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади.

5-т а ъ р и ф. $f(x, y)$ функция ҳосилалари $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ ларнинг хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосиласи дейилади.

$f'_x(x, y)$ нинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{xx}(x, y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_x(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right).$$

$f'_x(x, y)$ нинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{xy}(x, y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right).$$

$f'_y(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{yx}(x, y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right).$$

$f'_y(x, y)$ функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{y^2}(x, y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{y^2}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right).$$

Одатда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

га аралаш ҳосилалар дейилади.

Худди юқоридагидек, $f(x, y)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1) = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1) = 12x^2y^2 + 7x.$$

Энди 5-таърифдан фойдаланиб функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 8xy^3 + 7y) = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 + 8xy^3 + 7y) = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (12x^2y^2 + 7x) = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (12x^2y^2 + 7x) = 24x^2y.$$

5-теорема. $f(x, y)$ функция M тўпламда ($M \in R^2$) берилган бўлиб, y шу тўпламда f'_x, f'_y ҳамда f''_{xy}, f''_{yx} ҳосилаларга эга бўлсин. Агар f''_{xy}, f''_{yx} аралаш ҳосилалар $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, y ҳолда

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлади.

Исб от. (x_0, y_0) нуктанинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta x > 0, \Delta y > 0$ орттирмалар берайликки,
 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in M$

бўлсин. Сўнг ушбу

$$u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

ифодани қараймиз. Агар

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \\ \psi(y) &= f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) \end{aligned} \quad (11)$$

деб олинса, унда юқоридаги ифода учун

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0), \\ u &= \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) \end{aligned}$$

бўлади.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) &= \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \cdot \Delta x, \\ \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) &= \psi'(y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y, \\ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

Иккинчи томондан (11) муносабатдан $\varphi(x)$ ҳамда $\psi(y)$ функцияларнинг ҳосилаларини топиб, сўнг Лагранж теоремасини қўлласак, унда

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0) = f''_{xy}(x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y, \\ \psi'(y) &= f'_y(x_0 + \Delta x, y) - f'_y(x_0, y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y) \Delta x. \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади ($0 < \theta_3, \theta_4 < 1$). Натижада

$$u = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) \cdot \Delta x \Delta y,$$

$$u = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y$$

бўлади. Бунда эса ушбу

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \quad (12)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Шартга кўра f''_{xy} , f''_{yx} аралаш ҳосилалар (x_0, y_0) нуктада узлуксиз. Унда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) \rightarrow f''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \rightarrow f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлади. (12)' тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб,

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлишини топамиз. Бу тенглик теоремани исботлайди.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир (x, y) нуктасида дифференциалланувчи бўлсин.

Маълумки, бу функциянинг дифференциали

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad (13)$$

бўлади (бунда dx , dy лар x ва y ўзгарувчиларнинг Δx ҳамда Δy ортитирмаларидир).

6- т а ъ р и ф. $f(x, y)$ функциянинг (x, y) нуктадаги дифференциали $df(x, y)$ нинг дифференциали берилган $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва $d^2 f(x, y)$ каби белгиланади:

$$d^2 f(x, y) = d(df(x, y)).$$

(13) тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= d(df(x, y)) = d\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy\right] = \\ &= dx \cdot d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) + dy \cdot d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \\ &= dx\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dy\right] + dy\left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy\right] = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари орқали қуйидагича

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dy^2.$$

ифодаланар экан.

Функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юкоридагидек таърифланади.

Функциянинг кейинги тартибли дифференциалларини унинг хусусий ҳосилалари орқали ифодалаш борган сари мураккаблашиб боради. Юкори тартибли дифференциалларни символик равишда ифодалаш кулай бўлади.

$f(x, y)$ функциянинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

ни символик равишда (f ни қавсдан ташқарига чиқариб) қуйидагича ёзамиз:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f.$$

Унда

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f$$

деб қараш мумкин. Бу ерда қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнг f га «кўпайтирилади». Кейин $\frac{\partial}{\partial x}$ ва $\frac{\partial}{\partial y}$ ларнинг даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилалар тартиби деб қаралади.

Шундай йўл билан киритилган символик ифодалаш $f(x, y)$ функциянинг n - тартибли дифференциалини

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f$$

каби ёзиш имконини беради.

Энди мураккаб функциянинг юкори тартибли дифференциалларини топамиз.

Айтайлик, $F = f(u, v)$ функциянинг u ва v ўзгарувчилари ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

бўлиб, улар ёрдамида қуйидаги

$$F = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

$u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ функциялар (x, y) нуктада узлуксиз иккинчи тартибли барча хусусий ҳосилаларга, $F = f(u, v)$ функция эса мос (u, v) нуктада барча иккинчи тартибли узлуксиз хосилаларга эга бўлсин. Шунини эътиборга олиб топамиз:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

(16')

$$\begin{aligned}
 d^2f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right) = du \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial f}{\partial u}d(du) + \\
 &+ dv \cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}d(dv) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)du + d\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial v}d^2v = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2f + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v.
 \end{aligned}$$

Шу йўл билан берилган мураккаб функциянинг кейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

5-§. УРТА КИЙМАТ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

$f(x, y)$ функция M тўпلامда берилган бўлсин. Бу M тўпلامда (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нуқталарни олампизки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизик кесмаси

$$l = \{(x, y) \in R^2 : x = a_1 + t(b_1 - a_1), y = a_2 + t(b_2 - a_2)\}.$$

$0 \leq t \leq 1$ қаралаётган тўпلامга тегишли бўлсин.

6-теорема. Агар $f(x, y)$ функция l кесманинг (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда l кесмада шундай (c_1, c_2) нуқта топиладики,

$$f(a_2, b_2) - f(a_1, b_1) = f'_x(c_1, c_2) \cdot (a_2 - a_1) + f'_y(c_1, c_2) \cdot (b_2 - b_1)$$

бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функцияни l кесмада қараймиз. Унда

$$f(x, y) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))$$

бўлиб, у $[0, 1]$ сегментда берилган $F(t)$ функцияга айланади:

$$F(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)).$$

Бу $F(t)$ функция $(0, 1)$ да ҳосилага эга бўлади.

Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қондасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$F'(t) = f'_x(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)) \cdot (b_1 - a_1) + f'_y(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2)) \cdot (b_2 - a_2). \quad (14)$$

Шундай қилиб, $[0, 1]$ сегментда берилган $F(t)$ функция Лагранж теоремасининг шартларини бажарар экан. Лагранж теоремасига кўра $(0, 1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(1) - F(0) = F'(t_0) \cdot (1 - 0) \quad (15)$$

бўлади.

Равшанки,

$$F(0) = f(a_1, a_2), F(1) = f(b_1, b_2).$$

Юкоридати (14) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$F'(t_0) = f'_x(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2))(b_1 - a_1) + \\ + f'_y(a_1 + t_0(b_1 - a_1), a_2 + t_0(b_2 - a_2))(b_2 - a_2) = \\ = f'_x(c_1, c_2) \cdot (b_1 - a_1) + f'_y(c_1, c_2)(b_2 - a_2).$$

Бу ерда

$$c_1 = a_1 + t_0(b_1 - a_1), \\ c_2 = a_2 + t_0(b_2 - a_2)$$

деб белгиладик.

Натижада (15) тенглик ушбу

$$f(a_2, b_2) - f(a_1, b_1) = f'_x(c_1, c_2) \cdot (a_2 - a_1) + f'_y(c_1, c_2) \cdot (b_2 - b_1)$$

тенгликка келади $((c_1, c_2) \in I)$. Бу эса теоремани исботлайди.

6-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

$f(x, y)$ функция M соҳада ($M \subset \mathbb{R}^2$) берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ бўлсин. Бу (x_0, y_0) нуктанинг $U_\delta(x_0, y_0)$ атрофини ($U_\delta(x_0, y_0) \subset M$) олиб, унда шундай (x, y) нуктани қараймизки, ушбу

$$I = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : x' = x_0 + t(x - x_0), y' = y_0 + t(y - y_0)\}$$

кесма $U_\delta(x_0, y_0)$ га тегишли бўлсин ($0 \leq t \leq 1$).

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция $U_\delta(x_0, y_0)$ да барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо $(n+1)$ -тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлсин.

Агар $f(x, y)$ функцияни I кесмада қарайдиган бўлсак, унда

$$f(x, y) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

бўлиб, у t ўзгарувчининг функциясига айланади:

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \cdot (x - x_0) + \\ + f'_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \cdot (y - y_0),$$

$$F''(t) = f''_{xx}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0)^2 + \\ + 2f''_{xy}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0)(y - y_0) + \\ + f''_{yy}(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0)^2, \quad (16)$$

умуман,

$$F^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^k \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n+1)$$

Равшанки,

$$F(0) = f(x_0, y_0), \quad F(1) = f(x, y), \\ F^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^k \quad (16')$$

бўлади. Бу тенгликдаги $f(x, y)$ функциянинг барча хусусан хосилалари (x_0, y_0) нуктада ҳисобланган.

Бундай $F(t)$ функция учун 1-том, 20-боб, 8-§ да келтирилган ушбу

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t-t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n + R_n(t) \quad (17)$$

Тейлор формуласи ўринли бўлар эди, бунда $R_n(t)$ — қолдиқ ҳад. Унинг Лагранж кўринишдаги ифодаси

$$R_n(t) = \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t-t_0))}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

бўлади. Хусусан, $t=1$, $t_0=0$ бўлганда

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + F''(0) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \bar{R}_n(1)$$

бўлади. Юқоридаги (16), (16') ва (17) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y-y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x-x_0)(y-y_0) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y-y_0)^2 \right] + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^n} (x-x_0)^n + C_n^1 \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-1} \partial y} (x-x_0)^{n-1} (y-y_0) + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial y^n} (y-y_0)^n \right] + \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))}{\partial x^{n+1}} (x-x_0)^{n+1} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))}{\partial y^{n+1}} (y-y_0)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Бу формула икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг Тейлор формуласи дейилади.

Символик белгилашлар ёрдамида Тейлор формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y-y_0) \right) f + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y-y_0) \right)^2 f + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y-y_0) \right)^n f + R_n \quad (18)$$

бунда функциянинг барча хусусий ҳосилалари (x_0, y_0) нуктада ҳисобланган, қолдик ҳад эса

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y-y_0) \right)^{n+1} f$$

бўлиб, барча $(n+1)$ -тартибли хусусий ҳосилалар $(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))$ нуктада ҳисобланган $(0 < \theta < 1)$.

(18) формулада $x_0=0, y_0=0$ дейилса, унда

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y \right) f + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y \right)^2 f + \dots + \\ + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y \right)^n f + R_n^0$$

бўлиб,

$$R_n^0 = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y \right)^{n+1} f$$

бўлади. Бунда барча $(n+1)$ -тартибли хусусий ҳосилалар $(\theta x, \theta y)$ нуктада ҳисобланган $(0 < \theta < 1)$.

7-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМ ҚИЙМАТЛАРИ

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция M ($M \subset R^2$) тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ бўлсин.

Маълумки, ушбу

$$U_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in R^2: \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

$(\delta > 0)$ тўплам (x_0, y_0) нуктанинг атрофи деб аталар эди.

7-таъриф. Агар (x_0, y_0) нуктанинг M тўплагга тегишли $U_\delta(x_0, y_0)$ атрофи топилсаки, $\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) < f(x_0, y_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада максимумга (қатъий максимумга) эришади деб аталади, $f(x_0, y_0)$ қиймат эса $f(x, y)$ функциянинг максимум (қатъий максимум) қиймати дейилади.

Функциянинг максимум қиймати

$$f(x_0, y_0) = \max\{f(x, y)\} \quad ((x, y) \in U_\delta(x_0, y_0))$$

каби белгиланади.

8-таъриф. Агар (x_0, y_0) нуктанинг M тўплагга тегишли $U_\delta(x_0, y_0)$ атрофи топилсаки, $\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f(x_0, y_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада минимумга

(қатъий минимумга) эришади деб аталади, $f(x_0, y_0)$ қиймат эса $f(x, y)$ функциянинг минимум (қатъий минимум) қиймати дейилади.

Функциянинг минимум қиймати

$$f(x_0, y_0) = \min\{f(x, y)\} \quad ((x, y) \in U_\delta(x_0, y_0))$$

каби белгиланади.

$f(x, y)$ функциянинг максимум ҳамда минимуми умумий но билан унинг экстремуми дейилади.

7- ҳамда 8- таърифлардаги (x_0, y_0) нукта -мос равишда $f(x, y)$ функцияга максимум, минимум қиймат берадиган нукта дейилади.

7-теорема. Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада экстремумга эришса ва шу нуктада $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

бўлади.

Исб от. Айтайлик, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада максимумга эришиб, шу нуктада f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Унда таърифга кўра (x_0, y_0) нуктанинг $U_\delta(x_0, y_0) \subset M$ атрофи топиладики, $\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

жумладан

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

бўлади. Бу эса $f(x, y_0)$ — бир ўзгарувчи (x — ўзгарувчи) функциянинг $U_\delta(x_0, y_0)$ да энг катта қиймати $f(x_0, y_0)$ га эришишини билдиради. Унда 1- том, 20- боб, 7- § да келтирилган Ферма теоремасига биноан

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Э с л а т м а. $f(x, y)$ функциянинг бирор (x^*, y^*) нуктада f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга ва $f'_x(x^*, y^*) = 0, f'_y(x^*, y^*) = 0$ бўлишидан унинг (x^*, y^*) нуктада экстремумга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан,

$$f(x, y) = x \cdot y$$

функциянинг хусусий ҳосилалари

$$f'_x(x, y) = y, \quad f'_y(x, y) = x$$

$(0, 0)$ нуктада нолга айланади:

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Бирок бу функция $(0, 0)$ нуктада экстремумга эга эмас. (Бунга функция графиги-гиперболик параболоиднинг тасвиридан куриш мумкин. (Қаралсин [1], 15- боб, 4- §.)

Шундай қилиб, 7- теорема икки ўзгарувчи $f(x, y)$ функция экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалар экан.

$f(x, y)$ функция хусусий ҳосилалари f'_x, f'_y ларни нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар нуқталари* дейилади.

Энди икки ўзгарувчи функция экстремумга эришишнинг старли шартини топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция $f(x_0, y_0)$ нуқтанинг бирор $U_\delta f(x_0, y_0)$ атрофида берилган бўлсин.

Агар $\forall (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эга бўлади.

Агар $\Delta(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада максимумга эга бўлади.

Демак, $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришишини аниқлаш Δ айирманинг $U_\delta(x_0, y_0)$ да ишора саклашини кўрсатишдан иборат экан.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $U_\delta(x_0, y_0)$ да узлуксиз f'_x, f'_y ҳамда $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (19)$$

бўлсин.

6-§ да келтирилган Тейлор формуласидан фойдаланиб, (19) муносабатларни ҳисобга олиб топамиз:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \Delta y^2].$$

бунда

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, 0 < \theta < 1.$$

Унда

$$\Delta = \frac{1}{2} [f''_{xx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \Delta y^2] \quad (20)$$

бўлади.

Қулайлик учун қуйидаги белгилашларни қиламиз:

$$a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0),$$

$$a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0),$$

$$a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Δ айирманинг ишораси

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$$

микдорнинг ишорасига боғлиқ бўлади.

1⁰. $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ бўлсин. Бу ҳолда Δ нинг ишорасини аниқлаш учун уни қуйидагича

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} \left\{ f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta x + \right. \\ \left. + f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y \right\}^2 + (f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot \\ \cdot f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) - f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)) \cdot \Delta y^2 \} \quad (21)$$

ёзиб оламиз.

Айтайлик,

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = a_{11} > 0$$

бўлсин. Унда иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг ўзлуксиз бўлишидан

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) = a_{11} > 0,$$

шунингдек

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (f''_{xx}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \cdot f''_{yy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) - \\ - f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

келиб чиқади.

Δx ҳамда Δy лар етарлича кичик бўлганда (21) муносабатдан $\Delta \geq 0$ бўлишини топамиз.

Демак,

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0 \text{ ва } a_{11} > 0 \text{ бўлганда}$$

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0,$$

яъни

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада минимумга эришади.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} > 0$ бўлганда

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0,$$

яъни

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада максимумга эришади.

2⁰. $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлсин. Ушбу

$$a_{22}z^2 + 2a_{12}z + a_{11}$$

квадрат учхаднинг дискриминанти

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) > 0$$

бўлганлиги сабабли Δ айирма ишора сакламайди, яъни шундай α_1 , α_2 кийматлар топиладики,

$$a_{22}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1 + a_{11} > 0,$$

$$a_{22}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2 + a_{11} < 0$$

бўлади. Аввало

$$a_{22}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1 + a_{11} > 0$$

бўлган ҳолни қараймиз.

Иккинчи тартиб хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f_y'(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1^2 + 2f_{xy}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1 + f_{xx}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)] = a_{22}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1 + a_{11} > 0.$$

Унда (x_0, y_0) нуктанинг шундай $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ атрофи топиладики, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U_\varepsilon(x_0, y_0)$ бўлганда

$$f_y''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1^2 + f_{xy}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1 + f_{xx}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) > 0 \quad (22)$$

бўлади.

Энди (x_0, y_0) нуктанинг етарлича кичик $U_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$ атрофини олайлик. Унда шундай кичик ρ сон топиш мумкинки, $(x_0 + \rho, y_0 + \rho\alpha_1)$ нукта ҳам $U_\varepsilon(x_0, y_0)$, ҳам $U_{\varepsilon_0}(x_0, y_0)$ атрофга тегишли бўлади. Агар

$$\Delta x = \rho, \Delta y = \rho\alpha_1$$

дейилса, (20) ҳамда (22) муносабатлардан

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\rho^2 [f_{xx}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) + 2f_{xy}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1 + f_{yy}''(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\alpha_1^2] > 0$$

бўлади.

Шундай қилиб, (x_0, y_0) нуктанинг атрофида шундай $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нукта топиладики,

$$\Delta > 0$$

бўлади.

Шунга ўхшаш

$$a_{22}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2 + a_{11} < 0$$

бўлган ҳолда (x_0, y_0) нуктанинг атрофида шундай нукта $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ топилиши кўрсатиладики,

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0,$$

бўлади.

Демак, (x_0, y_0) нуктанинг атрофида Δ айирма ишора сақламайд.
Бу ҳолда $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуктада экстремуми бўлмайди.

3°. $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуктада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмасдан қолиш ҳам мумкин. Уни қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

функциянинг экстремумини топинг.

Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_x = 2x + y - 2,$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_y = x + 2y - 3.$$

Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб,

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва уни ечиб,

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad y_0 = \frac{4}{3}$$

бўлишини топамиз. Демак, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ нукта функциянинг стационар нуктаси.

Берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини ҳисоблаб, уларнинг стационар нуктадаги қийматларини топамиз:

$$f''_{xx}(x, y) = (2x + y - 2)'_x = 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = (2x + y - 2)'_y = 1,$$

$$f''_{yy}(x, y) = (x + 2y - 3)'_y = 2,$$

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2, \quad f''_{xy}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 1, \quad f''_{yy}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2,$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 2.$$

Энди $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ микдорни топамиз:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Демак, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} = 2 > 0$. Берилган функция $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ нуктада минимумга эришади. Функциянинг минимум қиймати $-\frac{7}{3}$ га тенг: $\min f(x, y) = -\frac{7}{3}$.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция чегараланган ёпик $\bar{D}$ ($\bar{D} \subset R^2$) соҳада берилган бўлсин. Равшанки,

$$\bar{D} = D \cup \partial D.$$

Қаралаётган функция $\bar{D}$ да узлуксиз бўлсин. Унда Вейерштрасс теоремасига биноан $f(x, y)$ функция $\bar{D}$ да ўзининг энг катта ҳамда энг кичик қийматларига эга бўлади. Функциянинг D даги энг катта (энг кичик) қиймати қуйидагича топилади:

1) $f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги максимум (минимум) қийматлари топилади,

2) $f(x, y)$ функциянинг ∂D даги максимум (минимум) қийматлари топилади.

1) ва 2) ҳоллардаги топилган максимум (минимум) қийматлар таққосланиб, улар орасидаги энг каттаси (энг кичиги) аниқланади. Бу $f(x, y)$ функциянинг $\bar{D}$ даги энг катта (энг кичик) қиймати бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$$

функциянинг

$$\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1\}$$

даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг, (24- чизма).

Равшанки,

$$\bar{D} = D \cup \partial D,$$

бунда $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < x+y < 1\}$,

$$\partial D = OA \cup AB \cup OB$$

Берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x + 2y = 2(x+y), \\ f'_y(x, y) = 2x - 6y + 1, \\ \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-6y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{8}, y = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Демак, $(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ нуқта функциянинг стационар нуқтаси. Бирок

бу нуқта D соҳага тегишли бўлмагани учун уни қарамаймиз.

Энди функцияни D соҳанинг чегараси ∂D да қараймиз.

а) $(x, y) \in OB$ бўлсин. Бунда $0 \leq x \leq 1, y=0$ бўлиб, берилган $f(x, y)$ функция қуйидаги

$$f(x, y) = x^2$$

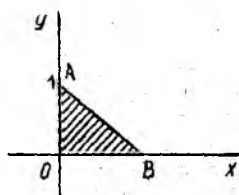
кўринишга эга бўлади. Равшанки, бу функциянинг OB даги энг кичик қиймати $f_1(0, 0) = 0$, энг катта қиймати $f_2(1, 0) = 1$ бўлади.

б) $(x, y) \in OA$ бўлсин. Бунда $x=0, 0 \leq y \leq 1$ бўлиб, берилган $f(x, y)$ функция қуйидаги

$$f(x, y) = -3y^2 + y$$

кўринишга эга бўлади. Бу функциянинг $[0, 1]$ даги экстремумини топамиз:

$$f' = -6y + 1; -6y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6}.$$



24- чизма

Демак, $(0, \frac{1}{6})$ стационар нукта. $f'' = -6$, демак $(0, \frac{1}{6})$ нуктада $f(x, y)$ максимумга эришиб, унинг максимум қиймати $f_3(0, \frac{1}{6}) = -\frac{1}{12}$ бўлади.

в) $(x, y) \in AB$ бўлсин. Бунда $x + y = 1$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) бўлади. $y = 1 - x$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$f(x, y) = f(x, 1-x) = x^2 + 2x(1-x) - 3(1-x)^2 + (1-x) = -4x^2 + 7x - 2.$$

Бу функциянинг экстремумини топамиз:

$$f' = -8x + 7; -8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{8},$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

Демак, $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$ стационар нукта. $f'' = -8$ бўлганлиги сабабли функция $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$ нуктада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$f_4(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}) = -4 \cdot (\frac{7}{8})^2 + 7 \cdot \frac{7}{8} - 2 = 1\frac{1}{16}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган мулоҳазаларда $A = A(0, 1)$ нукта эътибордан четда қолди. Шу сабабли берилган $f(x, y)$ функциянинг $(0, 1)$ нуктадаги қиймати

$$f_5(0, 1) = -2$$

ҳам ҳисобга олиниши лозим.

Функциянинг f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 қийматларини солиштириб, берилган функция $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$ нуктада энг катта қиймат $1\frac{1}{16}$ га, $(0, 1)$ нуктада энг кичик қиймат -2 га тенг бўлишини топамиз.

8-§. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯЛАР

Икки x ва y ўзгарувчиларни боғловчи ушбу

$$F(x, y) = 0 \quad (23)$$

тенгламани қарайлик.

x ўзгарувчи қийматини олиб, уни (23) тенгламадаги x нинг ўрнига қўямиз. Натижада y ни топиш учун

$$F(x_0, y) = 0 \quad (23')$$

тенглама ҳосил бўлади.

Айтайлик, (23') тенглама ягона y_0 ечимга эга бўлсин. Унда, равшанки,

$$F(x_0, y_0) = 0$$

бўлади.

Энди X ($X \subset R$) тўплам x ўзгарувчининг қийматларидан иборат шундай тўплам бўлсинки, бу тўпламдан олинган ҳар бир x ($x \in X$) қийматда

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ягона y ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан ихтиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га кўрсатилган кондага кўра битта y ни мос қўядиган $y = f(x)$ функция ҳосил бўлади. Одатда бундай аниқланган функция *ошқормас функция* дейилади.

Демак, ошқормас функция $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида аниқланар экан.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = y\sqrt{1-x^2} - 2 = 0 \quad (24)$$

тенглама ошқормас функцияни аниқлайдими?

Агар x ўзгарувчининг $(0, 1)$ интервалдаги ихтиёрий x_0 қийматига y ўзгарувчининг

$$y_0 = \frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

қийматини мос қўйсак, унда

$$F(x_0, y_0) = y_0 \cdot \sqrt{1-x_0^2} - 2 = \frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}} \cdot \sqrt{1-x_0^2} - 2 = 0$$

бўлишини топамиз. Демак, (24) тенглама ошқормас функцияни аниқлайди.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$$

тенглама ошқормас функцияни аниқлайдими?

Бу тенглама x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ ораликдан олинган ҳеч бир қийматида ечимга эга эмас. Демак, берилган тенглама ошқормас функцияни аниқламайди.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, $F(x, y) = 0$ тенглама ҳар доим ҳам ошқормас функцияни аниқлайвермас экан.

Қуйида $F(x, y)$ функция қандай шартларни бажарганда

$$F(x, y) = 0$$

тенглама ошқормас функцияни аниқлашини, яъни ошқормас функциянинг мавжуд бўлишини ифодаловчи теоремани исботсиз келтираемиз.

8-теорема. $F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг $((x_0, y_0) \in R)$ бирор $U_\delta(x_0, y_0)$ атрофида ($\delta > 0$) аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар (x_0, y_0) нуқтада

$$1) F(x_0, y_0) = 0,$$

$$2) F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

бўлса, у ҳолда x_0, y_0 нуқталарнинг шундай $U_{\delta_0}(x_0), U_{\delta_0}(y_0)$ атрофлари ($\delta_0 > 0$) топилдики, $\forall x \in U_{\delta_0}(x_0)$ учун $F(x, y) = 0$ тенглама ягона $y \in U_{\delta_0}(y_0) (y = f(x))$ ечимга эга ва

$$1) f(x_0) = y_0$$

2) $f(x)$ функция $U_{\delta_0}(x_0)$ да узлуксиз ҳосиллага эга ва

$$f'(x) = - \frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad (x \in U_{\delta_0}(x_0)) \quad (*)$$

бўлади.

Одатда бу теорема ошкормас-функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теорема дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = xy + x + y - 1$$

функцияни қарайлик.

Бу функция, масалан, $x_0 = 2, y_0 = -\frac{1}{3}$, яъни $(2, -\frac{1}{3})$ нуқтанинг $U_\delta(2, -\frac{1}{3})$ атрофида узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$F'_x(x, y) = y + 1, F'_y(x, y) = x + 1$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$F(2, -\frac{1}{3}) = 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 + (-\frac{1}{3}) - 1 = 0,$$

$$F'_y(2, -\frac{1}{3}) = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $(2, -\frac{1}{3})$ нуқтанинг атрофида

8-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Унда шу теоремага кўра

$$F(x, y) = xy + x + y - 1 = 0$$

тенглама $(2 - \delta_0, 2 + \delta_0)$ атрофда ошкормас функцияни аниқлайди.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нуқтанинг $U_\delta(0, 0)$ атрофида ($\delta > 0$) узлуксиз, узлуксиз

$$F'_x(x, y) = 1, F'_y(x, y) = -1 + \frac{1}{2} \cos y$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$F(0, 0) = 0, \\ F'_y(0, 0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0, 0)$ нуктанинг атрофида 8-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Унда шу теоремага кўра

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$$

тенглама $(-\delta_0, \delta_0)$ атрофда $(\delta_0 > 0)$ ошқормас функцияни аниқлайди.

3. Ушбу

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошқормас функциянинг ҳосиласини топинг.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)'_x = 2x, \\ F'_y(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)'_y = 2y.$$

Унда (*) тенгликка кўра ошқормас функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{x}{y}$$

бўлади.

4. Ушбу

$$F(x, y) = x \cdot e^y + ye^x - 2 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошқормас функциянинг ҳосиласини топинг.

Аввало $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$F'_x(x, y) = (xe^y + ye^x - 2)'_x = e^y + ye^x, \\ F'_y(x, y) = (xe^y + ye^x - 2)'_y = xe^y + e^x.$$

Ошқормас функциянинг ҳосиласи

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлади.

Агар $F(x, y) = 0$ тенглама $y = f(x)$ ошқормас функцияни аниқлаб, функция барча иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, унда ошқормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳам ҳисоблаш мумкин.

Иккинчи тартибли ҳосила таърифига биноан

$$y'' = (y')'$$

булади. Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қондасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right)' = \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right)'_x + \\ &+ \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right)'_y \cdot y' = -\frac{F'_y(x, y) \cdot F''_{x^2}(x, y) - F'_x(x, y) \cdot F''_{xy}(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} - \\ &- \frac{F'_y(x, y) \cdot F''_{xy}(x, y) - F'_x(x, y) \cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} \cdot \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \right) = \\ &= -\frac{(F'_y(x, y))^2 \cdot F''_{x^2}(x, y) - 2F''_{xy}(x, y) \cdot F'_x(x, y) \cdot F'_y(x, y) + (F'_x(x, y))^2 \cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3} \end{aligned}$$

Демак,

$$y'' = -\frac{(F'_y(x, y))^2 \cdot F''_{x^2}(x, y) - 2F''_{xy}(x, y) \cdot F'_x(x, y) \cdot F'_y(x, y) + (F'_x(x, y))^2 \cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3} \quad (**)$$

Мисол. Ушбу

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошқормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Аввало ошқормас функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(x, y) = 2x + y, \quad F'_y(x, y) = x + 2y,$$

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

Равшанки,

$$F''_{x^2}(x, y) = 2, \quad F''_{xy} = 1, \quad F''_{y^2}(x, y) = 2.$$

Унда (**) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{(x + 2y)^2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (2x + y)(x + 2y) + (2x + y)^2 \cdot 2}{(x + 2y)^3} = \\ &= -\frac{2x^2 + 8xy + 8y^2 - 4x^2 - 2xy - 8xy - 4y^2 + 8x^2 + 8xy + 2y^2}{(x + 2y)^3} = \\ &= -\frac{6x^2 + 6xy + 6y^2}{(x + 2y)^3} = -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3} = -\frac{6 \cdot 3}{(x + 2y)^3} = -\frac{18}{(x + 2y)^3}. \end{aligned}$$

Демак,

$$y'' = -\frac{18}{(x + 2y)^3}.$$

***m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР**

«Олий математика асослари»нинг 1-томида бир ўзгарувчилик функция, мазкур китобнинг 5, 6-бобларида эса икки ўзгарувчилик функциялар батафсил ўрганилди.

Фан ва техниканинг турли соҳаларида учрайдиган кўпгина масалалар эркин ўзгарувчиларнинг сони иккидан ортиқ бўлган функцияларга боғлиқ бўлиши ҳам мумкин. Бу эса ўз навбатида *m* ўзгарувчилик ($m > 2$) функцияларни ўрганишни тақозо этади.

m ўзгарувчилик функциялар ($m > 2$) билан боғлиқ тушунча ва тасдиқлар икки ўзгарувчилик функциялардаги каби бўлишини назарда тутиб ушбу бобда *m* ўзгарувчилик функциялар билан боғлиқ бўлган асосий тушунчаларни таърифлаб, тасдиқларни эса исботсиз келтириш билан қиёяланамиз.

1-§. R^m ФАЗО ВА УНИНГ МУҲИМ ТЎПЛАМЛАРИ

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in R, x_2 \in R, \dots, x_m \in R\} \quad (1)$$

тўпламни қараймиз. Бу тўпламнинг элементи $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ шу тўплам *нуқтаси* дейилади ва у одатда битта ҳарф билан белгиланади:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Бунда $x_1, x_2, \dots, x_m$ сонлар *x* нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи ва ҳоказо *m*-координаталари дейилади.

(1) тўпламда ихтиёрий

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

нуқталарни оламиз. Қуйидаги

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_k - x_k)^2} \end{aligned}$$

микдор *x* ва *y* нуқталар орасидаги *масофа* дейилади.

Масофа қуйидаги хоссаларга эга:

$$1^0. \rho(x, y) \geq 0 \text{ ва } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$2^0. \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$3^0. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), (z = (z_1, z_2, \dots, z_n)).$$

Одатда (1) тўплам R^m фазо деб аталади.

Бирор $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нукта ва $r > 0$ сонни оламиз.

Куйидаги

$$\begin{aligned} \{x \in R^m : \rho(x, a) < r\}, \\ \{x \in R^m : \rho(x, a) \leq r\} \end{aligned}$$

тўпламлар мос равишда *очик шар* ҳамда *ёпиқ шар* дейилади. Бунда a нукта шар маркази, r эса шар радиуси дейилади.

Ушбу

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m\}, \\ \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_m \leq x_m \leq b_m\}. \end{aligned}$$

$(a_1, a_2, \dots, a_m; b_1, b_2, \dots, b_m)$ — ҳақиқий сонлар) тўпламлар мос равишда *очик параллелепипед* ҳамда *ёпиқ параллелепипед* дейилади.

Айтайлик, бирор $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ ҳамда мусбат ϵ сон берилган бўлсин.

1- таъриф. Маркази x^0 нуктада, радиуси ϵ га тенг бўлган очик шар x^0 нуктанинг атрофи (ϵ атрофи) дейилади ва $U_\epsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\epsilon(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \epsilon\}.$$

R^m фазода бирор G тўплам берилган бўлсин: $G \subset R^m$.

2- таъриф. Агар $x^0 \in G$ нуктанинг бирор атрофи $U_\epsilon(x^0) \subset G$ бўлса, у ҳолда x^0 нукта G тўпламнинг ички нуктаси дейилади.

3- таъриф. G тўпламнинг ҳар бир нуктаси унинг ички нуктаси бўлса, бундай тўплам *очик тўплам* дейилади.

Масалан, очик шар очик тўплам бўлади.

4- таъриф. Агар $x^0 \in R^m$ нуктанинг ҳар қандай $U_\epsilon(x^0)$ атрофида F тўпламнинг ($F \subset R^m$) x^0 дан фарқли камида битта нуктаси бўлса, x^0 нукта F тўпламнинг *лимит нуктаси* дейилади.

5- таъриф. F тўпламнинг ($F \subset R^m$) барча лимит нукталари шу тўпламга тегишли бўлса, F *ёпиқ тўплам* дейилади.

2-§. m ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлсин:

$$M \subset R^m.$$

6- таъриф. Агар M тўпламдаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий y сон ($y \in R$) мос қўйилган бўлса, у ҳолда M тўпламда m ўзгарувчили функция аниқланган (берилган) дейилади ва уни

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

каби белгиланади. Бунда M тўплам функциянинг аниқланиш тўплами, $x_1, x_2, \dots, x_m$ — функция аргументлари, y эса $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг функцияси дейилади.

Масалан, f — R^m фазодаги ҳар бир $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктага шу нукта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда

$$y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

функцияга эга бўламиз. Функциянинг аниқланиш тўплами $M = R^m$ дан иборат.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг аниқланиш тўплами M дан олинган $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктага мос келувчи y_0 сон $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктадаги қиймати дейилади:

$$y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0).$$

Масалан, юқорида келтирилган $y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ функциянинг $(1, 1, \dots, 1)$ нуктадаги қиймати

$$y = f(1, 1, \dots, 1) = 1 + 1 + \dots + 1 = m$$

бўлади.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M ($M \subset R^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$) тўпланда берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нукта M тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин.

7-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, ушбу $\rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in M$ нукталарда

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - b| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг a нуктадаги лимити дейилади ва

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

каби белгиланади.

1-теорема (Коши теоремаси). $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуктада чекли лимитга эга бўлиши учун $\forall \epsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $0 < \rho(x, a) < \delta$, $0 < \rho(x, a) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x \in M$, $x \in M(x = x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нукталарда

$$|f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)| < \epsilon$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Энди кўп ўзгарувчили функциялар учун такрорий лимит тушунчасини киритамиз.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг x_1 аргумент a_1 га интилгандаги лимити (бунда $x_2, x_3, \dots, x_m$ тайинланган деб қаралади)

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни қарайлик. Бу лимит $x_2, x_3, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ функция бўлади:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m),$$

Сўнг $\varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ функциянинг x_2 аргументи a_2 га интилган (бунда $x_3, x_4, \dots, x_m$ тайинланган деб қаралади)

$$\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

ни қарайлик.

Юқоридагидек бирин-кетин $x_3 \rightarrow a_3, x_4 \rightarrow a_4, \dots, x_m \rightarrow a_m$ лимитга ўтиб

$$\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг тақрор лимити дейилади.

3-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЎЗЛУКСИЗЛИГИ

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлиб, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in M$ нукта эса M нинг лимит нуктаси бўлсин.

8-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилсаки, ушбу $\rho(x, a) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нукталарда

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуктада ўзлуксиз деб аталади.

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпلامнинг $(M \subset R^m)$ ҳар бир нуктасида ўзлуксиз бўлса, функция шу M тўпلامда ўзлуксиз дейилади.

m ўзгарувчили функциялар учун ҳам икки ўзгарувчи функциялар каби Вейерштрасс ҳамда Больцано-Коши теоремалари ўринли бўлади.

9-таъриф. Агар $\forall \epsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилсаки, M тўпلامнинг $\rho(x', x'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in M, x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m) \in M$ нукталарда

$$|f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) - f(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ функция M тўпلامда теңгсизликсиз функция деб аталади.

2-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция чегараланган ёпиқ M тўпلامда $(M \subset R^m)$ аниқланган ўзлуксиз бўлса, функция шу тўпلامда текис ўзлуксиз бўлади.

4-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ХОСИЛАЛАРИ

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M $(M \subset R^m)$ тўпلامда берилган бўлсин. M тўпلامда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нукта билан бирга $(x_1^0 + \Delta x, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нукта олиб, ушбу

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0 + \Delta x, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

айирмани қараймиз. Уни $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 аргументи бўйича хусусий орттирмаси дейилади.

10-таъриф. Агар $\Delta x_1 \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1}$$

нисбатнинг limiti мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги x_1 аргументи бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади ва

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \text{ ёки } \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1}$$

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг x_2, x_3 ва ҳоказо x_m аргументлари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади.

Энди M тўпламда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нукта билан бирга $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ нуктани олиб, ушбу $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ айирмани қараймиз. Одатда бу айирма функциянинг тўлиқ орттирмаси дейилади.

11-таъриф. Агар функциянинг тўлиқ орттирмаси Δf ни

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m \quad (2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ ўзгармас сонлар, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$.

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция M тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

3-теорема. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

4-теорема. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада барча хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ мавжуд ва улар мос равишда (2) муносабатдаги $A_1, A_2, \dots, A_m$ ларга тенг бўлади:

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1,$$

$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_m.$$

5-теорема (Функция дифференциаллану бўлишининг етарли шарти). Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктанинг бирор атрофида барча аргументлари бўлиб, бу хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада узлуксиз бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлади.

5-§. *m* УЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M (M \subset R^m)$ тўпла берилган бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуктада дифференциаллану бўлсин. Унда шу нуктадаги функциянинг тулик орттирмаси

$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ бўлади.

12-таъриф. Ушбу

$$A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$$

ифода $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада дифференциали деб аталади ва $df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ каби белгиланади.

$$df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m.$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларни мос равишда уларнинг дифференциаллари $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ билан алмаштириб, сўнг 8-теорема эътиборга олиб, $f(x_1, \dots, x_m)$ функциянинг дифференциали куйидагича

$$df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) dx_1 +$$

$$+ f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) dx_2 + \dots + f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \cdot dx_m$$

ёзиш мумкинлигини кўрамиз.

Равшанки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада тулик орттирмаси $\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ҳам, шу функциянинг қаралаётган нуктадаги дифференциали $df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ҳам аргумент орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ.

Бир томондан функциянинг дифференциали $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга содда, яъни чизикли боғлиқ бўлиши, иккинчи томондан эса

$$\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0 \text{ да}$$

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$$

ифоданинг юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлиши ушбу

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \approx df(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

тақрибий формулани ёзишга имкон беради.

Демак,

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) &\approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\ &+ f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_2 + \dots + \\ &+ f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_m. \end{aligned}$$

Бу формуладан тақрибий ҳисоблашларда кенг фойдаланилади.

6-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ
ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция M ($M \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктасида $f'_1, f'_2, \dots, f'_m$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу хусусий ҳосилалар $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, ўз навбатида уларнинг хусусий ҳосилаларини қараш мумкин.

13-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f'_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f'_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ларнинг x_k ($k=1, 2, 3, \dots, m$) ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва

$$f''_{x_1 x_k}, f''_{x_2 x_k}, \dots, f''_{x_m x_k} \quad (k=1, 2, 3, \dots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Турли ўзгарувчилар бўйича олинган иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i \neq k)$$

хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар дейилади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади.

Маълумки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, унда бу функциянинг дифференциали

$$df = f'_1 \cdot dx_1 + f'_2 \cdot dx_2 + \dots + f'_m \cdot dx_m$$

бўлади.

14-таъриф. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция дифференциали $df(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нинг дифференциали берилган $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва $d^2 f$ каби белгиланади:

$$d^2 f = d(df).$$

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ҳамда $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in M$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

- 1) $d(f \pm g) = df \pm dg$,
- 2) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$,
- 3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - f dg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

бўлади. Бу қоидалардан кейинчалик фойдаланамиз.

Энди функциянинг иккинчи тартибли дифференциални унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

Таърифга биноан

$$d^2f = d(df) = d(f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_m} \cdot dx_m)$$

бўлади. Бунда биринчи тартибли хусусий ҳосилалар $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада ҳисобланган.

$dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ — ихтиёрий орттирмалар бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ эмаслигини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} d(f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_m} dx_m) &= dx_1 \cdot df'_{x_1} + dx_2 \cdot df'_{x_2} + \dots + dx_m \cdot df'_{x_m} = \\ &= (f''_{x_1^2} \cdot dx_1 + f''_{x_1 x_2} \cdot dx_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} \cdot dx_m) \cdot dx_1 + \\ &\quad + (f''_{x_2 x_1} \cdot dx_1 + f''_{x_2^2} \cdot dx_2 + \dots + f''_{x_2 x_m} \cdot dx_m) \cdot dx_2 + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + (f''_{x_m x_1} dx_1 + f''_{x_m x_2} \cdot dx_2 + \dots + f''_{x_m^2} \cdot dx_m) \cdot dx_m = \\ &= f''_{x_1^2} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2^2} \cdot dx_2^2 + \dots + f''_{x_m^2} \cdot dx_m^2 + \\ &\quad + 2f''_{x_1 x_2} \cdot dx_1 \cdot dx_2 + 2f''_{x_1 x_3} \cdot dx_1 \cdot dx_3 + \dots + 2f''_{x_1 x_m} \cdot dx_1 \cdot dx_m + \\ &\quad + 2f''_{x_2 x_3} \cdot dx_2 dx_3 + \dots + 2f''_{x_2 x_m} \cdot dx_2 \cdot dx_m + \dots + \\ &\quad + 2f''_{x_{m-1} x_m} \cdot dx_{m-1} \cdot dx_m. \end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in M$ нуктадаги учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридагидек таърифланади.

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Дифференциал тенгламалар олий математиканинг муҳим, айти пайтда фан ва техниканинг турли соҳаларида кенг фойдаланилади- ган бўлимларидан бири.

Табиат ва техникада юз бераётган жараёнларни кузатишда, бу жараёнларни ифодаловчи миқдорларнинг бир-бири билан турлича боғланганлигини қўрамыз. Масалан, T^0C ҳароратли ($T > 0$) жисм- нинг вақт ўтиши билан совуши $T(t)$ — Ньютон қонунига биноан

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot T(t) \quad (1)$$

(k — ўзгармас мусбат сон) тенглама билан боғланган бўлиб, у шу тенгламадан топилади.

(1) тенгламада номаълум $T(t)$ функция билан бирга унинг ҳосиласи $\frac{dT(t)}{dt}$ ҳам қатнашгандир.

Умуман, номаълум функция ва унинг ҳосилалари катнашган тенгламаларга келадиган масалалар жуда кўп. Қуйида улардан баъзиларини келтирамиз.

1-м а с а л а. Идишда 140 л аралашма бўлиб, унинг таркибида 14 кг туз бор. Бу идишга иккита қувур уланган. Биринчи қувурдан ҳар минутда таркибида 1 кг туз бўлган 7 л аралашма узлуксиз равишда қуйилади, иккинчи қувурдан эса шу тезлик билан аралашма оқизилади. Бир соатдан сўнг идишдаги аралашма таркибида қанча туз бўлади?

t вақтни эркин ўзгарувчи сифатида қабул қиламиз. Равшанки, аралашмадаги тузнинг миқдори t га боғлиқ бўлади. Уни $y(t)$ дейлик. Унда $t + \Delta t$ пайтда аралашмадаги туз миқдори $y(t + \Delta t)$ бўлиб, Δt вақт оралиғида туз миқдори $y(t + \Delta t) - y(t)$ га ўзгаради.

Масаланинг шартига биноан Δt вақт ичида идишга $1 \cdot \Delta t$ кг туз тушади ва

$$\frac{y(t)}{140} \cdot 7 \cdot \Delta t \text{ кг} = \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t \text{ кг}$$

туз чиқиб кетади. Уларнинг фарқи эса

$$\left(1 - \frac{y(t)}{20}\right) \cdot \Delta t$$

бўлади. Ҳар онда идишдаги аралашма таркибида туз миқдори ўзгариб турганлиги сабабли

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx \Delta t - \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t \quad (2)$$

бўлади.

Агар Δt нолга янгила борса, (2) тақрибий тенглик қатъий тенгликка айлана боради. Бинобарин,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = 1 - \frac{y(t)}{20}$$

бўлади. Натижада

$$y'(t) = 1 - \frac{y(t)}{20} \quad (3)$$

тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, идишдаги аралашма таркибидаги туз микдорини топиш — номаълум функция $y(t)$ ва унинг ҳосиласи $y'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келар экан.

2-масала. Массаси m га тенг бўлган, оғирлик кучи таъсирида маълум баландликдан тушаётган жисмнинг ҳаракат қонуни топилсин.

Жисм вертикал ўқнинг O нуқтасидан бошлаб пастга қараб тушишида унинг босиб ўтган йўли S — вақтнинг функцияси бўлади.

Айтайлик, $S(t)$ жисмнинг t вақт ичида босиб ўтган йўлини, $v(t)$ — тезлигини, $a(t)$ эса тезланишини аниқласин.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларининг механик маъноларини эътиборга олиб толамиз:

$$\begin{aligned} S'(t) &= v(t), \\ S''(t) &= a(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Масаланинг шартига кўра, жисмга таъсир этувчи кучлар:

1) пастга қараб йўналган оғирлик кучи

$$P = m \cdot g$$

(g — эркин тушиш тезланиши, $g \approx 981 \text{ см/с}^2$),

2) юқорига қараб йўналган қаршилиқ кучи

$$Q = -\alpha \cdot v(t)$$

($\alpha > 0$ — пропорционаллик коэффициентини).

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан, жисмга таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F(t)$ учун

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

муносабат ўринли. Демак,

$$m \cdot a(t) = m \cdot g - \alpha \cdot v(t).$$

(4) муносабатларни эътиборга олиб толамиз:

$$m \cdot S''(t) = m \cdot g - \alpha \cdot S'(t). \quad (5)$$

Шундай қилиб, жисмнинг ҳаракат қонуни $S(t)$ ни топиш номаълум функция $S(t)$ нинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари қатнашган тенгламаларни ечишга келар экан.

Умуман, жуда кўп масалалар юқоридагига ўхшаш номаълум функция ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари катнашган тенгламаларга келади. Улар эса дифференциал тенгламалар тушунчасига олиб келади.

Битта эркин ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари катнашган тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Масалан, юқоридаги (3) ва (5) тенгламалар оддий дифференциал тенгламалардир.

Айтайлик, x — эркин ўзгарувчи, y унинг функцияси ($y=y(x)$), $y'=y'(x)$, ..., $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ лар эса шу функциянинг ҳосилалари бўлсин.

Бу $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ларни боғловчи ушбу

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6)$$

тенглик дифференциал тенгламанинг умумий кўринишини ифода-
лайди.

(6) тенгламада катнашган номаълум функция ҳосиласининг юқори тартиби (6) дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

Масалан,

$$y' = 5\sqrt{y}, y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламалар,

$$y'' = \arcsin x, y'' + 4y' + 4y = 0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар,

$$y''' = 2 \frac{\cos x}{\sin^2 x}, y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

учинчи тартибли дифференциал тенгламалардир.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция (a, b) да аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу ораликда узлуксиз $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (6) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi(x)$, y' нинг ўрнига $\varphi'(x)$, y'' нинг ўрнига $\varphi''(x)$, ..., $y^{(n)}$ нинг ўрнига $\varphi^{(n)}(x)$ қўйилганда у айниятга айланса:

$$\Phi(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,$$

$\varphi(x)$ функция (6) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Масалан, ушбу

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг ечими

$$y = \sin x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

бўлади. Чунки

$$y = \sin x, y' = (\sin x)' = \cos x$$

лар берилган дифференциал тенгламани

$$\cos(x) \equiv \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

айниятга айлантиради.

Дифференциал тенгламаларнинг ечимини топиш масаласи дифференциал тенгламаларни интеграллаш масаласи ҳам юритилади.

Биз, аслида содда дифференциал тенгламалар ва уларни ечим билан аввалроқ, функция интегралли тушунчасини ўрганишда келганмиз. (Қаралсин, [1], 1-боб, 1-§.) Берилган узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси. $y = y(x)$ ни топиш

$$y'(x) = f(x)$$

дифференциал тенгламани ечиш демакдир. Маълумки, бу тенгламанинг ечими

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

бўлади. Демак, (7) дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга. Ўзгармас C нинг турли қийматларида (7) тенгламанинг турли ечимлари ҳосил бўлаверади.

Одатда (8) ечим

$$y'(x) = f(x)$$

дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* дейилади. Ўзгармас C нинг тайин бир қийматидаги ечим эса (7) дифференциал тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалалардан бири тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги бўлиши ва иккинчиси тенгламаларни ечиш, яъни дифференциал тенгламанинг ечимини топишдан иборат.

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Биз ушбу бобда биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ўрганамиз.

Маълумки, биринчи тартибли дифференциал тенглама, умумий ҳолда

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда x — эркин ўзгарувчи, $y = y(x)$ — номаълум функция, y' эса $y = y(x)$ функциянинг ҳосиласи.

Фараз қилайлик, (1) тенглама y' га нисбатан ечилган бўлсин:

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Одатда (2) тенглама, ҳосиллага нисбатан *ечилган дифференциал тенглама* дейилади.

(2) тенглама $y = y(x)$ функция ҳосиласи $y'(x)$ ни ($x \in (a, b)$) текисликдаги бирор D соҳада берилган $f(x, y)$ функция билан боғловчи тенгликдир. Равшанки, бу тенглик маънога эга бўлиши учун ҳар бир $x \in (a, b)$ да $(x, y) = (x, y(x)) \in D$ бўлиши лозим. Кейинчалик бу шарт ҳар доим бажарилган деб қараймиз.

Агар $\varphi(x)$ функция (a, b) да аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(x)$ ҳосиллага эга бўлиб, ихтиёрий $x \in (a, b)$ да $(x, \varphi(x)) \in D$ ва

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

бўлса, яъни (2) тенглама $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$ ларда айниятга айланса, $\varphi(x)$ функция (2) тенгламанинг *ечими* дейилади.

Айтайлик, $y = \varphi(x)$ функция (2) дифференциал тенгламанинг ечими бўлсин. Бу функция графиги, умуман айтганда, эгри чизиқни ифодалайди. Шунинг учун уни (2) дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиги ҳам дейилади.

Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, улар тенгламанинг ечимлари тўпламини ташкил этади.

Кўп ҳолда (2) дифференциал тенгламанинг барча ечимларини, битта ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ бўлган

$$y = \varphi(x, C) \text{ ёки } F(x, y, C) = 0$$

муносабат билан умумий кўринишда ифодалаш мумкин. Уни дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* дейилади. Бунда,

Ўзгармас C нинг ҳар бир тайин қийматида x ва унга мос y лар $y = y(x)$ бўлиши керак. Ўзгармас C нинг ҳар бир қийматида унга мос ечим ҳосил бўлади. Бундай ечим берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими дейилади.

Масалан,

$$y' = e^x - y$$

дифференциал тенгламани карайлик, бунда

$$f(x, y) = e^x - y$$

бўлиб, y текисликнинг барча нуқталарида аниқланган. Қуйидаги

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2} e^x \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлади, чунки (3) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi_0(x) = \frac{1}{2} e^x$ ни, y' ни ўрнига $\varphi'_0(x) = \left(\frac{1}{2} e^x\right)' = \frac{1}{2} e^x$ ни қўйсак, у аниқиятга айланади:

$$\frac{1}{2} e^x = e^x - \frac{1}{2} e^x \Rightarrow \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{2} e^x.$$

Шунингдек,

$$\varphi_1(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} e^x,$$

$$\varphi_2(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2} e^x$$

функцияларнинг ҳар бири (3) тенгламанинг ечими бўлади. Берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимларидир.

(3) тенгламанинг умумий ечими

$$\varphi(x) = C \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} e^x$$

кўринишда бўлиб, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

Айтайлик,

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \varphi(x, C)$$

бўлсин. Бу ечимдан тенгламанинг хусусий ечимини келтириш учун изланаётган $y = y(x)$ функция аргументи x нинг бирор x_0 қийматида функция y_0 қиймати ($y_0 = y(x_0)$) қабул қилишнинг билиш етарлидир. Одатда, x_0 аргументнинг, y_0 эса изланаётган функциянинг бошланғич қийматлари дейилади. $x = x_0$ да изланаётган функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлсин, деган шарт бошланғич шарт дейилиб, қуйидагича

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

ёзилади.

Бошланғич шартдан фойдаланиб

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

тенгламага келамиз. Ундан эса C топилади. Топилган C нинг киймати C_0 га тенг бўлса, берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$y = \varphi(x, C_0)$$

га тенг бўлади.

Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалаларидан бири бошланғич шарт

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

ни каноатлантирувчи ечимни топишдан иборат. Бу масала *Коши масаласи* дейилади.

Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама ва унинг ечими содда геометрик маънога эга. Тенгламадаги $f(x, y)$ функция текисликдаги D соҳада аниклансин. Бинобарин, бу соҳанинг ҳар бир (x, y) нуктасида тайин кийматга эга. Масалан, $(x_0, y_0) \in D$ нуктада $f(x, y)$ функциянинг киймати

$$f(x_0, y_0) = k_0$$

бўлсин. Унда (2) га кўра

$$y'(x_0) = k_0$$

бўлади. Демак, $k_0 = y'(x_0)$ эгри чизикка (x_0, y_0) нуктада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини.

Маълумки, уринманинг бурчак коэффициентини тўғри чизик йўналишини ифодалайди. Демак, D соҳанинг (x_0, y_0) нуктасида йўналиш аникланар экан.

Шундай қилиб

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг берилиши билан D соҳанинг ҳар бир нуктасида йўналиш аникланади. Бу йўналишлар биргаликда *йўналишлар майдони* дейилади.

Демак, (2) дифференциал тенглама йўналишлар майдонини аниқлайди.

Энди (2) дифференциал тенглама ечимининг геометрик маъноси-ни келтирамиз. Маълумки, D соҳадаги $y = y(x)$ эгри чизик учун

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

бўлса, (унда $\varphi(x)$ функция (2) тенгламанинг ечими бўлар эди.

Демак, (2) тенгламанинг ечими D соҳада шундай $y = \varphi(x)$ эрчиликки, бу эриш, унинг ихтиёрий (x, y) нуктасида ўзқарилган уринма йўналиши D соҳанинг шу нуктадаги майдон-йўналиши билан бир хил бўлади.

1-§. $y' = f(x, y)$ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

Ушбу параграфда биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$y' = f(x, y)$$

ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги масаласи билан шуғулланамиз.

Аввало баъзи тушунча ва тасдиқларни келтирамиз.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция икки ўзгарувчининг функцияси сифатида R^2 фазодаги ёпиқ тўғри тўртбурчак

$$D = \{(x, y) \in R^2: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} = \\ = \{(x, y) \in R^2: x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

да берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас мусбат k сон мавжуд бўлсаки, $f(x, y)$ функция x аргументининг $|x - x_0| \leq a$ тенгсизлиги қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматларида, y аргументининг $|y - y_0| \leq b$ тенгсизлиги қаноатлантирувчи ихтиёрий $\bar{y}$ ва қийматларида

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{y})| \leq k \cdot |\bar{y} - \bar{y}| \quad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x, y)$ функция иккинчи аргументи y бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

Агар $f(x, y)$ функция D да узлуксиз бўлса, у шу соҳада чегараланган, яъни шундай ўзгармас мусбат M сон мавжудки, $\forall (x, y) \in D$ учун

$$|f(x, y)| \leq M \quad (2)$$

бўлади (каралсин, 5- боб, 5- §).

1-теорема. Агар

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

тенгламада $f(x, y)$ функция

$$D = \{(x, y) \in R^2: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

да узлуксиз бўлиб, иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (2) дифференциал тенгламанинг $[x_0 - h, x_0 + h]$ сегментда ($h = \min(a; \frac{b}{M})$) бошланғич

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

шартни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлиб, у ягона бўлади.

$$y' = f(x, y)$$

тенгсизликнинг ҳар йкки томонини $[x_0, x]$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Бошланғич шартни ҳисобга олиб топамиз:

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0.$$

Натижада берилган (2) дифференциал тенгламага эквивалент бўлган ушбу

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (2')$$

тенгламага келамиз. (Номаялум $y(x)$ функция интеграл белгиси остида бўлганлиги сабабли (2') тенглама *интеграл тенглама* дейилади.)

Демак, берилган дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва яғоналигини кўрсатиш учун (2') тенглама ечимининг мавжудлиги ва яғоналигини кўрсатиш етарли бўлади.

(2') тенглама ечимининг мавжудлигини исботлашда кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланамиз. Берилган бошланғич қиймат y_0 ни олиб, $f(x, y_0)$ ни қараймиз. $f(x, y_0)$ функция $[x_0 - h, x_0 + h]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли

$$\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

интеграл мавжуд ва у x нинг функцияси сифатида $[x_0 - h, x_0 + h]$ да узлуксиз. Бу функция ёрдамида $y_1(x)$ функцияни куйидагича тузамиз:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt. \quad (2'')$$

Равшанки, $y_1(x)$ функция $[x_0 - h, x_0 + h]$ да узлуксиз ва $x = x_0$ да $y_1 = y_0$ бўлади.

(2'') тенгликдан, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_0 &= \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \Rightarrow |y_1(x) - y_0| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \Rightarrow |y_1(x) - y_0| \leq M \cdot \int_{x_0}^x dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow |y_1(x) - y_0| \leq M \cdot |x - x_0| \Rightarrow |y_1(x) - y_0| \leq M \cdot h. \end{aligned}$$

$h \leq \frac{b}{M}$ бўлганлиги учун кейинги тенгсизликдан

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ да $y_1(x)$ функциянинг кийматлари $[y_0 - b, y_0 + b]$ га тегишли бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, $y_1(x)$ функция $[x_0 - h, x_0 + h]$ да аниқланган узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ учун $(x, y_1(x)) \in D$ бўлади.

Энди маълум бўлган бу $y_1(x)$ функция ёрдамида $y_2(x)$ функция қуйидагича тузамиз:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt. \quad (6)$$

Бу $y_2(x)$ функция ҳам $[x_0 - h, x_0 + h]$ да аниқланган, узлуксиз $x = x_0$ да $y_2 = y_0$ бўлади. (6) тенгликдан топамиз:

$$\begin{aligned} y_2(x) - y_0 &= \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \Rightarrow |y_2(x) - y_0| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \right| \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| \leq \\ &\leq M \cdot |x - x_0| \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leq M \cdot h \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leq b. \end{aligned}$$

Бу эса $x_0 \in [x_0 - h, x_0 + h]$ да $y_2(x)$ функциянинг кийматлари $[y_0 - b, y_0 + b]$ га тегишли эканини билдиради.

Шундай қилиб $y_2(x)$ функция $[x_0 - h, x_0 + h]$ да аниқланган узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ учун $(x, y_2(x)) \in D$ бўлади.

Бу жараёни давом эттирабориб, n та қадамдан кейин $[x_0 - h, x_0 + h]$ аниқланган, узлуксиз ва $x = x_0$ да $y_n = y_0$ бошланғич шарт қаноатлантирувчи

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (6)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция учун

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))| dt \right| \leq M \cdot |x - x_0| \leq b$$

бўлади.

Шундай қилиб, $y_n(x)$ функция $[x_0 - h, x_0 + h]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ учун $(x, y_n(x)) \in D$ бўлади.

Бу жараёни чексиз давом эттириш натижасида

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (7)$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлиб, унинг ҳар бир ҳади $[x_0 - h, x_0 + h]$ да узлуксиз, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ учун $(x, y_n(x)) \in D$, $(n=0, 1, 2, \dots)$ ва $x = x_0$ да $y_n = y_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) бўлади.

(7) функционал кетма-кетлик ҳадлари ёрдамида ушбу

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots \quad (7')$$

функционал қаторни ҳосил қиламиз. Бу функционал қаторнинг дастлабки $n+1$ та ҳадидан иборат хусусий йиғиндиси:

$$S_{n+1}(x) = y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = y_n(x).$$

Энди (7') функционал қаторнинг ҳадларини баҳолаймиз. Равшанки,

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M \cdot |x - x_0|. \quad (8)$$

Қаторнинг кейинги ҳадларини баҳолашда $f(x, y)$ функциянинг иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартининг бажарилишидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)] dt \right| \leq \\ &\leq k \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0| dt \right| \leq k \cdot M \cdot \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| \leq k \cdot M \cdot \frac{|x - x_0|^2}{2}, \end{aligned} \quad (8')$$

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))] dt \right| \leq \\ &\leq k \left| \int_{x_0}^x |y_2(t) - y_1(t)| dt \right| \leq \frac{k^2 \cdot M}{2} \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^2 dt \right| \leq k^2 \cdot M \cdot \frac{|x - x_0|^3}{2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

Умуман,

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))] dt \right| \leq \\ &\leq k^{n-1} M \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!} \end{aligned} \quad (8'')$$

бўлади. (Кейинги тенгсизлик математик индукция усули ёрдамида исботланади.)

Энди $|x - x_0| \leq h$ бўлишидан фойдалансак, унда юқоридаги (8), (8') ва (8'') муносабатлар қуйидаги

$$|y_1(x) - y_0| \leq M \cdot h,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq M \cdot \frac{k \cdot h^2}{2!},$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq M \cdot \frac{k^2 \cdot h^3}{3!},$$

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq M \cdot \frac{k^{n-1} h^n}{n!},$$

кўринишга келади.

Ушбу

$$M \cdot h + M \frac{k \cdot h^2}{2!} + M \cdot \frac{k^2 \cdot h^3}{3!} + \dots + M \frac{k^{n-1} h^n}{n!} + \dots$$

сонли қаторни қарайлик. Даламбер аломатидан фойдаланиб.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M \cdot \frac{k^n h^{n+1}}{(n+1)!}}{M \frac{k^{n-1} h^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kh}{n+1} = 0 < 1.$$

(10) қаторнинг яқинлашувчи эканини топамиз.

Демак, (7') функционал қаторнинг ҳар бир ҳадининг абсолют киймати, (9) муносабатга кўра яқинлашувчи (10) сонли қатор мос ҳадидан катта эмас. Вейерштрасс аломатига биноан функционал қатор $[x_0 - h, x_0 + h]$ да текис яқинлашувчи. Демак, функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги n да $y(x)$ лимитга эга ва бу лимит функция ўзлуксиз бўлади.

Агар

$$S_{n+1}(x) = y_n(x)$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) \quad (\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h])$$

бўлади.

Энди топилган $y(x)$ функция

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз.

Юқоридаги (6')

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

тенгликнинг ўнг томонига

$$\int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt$$

ни ҳам қўшамиз, ҳам айирамиз. Унда

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))] dt + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt \quad (10')$$

бўлади. Бу тенгликдаги

$$\int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))] dt$$

интегрални Липшиц шартидан фойдаланиб баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))] dt \right| \leq \\ & \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))| dt \leq k \cdot \int_{x_0}^x |y_{n-1}(t) - J(t)| dt. \end{aligned} \quad (11)$$

$\{y_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $[x_0 - h, x_0 + h]$ да $J(x)$ га текис яқинлашганлигидан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ учун

$$|y_{n-1}(x) - J(x)| < \frac{\varepsilon}{k \cdot h} \quad (12)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(11) ва (12) муносабатлардан

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))] dt \right| \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k \cdot h} \left| \int_{x_0}^x dt \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{h} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{h} \cdot h = \varepsilon \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))] dt = 0$$

эканини билдиради.

(10') тенгдикда, $n \rightarrow \infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, J(t))] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt \right\} = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - \\ &\quad - f(t, J(t))] dt + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt. \end{aligned}$$

Демак,

$$J(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt$$

ва $x = x_0$ да $J(x_0) = y_0$.

Шундай қилиб, $J(x)$ функция (2') тенгламанинг ечими, пайтда

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг ҳам ечими эканлиги исботланди. Ечим бошланғич шартни қаноатлантиради.

Энди топилган $J(x)$ ечимнинг ягоналигини исботлаймиз. Тенграсини фараз қилайлик, (2') дифференциал тенгламанинг $y = U(x)$ ечими билан бир қаторда, бошланғич шартни қаноатлантирадиган иккинчи $y = U(x)$ ечими ҳам мавжуд бўлсин. ($x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $x \neq x_0$ да $U(x_0) = y_0$, $J(x) \neq U(x)$).

$J(x)$ ва $U(x)$ функциялар $[x_0 - h, x_0 + h]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли $|J(x) - U(x)|$ функция ҳам шу сегментда узлуксиз бўлади. Узлуксиз функцияларнинг хоссаларига кўра $[x_0 - h, x_0 + h]$ шундай x^* нукта топиладики,

$$|J(x^*) - U(x^*)| = \max |J(x) - U(x)| = A$$

бўлади.

Иккинчи томондан $J(x)$ ва $U(x)$ функциялар (2') тенгламанинг ечимлари бўлганлиги учун

$$J(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, J(t)) dt, \quad U(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, U(t)) dt$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} |J(x) - U(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(t, J(t)) - f(t, U(t))] dt \right| \leq \\ &\leq k \cdot \left| \int_{x_0}^x |J(t) - U(t)| dt \right| \leq k \cdot A |x - x_0| \leq k \cdot A \cdot h \end{aligned}$$

бўлади. Агар $h = \min(a; \frac{b}{M})$ бўлиши билан бирга $h < \frac{1}{k}$ ҳам бўлса, унда

$$k \cdot A \cdot h < A$$

бўлиб,

$$|J(x) - U(x)| < A \quad (\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h])$$

бўлади. Бу эса (13) муносабатга зиддир.

Бу зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб (2) тенгламанинг ечими йўқлиги бўлсин деб олинди. Демак, $J(x)$ функция (2) дифференциал тенгламанинг ягона ечими.

Теорема тўлиқ исбот бўлди.

Исбот этилган теорема, D нинг ҳар бир ички (x_0, y_0) нуқтасидан $y' = f(x, y)$ тенгламанинг ягона интеграл эгри чизиғи ўтишини аниқлайди.

Мазкур бобнинг кейинги параграфларида турли хилдаги (турли шартдаги) биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечим билан шуғулланамиз.

2-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (14)$$

кўринишдаги тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади. Бунда $f_1(x)$ функция (a, b) да, $f_2(y)$ функция эса (c, d) оралиқда аниқланган узлуксиз функциялардир.

Аввало (14) тенгламанинг баъзи ҳолларини қараймиз.

1°. (14) тенгламада $f_2(y) = 1$ бўлсин. Бу ҳолда (14) тенглама

$$y' = f_1(x) \quad (14')$$

кўринишда бўлади. Равшанки, (14') тенгламанинг умумий ечими

$$y = \int f_1(x) dx + C = F(x) + C$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон, $F(x)$ эса $f_1(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси: $F'(x) = f_1(x)$.

Агар (14') дифференциал тенгламани

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

бошланғич шартда қарайдиган бўлсак, унда

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

яъни

$$C = y_0 - F(x_0)$$

бўлиб,

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0) = y_0 + [F(x) - F(x_0)] = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x) dx$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган (14') дифференциал тенглама бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими (хусусий ечими)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f_1(x) dx$$

булар экан.

2°. (14) тенгламада $f_1(x) = 1$ бўлсин. Бу ҳолда (14) тенглама

$$y' = f_2(y) \quad (14')$$

қўринишга эга бўлади. (14'') тенгликда $f_2(y) \neq 0$ бўлсин қараймиз.

Агар

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

эканини эътиборга олсак, унда (14'') тенгликдан

$$\frac{dy}{dx} = f_2(y)$$

ва ундан эса

$$dx = \frac{dy}{f_2(y)}$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\int dx = \int \frac{dy}{f_2(y)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{f_2(y)} + C.$$

Демак,

$$y' = f_2(y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x = \int \frac{dy}{f_2(y)} + C$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y' = 5\sqrt{y}$$

дифференциал тенгламанинг

$$y|_{x=0} = 25$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Берилган тенгламани

$$\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}$$

қўринишда ёзиб оламиз. Кейинги тенгликдан

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}} = dx$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{5\sqrt{y}} &= \int dx \Rightarrow \frac{1}{5} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{5} \sqrt{y} &= x + C \Rightarrow y = \frac{25}{4} (x + C)^2.\end{aligned}$$

Демак,

$$y = \frac{25}{4} (x + C)^2$$

қиралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Бошланғич шартга биноан $x=0$ да $y=25$. Шунга кўра

$$25 = \frac{25}{4} (0 + C)^2 \Rightarrow C = 2$$

бўлади.

Демак, тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими

$$y = \frac{25}{4} (x + 2)^2$$

бўлади.

3°. Энди

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

дифференциал тенгламани қараймиз. Уни қуйидагича

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликдан, $f_2(y) \neq 0$ бўлганда

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Бу тенглик қаралаётган

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y' = xy + x + y + 1$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламани куйидагича

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y+1)$$

ёзиб оламиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни $y \neq -1$ деб ечамиз:

$$\frac{dy}{y+1} = (x+1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx + \ln C \Rightarrow \ln|y+1| =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C \Rightarrow (y+1) \cdot \frac{1}{C} = e^{\frac{(x+1)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+1 = C \cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} \Rightarrow y = C \cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C \cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

бўлади.

4°. Энди ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келадиган баъзи дифференциал тенгламаларни қараймиз.

Фараз қилайлик,

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, бундаги $f(x, y)$ функция учун

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad (1)$$

бўлсин. (Бу ҳолда $f(x, y)$ нол ўлчовли бир жинсли функция (2) тенглама эса бир жинсли дифференциал тенглама¹ дейилади.)

(15) тенгликда

$$t = \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$$

дейилса, y ҳолда

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

¹ Дифференциал тенгламанинг бир жинсли деб аталиши $f(x, y)$ нинг бир жинсли функция эканлигидандир.

бўлиб, $f(x, y)$ функция эса $\frac{y}{x}$ нинг функцияси бўлиб қолади:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Натижада (2) дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (16)$$

куринишга келади. Бу тенгламани ечиш учун

$$\frac{y}{x} = u \quad (u = u(x))$$

деб оламиз. Унда

$$y = u \cdot x$$

бўлади.

Энди

$$y' = (u \cdot x)' = u + x \cdot u',$$

яъни

$$\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

эканлигини эътиборга олиб, сўнг уни (16) тенгликка қўйиб, ушбу

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

тенгламага келамиз. Равшанки,

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot du = [\varphi(u) - u] \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (\varphi(u) \neq u).$$

Кейинги тенгликнинг иккала томонини интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + C \quad \left(u = \frac{y}{x}\right).$$

Бу тенглик берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламада

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

бўлиб, унинг учун

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)(ty)} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2xy} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = f(x, y)$$

бўлади. Демак, каралаётган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама экан. Қуйидаги

$$y = u \cdot x \quad (u = u(x))$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$y' = u + x \cdot u'$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама ушбу

$$x \cdot u'(x) + u = \frac{x^2 + u^2 x^2}{x \cdot ux},$$

яъни

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$

қўринишга келади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ўни ечамиз:

$$x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u \cdot du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int u du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 = 2 \ln|x \cdot C|.$$

Бу тейгликдаги u нинг ўрнига $\frac{y}{x}$ ни қўйиб топамиз:

$$\frac{y^2}{x^2} = 2 \ln|x \cdot C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|x \cdot C|.$$

Демак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = |x| \cdot \sqrt{2 \ln|x \cdot C|}$$

бўлади.

3-§. ЧИЗИКЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция $y = y(x)$ ва унинг $y' = y'(x)$ ҳосиласига нисбатан чизикли бўлган

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad (17)$$

тенглама биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама дейилади. Бунда $p=p(x)$ ва $q=q(x)$ лар $(a, b) \subset R$ да аниқланган ва узлуксиз функциялардир.

1°. Аввало (17) да $q(x)=0$ бўлган хусусий ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (17) тенглама ушбу

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \quad (17')$$

кўринишга эга бўлиб, уни бир жинсли чизикли дифференциал тенглама дейилади (берилган (17) тенгламани эса бир жинсسىз чизикли дифференциал тенглама дейилади). (17') тенглама ўзгаришчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни ечимиз:

$$\begin{aligned} y' + p(x) \cdot y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int p(x) dx + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| - \ln|C| = \\ &= -\int p(x) dx \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x) dx \Rightarrow y = C \cdot e^{-\int p(x) dx} \end{aligned}$$

Демак, бир жинсли (17') тенгламанинг умумий ечими

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad (17'')$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

2°. Энди

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини топишда

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

ифодадаги C ни x нинг дифференциалланувчи функцияси $C=C(x)$ бўлсин деб қараб, (17) тенгламанинг умумий ечимини

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \quad (18)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} - p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Бу y ва y' ларнинг ифодасини (17) тенгламадаги y ва y' ларнинг ўрнига қўямиз:

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} - p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = q(x).$$

Натижада, $C(x)$ ни топиш-учун

$$C'(x) = \int p(x) dx = q(x),$$

яъни

$$\frac{dC(x)}{dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

дифференциал тенгламага келамиз. Унинг ечими

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C_1$$

бўлади, бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Топилган $C(x)$ (18) тенгликдаги $C(x)$ нинг ўрнига қўямиз. Натижада,

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + C_1 \right) \quad (19)$$

бўлади. Бу (17) дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Мисоллар. 1. Ушбу

$$y' + \frac{1}{x} y = x$$

чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг. Аввало бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y' + \frac{1}{x} y = 0$$

ни ечамиз:

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x} y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow y \cdot x = C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = \frac{C}{x}$$

бўлади.

Энди бу тенгликда $C = C(x)$ деб

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

ларни берилган тенгламадаги y ва y' ларнинг ўрнига қўямиз:

$$\begin{aligned} \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} &= x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} &= x \Rightarrow C'(x) = x^2 \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан толамиз:

$$C(x) = \int x^2 dx + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Демак, берилган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y' + y = e^x$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг

$$y|_{x=0} = 1$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Биз юқорида

$$y' + p(x) = q(x)$$

тенгламанинг умумий ечими

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[C_1 + \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \right]$$

бўлишини кўрдик. Берилган дифференциал тенглама учун

$$p(x) = 1, \quad q(x) = e^x$$

бўлиб,

$$\int p(x) dx = \int dx = x, \quad \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^x \cdot e^x dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

бўлади. Демак,

$$y' + y = e^x$$

тенгламанинг умумий ечими

$$y = e^{-x} \left[C_1 + \frac{1}{2} e^{2x} \right]$$

бўлади.

Энди бошланғич шартдан фойдаланиб, ўзгармас C_1 ни толамиз:

$$1 = e^0 \left(C_1 + \frac{1}{2} e^0 \right) \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Демак, берилган тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$y = e^{-x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2x} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

бўлади.

Ушбу

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m \quad (1)$$

кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бунда $p(x)$ ва $q(x) - (a, b)$ да аниқланган узлуксиз функциялар, m эса ўзгармас сон.

Равшанки, $m=0$ бўлганда

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

бўлиб, чизикли бир жинсиз дифференциал тенгламага $m=1$ бўлганда

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0$$

бўлиб, чизикли бир жинсли дифференциал тенгламага келамиз.

Куйида $m \neq 0$, $m \neq 1$ деб қараймиз. (19) тенгламанинг ҳар икки томонини y^m га ($y \neq 0$ деб) бўлиб топамиз:

$$\frac{y'}{y^m} + p(x) \cdot \frac{y}{y^m} = q(x),$$

яъни

$$y^{-m} y' + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x). \quad (19')$$

Кейинги тенгламада

$$u = y^{1-m}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$u' = (1-m) \cdot y^{-m} y',$$

яъни

$$y^{-m} y' = \frac{1}{1-m} \cdot u'$$

бўлади. Натижада (19') тенглама

$$\frac{du}{dx} + (1-m) \cdot p(x) \cdot u = (1-m) q(x) \quad (19'')$$

кўринишга келади. Бу эса чизикли бир жинсиз дифференциал тенгламадир.

Шундай қилиб, Бернулли тенгламаси (*) алмаштириш ёрдамида чизикли тенгламага келар экан.

Маълумки,

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C \right]$$

булар эди. Шунга кўра (19'') тенгламанинг умумий ечими

$$u = e^{-\int (1-m)p(x)dx} \left[\int (1-m)q(x) \cdot e^{\int (1-m)p(x)dx} + C \right]$$

бўлади. $u = y^{1-m}$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$y = \left\{ e^{-\int (1-m)p(x)dx} \left[\int (1-m) \cdot q(x) \cdot e^{\int (1-m)p(x)dx} + C \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечимидир.

Мисол. Ушбу

$$y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу $m=2$ бўлган Бернулли тенгламасидир. Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $-y^2$ га бўлиб топамиз:

$$-y^{-2} \cdot y' + \frac{3}{x} \cdot y^{-1} = x^3$$

Кейинги тенгламада

$$u = y^{-1}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$u' = -y^{-2} \cdot y'$$

бўлиб, тенглама қуйидаги

$$u' + \frac{3}{x}u = x^3 \quad (20)$$

кўринишга келади. Шундай қилиб, Бернулли тенгламасини ечиш (20) чизикли тенгламани ечишга келди. (20) чизикли тенгламанинг умумий ечими (18') формулага кўра

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{3}{x}dx} \left[\int x^3 \cdot e^{\int \frac{3}{x}dx} dx + C \right] = e^{-3\ln|x|} \left[C + \int x^3 e^{3\ln|x|} dx \right] = \\ &= |x|^{-3} \left[C + \int x^3 \cdot |x|^3 dx \right] = |x|^{-3} \left[C + \frac{x^4 |x|^3}{7} + \tilde{C} \right] = \frac{x^4}{7} + \frac{C_1}{|x|^3} \end{aligned}$$

бўлади. Демак,

$$u = \frac{x^4}{7} + \frac{C_1}{|x|^3}, \quad u = \frac{1}{y}.$$

Бундан

$$y = \frac{7|x|^3}{7C_1 + x^4|x|^3}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

1°. Биринчи тартибли ушбу

$$y' = f(x, y).$$

яъни

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламани

$$-f(x, y)dx + dy = 0$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу ҳол умумийрок

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

дифференциал тенгламани қараш масаласини юзага келтиради.

Агар (21) тенгламанинг чап томонидаги

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, у ҳолда (21) *тўлиқ дифференциал тенглама* дейилади.

Айтайлик, (21) тўлиқ дифференциал тенглама бўлсин. Ушбу (21) тенглама ушбу

$$du(x, y) = 0$$

кўринишда ёзилади. Бундан эса

$$u(x, y) = C$$

бўлиши келиб чиқади (C — ўзгармас сон). Бу тўлиқ дифференциал (21) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Тўлиқ дифференциал тенгламалар мавзусини ўрганиш биринчидан тенгламанинг чап томонидаги

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциал бўлиши аниқлаш, иккинчидан шу $u(x, y)$ функцияни топиш муҳимдир.

2°. Айтайлик,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

тенглама берилган бўлиб, $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар D соҳада ($D \subset R^2$) аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар D соҳада

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (22)$$

Бўлса, у ҳолда

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади ва аксинча (бу тасдиқ кейинчалик, Грин формуласи ва унинг таъбиқлари баёнида келтирилади).

3°. Фараз қилайлик,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

тенгламанинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни $M(x, y)$ ҳамда $N(x, y)$ функциялар учун (22) шарт бажарилган бўлсин. Энди масала шу функцияни топишдан иборат.

Изланаётган функция $u(x, y)$ бўлсин. Унда бир томондан

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

иккинчи томондан эса икки ўзгарувчи функциянинг тўлиқ дифференциали таърифига кўра

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy,$$

бўлади. Бу икки тенгликдан

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

тенгликда y ни ўзгармас ҳисоблаб, унинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаймиз. Натижада,

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y) \quad (23)$$

бўлади, бунда $C(y)$ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция. Сўнг кейинги тенгликнинг иккала томонини y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y)dx + C(y) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y)dx \right) + C'(y).$$

Агар

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

эканини эътиборга олсак, унда ушбу

$$C'(y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y)dx \right) = N(x, y)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламадан $C(y)$ ни аниқлаш натижасида қаралаётган тўлиқ дифференциал тенгламанинг ечими $u(x, y)$ топилади.

4°. Мисоллар. 1. Ушбу

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$M(x, y) = (2xy + 3y^2), N(x, y) = x^2 + 6xy - 3y^2$$

бўлиб,

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 6xy - 3y^2) = 2x + 6y,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 3y^2) = 2x + 6y$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Бу эса берилган тенгламанинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлишини билдиради:

$$du(x, y) = (2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy.$$

Равшанки,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 + 6xy - 3y^2. \quad (**)$$

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2xy + 3y^2$$

тенгликнинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаб топамиз:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (2xy + 3y^2)dx = 2y \frac{x^2}{2} + 3y^2x + C(y) = \\ &= x^2y + 3xy^2 + C(y). \end{aligned}$$

Бу тенгликдаги $C(y)$ ни топиш учун

$$u(x, y) = x^2y + 3xy^2 + C(y) \quad (***)$$

ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2y + 3xy^2 + C(y)) = x^2 + 6xy + C'(y).$$

Демак, (**) муносабатга кўра

$$x^2 + 6xy + C'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

яъни

$$C'(y) = -3y^2$$

бўлади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама-
дир. Уни ечамиз:

$$C'(y) = -3y^2 \Rightarrow \frac{dC(y)}{dy} = -3y^2 \Rightarrow dC(y) = -3y^2 dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(y) = -y^3 + C_1.$$

Бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Топилган $C(y)$ ни (***)
тенгликдаги $C(y)$ ўрнига қўйсак, унда

$$u(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + C_1$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$u(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + C_1 = C,$$

яъни

$$x^2y + 3xy^2 - y^3 = C^*$$

бўлади. Бунда C^* — ўзгармас сон.

2. Ушбу

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$M(x, y) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}), N(x, y) = -\sqrt{x^2 - y}$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [2x(1 + \sqrt{x^2 - y})] = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-\sqrt{x^2 - y}) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Бинобарин, берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама экан:

$$du(x, y) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx - \sqrt{x^2 - y} dy.$$

Иккинчи томондан

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy.$$

Бу тенгликлардан

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x (1 + \sqrt{x^2 - y}),$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x (1 + \sqrt{x^2 - y})$$

тенгликнинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int [2x(1 + \sqrt{x^2 - y})] dx = \int (2x + 2x\sqrt{x^2 - y}) dx = \\ &= x^2 + \frac{2}{3} (x^2 - y)^{3/2} + C(y). \end{aligned}$$

Бу тенгликдаги $C(y)$ ни топиш учун

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3} (x^2 - y)^{3/2} + C(y)$$

ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + \frac{2}{3} (x^2 - y)^{3/2} + C(y) \right) = -\sqrt{x^2 - y} + C'(y).$$

Иккинчи томондан

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}.$$

Демак,

$$-\sqrt{x^2 - y} + C'(y) = -\sqrt{x^2 - y}.$$

Кейинги тенгликдан

$$C'(y) = 0, C(y) = C_1 - \text{const}$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3} (x^2 - y)^{3/2} + C = C_1.$$

яъни

$$x_2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C^*$$

бўлади. Бунда C^* — ўзгармас сон.

5°. Ўрганилаётган дифференциал тенглама

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (21)$$

кўринишда бўлиб, унинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмасин. Баъзи ҳолларда шундай $\mu(x, y)$ функцияни топиш мумкин бўладики, (21) тенгламани шу функцияга кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y) dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y) dy = 0$$

тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тўлиқ дифференциалига айланади:

$$du(x, y) = \mu(x, y) \cdot M(x, y) dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y) dy.$$

Одатда бундай $\mu(x, y)$ функция *интегралловчи кўпайтувчи* дейилади.

Модомики,

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y) dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y) dy$$

ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали экан, унда (22) шартга кўра.

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y) \cdot M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y) \cdot N(x, y)]$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y) \cdot M(x, y)] = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\partial M(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y) \cdot N(x, y)] = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Унда

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \\ & = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

яъни

$$M(x, y) \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} = \mu(x, y) \cdot \left(\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right)$$

бўлади.

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $\mu(x, y)$ га бўлиб, $\sqrt{X}$

$$M(x, y) \frac{\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y}}{\mu(x, y)} - N(x, y) \frac{\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}}{\mu(x, y)} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y},$$

сўнг

$$\frac{\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y}}{\mu(x, y)} = \frac{\partial \ln \mu(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}}{\mu(x, y)} = \frac{\partial \ln \mu(x, y)}{\partial x}$$

эқацини эътиборга олиб, ушбу

$$M(x, y) \frac{\partial \ln \mu(x, y)}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial \ln \mu(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad (24)$$

тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, (21) тенгламани тула дифференциал тенгламага айлантирадиган интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y)$ (24) тенгламадан топила экан. Бу тенгламани ечиш анча машаққатли ишдир.

Қуйида битта содда ҳолни қараш билан кифояланамиз.

Айтайлик, топиладиган интегралловчи кўпайтувчи фақат x гагина боғлиқ бўлсин: $\mu = \mu(x)$.

Унда

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

бўлиб, (24) тенглама

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

қўринишга келади. Бу тенгламадан $\mu(x)$ ни топамиз:

$$\begin{aligned} d \ln \mu(x) &= \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} \cdot dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \mu(x) &= \int \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} \cdot dx + \ln C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \frac{\mu(x)}{C} &= \int \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu(x) &= C \cdot e^{\int \frac{1}{N(x, y)} \left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right] dx} \end{aligned}$$

Хусусан, $C=1$ бўлганда битта

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N(x,y)} \left\{ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \right\} dx}$$

интегралловчи кўпайтувчига эга бўламиз.

Мисол. Ушбу

$$(x+y^2)dx - 2xydy = 0$$

тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$M(x, y) = x + y^2, \quad N(x, y) = -2xy$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -2y$$

бўлади:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Берилган тенглама тўла дифференциал тенглама эмас. Интегралловчи кўпайтувчини топамиз. Аввало

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}$$

ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x}$$

Унда

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = -\frac{2}{x}$$

бўлиб,

$$\ln \mu(x) = -2 \ln |x|, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

бўлади.

Берилган тенгламани $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ га кўпайтирсак, у тўла дифференциал тенгламага айланади:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0.$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги ифода учун

$$\begin{aligned} \frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy &= \frac{1}{x}dx - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = \\ &= d\ln|x| - d\frac{y^2}{x} = d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) \end{aligned}$$

бўлади. Унда тенглама ушбу

$$d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг ечими

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = \ln C,$$

яъни

$$x = C \cdot e^{\frac{y^2}{x}}$$

бўлади.

6-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ МАХСУС ЕЧИМЛАРИ

1°. Биз маъкур бобнинг 2-§ ида

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда яғоналиги ҳақида теорема келтирган эдик. Бу теоремага кўра, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ да:

1) $f(x, y)$ функция узлуксиз,

2) иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажарса, унда (2) тенгламанинг (x_0, y_0) нуктадан ўтувчи ягона интеграл эгри чизиги (ечими) мавжуд бўлади.

$f(x, y)$ функция шу шартларнинг бирини ёки иккаласини бажармаса, унда (2) тенглама ечимга эга бўлиши мумкинми деган савол туғилади. Мисоллар келтирайлик.

$$y' = \frac{x}{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = \frac{x}{y}$ бўлиб, $y(0, 0)$ нуктада узлуксиз эмас (1- шарт бажарилмайди).

Равшанки, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$ да

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y dy = x dx \Rightarrow y^2 = x^2 + C$$

бўлади.

Демак, $y^2 = x^2 + C$ тенгламанинг умумий ечимидир. Айни пайтда берилган тенгламанинг

$$y|_{x=0} = 0$$

шартни қаноатлантирадиган, яъни $(0, 0)$ нуктадан ўтадиган ечимлари мавжуд бўлиб, улар иккита:

$$y = x, y = -x$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ бўлиб, $f_y(x, y) = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ бўлади. Ох ўқдаги нукталарда

($y=0$ бўлади) бу ҳосила чексизга айланади. Бинобарин, бундай $(x, 0)$ нукталарда функция Липшиц шартини бажармайди. Берилган тенгламанинг $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (x, 0)$ бўлган нукталардаги умумий ечимини топамиз:

$$y' = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}} dy = dx \Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C.$$

Қуйидаги

$$y|_{x=C} = 0$$

шартни қаноатлантирадиган, яъни $(C, 0)$ нуктадан ўтадиган ечимлар ҳам мавжуд бўлиб, улар

$$y=0 \text{ ва } y = \left(\frac{2x-2C}{3} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Ушбу

$$y' = x + \sqrt[3]{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = -x + \sqrt[3]{y}$ бўлиб, Ох ўқининг нукталарида у иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажармайди.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $y' = f(x, y)$ тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартлари бажарилмаган нукталарда шу дифференциал тенгламанинг ё ечими мавжуд бўлмайди, ёки бундай нукталар орқали тенгламанинг икки ва ундан ортиқ интеграл эгри чизиклари (ечимлари) ўтади.

Одатда дифференциал тенгламанинг бундай ечими унинг махсус ечими дейилади.

Демак, берилган (2) дифференциал тенгламанинг махсус ечими шундай эгри чизик эканки, у биринчидан (2) тенгламанинг интеграл эгри чизиги бўлади, иккинчидан эса бу чизикнинг ҳар бир нуктасида мавжудлик теоремасининг шартлари бажарилмайди.

Фараз қилайлик,

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб,

$$F(x, y, C) = 0 \quad (25)$$

унинг умумий ечими,

$$y = \varphi(x)$$

эса топилиши лозим, бўлган махсус ечими бўлсин.

Унда ҳар бир $(x_0, y_0) \in D$ нуктадан (бунда $y_0 = \varphi(x_0)$) (2) тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта интеграл эгри чизиги ўтади. Шунинг учун

$$F(x_0, y_0, C) = 0$$

бўлади. Бу муносабатдаги C олинган x_0 га боғлиқ: $C = C(x_0)$. Умуман, x_0 ни ихтиёрий x дейилса ($x_0 = x$), унда

$$F(x, y, C(x)) = 0$$

бўлади. Ошқормас функция ҳосиласини ҳисоблаш қоидадан фойдаланиб топамиз:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F' \cdot C = 0. \quad (26)$$

Иккинчи томондан (2) тенгламанинг умумий ечими

$$F(x, y, C) = 0$$

ни дифференциалласак,

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \quad (27)$$

бўлади.

(26) ва (27) муносабатлардан

$$F'_c = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглама (2) дифференциал тенглама махсус ечимидаги нукталар учун ўридли бўлади.

Шундай килиб,

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F'_c = 0 \end{cases}$$

тенгламалардан C ни йўқотиш натижасида берилган тенгламанинг махсус ечими келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y' = x\sqrt{1-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг махсус ечимларини топинг.

Бу тенгламада

$$f(x, y) = x\sqrt{1-y^2}$$

бўлиб, $(x, -1)$ ҳамда $(x, 1)$ нукталарда Липшиц шarti бажарилмайди.

$D = \{(x, y) \in R^2 : (x, y) \neq (x, -1), (x, y) \neq (x, 1)\}$ да берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини толамиз:

$$\begin{aligned} y' = x\sqrt{1-y^2} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= xdx \Rightarrow \arcsin y = \frac{x^2}{2} - C \Rightarrow y = \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) \end{aligned}$$

Демак,

$$y = \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right)$$

тенгламанинг умумий ечими.

Берилган тенгламанинг махсус ечимларини топиш учун, унинг умумий ечими

$$F(x, y, C) = y - \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0$$

да $C = C(x)$ деб, C бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$F'_c = \left(y - \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right)\right)'_c = \cos\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0.$$

Энди

$$\begin{cases} F(x, y, C) = y - \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0, \\ F'_C = \cos\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0 \end{cases}$$

дан C ни йўқотамиз.

Агар

$$\sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = \pm \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{x^2}{2} - C\right)} = \pm 1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y = \pm 1$$

эканини топамиз.

Демак, $y = -1$, $y = 1$ берилган тенгламанинг махсус ечимлари экан.

7-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Маълумки, биринчи тартибли дифференциал тенглама умумий кўриниши

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (28)$$

бўлади.

Мазкур бобнинг аввалги параграфларида ҳосила y' га нисбатан ечилган

$$y' = f(x, y)$$

тенгламани қарадик ва ўргандик. Шунга айтиш керакки, кўпинча кейинги тенгламанинг ечими ошқормас функция кўринишида топилди. Бундай вазият (28) тенгламага нисбатан ҳам рўй беради.

Ушбу параграфда

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

тенгламани ўрганар эканмиз, аввало унинг ошқормас ҳамда параметрик кўринишдаги ечимлари тушунчасини эслатиб ўтамиз.

Агар

$$F(x, y) = 0$$

тенглама y ни x нинг функцияси сифатида аниқласа ва бу функция (28) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда

$$F(x, y) = 0$$

(28) тенгламанинг ошқормас кўринишдаги ечими бўлади.

(92)

Агар $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функциялар (α, β) да аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\Phi(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}) \equiv 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}$$

(28) тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими бўлади.
Қаралаётган тенгламада

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \\ y' &= \chi(u, v) \end{aligned}$$

деб, уни параметрик кўринишда ифодалаймиз, бунда $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ ҳамда $\chi(u, v)$ дифференциалланувчи функциялар.
Равшанки,

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dy = y' \cdot dx.$$

Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} dy &= y' \cdot dx \Rightarrow d[\psi(u, v)] = \chi(u, v) \cdot d[\varphi(u, v)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} dv &= \chi(u, v) \cdot \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} dv \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} &= \chi(u, v) \cdot \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} \right] \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан $\frac{dv}{du}$ ни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} \cdot \left[\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} - \chi(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right] &= \chi(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= \frac{\chi(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u}}{\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} - \chi(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}} \end{aligned}$$

Бу ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламадир.

Шундай қилиб, (28) дифференциал тенгламани ечиш ҳосилага нисбатан ечилган тенгламани ечишга келар экан. (28) дифференциал тенглама ҳар доим ҳам осон ечилавермайди.

Энди баъзи хусусий ҳолларни қараймиз.

1°. Айтайлик,

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлсин:

$$x = f(y, y'). \quad (29)$$

Бу ҳолда u ва v параметрлар сифатида y ва $y'=p$ ($u=y$, $v=y'$) олинади. Сўнг $dy=y'dx$ тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$dy=y' \cdot dx \Rightarrow dy=pd[f(y, p)] \Rightarrow dy=p \left[\frac{\partial f(y, p)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(y, p)}{\partial p} dp \right] \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\partial f(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Ҳосил бўлган дифференциал тенгламани ечамиз. Фараз қилайлик, бу тенгламанинг ечими $F(y, p, c)=0$ бўлсин. Унда

$$F(y, p, c)=0, \quad x=f(y, p)$$

лардан p ни йўқотиб, қаралаётган дифференциал тенгламанинг ечимига келамиз.

Э с л а т м а. (29) тенгламанинг ҳар икки томонини y бўйича дифференциаллаш натижасида

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$x=f(y, y') \Rightarrow dx=d[f(y, y')] \Rightarrow dx = \frac{\partial f(y, y')}{\partial y} dy + \frac{\partial f(y, y')}{\partial y'} dy' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\partial f(y, p)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(y, p)}{\partial p} dp$$

ва

муносабатлардан

$$dy=y'dx \Rightarrow dy=p \cdot dx$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

келиб чиқади.

М и с о л. Ушбу

$$x - \ln \frac{y'}{y} = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$\Phi(x, y, y') = x - \ln \frac{y'}{y} = 0$$

бўлиб, у тенглама x га нисбатан ечилади:

$$x = \ln \frac{y'}{y}.$$

Кейинги тенгламада $y'=p$ деб,

$$x = \ln \frac{p}{y} = \ln |p| - \ln |y|$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб,

$$dx = \frac{1}{p} dp - \frac{1}{y} dy$$

сўнг

$$dy = y' dx = p \cdot dx$$

эканини ҳисобга олиб, $dy = p \left(\frac{1}{p} dp - \frac{1}{y} dy \right)$, яъни $\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y} \cdot p = 1$ тенгламага келамиз. Бу биржинсли бўлмаган чизикли тенгламадир. Унинг умумий ечими (18') формулага кўра

$$p = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left[C + \int e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy \right],$$

$$p = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left[C + \int e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy \right],$$

яъни

$$p = |y| (C + \ln|y|)$$

бўлади. Энди

$$p = |y| (C + \ln|y|),$$

$$x = \ln|p| - \ln|y|$$

муносабатлардан p ни йўқотиб (бунда $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C + \ln|y||$ эканини эътиборга оламиз),

$$x = \ln|C + \ln|y|| \text{ ёки } e^x = |C + \ln|y||$$

бўлишини топамиз. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

2°. Айтайлик, $\Phi(x, y, y') = 0$ тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин бўлсин:

$$y = f(x, y'). \quad (30)$$

Бу ҳолда u ва v параметрлар сифатида x ва $y' = p$ ($u = x$, $v = y'$) олинади. Сўнг

$$y = f(x, p)$$

ни дифференциаллаб топамиз:

$$\begin{aligned} y = f(x, p) &\Rightarrow dy = d[f(x, p)] \Rightarrow dy = \\ &= \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp. \end{aligned}$$

Кейинги тенгликдан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx},$$

яъни

$$p = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

бўлиши келиб чиқади.

Фараз қилайлик, (30') дифференциал тенгламанинг ечим $F(x, p, c) = 0$ бўлсин. Унда

$$F(x, p, c) = 0, y = f(x, p)$$

лардан p ни йўқотиб, қаралаётган дифференциал тенгламанинг ечимига келамиз.

Мисол. Ушбу

$$y'^2 - y' \cdot x - y + \frac{x^2}{2} = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$\Phi(x, y, y') = y'^2 - y' \cdot x - y + \frac{x^2}{2} = 0$$

бўлиб, y тенглама y га нисбатан ечилади:

$$y = y'^2 - y' \cdot x + \frac{x^2}{2}.$$

Кейинги тенгламада $y' = p$ деб, унинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2},$$

$$\begin{aligned} dy &= d\left(p^2 - px + \frac{x^2}{2}\right) = 2pdp - xdp - pdx + xdx = \\ &= (2p - x)dp - (p - x)dx. \end{aligned}$$

Энди $dy = y' \cdot dx = p \cdot dx$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$pdx = (2p - x)dp - (p - x)dx \Rightarrow p = (2p - x) \frac{dp}{dx} - p + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2p - x) \cdot \frac{dp}{dx} = 2p - x \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 1 \quad (2p - x \neq 0).$$

Равшанки,

$$\frac{dp}{dx} = 1$$

тенгламанинг ечими $p = x + C$ бўлади.

Юқоридаги $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ ҳамда $p = x + c$ тенгликлардан p ни йўқотиб топамиз:

$$y = (x + c)^2 - (x + c)x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

8-§. ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y') \quad (31)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама Лагранж тенгламаси дейилади, бунда φ ва ψ лар дифференциалланувчи функциялар.

Бу тенгламада $y' = p$ деб, сўнг унинг ҳар икки томонини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(p) \cdot x + \psi(p), \\ dy &= d[\varphi(p) \cdot x + \psi(p)] = \varphi(p) \cdot dx + x \cdot d\varphi(p) + d\psi(p) = \\ &= \varphi(p) \cdot dx + x \cdot \varphi'(p) dp + \psi'(p) dp. \end{aligned}$$

Натижада

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x \cdot \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx},$$

яъни

$$p = \varphi(p) + [x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламада x ни номаълум функция, p ни эса унинг аргументи сифатида қараб, уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (\varphi(p) - p \neq 0)$$

Шундай қилиб, Лагранж тенгламасини ечиш

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (\varphi(p) - p \neq 0)$$

чизикли тенгламани ечишга келади. Айтайлик, бу чизикли тенгламанинг ечими $F(x, p, c) = 0$ бўлсин. Унда

$$\begin{cases} F(x, p, c) = 0 \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

система Лагранж тенгламасининг параметрик кўринишдаги ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y = 2xy' + \ln y'$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу Лагранж тенгламасидир. Берилган тенгламада $y' = p$ деб, уни куйдагича

$$y = 2xp + \ln p \quad (32)$$

ёзиб оламиз. Кейинги тенгламанинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$\begin{aligned} dy &= d(2xp + \ln p) \Rightarrow y' \cdot dx = 2pdx + 2xdp + \frac{1}{p}dp \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \cdot dx = 2pdx + 2xdp + \frac{1}{p}dp. \end{aligned}$$

Натижада,

$$p \frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p}, \quad \frac{dx}{dp} = -2 \frac{x}{p} - \frac{1}{p^2}$$

тенгламага келамиз. Бу x га нисбатан чизикли дифференциал тенгламадир. (18') формуладан фойдаланиб чизикли тенгламанинг ечимини топамиз:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{2}{p} dp} \left[C + \int \left(-\frac{1}{p^2} \right) \cdot e^{\int \frac{2}{p} dp} dp \right] = e^{-2 \ln p} \left(C - \int \frac{1}{p^3} e^{2 \ln p} dp \right) = \\ &= e^{\ln \frac{1}{p^2}} \left(C - \int \frac{1}{p^3} e^{\ln p^2} dp \right) = \frac{1}{p^2} \left(C - \int \frac{1}{p^2} p^2 dp \right) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Топилган x ни (32) даги x нинг ўрнига қўямиз:

$$y = 2p \left(\frac{C}{p^2} - \frac{1}{p} \right) + \ln p = \ln p + \frac{2C}{p} - 2.$$

Натижада, берилган дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2 \end{cases}$$

параметрик кўринишдаги ечими келиб чиқади.

9-§. КЛЕРО-ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$y = x \cdot y' + \psi(y') \quad (33)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама Клеро тенгламаси дейилади, бунда $\psi(y')$ дифференциалланувчи функция.

Клеро тенгламаси Лагранж тенгламасининг $\varphi(y') = y'$ бўлган хусусий ҳолидир.

(33) тенгламада $y' = p$ деб оламиз. Унда (33) тенглама

$$y = px + \psi(p) \quad (33')$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб топамиз:

$$\begin{aligned} y &= p \cdot x + \psi(p) \Rightarrow dy = d(px + \psi(p)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' \cdot dx = x \cdot dp + p dx + \psi'(p) dp \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \cdot dx = x \cdot dp + p dx + \psi'(p) dp \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \cdot dp + \psi'(p) dp = 0 \Rightarrow [x + \psi'(p)] dp = 0. \end{aligned}$$

1) $dp = 0$ бўлсин. У ҳолда $p = C = \text{const}$ бўлади. Бу топилган p нинг қийматини (33') тенгликдаги p нинг ўрнига қўйиб, Клеро тенгламасининг умумий ечимини топамиз:

$$y = C \cdot x + \psi(C).$$

(33) ва (33') муносабатларни солиштириб, (33) тенгламадаги y' нинг ўрнига ихтиёрий ўзгармас C ни қўйиш натижасида Клеро тенгламасининг умумий ечими ҳосил бўлишини кўрамиз.

2) $x + \psi'(p) = 0$ бўлсин. Бу тенгликдан $x = -\psi'(p)$ бўлиши келиб чиқади. Топилган x нинг бу қийматини (33) даги x нинг ўрнига қўямиз:

$$y = (-\psi'(p)) \cdot p + \psi(p) = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

Натижада берилган дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

параметрик кўринишдаги ечими келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y = xy' + \frac{1}{2y'}$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу Клеро тенгламасидир. Унинг умумий ечимини тенгламадаги y' нинг ўрнига ихтиёрий ўзгармас C ни қўйиш билан топилади:

$$y = C \cdot x + \frac{1}{2C}.$$

Берилган тенгламада $\varphi(y') = \frac{1}{2y'}$ бўлиб, $\psi'(p) = -\frac{1}{2p^2}$ бўлади. Шу сабабли

$$x = -\psi'(p)$$

тенглик

$$x = \frac{1}{2p^2}$$

кўринишга келади.

Унда

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p^2} \\ y = px + \frac{1}{2p} \end{cases}$$

берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими (маҳсулоти) бўлади.

10-§. ОШКОРМАС КЎРИНИШДАГИ БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ АЙРИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Энди

$$\Phi(x, y, y') = 0 \quad (34)$$

дифференциал тенгламанинг чап томонидаги $\Phi(x, y, y')$ функцияда айрим аргументларнинг ошқор кўринишда қатнашмаган ҳолларини қараймиз.

1°, (34) тенгламада x ва y лар қатнашмасин. Бунда ҳолда (34) тенглама куйидаги

$$\Phi(y') = 0 \quad (34')$$

кўринишга эга бўлади. Айтайлик,

$$y' = a \quad (a = \text{const}) \quad (34'')$$

бўлсин.

Унда (34'') тенгламанинг ечими $ax + c$ га тенг:

$$y = ax + c.$$

Бу тенгликдан эса $a = \frac{y-c}{x}$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$\Phi(y') = 0$ тенгламанинг умумий ечими $\Phi\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^6 - 3(y')^3 + y' - 7 = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$\Phi(y') = (y')^6 - 3(y')^3 + (y') - 7$$

бўлади. Юқорида айтилганга кўра берилган тенгламанинг ечими

$$\Phi\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0,$$

яъни

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^6 - 3\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-c}{x}\right) - 7 = 0$$

бўлади.

2°. (34) тенгламада y қатнашмасин. Бундай ҳолда (34) тенглама куйидаги

$$\Phi(x, y') = 0$$

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламани t параметр киритиш билан

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

иккита тенгламага алмаштирилади. Бунда $dy = y' dx$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} dy &= y' \cdot dx \Rightarrow dy = \psi(t) \cdot d(\varphi(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow dy &= \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt \Rightarrow y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + C. \end{aligned}$$

Натижада,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + C \end{cases}$$

системага келамиз. Бу берилган дифференциал тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^3 - y' - x - 1 = 0 \quad (35)$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада y ўзгарувчи катнашмайди. Агар параметр t сифатида y' олинса,

$$t = y',$$

унда бир томондан (35) тенгламага кўра

$$x = t^3 - t - 1,$$

иккинчи томондан эса

$$\begin{aligned} dy &= y' dx \Rightarrow dy = t \cdot d(t^3 - t - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow dy &= t(3t^2 - 1) dt \Rightarrow y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C \end{aligned}$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечимидир.

3°. (34) тенгламада x катнашмасин. Бундай ҳолда (34) тенглама қуйидаги

$$\Phi(y, y') = 0$$

кўринишга эга бўлади. Юқоридаги 2°- ҳолга ўхшаш, бу тенглама- ни t параметр киритиш билан

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

иккита тенгламага айлантирилади. Бу ҳолда ҳам

$$dy = y' dx$$

эканини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} dy &= y' dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = \frac{d\varphi(t)}{\psi(t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow dx &= \frac{\varphi'(t) \cdot dt}{\psi(t)} \Rightarrow x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C. \end{aligned}$$

Натижада,

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

системага келамиз. Бу берилган дифференциал тенгламани параметрик кўринишдаги ечими бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^5 + (y')^3 + y' - y + 5 = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада x ўзгарув катнашмайди. Агар параметр t сифатида y' олинса:

$$t = y',$$

$$y = t^5 + t^3 + t + 5$$

бўлиб,

$$dy = y' dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = \frac{d(t^5 + t^3 + t + 5)}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C$$

бўлиши топилади. Натижада

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C, \\ y = t^5 + t^3 + t + 5 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечимидир.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ
УМУМИЙ КЎРИНИШИ

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши куйидагича

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

бўлади. Бунда x — эркин ўзгарувчи, $y = y(x)$ — номаълум функция, y' ва y'' лар эса номаълум функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари.

Масалан, ушбу

$$1) y \cdot y'' - y'^2 = 0,$$

$$2) y'' = \frac{\ln x}{x^2},$$

$$3) x^2 \cdot y \cdot y'' = (y - xy')^2,$$

$$4) y'' - 3y' - 2y = 4x^2$$

тенгламалар иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардир.

(1) тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. Фараз қилайлик, (1) тенгламада y катнашмасин:

$$\Phi(x, y', y'') = 0. \quad (2)$$

Бу ҳолда $y' = p$ алмаштириш натижасида $y'' = p' = p'$ бўлиб, (2) тенглама $\Phi(x, p, p') = 0$ — биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y' = p$ деб оламиз. Унда $y'' = p'$ бўлиб, берилган тенглама куйидаги $p' - \frac{1}{x} p = 0$, яъни $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0$ тенгламага келади. Уни ечамиз:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1 \cdot x.$$

Демак, $p = y' = C_1 \cdot x$. Кейинги тенгламанинг ечими $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

2°. Фараз қилайлик, (1) тенгламада x ўзгариш катнашмасин:

$$\Phi(y, y', y'') = 0.$$

Бу ҳолда $y' = p$ алмаштириш бажариб, p ни y нинг функцияси сифатида қаралса, унда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама қуйидаги

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y \cdot y'' - y'^2 = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y' = \frac{dy}{dx} = p$ дейилса, унда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ бўлиб, берилган тенглама қуйидаги $y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$ кўринишга келади. Иккинчи тенгламани ечамиз:

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \quad \xrightarrow{(p \neq 0)} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |p| = \ln |y| + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1 \cdot y.$$

Энди $p = y'$ эканини эътиборга олсак, унда

$$y' = C_1 \cdot y$$

тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз:

$$y' = C_1 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln |y| = C_1 \cdot x + \ln C_2 \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{C_2} \right| = C_1 \cdot x \Rightarrow y = C_2 \cdot e^{C_1 x}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x}$$

бўлади.

2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН ТЕНГЛАМАЛАР

Айрим ҳолларда

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

тенгламани y'' га нисбатан ечиш мумкин бўлади:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (3)$$

Одатда (3) тенглама иккинчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама дейилади.

валдагидек киритилади.

Фараз қилайлик, (3) тенгламадаги $f(x, y, y')$ функция (учта) гарувчининг функцияси сифатида R^3 фазодаги бирор D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас мусбат N сони мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x, y, y') \in D$, $(x, \bar{y}, \bar{y}') \in D$ нуқталар учун

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, \bar{y}, \bar{y}'')| \leq N(|\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{y}' - \bar{y}''|)$$

монгизмлик бажарилса, у ҳолда $f(x, y, y')$ функция D соҳада y ва y' айғарувчилари бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

(3) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда
 бигоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамыз.

1-теорема. Агар

$$y'' = f(x, y, y')$$

генгламада $f(x, y, y')$ функция

$$D = \{(x, y, y') \in R^3: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b\}$$

да узлуксиз бўлиб, у ва y' аргументлари бўйича Липшиц шартини
важарса, у ҳолда (3) дифференциал тенгламакинг $[x_0 - h, x_0 + h]$ да
($h = \min(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{N})$) $M = \max f(x, y, y')$ бошланғич

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлиб, у ягона бўлади.

Энди (3) дифференциал тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат x га боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(x). \quad (4)$$

Агар $y'' = \frac{dy'}{dx}$ экаинини эътиборга олсак, унда (4) тенглама y' га нисбатан биринчи тартибли ушбу

$$\frac{dy'}{dx} = f(x)$$

тенгламага келади. Равшанки, бу тенгламанинг ечими

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

Бўлади.

Кейинги тенгламадан топамиз:

$$\begin{aligned} dy &= (\int f(x) dx + C_1) dx \Rightarrow y = \int (\int f(x) dx + C_1) dx + \\ &+ C_2 \Rightarrow y = \int (\int f(x) dx) dx + C_1 \int dx + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \int (\int f(x) dx) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Шундай қилиб, $y'' = f(x)$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = \int (\int f(x) dx) dx + C_1 x + C_2$$

Мисол. Ушбу

$$y'' = xe^x$$

тенгламани ечинг. Бу тенглама куйдагича ечилади:

$$\begin{aligned} y'' = xe^x &\Rightarrow \frac{dy'}{dx} = x \cdot e^x \Rightarrow dy' = xe^x dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \int xe^x dx + C_1 \Rightarrow y' = xe^x - e^x + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^x - e^x + C_1 \Rightarrow dy = (xe^x - e^x + C_1) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \int (xe^x - e^x + C_1) dx + C_2 \Rightarrow y = (x-2)e^x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

2°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат y га боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(y). \quad (3')$$

Бу тенгламани ечиш учун унинг ҳар икки томонини $2y'dx$ га кўпайтирамиз:

$$2y' \cdot y'' dx = 2y' \cdot f(y) dx.$$

Агар $2y' \cdot y'' dx = d(y')^2$, $y' dx = dy$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$d(y'^2) = 2f(y) dy$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб

$$y'^2 = 2 \int f(y) dy + C_1,$$

яъни

$$y' = \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}$$

бўлишини топамиз. Натижада, ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1} \Rightarrow dy = \sqrt{2 \int f(y) dy + C_1} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = x + C_2 \end{aligned}$$

Демак, (3') тенгламанинг ечими

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = x + C_2$$

бўлади.

$$y'' = y$$

дифференциал тенгламанинг

$$y_0|_{x_0=0}=1, y'_0|_{x_0=0}=0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $2y'dx$ га кўпайтирамиз:

$$2y'y''dx = 2yy'dx.$$

Равшанки,

$$2y' \cdot y''dx = d(y'^2), y'dx = dy.$$

Унда кейинги тенглама $d(y'^2) = 2ydy$ кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$y'^2 = 2\frac{y^2}{2} + C_1 = y^2 + C_1.$$

Бошланғич шартга биноан $0 = 1 + C_1$, яъни $C_1 = -1$ бўлади. Демак,

$$y'^2 = y^2 - 1. \quad (5)$$

Энди (5) дифференциал тенгламани ечамиз:

$$y'^2 = y^2 - 1 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{y^2 - 1}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x + C_2.$$

Яна бошланғич шартга кўра $\ln|1 + \sqrt{1 - 1}| = 0 + C_2$, яъни $C_2 = 0$

бўлади. Демак, $\ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x$. Бу тенгликдан

$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm x}$ ва ундан $\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = e^{\mp x}$ бўлиши келиб чиқа-

ди. Махражда иррационалликдан кутулиш натижасида

$y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{\mp x}$ ҳосил бўлади. Натижада $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm x}$,

$y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{\mp x}$ бўлиб, улардан $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

бўлади.

3°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат y' га боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(y'). \quad (6)$$

Бу ҳолда $y' = z$ деб белгиласак, унда $y'' = z'$ бўлиб, $z' = f(z)$ бўлади.

Равшанки,

$$\frac{dz}{dx} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{f(z)} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1.$$

Фараз қилайлик, кейинги тенгликдан z ни топиш мумкин бўлгани

$$z = \varphi(x, C_1).$$

Унда

$$\begin{aligned} z = y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1) &\Rightarrow dy = \varphi(x, C_1) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 \end{aligned}$$

бўлади. Бу эса (6) дифференциал тенгламанинг ечимидир.
Мисол. Ушбу

$$y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$y' = z$$

деб оламиз. Унда

$$y'' = z'$$

бўлиб,

$$z' = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

бўлади. Кейинги тенгламани ечамиз:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}} &\Rightarrow \frac{dz}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{dz}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = x + C_1 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = x + C_1. \end{aligned}$$

Демак,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1.$$

Бу тенгликдан эса

$$y' = \frac{x + C_1}{\pm \sqrt{1 - (x + C_1)^2}}$$

бўлиши келиб чиқади. (7) тенглама қуйидагича ечилади:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{x + C_1}{\pm \sqrt{1 - (x + C_1)^2}} &\Rightarrow dy = \frac{x + C_1}{\pm \sqrt{1 - (x + C_1)^2}} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y + C_2 = \pm \sqrt{1 - (x + C_1)^2} \Rightarrow (x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Бу берилган тенгламанинг ечимидир.

4°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция y ҳамда y' ларга боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(y, y'). \quad (8)$$

Бу тенгламада $y' = p$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

бўлиб, (8) тенглама куйидаги

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y}$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y' = p$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ бўлиб, берилган тенглама $y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$, яъни

$\frac{p}{p^2+1} dp = -\frac{dy}{y}$ тенгламага келади. Уни интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{p}{p^2+1} dp = - \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(p^2+1) = -\ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (p^2+1) \cdot y^2 = C_1^2.$$

Демак, $(y'^2+1) \cdot y^2 = C_1^2$. Кейинги тенгликдан $y' = \pm \frac{\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}$ бўлини келиб чиқади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уни ечамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{C_1^2-y^2}}{y} \Rightarrow \pm \frac{y}{\sqrt{C_1^2-y^2}} dy = dx \Rightarrow \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}} = \\ = \int dx \Rightarrow \pm \sqrt{C_1^2-y^2} = x + C_2 \Rightarrow (x+C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг ечими:

$$(x+C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

5°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция x ҳамда y' ларга боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(x, y').$$

Бу тенгламада $y' = p$ алмаштириш бажарамиз. Унда $y'' = \frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган тенглама куйидаги

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y'' = \frac{1-2x^3y'}{x^4}$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y' = p$ алмаштириш бажарамиз. Унда $y'' = \frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган тенглама куйидаги $\frac{dp}{dx} = \frac{1-2x^3p}{x^4}$, яъни $\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{x} = \frac{1}{x^4}$ чизикли тенгламага келади. 8-боб, 3-§ да келтирилган (18') формулага кўра

$$p = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left[C_1 + \int \frac{1}{x^4} \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right]$$

бўлади. Бундан

$$p = e^{-2\ln|x|} \left[C_1 + \int \frac{1}{x^4} e^{2\ln|x|} dx \right] = \frac{C_1}{x^2} - \frac{1}{x^3},$$

демак, $p = \frac{C_1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. Бу тенгламанинг ёчими $y = \frac{2}{x^2} - \frac{C_1}{x} + C_2$ бўлади.

3-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Чизикли дифференциал тенглама тушунчаси.

Номаълум функция $y = y(x)$ ва унинг y' , y'' ҳосилалари бири-бирига катнашган

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x)$$

тенглама *иккинчи тартибли чизикли тенглама* дейилади. Бу ерда $p_1(x)$, $p_2(x)$ тенгламанинг *коэффициентлари*, $q(x)$ эса *озод аъзо* дейилиб, улар бирор (a, b) оралиқда аниқланган функциялардир.

(9) тенглама *иккинчи тартибли чизикли бир жинсиз дифференциал тенглама* ҳам деб юритилади.

Агар (9) тенгламада $q(x) \equiv 0$ бўлса, яъни тенглама ушбу

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (10)$$

кўринишга эга бўлса, уни *иккинчи тартибли чизикли бир жинслик дифференциал тенглама* дейилади.

Масалан,

$$\begin{aligned} y'' + xy' + (x^2 + 1)y &= \cos x, \\ y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y &= -3 \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

тенгламалар бир жинссиз дифференциал тенгламалар,

$$y'' - \frac{1}{x} \cdot y' - xy = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot y' + (x + \sqrt{x}) \cdot y = 0$$

тенгламалар эса бир жинсли дифференциал тенгламалар бўлади.

Энди чизикли дифференциал тенгламаларнинг иккита хоссасини келтирамиз.

1°. (9) тенгламада

$$x = \varphi(t)$$

($\varphi(t)$ икки марта дифференциалланувчи функция) алмаштириш бажарилса у яна чизикли тенгламага айланади.

Исбот. (9) тенгламада $x = \varphi(t)$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$(\varphi'(t) \neq 0)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\varphi'^2(t)} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$\frac{1}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \cdot \frac{dy}{dt} + p_1(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} + p_2(\varphi(t)) \cdot y = q(\varphi(t)),$$

яъни

$$y'' - \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} - p(\varphi(t)) \varphi'(t) \right) \cdot y' + p_2(\varphi(t)) \cdot y = q(\varphi(t))$$

тенгламага келади. Бу иккинчи тартибли чизикли тенгламадир.

2°. (9) тенгламада номаълум функция

$$y = u(x) \cdot z + v(x) \quad (z = z(x))$$

чизикли алмаштириш натижасида ($u(x)$, $v(x)$ икки марта дифференциалланувчи функциялар) яна чизикли тенгламага айланади.

Исбот. (9) тенгламада

$$y = u(x) \cdot z + v(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Равшанки,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [u(x) \cdot z + v(x)] = u(x) \cdot z' + u'(x) \cdot z + v'(x),$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [u(x) \cdot z' + u'(x) \cdot z + v'(x)] = \\ = u \cdot z'' + 2u' \cdot z' + u'' \cdot z + v''.$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$u \cdot z'' + 2u' \cdot z' + u'' \cdot z + v'' + p_1(x) [u \cdot z' + u' \cdot z + v'] + p_2(x) [u \cdot z + v] = q(x),$$

яъни

$$z'' + \frac{1}{u}(2u' + p_1(x) \cdot u) \cdot z' + \frac{1}{u}(u'' + p_1(x) \cdot u' + p_2(x) \cdot u) \cdot z = \\ = \frac{1}{u} [q(x) - v'' - p_1(x) \cdot v' - p_2(x) \cdot v]$$

тенгламага келади. Бу иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир.

Эслатма. (10) бир жинсли тенгламада $y=u(x)$ -г алмаштириш бажариб, тенглама яна бир жинсли тенгламага айланади.

Энди (9) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳақида ягоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

2-теорема. Агар

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x)$$

тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$ ҳамда $q(x)$ функциялар X тўпламида ($X \subset R$) узлуксиз бўлса, y ҳолда X да (9) тенгламанинг

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлади.

4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1°. Ушбу паратрафда

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (10)$$

бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама ва унинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз.

Аввало баъзи тасдиқлар ва тушунчаларни келтирамиз.

3-теорема. Агар $y_1 = y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими бўлса, $C \cdot y_1$ ҳам (C — ихтиёрий ўзгармас сон) шу тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. Шартга кўра, y_1 функция (10) тенгламанинг ечимидир. Демак,

$$y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 = 0. \quad (11)$$

Энди

$$(C \cdot y_1)'' + p_1(x) \cdot (C \cdot y_1)' + p_2(x) \cdot C \cdot y_1$$

ифодани қараймиз. Равшанки,

$$(C \cdot y_1)'' = C \cdot y_1'', \\ (C \cdot y_1)' = C \cdot y_1'.$$

Шу тенгликларни ҳамда (11) муносабатни эътиборга олиб, топамиз:

$$(C \cdot y_1)'' + p_1(x) \cdot (C \cdot y_1)' + p_2(x) \cdot C \cdot y_1 = C \cdot y_1'' + p_1(x) \cdot C \cdot y_1' + \\ + p_2(x) \cdot C \cdot y_1 = C(y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1) = C \cdot 0 = 0.$$

Бу эса $C \cdot y_1$ функция берилган (10) дифференциал тенгламанинг ечими эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. Агар $y_1 = y_1(x)$ ҳамда $y_2 = y_2(x)$ функцияларнинг ҳар бири (10) тенгламанинг ечимлари бўлса, $y_1 + y_2$ функция ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

И с б о т. Шартга кўра y_1 ҳамда y_2 функциялар (10) тенгламанинг ечимлари. Демак,

$$\begin{aligned} y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 &= 0, \\ y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Энди

$$(y_1 + y_2)'' + p_1(x) (y_1 + y_2)' + p_2(x) (y_1 + y_2)$$

ифодани караймиз. Равшанки,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' &= y_1'' + y_2'', \\ (y_1 + y_2)' &= y_1' + y_2'. \end{aligned}$$

Шу тенгликларни ҳамда (12) муносабатларни эътиборга олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} &(y_1 + y_2)'' + p_1(x) (y_1 + y_2)' + p_2(x) (y_1 + y_2) = \\ &= y_1'' + y_2'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_1 + p_2(x) \cdot y_2 = \\ &= (y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1) + (y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_2) = 0. \end{aligned}$$

Бу эса $y_1 + y_2$ функция берилган (10) дифференциал тенгламанинг ечими эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

1-натижа. Агар y_1 ҳамда y_2 функциялар (10) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $C_1 y_1 + C_2 y_2$ функция ҳам (C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар) шу тенгламанинг ечими бўлади.

Бу натижанинг исботи юқорида келтирилган теоремалардан келиб чиқади.

2°. Шундай қилиб, $y_1 = y_1(x)$ ҳамда $y_2 = y_2(x)$ функциялар (10) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

функция ҳам (10) тенгламанинг ечими бўлар экан.

Табиий равишда, бу ечим берилган (10) дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўладими деган савол туғилади. Бу саволни ҳал қилиш функцияларнинг қизиқли эрки ҳамда қизиқли боғлиқ бўлиши тушунчаларини киритишни тақозо қилади.

Фараз қилайлик, (a, b) интервалда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай α_1 ҳамда α_2 сонлар топилсаки, уларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиб, ушбу

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) = 0$$

тенглик бажарилса, $\varphi_1(x)$ ҳамда $\varphi_2(x)$ функциялар (a, b) да қизиқли боғлиқ дейилади.

3-таъриф. Агар $\varphi_1(x)$ ҳамда $\varphi_2(x)$ функциялар учун

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) = 0$$

тенглик фақат $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ бўлгандагина бажарилса, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ лар (a, b) да чизиқли эрки функциялар дейилади.

3°. Фараз қилайлик, $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ функциялар

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0$$

дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлсин.

Ушбу

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

функционал детерминант Вронский детерминанти дейилади.

5-теорема. Агар (10) тенгламанинг $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлари (a, b) да чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\forall x \in (a, b)$ да

$$W(x) = 0$$

бўлади.

Исбот. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар (a, b) да чизиқли боғлиқ бўлсин. Унда

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$

бўлиб, α_1 ҳамда α_2 сонларнинг камида биттаси нолдан фаркли. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб, α_1 ҳамда α_2 ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар чизиқли боғлиқ бўлганлиги сабабли бу система тривиал бўлмаган ечимга эга. Бинобарин, системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (\forall x \in (a, b))$$

бўлади (1-том, 7-боб, 3-§). Демак, (a, b) да

$$W(x) = 0.$$

Теорема исбот бўлди.

4°. Энди $W(x) \neq 0$ бўлишидан $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимларнинг чизиқли боғлиқ бўлишини ифодалайдиган, шунингдек Вронский детерминантини тенгламанинг коэффициенти орқали ёзилишини кўрсатадиган теоремаларни исботсиз келтирамиз.

6-теорема. Агар бирор $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $W(x_0) = 0$ бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар чизиқли боғлиқ бўлади.

7-теорема. Ушбу

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} \quad (13)$$

формула ўринлидир, бунда $x_0 \in (a, b)$.

Одатда (13) Лиувилл (Остроградский — Лиувилл) формуласи дейилади.

Юкорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1) Лиувилл формуласи $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимларнинг Вронский детерминанти (a, b) да айнан нолга тенг ёки (a, b) нинг бирор нуктасида нолга айланмаслигини кўрсатади.

2) Агар Вронский детерминанти $W(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар чизикли боғлиқ бўлади ва аксинча.

3) Агар Вронский детерминанти $W(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар чизикли эрки бўлади.

5°. 4-таъриф. Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлари чизикли эрки бўлса, улар тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси дейилади.

8-теорема. Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенглама фундаментал ечимлар системасига эга.

Исбот. Маълумки,

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0$$

тенглама (бунда $p_1(x)$ ва $p_2(x)$ лар (a, b) да узлуксиз функциялар), бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга.

Иккита турли бошланғич шартларни қараймиз:

$$y_1|_{x=x_0} = 1, \quad y_1'|_{x=x_0} = 0,$$

$$y_2|_{x=x_0} = 0, \quad y_2'|_{x=x_0} = 1.$$

Бу шартларни қаноатлантирувчи $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ ечимлар мавжуд. Дифференциал тенглама ечимларининг x_0 нуктадаги Вронский детерминанти

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

бўлади. Бинобарин, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ лар берилган тенгламанинг чизикли эрки ечимлари, ягона фундаментал ечимлар системаси бўлади. Теорема исбот бўлди.

9-теорема. Агар $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар (a, b) да

$$y' + p_1(x) \cdot y + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (10)$$

тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

кўринишда бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Исбот. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар (a, b) да (10) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлсин. Унда 8-теоремага кўра

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (x \in (a, b))$$

бўлади. 1- натижага кўра $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x)$ ҳам (10) тенгламанинг ечими бўлади.

(a, b) да ихтиёрий x_0 нукта олиб, бошланғич шартларни қуйидагича

$$y_1|_{x=x_0} = y_1(x_0), \quad y_1'|_{x=x_0} = y_1'(x_0),$$

$$y_2|_{x=x_0} = y_2(x_0), \quad y_2'|_{x=x_0} = y_2'(x_0)$$

аниқлаймиз. Равшанки,

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

система, $W(x_0) \neq 0$ бўлганлиги сабабли ягона C_1, C_2 ечимга эга. Демак, $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ ечим ихтиёрий бошланғич шартни канонизациядиган ечим бўлганлигидан

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

нинг берилган (10) тенгламанинг умумий ечими эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - \frac{x}{x-1} \cdot y' + \frac{1}{x-1} \cdot y = 0 \quad (x \neq 1)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$ функциялар берилган тенгламанинг ечимлари бўлишини кўрсатамиз:

$$y_1(x) = e^x, \quad y_1'(x) = e^x, \quad y_1''(x) = e^x;$$

$$y_2(x) = x, \quad y_2'(x) = 1, \quad y_2''(x) = 0,$$

$$e^x - \frac{x \cdot e^x}{x-1} + \frac{1}{x-1} \cdot e^x = e^x \left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} \right) = 0,$$

$$0 - \frac{x}{x-1} \cdot 1 + \frac{1}{x-1} \cdot x = 0.$$

Бу $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$ ечимлар берилган тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади, чунки

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x(1-x)$$

бўлиб, $W(0) = 1 \neq 0$. Демак, 9- теоремага кўра берилган теореманинг умумий ечими

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x$$

бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

6°. Агар

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (10)$$

тенгламанинг битта ечими маълум бўлса, унда (10) тенгламани биринчи тартибли дифференциал тенгламага келтириш, шунингдек

бу ечим билан чизикли боғлиқ бўлмаган иккинчи ечимни ҳам топиш мумкинлиги ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

10-теорема. Агар $y_2(x)$ функция (10) дифференциал тенгламанинг битта ечими бўлса, u ҳолда (10) тенгламани ечиш биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламани ечишга келади.

Исбот. Шартга кўра $y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими. Бинобарин,

$$y_1' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 = 0.$$

Куйидаги

$$y = y_1 \cdot z \quad (z = z(x))$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\begin{aligned} y' &= y_1' \cdot z + y_1 \cdot z', \\ y'' &= y_1' \cdot z' + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z'' \end{aligned}$$

бўлади. Бу y , y' , y'' ларнинг қийматларини (10) тенгламадаги y , y' , y'' лар ўрнига қўйиб, y_1 функция (10) тенгламанинг ечими эканини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} y_1' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z'' + p_1(x) \cdot (y_1' \cdot z + y_1 \cdot z') + p_2(x) \cdot y_1 \cdot z &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y_1' + p_1(x)y_1')y_1 + p_2(x) \cdot y_1 \cdot z + (2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) \cdot z' + y_1 \cdot z'' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 \cdot z'' + (2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) \cdot z' &= 0, \end{aligned}$$

кейинги тенгламада $z' = u$ ($u = u(x)$) деб олинса, натижада ушбу

$$y_1 \cdot u' + (2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) \cdot u = 0 \quad (14)$$

биринчи тартибли дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, (10) тенгламани ечиш (14) тенгламани ечишга келди. Теорема исбот бўлди.

7°. Агар

$$y = y_1 \cdot z \text{ ва } z' = u \quad (u = u(x))$$

муносабатлардан

$$y = y_1 \cdot \int u(x) dx \quad (15)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (10) тенгламада (15) муносабат билан алмаштириш бажарилса, (10) тенглама биринчи тартибли дифференциал тенгламага келишини кўрамиз.

11-теорема. Агар $y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими бўлса, u ҳолда шу ечим билан чизикли эркин бўлган иккинчи ечим ушбу

$$y_2 = y_2(x) = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

формула билан топилади.

Исбот. Айтайлик, $y_1 = y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими бўлсин:

$$y_1' + p_1(x) y_1' + p_2(x) \cdot y_1 = 0.$$

(10) тенгламада

$$y = y_1 \int u dx \quad (16)$$

алмаштириш бажарамиз:

$$y' = y_1' \cdot \int u dx + y_1 \cdot u,$$

$$y'' = y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 \cdot u'.$$

Бу y , y' , y'' ларнинг кийматларини (10) тенгламадаги y , y' , y'' лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$\begin{aligned} y_1'' \cdot \int u dx + 2y_1' u + y_1 \cdot u' + p_1(x) [y_1' \cdot \int u dx + y_1 \cdot u] + p_2(x) \cdot y_1 \int u dx &= \\ = 0 \Rightarrow (y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) \cdot \int u dx + y_1 u' + [2y_1' + p_1(x)y_1] u &= \\ = 0 \Rightarrow y_1 u' + (2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) u = 0. \end{aligned}$$

Кейинги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни ечамиз:

$$y_1 \cdot u' + (2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) u = 0 \Rightarrow y_1 \cdot \frac{du}{dx} = -(2y_1' + p_1(x) \cdot y_1) u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + p_1(x) \cdot y_1}{y_1} dx \Rightarrow \ln|u| = -\int \frac{2y_1' + p_1(x)y_1}{y_1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -2 \int \frac{dy_1}{y_1} - \int p_1(x) dx \Rightarrow \ln|u| =$$

$$= -2 \ln|y_1| - \int p_1(x) dx \Rightarrow u = \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2}.$$

(15) муносабатдан фойдаланиб

$$y = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

бўлишини топамиз. Бу эса теоремани исботлайди. Келтирилган теоремадан мисоллар ечишда кўп фойдаланилади.

Мисол. Агар

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$

тенгламанинг битта ечими

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

бўлса, унинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламада

$$y = y_1 \int u(x) dx$$

алмаштиришни бажарамиз, бунда u — номаълум функция. Равшан-ки,

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \int u dx + \frac{\sin x}{x} u,$$

$$y'' = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x}{x^3} \int u dx + 2 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} u + \frac{\sin x}{x} u'.$$

Бу қийматларни берилган тенгламадаги y, y', y'' ларнинг ўрнига қўйиб топамиз:

$$-\frac{\sin x}{x} \int u dx - 2 \frac{\cos x}{x^2} \int u dx + 2 \cdot \frac{\sin x}{x^3} \int u dx + 2 \frac{\cos x}{x} u - 2 \frac{\sin x}{x^2} u + \\ + \frac{\sin x}{x} u' + 2 \frac{\cos x}{x^2} \int u dx + 2 \frac{\sin x}{x^2} u - 2 \frac{\sin x}{x^3} \int u dx + \frac{\sin x}{x} \int u dx = 0.$$

Бундан эса

$$2 \frac{\cos x}{x} u + \frac{\sin x}{x} u' = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Тенгламани ечамиз:

$$\frac{du}{u} = -2 \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |u| = -2 \ln |\sin x| + \ln C_1 \Rightarrow u = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

Энди $y = \frac{\sin x}{x} \int u dx$ эканлигини эътиборга олсак,

$$y = \frac{\sin x}{x} \int \frac{C_1}{\sin^2 x} dx = C_1 \frac{\sin x}{x} (-\operatorname{ctg} x + \tilde{C}_2) = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$$

бўлади.

Демак,

$$y = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}.$$

5-§. БИР ЖИНССИЗ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1°. Ушбу параграфда иккинчи тартибли бир жинссиз чизикли

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \quad (9)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунда (9) тенгламага мос бўлган

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

бир жинсли чизикли тенглама ҳақидаги маълумотлардан фойдаланамиз.

Маълумки, (9) тенгламадаги $p_1(x), p_2(x)$ ва $q(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) да узлуксиз бўлса, у ҳолда (9) тенгламанинг

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0$$

бошланғич шартларни каноатлантирадиган ечими мавжуд ва бу ечим ягона бўлади.

12-теорема. Бир жинссиз чизиқли дифференциал тенглама

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x)$$

нинг умумий ечими шу тенгламанинг бирор хусусий ечими ва бир жинсли чизиқли тенглама

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (10)$$

нинг умумий ечими йигиндисидан иборат бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция (a, b) да (9) тенгламанинг хусусий ечими, $u(x)$ функция эса (10) тенгламанинг умумий ечими бўлсин. Унда

$$\begin{aligned} \varphi''(x) + p_1(x) \cdot \varphi'(x) + p_2(x) \cdot \varphi(x) &\equiv q(x), \\ u''(x) + p_1(x) \cdot u'(x) + p_2(x) \cdot u(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

бўлади. Бу тенгликларни хадлаб қўшиб топамиз:

$$\begin{aligned} &u''(x) + \varphi''(x) + p_1(x) \cdot u'(x) + p_1(x) \cdot \varphi'(x) + \\ &+ p_2(x) \cdot u(x) + p_2(x) \cdot \varphi(x) \equiv q(x) \Rightarrow (U(x) + \varphi(x))'' + \\ &+ p_1(x) (U(x) + \varphi(x))' + p_2(x) (u(x) + \varphi(x)) \equiv q(x). \end{aligned}$$

Демак,

$$y = u(x) + \varphi(x)$$

функция (9) тенгламанинг ечими бўлар экан.

Маълумки, бир жинсли (10) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

қўринишда бўлиб, бунда $y_1(x)$, $y_2(x)$ фундаментал ечимлар системаси, c_1 ва c_2 лар эса ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлади. Демак,

$$y = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \varphi(x). \quad (17)$$

Энди (17) тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб топамиз:

$$y' = c_1 \cdot y_1'(x) + c_2 \cdot y_2'(x) + \varphi'(x).$$

Натижада, ушбу

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 = y - \varphi(x), \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' = y' - \varphi'(x) \end{cases} \quad (18)$$

система ҳосил бўлади. Бу системада $y_1(x)$, $y_2(x)$ лар (10) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси. Бинобарин, $\forall x \in (a, b)$ да

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Демак, $\forall x_0 \in (a, b)$ да ҳамда $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ ва $\varphi_0 = \varphi(x_0)$ ларнинг ҳар қандай қийматларида (18) система c_1 ҳамда c_2 ларга нисбатан ечимга эга. Бу ҳол

$$y = u(x) + \varphi(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \varphi(x)$$

нинг (9) бир жинсиз дифференциал тенглама умумий ечим эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2°. Энди (9) бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини топиш усулларида бирини келтирамиз.

Фараз қилайлик,

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x)y = q(x)$$

бир жинсиз тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ лар (a, b) да берилган узлуксиз функциялар.

Тенгламага мос бир жинсли

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

тенгламани қараймиз. Айтайлик, $y_1 = y_1(x)$ ва $y_2 = y_2(x)$ бу тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлсин. Унда (10) тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

бўлади. Бу ерда c_1 , c_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар. Албатта, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ функция бир жинсиз (9) тенгламанинг ечими бўлмайди.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ даги c_1 ва c_2 ларни x ўзгарувчининг шундай функцияси бўлсин деб қараймизки,

$$y = c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 \quad (18')$$

функция (9) бир жинсиз тенгламанинг ечими бўлсин. Масала шундай $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларни топишдан иборат. Шу мақсадни кўзлаб (18') тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y' = c_1(x) \cdot y'_1 + c_2(x) \cdot y'_2 + c'_1(x) \cdot y_1 + c'_2(x) \cdot y_2.$$

Қаралаётган $c_1(x)$, $c_2(x)$ лар учун

$$y_1 c'_1(x) + y_2 c'_2(x) = 0$$

бўлсин деб қараймиз. Натижада

$$y' = c_1(x) \cdot y'_1 + c_2(x) \cdot y'_2 \quad (19)$$

бўлади.

(19) тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y'' = c_1(x) \cdot y_1'' + c_2(x) \cdot y_2'' + c_1'(x) \cdot y_1' + c_2'(x) \cdot y_2' \quad (20)$$

Энди (18), (19) ва (20) муносабатларда ифодаланган y, y', y'' ларни (9) тенгламадаги y, y', y'' лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$\begin{aligned} & c_1(x) \cdot y_1'' + c_2(x) \cdot y_2'' + y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) + \\ & p_1(x) \cdot (c_1(x) \cdot y_1' + c_2(x) \cdot y_2') + p_2(x) \cdot (c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2) = q(x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow c_1(x) (y_1'' + y_1' \cdot p_1(x) + p_2(x) y_1) + c_2(x) (y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + \\ & + p_2(x) y_2) + y_1' \cdot c_1'(x) + y_2' \cdot c_2'(x) = q(x). \end{aligned}$$

Агар

$$y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 = 0,$$

$$y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_2 = 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглама ушбу

$$y_1' \cdot c_1'(x) + y_2' \cdot c_2'(x) = q(x)$$

кўринишга келади.

Натижада $c_1'(x)$ ҳамда $c_2'(x)$ ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases} y_1' \cdot c_1'(x) + y_2' \cdot c_2'(x) = 0, \\ y_1' \cdot c_1'(x) + y_2' \cdot c_2'(x) = q(x) \end{cases} \quad (21)$$

системага келамиз. Бу система коэффициентларидан тузилган Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$\forall x \in (a, b)$ да нолдан, фарқлидир. Демак, система ягона ечимга эга. (21) системани ечишда 1-том, 7-боб, 3-§ да келтирилган формуладан фойдаланамиз:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2' \\ q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-y_2' q(x)}{W(x)},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1' & 0 \\ y_1' & q(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1' \cdot q(x)}{W(x)}.$$

Шундай қилиб $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларни топиш учун ушбу

$$c_1(x) = -\frac{y_2' \cdot q(x)}{W(x)}, \quad c_2(x) = \frac{y_1' \cdot q(x)}{W(x)}.$$

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар ҳосил бўлди. Уларни ечамиз:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow \frac{dc_1(x)}{dx} = -\frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow dc_1(x) = -\frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} dx \Rightarrow c_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} dx + \bar{c}_1.$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow \frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow dc_2(x) = \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} dx \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} dx + \bar{c}_2.$$

Топилган $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларнинг бу қийматларини (18) ифодадаги $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларнинг ўрнига қўямиз:

$$y = \left[-\int \frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} dx + \bar{c}_1 \right] y_1 + \left(\int \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} dx + \bar{c}_2 \right) y_2 = \\ y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 - 1$$

Бу (9) бир жинсиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Кейинги тенгликдан кўринадики, (9) бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x) = y_2 \int \frac{y_1 q(x)}{W(x)} dx - y_1 \int \frac{y_2 q(x)}{W(x)} dx \quad (22)$$

бўлади.

Хусусий ечимни топишдаги бу усул Лагранж усули деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 - 1$$

бир жинсиз тенглама берилган. Агар бу тенгламага мос бир жинсли

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = 0$$

тенгламанинг битта ечими $y_1 = x^2$ бўлса, берилган бир жинсиз тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жинсли

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = 0.$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Шартга кўра бу тенгламанинг битта $y_1 = x^2$ ечими берилган. Унинг иккинчи ечимини ушбу бобнинг 3-§ да келтирилган

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз.

Равшанки, $p_1(x) = -\frac{4}{x}$. Унда $-\int p(x) dx = \int \frac{4}{x} dx = 4 \ln|x| = \ln x^4$

бўлиб, $e^{-\int p_1(x) dx} = e^{\ln x^4} = x^4$ бўлади. Натижада:

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^4}{x^4} dx = x^2 x = x^3.$$

Бу $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$ лар бир жинсли тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Унда тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y} = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^3$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими $\varphi(x)$ ни топамиз. Хусусий ечимни топишда (22) формула

$$\varphi(x) = y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} dx - y_1 \int \frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} dx$$

дан фойдаланамиз.

Агар

$$y_1 = x^2; y_2 = x^3; q(x) = x^2 - 1,$$

ҳамда

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^3 \int \frac{x^2(x^2-1)}{x^4} dx - x^2 \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4} dx = \\ &= x^3 \int (1 - x^{-2}) dx - x^2 \int (x - \frac{1}{x}) dx = \\ &= x^3 \left(x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right) = \\ &= x^4 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2 \ln|x| = \frac{1}{2}x^4 + x^2 + x^2 \ln|x| \end{aligned}$$

эканини топамиз. Демак, берилган бир жинсиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} + \varphi(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{2}x^4 + x^2 + x^2 \ln|x| = \\ &= (c_1 + 1 + \ln|x|)x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

бўлади.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу бобда куйидаги

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x), \quad (1)$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламаларни ўрганамиз. Бу ерда a_1, a_2 — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Одатда, (1) тенглама бир жинсиз чизикли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама, (2) тенглама эса бир жинсли чизикли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама дейилади. Масалан:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x,$$

$$y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$$

тенгламалар бир жинсиз ўзгармас коэффицентли тенгламалар,

$$y'' + y' - 2y = 0,$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

тенгламалар эса бир жинсли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар бўлади.

1-§. БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Маълумки, иккинчи тартибли бир жинсли

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг фундаментал ечимлар системаси $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ларни топиш етарлидир. Шунинг эътиборига олиб, аввало (2) тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз. (2) тенгламанинг хусусий ечимларини

$$y = e^{kx}$$

қўринишда излаймиз, бунда k — ўзгармас номаълум сон.

Равшанки,

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

бўлади. Бу y , y' ҳамда y'' ларнинг қийматларини (2) тенгламадаги y , y' , y'' ларнинг ўрнига қўйиб топамиз:

$$k^2 e^{kx} + k \cdot a_1 e^{kx} + a_2 \cdot e^{kx} = 0,$$

яъни

$$e^{kx} \cdot (k^2 + a_1 \cdot k + a_2) = 0.$$

Ҳар доим $e^{kx} > 0$ бўлганлиги сабабли

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (3)$$

бўлади.

Шундай қилиб, (2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими бўладиган

$$y = e^{kx}$$

ифодадаги k (3) квадрат тенгламанинг илдизи бўлиши керак экан.

Одатда

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

тенглама (2) дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Демак, характеристик тенгламанинг илдизларига кўра (2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари топилар экан.

Маълумки, (3) квадрат тенглама иккита турли ҳақиқий илдизларга, ёки бир-бирига тенг бўлган битта қаррали ҳақиқий илдизга ёки комплекс илдизларга эга бўлиши мумкин. Бу ҳолларга қараб дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари турлича бўлади. Бу ҳолларни алоҳида қараймиз.

1°. (3) характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлсин:

Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

функциялар берилган (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар (2) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \end{aligned}$$

бўлиб, $k_1 \neq k_2$ бўлганлиги сабабли $W(x) \neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - 3y' + 2 = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгласини тузамиз. У

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

бўлади. Равшанки, бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ бўлади. Демак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

бўлади.

2°. (3) характеристик тенглама бир-бирига тенг бўлган каррали илдизга эга бўлсин: $k_1 = k_2 = k$ ($k_1 = -\frac{a_1}{2}$). Бу ҳолда

$$y_1 = e^{kx}$$

функция (2) дифференциал тенгламанинг битта хусусий ечими бўлади.

Берилган дифференциал тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини 9-бобнинг 3-§ ида келтирилган

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз.

Агар

$$y_1 = e^{kx}, p_1(x) = a_1 = -2k \left(k = -\frac{a_1}{2} \right)$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$y_2 = e^{kx} \cdot \int \frac{e^{-\int (-2k) dx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \cdot \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int dx = e^{kx} \cdot x$$

бўлишини топамиз.

Демак, (2) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими .

$$y_2 = x \cdot e^{kx}$$

бўлади.

Бу $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x e^{kx}$ ечимлар (2) дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{kx} & x e^{kx} \\ k e^{kx} & (1+kx) e^{kx} \end{vmatrix} = \\ &= e^{kx} \cdot e^{kx} \begin{vmatrix} 1 & x \\ k & (1+kx) \end{vmatrix} = e^{2kx} \cdot (1+kx-kx) = e^{2kx} \end{aligned}$$

бўлиб, ҳар доим $e^{2kx} > 0$ бўлганлиги сабабли $W(x) \neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1 = e^{kx} \quad y_2 = e^{kx} \cdot x$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$$

бўлади.

Мисоллар: 1. Ушбу

$$y'' - 2y' + y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

бўлади. Квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1 = k_2 = 1$. Унда берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x e^x$$

бўлиб, умумий ечими эса

$$y = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

дифференциал тенгламанинг

$$y_0 = y|_{x_0=2} = 4 \quad y'_0 = y'|_{x_0=2} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1 = k_2 = -2$ бўлади. Демак, дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = x \cdot e^{-2x}$$

бўлиб, умумий ечими эса

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-2x} \quad (4)$$

га тенг.

Энди бошланғич шартлардан фойдаланиб, c_1 ҳамда c_2 ларни топамиз.

$x_0 = 2$ да $y_0 = 4$ бўлишидан

$$c_1 \cdot e^{-2 \cdot 2} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 2} \cdot 2 = 4,$$

$x_0 = 2$ да $y'_0 = 0$ бўлишидан

$$\begin{aligned} & (c_1 e^{-2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-2x})'_{x=2} = \\ & = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + c_2 \cdot e^{-2x} - c_2 x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) \Big|_{x=2} = \\ & = -2c_1 \cdot e^{-4} + c_2 \cdot e^{-4} + c_2 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot e^{-4} = e^{-4} (-2c_1 - 3c_2) = 0 \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада c_1 ҳамда c_2 ларни топниш учун ушбу

$$\begin{cases} c_1 \cdot e^{-4} + 2c_2 \cdot e^{-4} = 4, \\ (-2c_1 - 3c_2) e^{-4} = 0, \end{cases}$$

яъни

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 4e^4, \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб

$$c_1 = -12e^4, c_2 = 8e^4$$

бўлишини топамиз. c_1 ва c_2 ларнинг қийматини (4) муносабатдаги c_1 ва c_2 лар ўрнига қўямиз:

$$\begin{aligned} y &= -12e^4 \cdot e^{-2x} + 8e^4 \cdot x \cdot e^{-2x} = \\ &= -12e^{4-2x} + 8x \cdot e^{4-2x} = e^{4-2x} (8x - 12). \end{aligned}$$

Демак, берилган дифференциал тенгламанинг изланаётган ечими

$$y = 4e^{4-2x} (2x - 3)$$

бўлади.

3°. (3) характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлсин: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$.

Характеристик тенгламанинг бу илдизларига (2) дифференциал тенгламанинг ушбу

$$\varphi_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad \varphi_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

хусусий ечимлари тўғри келади.

9-бобнинг 3-§ ида келтирилган теоремаларга кўра

$$y_1 = \frac{1}{2} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)],$$

$$y_2 = \frac{1}{2i} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$$

функциялар ҳам (2) дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлади.

Энди қуйидаги

$$e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma$$

Эйлер формуласидан (қаралсин, [1]) фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \frac{1}{2} (e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x}) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2} e^{\alpha x} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = \\ &= \frac{1}{2} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x + \cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \\ &= \frac{1}{2i} (e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} - e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \\ &= \frac{1}{2i} (e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} - e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{\alpha x} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \\ &= \frac{1}{2i} e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x - \cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

қўринишда бўлар экан.

Бу y_1 ҳамда y_2 ечимлар (2) дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x + e^{\alpha x}(-\sin \beta x)\beta & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\
 &= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ \alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x & \alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \\
 &= e^{2\alpha x} [\cos \beta x (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) - \sin \beta x (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)] = \\
 &= e^{2\alpha x} \beta \cdot (\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x) = \beta \cdot e^{2\alpha x}
 \end{aligned}$$

бўлиб, ҳар доим $e^{2\alpha x} > 0$ ва $\beta \neq 0$ бўлганлиги сабабли $W(x) \neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y'' + y' + y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$k^2 + k + 1 = 0,$$

Бу квадрат тенгламанинг илдишлари

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

бўлади. Демак, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

бўлиб, умумий ечими

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x = \\
 &= e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)
 \end{aligned}$$

бўлади.

2-§. БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Мазкур китобнинг 9- боб, 5- § да иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш батафсил баён этилди. У ерда дифференциал тенгламанинг коэффицентлари $p_1(x)$ ва $p_2(x)$ лар x ўзгарувчининг функциялари эди.

Ушбу параграфда, хусусий ҳол — $p_1(x)$ ҳамда $p_2(x)$ лар ўзгармас сонлар бўлган ҳолни қараймиз.

Фараз қилайлик,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q(x) \quad (1)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин, бунда a_1, a_2 — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Албатта, ўқувчи бундай тенгламани ечиш масаласини 9- боб, 5- § да келтирилган усул билан, яъни:

1) (1) дифференциал тенгламага мос

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини (бундай тенгламанинг умумий ечимини топиш 1- § да ўрганилди) топиш,

2) Лагранж усули билан (1) тенгламанинг битта хусусий ечимини топиш,

3) (2) тенгламанинг умумий ечими билан (1) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисини топиш билан ҳал қила олиши мумкин. Бирок, бунда (1) тенгламанинг хусусий ечимини топишда анча қийинчиликлар содир бўлади.

Айрим ҳолларда, яъни (1) тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция маълум кўринишга эга бўлган ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими бирмунча соддарок йўл билан топилиши мумкин. Қуйида шу масалалар билан шуғулланамиз.

1°. Айтайлик,

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = q(x) \quad (1)$$

тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция n - даражали кўпхад бўлсин:

$$q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n.$$

Икки ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

а) (1) тенгламада $a_2 \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечимини қуйидаги

$$v(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 \cdot x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n \quad (4)$$

кўринишда излаймиз. Бунда $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ номаълум ўзгармас сонлар.

$v(x)$ функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} v'(x) &= n \cdot A_0 \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot A_1 \cdot x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}x + A_{n-1}, \\ v''(x) &= n(n-1)A_0 \cdot x^{n-2} + (n-1)(n-2) \cdot A_1 \cdot x^{n-3} + \dots + 2 \cdot 1 \cdot A_{n-2}. \end{aligned}$$

Бу $v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$ ҳамда $q(x)$ ларнинг ифодаларини мос равишда (1) тенгламадаги y , y' , y'' ҳамда $q(x)$ ларнинг ўрнига қўямиз:

$$n(n-1)A_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \dots + 2A_{n-2} + a_1(n \cdot A_0x^{n-1} + (n-1)A_1 \cdot x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}x + A_{n-1}) + a_2(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n.$$

Кейинги тенгликда x нинг мос даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирилса, унда A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_n ларни топиш учун ушбу

$$a_2A_0 = b_0,$$

$$a_1nA_0 + a_2 \cdot A_1 = b_1,$$

$$2A_{n-2} + a_1 \cdot A_{n-1} + a_2A_n = b_n$$

системага келамиз.

Бу системани ечиб, топилган A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_n ларни (4) ифодадаги A_0 , A_1 , A_2 , ..., A_n лар ўрнига қўйиб, берилган (1) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Мисол. Ушбу

$$y'' - 7y' + 12y = x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жинсли

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

бўлади. Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1 = 3$, $k_2 = 4$ бўлганлиги учун бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = x$ — биринчи даражали кўпхад ҳамда $a_2 = 12 \neq 0$ бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x) = A_0x + A_1$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$V'(x) = A_0,$$

$$V''(x) = 0$$

ни берилган тенгламага қўйиб топамиз:

$$-7 \cdot A_0 + 12(A_0x + A_1) = x.$$

Бу тенгликдан

$$\begin{cases} 12A_0=1, \\ -7A_0+12A_1=0 \end{cases}$$

булиши келиб чиқади. Бундан

$$A_0 = \frac{1}{12}, \quad A_1 = \frac{7}{144}$$

булишини топамиз. Шундай қилиб, хусусий ечим

$$V(x) = \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$$

булади. Унда берилган бир жинсиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144}$$

булади.

б) (1) тенгламада $a_2=0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламага мос бир жинсли тенглама қуйидагича

$$y'' + a_1 \cdot y' = 0$$

булиб, унинг характеристик тенгламаси

$$k^2 + a_1 k = 0$$

булади. Равшанки, бу квадрат тенгламанинг битта илдизи нолга тенг: $k_1=0$.

Бу ҳолда (1) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини

$$V(x) = x(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n) \quad (5)$$

қўринишда излаймиз.

Юқорида келтирилган а) ҳолдагидек, бу $V(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари топилади, сўнг уларни (1) тенгламага қўйилади. Ҳосил бўлган тенгликда x нинг мос даражалари олдидаги коэффицентлар тенглаштирилиб, $A_0, A_1, \dots, A_n$ лар, демак, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими (5) топилади.

Мисол. Ушбу

$$y'' + y' = x - 2$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y'' + y' = 0$$

булиб, характеристик тенглама эса

$$k^2 + k = 0$$

қўринишда булади. Равшанки, $k_1=0, k_2=-1$. Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$C_1 + C_2 e^{-x}$$

булади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = x - 2$ — биринчи даражали кўпхад ҳамда $a_2 = 0$ бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x) = x(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2A_0x + A_1, \\ V''(x) &= 2A_0 \end{aligned}$$

ни берилган тенгламага қўйиб топамиз:

$$2A_0 + 2A_0x + A_1 = x - 2.$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\begin{cases} 2A_0 = 1, \\ 2A_0 + A_1 = -2 \end{cases}$$

бўлиб, ундан $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = -3$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, хусусий ечим $V(x) = x\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$ бўлади. Унда берилган бир жинсиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$$

бўлади.

2°. Айтайлик,

$$y'' + a_1y' + a_2y = q(x) \quad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция ушбу

$$q(x) = e^{\alpha x}(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n)$$

кўринишга эга бўлсин:

$$y'' + a_1y' + a_2y = e^{\alpha x}(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n). \quad (6)$$

(6) тенгламада

$$y = e^{\alpha x}u \quad (u = u(x))$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$y' = \alpha \cdot e^{\alpha x}u + e^{\alpha x} \cdot u' = e^{\alpha x}(\alpha u + u'),$$

$$y'' = \alpha e^{\alpha x}(\alpha u + u') + e^{\alpha x}(\alpha \cdot u' + u'') = e^{\alpha x}(\alpha^2 u + 2\alpha u' + u'')$$

бўлиб,

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}(\alpha^2 u + 2\alpha u' + u'') + a_1 \cdot e^{\alpha x}(\alpha u + u') + \\ + a_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot u = e^{\alpha x}(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n), \end{aligned}$$

яъни

$$\begin{aligned} u'' + (2\alpha + a_1)u' + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)u = \\ = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned}$$

бўлади.

Агар $2 \cdot \alpha + a_1 = d_1$, $\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = d_2$ дейилса, кейинги тенглама 1° пунктда урганилган

$$u'' + d_1 u' + d_2 u = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n \quad (7)$$

күринишдаги тенгламага келади. Равшанки, бундай тенгламада

а) $d_2 \neq 0$ бўлганда, (7) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

күринишда,

б) $d_2 = 0$ бўлганда, (7) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x) = x(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n)$$

күринишда изланиларди ва топиларди.

Агар $d_2 \neq 0$ бўлганда, $k = \alpha$ сон

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаслигини, $d_2 = 0$ бўлганда эса, $k = \alpha$ сон шу характеристик тенгламанинг илдизи бўлишини ҳамда $y = e^{\alpha x} u$ эканини эътиборга олсак, унда (6) дифференциал тенглама учун:

а) $k = \alpha$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда хусусий ечим

$$V(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n)$$

күринишда.

б) $k = \alpha$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда хусусий ечим

$$V(x) = x e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n)$$

күринишда изланади ва 1° даги каби топилади.

Э с л а т м а. Агар $k = \alpha$ сон характеристик тенгламанинг каррали илдизи бўлса, хусусий ечим

$$V(x) = x^2 e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n)$$

күринишда изланади.

М и с о л л а р. 1. Ушбу

$$y'' - 2y' + 4y = e^{3x}(x+2)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бу тенгламага мос бир жинсли

$$y'' - 2y' + 4y = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенглама

$$k^2 - 2k + 4 = 0$$

нинг илдизлари $k_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $k_2 = 1 - \sqrt{3}i$ бўлади. Унда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1 e^x \cos \sqrt{3}x + c_2 e^x \cdot \sin \sqrt{3}x$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^{3x}(x+2)$ ҳамда $\alpha=3$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечимни

$$V(x) = e^{3x}(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$V'(x) = e^{3x}(3A_0x + A_0 + 3A_1),$$

$$V''(x) = e^{3x}(9A_0x + 6A_0 + 9A_1).$$

Бу қийматларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^{3x}(9A_0x + 6A_0 + 9A_1) - 2 \cdot e^{3x}(3A_0x + A_0 + 3A_1) + 4e^{3x}(A_0x + A_1) = e^{3x}(x+2),$$

яъни

$$7A_0x + 4A_0 + 7A_1 = x + 2$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса

$$A_0 = \frac{1}{7}, A_1 = \frac{10}{49}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, хусусий ечим

$$V(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right)$$

бўлиб, берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 e^x \cos \sqrt{3}x + c_2 e^x \cdot \sin \sqrt{3}x + e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right)$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'' - y = e^x(x^2 - 1)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топим.

Берилган тенгламага мос бир жинсли тенглама $y'' - y = 0$, характеристик тенглама эса $k^2 - 1 = 0$ бўлади. Характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ бўлганлиги сабабли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

бўлади.

Энди бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^x(x^2 - 1)$ ҳамда $\alpha = 1$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x) = x e^x (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)$$

қўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$V'(x) = e^x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x) + e^x(3A_0x^2 + 2A_1x + A_2) = \\ = e^x(A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_2),$$

$$V''(x) = e^x[A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_2] + \\ + e^x[3A_0x^2 + 2(3A_0 + A_1)x + 2A_1 + A_2] = \\ = e^x[A_0x^3 + (6A_0 + A_1)x^2 + (6A_0 + 4A_1 + A_2)x + 2A_1 + 2A_2].$$

Бу қийматларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^x[A_0x^3 + (6A_0 + A_1)x^2 + (6A_0 + 4A_1 + A_2)x + 2A_1 + 2A_2] - \\ - e^x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x) = e^x(x^2 - 1),$$

яъни

$$6A_1x^2 + (6A_0 + 4A_1)x + 2(A_1 + A_2) = x^2 - 1$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\begin{cases} 6A_0 = 1, \\ 6A_0 + 4A_1 = 0, \\ 2A_1 + 2A_2 = -1. \end{cases}$$

Бу системадан

$$A_0 = \frac{1}{6}, A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = -\frac{1}{4}$$

эканини топамиз.

Шундай қилиб, хусусий ечим

$$V(x) = x \cdot e^x \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right)$$

бўлиб, берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x \cdot e^x \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \right)$$

бўлади.

3°. Айтайлик,

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 y = q(x) \quad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция

$$q(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n)$$

ёки

$$q(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n)$$

қўринишда бўлсин. Бу ҳолда:

а) агар $k = \alpha + i\beta$ сон

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = e^{\alpha x} [\cos \beta x (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) + \sin \beta x (A'_0 x^n + A'_1 x^{n-1} + \dots + A'_{n-1} x + A'_n)]$$

кўринишда,

б) агар $k = \alpha + i\beta$ сон

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = x \cdot e^{\alpha x} [\cos \beta x (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n) + \sin \beta x (A'_0 x^n + A'_1 x^{n-1} + \dots + A'_{n-1} x + A'_n)]$$

кўринишда изланади ва аввалги ҳоллардагидек топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^x \cos 3x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жингли

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ бўлади.

Демак, бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = 2e^x \cos 3x$ ҳамда $\alpha + i\beta = 1 + 3i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V(x) = e^x (A_0 \cos 3x + A'_0 \sin 3x)$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$V'(x) = e^x (A_0 \cos 3x + A'_0 \sin 3x) + e^x (-A_0 \sin 3x \cdot 3 + A'_0 \cos 3x \cdot 3) = e^x [(A_0 + 3A'_0) \cos 3x + (A'_0 - 3A_0) \sin 3x],$$

$$V''(x) = e^x [(A_0 + 3A'_0) \cos 3x + (A'_0 - 3A_0) \sin 3x] + e^x [-3(A_0 + 3A'_0) \sin 3x + 3(A'_0 - 3A_0) \cos 3x] = e^x [(6A'_0 - 8A_0) \cos 3x - (6A_0 + 8A'_0) \sin 3x].$$

$V(x)$, $V'(x)$, $V''(x)$ нинг ифодаларини берилган тенгламага қўйсак,

$$e^x [(A'_0 - 3A_0) \cos 3x - (6A_0 + 8A'_0) \sin 3x] - 4e^x [(A_0 + 3A'_0) \cos 3x + (A'_0 - 3A_0) \sin 3x] + 3e^x (A_0 \cos 3x + A'_0 \sin 3x) = 2e^x \cos 3x,$$

яъни

$$(-9A_0 - 6A'_0) \cos 3x + (6A_0 - 9A'_0) \sin 3x = 2 \cos 3x$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликдан

$$\begin{cases} -9A_0 - 6A'_0 = 2, \\ 6A_0 - 9A'_0 = 0 \end{cases}$$

келиб чиқади. Бу системанинг ечими

$$A_0 = -\frac{2}{13}, A'_0 = -\frac{4}{39}$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = e^x \left(-\frac{2}{13} \cos 3x - \frac{4}{39} \sin 3x \right)$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^x \left(-\frac{2}{13} \cos 3x - \frac{4}{39} \sin 3x \right)$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'' + y = 3 \sin x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y'' + y = 0$ нинг характеристик тенгламаси $k^2 + 1 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = i$, $k_2 = -i$ бўлади.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

бўлади.

Берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = 3 \sin x$ ҳамда $\alpha + i\beta = i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V(x) = x (A_0 \cos x + A'_0 \sin x)$$

қўринишда излаймиз. Ҳавшанки,

$$V'(x) = A_0 \cos x + A'_0 \sin x + x(-A_0 \sin x + A'_0 \cos x),$$

$$V''(x) = -A_0 \sin x + A'_0 \cos x + (-A_0 \sin x + A'_0 \cos x) + x(-A_0 \cos x - A'_0 \sin x).$$

Бу $V(x)$, $V'(x)$, $V''(x)$ нинг қийматларини берилган тенгламага қўйиб

$$-2A_0 \sin x + 2A'_0 \cos x + x(-A_0 \cos x - A'_0 \sin x) +$$

$$+ x(A_0 \cos x + A'_0 \sin x) = 3 \sin x,$$

яъни $-2A_0 \sin x + 2A'_0 \cos x = 3 \sin x$ тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан эса $A_0 = -\frac{3}{2}$, $A'_0 = 0$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = -\frac{3}{2} x \cos x$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{3}{2} x \cos x$$

бўлади.

4°. Қуйида келтириладиган теоремадан бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топишда фойдаланилади.

1-теорема. Агар $V_1(x)$ ва $V_2(x)$ функциялар жос равишда

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q_1(x), \quad (8)$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q_2(x) \quad (9)$$

тенгламаларнинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда

$$V_1(x) + V_2(x)$$

функция

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = q_1(x) + q_2(x) \quad (10)$$

тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Исбот. Шартга кўра $V_1 = V_1(x)$ функция (8) тенгламанинг, $V_2 = V_2(x)$ функция (9) тенгламанинг ечими. Демак,

$$V_1'' + a_1 V_1' + a_2 V_1 = q_1(x),$$

$$V_2'' + a_1 V_2' + a_2 V_2 = q_2(x).$$

Бу тенгликлардан

$$V_1'' + V_2'' + a_1(V_1' + V_2') + a_2(V_1 + V_2) = q_1(x) + q_2(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\begin{aligned} (V_1 + V_2)' &= V_1' + V_2', \\ (V_1 + V_2)'' &= V_1'' + V_2'' \end{aligned}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$(V_1 + V_2)'' + a_1(V_1 + V_2)' + a_2(V_1 + V_2) = q_1(x) + q_2(x)$$

кўринишга келади. Бу эса $V_1 + V_2$ функция (10) тенгламанинг ечими эканини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$y'' - 2y' = 2x + e^{3x} \quad (11)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг. Бу тенгламага жос бир жинсли $y'' - 2y' = 0$ тенгламанинг характеристик тенгласи $k^2 - 2k = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ бўлади.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $c_1 + c_2 e^{2x}$ бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Бунинг учун қуйидаги иккита

$$y'' - 2y' = 2x, \quad (12)$$

$$y'' - 2y' = e^{3x} \quad (13)$$

бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг ҳар бирининг хусусий ечимларини топамиз.

(12) тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = 2x$ ҳамда $k = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун (12) тенгламанинг хусусий ечимини

$$V_1(x) = x(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$V_1'(x) = 2A_0x + A_1,$$

$$V_1''(x) = 2A_0.$$

Бу қийматларни (12) тенгламага қўйиб

$$2A_0 - 2(2A_0x + A_1) = 2x,$$

яъни

$$-4A_0x + (2A_0 - 2A_1) = 2x$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан

$$A_0 = -\frac{1}{2}, A_1 = -\frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, (12) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x^2 + x)$$

бўлади.

Энди (13) тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

(13) тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^{3x}$ ҳамда 3 сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V_2(x) = e^{3x} \cdot A_0$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$V_2'(x) = 3A_0e^{3x},$$

$$V_2''(x) = 9A_0 \cdot e^{3x}$$

ни (13) тенгламага қўйиб

$$9A_0e^{3x} - 2 \cdot 3A_0 \cdot e^{3x} = e^{3x},$$

яъни $3A_0e^{3x} = e^{3x}$ тенгликка келамиз. Бунда $A_0 = \frac{1}{3}$ бўлиши келиб

чиқади. Демак, (13) тенгламанинг хусусий ечими $V_2(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

бўлади.

Юқорида 1-теоремага кўра

$$V_1(x) + V_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{3}e^{3x}$$

функция (11) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Шундай қилиб берилган (11) бир жинсиз тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{3}e^{3x}$$

бўлади.

II-БОБ

n-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Мазкур китобнинг 1—3-бобларида биринчи ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар батафсил ўрганилди.

Фаннинг турли тармоқларида, айниқса техникада тартиби иккидан юқори бўлган дифференциал тенгламалар билан боғлиқ масалаларга дуч келамиз. Бинобарин, уларни — n -тартибли ($n > 2$) дифференциал тенгламаларни ўрганиш вазифаси юзага келади.

n -тартибли тенгламалар назариясида ҳам, биринчи ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардагидек, дифференциал тенгламалар ечимининг мавжудлиги, тенгламаларни ечиш усуллари қаралади. Келтириладиган тасдиқларнинг исботланиши деярли аввалдагидек мулоҳаза юритиш асосида олиб борилишини эътиборга олиб, қуйида тасдиқларни исботсиз келтирамиз.

1-§. n -ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНING УМУМИЙ ҚЎРИНИШИ

n -тартибли дифференциал тенгламанинг умумий қўриниши қуйидагича

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

бўлади. Бунда x — эркин ўзгарувчи, $y = y(x)$ — номаълум функция, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ лар эса номаълум функциянинг биринчи, иккинчи ва х. к., n -тартибли ҳосилалари.

(1) дифференциал тенгламанинг баъзи муҳим хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. (1) дифференциал тенглама ушбу

$$y^{(n)} = f(x) \quad (2)$$

қўринишга эга бўлсин. Бу ҳолда $y^{(n)}$ ни кетма-кет n марта интеграллаб, (2) тенгламанинг умумий ечими топилади.

Мисол. Ушбу

$$y''' = \frac{1}{x}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

y''' функцияни кетма-кет уч марта интеграллаб топамиз:

$$\int y''' dx = \int \frac{1}{x} dx = \int d \ln x = \ln |x| + C_1,$$

$$y'' = \ln |x| + C_1,$$

$$\int y'' dx = \int (\ln |x| + C_1) dx = \int \ln |x| dx + C_1 x = x \ln |x| - x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = x \ln |x| - x + C_1 x + C_2,$$

$$\begin{aligned} \int y' dx &= \int (x \ln |x| - x + C_1 x + C_2) dx = \\ &= \int x \ln |x| dx - \frac{x^2}{2} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x = \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{1}{4} x^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} x^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{3}{4} x^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2°. (1) дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг дастлабки бир нечта тартибдаги ҳосилалари қатнашмасин:

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3)$$

Бу ҳолда $y^{(k)} = p = p(x)$ алмаштириш натижасида (3) дифференциал тенгламанинг тартиби пасайиб ушбу

$$\Phi(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$$

кўринишга келади.

Мисол. Ушбу

$$xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$y^{IV} = p = p(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Унда $y^{(V)} = p'(x) = \frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган

тенглама $x \frac{dp}{dx} - p = 0$ кўринишга келади.

Равшанки,

$$x \frac{dp}{dx} - p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |p| = \ln |x| + \ln |C_1| \Rightarrow p = C_1 x.$$

Энди

$$p = y^{(IV)} = C_1 x$$

тенгламанинг ечимини кетма-кет интеграллаш билан топамиз:

$$y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 \cdot \frac{x^4}{24} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 \cdot \frac{x^5}{120} + C_2 \cdot \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

3°. (1) дифференциал тенгламада эркин ўзгарувчи x қатнашмасин:

$$\Phi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Бу ҳолда $y' = p = p(x)$ алмаштириш билан дифференциал тенгламанинг тартиби бир бирликка пасаяди. Бунда

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(p \cdot \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \cdot \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2,$$

бўлиши эътиборга олинади.

Мисол. Ушбу

$$y' \cdot y''' - 3y'^2 = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламада

$$y' = p = p(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}, y''' = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2 p}{dy^2}$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама қуйидаги

$$p \left[p \cdot \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} \right] - 3p^2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = 0,$$

яъни

$$p \frac{d^2 p}{dy^2} - 2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, берилган учинчи тартибли дифференциал тенглама $y' = p(x)$ алмаштириш натижасида иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келди. (4) тенгламани ечиш учун

$$\frac{dp}{dy} = z$$

алмаштириш қиламиз. Унда $\frac{d^2 p}{dy^2} = z \cdot \frac{dz}{dp}$ бўлиб, $p \cdot z \frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0$,
яъни $\frac{dz}{z} - \frac{2dp}{p} = 0$ бўлади. Равшанки,

$$\ln|z| - \ln p^2 = \ln|C_1| \Rightarrow z = C_1 p^2$$

Натижада,

$$\frac{dp}{dy} = C_1 p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2} = C_1 dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p} = C_1 y + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = C_1 y + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{dy} = C_1 y + C_2 \Rightarrow x = -C_1 \cdot \frac{y^2}{2} - C_2 y + C_3$$

бўлади.

4°. (1) дифференциал тенгламада $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ функция y ,
 y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ ларга нисбатан k -тартибли бир жинсли функция,
яъни

$$\Phi(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

бўлсин.

Бу ҳолда

$$y = e^{\int z dx}, \quad (z = z(x))$$

алмаштириш билан (1) дифференциал тенгламани тартиби бир
бирликка камайган дифференциал тенгламага келтирилади.

Мисол. Ушбу

$$x^2 y \cdot y'' = (y - x \cdot y')^2$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$\Phi(x, y, y', y'') = x^2 \cdot y \cdot y'' - (y - xy')^2$$

функция учун

$$\begin{aligned} \Phi(x, ty, ty', ty'') &= x^2(ty) \cdot (ty'') - (ty - x(ty'))^2 = \\ &= t^2 x^2 y \cdot y'' - t^2 (y - xy')^2 = t^2 [x^2 y y'' - (y - xy')^2] = t^2 \Phi(x, y, y', y'') \end{aligned}$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламада:

$$y = e^{\int z dx} \quad (z = z(x)).$$

Унда

$$y' = e^{\int z dx} \cdot z, \quad y'' = (e^{\int z dx} \cdot z')' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z' = (z' + z^2) e^{\int z dx}$$

бўлиб, берилган тенглама куйидаги

$$x^2(z' + z^2) e^{\int z dx} = (e^{\int z dx} - x \cdot z e^{\int z dx})^2$$

куринишга келади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $e^{\int z dx}$ га бўлиб, $x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$, яъни $x^2 z'^1 + 2xz = 1$ бўлишини топамиз. Агар $x^2 z' + 2xz = (x^2 \cdot z)'$ эканини эътиборга олсак, унда

$$(x^2 \cdot z)' = 1 \Rightarrow \frac{d(x^2 z)}{dx} = 1$$

тенглама ҳосил бўлади. Равшанки, $x^2 z = x + C_1$. Бу тенгликдан $z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$ бўлиши келиб чиқади. Натижада,

$$y = e^{\int z dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx} = e^{\ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln|C_2|} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

бўлади. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

2-§. *n*-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ

Айтайлик, бирор *n*-тартибли дифференциал тенглама

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

берилган бўлсин. Баъзан бу тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлади:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (5)$$

Одатда (5) тенглама *n*-тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама дейилади.

Фараз қилайлик, (5) тенгламадаги $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция ($n+1$ та ўзгарувчининг функцияси сифатида) R^{n+1} фазодаги бирор *D* соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

1-таъриф. Агар қундай ўзгармас мусбат *N* сон и мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \in D$, $(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \in D$

нукталар учун $|f(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n+1)}) - f(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)})| \leq N(|\bar{y} - \bar{y}| + |\bar{y}' - \bar{y}''| + \dots + |\bar{y}^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}|)$ тенгсизлик

бажарилса, y ҳолда $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция D соҳада $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ўзгарувчилари бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

1-теорема. Агар

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

тенгламада $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ функция

$$D = \{(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R^{n+1} \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b,$$

$|y' - y'_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$, да узлуксиз бўлиб, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ аргументлари бўйича Липшиц шартини бажарса, y ҳолда (5) дифференциал тенгламанинг $[x-h, x_0+h]$ да

$$(h \leq \min(a, \frac{b}{N}))$$

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва y ягона бўлади,

Одатда

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

шартлар бошланғич шартлар дейилади.

(5) дифференциал тенгламанинг бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласига Коши масаласи дейилади.

Мисол. Ушбу

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2}$$

дифференциал тенгламанинг қуйидаги

$$y|_{x=1} = 0, y'|_{x=1} = 1, y''|_{x=1} = 2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Аввало берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун y''' функцияни кетма-кет уч марта интеграллаймиз.

$$\begin{aligned} \int y''' dx &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1. \end{aligned}$$

Демак,

$$y'' = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1$$

Иккинчи марта интеграллаймиз:

$$\int y'' dx = \int \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1\right) dx = -\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln|x| + C_1 x + C_2$$

Демак,

$$y' = -\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

Учинчи марта интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} \int y' dx &= \int \left(-\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln|x| + C_1 x + C_2 \right) dx = \\ &= -\frac{x}{2} \ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (6)$$

бўлади.

Энди $y|_{x=1}=0$ шартдан фойдаланиб $\frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0$ бўлишини, $y'|_{x=1}=1$ шартдан фойдаланиб $C_1 + C_2 = 1$ бўлишини, $y''|_{x=1}=2$ шартдан фойдаланиб $-1 + C_1 = 2$ бўлишини топамиз. Натижада C_1, C_2, C_3 ларни аниқлаш учун

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 = 1, \\ -1 + C_1 = 2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$C_1 = 3, C_2 = -2, C_3 = \frac{1}{2}.$$

Буларнинг қийматини (6) муносабатдаги C_1, C_2, C_3 ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада, изланаётган ечим

$$y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади.

3-§. n -ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция $y = y(x)$ ва унинг $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ҳосилалари биринчи даражада қатнашган

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x) \quad (7)$$

тенглама n -тартибли чизикли дифференциал тенглама дейилади. Бу ерда $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ — тенгламанинг коэффициентлари, $q(x)$ эса озод ҳад дейилади. Улар бирор (a, b) оралиқда берилган функциялардир.

(7) тенглама n -тартибли чизикли бир жинссиз дифференциал тенглама ҳам деб юритилади.

Хусусан, (7) да $q=0$ бўлса, яъни тенглама ушбу

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (8)$$

қўринишга эга бўлса, уни n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

2-теорема. Агар (7) тенгламадаги $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ ҳамда $q(x)$ функциялар X тўпламда ($X \subset R$) узлуксиз бўлса, у ҳолда X да (7) тенгламанинг

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

1°. n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

Энди

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (8)$$

дифференциал тенглама тўғрисидаги маълумотларни келтирамыз.

3-теорема. Агар $y_1 = y_1(x)$ функция (8) тенгламанинг ечими бўлса, $c \cdot y_1$ функция ҳам (c — ихтиёрий ўзгармас сон) шу тенгламанинг ечими бўлади.

4-теорема. Агар y_1 ҳамда y_2 функциялар (8) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $c_1 y_1 + c_2 y_2$ функция ҳам (c_1, c_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар) шу тенгламанинг ечими бўлади.

(7) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини аниқлашда функцияларнинг чизикли эрки ҳамда чизикли боғлиқлик тушунчалари муҳимдир. Қуйида уларни келтирамыз.

Фараз қилайлик, (a, b) интервалда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар топилсаки, уларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиб, ушбу

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$$

тенглик бажарилса, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар (a, b) да чизикли боғлиқ дейилади.

3-таъриф. Агар $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар учун

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$$

тенглик фақат $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ бўлгандагина бажарилса, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар (a, b) да чизикли эрки функциялар дейилади.

Фараз қилайлик, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялар

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлсин.

Ушбу

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

функционал детерминант Вронский детерминанти деб аталади.

5-теорема. Агар (8) тенгламанинг $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ечимлари (a, b) да чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\forall x \in (a, b)$ да

$$W(x) \equiv 0$$

бўлади.

6-теорема. Агар бирор $x_0 \in (a, b)$ нуқтада

$$W(x_0) = 0$$

бўлса, у ҳолда $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ечимлар чизиқли боғлиқ бўлади.

7-теорема. Ушбу

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx} \quad (9)$$

формула ўринлидир, бунда $x_0 \in (a, b)$.

(9) формула Лиувилл (Остроградский-Лиувилл) формуласи дейилади.

4-таъриф. Агар $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялар (8) тенгламанинг ечимлари бўлиб, чизиқли эркин функциялар бўлса, улар (8) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси дейилади.

8-теорема. Агар $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лар (a, b) да $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

бўлади, бунда $c_1, c_2, \dots, c_n$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Мисол. Ушбу

$$y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, y_3(x) = e^x$$

функциялар бирор учинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этишини кўрсатинг ва шу дифференциал тенгламани тузинг.

Берилган $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ функцияларнинг Вронский детерминантини топамиз:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = x \cdot 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot e^x -$$

$$- 0 \cdot 2x \cdot e^x - x \cdot 2 \cdot e^x - 1 \cdot x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) = e^x[(x-1)^2 + 1]$$

Равшанки, $\forall x \in R$ учун

$$W(x) \neq 0.$$

Демак, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = e^x$ функциялар бирор учинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этар экан. Айтайлик, бундай дифференциал тенглама

$$y''' + \alpha_1(x)y'' + \alpha_2(x)y' + \alpha_3(x)y = 0 \quad (10)$$

бўлсин.

Энди бу тенгламадаги номуълум $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ ҳамда $\alpha_3(x)$ функцияларни топамиз. Бунинг учун $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ ҳамда $y_3(x) = e^x$ ларни (10) тенгламага кўямиз:

$$\begin{aligned} y_1''' + \alpha_1(x)y_1'' + \alpha_2(x)y_1' + \alpha_3(x)y_1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 + \alpha_1(x) \cdot 0 + \alpha_2(x) \cdot 1 + \alpha_3(x) \cdot x &= 0, \\ y_2''' + \alpha_1(x)y_2'' + \alpha_2(x)y_2' + \alpha_3(x)y_2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 + \alpha_1(x) \cdot 2 + \alpha_2(x) \cdot 2x + \alpha_3(x) \cdot x^2 &= 0, \\ y_3''' + \alpha_1(x)y_3'' + \alpha_2(x)y_3' + \alpha_3(x)y_3 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x + \alpha_1(x)e^x + \alpha_2(x)e^x + \alpha_3(x)e^x &= 0. \end{aligned}$$

Натижада, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ ларни топиш учун ушбу

$$\begin{aligned} 0 \cdot \alpha_1(x) + 1\alpha_2(x) + x\alpha_3(x) &= 0, \\ 2 \cdot \alpha_1(x) + 2x\alpha_2(x) + x^2\alpha_3(x) &= 0, \\ e^x\alpha_1(x) + e^x\alpha_2(x) + e^x\alpha_3(x) &= -e^x \end{aligned}$$

системага келамиз. Бу системани Крамер қондасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = -e^x(x^2 - 2x + 2) = -e^x[(x-1)^2 + 1],$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ -e^x & e^x & e^x \end{vmatrix} = x^2e^x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 2 & 0 & x^2 \\ e^x & -e^x & e^x \end{vmatrix} = -2xe^x,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2x & 0 \\ e^x & e^x & -e^x \end{vmatrix} = 2e^x,$$

$$\alpha_1(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^x x^2}{e^x (x^2 - 2x + 2)} = -\frac{x^2}{x^2 - 2x + 2},$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2xe^x}{-e^x (x^2 - 2x + 2)} = \frac{2x}{x^2 - 2x + 2},$$

$$\alpha_3(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2e^x}{-e^x (x^2 - 2x + 2)} = -\frac{2}{x^2 - 2x + 2}.$$

Бу топилган $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ ларни (10) га қўйсак, унда

$$(x^2 - 2x + 2) \cdot y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Бу изланаётган учинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламадир.

2°. n -тартибли чизикли бир жинсسىз дифференциал тенгламалар.

Ушбу пунктда n -тартибли чизикли бир жинсسىз дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x) \quad (7)$$

нинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунда (7) тенгламага мос бўлган

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (8)$$

бир жинсли тенглама ҳақидаги маълумотлардан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, (7) тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ ҳамда $q(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) да узлуксиз бўлсин. Унда (7) тенгламанинг ечими мавжуд бўлади.

9-теорема. *n -тартибли чизикли бир жинсسىз дифференциал тенглама (7) нинг умумий ечими $y(x)$ шу тенгламанинг бирор хусусий ечими $\varphi(x)$ ва мос бир жинсли дифференциал тенглама (8) нинг умумий ечими $u(x)$ ларнинг йиғиндиси*

$$y(x) = u(x) + \varphi(x)$$

дан иборат бўлади.

Энди (7) бир жинсسىз дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топиш усулларида бирини келтирамиз.

Айтайлик, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ лар (8) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этсин. Унда (8) тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

бўлади. Бу ерда $c_1, c_2, \dots, c_n$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар. Равшанки, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ функция бир жинсسىз (7) тенгламанинг ечими бўлмайди.

Энди $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ даги $c_1, c_2, \dots, c_n$ ларни x ўзгарувчининг шундай функцияси деб қараймизки, натижада

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \dots + c_n(x)y_n \quad (11)$$

функция (7) бир жинссиз дифференциал тенгламанинг ечими бўлсин.

Бундай $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ ларни топиш учун аввало

[illegible]

системадан $c'_1(x), c'_2(x), \dots, c'_n(x)$ ларни топиб оламиз. (Бу система коэффициентларидан тузилган детерминант Вронский детерминанти бўлиб, у нолдан фарқлидир, чунки $y_1, y_2, \dots, y_n$ (7) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.)

Айттайлик,

$$c'_i(x) = \alpha_i(x) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

бүлсин. Унда

$$c_1(x) = \int a_1(x) dx + c_1^*$$

$$c_2(x) = \int \alpha_2(x) dx + c_2^*,$$

• • • • •

$$c_n(x) = \int \alpha_n(x) dx + c_n^*$$

бўлади. Бу ерда $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Бу $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ нинг қийматларини (11) тенгликдаги c_1 , c_2 , ..., c_n ларнинг ўрнига қўйиб, (7) бир жинслиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \{ \int \alpha_1(x) dx + c_1^* \} y_1 + \{ \int \alpha_2(x) dx + c_2^* \} y_2 + \dots + \\ & + \{ \int \alpha_n(x) dx + c_n^* \} y_n = c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + \dots + c_n^* y_n + y_1 \int \alpha_1(x) dx + \\ & + y_2 \int \alpha_2(x) dx + \dots + y_n \int \alpha_n(x) dx \end{aligned}$$

бўлишини топамиз.

Унда 9-теоремага жўра (7) бир жинссиз тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + c_1^* y_1 + c_2^* y_2 + \dots + c_n^* y_n + \sum_{i=1}^n y_i \int \alpha_i(x) dx =$$

$$= \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2 + \dots + \bar{c}_n y_n + \sum_{i=1}^{n'} y_i \int \alpha_i(x) dx$$

$$(\bar{c}_i = c_i + c_i^*, i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Мисол. Ушбу

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (x \neq 0)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

кўринишда бўлади. Бевосита текшириб кўриш мумкинки,

$$y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$$

функциялар шу бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлардан тузилган Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0$$

бўлганлиги сабабли y_1, y_2, y_3 лар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Демак, бир жинсли

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими:

$$u(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Энди бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Хусусий ечимни

$$\varphi(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + c_3(x) y_3$$

кўринишда излаймиз.

Бу ҳолда (12) система қуйидаги

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 + c_3'(x)x^3 = 0 \\ c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot 2x + c_3'(x) \cdot 3x^2 = 0 \\ c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x) \cdot 2 + c_3'(x) \cdot 6x = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}},$$

$$c_2'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x+1}},$$

$$c_3'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})}.$$

Натижада:

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}} + c_1^* = \frac{\sqrt{x^5}}{5} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} -$$

$$-\ln(\sqrt{x}-1)+c_1^*, c_2(x)=-\int \frac{x dx}{\sqrt{x}+1}+c_2^*=-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+ \\ +2\ln(\sqrt{x}+1)+c_2^*, c_3(x)=\int \frac{dx}{2(\sqrt{x}+1)}+c_3^*=\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)+c_3^*.$$

бунда, c_1^*, c_2^*, c_3^* — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Демак, бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими:

$$\varphi(x)=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+c_3(x)y_3= \\ =\left[\frac{1}{5}\sqrt{x^5}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]\cdot x+ \\ +\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)\right]\cdot x^2+ \\ +[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]x^3+c_1^*x+c_2^*x^2+c_3^*x^3.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=u(x)+\varphi(x)=\bar{c}_1x+\bar{c}_2x^2+\bar{c}_3x^3+ \\ +\left[\frac{1}{5}\sqrt{x^5}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]x+ \\ +\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)\right]x^2+ \\ +[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]x^3, \bar{c}_i=c_i+c_i^*, i=1,2,3.$$

4-§. n -ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу параграфда қуйидаги

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=q(x), \quad (13)$$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \quad (14)$$

n -тартибли чизикли дифференциал тенгламаларни ўрганамиз. Бу ерда дифференциал тенгламаларнинг коэффицентлари $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Одатда, (13) тенглама *чизикли бир жинсиз, ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама*, (14) тенглама эса *чизикли бир жинсли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенглама* дейилган.

1°. n -тартибли чизикли бир жинсли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар

Фараз қилайлик,

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \quad (14)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Унинг хусусий ечимлари-
ни

$$y = e^{kx}$$

қўринишда излаймиз, бунда k — номаълум ўзгармас сон. Равшанки,

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots, y^{(n-1)} = k^{n-1} e^{kx}, y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

бўлади. Бу $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ ларнинг қийматларни (14) тенгламадаги $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (15)$$

Бу (14) дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади.

Демак, характеристик тенгламанинг илдиэларига қўра (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари топилар экан.

1) (15) характеристик тенгламанинг илдиэлари $k_1, k_2, \dots, k_n$ ҳақиқий бўлиб, улар турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_{n-1} = e^{k_{n-1} x}, y_n = e^{k_n x}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_{n-1} e^{k_{n-1} x} + c_n e^{k_n x}.$$

Мисол. Ушбу

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

бўлади. Унинг илдиэларини топамиз:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k+1)(k-3) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3.$$

Демак, характеристик тенгламанинг илдиэлари ҳақиқий ва турлича. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

бўлади.

2) (15) характеристик тенгламанинг илдиэлари $k_1, k_2, \dots, k_n$ ҳақиқий бўлиб, улар орасида қарралилари бўлсин. Масалан, $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k$, яъни k — (15) тенгламанинг m қаррали илдиэи, қолган $n - m$ та $k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_n$ илдиэи турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{\bar{k}x}, y_2 = xe^{\bar{k}x}, \dots, y_m = x^{m-1}e^{\bar{k}x}, y_{m+1} = e^{k_{m+1}x}, \dots, y_n = e^{k_nx}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{\bar{k}x} + c_2 x e^{\bar{k}x} + c_3 x^2 e^{\bar{k}x} + \dots + c_m x^{m-1} e^{\bar{k}x} + c_{m+1} e^{k_{m+1}x} + \dots + c_n e^{k_nx}.$$

Мисол. Ушбу

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3 + 2k^2 + k = 0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз: $k^3 + 2k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1, k_3 = 0$. Демак, характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва -1 — икки қаррали илдиз. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{0 \cdot x} = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3.$$

3) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари орасида комплекс илдизлар бўлсин. Масалан, $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta, k_3 = \gamma + i\delta, k_4 = \gamma - i\delta$ бўлиб, қолган барча $k_5, k_6, \dots, k_n$ илдизлар ҳақиқий ва турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_3 = e^{\gamma x} \cos \delta x,$$

$$y_4 = e^{\gamma x} \sin \delta x, y_5 = e^{k_5 x}, y_6 = e^{k_6 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 e^{\gamma x} \cos \delta x + c_4 e^{\gamma x} \sin \delta x + c_5 e^{k_5 x} + c_6 e^{k_6 x} + \dots + c_n e^{k_n x}.$$

Мисол. Ушбу

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3 + 4k^2 + 13k = 0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^3 + 4k^2 + 13k = 0 \Rightarrow k(k^2 + 4k + 13) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_1 = 0, k^2 + 4k + 13 = 0 \Rightarrow k_2 = -2 - 3i, k_3 = -2 + 3i.$$

Демак, характеристик тенглама битта хақикий, иккита комплекс илдизларга эга экан. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} \cos 3x + c_3 e^{-2x} \sin 3x$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y^{(IV)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 4k + 1 = 0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 4k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 + \frac{1}{k^2} - 4\left(k + \frac{1}{k}\right) + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(k + \frac{1}{k}\right) - 1\right] \left[\left(k + \frac{1}{k}\right) - 3\right] = 0 \Rightarrow k + \frac{1}{k} = 1, \quad k + \frac{1}{k} = 3;$$

$$k + \frac{1}{k} = 1 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k + \frac{1}{k} = 3 \Rightarrow k^2 - 3k + 1 = 0 \Rightarrow k_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad k_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Демак, характеристик тенглама иккита комплекс ҳамда иккита турли хақикий илдизларга эга. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} + c_4 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}.$$

4) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари орасида комплекс илдизлар бўлиб, улар каррали илдизлар бўлсин. Масалан, $k_1 = \alpha + i\beta$ илдиз m каррали бўлсин. Унда $k_2 = \alpha - i\beta$ илдиз ҳам m

каррали бўлади $\left(m \leq \frac{n}{2}\right)$ Колган $k_{2m+1}, k_{2m+2}, \dots, k_n$ илдизлар хақикий бўлсин.

Бу ҳолда

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_5 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_6 = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots,$$

$$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_{2m+1} = e^{k_{2m+1}x}, \quad y_{2m+2} = e^{k_{2m+2}x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + c_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \dots + \\ + c_{2m-1} x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + c_{2m} x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x + c_{2m+1} e^{k_{2m+1} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

Мисол. Ушбу

$$y^{(V)} - y^{(IV)} + y''' + y'' - y' + y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^5 - k^4 + k^3 + k^2 - k + 1 = 0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^5 - k^4 + k^3 + k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow (k^5 + k^2) - (k^4 + k) + \\ + (k^3 + 1) = 0 \Rightarrow (k^3 + 1)(k^2 - k + 1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (k + 1)(k^2 - k + 1)^2 = 0; \quad k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -1,$$

$$(k^2 - k + 1)^2 = 0 \Rightarrow k_2 = k_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$k_4 = k_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Демак, характеристик тенглама битта хақиқий ҳамда иккита икки каррали комплекс илдизларга эга экан. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 x e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_5 x e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

2°. n -тартибли чизикли бир жинсиз ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.

Фараз қилайлик,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x) \quad (16)$$

тенглама берилган бўлсин.

Маълумки, бу бир жинсиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими унга мос бир жинсли

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (16')$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими билан қаралаётган (16) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисидан иборат бўлади.

Ушбу параграфнинг 1°-бандида бир жинсли дифференциал тенглама (16') нинг умумий ечимини характеристик тенглама

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (16'')$$

нинг илдиэларига қараб топилишини кўрдик. Демак, (16) тенгламанинг умумий ечимини топиш масаласи унинг хусусий ечимини топишга келади.

Умуман, бир жинсиз дифференциал тенглама (16) нинг хусусий ечимини 3-§ да келтирилган усул билан топиш мумкин.

Қуйида (16) тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган усулини келтираимиз.

Бу усул берилган (16) тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функциянинг кўринишига қараб хусусий ечимни маълум кўринишда изланишига асослангандир.

1) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция m - даражали кўпхад бўлсин:

$$q(x) = \bar{P}_m(x),$$

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k=0$ сон (16'') характеристик тенгламанинг илдиэи бўлмаганда

$$\varphi(x) = \bar{P}_m(x),$$

б) $k=0$ сон (16'') характеристик тенгламанинг s каррали илдиэи бўлганда

$$\varphi(x) = x^s \cdot \bar{P}_m(x)$$

кўринишида изланади. Бунда $\bar{P}_m(x) - m$ - даражали кўпхад.

Мисол. Ушбу.

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бу тенгламага мос бир жинсли

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, унинг характеристик тенгламаси $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ бўлади. Бу тенгламанинг илдиэларини топамиз:

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k^2+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -i, k_3 = i.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция 2- даражали кўпхад ҳамда $k=0$ сон характеристик тенгламанинг илдиэи бўлмаганлиги учун бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини ушбу

$$\varphi(x) = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$$

кўринишда излаймиз. Номаялум A_1, A_2, A_3 сонларни топиш учун

$$\varphi(x) = A_1x^2 + A_2x + A_3,$$

$$\varphi'(x) = 2A_1x + A_2,$$

$$\varphi''(x) = 2A_1,$$

$$\varphi'''(x) = 0$$

ларни берилган тенгламадаги y, y', y'', y''' ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада

$$-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x$$

бўлади. Бундан эса

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0 \end{cases}$$

бўлади. Бу системада $A_1 = -1, A_2 = -3, A_3 = -1$ бўлиши келиб чиқади. Демак, бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими $\varphi(x) = -x^2 - 3x - 1$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y_{\text{умумий}} = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x - x^2 - 3x - 1.$$

Мисол. Ушбу

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y''' - y'' = 0$$

бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3 - k^2 = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k - 1) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1.$$

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция 2- даражали қўпхад ҳамда $k=0$ сон характеристик тенгламанинг икки қаррали илдизи бўлганлиги учун бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини ушбу

$$\varphi(x) = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3)$$

кўринишда излаймиз.

Номаялум A_1, A_2, A_3 сонларни топиш учун

$$\varphi(x) = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3)$$

$$\varphi'(x) = 4A_1x^3 + 3A_2x^2 + 2A_3x,$$

$$\varphi''(x) = 12A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3$$

$$\varphi'''(x) = 24A_1x + 6A_2$$

лардан $\varphi'''(x)$ ҳамда $\varphi''(x)$ ларнинг қийматларини берилган тенгламадаги y''' ; y'' ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада,

$$-12A_1x^2 + (24A_1 - 5A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x$$

бўлиб, ундан

$$\begin{cases} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 5A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системанинг ечими

$$A_1 = -1, A_2 = -5, A_3 = -15$$

бўлади. Демак, бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y_{\text{умумий}} = c_1 + c_2x + c_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$$

бўлади.

2) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция ушбу

$$q(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$$

қўринишда бўлсин. Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k = \alpha$ сон (16'') характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда

$$\varphi(x) = \bar{P}_m(x)e^{\alpha x},$$

б) $k = \alpha$ сон (16'') характеристик тенгламанинг s қаррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = x^s \bar{P}_m(x)e^{\alpha x}$$

қўринишда изланади.

Мисол. Ушбу

$$y''' + y'' = 3xe^x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y''' + y'' = 0$$

бўлиб, унинг характеристик тенгламаси

$$k^3 + k^2 = 0$$

бўлади. Равшанки,

$$k^3 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0, k_3 = -1.$$

Унда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = 3xe^x$$

кўринишда ҳамда $\alpha = 1$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги учун бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини

$$\varphi(x) = (A_1 x + A_2) e^x$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$\varphi'(x) = e^x(A_1 + A_2 + A_1 x),$$

$$\varphi''(x) = e^x(2A_1 + A_2 + A_1 x),$$

$$\varphi'''(x) = e^x(2A_1 + 2A_2 + A_1 x).$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^x(4A_1 + 3A_2) + 2A_1 x e^x = 3x e^x,$$

яъни

$$4A_1 + 3A_2 + 2A_1 x = 3x$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\begin{cases} 4A_1 + 3A_2 = 0, \\ 2A_1 = 3 \end{cases}$$

бўлиб,

$$A_1 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = -2$$

келиб чиқади. Демак, бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечими:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}x - 2\right) e^x.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y_{\text{умумий}} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x - 2\right) e^x$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2, k_3 = 1.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^{2x}$ кўринишда ҳамда $\alpha = 2$ сон характеристик тенгламанинг икки қаррали илдизи бўлганлиги учун бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимини

$$\varphi(x) = Ax^2 e^{2x}$$

кўринишда изланади.

3) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$$

кўринишда бўлсин, бунда $\bar{P}_m(x)$ ҳамда $Q_n(x)$ лар мос равишда m ва n - даражали кўпхад.

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k = \pm i\beta$ сон (16'') характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = \bar{P}_\lambda(x) \cos \beta x + \bar{Q}_\lambda(x) \sin \beta x,$$

б) $k = \pm i\beta$ сон (16'') характеристик тенгламанинг s қаррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = x^s (\bar{P}_\lambda(x) \cos \beta x + \bar{Q}_\lambda(x) \sin \beta x)$$

кўринишда изланади, бунда $\lambda = \max\{m, n\}$.

Мисол. Ушбу

$$y^{(IV)} + 4y'' + 4y = x \sin 2x$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y^{(IV)} + 4y'' + 4y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^4 + 4k^2 + 4 = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^4 + 4k^2 + 4 = 0 \Rightarrow (k^2 + 2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = i\sqrt{2},$$

$$k_3 = k_4 = -i\sqrt{2}.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = x \cdot \sin 2x$$

кўринишда ҳамда $k = \pm 2i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун бир жинсиз дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x) = (A_1x + A_2)\sin 2x + (A_3x + A_4)\cos 2x$$

кўринишда изланади.

4) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$$

кўринишда бўлсин.

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k = \alpha \pm i\beta$ сон (16'') характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} [\tilde{P}_\lambda(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_\lambda(x) \sin \beta x],$$

б) $k = \alpha \pm i\beta'$ сон (16'') характеристик тенгламанинг s каррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = x^s \cdot e^{\alpha x} [\tilde{P}_\lambda(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_\lambda(x) \sin \beta x]$$

кўринишда изланади.

Мисол. Ушбу

$$y''' + y' = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y''' + y' = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3 + k = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3 + k = 0 \Rightarrow k(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = i, k_3 = -i.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$$

кўринишда ҳамда $k = 1 \pm 2i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги учун бир жинсиз дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x) = A \cdot e^x (\cos 2x + \sin 2x)$$

кўринишда изланади.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ЕЧИМИНИНГ
МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

Фараз қилайлик,

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

n та дифференциал тенгламалар берилган бўлиб, улардан ташкил топган

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

системани қарайлик. Бунда x — эркин ўзгарувчи, $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ — номаълум функциялар, y'_1 , y'_2 , ..., y'_n лар эса шу функцияларнинг ҳосилалари.

Одатда (1) система *дифференциал тенгламалар системаси* дейилади.

Масалан,

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_2 + 1, & y'_1 &= y_1 + y_2 - y_1 \cdot y_2^2, \\ y'_2 &= y_1 + 1 & y'_2 &= -y_1 - y_2 + y_1^2 \cdot y_2 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_2 \sin x, \\ y'_2 &= y_1 e^{\cos x} \end{aligned} \right\}$$

дифференциал тенгламалар системаларидир.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$, ..., $\varphi'_n(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (1) системадаги $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларнинг ўрнига $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ лар, $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ ларнинг ўрнига эса $\varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \dots, \varphi'_n(x)$ лар қўйилганда ундаги тенгламалар айиниятга айланса:

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &\equiv f_1(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \\ \varphi'_2 &\equiv f_2(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi'_n &\equiv f_n(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \end{aligned}$$

у холда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялар (1) дифференциал тенгламалар системасининг ечими дейилади.

Масалан,

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \right\}$$

системанинг ечими

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= C_1 \cos(x - C_2), \\ (C_1, C_2 &= \text{const}) \\ \varphi_2(x) &= -C_1 \sin(x - C_2), \end{aligned}$$

бўлади, чунки

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1(x) = C_1 \cos(x - C_2), \quad \varphi_1' = \varphi_1'(x) = -C_1 \sin(x - C_2), \\ \varphi_2 &= \varphi_2(x) = -C_1 \sin(x - C_2), \quad \varphi_2' = \varphi_2'(x) = -C_1 \cos(x - C_2) \end{aligned}$$

лар учун

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= \varphi_2(x), \\ \varphi_2'(x) &= -\varphi_1(x) \end{aligned}$$

бўлади.

Дифференциал тенгламалар системасини ечиш усуллари баён этишдан аввал (1) система ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтираимиз.

Айтайлик, $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцияларнинг ҳар бири $n+1$ ўзгарувчининг функцияси сифатида R^{n+1} фазодаги

$$D = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^{n+1} : |x - x^0| \leq a, |y_1 - y_1^0| \leq b_1, |y_2 - y_2^0| \leq b_2, \dots, |y_n - y_n^0| \leq b_n\}$$

ёпик «тўғри тўртбурчак»да берилган бўлсин. $(a, b, b_2, \dots, b_n) -$ ўзгармас мусбат сонлар, $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 \in R^{n+1}$.

1-т а ё р и ф. Агар шундай ўзгармас мусбат k сон мавжуд бўлсаки, $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функция ($i=1, 2, \dots, n$) x аргументнинг $|x - x^0| \leq a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий қийматларида, $y_1, y_2, \dots, y_n$ аргументларнинг

$$|y_1 - y_1^0| \leq b_1, |y_2 - y_2^0| \leq b_2, \dots, |y_n - y_n^0| \leq b_n$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиган ихтиёрий $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ ҳамда $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ қийматлари учун

$$\begin{aligned} |f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n)| &\leq \\ &\leq k(|\bar{y}_1 - \underline{y}_1| + |\bar{y}_2 - \underline{y}_2| + \dots + |\bar{y}_n - \underline{y}_n|) \end{aligned}$$

($i=1, 2, 3, \dots, n$) тенгсизлик ўринли бўлса, $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функциялар $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

1-теорема. Агар

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

дифференциал тенгламалар системасида $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ функцияларнинг ҳар бири D да узлуксиз бўлиб, $y_1, y_2, \dots, y_n$ аргументлари бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (1) дифференциал тенгламалар системасининг

$$[x_0 - h, x_0 + h] \text{ сегментда } (h \leq \min(a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}), |f_i| \leq M, i = \overline{1, n})$$

бошланғич

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^0, y_2|_{x=x_0} = y_2^0, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0$$

шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

1°. Дифференциал тенгламалар системасини битта юкори тартибли дифференциал тенгламага келтириб ечиш.

Дифференциал тенгламалар системасини ечишнинг турли усуллари мавжуд. Шулардан бири маълум шартлар бажарилганда дифференциал тенгламалар системасини битта юкори тартибли дифференциал тенгламага келтириб ечиш усулидир. Бу усулда (1) системага кирган тенгламалар билан бирга, шу системага кирган тенгламаларни дифференциаллашдан ҳосил бўлган тенгламалар бирга қаралади. Сўнг топилган функция ҳосилаларнинг ўрнига қўйиш йўли билан битта номаълум функцияга нисбатан юкори тартибли дифференциал тенглама ҳосил қилинади.

Соддалик учун икки номаълум функция ва уларнинг ҳосилалари катнашган иккита дифференциал тенгламадан иборат

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned} \quad (2)$$

системани қараймиз. Бу системанинг биринчи тенгламаси

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) \quad (3)$$

ни дифференциаллаб топамиз:

$$y''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y'_2.$$

Бу тенгликдаги y'_1 , y'_2 ларнинг ўрнига (2) системадаги унинг кийматларини қўйсақ, унда

$$y''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1(x, y_1, y_2) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2(x, y_1, y_2) \quad (4)$$

бўлади.

(3) тенгламадан y_2 ни топиб (бу y_2 функция x , y_1 , y_1' лар орқали ифодаланади) уни (4) тенгликдаги y_2 нинг ўрнига қўйсак, натижада

$$y_1'' = \Phi(x, y_1, y_1')$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу системанинг биринчи тенгламасининг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y_1'' = y_2'$$

Сўнг y_2' нинг ўрнига (берилган системанинг иккинчи тенгламасига кўра) — y_1 ни қўйиб қуйидаги

$$y_1'' + y_1 = 0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

бўлади.

Берилган системанинг биринчи тенгламасидан фойдаланиб

$$y_2 = y_1' = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

бўлишини топамиз.

Демак, системанинг ечими

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{aligned}$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2^2 + \sin x, \\ y_2' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \end{cases}$$

системани ечинг.

Бу системанинг биринчи тенгламасининг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y_1'' = 2y_2 \cdot y_2' + \cos x.$$

Берилган системанинг иккинчи тенгламасидан

$$2y_2 \cdot y_2' = y_1'$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки тенгликдан

$$y_1' - y_1 = \cos x$$

бўлиши келиб чиқади. Бу чизикли бир жинссиз тенгламанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$$

бўлади.

Сўнг

$$y_1' = y_2' + \sin x,$$

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$$

тенгликлардан

$$y_2' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган системанинг ечими

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x,$$

$$y_2 = \left(C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \right)^{\frac{1}{2}}$$

бўлади.

2°. Дифференциал тенгламалар системасини интегралланувчи комбинацияларни топиш билан ечиш.

Дифференциал тенгламалар системасини ечишнинг бу усулида, системага кирган тенгламалар устида арифметик амаллар бажариш натижасида интегралланувчи комбинация ҳосил қилинади, яъни амаллар натижасида $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ ларга боғлиқ шундай номаълум

$$u = u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

функция ва унинг ҳосилалари боғланган тенглама топиладики, у энгил интегралланувчи бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= -\frac{y_2}{x}, \\ y_2' &= -\frac{y_1}{x} \end{aligned} \right\}$$

системани ечинг.

Аввало системага кирган тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$y_1' + y_2' = -\frac{1}{x}(y_1 + y_2) \Rightarrow (y_1 + y_2)' = -\frac{1}{x}(y_1 + y_2).$$

Равшанки,

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx} = -\frac{1}{x}(y_1+y_2) \Rightarrow \frac{d(y_1+y_2)}{y_1+y_2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y_1+y_2| = -\ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow y_1+y_2 = \frac{C_1}{x}.$$

Сўнг системага кирган тенгламаларни ҳадлаб айирамиз:

$$y_1' - y_2' = \frac{1}{x}(y_1 - y_2) \Rightarrow (y_1 - y_2)' = \frac{1}{x}(y_1 - y_2).$$

Равшанки,

$$\frac{d(y_1-y_2)}{dx} = \frac{1}{x}(y_1-y_2) \Rightarrow \frac{d(y_1-y_2)}{y_1-y_2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y_1-y_2| = \ln|x| + \ln|C_2| \Rightarrow y_1-y_2 = C_2x.$$

Натижада

$$\left. \begin{aligned} y_1+y_2 &= \frac{C_1}{x}, \\ y_1-y_2 &= C_2x \end{aligned} \right\}$$

система ҳосил бўлади. Бу системадан

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{x} + C_2x \right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{x} - C_2x \right).$$

бўлиши келиб чиқади. Бу берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади.

2. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_1^2 \cdot y_2, \\ y_2' &= \frac{y_2}{x} - y_1 \cdot y_2^2 \end{aligned} \right\}$$

системани ечинг.

Берилган системадаги биринчи тенгламани y_2 га, иккинчи тенгламани эса y_1 га кўпайтириб ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$y_1' \cdot y_2 + y_2' \cdot y_1 = y_1^2 \cdot y_2^2 + \frac{y_1 \cdot y_2}{x} - y_1^2 \cdot y_2^2 \Rightarrow y_2 \cdot y_1' + y_1 \cdot y_2' = \frac{y_1 \cdot y_2}{x}.$$

Агар

$$y_2 \cdot y_1' + y_1 \cdot y_2' = (y_1 \cdot y_2)'$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглама қуйидаги

$$(y_1 \cdot y_2)' = \frac{1}{x} (y_1 \cdot y_2)$$

кўринишга келади.

Равшанки,

$$\frac{d(y_1 \cdot y_2)}{dx} = \frac{1}{x} (y_1 \cdot y_2) \Rightarrow \frac{d(y_1 \cdot y_2)}{y_1 \cdot y_2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \Rightarrow \ln|y_1 \cdot y_2| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = x \cdot C_1. \quad (5)$$

Бу тенгликни эътиборга олиб, берилган системанинг биринчи тенгламаси $y_1' = y_1^2 \cdot y_2$ ни ушбу

$$y_1' = y_1 \cdot C_1 \cdot x \quad (6)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Энди (6) тенгламани ечамиз: ♦

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= C_1 \cdot x \cdot y_1 \Rightarrow \frac{dy_1}{y_1} = C_1 \cdot x \cdot dx \Rightarrow \ln|y_1| = \\ &= C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \ln|C_2| \Rightarrow y_1 = C_2 \cdot e^{C_1 \cdot \frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

(5) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$y_1 \cdot y_2 = C_1 x \Rightarrow y_2 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 \cdot \frac{x^2}{2}} = C_1 x \Rightarrow y_2 = \frac{C_1}{C_2} x \cdot e^{-C_1 \cdot \frac{x^2}{2}} \quad (C_2 \neq 0).$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} y_1 &= C_2 \cdot e^{C_1 \cdot \frac{x^2}{2}} \\ y_2 &= \frac{C_1}{C_2} \cdot x \cdot e^{-C_1 \cdot \frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади.

3. Ушбу

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 5y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 8y_2 \end{aligned} \right\}$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$y_1|_{x=0} = 2, \quad y_2|_{x=0} = 5.$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Системадаги биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни иккинчи тенглама билан ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$2y_1' + y_2' = 2(3y_1 + 5y_2) + (-2y_1 - 8y_2) \Rightarrow (2y_1 + y_2)' = 2(2y_1 + y_2).$$

Кейинги тенгламани ечамиз:

$$\begin{aligned} \frac{d(2y_1 + y_2)}{dx} &= 2(2y_1 + y_2) \Rightarrow \frac{d(2y_1 + y_2)}{2y_1 + y_2} = 2dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|2y_1 + y_2| &= 2x + \ln|C_1| \Rightarrow 2y_1 + y_2 = C_1 e^{2x} \Rightarrow y_2 = C_1 e^{2x} - 2y_1. \quad (7) \end{aligned}$$

Агар y_2 нинг бу ифодасини берилган системадаги биринчи тенгламада катнашган y_2 нинг ўрнига қўйсақ, унда

$$y_1' = 3y_1 + 5(C_1 e^{2x} - 2y_1),$$

яъни

$$y_1' = -7y_1 + 5C_1 \cdot e^{2x}$$

чизикли дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Бу чизикли дифференциал тенгламани 8-боб, 3-§ да ўрганилган усул билан ечиб, унинг ечими

$$y_1 = C_2 e^{-7x} + \frac{5}{9} C_1 \cdot e^{2x}$$

бўлишини топамиз.

Юқоридаги (7) тенгликдан фойдаланиб,

яъни

$$y_2 = C_1 \cdot e^{2x} - 2(C_2 e^{-7x} + \frac{5}{9} C_1 e^{2x}),$$

$$y_2 = -\frac{1}{9} C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-7x}.$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими:

$$y_1 = C_2 e^{-7x} + \frac{5}{9} C_1 \cdot e^{2x},$$

$$y_2 = -\frac{1}{9} C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-7x}. \quad (8)$$

Энди

$$y_1|_{x=0} = 2, \quad y_2|_{x=0} = 5$$

шартларни эътиборга олиб, (8) тенгликлардаги x нинг ўрнига 0 ни, y_1 ҳамда y_2 ларнинг ўрнига эса мос равишда 2 ва 5 ларни қўямиз.

Натижада

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_2 + \frac{5}{9} C_1, \\ 5 &= -\frac{1}{9} C_1 - 2C_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

бўлади. (9) системани ечиб

$$C_1 = 9, \quad C_2 = -3$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган дифференциал тенгламалар системасининг бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими

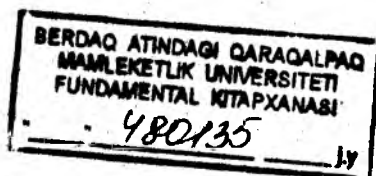
$$y_1 = (-3) \cdot e^{-7x} + \frac{5}{9} e^{2x} \cdot 9 = 5e^{2x} - 3e^{-7x},$$

$$y_2 = -\frac{1}{9} 9e^{2x} - 2(-3)e^{-7x} = -e^{2x} + 6e^{-7x}$$

бўлади.

АДАБИЁТЛАР

1. Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров, А. Ворисов. Олий математика асослари. I- том. Тошкент, «Ўзбекистон», 1995.
2. В. С. Шипачев. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1990.
3. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М., 1958.
4. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.
5. Л. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, Л. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1980.
6. М. С. Салохитдинов, Ф. Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Т., «Ўзбекистон», 1994.
7. Т. Аздаров, Х. Мансуров. Математик анализ, I—II том. Тошкент, 1994, 1995.
8. Е. У. Соатов. Олий математика. I—II том. Тошкент, «Ўқитувчи», 1993, 1994.
9. В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М., 1986.
10. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Фуломов. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. I—II томлар. Тошкент, «Ўзбекистон», 1994, 1995.



М У Н Д А Р И Ж А

СЎЗ БОШИ	3
1-б о б. АНИКМАС ИНТЕГРАЛ	4
1-§. Бошланғич функция. Аникмас интеграл тушунчаси	4
2-§. Аникмас интегралнинг асосий хоссалари	7
3-§. Аникмас интегралнинг жадвали. Мисоллар	8
4-§. Интеграллаш усуллари	11
5-§. Содда касрлар ва уларни интеграллаш	16
6-§. Рационал функцияларни интеграллаш	18
7-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш	28
8-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш	35
2-б о б. АНИҚ ИНТЕГРАЛ	38
1-§. Аник интеграл тушунчаси	38
2-§. Аник интегралнинг мавжудлиги	44
3-§. Аник интегралнинг хоссалари	49
4-§. Аник интегралларни ҳисоблаш	55
5-§. Аник интегралларни тақрибий ҳисоблаш	62
3-б о б. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ	72
1-§. Ей узунлиги ва уни ҳисоблаш	72
2-§. Текис шаклнинг юзи ва уни ҳисоблаш	78
3-§. Айланма сирт юзи ва уни ҳисоблаш	83
4-§. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши ва уни ҳисоблаш	84
5-§. Геометрик шаклларнинг статик моментлари ва огирлик марказини топиш	86
4-б о б. КАТОРЛАР	87
1-§. Сонли каторлар тушунчаси. Содда теоремалар	87
2-§. Мусбат ҳадли каторлар. Солиштириш теоремалари	92
3-§. Ихтиёрий каторлар. Лейбниц теоремаси	98
4-§. Функционал кетма-кетлик ва каторлар	101
5-§. Текис яқинлашувчи функционал каторларнинг хоссалари	106
6-§. Даражали каторлар	110
5-б о б. ҚЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ ВА ЎЗЛУКСИЗЛИГИ	122
1-§. R^2 фазо ва ундаги баъзи бир тўпламлар	122
2-§. R^2 фазода очик ҳамда ёпик тўпламлар	124
3-§. Икки ўзгарувчили функциялар	126
4-§. Икки ўзгарувчили функция лимити	128
5-§. Икки ўзгарувчили функциянинг ўзлуксизлиги	137
6-б о б. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ	142
1-§. Функциянинг хусусий ҳосилалари	142
2-§. Йўналиш бўйича ҳосила	149
3-§. Функциянинг дифференциали	150
4-§. Функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари	153
5-§. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема	158
6-§. Функциянинг Тейлор формуласи	159
7-§. Функциянинг экстремум қийматлари	161
8-§. Ошқормас функциялар	168

7-боб. m-ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР	173
1-§. R^m фазо ва унинг муҳим тўпламлари	173
2-§. m -ўзгарувчилик функция ва унинг limiti	174
3-§. m -ўзгарувчилик функциянинг узлуксизлиги	176
4-§. m -ўзгарувчилик функциянинг хусусий ҳосилалари	176
5-§. m -ўзгарувчилик функциянинг дифференциали	178
6-§. m -ўзгарувчилик функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари	179
8-боб. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР	185
1-§. $y' = f(x, y)$ дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги	188
2-§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар	195
3-§. Чизикли дифференциал тенгламалар	200
4-§. Бернулли тенгламаси	204
5-§. Тўлиқ дифференциал тенглама	206
6-§. Дифференциал тенгламанинг махсус ечимлари	214
7-§. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар	218
8-§. Лагранж тенгламаси	223
9-§. Клеро тенгламаси	224
10-§. Ошқормас кўринишдаги биринчи тартибли айрим дифференциал тенгламалар	226
9-боб. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР	229
1-§. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши	229
2-§. Иккинчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган тенгламалар	230
3-§. Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар	236
4-§. Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар	238
5-§. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар	245
10-боб. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР	251
1-§. Бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар	251
2-§. Бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар	258
11-боб. n-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР	269
1-§. n -тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши	269
2-§. n -тартибли дифференциал тенгламанинг ечими мавжудлиги	273
3-§. n -тартибли чизикли дифференциал тенгламалар	275
4-§. n -тартибли чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар	282
12-боб. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ	293
1-§. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги	293
2-§. Дифференциал тенгламалар системасини ечиш усуллари	295

СЎЗ БОШ

1-606. А

- 1-§. I
- 2-§. /
- 3-§. /
- 4-§. I
- 5-§. C
- 6-§. F
- 7-§. E
- 8-§. T

2-606. AI

- 1-§. A
- 2-§. A
- 3-§. A
- 4-§. A
- 5-§. A

3-606. AI

- 1-§. E
- 2-§. T
- 3-§. A
- 4-§. Y
- 5-§. G

4-606. KA

- 1-§. C
- 2-§. M
- 3-§. И
- 4-§. Ф
- 5-§. Т
- 6-§. Д

5-606. K:
BA

- 1-§. R²
- 2-§. R²
- 3-§. И
- 4-§. И
- 5-§. И

6-606. ИК
ДИ

- 1-§. Ф
- 2-§. И
- 3-§. Ф
- 4-§. Ф
- 5-§. У
- 6-§. Ф
- 7-§. Ф
- 8-§. Ош

*Тўхтамурат Жураев, Азимбой Саъдуллаев,
Гулмирза Худойбергенов, Хожиякбар Мансуров,
Азизжон Ворисов*

Издательство «Ўзбекистон»—1999,
700129, Ташкент, Навои, 30.

Кичик муҳаррир Ш. Соибназарова
Бадий муҳаррир Т. Қаноатов
Техник муҳаррир А. Горшкова
Мусаххих М. Мажитхўжаева

Теришга берилди 9.10.95. Босишга рухсат этилди 12.02.99. Бичими 60×90¹/₁₆. Офсет
босма усулида босилди. Шартли босма т. 19,0. Нашр т. 18,53. Нусхаси 3000.
Буюртма № 690. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 135—95.

«Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа
комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.