K.A. KURGANOV,
YU.X. ESHKABILOV,
R.R. KUCHAROV

OLIY MATEMATIKA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

K.A. KURGANOV, YU.X. ESHKABILOV, R.R. KUCHAROV

OLIY MATEMATIKA

o‘quv qo‘llanma

“Sano-standart” nashriyoti
Toshkent – 2019

UO'K: 517(075.8)
KBK: 22.1ya73
K 31

K 31 Kurganov K.A., Eshkabilov Yu.X., Kucharov R.R.
Oliy matematika / o'quv qo'llanma: – Toshkent. «Sano-standart» nashriyoti, – 2019, 304 bet.

Mazkur o'quv qo'llanmaga ijtimoiy-gumanitar bakalavr yo'nalishlarida Oliy matematika fanidan berilayotgan ma'ruzalar, mashqlar, joriy va mustaqil ta'lim nazorati uchun misol va masalalar asosida yaratildi. Har bir mavzuga doir tipik misol va masalalar ishlab ko'rsatilgan. O'quv qo'llanmadan universitetlarning boshqa yo'nalishlari talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Mualliflar:
f.-m.f.n., dotsent Kurganov Karim Ayxodjayevich,
f.-m.f.d., professor Eshkabilov Yusup Xalbayevich,
f.-m., PhD, dotsent Kucharov Ramziddin Ruzimuradovich.

Taqrizchilar:
O'zbekiston Milliy universiteti professori,
f.-m.f.d. Xudoyberdiyev A.X.,
Toshkent Davlat Texnika universiteti «Oliy matematika» kafedrasi mudiri, f.-m.f.n. dotsent Sh.T.Pirmatov.

UO'K: 517(075.8)
KBK: 22.1ya73

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2018-yil 25-avgustdagi 744-sonli buyrug'iga asosan o'quv qo'llanma sifatida nashr etishga ruxsat etildi.

ISBN: 978-9943-6116-1-0

MUNDARIJA

5-BOB. KETMA-KETLIK VA FUNKSIYA LIMITI. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

6-BOB. HOSILA. DIFFERENSIYAL

7-BOB. ANIQMAS INTEGRAL

8-BOB. ANIQ INTEGRAL

9-BOB. QATORLAR

10-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ASOSLARI

11-BOB. ALGEBRAIK STRUKTURALAR

KIRISH

Oliy o'quv yurtlarida ta'lim shakli ikki bosqichli tizimga (bakalavr va magistratura) o'tishi munosabati bilan oliy ta'lim muassasalar barcha fan dasturlarida jiddiy o'zgarishlar yuzaga keldi. Bu o'zgarishlar o'z navbatida barcha yo'nalishlar uchun tegishli darslik va o'quv qo'llanmalarni ishlab chiqishni talab etmoqda. Ushbu o'quv qo'llanma, universitetlarning bakalavr o'quv rejasidagi "Oliy matematika" fanidan yuqoridagi ehtiyojlarni qondirish maqsadida tayyorlangan.

Mazkur o'quv qo'llanma, universitetlarning ijtimoiy-gumanitar bakalavr yo'nalishi talabalari uchun "Oliy matematika" fanidan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarni olib borishda lotin yozuviga asoslangan o'zbek alifbosida adabiyotlar tanqisligining oldini olish maqsadida yozilmoqda. Mazkur qo'llanmada "Oliy matematika" fanini tashkil etuvchi to'plamlar nazariyasi, oliy algebra elementlari, analitik geometriya, funksiyalar, akslantirishlar, ketma-ketlik va funksiya limiti, funksiyaning uzluksizligi, hosila, differensiyal, aniqmas integral, aniq integral, qatorlar, ehtimollar nazariyasining asoslari va algebraik strukturalarga oid mavzular uchun tegishli ta'riflar, xossalar, teoremalar bayoni berilgan, hamda misol va masalalar namuna sifatida yechib ko'rsatilgan.

Shuningdek, talabalar mavzularni yaxshi o'zlashtirishi va mustaqil o'rganishi uchun har xil tipdagi misol va masalalar berilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma O'zbekiston Milliy universitetining ijtimoiy-gumanitar bakalavr yo'nalishi talabalariga o'qilgan ma'ruzalar va olib borilgan amaliy mashg'ulotlar asosida yozildi.

Mualliflar o'quv qo'llanmani yozishda bergan foydali maslahatlari uchun mas'ul muharrir va taqrizchilarga, hamda matnni tahrir qilganlarga alohida o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikr va mulohazalaringizni ramz3364647@yahoo.com elektron manziliga jo'natishlaringizni so'raymiz.

1-BOB. TO'PLAMLAR NAZARIYASI

Ushbu bo'lim to'plamlar, sonli to'plamlar, kompleks sonlar kabi mavzularni o'z ichiga oladi. Har bir mavzuda namunaviy misollar yechimi bilan keltirilgan. Shuningdek, amaliy mashg'ulotlar va uy vazifasi uchun yetarlicha misol va masalalar berilgan.

1.1.§. Matematikaning dastlabki tushunchalari. Matematik belgilar

Qadim ota-bobolarimiz dastlab bor narsalarni taqsimlash (masalan meros bo'lish) jarayonida, har bir shaxs yoki to'daning haqini ajratib berish hisobini olib borishgan. Turmush va hayotiy sharoitlar bunday hisoblar soni, sifatini oshirib borgan.

Matematika fan sifatida eramizdan oldingi III asrda grek olimi **Evklid** yozgan (to'plagan) 5 tomdan iborat va «Nachalo» (Boshlang'ich) deb atalgan kitoblardan boshlanadi. To eramizning XVI asrigacha bu matematika tarraqqiyoti yo'lida bizning bobolarimiz ham sezilarli hissa qo'shishgan.

Al-Xorazmiy (787-850) Abdullo Muhammad ibn Muso al Majusiy «Hind hisobi» kitobini yozib arifmetika fanining asoschisi bo'lgan. Unda hozirda siz-u biz ya'ni butun dunyo foydalanadigan O'NLIK sanoq sistemasi taklif qilingan.

Algebra atamasi Xorazmiyning «Al-kitob al muxtasar fi hisob Al-jabr val-muqobala» (Al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob) nomli risolasidagi «Al-jabr» so'zining lotincha yozilishidan olingan.

Bizgacha yetib kelgan nusxasi 1342-yili ko'chirilgan arabcha nusxasidir.

1145-yili **Robert Gester** ingliz tiliga, 1160-yili italiyalik **Gerardo** lotinchaga tarjima qilgan, 1486-yilda Iogan Vidman Leypsig universitetida qilgan dokladida Xorazmiy kitobidan olinganligini keltirgan.

«Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarni o‘z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boylik bo‘lish va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur», (deb yozadi kitob muqaddimasida Al-Xorazmiy).

«Hind hisobi» kitobi undan keyingi arifmetikadan asar yozuvchi barcha olimlarga qolip bo‘lib xizmat qilgan bo‘lsa, «Al-jabr va-l-muqobala kitob» asari algebraga asos soldi. Undan oldin hech kim algebra bo‘yicha bunday kitob yozmagan.

Abu Rayhon (Beruniy) Muhammad Ibn Ahmad (973-1048)

Evklidning “Nachalo‘ sini, Ptolomeyning «Al’magest» asarlarini sanskritdan hozirgi zamon tiliga aylantirgan «Astrolyabiya traktati», «Hindiston» asarlari bilan dunyoga mashhur geometr, faylasuf sifatida tanilgan.

$$\text{U } \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin 2a, \sin a/2,$$

$$\sin\alpha/4 = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos a}}$$

$$\sin a/4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}}$$

formulalarning birinchi ijodkoridir.

Umar Hayyom (1048-1131) (Hayyom Abul Fatx Omar Ibn-Ibrohim) Samarqandda (Xurosondan haydalib) yashagan davrida «Algebra va-l-muqobala asarlarining davomi haqida traktat», 1077-yili «Evklid asosiy postulatlari haqida kommentariylar» traktatini yozgan. Bularda egri chiziqli trapetsiya tushunchalariga asos solingan.

Abul-Vafo Al-Buzjoniy (940-998).

Abu Ali Ibn Sino al- Husayn ibn Abdullo (980-1037).

Nasriddin at Tusiy (1201-1274)-100 dan ortiq matematik asarlar avtori.

Al Koshi G‘iyositdin Jamshid ibn Masud (1394-1449) Ulug‘bek observatoriyasida ishlagan, 1427 yilda «Arifmetika kaliti» asarini yozgan.

Matematik belgilar

Belgilar	**Ma’nolari**
$+$	Qo‘shish
$-$	Ayirish
$*$yoki $\times$ yoki $\cdot$	Ko‘paytirish
$/$ yoki $\div$	Bo‘lish
$\pm$	Qo‘shish yoki ayirish
x^n	$n-$ daraja
∞	Cheksizlik
$\sqrt[n]{x}$	Ildiz yoki $n-$ darajali ildiz
$\sum_{i=k}^{l} x_i$ yoki $\sum_{i=k}^{l} x_i$	$i=k$ dan $i=l$ gacha x_i lar yig‘indisi
$\in$	Tegishlilik belgisi
$\notin$	Tegishli emaslik belgisi
$\subset$	To‘plam qismi
$<$	Kichik
$\leq$	Kichik yoki teng
$>$	Katta
$\geq$	Katta yoki teng
$=$	Teng
$\neq$	Teng emas
$\forall$	Ixtiyoriy, barcha
$\exists$	Mavjudlik belgisi
$\wedge$	Va
$\vee$	Yoki
$\Rightarrow$	Kelib chiqadi
$\Leftrightarrow$	Teng kuchlilik belgisi

Grek harflari

Katta harflar	**Kichik harflar**	**Ingliz**	**O‘qilishi**
A	α	alpha	Alfa
B	β	beta	Beta
Γ	γ	gamma	gamma

Δ	δ	delta	Delta
Ε	ε	epsilon	epsilon
Ζ	ζ	zeta	Zeta
Η	η	eta	Eta
Θ	θ	theta	teta
Ι	i	iota	iota
Κ	κ	kappa	kappa
Λ	λ	lambda	lambda
Μ	μ	mu	miu
Ν	v	nu	niu
Ξ	ξ	xi	ksi
Ο	o	omicron	omicron
Π	π	pi	Pi
Ρ	ρ	rho	Ro
Σ	σ	sigma	sigma
Τ	τ	tau	tau
Υ	υ	upsilon	upsilon
Φ	φ	phi	Fi
Χ	χ	chi	Xi
Ψ	ψ	psi	psi
Ω	ω	omega	omega

1.2.§. To'plamlar.To'plamlar ustida amallar

Matematik fanlarni o'rganishda turli to'plamlarga duch kelamiz. Haqiqiy sonlar to'plami, tekislikdagi ko'pburchaklar to'plami, ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar to'plami va hokazo. To'plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan biri bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. «To'plam» so'zining sinonimlari sifatida «obyektlar majmuasi» yoki «elementlar majmuasi» so'z birikmalaridan foydalaniladi.

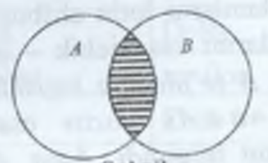
To'plamlarni lotin alifbosining bosh harflari A,B, …, ularning elementlarini esa kichik – a,b, … harflar bilan belgilaymiz. «*a element A to'plamga tegishli*» iborasi «$a \in A$» shaklda yoziladi. Ushbu «$a \notin A$» yozuv esa a element A to'plamga tegishli emasligini bildiradi. Agar A to'plamning barcha elementlari B to'plamning ham elementlari bo'lsa, u holda A to'plam B *to'plamning qismi* deb ataladi va $A \subset B$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, natural sonlar to'plami haqiqiy sonlar to'plamining qismi bo'ladi. Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda ular *teng to'plamlar* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi. Ko'pincha, to'plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko'rsatiladi. Ba'zida birorta ham elementi mavjud bo'lmagan to'plamlarni qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $x^2+1=0$ tenglamaning haqiqiy yechimlari to'plami, $-2 \le x < 2$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to'plami va hokazo. Bunday to'plamlar uchun maxsus *«bo'sh to'plam»* nomi berilgan va uni belgalashda $\varnothing$ belgidan foydalanamiz. Ma'lumki, har qanday to'plam bo'sh to'plamni o'zida saqlaydi va bo'sh to'plamni har qanday to'plamning qism to'plami sifatida qaralishimiz mumkin. To'plamlarning bo'sh to'plamdan va o'zidan farqli barcha qism to'plamlari *xos qism to'plamlar* deb ataladi.

To'plamlar ustida amallar. Ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar C to'plam faqatgina A va B to'plamlarning elementlaridan iborat bo'lsa, u holda C to'plam A va B to'plamlarning *yig'indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi va $C = A \cup B$ shaklda belgilanadi.

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi A_α to'plamlarning yig'indisi ham shunga o'xshash aniqlanadi: A_α to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlar to'plami bu to'plamlarning *birlashmasi(yig'indisi)* deyiladi va bu munosabat $\bigcup_\alpha A_\alpha$ - shaklda belgilanadi.

A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning *kesishmasi* deyiladi va $A \cap B$ shaklda belgilanadi.

C=A∪B.



C=A∩B.

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlarning *kesishmasi* deb A_α to'plamlarning barchasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami tushuniladi va $\bigcap_\alpha A_\alpha$ kabi belgilanadi.

To'plamlar uchun kiritilgan yig'indi(birlashma) va kesishma amallari aniqlanishiga ko'ra kommutativ va assotsiativdir, ya'ni

$$A\cup B=B\cup A,\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$A\cap B=B\cap A,\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$

Shuningdek, bu amallar o'zaro distributivlik qonunlari bilan bog'langan

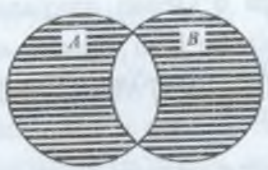
$$(A\cup B)\cap C=(A\cap B)\cup(B\cap C), \tag{1.1}$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup B)\cap(B\cup C), \tag{1.2}$$

A va B to'plamlar *ayirmasi* deb A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va $A\setminus B$ kabi belgilanadi.

$A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plamlarning birlashmasidan iborat to'plamga A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi, ya'ni $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Odatda biror umumiy E to'plam va uning qism to'plamlari qaraladi. Masalan, tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami va uning qism to'plamlari. Bu holda $E\setminus A$ ayirma A qism to'plamning to'ldiruvchi to'plami deyiladi va A' yoki CA kabi belgilanadi.

C=A\B.



C=AΔB.

E\A.

To'plamlar nazariyasida muhim o'rin tutadigan va *ikkilanganlik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi ikki munosabatni keltiramiz:

1-xossa. *Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:*

$$E\setminus\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha(E\setminus A_\alpha). \tag{1.3}$$

2-xossa. *Kesishmaning to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar yig'indisiga teng:*

$$E\setminus\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(E\setminus A_\alpha). \tag{1.4}$$

1.3.§. Sonli to'plamlar

Son tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular

1) natural sonlar (1,2,3,...),
2) butun sonlar (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) kasr sonlar (oddiy va o'nli kasrlar),
4) haqiqiy sonlar,bo'lishi mumkin. Bunday sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o'quvchiga maktab, kollej va litseylarda o'qitiladigan matematika fanidan ma'lum.

Oliy matematika kursi davomida ko'p hollarda haqiqiy sonlarga duch kelamiz. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

Ma'lumki, $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p - butun son, q-esa natural son bo'lib, ular o'zaro tub. Ravshanki, oddiy kasrlar ratsional son bo'ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman 10 ning natural darajalari (10^n) bo'lsa, bunday oddiy kasr o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$\frac{3}{2}, \frac{1}{17}, \frac{23}{11}, -\frac{8}{9}$ - oddiy kasrlar,

$\frac{7}{10}=0,7,\ \frac{112}{10}=11,2,\ \frac{23}{100}=0,23$ - o'nli kasrlar bo'ladi.

$\frac{p}{q}$ ratsional son – oddiy kasr berilgan bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q natural songa bo'lamiz. Agar bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi.

p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etib, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrashi, so'ng undan oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Odatda, bunday o'nli kasr cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri deyiladi.

Masalan, $\frac{53}{36}$ ratsional son $1,4722...=1,47(2)$ o'nli kasrga keladi. Bu cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib, uning davri 2 ga teng: $\frac{53}{36}=1,47(2)$.

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son chekli o'nli kasr yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali ifodalanadi.

Aksincha, har qanday chekli o'nli kasrni yoki cheksiz davriy o'nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan,

$$1,03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100},$$

$$0,(3)=0,3333...=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

(bunda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya'ning yig'indisini topish formulasidan foydalanildi) bo'ladi.

Demak, har qanday chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalaniladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha ixtiyoriy chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Ammo cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham mavjud. Masalan,

$$1,1010010001..., \quad 1,4142135..., \quad 2,7182818...$$

sonlar cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar bo'ladi (bu sonlardan ikkinchisi $\sqrt{2}$ ni, uchunchisi esa e sonini ifodalaydi). Ravshanki, bu sonlar ratsional sonlar bo'lmaydi.

Ta'rif. *Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr irratsional son deyiladi.* Masalan,

$$1,4142135...=\sqrt{2}, \quad 3,141583...=\pi, \quad 2,718281...=e$$

sonlar irratsional sonlardir.

Ta'rif. *Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.*

Masalan,

$$2,\ 7\frac{1}{2},\ -3,\ \sqrt{2},\ \pi,$$

sonlar haqiqiy sonlardir.

Endi ba'zi-bir sonlar to'plamlarini keltiramiz, ulardan, kelgusida ko'p foydalaniladi.

Aytaylik, $a\in R$, $b\in R$ sonlar berilgan bo'lib, $a<b$ bo'lsin. a,b va ular orasidagi barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam segment deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, to'plamlar quyidagicha ta'riflanadi:

$$(a,b)=\{x\in R: a<x<b\} \text{ - interval},$$

$$[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\} \text{ - yarim interval},$$

$$(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\} \text{ - yarim interval}.$$

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ va $(a,b]$ to'plamlarning chegaralari deyiladi.

Shuningdek

$$[a,+\infty)=\{x\in R: x\ge a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x\in R: x<a\},$$
$$(-\infty,+\infty)=R$$

deb qaraymiz.

1-misol. *Dunyo okeanida 19 ta suvosti chuqurliklari ma'lum, ularning chuqurligi 7 km. dan oshadi. Ulardan 16 tasi Tinch va Hind okeanlarida, 4 tasi Hind va Atlantika okeanlarida. Har bir okeanda nechtadan suvosti chuqurliklari bor?*

Echilishi. A to'plam bilan Tinch va Hind okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini, B to'plam bilan Hind va Atlantika okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra $m(A)=16$, $m(B)=4$ bo'ladi. Ayni paytda $m(A\cup B)=19$ ekanligi ma'lum. Ravshanki Hind okeanidagi suvosti chuqurligi $A\cap B$ to'plamni tashkil etadi. Bu to'plamning elementlari quyidagicha topiladi:

$$m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=16+4-19=1.$$

Shunday qilib, Hind okeanida 1 ta, Tinch okeanida 15 ta, Atlantika okeanida 3 ta suvosti chuqurliklari bor ekan.

Endi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan R to'plamning xossalarini keltiramiz:

1) *R to'plamda (to'plam elementlari orasida) qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari kiritilgan bo'lib, bu amallarning bajarilish qoidalari ham o'rinli bo'ladi;*

2) *R to'plamda (to'plam elementlari orasida) teng, katta, kichik tushunchalari kiritilgan. Ixtiyoriy $a\in R$, $b\in R$, $c\in R$ haqiqiy sonlar uchun*

$$a=b, \text{ yoki } a>b, \text{ yoki } a<b$$

bo'lib, $a<b$, $b<c$ bo'lishidan $a<c$ bo'lishi kelib chiqadi;

3) *R zich to'plam bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $a\in R$, $b\in R$ haqiqiy sonlar uchun $a\neq b$ bo'lsa, u holda a va b sonlar orasida istalgancha haqiqiy son bo'ladi.*

2-misol. *Agar r - ratsional, α - irratsional son bo'lsa, $r+\alpha$ sonning irratsional son bo'lishi isbotlansin.*

Yechilishi. Berilgan r va α sonlarning yig'indisini β deylik: $\beta=r+\alpha$. Ravshanki, bu tenglikdan $\alpha=\beta-r$ bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, β ratsional son bo'lsin. Unda $\beta-r$ soni, ikki ratsional son ayirmasi yana ratsional son bo'lganligi uchun ratsional son bo'ladi: $\beta-r=\alpha$ ratsional son. Bu esa berilishiga ko'ra α ning irratsional son bo'lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga β ning ratsional son bo'lsin deyilishi sabab bo'ldi. Demak, β irratsional son.

1.4.§. Kompleks sonlar

$x^2+1=0$ kabi tenglamalarda, kvadrati -1 ga teng haqiqiy sonning mavjud emasligi, aqiqiy sonlar to'plamini kengaytirish zarurligini taqozo etadi.

Kvadrati -1 ga teng bo'ladigan son mavhum birlik deyiladi va i harfi bilan belgilanadi, ya'ni $i=\sqrt{-1}$.

Tarkibida mavhim birlik i qatnashgan son kompleks son (mavhum son) deyiladi. Kompleks sonlar to'plami C harfi bilan belgilanadi.

Kompleks son algebraik formasi.

$x,y\in R$ bo'lganda $z=x+iy$ son kompleks son, yozuv esa kompleks son algebraik formasi deyiladi.

x soni kompleks son haqiqiy qismi deyiladi va Rez ko'rinishida, y soni esa mavhim qismi deyilib, Imz tarzida belgilanadi.

$x+iy$ va $x-iy$ sonlar o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi. Ulardan biri z bo'lsa ikkinchisi $\overline{z}$ ko'rinishida belgilanadi. O'zaro qo'shma $z,\overline{z}$ sonlar yig'indisi, ko'paytmasi haqiqiy bo'lishi ravshan. Bundan tashqari $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ tengliklarni keyinchalik isbotlash mumkin.

$z_1=x_1+iy_1$ va $z_2=x_2+iy_2$ sonlari ustida amallar quyidagicha kiritiladi :

1). $z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$,

2). $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2=$
$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$,

3). $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\dfrac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\dfrac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=$

$=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$

Masalan, $z_1=1+2i$ va $z_1=1-i$ bo'lsa,

$z_1+z_2=1+2i+1-i=2+i,\quad z_1-z_2=1+2i-1+i=3i,$

$z_1\cdot z_2=(1+2i)\cdot(1-i)=1-i+2i+2=3+i,$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+2i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{1+i+2i-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i.$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ tenglikni tekshiramiz:

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}=$

$=\overline{(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2)=x_1x_2-ix_1y_2-$

$-iy_1x_2-y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+y_1x_2)$

Kompleks son trigonometrik formasi. Muavr formulalari.

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi kiritib, kompleks son haqiqiy qismini Absissalar o'qiga, mavhum qismini ordinatalar o'qiga joylashtiramiz. Tekislikdagi $M(x;y)$nuqta $z=x+iy$kompleks sonning tekislikdagi geometrik tasviri deyiladi. Turlicha kompleks sonlarga tekislik turli nuqtalari mos keladi, bu moslik o'zaro bir qiymatlidir.

Agar qutb koordinatalari ham kiritilsa, $M(r\cos\varphi;r\sin\varphi)$ bo'ladi.Koordinatalar boshidan $M(x;y)$gacha masofa berilgan kompleks son moduli deyiladi, $|z|$ tarzida belgilanadi.

Ravshanki, $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Argumentni $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$ munosabatdan topish qulay.

$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ boglanishdan foydalanib:

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r[\cos\varphi+i\sin\varphi]$$

Kompleks sonning $z=r[\cos\varphi+i\sin\varphi]$ ko'rinishi trigonometrik formasi deyiladi.

$z=1-\sqrt{3}i$ bo'lsa, $z=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2, tg\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}, x>0, y<0$

bo'lganligidan $\varphi\in IV$ va $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$

Demak, $z=1-\sqrt{3}i=2\left[\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right]$trigonometrik formada

berilgan $z_1=r_1[\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1]$ va $z_2=r_2[\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2]$ kompleks sonlar ustida ammallar quyidagicha kiritiladi:

1) $z_1\pm z_2=(r_1\cos\varphi_1\pm r_2\cos\varphi_2)+i(r_1\sin\varphi_1\pm r_2\sin\varphi_2)$

2) $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-$
$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2]=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right],$

3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}\cdot\dfrac{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2}=$

$=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$

$=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$

Agar $z_1\cdot z_2$ amalida $z=z_1=z_2=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ bo'lsa,

$z^2=r^2[\cos2\varphi+i\sin2\varphi], z^3=r^3[\cos3\varphi+i\sin3\varphi]\ldots,$

$z^n=\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=r^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi]$

Oxirgi tenglik Muavrning darajaga oshirish formulasi deyiladi.

Misol sifatida $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ni hisoblaymiz.

Dastlab, kompleks son algebraik formasini topamiz :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{2},\ tg\varphi=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$$ va

$y>0,\ x<0$ ekanligidan $y\in II,\ \varphi=105^\circ=\frac{7\pi}{12}$ kelib chiqadi.

Demak, Muavr darajaga oshirish formulasiga ko'ra:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{20}=2^{10}\left[\cos 20\cdot\frac{7\pi}{12}+i\sin 20\cdot\frac{7\pi}{12}\right]=$$

$$=2^{10}\left[\cos\frac{35\pi}{3}+i\sin\frac{35\pi}{3}\right]=2^{10}\left[\cos\left(12\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(12\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=$$

$$=2^{10}\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]=2^{10}\left[\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=2^{9}-\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish masalasini qaraymiz.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{x+iy}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}$$

Albatta, bu ildizdan qandaydir $p\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$kompleks son chiqqan deb faraz qilish mumkin, u holda

$$\left[p\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right]^{n}=p^{n}\left[\cos n\theta+i\sin n\theta\right]=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$$

tenglik bajarilishi kerak.

$\sin\varphi$, $\cos\varphi$ larning davri 2π ekanligini hisobga olib

$p^{n}=r,n\theta=u+2\pi k$ lardan $p=\sqrt[n]{r},\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n},k\in Z$ kelib chiqadi natijada, Muavrning ildiz chiqarish formulasi.

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right],k\in Z$$

hosil bo'ldi. Bunda $k=\overline{0,n-1}$ bo'lganda n ta ildiz topiladi. $k=n,n+1,\ldots$ qiymatlarda esa davr hisobiga.avvalgi ildizlar bilan ustma-ust tushadigan ildizlar.kelib chiqadi

Misol $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^{2}+\left(-1\right)^{2}},tg\varphi=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},x<0,y<0$ bo'lgani uchun $\varphi\in III,\varphi=\frac{7\pi}{6}$

Muavr ildiz chiqarish formulasigadan

$$\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}=\sqrt[4]{2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right],$$

$k=0$ da $z_0=\sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24}\right]$

$k=1$ da $z_1=\sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\frac{19\pi}{24}+i\sin\frac{19\pi}{24}\right]$

$k=2$ da $z_2=\sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\frac{31\pi}{24}+i\sin\frac{31\pi}{24}\right]$

$k=3$ da $z_3=\sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\frac{43\pi}{24}+i\sin\frac{43\pi}{24}\right]$

kelib chiqadi.

$\sqrt[5]{-1}$ ning ildizlarini topaylik $r=\sqrt{\left(-1\right)^{2}+0^{2}}=1$va $tg\varphi=\frac{0}{-1}=0,x<0$ ekanligidan $\varphi=\pi$, u holda

$$\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}$$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5},\quad z_1=\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5},$$

$$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\quad z_3=\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}-i\sin\frac{7\pi}{5},$$

$$z_4=\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$$

Demak, ildizlarning bittasi haqiqiy, qolganlari ikki juft o'zaro qo'shma kompleks sonlar ekan.

Kompleks sonning ko‘rsatkichli formasi.

Dastlab, Eyler ayniyati deb ataluvchi $e^{i\varphi}=\cos\varphi+\sin\varphi$ formulani hozircha isbotsiz qabul qilamiz. U holda $z=x+iy=r\left[\cos\varphi+\sin\varphi\right]=r\cdot e^{i\varphi}$ kelib chiqadi. $z=r\cdot e^{i\varphi}$ yozuv kompleks son ko‘rsatkichli formasi deyiladi, kompleks sonning bu formasi ixcham yozilishi bilan ajralib turadi, masalan $z_1=r\cdot e^{i\varphi_1}, z_2=r\cdot e^{i\varphi_2}$ kompleks sonlar ko‘paytmasi $z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ bo‘linmasi esa $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ tarzida yoziladi. Muavr darajaga oshirish formulasi $z^n=r^n\cdot e^{i\varphi}$ ko‘rinishida yoziladi.

1. Quyidagi tengliklarni isbotlang:
$a)(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C);$
$b)(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C).$
2. $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$ tenglik o‘rinlimi?
3. $A=B\cup C$ tenglikdan $A\setminus B=C$ tenglik kelib chiqadimi?
4. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$tenglikni isbotlang.
5. Quyidagi tengliklarni isbotlang:
$a)A\Delta A=\varnothing;$
$b)CA\Delta CB=A\Delta B;$
$c)(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C);$
$d)C(A\setminus B)=CA\cup B.$
6. Quyidagilarni isbotlang.
$a)A\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$
$b)A\Delta B=(A\cap CB)\cup(B\cap CA);$
$c)(A\cap B)\cup(A\cap CB)\cup(CA\cap B)=(A\cup B);$
$d)A\times(B\times C)=(A\times B)\cup(A\times C).$
7. $(E\setminus A)\Delta(E\setminus B)=A\Delta B$ tenglikni isbotlang, bu yerda $A\subset E, B\subset E.$
8. $(A\cup B)\Delta(C\cup D)\subset(A\Delta C)\cup(B\Delta D)$ munosabatni isbotlang.
9. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun $A\subset B\cup(A\Delta B)$

munosabatni isbotlang.

10. Agar A_1 va A_2 to‘plamlar kesishmasa, $B_1\cap B_2\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$ munosabatni isbotlang.

11. 80 ta matematika olimpiada qatnashchilardan 60 tasi shaxmat ishqibozi, 50 tasi shashka ishqibozi va 40 tasi shashka va shaxmat ishqibozlari. Olimpiada qatnashchilarning qanchasi bu o‘yinlarga befarq emas.

12. Ma’lumki, ikki radiusdan tashkil topgan α markaziy burchak tortib turgan yoyning uzunligi $l=R\alpha$ (α radian o‘lchovda) bo‘ladi. Yer sharining ekvatorida 1’ burchak tortib turgan yoy uzunligi topilsin (yer sharining ekvator radiusi $R=6300$ km deb olinadi).

13. Biologiyada o‘rganiladigan bir hujayrali hayvonlar har minutda har biri ikkiga bo‘linib ko‘payadi. Agar bitta olingan bunday hayvon 100 minutda ko‘payib, ularning soni n taga yetsa dastlab olingan ikkita hayvonning ko‘payib, ularning soni ham n taga yetishi uchun qancha vaqt kerak bo‘ladi?

14. A to‘plam 3 ga bo‘linuvchi barcha natural sonlar to‘plami, B esa 5 ga bo‘linuvchi barcha natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $A\cap B$ to‘plam qanday bo‘ladi?

15. $A=\{x\in N|2<x\le 6|\}, B=\{x\in N|1<x<4|\}$ va $C=\{x\in N|x^2-4=0|\}$ bo‘lsa,

1) $B\cup C$ 2) $A\cap B\cap C$ 3) $A\cup B\cup C$ 4) $(A\cap B)\cup(B\cup C)$ to‘plamlar topilsin.

16. $A=\{x\in N|2<x\le|\}$, va $B=\{x\in N|1<x<4|\}$ to‘plamlarning kesishmasini toping.

17. $A=\left\{x:-\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{7}{4}\right\}$ va $B=\left\{x:-\dfrac{1}{4}\le x\le 2\right\}$ to‘plamlarning birlashmasini toping.

18. $A=\left\{x:-\dfrac{2}{3}\le x\le\dfrac{7}{4}\right\}$ va $B=\left\{x:-\dfrac{1}{4}\le x\le 3\right\}$ to‘plamlar berilgan. $A\setminus B$ ni toping.

19. $A=\{2,3,5,7,9,11\}$ va $B=\{1,3,4,7,9,\}$ to'plamlarning kesishmasi $A\cap B$ ni toping.

20. $A=\left\{x:-1\le x\le \frac{7}{4}\right\}$ va $B=\left\{x:-\frac{1}{4}\le x\le 3\right\}$ to'plamlarning kesishmasini toping.

21. $A=\left\{x:-2\le x\le \frac{7}{4}\right\}$ va $B=\left\{x:-\frac{1}{4}\le x\le 3\right\}$ to'plamlarning birlashmasini toping.

22. $n\in N$ bo'lganda i^n hisoblansin.

23. Amallarni bajaring

1) $(2+3i)-(1-i)$; 2) $(1-i)(4+3i)$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\frac{2i}{1+i}$; 5) $(1+i)^3$; 6) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$; 7) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 8) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

24. Muavr formulalaridan foydalanib hisoblang:

1) $(1-i)^{25}$; 2) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{20}$; 3) $\frac{1+i}{1-i}$; 4) $\sqrt[3]{2-2i}$; 5) $\sqrt[4]{-4}$;

6) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}+i}}$.

2-BOB. OLIY ALGEBRA ELEMENTLARI

2.1.§. Radikallarda yyechiladigan tenglamalar

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan birinchi darajada bo'lgan tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax+b=0$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b berilgan sonlar.

(1) tenglama:

1) $a\neq 0$ bo'lganda yagona $x=-\frac{b}{a}$ yechimga ega bo'ladi,

2) $a=0, b=0$ bo'lganda yechimlari cheksiz ko'p (ixtiyoriy son tenglamaning yechimi) bo'ladi.

3) $a=0, b\neq 0$ bo'lganda yechimga ega bo'lmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$\frac{2x-5}{4}+\frac{2x+1}{3}+x=\frac{x}{4}+2$$

tenglama yechilsin.

Bu tenglamaning har ikki tomonini 4 va 3 sonlarining eng kichik umumiy karralisi 12 ga ko'paytirib

$$12\frac{2x-5}{4}+12\frac{2x+1}{3}+12x=12\frac{x}{4}+24,$$

ya'ni

$$3(2x-5)+4(2x+1)+12x=3x+24$$

bo'lishini topamiz.

Soddalashtirish natijasida keyingi tenglik quyidagi

$$6x-15+8x+4+12x=3x+24,$$

ya'ni

$$12x=35$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki, bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $x=\frac{35}{23}$ bo'ladi.

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan ikkinchi darajada bo'lgan tenglama kvadrat tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda a,b,c berilgan sonlar bo'lib, kvadrat tenglamaning koeffisientlari deyiladi.(2) tenglamaning yechimi, uning diskriminanti

$$D=b^2-4ac$$

ga bog'liq:

1) agar $D>0$ bo'lsa, (2) tenglama ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

bo'ladi;

2) agar $D=0$ bo'lsa, (2) tenglama bitta haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

bo'ladi;

3) agar $D<0$ bo'lsa, (2) tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. *Ushbu*

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

tenglama yechilsin.

Ravshanki, $2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)$. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini ($x\neq-4,\ x\neq\frac{1}{2}$ deb) $(x+4)(2x-1)$ ga ko'paytirib topamiz:

$$2x^2+7x-4+\frac{2x}{x+4}\cdot(x+4)(2x-1)+\frac{27(2x^2+7x-4)}{2x^2+7x-4}=$$
$$=\frac{6}{2x-1}(x+4)(2x-1).$$

Natijada

$$2x^2+7x-4+4x^2-2x+27=6x+24$$

bo'lib,

$$6x^2-x-1=0$$

bo'ladi. Bu tenglamani yechib

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm5}{12},$$

$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{3}$ bo'lishini topamiz. Biroq, $x=\frac{1}{2}$ da qaralayotgan tenglama ma'noga ega emas. Demak, berilgan tenglamaning yechimi $x=-\frac{1}{3}$ bo'ladi.

$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ kubik tenglamani qaraymiz. Tomonlarini a_0 ga bo'lib, $x^3+ax^2+bx+c=0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

Shunday $x=y+\alpha$ almashtirish o'tkazamizki, oxirgi tenglama soddalashsin.

$$y^3+(3\alpha+a)y^2+(3\alpha^2+2a\alpha+b)y+(\alpha^3+a\alpha^2+bd+c)=0$$

Demak, $x=y-\frac{a}{3}$ almashtrish o'tkazilsa, kubik tenglama $y^3+py+q=0$ ko'rinish oladi.

Oxirgi tenglama yechimlarini $y=u+v$ ko'rinishida qidiriladi, bunda $u\cdot v=-\frac{p}{3}$ sharti bunday yechim mavjudligini taminlaydi, ya'ni ular $t^2-yt-\frac{p}{3}=0$ tenglama yechimlaridir.

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,\ldots,(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0$$

$3uv+p=0$ ekanligidan, $\begin{cases}u^3+v^3=-q\\ u^3\cdot v^3=-\frac{p^3}{27}\end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz,

Viyet teoremasidan u^3,v^3 lar $z^2-qz-\frac{p^3}{27}=0$ tenglama ildizlari ekanligi kelib chiqadi

$$z_1=u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad z_2=v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Demak $y^3+py+q=0$ tenglama yechimi

$$y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

formuladan topilib,u Kardano formulasi deyiladi.

Har bir kub ildizdan uchta qiymatga, $u+v$ uchun esa 9 ta qiymatga ega bo'lamiz. Bu qiymatlardan $v\cdot u=-\frac{p}{3}$ shartga bo'ysinuvchi uchtasigina tenglama yechimi bo'ladi. $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ soni $y^3+py+q=0$ kubik tenglama diskriminanti deyiladi. Uning yordamida ildizlar quydaigicha topiladi.

1) $\Delta>0$ bo'lsa, bitta haqiqiy, ikkita o'zaro qo'shma kompleks ildizlar mavjud bo'ladi:

$y_1=u_1+v_1;\ y_{2,3}=\frac{u_1+v_1}{2}\pm\frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i$ bunda u_1,v_1 lar $u,\ v$ ning haqiqiy qiymatlari.

2) $\Delta=0$, bo'lsa uchta haqiqiy (ikkitasi o'zaro teng) ildiz mavjud: $y_1=\frac{3q}{p},\ y_2=y_3=-\frac{3q}{2p}=-\frac{y_1}{2}$

3) $\Delta=0$, bo'lsa uchta turli xaqiqiy ildizlar mavjud:

$$y_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\ y_{2,3}=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\pm120^\circ\right)$$ bunda $\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$

1) $x^3+6x-7=0$ uchun, Kardano formulasidan,

$$x=\sqrt[3]{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-1}$$ kelib chiqadi.

Ularning ildizlari $2,-1\pm\sqrt{3}i$ va $-1;\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ bo'lganligidan, $\Delta>0$ ekanligini hisobga olsak, $x_1=1, x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ kelib chiqadi.

2) $x^3-12x+16=0,\ \Delta=\frac{16\cdot16}{4}+\frac{(-12)^3}{27}=0$ ekanligidan $x_1=\frac{3\cdot16}{-12}=-4, x_{2,3}=-\frac{-4}{2}=2$.

To'rtinchi darajali $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tenglama ildizlarini topish uchun uni

$$\left(x^2+\frac{1}{2}x+y\right)^2-\left[\left(2y+\frac{\alpha}{4}-b\right)x^2+(ay-c)x+(y^2-d)=0\right]$$

ko'rinishida yozib olamiz, bunda y yangi yordamchi kattalik.

Ayriluvchi uchhad biror $(\alpha x+\beta)$ ning to'la kvadrati bo'lishi uchun diskriminanati nol bo'lishi, ya'ni $(ay-c)^2-4(2y+\frac{\alpha^2}{4}-b)(y^2-d)=0$ bo'lishi zarur va yetarlidur. Hosil bo'lgan kubik tenglamaning kamida bitta haqiqiy ildizi bor. Agar bu ildiz y_0 bo'lib, uni topa olsak, to'rtinchi darajali tenglama

$$(x^2+\frac{\alpha}{2}x-y_0)^2-(\alpha x+\beta)^2=0$$

yoki

$$\left[x^2+\left(\frac{\alpha}{2}+2\right)x+(y_0+\beta)\right]\cdot\left[x^2+\left(\frac{\alpha}{2}+2\right)x-(y_0+\beta)\right]=0$$

ko'rinish oladi. Hosil bo'lgan ikki kvadrat tenglama yechilib, izlanayotgan to'rtta ildiz topiladi. Bu usul Kardano shogirdi A.Ferrari tomonidan ko'rsatilgan.

$x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$ tenglamani yechib ko'ramiz $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ formuladan foydalanib, $(x^2+x+y)^2-x^2-y^2-2x^2y-2xy-13x^2-38x-24=0$ ko'rinishga keltiramiz, chunki $(x^2+x+y)^2=x^4+x^2+y^2+2x^3+2x^2y+2xy$.

Demak, $(x^2+x+y)^2-\left[(2y+14)^2+2(y+19)x+(y^2+24)\right]=0$

Ayriluvchining diskriminanti $(y+19)^2-(2y+14)(y^2+24)=0$ bo‘lishi kerak. Soddalashtirib, $2y^3+13y^2+10y-25=0$.

Bu tenglamani $(y-1)(2y^2+15y+25)=0$ ko‘rinishda yozsak, $y_0=1$ deyish mumkinligi ko‘rinadi. U holda $(x^2+x+1)^2-[16x^2+40x+25]=0$, bundan $(x^2+x+1)^2-(4x-5)^2=0$ yoki $[x^2+5x+6]\left[x^2-3x-4\right]=0$ kvadrat tenglamalarni yechib $x_1=-1,\ x_2=4,\ x_3=-3,\ x_4=-2$ ekanligini topamiz.

Agar tenglama darajasi besh yoki undan katta bo‘lsa, bunday tenglama umumiy hollarda radikallarda yechilmaydi (Abel teoremasi).

2.2.§. Tenglama ratsiyonal ildizlarini topish. Viyet teoremasi

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ tenglamani qaraymiz.

Agar $\frac{p}{q}$ ratsional son ($p\epsilon Z,\ q\epsilon N$) berilgan tenglama ildizlari bo‘lsa,

$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_1+a_0=0$ ayniyat bo‘ladi. Undan

$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1p.q^{n-1}+a_0q^n=0$

Bu ayniyatdan quyidagi tenglamalarni yozish mumkin:

$a_np^n=-q\left[a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}\right]$,

$a_0p^n=-p\left[a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\ldots+a_1q^{n-1}\right]$ p va q qisqarmas ekanligidan, a_n ning q ga a_0 ning p ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Demak, quyidagi alomat o‘rinli ekan: Agar $\frac{p}{q}$ ratsiyonal son tenglama ildizi bo‘lsa, q soni a_n ning p soni a_0 ning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Xususan, $a_n=1$ bo‘lsa, ratsiyonal ildizlar a_0 ning bo‘luvchilari bo‘lishi mumkin, xolos.

1) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$ tenglamada $a_n=1$, $a_0=-24$ bo‘lganligi uchun $\left\{\frac{p}{q}\right\}=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24\}$ O‘rniga qo‘yib tekshirishlar ildizlar $x_1=-1, x_2=-2, x_3=-3, x_4=4$ ekanligini ko‘rsatadi.

2) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$ tenglamada $a_n=24, a_0=6$ ekanligidan $p=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$ q={1,2,3,4,6,8,12,24}. va $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi kasrlardan $\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4}$ lar tenglama ildizlari bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, qolgan ikki ildiz yoki irratsiyonal sonlar, yoki qo‘shma kompleks sonlardir.

Agar $x^2+px+q=0$ tenglama ildizlari x_1 va x_2 bo‘lsa, $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$ tenglikdan $\begin{cases}x_1+x_2=-p\\ x_1\cdot x_2=q\end{cases}$

Viet teoremasi keltirib chiqarilgan edi.

Bu teorema yuqori darajali tenglamalar uchun qanday ko‘rinishda bo‘lishini tekshirib ko‘ramiz.

$x^3+a_0x^2+a_1x+a_2=0$ tenglama ildizlari x_1, x_2, x_3 bo‘lsa,

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$

tenglikdan Viet teoremasi $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-a_0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a_1\\ x_1x_2x_3=-a_2\end{cases}$ ko‘rinishida bo‘lishi kelib chiqadi.

$x^4+a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ uchun

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-a_0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_2+x_2x_4+x_3x_4=a_1 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4=-a_2 \\ x_1x_2x_3x_4=a_3 \end{cases}$$

bo‘lishi ravshan.

Umuman, $x^n+a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+...+a_{n-2}x+a_{n-1}=0$ tenglama uchun Viet tengliklari

$$\begin{cases} a_0=-(x_1+x_2+...+x_n) \\ a_1=x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_n+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n \\ a_2=-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}=(-1)^n x_1x_2....x_n \end{cases}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Masala. Tomonlari $x^3-ax^2+bx-c=0$ tenglama yechimlari bo‘lgan uchburchakka tashqi chizilgan doira yuzini toping.

Yechish. Tenglama yechimlari $x_1;x_2;x_3$ bo‘lsin. U holda Viet teoremasiga ko‘ra $x_1+x_2+x_3=a;\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b\ ;x_1x_2x_3=c$ bo‘ladi. Tashqi chizilgan aylana radiusi uchun $R=\frac{x_1+x_2+x_3}{4S_\Delta}$ formuladan foydalanamiz. $P=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}=\frac{a}{2}$ ekanligidagidan, Geron formulasiga ko‘ra

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)}=\sqrt{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-x_1\right)\left(\frac{a}{2}-x_2\right)\left(\frac{a}{2}-x_3\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{2}\left[\frac{a^3}{8}-(x_1+x_2+x_3)\frac{a^2}{4}+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\frac{a}{2}-x_1x_2x_3\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{2}\left[\frac{a^3}{8}-\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{2}-c\right]}=\frac{1}{4}\sqrt{a(4ab-a^3-8c)}.$$

U holda $R=\frac{c}{\sqrt{a(4ab-a^2-8c)}}$. Demak, tashqi chizilgan doira yuzi

$$S=\frac{\pi c^2}{\sqrt{a(4ab-a^2-8c)}}.$$

2.3.§. Ko‘phadlar. Algebra asosiy teoremasi, natijalari

Natural darajani $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ funksiya n-darajali ko‘phad deyiladi, bunda $a_n\neq 0,\ a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in R$

Ikki $P_n(x)$ va $Q_n(x)=b_nx^n+\ b_{n-1}x^n-1+\ldots+b_1x+b_0$ ko‘phdlarda $a_k=b_k\,(k=o\ldots n)$ bo‘lgandagina bu ko‘phadlar teng bo‘ladi.

Ko‘phadlar ustida ham amallar kiritish mumkin. Yig‘indi, ayirma, ko‘paytma yana ko‘phad bo‘ladi. Bo‘lish amalini ham sonlardagiga o‘xshab kiritiladi.

Ixtiyoriy $P(x)\ Q(x)$ ko‘phadlar uchun shunday $q(x),r(x)$ ko‘phad topish mumkinki

$P(x)=Q(x)\cdot q(x)+r(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lib, $r(x)$ darajasi $Q(x)$ ning darajasidan kichik bo‘ladi. $q(x)$ ko‘phad $P(x)$ ni $Q(x)$ ga bo‘lishdagi bo‘linma, $r(x)$ esa qoldiq deyiladi.

Agar $r(x)=0$ bo‘lsa, $P(x)$ ko‘phad $Q(x)$ ko‘phadga bo‘linadi deyiladi.

Biror a soni uchun $P(a)=0$ bo‘lsa, a soni $P(x)$ ko‘phadning ildizi deyiladi.

Teorema. $P(x)$ ko‘phadni $(x-a)$ ko‘phadga bo‘lishdagi qoldiq $P(a)$ ga teng bo‘ladi.

Isboti. Bo‘luvchi ko‘phad 1-darajali bo‘lganligi uchun, qoldiq 0-darajali ko‘phad, ya’ni o‘zgarmas son bo‘ladi, $r(x)=c$, U holda $P(x)=(x-a)q+c$ bo‘ladi va $x=a$ da $P(a)=c$.

Natija. (Bezu teoremasi): a son $P(x)$ ko‘phad ildizi bo‘lishi uchun $P(x)$ning $(x-a)$ ga bo‘linishi zarur va yetarli.

Agar $P(x)$ ko'phad $(x-a)$, $(x-a)^2,\dots,(x-a)^k$ larga qoldiqsiz bo'linsa, lekin $(x-a)^{k+1}$ ga bo'linmasa, a soni $P(x)$ ko'phadning k karrali ildizi deyiladi. Bu holda $P(x)=(x-a)^k Q(x)$ bo'lib, $Q(x)$ ko'phad $(x-a)$ ga bo'linmaydi.

Dastlab, $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\dots a_1x+a_0$ ko'phadni $Q(x)=x-\alpha$ ikkihadga bo'lishni qarab chiqamiz. Agar $P_n(x)=(x-2)q_{n-1}(x)+r$ bo'lsa,
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\dots a_1x+a_0=(x-\alpha)\left[b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\dots\dots+b_1x+b_0\right]+r$
tenglik bajarilishi zarur. Bir xil darajalar oldidagi koiffsiyentlarni tenglashtirib

$$\begin{cases} a_n=b_{n-1}\\ a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1}\\ a_{n-2}=b_{n-3}-\alpha b_{n-2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_1=b_0-\alpha b_1\\ a_0=r-\alpha b_0\end{cases} \text{yoki} \begin{cases} b_{n-1}=a_n\\ b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}\\ b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ b_0=a_1+\alpha b_1\\ r=a_0+\alpha b_0\end{cases}$$

noma'lum koeffitsiyentli $q_{n-1}(x)$ ko'phadni, r - qoldiqni topishimiz mumkin.

Yuqoridagi hisoblashlarni Gorner sxemasi deb ataladigan quyidagi jadval yordamida bajarish qulay

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_2	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_1	b_0	r

Masalan, $P_4(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ ko'phad ratsional ildizlarini Gorner sxemasi bo'yicha izlaymiz. $\frac{p}{q}=\pm1;\pm2;\pm3;\pm6$.

	1	-1	-7	1	6
-1	1	-2	-5	6	0
1	1	-1	-6	0	
-2	1	-3	-0		
3	1	0			

Demak $r=0$, $x^4-x^3-7x^2+x+6=(x+1)(x^3-2x^2-5x+6)$

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$, $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

Jadval $x^4-x^3-7x^2+x+6=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$ ekanligini ko'rsatadi. $P_4(x)$ ratsiyonal ildizlari $\pm1;-2$ ekan.

Dastlab quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Darajasi birdan kichik bolmagan ixtiyoriy ko'pxad kamida bitta, umuman aytganda kompleks ildizga ega.

Agar biror $P_n(x)$ ko'pxad qarasak, oldingi teoremaga kora, uning kamida bitta x_1 ildizi bor, ya'ni $P_n(x)=(x-x_1)\,P_{n-1}(x)$. O'z navbatida $n-1\geq1$ bo'lsa, $P_{n-1}(x)$ ham biror x_2 ildizga ega : $P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)P_{n-2}(x)$,...Bu jarayonni davom ettirib : $P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)$ tenglikka kelamiz. bunda $x_1,x_2,..x_n$ ildizlar orasida o'zaro tenglari (karralilari) bo'lishini hisob ga olsak, $P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k}{}_1(x-x_2)^{k}{}_2\dots\dots(x-x_n)^{k}{}_n$ bo'ladi, lekin, $k_1+k_2+\ldots+k_n=n$ natijada quyidagi teorema o'rinliligi kelib chiqadi.

Teorema (**algebraning asosiy teoremasi**). Ixtiyoriy n -darajali ko'pxad n ta ildizga ega.

Agar haqiqiy koeffitsiyentli $P_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ ko'phad $z=\alpha+\beta i$ kompleks ildizga ega bo'lsa, u holda $z=\alpha-\beta i$ ham ildiz bo'ladi.

Haqiqatan, $P_n(\alpha+\beta i)=0$ bo'lsa, $P_n(\alpha-\beta i)=0$ bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Natija. Agar $P_n(x)$ ko'phad darajasi n -toq bo'lsa, uning kamida bitta haqiqiy ildizi bor.

$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ nisbat ratsional kasr deyiladi. Agar m≥n bo'lsa noto'g'ri, m<n da esa to'g'ri kasr deyiladi.

Noto'g'ri kasr bo'lgan holda $Q_m(x)=P_n(x)\;q(x)+r(x)$ ekanligidan. $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$ kelib chiqadi, ya'ni suratni maxrajga bo'lish yordamida noto'g'ri kasr butun qismi alohida, to'g'ri kasr qismi alohida yoziladi.

Umumiylikka ziyon keltirmagan holda. $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ - to'g'ri kasr deb hisoblanishi mumkin ekan.

$X_i \in R$ uchun $(x-x_i)$ va $x^2-(z+\bar{z})x+z\cdot\bar{z}$ ko'rinishdagi $z,\bar{z}$ ildizli ikkihad keltirilmas haqiqiy ko'phadlar deyiladi.

$X^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}=x^2+px+q$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda $P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k}{}_1...(x-x_2)^{k}{}_r$ $(x^2+px+q)^{l}{}_1....(x^2+p_sx+q_s)^{l}{}_s$ ko'rinishda yoziladi, bunda $k_1+k_2+...+k_s+2(l_1+l_2+.....+l_s)=n$.

$\frac{A}{(x-x_i)^k}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ kasrlar sodda yoki elementar kasrlar deyiladi, bunda $x-x_i$, x^2+px+q- keltirilmas xaqiqiy ko'phadlar.

Teorema. Har qanday to'g'ri ratsional kasr 18 sooda kasrlar yigindisi ko'rinishidagi yagona yoyilmaga ega.

Agar, masalan, $P_n(x)=(x-a)^k...(x^2+px+q)^s...$ bo'lsa,

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q_m(x)}{(x-a)^k...(x^2+px+q)^s}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+...+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+px+q)^s}+...$$

yoyilmaga ega bo'ladi. Bu yerda A_i, B_i, C_i, $i\in N$ sonlar noma'lum sonlardir. Ularni aniqlash uchun tenglik umumiy maxrajga keltiriladi, suratlari tenglashtiriladi, so'ngra noma'lumning bir xil darajalari oldida koeffitsientlar tenglashtirilib nomalumlar soniga teng tenglamaga ega chiziqli sistemaga ega bo'lamiz. Sistema yechilib, aniqmas koeffitsientlar topiladi.

Bu metod aniqmas koeffitsientlar metodi deyiladi.

Misol. $\frac{4x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ kasrni sodda kasrlarga yoying.

$$\frac{4x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

Umumiy maxrajga keltirib, suratlarni tenglashtiramiz.

$$4x-2=A\left(x^3-x^2+x-1\right)+B\left(x^2+1\right)+C\left(x^3-2x^2+x\right)+D\left(x^2-2x+1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x^3\cdot 0&=A+C\\ x^2\cdot 0&=-A+B-2C+D\\ x\cdot 4&=A+C-2D\\ x^0-2&=-A+B+D \end{aligned}\right\}$$

Barcha tenglamalarni hadma-had qo'shsak, $2=2B$ kelib chiqadi, $B=1$.

Ikkinchi tenglamadan to'rtinchisini ayirsak, $2=-2C$ bo'ladi, $C=-1$. Demak, birinchi tenglamadan $A=1$. Uchunchi tenglamada $A+C=0$ ekanligidan $4=-2D$, bo'ladi, $D=-2$

Berilgan kasr sodda kasrlarga

$$\frac{4x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x+2}{x^2+1}$$

ko'rinishida yoyilar ekan.

2.4.§. Determinantlar, xossalari, hisoblash

$n\times n$ ta elementdan tuzilgan, kvadrat jadval ko'rinishidagi, ikki vertikal kesma orasiga olingan

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}...a_{1n}\\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}...a_{2n}\\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}...a_{3n}\\ ....\\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

ifoda n-tartibli determinant, $a_{i,j}\in R\ (i,j=\overline{1,n})$ sonlari esa determinant elementlari deyiladi.

Gorizantal qatorlar yo'llar (satrlar), vertikal qatorlar esa ustunlar deyiladi.

Birinchi indeksi i bo'lgan elementlar i -yo'l (satr) elementlari, ikkichi indeksi j bo'lgan elementlar esa j -ustun elementlari deyiladi.

Masalan, a_{34} element 3-yo'l (satr), 4-ustunda joylashgan. a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ joylashgan dioganal determinant bosh dioganali, ikkichi dioganal esa yordamchi dioganal deyiladi.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ifoda 2-tartibli determinant deyilib, qiymati $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ayirmaga teng hisoblanadi.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ifoda 3-tartibli determinant uning qiymati $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ songa teng deyiladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi,

+ −

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - (-2)\cdot 3 = 10,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4\cdot(-2)\cdot(-5) + (-3)\cdot 8\cdot 1 + 5\cdot 3\cdot(-7) - 5\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot(-5) -$$
$$-4\cdot 8\cdot(-7) = 40 - 24 - 105 + 10 - 45 + 224 = 100$$

n tartibli Δ determinantda a_{ij} element joylashgan yo'l va ustun o'chirilsa, $(n-1)$ tartibli determinant hosil bo'lib, uni a_{ij} minori deyiladi va M_{ij} harfi bilan belgilanadi.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ soni esa a_{ij} element algebraik to'ldiruvchisi deyiladi.

Masalan, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ bo'lsa,

$$A_{11} = (-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 3,\ A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6,\ A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

Kelgusida yo'l satr uchun o'rinli munosabatlarni ixtiyoriy qator uchun deb ataymiz.

Teorema. 1). Ixtiyoriy qator elemenlarini o'z algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi determinant qiymatiga teng.

2). Ixtiyoriy qator elementlari parallel qator elementlari algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi nolga teng.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{i,k},\ 0 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{s,s} \text{ bunda } s = 1\ldots n,\ \neq k$$

Isbot. Soddalik uchun isbotni 3-tartibli determinantlar uchun keltiramiz (3-yol elementlarini tanladik).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{31}\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\cdot(-1)^6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Masalan,

$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0,\ a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{33}=0$ tengliklarni ham shunday tekshirish mumkin.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot(4+2)=12$$

Natija 1. Determinant biror qatori barcha elementlari nol bo‘lsa, determinant qiymati nolga teng.

Natija 2. Agar determinantda bosh dioganal bir tarafida turgan elementlar nol bo‘lsa, determinant qiymati bosh dioganal elementlari ko‘paytmasiga teng.

Isboti yoyish teoremasidan kelib chiqadi.

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n}\\ 0 & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n}\\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{vmatrix} = d_{11}\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n}\\ 0 & d_{33} & \dots & d_{3n}\\ 0 & 0 & \dots & d_{4n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{vmatrix} = \dots = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$$

Determinant xossalarini 3-tartibli determinantlarda tushunishga harakat qilamiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+\alpha_1 & a_{22}+\alpha_2 & a_{23}+\alpha_3\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

berilgan bo’lsin.

1^0. Determinant biror satri unga mos ustun bilan almashtirilsa determinant qiymati o‘zgarmaydi, umuman, barcha yo‘llar mos ustunlar bilan almashtirilsa (transponerlansa) ham determinant qiymati o‘zgarmaydi.

2^0. Determinant ikki parallel qatori o‘rinlari almashtirilsa, determinant qiymati ishorasi o‘zgaradi.

Natija. Determinant ikki parallel qatori bir xil bo‘lsa, determinant qiymati nolga teng.

3^0. Determinant biror qatori o‘zgarmas k songa ko‘paytirilsa, uning qiymati ham k ga ko‘payadi.

Isboti. K songa ko‘paygan qator bo‘yicha yoyib, xossa o‘rinliligiga amin bo‘lamiz.

Natija. Determinant ikki parallel qatori o‘zaro proportsional bo‘lsa, determinant qiymati nolga teng.

$$4^0.\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+\alpha_1 & a_{22}+\alpha_2 & a_{23}+\alpha_3\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

Natija. Determinant biror qatori o‘zgarmas k songa ko‘paytirilib, o‘ziga parallel qator elementlariga qo‘shilsa va natijasi ular o‘rniga yozilsa, determinant qiymati o‘zgarmaydi.

Bu natijadan yuqori tartibli determinantlarni diogonal determinantga keltirishda foydalaniladi.

2.5.§. Matritsalar, xossalari. Matritsa rangi

m ta yo‘l va *n* ta ustunga joylashgan, m n ta elementli, to‘g‘ri burchakli jadval mxn o‘lchamli matritsa deyiladi va

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{Vmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

ko‘rinishda yoziladi. Determinantlardagi kabi a_{ij} element *i*-yo‘l, *j*-ustunda joylashgan elementdir.

Matritsani $A=\|a_{ij}\|_{i=1,m,j=n}$ ko‘rinishda ham belgilash mumkin.

m=n bo‘lsa, matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

Bosh dioganaldagi elementlardan boshqa elementlar noldan iborat bo‘lsa, matritsa dioganal matritsa deyiladi. Dioganal matritsa bosh dioganali elementlari 1 ga teng bo‘lsa, birlik matritsa deb ataluvchi

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & & & 1\end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

$A=\|a_{ij}\|$ Kvadrat matritsaga mos determinant $|A|$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar A matritsa uchun $|A|=0$ bo'lsa, A matritsa xos, $|A|\neq 0$bo'lsa, u holda A xosmas matritsa deyiladi.

Agar $\|a_{ij}\|$, $\|b_{ij}\|$ matritsalarda $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$bo'lsa, A va B matritsalar o'zaro teng deyiladi.

O'lchamlari bir xil $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$ matritsalar ustida amallar quyidagicha kiritiladi:

1. Qo'shish (ayirish). $A\pm B=\|a_{ij}+b_{ij}\|$

2. Songa ko'paytrish. $\lambda\in R$ soni uchun $\lambda\cdot A=\|\lambda a_{ij}\|$

Matritsani matritsaga ko'paytirish birinchi matritsa ustunlari soni ikkichi matritsa yo'llari soniga teng bo'lganda kiritiladi xolos.

$A\cdot B=C$ bo'lsa, C matritsa elementlari $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ qoida yordamida topiladi, boshqacha aytganda,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ b_{n1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1};\dots;a_{11}b_{1k}+a_{12}b_{2k}+\dots+a_{1n}b_{n1})$$

Misol: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3\end{pmatrix}$

Matritsalar berilgan. $2A$-$3B$, $A\cdot C$ ni toping.

1). $2A\text{-}3B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3 & 6 \\ 9 & 12 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$

2). $A\cdot C=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot1+3\cdot3 \\ 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot(-1) & 4\cdot0+5\cdot1+6\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 11 \\ 8 & 23\end{pmatrix}$$

Bu kiritilgan amallar quyidagi xossalarga ega :

$1^0.\ A+0=0+A=A$ $\qquad$ $5^0.\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

$2^0.\ A+B=B+A$ $\qquad$ $6^0.\ (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

$3^0.\ \lambda(\mu\cdot A)=(\lambda\mu)\cdot A$ $\qquad$ $7^0.\ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

$4^0.\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

Shunisi qiziqki, $A\cdot B\neq B\cdot A$ lekin $|A\cdot B|=|B\cdot A|=|A|\cdot|B|$

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & -3\end{pmatrix}$ bo'lsa, $|A|=3$, $|B|=-3$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -6 \\ 3 & -9\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & -7\end{pmatrix}$, $|A\cdot B|=|B\cdot A|=-5$

Natija. Bittasi xos matritsalar ko'paytmasi yana xos matritsa bo'ladi.

Faraz qilaylik, A-kvadrat matritsa bo'lsin, A matritsani n marta o'zini-o'ziga ko'paytirsak, $A^n=A\cdot A\cdot A\cdots A$hosil bo'ladi va quyidagi xossalarga ega: $A^0=E$, $A^1=A$, $A^m\cdot A^k=A^{m+k}$, $(A^m)^k=A^{mk}$

Eslatma. $A^n=0$ ekanligidan A=0 kelib chiqdi.

Matritsada yo'l va ustunlar o'rinlarini almashtirish transponirlash deyiladi va A^T ko'rinishda belgilanishi mumkin. Agar mxn o'lchovli bo'lsa, A^T nxm o'lchovli bo'ladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6\end{pmatrix}$

Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

$(A^T)^T=A$, $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $(A+B)^T=A^T+B^T$, $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

Ikki $n\times n$ o'lchamli A, B kvadrat matritsalar uchun $A\cdot B=B\cdot A=E$ bo'lsa, B matritsa A matritsaga teskari deyiladi va A^{-1} ko'rinishida belgilanadi.

Dastlab, $A=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ matritsa teskari $B=\begin{pmatrix} x & y\\ z & u\end{pmatrix}$ matritsani topamiz. $A\cdot B=E$ shartga ko'ra,

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Demak,

$$a_{11}x+a_{12}z=1,\quad a_{11}y+a_{12}u=0$$
$$a_{21}x+a_{22}z=0,\quad a_{21}y+a_{22}u=1.$$

Bu sistemalarni yechib,

$$x=\frac{A_{11}}{\Delta},\quad y=\frac{A_{21}}{\Delta},\quad z=\frac{A_{12}}{\Delta},\quad u=\frac{A_{22}}{\Delta}$$

ekanligini topamiz.

Bunda, $\Delta=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, A_{ij} lar esa a_{ij} - algebraik to'ldiruvchilari.

$$A=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta}\\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta}\end{pmatrix}$$

ko'rinishida bo'lar ekan.

Teorema. Har qanday xosmas $A=\|a_{ij}\|$ kvadrat matritsani teskarisi mavjud, yagona va

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta}\\ . & . & \dots & .\\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta}\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ . & . & \dots & .\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

bunda $\Delta=|A|$.

Isbot. $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ . & . & \dots & .\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\Delta}=$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Delta & \dots & 0\\ 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & \dots & \Delta\end{pmatrix}=E$$

$A^{-1}\cdot A$ ni ham E ga tengligini tekshirishimiz mumkin.

Agar A^{-1} dan farqli C ham teskari bo'lsa, ya'ni

$$AC=CA=E,\quad C\cdot A\cdot A^{-1}=C(A\cdot A^{-1})=CE=C,$$
$$CA\cdot A^{-1}=(CA)\cdot A^{-1}=E\cdot A^{-1}=A^{-1}$$

Bu tengliklardan $C=A^{-1}$ kelib chiqadi. $|A|=0$ bo'lsa, A^{-1} mavjud bo'lmasligi ravshan.

$|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$ dan $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ kelib chiqadi.

Misol. 1). $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ ga teskari matritsa toping.

$|A|=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ekanligidan teskari matritsa mavjud va yagona.

$A_{11}=\cos\alpha,\quad A_{21}=\sin\alpha,\quad A_{12}=-\sin\alpha,\quad A_{22}=\cos\alpha$ bo'lganligi uchun

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

2). $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ga teskari matritsa toping.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&-2\\-2&0&-2\\-2&-2&0\end{vmatrix}=-16$$

$$A_{11}=-4,\ A_{21}=-4,\ A_{31}=-4,\ A_{41}=-4$$

$$A_{12}=-4,\ A_{22}=-4,\ A_{32}=4,\ A_{42}=4$$

$$A_{13}=-4,\ A_{23}=4,\ A_{33}=-4,\ A_{43}=4$$

$$A_{14}=-4,\ A_{24}=4,\ A_{34}=4,\ A_{44}=-4.$$

Demak, $A^{-1}=\dfrac{1}{-16}\begin{pmatrix}-4&-4&-4&-4\\-4&-4&4&4\\-4&4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$

Biror mxn tartibli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaning k ta yo'li va k ustunini olib, $k\times k$ tartibli kvadrat matritsa tuzamiz. Bu kvadrat matritsa determinanti A matritsaning k tartibli minori deyiladi.

Bunday k tartibli minorlar bir nechta bo'lib, ular turli xil qiymat qabul qilishi mumkin. Ular orasida noldan farqli bo'lgan yuqori tartibli minorni topish muhimdir.

A matritsaning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibi uning rangi deyiladi va rangA ko'rinishda belgilanadi.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

rangini toping. $|1|=1,\ \begin{vmatrix}2&4\\3&1\end{vmatrix}=-10\neq 0,\ \begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&1&-1\end{vmatrix}=0$ bo'lganligi uchun rang A=2

Rang hisoblashda turli xil deteminantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun rang hisoblashning osonroq usullaridan birini keltiramiz.

Berilgan matritsada

1). Ikki parallel qator o'rinlarini almashtirish,

2). Biror qatorni o'zgarmas songa ko'paytirish,

3). Biror qatorga o'zgarmas songa ko'paytirilgan boshqa parallel qatorni qo'shish.

shu matritsaning elementar almashtirishlari deyiladi.

Elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Demak, matritsa dioganal ko'rinishga keltiriladi va rangi oson topiladi.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$$

matritsaning rangini toping.

Dastlab, 1-yo'lni (-1) ga ko'paytrib 4-yo'lga, (-3) ga ko'paytrib 2, 3–yo'llarga qoshamiz:

$$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&1&3&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}$$

2–yo'lini (-1) ga ko'paytrib, 3, 4-yo'llarga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

3-yo'lini (-1) ga ko'paytrib, 4- yo'lga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Bu matritsaning noldan farqli eng katta minorlaridan biri

$$\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

bo'ladi va $|A| = 0$ ekanligidan rang A=3

2.6-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi

n ta $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ noma'lumli, chiziqli, n ta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad a_{ij}, b_j \in R$$

tenglamalar sistemasini yechish usullari, yechimi qanday bo'lishi masalalarini qaraymiz.

Kramer formulasi.

Noma'lumlar koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant tenglamalar sisremasining asosiy determinanti, undagi j-ustun o'rniga ozod b_i hadlardan iborat ustun qo'yilgan determinant esa j-yordamchi determinant deyiladi va Δ_j ko'rinishida belgilanadi.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j-1} b_1 \, a_{1j+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2j-1} b_2 \, a_{2j+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj-1} b_n \, a_{nj+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dastlab, berilgan tenglamalar sistemasidan har bir i-tenglamani A_{i1} ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + ... + a_{n2}A_{n1})x_2 + ... +$$
$$+(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + ... + a_{nn}A_{n1})x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1}$$

Determinantni yoyish haqidagi teoremaga ko'ra: $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ Endi sistamadagi har bir i-tenglama A_{i2} ga ko'paytirilib qo'shilsa, $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2, ..., A_{in}$ ga ko'paytirib qo'shilsa, $\Delta x_n = \Delta_n$ tenglik hosil bo'ladi.

Demak, sistemadagi noma'lumlar $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ formula yordamida hisoblanar ekan. Bu Kramer formulasidir.

$\Delta \cdot x_j = \Delta_j$ tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:

1) $\Delta \neq 0$ da sistema yagona yechimga ega, uni birgalikda deyiladi.

2) $\Delta = 0, \Delta_j = 0$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

3) $\Delta = 0, \Delta_j$ lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, sistema yechimga ega emas.

Misol. Kramer formulasi yordamida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\1&2&-2&-4\\2&1&5&1\\4&3&0&-4\end{vmatrix}=9,\qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\1&2&3&-2\\2&1&-1&5\\4&3&2&0\end{vmatrix}=12$$

bo‘lganligi uchun $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$

Matritsaviy usulda yechish

Berilgan tenglamalar sistemasini matritsaviy

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$$

yoki $A\cdot X=B$ ko‘rinishida yozish mumkin.

Agar $|A|\neq 0$ bo‘lsa, A^{-1}matritsa mavjud va yagona bo‘lishidan $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ yoki $X=A^{-1}\cdot B$

Nomalumlardan iborat X-ustun matritsani bunday topish matritsaviy usul deyiladi.

Misol. Yuqoridagi sistemani shu usulda qayta +9

$|A|=\Delta=3$ ekanligini hisoblaganmiz.

$$A=\begin{vmatrix}1&1&1&-1\\1&2&3&-4\\2&1&-1&1\\4&3&2&-4\end{vmatrix}$$

matritsaga teskari A^{-1} ni topamiz.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&3&-4\\1&-1&1\\3&2&-4\end{vmatrix}=5,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\3&2&-4\end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&-4\\3&2&-4\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&-4\\2&-1&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&3&-4\\2&-1&1\\4&2&-4\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\4&2&-4\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&3&-4\\4&2&-4\end{vmatrix}=6,\quad A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&3&-4\\2&-1&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2&-4\\2&1&1\\4&3&-4\end{vmatrix}=9,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\3&3&-4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-4\\4&3&-4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{43}=-\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-4\\2&1&1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\4&3&2\end{vmatrix}=5,\quad A_{24}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\4&3&2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{34}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\4&3&2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{44}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&1&-1\end{vmatrix}=-1$$

$$\text{Demak, } A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}5&-4&-3&2\\-6&6&6&-3\\9&-3&-3&-2\\5&-1&0&-1\end{vmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-4&-3&2\\-6&6&6&-3\\9&-3&-3&-2\\5&-1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\5\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\9\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$

$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$ ya’ni

Noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish (Gauss) usuli

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlari orqali quyidagi jadvalni tuzib olamiz.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & \dots & a_{3n} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Bu jadval berilgan sistema kengaytirilgan matritsasi deyiladi.

Tushunarliki, har bir satrda bittadan tenglama turibdi, faqat tenglik o'rniga chiziqcha tortilgan.

Bu matritsa ustida o'tkaziladigan har bir elementar almashtirish berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil qiladi. Shu sababli, elementar almashtirishlar yordamida kengaytirilgan matritsani uchburchak ko'rinishiga keltirib olamiz, buning uchun $a_{11} \neq 0$ bo'lishi kifoya agar $a_{11} = 0$ bo'lsa, birinchi tenglamani boshqa yo'ldagi tenglama bilan almashtirish orqali bunga erishish mumkin.

Faraz qilaylik, elementar almashtirishlar yordamida kengaytirilgan matritsa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} & C_2 \\ 0 & 0 & C_{33} & \dots & C_{3n} & C_3 \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{nn} & C_n \end{array}\right)$$

ko'rinishga kelsin.

Unga mos sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ C_{22}x_2 + C_{23}x_3 + \dots + C_{2n}x_n = C_2 \\ C_{33}x_3 + \dots + C_{3n}x_n = C_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_{nn}x_n = C_n \end{cases}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Bu sistemadan dastlab x_n, so'ngra x_{n},...., va nihoyat x_1 topiladi.

Bu usulda 2-tenglamadan x_1, ni 3-tenglamadan x_1 va x_2,..., n – tenglamadan $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ketma - ket yo'qotilayotganligi uchun

noma'lumlarni ketma - ket yo'qotish usuli deyiladi. Bu usul Gauss nomi bilan bog'liq bo'lib, talabalarga elementar matematikadan ma'lum.

Misol. Avvalgi usullarda yechilgan sistemani qaraylik. Uning kengaytirilgan matritsasi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

ko'rinishda bo'ladi. 1- yo'l elementlarini (-1) ga ko'paytirib 2-yo'lga (-2) ga ko'paytirib 3-yo'lga, (-4) ga ko'paytirib 4- yo'lga qo'shamiz, natijada, kengaytirilgan matritsa.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

ko'nishiga keladi. 2-yo'lni 3, 4-yo'l elemetlariga qo'shamiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right)$$

Bu matritsaga mos sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ -x_3 = -3 \\ -3x_4 = -12 \end{cases}$$

ko'rinishida bo'ladi. Ketma-ket $x_4 = 4$, $x_3 = 3$ larni topib 2-tenglamaga qo'yamiz.

$x_2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -4$

Bu yerdan $x_2 = 2$ ekanligini topib, 1-tenglamaga o'tamiz.

$x_1 + 2 + 3 - 4 = 2$ Demak, $x_1 = 1$.

Bir jinsli sistemalar

Agar qaralayotgan chiziqli tenglamalar sistemasida barcha ozod hadlar nol bo‘lsa $b_i = 0, \quad (i = \overline{1,n})$ bunday sistema bir jinsli deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Bu holda $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ sonlar har bir tenglamani qanoatlantirib, sistemaning trivial yechimi deyiladi.

Bir jinsli sistemaning trivial bo‘lmagan notrivial yechimlarini qidiramiz.

Kramer formulasiga ko‘ra $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \ldots = \Delta_n = 0$ Notrivial yechim mavjud bo‘lishi uchun $\Delta = 0$ bo‘lishi zarur. Unda sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Notrivial yechimlarni topish uchun sistema uchburchak ko‘rinishga keltiriladi.

$\Delta = 0$ ekanligidan sistema oxirgi tenglamasida ikki noma'lum qoladi. Ulardan birini ozod parametr deb olib, qolgan noma'lumlarni u orqali yoziladi.

Parametr cheksiz ko‘p qiymat qabul qilgani uchun notrivial cheksiz ko‘p yechimlarni topamiz.

Misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema notrivial yechimlari topilsin

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lgani uchun trivial bo‘lmagan yechimlar mavjud.

Sistemaning oxirgi tengligi $-7x_2 + 2x_3 = 0$ ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $x_3 = 7\lambda$ desak, $x_2 = 2\lambda$ bo‘ladi. Ularni birinchi tenglamaga qo‘yib: $2x_1 + 2\lambda - 4\cdot 7\lambda = 0$ va $x_2 = 13\lambda$

Demak, $(13\lambda, 2\lambda, 7\lambda), \quad \lambda \in R$ ko‘rinishdagi uchlik sistemaning yechimidir. Bu yechimlar oilasi trivial yechim (0; 0; 0) ni o‘zida saqlaydi.

Shu paytgacha qaralgan sistemalarda noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng edi. Umuman,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad m \neq n$$

sistemalarni ham qarash mumkin. Bunday sistemalar birgalikda bo‘lishi asosiy va kengaytirilgan quyidagi matritsalar rangiga bog‘liq bo‘ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}b_2 \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

Teorema. (Kroneker-Kopelli): Tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun A va $\overline{A}$ matritsalar ranglari teng $\text{rang}A = \text{rang}\,\overline{A}$ bo‘lishi zarur.

Misollar.

1. $x^3 + 2x - 3 = 0$ uchun $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ hisoblang.

2. $x^3 - x^2 - 4x = 0$ uchun $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$ ni hisoblang.

3. Agar x_1, x_2, x_3 lar $x^3 + px + q = 0$ yechimlari bo‘lsa, quyidagilarni toping.

1) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}$

2) $x_1^4x_2^2 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^4x_3^2 + x_3^4x_1^2 + x_3^2x_1^4$

3) $(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_2^3 - x_2x_1)$

4) $(x_1+x_2)^4(x_1+x_3)^4(x_2+x_3)^4$

4.Ildizlarini topig.

1) $2x^3-5x^2 8x-3=0$ 2). $x^4+1=0$

3) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$

4). $x^3-5x^2+28=0$

5) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24=0$

6) $x^3-6x^2+15x-14=0$

7) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$

5. Sodda kasrlarga yoying.

1) $\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$ 2) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 3) $\dfrac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$

4) $\dfrac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$ 5) $\dfrac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}$

6. Hisoblang:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

7.Nollari ko'p qator elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

1) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$

8.Tenglamalarni yeching:

1) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$ 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0;$

3) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$

9.Determinant xossalaridan foydalanib hisoblang:

1) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A\cdot B-2C$ ni hisoblang.

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $(i+1)\cdot A+(i-1)\cdot B$ ni hisoblang.

12. Hisoblang.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^2$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, 3) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$

13. Quyidagi matritsalarga teskari matritsani toping.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

14. Matritsaviy tenglamalarni yeching.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $x\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot x\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot x=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

15. Matritsa rangini hisoblang.

$$1)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

16. Tenglamalar sistemalarini 1) Kramer formulasi 2) Matritsaviy 3) Gauss usullarida yeching.

$$1)\ 1)\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x-5y=40 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} 5x+2y=4 \\ 7x+4y=8 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$$

17. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

$$1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_1+5x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4=0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_3+2x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

3- BOB. ANALITIK GEOMETRIYA

3.1.§. Koordinatalar sistemalari va analitik geometriya sodda masalalari

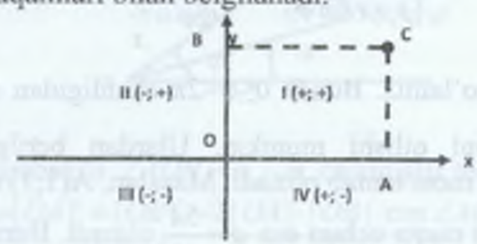
Bitta boshlang'ich nuqtasi 0 ga, bir xil masshtab birligigia ega ikki perpendikulyar Ox, Oy o'qlari tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini (yoki Dekart koordinatalar sistemasi) tashkil etadi.

Ox o'qi absitssa o'qi, Oy o'qi ordinata o'qi deyiladi, bu o'qlar birgalikda koordinata o'qlari deyiladi. O'qlar kesishgan O nuqta koordinata boshi deyiladi. O'qlar joylashgan tekislik koordinatalar tekisligi deyiladi va Oxy bilan belgilanadi.

Agar C tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa undan Ox va Oy o'qlari mos ravishda CA va CB perpendikulyarni tushuramiz.C nuqtaning Dekart koordinatalari deb OA,OB yo'naltirilgan kesmalar uzunliklariga aytiladi x=OA, y=OB.

x va y koordinatalar C nuqtaning absissasi va ordinatasi deyiladi, C(x,y) ko'rinishida yoziladi.

Koordinata o'qlari tekislikni to'rtta chorakka ajratadi, ular I, II, III, IV rim raqamlari bilan belgilanadi.



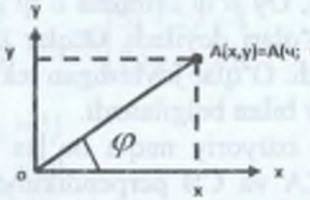
Endi qutb koordinatalar sistemasi deb ataluvchi koordinatalar sistemasi bilan tanishamiz.

Qutb deb ataluvchi O nuqta undan chiqarilgan boshlang'ich nurni qaraymiz. Agar tekislikda biror A nuqta berilsa boshlang'ich nurni soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi shunday burchakka buramiz, boshlang'ich nur A nuqtadan o'tsin. Qutb nuqta O dan A gacha masofa qutb radiusi deyiladi va r harfi bilan belgilanadi.

Boshlang'ich nur A dan o'tishi uchun burilgan burchak qutb burchagi deyiladi va φ harfi bilan belgilanishi mumkin. Bunda $0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi$. Agar qutb burchagi soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha olinsa, qutb burchagi manfiy hisoblanadi.

r va φ qutb koordinatalari deyiladi, $A(r;\varphi)$ tarzida yoziladi.

Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanishni topish uchun ikkala koordinatalar sistemalari boshini bitta nuqtaga qo'yamiz, boshlang'ich nurni absissa musbat yo'nalishi bo'yicha yo'naltramiz.

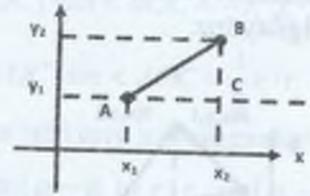


Tekislikda A nuqta x,y Dekart koordinatalariga va r,φ qutb koordinatalariga ega. OA gipotenuzali to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \text{ va } \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

formulaga ega bo'lamiz. Bunda $0 \le \varphi < 2\pi$ ekanligidan $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ ikki xil qiymat qabul qilishi mumkin. Ulardan berilgan nuqtani koordinatalariga mosi tanlab olinadi. Masalan, A(1;1) nuqta uchun $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, A (-1; -1) nuqta uchun esa $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ olinadi. Buni aniqlashda A(1;1) 1-chorakda, A(-1;-1) esa 3-chorakda joylashganligini bilish kifoya.

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa. Dastlab, tekislikda Dekart koordinatalari bilan berilgan $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani qaraymiz. Bu nuqtalardan son o'qlariga yordamchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazsak, to'g'ri burchakli ABC uchburchak hosil bo'ladi.



$|AC| = |x_2 - x_1|$, $|BC| = |y_2 - y_1|$ ekanligi Pifogor teoremasi yordamida

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

bo'lishini bildiradi, ya'ni $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

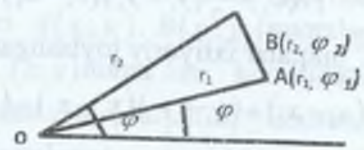
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

formula yordamida topiladi.

Masalan, $A(-5;2), B(3;-4)$ nuqtalar orasidagi masofa:

$$d = \sqrt{(3+5)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Endi qutb koordinatalar sistemasida berilgan $A(r_1;\varphi_1), B(r_2,\varphi_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz.



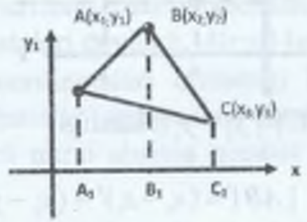
OAB chburchakda $\angle AOB = \varphi_2 - \varphi_1$, cosinuslar teoremasiga ko'ra: $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB$ ya'ni

$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Masalan, $A\left(5;\dfrac{\pi}{4}\right), B\left(8;\dfrac{\pi}{12}\right)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{25+64-40} = \sqrt{49} = 7.$$

Uchburchak yuzi. Dekart koordinatalar sistemasida, bir to'g'ri chiziqda yotmagan $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar absissalari (OX o'qiga proeksiyalari) ni OX o'qida A_1, B_1, C_1 deb belgilaymiz.



U holda $S_{\Delta ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{AA_1C_1A}$,

ekanligi aniq. Tenglik o'ng tomonidagi trapetsiyalar yuzalarini topamiz.

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{|A_1A| + |B_1B|}{2} \cdot |A_1B_1| = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1),$$

$$S_{BB_1C_1C} = \frac{|B_1B| + |C_1C|}{2} \cdot |B_1C_1| = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2),$$

$$S_{AA_1C_1A} = \frac{|A_1A| + |C_1C|}{2} \cdot |A_1C_1| = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1).$$

Demak, A, B, C nuqtalar ixtiyoriy joylashganligidan

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_3 - x_2) - (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)]|$, yoki $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]|$ formulani hosil qilamiz. Masalan uchlari $A(2;-1)$, $B(3;2)$, $C(-2;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |(3-2)(5+1) - (-2-2)(2+1)| = \frac{1}{2} \cdot |6+12| = 9(kv.b).$$

Qutb koordinatalar sitemasida, bir to'g'ri chiziqda yotmagan $A(r_1,\varphi_1), B(r_2,\varphi_2), C(r_3,\varphi_3)$ nuqtalarni qaraymiz. $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC}$ ekanligidan, ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \cdot \sin\angle OAB = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OC| \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2} r_2 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2),$$

$$S_{OAC} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OC| \sin\angle AOC = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Berilgan nuqtalar ixtiyoriy joylashganligini hisobga olib,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|r_1 \cdot r_2 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - r_1 \cdot r_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2)|$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xususan, uchburchak bir uchi qutb boshi O nuqtada bo'lsa,

$S_{OAB} = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \cdot |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|$ o'rinli bo'ladi. Masalan, uchlari $A\left(3;\frac{\pi}{8}\right), B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right), C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

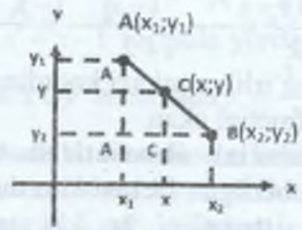
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|3 \cdot 8 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{8}\right) + 8 \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{7\pi}{24}\right) - 3 \cdot 6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|24 \cdot \sin\frac{\pi}{6} + 48 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - 18\sin\frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|12 + 24\sqrt{3} - 18\right| = 12\sqrt{3} - 3(kv.b).$$

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Dekart koordinatalar sistemasida uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ nuqtalarda bo'lgan kesma berilgan. Agar $C(x;y)$ noma'lum koordinatali nuqta berilgan kesma ichida yotsa va $|AC|:|CB| = \lambda$ nisbati ma'lum bo'lsa, C nuqta koordinatalarini topish masalasini qaraymiz. A, B, C nuqtalardan son o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

Uchta o'xshash uchburchak hosil bo'ladi:

$\Delta AA_2B \sim \Delta AA_1C \sim \Delta CC_1B$



Bu uchburchaklarda mos tomonlar nisbatlari tengligidan

$$\frac{|AA_1|}{|CC_1|}=\frac{|A_1C|}{|C_1B|}=\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda,$$

ya'ni $\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$ tengliklarni olamiz.

$x-x_1=\lambda x_2-x$ dan $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_1-y=\lambda y-\lambda y_2$ dan $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

formulaga ega bo'lamiz. Demak izlanayotgan nuqta

$C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ dir.

Xususan, $|AC|=|CB|$ bo'lsa, $x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$ bo'ladi

Misol sifatida uchlari bir to'g'ri chiziqda yotmagan $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak og'irlik markazi (mediYanalari kesishgan nuqta) koordinatalarini topamiz. BC kesma o'rtasidagi D nuqta uchun $D\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$ o'rinlidir.

Agar O nuqta mediyanalari kesishish nuqtasi bo'lsa, mediyanalar xossasiga ko'ra $|AO|:|OD|=2$ ya'ni $\lambda=2$ bo'ladi. U holda O nuqta koordinatalari A va D koordinatalari yordamida quyidagicha topiladi :

$$x=\frac{x_1+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Demak uchburchk og'irlik markazi koordinatalari uning uchlari koordinatalari o'rta arifmetigi ekan.

Dekart koordinatalarini almashtirish. Analitik geometriya masalalarini yechishda berilgan Dekart koordinatalar sistemasidan boshqa, yangi Dekart sistemasini, bu ikki sistema koordinatalari

bog'lanishini qarashga to'g'ri keladi. Unda koordinatalarni almashtirish formulalari hosil bo'ladi.

Dekart koordinatalarini almashtirishning ikki turini qarab chiqamiz.

O'qlarni parallel ko'chirish. OXY Dekart koordinatalar sistemasida koordinata boshi $O(0;0)$ nuqta biror $A(a;b)$ nuqtaga ko'chiriladi, son o'qlari yo'nalishi eskicha qoladi. Agar C nuqtaning eski va yangi sistemalaridagi koordinatalari $C(x;y), C(x';y')$, bo'lsa bu koordinatalar boglanishi $\begin{cases}x'=x-a\\ y'=y-b\end{cases}$

tarzida bo'lishi kelib chiqadi, aksincha $\begin{cases}x=x'+a\\ y=y'+b\end{cases}$ bog'lanishni ham yozish mumkin.

1) Parallel ko'chirishda $A(2;\ 4)$ nuqtalar koordinatalari $A'(4;\ 2)$ bo'lsa, parallel ko'chirish formulasini yozing.

$\begin{cases}x=x'+a\\ y=y'+b\end{cases}$ dan $\begin{cases}2=4+a\\ 4=2+b\end{cases}$ ya'ni $a=-2;\ b=2.$

Demak parallel ko'chirish formulasi $\begin{cases}x=x'-2\\ y=y'+2\end{cases}$ ko'rinishda bo'ladi.

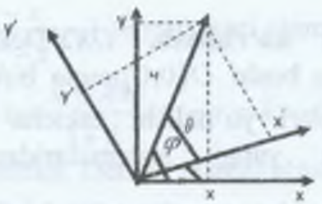
2) Parallel ko'chirish yordamida $y=\frac{2x+1}{x-1}$ funksiyani $y=\frac{k}{x}$ ko'rinishida yozing.

$y=\frac{2x-2+3}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$. Demak, $y-2=\frac{3}{x-1}$

Agar $y'=y-2, x'=x-1$ formula yordamida parallel ko'chirish o'tkazilsa, funksiya $x'Oy'$ sistemada $y'=\frac{3}{x'}$ ko'rinishda bo'ladi.

Son o'qlarini burish. Koordinata boshini o'z joyida qoldirib, son o'qlarini bir yo'nalishda biror α burchakka buramiz. Unda biror A nuqtaning eski Dekart (qutb) koordinatalari

$A(x;y)=A(r,\varphi)$ bo'lsa, yangisida $A(x';y')=A(r,\theta)$ bo'ladi chunki qutb va A nuqta orasidagi r masofa o'zgarmaydi.



Dekart va qutb koordinatalari bog'lanishidan

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x'=r\cos\theta \\ y'=r\sin\theta \end{cases}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

$\varphi=\theta+\alpha$ ekanligidan quyidagilar kelib chiqadi.

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cdot\cos\alpha-\sin\theta\cdot\sin\alpha)=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=r\sin\varphi=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\theta)=y'\cos\alpha+x'\sin\alpha \end{cases}$$

Agar $\theta=\varphi-\alpha$ desak, yangi koordinatalarni eskilari yordamida beriladigan

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y'=y\cos\alpha-x\sin\alpha \end{cases}$$

formulalarni ham hosil qilamiz.

Agar bir paytning o'zida koordinata boshi biror $O'(a,b)$ nuqtaga ko'chirilsa, son o'qlari biror α burchakka burilsa, yuqoridagi formulalar

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y\sin\alpha+a \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b \end{cases} \text{ va } \begin{matrix} x'=(x-a)\cos\alpha-(y-b)\sin\alpha \\ y'=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha \end{matrix}$$

ko'rinishida bo'ladi.

1) Son o'qlari $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ ga burilganda $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ koordinatalari topilsin.

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y'=y\cos\alpha-x\sin\alpha \end{cases}$$

formulalardan

$$\begin{cases} x'=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2 \\ y'=-\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \end{cases}$$

kelib chiqadi, ya'ni $A'(2;0)$

2) Koordinata boshi $O'(2;-2)$ nuqtaga ko'chirilib, son o'qlari $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ ga burilgandagi almashtirish formulalarini yozing.

$$\begin{cases} x=x'\cos\dfrac{\pi}{6}-y'\sin\dfrac{\pi}{6}+2 \\ y=y'\sin\dfrac{\pi}{6}+y'\cos\dfrac{\pi}{6}-2 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'-\dfrac{1}{2}y'+2 \\ y=\dfrac{1}{2}y'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'-2 \end{cases}$$

Tekislikda chiziq tenglamasi.

Tekislikda biror L-chiziq berilgan bo'lsin, uning ixtiyoriy nuqtasi C ikki koordinataga ega: $C(x;y)$. Agar $F(x,y)=0$ tenglamani L dagi har bir nuqta koordinatalari qanoatlantirsa va L da yotmagan nuqta koordinatalari tenglamani qanoatlantirmasa,bu tenglama L-chiziqning tenglamasi deyiladi.

Masalan, $x-y=0$ tenglamani I, III choraklar bissektirisasini ifodalovchi to'g'ri chiziq nuqtalari koordinatalari qanoatlantiradi xolos.Agar L-chiziq qutb ordinatalar sistemasida berilsa, mos ravishda, tenglama $F(r;\varphi)=0$ ko'rinishida bo'ladi. Masalan, $r=a\cos\varphi\ (a>0)$ tenglama radiusi $\dfrac{a}{2}$ ga teng bo'lgan aylanani bildiradi, chunki $A(a;0)$, $C(r;\varphi)$, $\angle OCA=90°$ ekanligidan unga yarim doira tiralganligini bildiradi.

Agar chiziq nuqta koordinatalari x va y biror t - parametrga bog'liq bo'lsa, u holda chiziq tenglamasi parametrik usulida berilgan deyiladi va $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ tarzida yoziladi.

Masalan, $x=\cos t, y=\sin t$ tenglama bilan berilgan chiziq markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 bo'lgan aylanadir, chunki $x^2+y^2=1$.

Biror to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida n-darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan chiziq n-tartibli algebraik chiziq deyiladi.

Algebraik chiziqlarga

$$ax+by+c=0,\ x^2+2Bxy+y^2+D+Ey+F=0$$

lar misol bo'la oladi. Noalgebraik tenglamalarga $y-\cos x=0$, $y-\log_a x=0$, $2^x-5^y+1=0$ lar misol bo'ladi; n-tartibli algebraik chiziqlar parallel ko'chirishda, o'qlarni biror α-burchakka burishda tartibini o'zgartirmaydi.

3.2.§. To'g'ri chiziq tenglamalari

Tekislikda birinchi tartibli chiziqlar-to'g'ri chiziqlardir. Bu bobda to'g'ri chiziqning tenglamalari, ular haqidagi asosiy masalalar o'rganiladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi $C(x;y)$ nuqtalar toplami to'g'ri chiziq hosil qilib, AB o'rta perpendikulyari hisoblanadi. $|AC|=|CB|$ tenglikdan

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

ga ega bo'lamiz. Tomonlarini kvadratga oshirib, qavslarni ochamiz:

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$$

o'xshash hadlarni ixchamlab,

$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

Agar

$$A=2(x_2-x_1), B=2(y_2-y_1) C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$$

belgilashlar keltirsak, tenglama

$$Ax+By+C=0$$

ko'rinish oladi. Bu tenglama to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi deyiladi.

Masalan, $P(4;1)$, $Q(-1;2)$ nuqtalardan bir xil masofoda yotuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2},$$

$$x^2-8x+16+16+y^2-2y+1+y^2-4y+4$$

o'xshash hadlarni ixchamlab, $10x-2y-12=0$ yoki $5x-y-6=0$ tengamaga egamiz.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasidagi A, B, C sonlari tenglama koeffitsiyentlari deyilib, quyidagicha hususiy hollar bo'lishi mumkin:

1°. $A\neq 0, B\neq 0, C=0$. Bu holda tenglama $Ax+By=0$ ko'rinish olib, koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ladi, chunki, $O(0;0)$ nuqta tenglamani qanoatlantiradi.

2°. $A\neq 0, B=0, C\neq 0$. Bu holda tenglama $Ax+C=0$ bo'lib, uni $x=-\dfrac{C}{A}$ ko'rinishda yozish mumkin. Demak, absissa biror o'zgarmas songa teng, ordinata ixtiyoriy qiymat qabul qiladi. Bu to'g'ri chiziqning OY o'qiga paralelligini bildiradi.

3°. $A=0, B\neq 0, C\neq 0$. Bu holda $By+C=0$ hosil bo'lib, $y=-\dfrac{C}{B}$ tarzida yoziladi. To'g'ri chiziq OX o'qiga parallel.

4°. $A\neq 0, B=C=0$. Tenglama $Ax=0$ ko'rinishida bo'lib, $x=0$ tenglama kelib chiqadi va OY o'qini ifodalayi.

5°. $B\neq 0, A=C=0$. Bu holda $y=0$ kelib chiqadi va bu tenglama OX o'qini bildiradi.

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

Dekart koordinatalar sistemasida ordinatalar o‘qidan $O(0;0)$ dan hisoblanganda uzunligi b ga teng kesma ajratadigan, absissa o‘qi bilan α burchak hosil qiluvchi to‘ri chiziqni qaraymiz. To‘g‘ri chiziq ixtiyoriy $C(x;y)$ nuqtasini olamiz.

Hosil bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $\frac{y-b}{x}=tg\alpha$ ekanligini topamiz. Bu tenglamadagi $tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi va k bilan belgilanadi:

$$k=tg\alpha$$

To‘g‘ri chiziq tenglamasi $\frac{y-b}{x}=k$ ko‘rinish oladi. Undan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deb ataluvchi

$$y=kx+b$$

tenglamani olamiz.

To‘g‘ri chiziq holati k va b koeffitsiyentlari bilan to‘la aniqlanadi.To‘g‘ri chiziq umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasidan burchak koeffisentlisiga o‘tish uchun bu tenglamani y ga nisbatan yechish kifoya.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Bunda $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ belgilashlar kiritilsa, tenglama $y=kx+b$ ko‘rinishga keladi.

Ma’lumki, $y=kx+b$ funksiya chiziqli deyilar edi. Demak, chiziqli funksiya grafigi to‘g‘ri chiziq bo‘lar ekan. b=0 bo‘lsa $y=kx$ hosil bo‘lib, x va y o‘zaro proporsiyanal, k – esa proporsiyanallik koeffitsiyenti deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. Tekislida absissa o‘qidan $a=OA$, ordinata o‘qidan $b=OB$ kesmalar ajratadigan to‘g‘ri chiziqni qaraymiz. To‘g‘ri chiziq ixtiyoriy $C(x;y)$ nuqta absissasini A_1, ordinatasini B_1 bilan belgilasak, uchta o‘xshash uchburchak hosil bo‘ladi: $\Delta AOB\sim\Delta AA_1C\sim\Delta CB_1B$, ya’ni

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1B}$$

Demak, $\frac{a}{b}=\frac{a-x}{y}=\frac{x}{y-b}$.

Bu tengliklarning birortasini soddalashtirsak,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{3}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasini koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar uchun yozib bo‘lmaydi, chunki ular son o‘qlaridan kesmalar ajratmaydi.

$Ax+By+C=0$ $(C\neq 0)$ tenglamadan kesmalar bo‘yicha tenglamaga o‘tish uchun $Ax+By=-C$ tarzida yozib,tomonlarni $(-C)$ ga bo‘lib yuboriladi:

$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1, a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$ belgilash kiritsak, tenglama $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ko‘rinishga keladi.

Masalan, $3x-4y-12=0$ to‘g‘ri chiziq kesmalar bo‘yicha tenglamasi $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$ ko‘rinishida bo‘lib, absissa o‘qidan musbat yo‘nalishda 4 ga teng kesma, ordinatalar o‘qida manfiy yo‘nalish bo‘yicha 3 ga teng kesmalar ajratar ekan **To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.** Tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni qaraylik. Koordinata boshidan bu to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan normal deb ataluvchi, perpendikulyar uzunligi p,normal bilan absissa musbat yo‘nalishi orasidagi burchak $\alpha\left(\alpha\neq 0,\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$ bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqda biror $C(x;y)$ nuqta olib uning absissasidagi proyeksiyasini C_1 deb belgilaymiz. $\angle AON=\angle ACC_1=\angle ABO=\alpha$ ekanligi $\Delta AON, \Delta ACC_1$ ΔABO uchburchaklar to‘g‘ri burchakli o'xshash ekanligini bildiradi: $OB=\dfrac{P}{\sin\alpha}$, $OA=\dfrac{P}{\cos\alpha}$ tengliklarni hisobga olib: $\dfrac{y}{\dfrac{p}{\sin\alpha}}=\dfrac{\dfrac{p}{\cos\alpha}-x}{\dfrac{p}{\cos\alpha}}$ munosabatga ega bo'lamiz. Uni soddalashtirib, normal tenglama deb ataluvchi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

tenglamani keltirib chiqaramiz.

Bu tenglamani $a=\dfrac{P}{\cos\alpha}$, $b=\dfrac{P}{\sin\alpha}$ kesmalar bo'yicha ham keltirib chiqarish mumkin. Normal tenglamadagi p soni to'g'ri chiziqning markazdan qancha masofada o'tganligini bildiradi.

To'g'ri chiziqning umumiy $Ax+By+C=0$ tenglamasini normal tenglamaga keltirish masalasini ko'raylik.

$\mu\neq0$ normallovchi ko'paytuvchi bo'lsa, $\mu Ax+\mu By+\mu C=0$ normal tenglama bo'ladi, ya'ni $\mu A=\cos\alpha$, $\mu B=\sin\alpha$, $\mu C=-p$.

$(\mu A)^2+(\mu B)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ munosabatdan $\mu^2=\dfrac{1}{A^2+B^2}$ yoki $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $Ax+By+C=0$ tenglama $\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$ normal ko'rinishga keladi. p soni oldida manfiy ishora hosil qilishi uchun μ ning ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi.

Masalan, $6x-8y+5=0$ tenglama normallovchi ko'paytuvchisi $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\pm\dfrac{1}{10}$, $C=5$ ekanligidan $\mu=-\dfrac{1}{10}$ oilinishi, normal tenglama esa $-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{1}{2}=0$ bo'lishi kelib chiqadi.

To'g'ri chiziqning qutb koordinatalardagi tenglamasi. Qutb koordinatalar sistemasida biror to'g'ri chiziq, qutbdan unga tushirilgan, normal deb ataluvchi, uzunligi p ga teng

perpendikulyar va unga mos qutb burchagi α berilgan bo'lsin. Normal va to'g'ri chiziq kesishgan nuqtani A deb belgilaymiz.

To'g'ri chiziq ixtiyoriy $C(r;\varphi)$ nuqtasini qaraymiz. To'g'ri burchakli OAC uchburchakdagi $\dfrac{p}{r}=\cos(\alpha-\varphi)$ munosabatdan, to'g'ri chiziq tenglamasi

$$r=\frac{p}{\cos(\alpha-\varphi)} \quad \text{yoki} \quad r=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

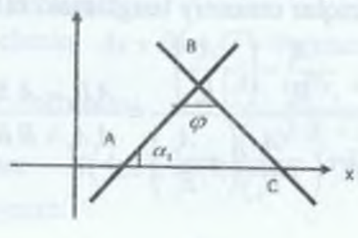
ko'rinishida bo'lishi kelib chiqadi.

Bu tenglamani normal tenglamadan $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ almashtirishlar yordamida ham topish mumkin. Unda $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ tenglama $r\cos\varphi\cos\alpha+r\sin\varphi\sin\alpha-p=0$ ko'rinish oladi va $r=\dfrac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$ tenglamaga ega bo'lmiz.

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi. Bazi hollarda to'g'ri chiziq ixtiyoriy nuqtasi koordinatalari biror λ parametrga bog'liq bo'lib qoladi: $\begin{cases} x=m\lambda+x_0 \\ y=n\lambda+y_0 \end{cases}$

Bunday tenglamadan avvalgi tenglamalarni hosil qilish uchun, dastlab, λ lar topiladi, $\lambda=\dfrac{x-x_0}{m}$, $\lambda=\dfrac{y-y_0}{n}$ so'ngra ular tenglashtirilib, λ parametr yo'qotiladi: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Tekislikda ikki $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchakni topish masalasini ko'ramiz, bunda $k_1=tg\alpha_1$; $k_2=tg\alpha_2$.



Uchburchak tashqi burchagi xossasidan: $\alpha_2=\varphi+\alpha_1$.

Izlanayotgan burchak $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ burchakni esa burchak koeffisentlari orqali topish qulay:

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

Berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni topish uchun $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ ko'rinishida yozish kifoya.

Masalan, $y=-2x$ va $y=3x-4$ to'g'ri chiziqlar uchun $tg\varphi=\frac{3-(-2)}{1+(-2)\cdot 3}=-1$, demak ular orasidagi o'tmas burchak $\frac{3\pi}{4}$ ga, o'tkir burchak esa $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

1. Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ bo'lib $k_2=k_1$ kelib chiqadi. Demak, to'g'ri chiziqlar parallellik sharti $k_2=k_1$ dir.

2. To'g'ri chiziqlar o'zara perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $tg\frac{\pi}{2}=\infty$, $1+k_2k_1=0$ shart kelib chiqadi. Demak, to'g'ri chiziqlar perpendikulyarlik sharti $k_2=-\frac{1}{k_1}$ dir.

Agar to'g'ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ formulalar bilan berilsa, ularni y ga nisbatan yechib $k_1=-\frac{A_1}{B_1}$, $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ bo'lishini topamiz.

Demak, to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamasi bilan berilsa,

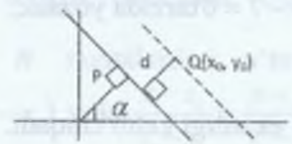
$$tg\varphi=\frac{-\frac{A_2}{B_2}-\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

formulaga ega bo'lamiz. Unda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi uchun $A_1B_2-A_2B_1=0$, ya'ni $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ bo'lishi, perpendikulyar bo'lishi uchun esa $A_1A_2+B_1B_2=0$ bo'lishi kerak.

1) $y=2x-5$, $y=2x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+5$ to'g'ri chiziqlarning dastlabki ikkitasi parallel, uchinchisi ularga perpendikulyardir.

2) $2x-3y+5=0$, $4x-6y+1=0$, $3x+2y+5=0$, to'g'ri chiziqlarning dastlabki ikkitasi parallel, uchunchisi ularga perpendikulyardir.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Normal tenglamasi bilan berilgan $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ to'g'ri chiziq va unda yotmagan biror $Q(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. $Q(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan d masofani topish masalasini qaraymiz. $Q(x_0;y_0)$ dan o'tib, $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ parallel to'g'ri chiziqni $x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0$ tenglama bilan beriladi, bunda $q=p+d$, lekin $q=x_0\cos\alpha+y\sin\alpha-p$ ekanligidan



$$d=q-p=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p$$

kelib chiqadi. Agar $q<p$ bo'lsa $d=p-q$ bo'lishini hisobga olsak,

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$$

formulaga ega bo'lamiz.

Agar to'g'ri chiziq $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasi bilan berilsa, masofa formulasi $d=\frac{|Ax_0+By_0+C=0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ko'rinishida bo'ladi. Masalan, $A(4;2)$, $B(1;1)$ dan $3x-4y-4=0$ gacha masofani hisoblaymiz.

Uchburchak tashqi burchagi xossasidan: $\alpha_2=\varphi+\alpha_1$.

Izlanayotgan burchak $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ burchakni esa burchak koeffisentlari orqali topish qulay:

$$tg\varphi=tg\left(\alpha_2-\alpha_1\right)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$$

Berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni topish uchun $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$ ko'rinishida yozish kifoya.

Masalan, $y=-2x$ va $y=3x-4$ to'g'ri chiziqlar uchun $tg\varphi=\frac{3-(-2)}{1+(-2)\cdot 3}=-1$, demak ular orasidagi o'tmas burchak $\frac{3\pi}{4}$ ga, o'tkir burchak esa $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

1. Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ bo'lib $k_2=k_1$ kelib chiqadi. Demak, to'g'ri chiziqlar parallellik sharti $k_2=k_1$ dir.
2. To'g'ri chiziqlar o'zara perpendikulyar bo'lsa, $\varphi=\frac{\pi}{2}, tg\frac{\pi}{2}=\infty$, $1+k_2k_1=0$ shart kelib chiqadi. Demak, to'g'ri chiziqlar perpendikulyarlik sharti $k_2=-\frac{1}{k_1}$ dir.

Agar to'g'ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ formulalar bilan berilsa, ularni y ga nisbatan yechib $k_1=-\frac{A_1}{B_1}, k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ bo'lishini topamiz.

Demak, to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamasi bilan berilsa,

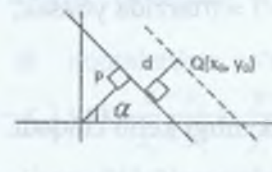
$$tg\varphi=\frac{-\frac{A_2}{B_2}-\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1+\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

formulaga ega bo'lamiz. Unda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi uchun $A_1B_2-A_2B_1=0$, ya'ni $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ bo'lishi, perpendikulyar bo'lishi uchun esa $A_1A_2+B_1B_2=0$ bo'lishi kerak.

1) $y=2x-5$, $y=2x+1$, $y=-\frac{1}{2}x+5$ to'g'ri chiziqlarning dastlabki ikkitasi parallel, uchinchisi ularga perpendikulyardir.

2) $2x-3y+5=0$, $4x-6y+1=0$, $3x+2y+5=0$, to'g'ri chiziqlarning dastlabki ikkitasi parallel, uchunchisi ularga perpendikulyardir.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Normal tenglamasi bilan berilgan $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ to'g'ri chiziq va unda yotmagan biror $Q(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. $Q(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan d masofani topish masalasini qaraymiz. $Q(x_0;y_0)$ dan o'tib, $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ parallel to'g'ri chiziqni $x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0$ tenglama bilan beriladi, bunda $q=p+d$, lekin $q=x_0\cos\alpha+y\sin\alpha-p$ ekanligidan



$$d=q-p=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p$$

kelib chiqadi. Agar $q<p$ bo'lsa $d=p-q$ bo'lishini hisobga olsak,

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|$$

formulaga ega bo'lamiz.

Agar to'g'ri chiziq $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasi bilan berilsa, masofa formulasi $d=\frac{|Ax_0+By_0+C=0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ko'rinishida bo'ladi. Masalan, $A(4;2)$, $B(1;1)$ dan $3x-4y-4=0$ gacha masofani hisoblaymiz.

$$d_A=\frac{|3\cdot4-4\cdot2-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5|}{5}=1,\qquad d_B=\frac{|3\cdot -1\cdot -|4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-|}{5}=1$$

demak, A to'g'ri chiziqqa tegishli, B nuqta esa to'g'ri chiziqdan 1 birlik uzoqlikda joylashgan.

Normal tenglamasi bilan berilgan $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ va $x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa $d=|p-q|$ bo'lishi tushunarli. Agar to'g'ri chiziqlar $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, $\lambda x\cos\alpha+\lambda y\sin\alpha-q=0$ tenglamalar bilan berilsa, masofa $d=\left|p-\frac{q}{\lambda}\right|$ bo'ladi. Demak ikki parallel $A_1x+B_1y+C_1=0$, $\lambda A_1x+\lambda B_1y+C_1=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa $d=\left|\frac{C_1-\frac{C_2}{\lambda}}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ formula yordamida topiladi.

Masalan, $6x+8y+7=0$, $3x-4y-7=0$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel, ularni

$3x+4y+\frac{7}{2}=0$, $3x-4y-7=0$ tarzida yozsak,

$$d=\frac{\left|\frac{7}{2}+7\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{21}{10}=2{,}1$$ ekanligi kelib chiqadi.

Bazi hollarda birinchi tog'ri chiziqdan biror nuqta tanlab ikkinchisigacha masofani hisoblasa ham bo'ladi, masalan $C\left(0;\frac{7}{8}\right)$ nuqta birinchi to'g'ri chiziqqa tegishli, undan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha masofa esa

$$d=\frac{\left|3\cdot0-4\cdot\frac{7}{8}-7\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{\left|-\frac{7}{8}-7\right|}{5}=\frac{21}{10}=2{,}1.$$

Masofa formulasi yordamida ikki kesishuvchi $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ to'g'ri chiziq bissektrissalari tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Bissiktrissadagi ixtiyoriy $C(x;y)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha masofalar tengligidan $\frac{|A_1x+By_1+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|A_2x+By_2+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

yoki $\frac{|A_1x+By_1+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{|A_2x+By_2+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ kelib chiqadi.

Bitta va ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziq $y=kx+b$ tenglama bilan berilib, dastlab, uning bitta $A(x_0;y_0)$ nuqtasi ma'lum bo'lsin, demak, $y_0=kx_0+b$. Berilgan tenglamadan topilgan sonnli tenglikni ayirsak $y-y_0=k(x-x_0)$ tenglama hosil bo'ladi. U $A(x_0y_0)$ nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar tenglamasidir. Bu to'g'ri chiziqlar $A(x_0y_0)$ dan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi. Agar dastadagi biror to'g'ri chiziq $B(x_1;y_1)$ nuqtadan ham o'tsa $y-y_0=k(x-x_0)$ tenglik bajariladi. Undan $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ topiladi. Demak A va B nuqtalardan o'tuvchi chiziq tenglamasi $y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$ yoki $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ ko'rinishida bo'ladi.

Masalan, $A(2;-1)$ va $B(1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+1}{2-(-1)}$ yoki $y=-3x+5$ ko'rinishida bo'ladi.

Endi biror $C(x_1;y_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $y_1=kx_1+b$ to'g'ri chiziqqa parallel (perpendikulyar) tog'ri chiziq tenglamasi formulasini keltirib chiqaramiz.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq $C(x_1;y_1)$ dan o'tadi, demak, tenglamasi $y-y_1=k(x-x_1)$ ko'rinishda bo'ladi. Bundan tashqari, agar u $y_1=kx_1+b$ ga parallel (perpendikulyar) bo'lsa,

$k = k_1 \left(k = -\dfrac{1}{k_1} \right)$bo‘lib tenglamasi

$y - y_0 = k_1(x - x_0) \left[y - y_0 = -\dfrac{1}{k_1}(x - x_0) \right]$ko‘rinishida bo‘ladi.

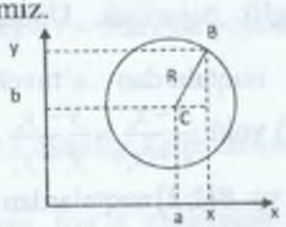
Masalan, $C(2;-1)$dan o‘tib $y = 4x + 3$ ga parallel (perpendikulyar) bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y + 1 = 4(x-2)\left[y + 1 = -\dfrac{1}{4}(x-2) \right]$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3.3.§. Ikkinchi tartibli chiziqlar

Ikkinchi tartibli chiziqlar (ITCH) aylana, ellips, giperbola, parobala ularning xossalari,ITCH lar umumiy tenglamasi va uni kanonik ko‘rinishiga keltirish o‘rganiladi.

Aylana tenglamasi. Markaz deb $C(a;b)$ nuqtadan bir xil Rmasofada yotuvchi nuqtalar to‘plami aylana deyiladi.

Aylana tenglamasini olish uchun aylananing ixtiyoriy $B(x;y)$nuqtasini qaraymiz.



Pifogor teoremasiga ko‘ra

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ aylana umumiy tenglamasini hosil qilamiz.

Agar aylana markazi koordinata boshi$O(0;0)$ bo‘lsa, tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Masalan, $x^2 - 4x + y^2 + 8y - 5 = 0$aylana markazi koordinatalari va radiusini topish uchun tenglamani $(x-2)^2 - 4 + (y+4)^2 - 16 - 5 = 0$ yoki $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 5^2$

ko‘rinishida yoziladi. Demak, aylana markazi C(2;-4) nuqtada va radiusi $R = 5$dir.

Ellips, kanonik tenglamasi, xossalari. Har bir nuqtasidan berilgan fokus deb ataluvchi ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarning yig‘indisi $|F_1F_2|$ dan katta o‘zgarmas $2a$soniga teng nuqtlar to‘plami ellips deyiladi.

Ellips tenglamasini keltirib chiqarish uchun fokus deb ataluvchi nuqtalarni absissa o‘qida koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylaymiz: $F_2(c;0)$, $F_1(-c;0)$ ya’ni $|F_1F_2| = 2c$

Agar $M(x;y)$ellips ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, $r_1 = |MF_1|$ va $r_2 = |MF_2|$ uzunliklar ellipsning fokal radiuslari deyiladi. Shartga ko‘ra $r_1 + r_2 = 2a$

$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ekanligidan ellips tenglamasi $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ ekanligini topamiz. Ellips bu tenglamasi ishlatish uchun noqulay, ikkinchi radikalni o‘ng tomanga o‘tkazib, tomonlarni kvadratga oshiramiz :

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$ yoki

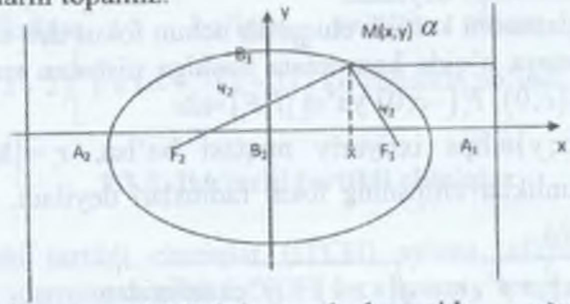
$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$.

Bu tenglamani ham kvadratiga oshirib, $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ yoki $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$ tenglamaga ega bo‘lamiz. $a > c$bo’lganligi uchun $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ belgilash kiritish mumkin.

Ellips tenglamasi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ko‘rinish oladi, bundan ellips kanonik tenglamasi deb ataluvchi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamani olamiz.

Bunda $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ ekanligini hisobga olsak, fokal radiuslari uchun

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}=a-\frac{cx}{a},$$
$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}=a-\frac{cx}{a}$$
formulalarni topamiz.



Koordinata tekisligining 1-choragida $y\ge 0$ bo'lib,ellips $y=\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}$ tenlama bilan beriladi. Unda quyidagilar kelib chiqadi:

1) $x=0$bo'lsa, $y=b$ Agar XOdan α gacha o'sadi, $y$kamayadi.

2) $x=a$bo'lsa, $y=0$

3) $x>a$ bo'lsa y aniqlanmagan.

Boshqa choraklarda ham simmetriklikdan ellipsni to'la chizishiniz mumkin, chunki koordinata boshi simmetriya markazidir. a va b kattaliklar ellipsning katta va kichik yarim o'qlari deyiladi. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ soni ellips ekssentrisiteti deyiladi. Ellipsda $0\le\varepsilon<1$bo'lib, $\varepsilon=0$ da aylana hosil bo'ladi.

$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar direktrisalar deyiladi.

Agar ellips $M(x;y)$ nuqtasidan biror dirikrisagacha masofa d unga mos fokal radius r bo'lsa, $\varepsilon=\frac{r}{d}$bo'ladi haqiqatdan $d=\frac{a}{E}-x$, $r=a-\varepsilon x$ ekanligi buni tasdiqlaydi.

Ma'lumki planetelar va bazi kometalar bir fokusida quyosh joylashgan elliptik traektoriyalar bo'ylab harakatlanadi. Unda planetalar ekssentrisiteti nolga yaqin, kometalar esa ekssentriteti birga yaqin eliips bo'ylab harakatlanadi.

Erning 1yilda 1marta, Galley kometasi esa 72 yilda bir marta Quyosh atrofida aylanishini eslash kifoya.

Giperbola, kanonik tenglamasi xossalari. Har bir nuqtasidan berilgan fokuslar deb ataluvchi ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari ayirmasi absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ songa teng nuqtalarning to'plami giperbola deyiladi.

Giperbola tenglamasini hosil qilish uchun F_1 va F_2 fokuslarni absissa o'qiga, koordinata boshiga simmetrik qilib joylaymiz:$F_1(-c;0),F_2(c;0)$

Agar $M(x;y)$ giperbola ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, ta'rifga ko'ra: $|MF_1|-|MF_2|=2a$ yoki

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$tenglamani

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\mp 2a$ ko'rinishda yozib, tomonlarini kvadratga oshiramiz.

Soddalashtirib: $\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx^2-a^2$Bu tenglamani ham kvadratga oshirib, guruhlab; $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$tenglikni olamiz. $c>a$ bo'lganligidan $b=\sqrt{(c^2-a^2)}$ belgilash kiritamiz, natijada, giperbola tenglamasi $b^2x^2-a^2y^2=a^2\cdot b^2$ ko'rinishga keladi. Tomonlarni $a^2\cdot b^2$

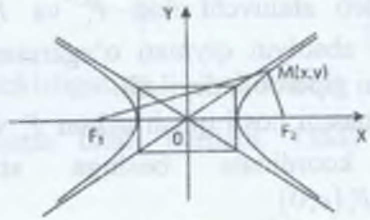
ga bo'lib, perbola kanonik tenglamasi deb ataluvchi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamada x, y lar kvadrat darajada bo'lishi, grafikni son o'qlari va koorinata boshiga nisbatan simmetrikligini bildiradi. Demak giperbola grafigini I-choragida chizish kifoya. Tenglama I-chorakda $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}$ ko'rinishda bo'ladi. Undan $0\le x<a$ quyidagilar kelib chiqadi:

1) $0\le x<a$ da funksiya aniqlanmagan

2) $x=a$ da $y=0$

3) $x>a$ da $y>0$. Agar $x\to+\infty$ bo'lsa, $y\to+\infty$.



$y=\pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlari asimntotalari deyiladi. I chorakda giperbola va asimtota farqini baholaymiz:

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

Oxirgi kasr $x\to+\infty$ da nolga intiladi, demak giperbola $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ti chiziqga yaqinlashib boradi.

Agar geperbola tenglamasi $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ko'rinishida bo'lsa, giperbola fokuslari OY o'qida bo'lib, giperbola shoxlari OY o'qi bo'lib yo'naladi. Bu giperbola oldingisiga nisbatan qo'shma deyiladi.

Agar $a=b$ bo'lsa, geperbola teng tomonli deyilib, tenglamasi $x^2-y^2=a^2$ ko'rinishida bo'ladi.

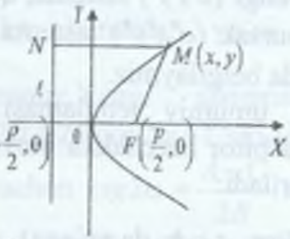
$\varepsilon=\frac{c}{a}$ soni geperbola ekssentrisiteti deyilib, $\varepsilon>0$. $x=\pm\frac{c}{\varepsilon}$ to'g'ri chiziqlar giperbola drektrissalari deyiladi. Giperbolada ham $\frac{r}{d}=\varepsilon$ o'rinlidir.

Parabola kanonik tenglamasi, xossalari. Fokus deb ataluvchi F nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami parabola deyiladi.

Fokusdan dirikttrisagacha masofa p bilan belgilanib, y parabola parametri deyiladi. Parabola tenglamasini olish uchun F nuqtani Ox o'qi bo'ylab koordinata boshidan $\frac{p}{2}$ masofada joylashtramiz. Direktrisa esa $x=-\frac{p}{2}$ bo'ladi. Parabola ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi uchun $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ va direktrisagacha bo'lgan masofa $x+\frac{p}{2}$ ekanligidan $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ kelib chiqadi. Bu tenglikni kvadratga oshirib:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

ni hosil qilamiz.Soddalashtirsak, parabolaning kanonik tenglamasi kelib chiqadi: $y^2=2px$



Parabola grafigi Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lib, koordinata boshidan o'tadi. Parabolada $r=d$ ekanligidan $\varepsilon=1$ bo'ladi. $y^2=2px$ uchun absissa o'qi simmetriya o'qi bo'lib, parabola o'qi deyiladi. p soni fokusdan direktrisagacha masofani bildiradi.

Agar parabola $y^2=-2px$ ko'rinishida bo'lsa, uning grafigi $(-\infty;0]$ da aniqlanadi.

I.T.Ch. lar qutbiy tenglamalari. I.T.CH lardan birini olamiz. Uning fokusi joylashgan nuqtaga qutbni joylab boshlang'ich nurni absissa musbat yo'nalishi bo'yicha yo'naltiramiz I.T.Ch direktrisasi L bo'lsin, ixtiyoriy nuqtasini $M(r,\varphi)$ bilan belgilaymiz. Fokusadan I.T.Ch gacha OY o'qidagi kesma p-fakal parametr bo'lsin $\frac{p}{|DF|}=\varepsilon=\frac{r}{d}$ ekanligidan $|DF|=\frac{\varepsilon}{\delta'}$ ya'ni $d=|DF|+|FN|=\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi$. Demak, $\frac{r}{\varepsilon}=\frac{p}{\varepsilon}+r\cos\varphi$, yoki $r=p+r\varepsilon\cos\varphi$ bundan ixtiyoriy I.T.Ch qutb tenglamasi $r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ ko'rinishida bo'lishi kelib chiqadi, Bunda p-fokal parametr ε qaralayotgan chiziq ekssentrisiteti.

Bu tenglama $\varepsilon=0$ da aylana, $0<\varepsilon<1$ da ellips, $\varepsilon=1$ da parabola, $\varepsilon>1$ da esa giperbola tenglamasidir.

I.T.Ch larni kanonik ko'rinishga keltiring. Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

tenglama bilan beriladi. Agar Dekart koordinatalarda son o'qlarini parallel ko'chirsak, yangi $(o'x'y')$ sistema, qo'shimchasiga o'qlarni biror α burchakka bursak $(o''x''y'')$ sistema hosil bo'ladi. So'nggi sistemani OXY tarzida belgilaymiz.

Teorema. I.T.Ch umumiy tenglamasi koordinata o'qlarini parallel ko'chirish va biror burchakka burish yordamida quyidagi hollardan biriga keltiriladi:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ellips, $a=b$ da aylana)
2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (giperbola)

3. $y^2=2px$ (parabola)
4. $y^2-k^2x^2=0$ (ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq)
5. $y^2-k^2=0$ yoki $x^2-k^2=0$ (ikki parallel to'g'ri chiziq)
6. $y^2=0$ yoki $x^2=0$ (ustma-ust tushgan to'g'ri chiziqlar)
7. $y^2+k^2x^2=0$ (bitta nuqta)
8. $y^2+k^2x^2=-1$ (bo'sh to'plam)

Isbot. Dastlab, O(0;0) koordinatalar boshini biror $P(x_o;y_o)$ nuqtaga parallel ko'chiramiz. Unda $\begin{cases} x=x'+x_o \\ y=y'+y_o \end{cases}$ almashtrish o'tkaziladi. Umumiy tenglama

$$A(x'^2+2x'x_o+x_o)^2+2B(x'y'+x'y_o+x_oy'+x_oy_o)+C(y'^2+2y'y_o+y_o^2)+$$
$$+2D(x'+x_o)+2E(y'+y_o)+F=0$$

yoki

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+(2Ax_o+2By_o+2D)x'+(2Bx_o+2Cy_o+2E)y'+$$
$$+(Ax_o^2+2Bx_oy_o+Cy_o^2+2Dx_o+2Ey_o+F)=0$$

ko'rinishiga keladi.

Demak, $(x_o;y_o)$ $\begin{cases} Ax_o+By_o+D=0 \\ Bx_o+Cy_o+E=0 \end{cases}$ sistema yechimi bo'lsa, umumiy tenglama

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F=0 \qquad (2)$$

ko'rinishga kelar ekan.

(2)-tenglamadagi $x'y'$ ko'paytmani yo'qatish uchun o'qlarni biror α burchakka buramiz, ya'ni $\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$ almashtrish o'tkazamiz. Yangi sistemada xy ko'paytma koeffitsiyenti $A\sin2\alpha+2B\cos2\alpha+C\sin2\alpha=0$ bo'lsa, teorema isbotlanadi. Buning uchun $ctg2\alpha=\frac{A-C}{2B}$ shart o'rinli bo'ladigan α burchak tanlash yetarli. (2)-tenglama $A'x^2+C'y^2+F'=0$ tenglamaga keladi.

Bu tenglama berilgan I.T.CH ning kanonik ko'rinishi deyiladi.

Kanonik tenglama olinguncha A,B,C-sonlari o'zgarmaydi. $AC-B^2$ ifoda I.T.CH tenglamasi invarianti deyiladi. Bu ifoda uchun, $A'C'-B'^2=AC-B^2$ bo'ladi.

I.T.CH $AC-B^2$ ifoda ishorasiga ko'ra quyidagi tirlarga bo'linadi:

1. $AC-B^2>0$ bo'lsa,I.T.CH elliptik tipda,
2. $AC-B^2=0$ bo'lsa,I.T.CH parobolik tipda,
3. $AC-B^2<0$ bo'lsa, I.T.CH giperbolik tipda bo'ladi.

1) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

$\begin{cases}3x_o+5y_o-1=0\\5x_o+3y_o-7=0\end{cases}$ sistema yechimi $x_o=2$, $y_o=-1$ bo'lganligi uchun $\begin{cases}x=x'+2\\y=y'-1\end{cases}$ almashtirish o'tkazamiz:

$$3(x'^2+4x'+4)+10(x'y'-x'+2y'-2)+3(y'^2-2y'+1)-2(x'+2)-$$
$$-14(y'-1)-13=0$$

yoki

$$3x'^2+10x'y'+3y'^2-8=0$$

Endi $ctg2\alpha=\frac{3-3}{10}=0$ dan $\alpha=45^\circ$ ekanligini topib,

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\\y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\end{cases}$$

almashtirish o'tkazamiz:

$$3\cdot\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+10\cdot\frac{1}{2}(x^2-y^2)+3\cdot\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)-8=0$$

yoki $8x^2-2y^2=8$.

Tekshirilgan I.T.CH $x^2-\frac{y^2}{2^2}=1$ tenglamaga ega giperbola bo'ladi. $AC-B^2=3\cdot3-5^2<0$ ekanligi ham buni tasdiqlaydi.

2). $8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$ kanonik ko'rinishga keltirilsin.

$\begin{cases}8x_o+2y_o+8=0\\2x_o+5y_o+2=0\end{cases}$ yechimi (-1;0) bo'lganligi uchun $\begin{cases}x=x'-1\\y=y'\end{cases}$ almashtirish o'tkazamiz.

$$8(x'^2-2x'+1)+4(x'y'-y')+5y'^2+16(x'-1)+4y'-28=0$$

yoki $8x'^2+4x'y'+5y'^2-36=0$.

So'ngra $ctg2\alpha=\frac{8-5}{4}=\frac{3}{4}$ ekanligini topamiz. Bu holda α burchakni aniqlab bo'lmaydi, shuning uchun $\sin\alpha,\cos\alpha$ larni topishga harakat qilamiz:

$\frac{1}{tg2\alpha}=\frac{3}{4}$ yoki $\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}=\frac{3}{4}$, $2tg^2\alpha+3tg\alpha-2=0$ tenglamaga egamiz. Bundan $tg\alpha=\frac{1}{2}$ yechimni olishimiz mumkin ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bo'lishiga harakat qildik xolos). $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ ayniyatdan $\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, undan $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ biz $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ deb almashtirish o'tkazamiz:

$x'=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)$, $y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)$ ekanligidan

$$\frac{8}{5}(4x^2-4xy+y^2)+\frac{4}{5}(2x^2+3xy-2y^2)+\frac{5}{5}(x^2+4xy+4y^2)-36=0$$

Soddalashtirib, $9x^2-4y^2-36=0$ yoki $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ ellips kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

3.4.§. Fazoda Dekart va yarim qutbiy koordinatalar sistemalari

1. To'g'ri burchakli *Oxyz* Dekart koordinatalar sistemasi o'lchov birligi aniqlangandan so'ng o'zaro perpendikulyar, bitta *O*

nuqtada kesishuvchi Ox, Oy, Oz o'qlari yordamida kiritiladi. Bunda O -koordinata boshi, Ox - abscissa, Oy - ordinata, Oz - oplikata o'qlari deyiladi.

Biror C nuqta berilsa, undan Ox, Oy, Oz o'qlariga perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklarning son o'qlari bilan kesishgan nuqtalari C nuqtaning to'g'ri burchakli yoki Dekart koordinatalari deyiladi. $C(x;y;z), x = OC_x$, $y = OC_y$, $z = OC_z$.

Bu kattaliklar,mos ravishda C nuqta absissasi, ordinatasi, oplikatasi deyiladi.

Oxy, Oyz, Oxz tekisliklari koordinata tekisliklari deyiladi. Ular fasoni 8ta bo'lak- oktantlarga ajratadi. Masalan I-oktantda $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ bo'lsa, oxirgi VIII-oktantda $x < 0, y < 0$, $z < 0$, boladi.

2. Fazodagi C nuqta holatini qutb koordinatalari va oplikata yordamida aniqlash mumkin. Buning uchun Dekart koordinatalari boshi va qutb boshini bitta nuqtaga, boshlang'ich nurni absissaga ustma – ust qo'yamiz. C nuqtaning Oxy tekislikdagi proeksiyasi C' bo'lsa, $r = |OC'|$, xOC', $z = C'C$ kattaliklar yordamida C ning fazodagi xolati $C(r, \varphi, z)$ tarzida aniqlanadi. Bunda r, φ, z – silindrik koordinatalari, kiritilgan sistema esa silindrik koordinatalar sistemasi deyiladi. Silindrik va Dekart koordinatalari o'zaro bog'lanishi qutb koordinatalar yordamida

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \ , \ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , tg\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

ko'rinishida bo'lishi avvaldan ma'lum.

3. Fazodagi C nuqtani ko'ramiz. $OC = \rho$,$COz = \theta$ bo'lsin. Bundan tashqari C nuqtaning qutbiy φ koordinatasini ham ko'ramiz.

ρ, φ, θ kattaliklar C nuqtaning sferik koordinatalari, kiritilgan sistema esa, sferik koordinatalar sistemasi deyiladi. Yordamchi kattalik sifatida C ning qutbiy r koordinatasi ma'lum desak, $r = \rho\cos(90^\circ - \varphi) = \rho\sin\theta$ o'rinli ekanligidan,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

o'zaro bog'lanishni keltirib chiqaramiz.

Aksincha

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ , \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ , \ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}\ , \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ , \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ ,$$

bog'lanishlarni keltirib chiqarish talabaga qiyinchilik tug'dirmaydi.

Silindrik, sferik koordinatalar sistemalarida ba'zi qutbiy koordinatalar qatnashganligi uchun ularni yarim qutbiy koordinatalar sistemalari deyiladi.

Fazoda masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, koordinatalarni almashtirish

Fazoda Dekart koordinatalari kiritilgan, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar A', B' nuqtalar A va B ning Oxy tekislikdagi proeksiyasi bo'lsa,.

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A nuqtadan $A'B'$ kesmaga parallel chiziq o'tkazib, uni BB' bilan kesishgan nuqtasini B'' bilan belgilaymiz. U holda $|BB''| = z_2 - z_1$

Pifogor teoremasiga ko'ra :

$$|AB| = \sqrt{|A'B'|^2 + |BB''|^2}.$$

Demak

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}.$$

Bu ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi deyiladi.

Agar A va B tutashtirilib, kesma hosil qilinsa va bu kesmada $C(x;y;z)$ nuqta olinib $\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$ munosabat o'rinli bo'lsa,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Xususan $|AC|=|CB|, \lambda=1$ bo'lsa, $x=\frac{x_1+y_2}{2}\ y=\frac{y_1+y_2}{2}, y=\frac{z_1+z_2}{2}$, kelib chiqadi.

Agar koordinatata boshi $O(0;0;0)$ dan biror bir $O'(a;b;c)$ nuqtaga ko'chirilsa, $A(x;y;z)$ nuqtaning yangi $x'o'y'z'$, sistemadagi koordinatalari mos ravishda $A'(x';y';z')$ bo'ladi. Eski va yangi koordinatalar

$$\begin{cases} x=x'+a \\ y=y'+b \\ z=z'+c \end{cases}$$

formulalar yordamida o'zaro bog'lanadi.

Agar x,y o'qlari Oz atrofida biror α burchakka burilsa, eski va yangi koordinatalar bog'lanishi

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \\ z=z' \end{cases}$$

ko'rinishda, x, z o'qlari Oy atrofida biror β burchakka burilsa,

$$\begin{cases} x=x'\cos\beta-z'\sin\beta \\ y=y' \\ z=y'\sin\beta+z'\cos\beta \end{cases}$$

ko'rinishda, y, z o'qlari Ox atrofida biror bir γ burchakka burilsa,

$$\begin{cases} x=x' \\ y=y'\cos\gamma-z'\sin\gamma \\ z=y'\sin\gamma+z'\cos\gamma \end{cases}$$

bog'lanishlar o'rinli bo'ladi. Bunda α,β,γ – burchaklar Eyler burchaklari deyiladi.

3.5.§. Vektorlar, amallar, xossalari

Ko'pgina miqdorlar (hajm, massa, zichlik, temperatura) faqatgina son orqali aniqlanadi. Shuning uchun, ularni skalyar miqdorlar diyiladi. Ba'zi miqdorlar esa ham son qiymati, ham yo'nalishi bilan aniqlanadi (kuch, tezlik). Bunday miqdorlarni vektor miqdorlar deyiladi. Ularni o'rganish uchun vektor tushunchasi kiritiladi.

Yo'naltirilgan kesma vektor deyiladi. Kesma boshi vektor boshi, oxiri esa vektor oxiri diyiladi. Agar nuqta Anuqtada boshlanib, Bnuqtada tugasa $\overline{AB}$ yoki $\bar{a}$ kabi belgilanadi.

Agar ikki vektordan birini parallel ko'chirish natijasida ikkinchisini hosil qilish mumkin bo'lsa, ular teng boladi, ya`ni yo'nalishdosh, uzunligi teng vektorlar o'zaro tengdir.

Parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar kolleniar, bir tekislikda yotuvchi vektorlar o'zaro komplanar deyiladi.

Boshi va oxiri ustma -ust tushgan vektor nol vektor deyiladi va $\vec{0}$ tarzida yoziladi,uning yo'nalishi ixtiyoriy deb qabul qilinadi.

1. Chiziqli amallar

Ikki $\vec{a}$ va$\vec{b}$ vektorlar yig'indisi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektor $\vec{a}$ ning oxiriga $\vec{b}$ parallel ko'chirib keltirilganda, $\vec{a}$ ning boshi va $\vec{b}$ ning oxirini tutashtiruvchi vektordir. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

Agar vektorlar boshi bir nuqtaga ko'chirilib, tomonlari shu vektolar bo'lgan vektor yasasak, umumiy uchdan chiquvchi diagonal yig'indi vektor bo'ladi Qo'shishning bu usullari uchburchak va parallelogramm qoidalari deyiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ayirmasi deb , shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki , $\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$ o'rinli bo'ladi. Parallelogramm usulida $\vec{c}$ - ayirma vektor berilgan vektorlar uchlarini tutashtiruvchi, $\vec{a}$ tomon yo'nalgan dioganal vektordir.

$\vec{a}$ vektorning haqiqiy λ songa ko'paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor uzunligi $|\lambda||\vec{a}|$ ga, yo'nalishi $\lambda > 0$ da $\vec{a}$ bilan bir xil, $\lambda < 0$ da esa $\vec{a}$ ga qarama-qarshi yo'nalgan vektordir.

Fazoda boshi $A(x_1;y_1;z_1)$ oxiri $B(x_2;y_2;z_2)$nuqtada bo'lgan vektor

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1;)$$

vektorga teng. Demak, ixtiyoriy vektor boshini koordinata boshiga ko'chirish mumkin, ya`ni fazoda qancha nuqta bo'lsa, shuncha vektor mavjud va aksincha. Qolgan vektorlar "aylangani chiqqan " xolos.

Tu shunarliki $\vec{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlariga proeksiyalari mos ravishda x, y, z bo'lsa, ular vektorning koordinatalari deyiladi., $\vec{a}(x; y; z)$ tarzida yoziladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ekanligi kelib chiqadi

Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ C ustida arifmetik amallar quyidagicha kiritiladi.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_2 \pm x_1; y_2 \pm y_1; z_2 \pm z_1;)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1),$$

Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar o'zaro kolleniar bo'lsa, shunday haqiqiy λ topish mumkinki, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ o'rinli bo'ladi, ya`ni $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$

Agar $\vec{a}(x;y;z)$, vektorning Ox, Oy, Oz o'qlariga og'ish burchaklari mos ravishda α, β, γ bo'lsa, bu burchaklar kosinuslari-cosα, cosβ, cosγ lar vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

$x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = |\vec{a}|\cos\beta$, $z = |\vec{a}|\cos\gamma$ ekanligidan doimo

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ o'rinli bo'ladi va $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Vektorni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish amallarri quyidagicha xossalarga ega:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
3) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
4) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

Bir necha $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, vektorlarni qo'shish uchun, birining oxiriga ikkinchisini parallel ko'chiramis. $\vec{a}_1$ ning boshi va $\vec{a}_n$ ning oxirini tutashtiruvchi vektor yig'indi vektor deyiladi. Bu esa qo'shishning ko'pburchak usuli deyiladi.

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

Fazoda koordinata boshidan son o'qlari musbat yo'nalishi bo'yicha $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ko'rinishda belgilanuvchi birlik vektorlarni ko'ramiz. $|\vec{i}| = I, |\vec{j}| = I, |\vec{k}| = I$

Bu uchlik bazis deb aytiladi, chunki fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis orqali yagona ko'rinishda yoyiladi : $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

x,y z lar $\vec{a}$ ning koordinatalaridir, ya`ni $\vec{a}(x; y; z)$,. Qaralgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar ortlar deyiladi.

2. Skalyar ko'paytma

Nolga teng bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, shu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasidan iborat songa aytiladi,

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$

$3)\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$

$4)\ \vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$5)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$6)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0\leftrightarrow\vec{b}\perp\vec{a}$

Oxirgi xossalardan ortlar uchun

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Fazoda koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ vektorlar skalyar kopaymasini topish bilan shug'ullanamiz.

Kosinuslar teoremasiga kora;

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}$$

Ikkinchi tenglamadan

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=$$

$$=x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2y_1+y_1^2+z_2^2-2z_2z_1+z_1^2=$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

Demak, $\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

Bu formulani vektorlarning ortlar bo'yicha yoyilmasi yordamida ham olish mumkin.

$$\vec{a}\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Bu ikki vektorlar orasidagi burchak quyidagicha topiladi :

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Misol. A(1; 1; 1), B(2; 2; 1), C (2; 1; 2) nuqtalar berilgan. $\varphi=\angle ABC$ ni toping.

$\overrightarrow{AB}=(1;1;0)$ $\overrightarrow{AB}=(1;0;1)$ ekanligidan,

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

demak, $\angle ABC=60^\circ$

3. Vektor ko'paytma

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, u quyidagi shartlarga bo'ysinadi :

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$

2) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

3) $|\vec{c}|$ uchidan qaralganda, $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ga yonalish soat sterelkasi yo'nalishiga qarama – qarshi bo'lishi kerak.

Vektor ko'paytma $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ tarzida belgilanadi.

Ta`rifdan ko'rinadiki, $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yusasini ifodalovchi songa teng.

Vektorlar vektor ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega ;

$1)\ \vec{a}\parallel\vec{b}$ bo'lsa $\vec{a}\times\vec{b}=0$

$2)\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$3)\ \lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\lambda\vec{b}$

$4)\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

$5)\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ vektorlar vektor ko'paytmasini hisoblab topish masalasini ko'ramiz.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=$$

$$=-y_1x_2\vec{k}+z_1x_2\vec{j}+x_1y_2\vec{k}-z_1y_2\vec{i}-x_1y_2\vec{j}+y_1z_2\vec{i}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

Demak, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ bo'lsa,

$$\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

Natijalar. 1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun $\vec{a}\vec{b}=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

2) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan uchburchak yuzi

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$$

formula yordamida topiladi.

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar xOy tekisligida yotsa, $z_1=z_2=0$ ekanligidan,

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-y_1x_2\right|$$

formula bilan topilishi kelib chiadi.

Misol. A(1; 1 ;1), B(2; 2; 1), C(2; 1; 2) nuqtalar hosil qilgan uchburchak yuzini toping.

$\overline{AB}=(1;0;1)$ $\overline{AC}=(1;0;1)$ ekanligidan,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Aralash ko'paytma

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{d}$ vektorlar aralash ko'paytmasi deb, $\vec{a}\times\vec{b}$ va $\vec{d}$ vektorlar skalyar ko'paytmasiga teng songa aytiladi va $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}$ yoki $(\vec{a};\vec{b};\vec{d})$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar xOy tekisligida joylashgan bo'lsa, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektor Oz o'qiga parallel yo'naladi. Agar $\vec{d}$ vektor Oz o'qi bilan biror α burchak hosil qilsa. u holda $h=\left|\vec{d}\right|\cos\alpha$ kattalik,

asosi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ga qurilgan parallelogramm, yon qirrasi $\vec{d}$ bo'lgan parallelopiped balandligidir. Demak,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}=\vec{c}\vec{d}=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|\cos\alpha=S\,,\ h=V_{par}$$

$V_{par}=\left|(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{d}\right|$ chunki $(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c}=-V_{par}$ bo'lishi mumkin.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ vektorlarga qurilgan piramida hajmi esa,

$$V_{pir}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{d}\right|$$

chunki bu piramida uchburchakli prizmaning $\frac{1}{3}$ qismidir, paralelopipedning $\frac{1}{6}$ qismi bo'ladi.

Vektorlar koordinatalari yordamida aralash ko'paytmani hisoblash masalasini ko'ramiz.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right),\ \vec{d}=(x_3,y_3,z_3)$$

bo'lsa,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

kelib chiqadi.

Natijalar. 1) Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ vektorlar komplanar bo'lsa,

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0$$

bo'ladi va aksincha.

2) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{d})=(\vec{a},\vec{b}\times\vec{d})$

3). $V_{pir}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{matrix}\right\|$

1. $\vec{a}(1;-2;5)$, $\vec{b}(2;3;-4)$, $\vec{c}(1;-2;4)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni toping.

$$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b},\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

1) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1;-2;5)-3(2;3;-4)+(1;-2;4)=$
$=(2;-4;10)-(6;9;-12)+(1;-2;4)=(-3;-15;26)$

2) $\vec{a}\vec{b}=1.2+(-2).3+5.(-4)=2-6-20=-24$

$$3)\ \vec{a}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$=-7\vec{i}+14\vec{j}+7\vec{k}$

$$4)\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 7 & -14\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-7,$$

3.6.§. Fazoda tekislik tenglamalari, asosiy masalalar

1. Normal vektori va nuqtasi ma'lum tekislik tenglamasi

Nol bo'lmagan, tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy vektor, tekislikning normal vektori deyiladi.

Tekislikning, masalan, koordinata boshidan o'tkazilgan normal vektori $\vec{N}(A;B;C)$ va $E(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasi ma'lum bo'lsin. Tekislikning ixtiyoriy $F(x;y;z)$ nuqtasini olamiz.

$\overline{EF}=(x-x_o;y-y_o;z-z_o)$ vektor tekislikda yotganligi uchun $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar, ya`ni $\overline{EF}\cdot\vec{N}=0$, koordinatalar bo'yicha yozsak,

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0 \qquad (1)$$

Hosil bo'lgan tenglama tekislikning biz qidirayotgan tenglamasidir.

2. Tekislikning umumiy tenglamasi

Fazoda $E(x_0;y_0;z_0), F(x_1;y_1;z_1)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalar to'plami tekislikdir, ya`ni agar C (x; y; z) tekislik nuqtasi bo'lsa, $|EC|=|CF|$ .Bundan

$$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

Tomonlarni kvadratga ko'tarib, guruhlaymiz.

$$(2x_1-2x_o)x+(2y_1+2y_o)y+(2z_1-2z_o)z+(x_o^2+y_o^2+z_o^2-x_1^2-y_1^2-z_1^2)=0$$

Qavslarni mos ravishda A, B, C, D lar bilan beigilasak tekislikning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

hosil bo'ladi. Bu tenglamani tekislikning oldingi tenglamasida

$$D=-Ax_o-By_o-Cz_o$$

belgilash yordamida ham olish mumkin edi, demak (2)-tenglamadagi noma'lumlar koeffitsiyentlari normal vektor koordinatalari ekan.

A,B,C,D sonlariga bog'liq holda quyidagi xususiy xollar bo'lishi mumkin

1) $D=0$ U holda tekslik tenglamasi $Ax+By+Cz=0$ ko'rinish oladi.

Bu tenglama tekislikning koordinatalar boshidan o'tuvchi ekanligini bildiradi.

2) $C=0$. Bunda tekislik $Ax+By+D=0$ tenglamaga ega bo'lib, Oz o'qiga parallel tekislikni bildiradi, xOz tekisligida $Ax+By+D=0$ to'g'ri chizig'i bo'yicha o'tadi.

3) $B=0$ Tekislik $Ax+Cz+D=0$ tenglamaga ega va Oy o'qiga parallel.

4) $A=0$. Tekislik $By+Cz+D=0$ tenlamaga ega va Ox o'qiga parallel.

5).A=B=0. Tekislik $Cz+D=0$ tenglamaga ega. Undan $z=\dfrac{D}{C}$ kelib chiqib,Oxy koordinatalar tekisligiga parallel tekislik ekanligini bildiradi.

6) $A=B=0$. Tekislik $By+D=0$ tenlamaga ega va Oxz tekisligiga parallel.

7) $B=C=0$. Tekislik $Ax+D=0$ tenlamaga ega va Oyz tekisligiga parallel.

8) $A=B=D=0$ bo'lsa, tekislik $Cz=0$ ya`ni $z=0$ tenglamaga ega bo'lib u Oxy tekisligidir.

9) $A=C=D=0$ bo'lsa, $By=0$ ya`ni $y=0$ bo'lib, Oxz tekisligini bildiradi.

10) B=C=D=0 bo'lsa, $Ax=0$ dan $x=0$ bo'lib, Oyz koordinati tekisligini bildiradi.

3. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Koordinatalar boshi $O(0;0;0)$ dan o'tmaydigan biror

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tekislikni ko'ramiz. Uni $\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$ ko'rinishda yozish mumkin. Agar $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak, tekislik tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama tekislikning son o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasidir.

Haqiqatdan, tekislik Ox o'qidan a kesma, Oy o'qidan b kesma va Oz o'qidan c kesma ajratadi. Bu tekislik chizmada uchburchak shaklida ko'rinadi, ular a,b,c lar ishoralariga qarab, 8ta oktantdan birida joylashishi mumkin.

4. Uchta nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi

Fazoda $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmasa, ulardan yagona tekislik o'tishi ma'lum. $A(x;y;z)$ nuqta o'sha tekislik ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

$$\overline{A_1A}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

$$\overline{A_1A_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$$

$$\overline{A_1A_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$$

vektorlar o'zaro kolleniar bo'lganligi uchun, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, ya`ni $\left(\overline{A_1A}\times\overline{A_1A_2}\right)\cdot\overline{A_1A_3}=0$ Koordinatlar bo'yicha bu shart

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilib, izlanayotgan tekislik tenglamasidir.

5. Tekislikning normal tenglamasi

Tekislikka koordinata boshidan tushirilgan normal vektor uzunligi p, yo'naltiruvchi kosinuslari $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ bo'lsin.

Normal bo'yicha yo'nalgan birlik $\vec{n}(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ vektorlarni kiritamiz.

Agar $C(x;y;z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, $\overline{OC}$ vektorning normalga proeksiyasi p bo'ladi.

$\vec{n}\cdot\overline{OC}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$ va C nuqta tekislikda yotishi uchun, uning koordinatalari

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak. Hosil bo'lgan tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamani umumuiy

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tenglamadan quyidagicha chiqariladi.

Umumiy tenglama ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ soniga ko'pytiriladi.

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Agar bu tenglamadagi to'g'ri kasrlar mos ravishda $cos\alpha$; $cos\beta$; $cos\gamma$ va p deb belgilansa, tekislikning normal tenglamasi hosil bo'ladi. Demak, normallanuvchi ko'paytuvchi ishorasi D ishorasiga qaramaqarshi bo'lishi kerak ekan.

Umuman, μ – normallovchi ko'paytuvchi bo'lsa, $\mu Ax+\mu By+\mu Cz+\mu D=0$ normal tenglama bo'ladi. Ya'ni, $(\mu A)^2+(\mu B)^2+(\mu C)^2=1$. Bundan

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Fazoda tekislikka doir asosiy masalalar

1. Ikki tekislik orasidagi birchak

Umumiy tenglamalari bilan berilgan ikki $A_1x+B_1x+C_1x+D_1=0$ va $A_2x+B_2x+C_2x+D_2=0$ tekislik orasidagi burchak, ularning normal $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ va $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$ vektorlari orasidagi burchakka tengdir.

Demak, ikki tekislik orasidagi φ burchak

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

formulasi yordamida topiladi.

Tekisliklar parallellik sharti $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, perpendikulyarlik sharti esa $\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0$ yoki $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ bo'ladi.

2. Nuqtadan tekislikkacha masofa.

Normal tenglamasi bilan berilgan $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ tekislik va biror $E(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Berilgan tekislikka parallel, $E(x_0;y_0;z_0)$ dan o'tuvchi tekislik $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-q=0$ tenglamaga ega bo'ladi. Bunda q koordinata boshidan tekislikkacha masofa – normal uzunligi E dan berilgan tekislikgacha masofa esa $d=|q-p|$ formuladan topiladi, ya'ni

$$|q=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|$$

Agar tekislik umumuiy $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama bilan berilsa,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

bo'lishi ravshan.

Ikki parallel tekislik orasidagi masofani topish uchun, ko'pincha birinchisidan biror nuqta tanlab, bu nuqtadan ikkinchi tekislikkacha masofa hisoblanadi.

Masala. $A(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{a}_1(m_1;n_1;r_1)$, $\vec{a}_2(m_2;n_2;r_2)$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini yozing.

Tekislik normal vektorini $\vec{N}=\vec{a}_1 x\vec{a}_2$ deyish mumkin.

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ m_1 & n_1 & r_1\\ m_2 & n_2 & r_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}n_1 & r_1\\ n_2 & r_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}m_1 & r_1\\ m_2 & r_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}\right)$$

Nuqtasi va normal vektori berilgan tekislik tenglamasidan

$$\begin{vmatrix}n_1 & r_1\\ n_2 & r_2\end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix}m_1 & r_1\\ m_2 & r_2\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

kelib chiqadi. Uni

$$\begin{vmatrix}(x-x_0) & (y-y_0) & (z-z_0)\\ m_1 & n_1 & r_1\\ m_2 & n_2 & r_2\end{vmatrix}=0$$

ko'rinishida yozish mumkin.

3.7.§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari, asosiy masalalar

1. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Fazoda biror to'g'ri chiziq berilib, uning $E(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasi va yo'naltiruvchi vektor deb ataluvchi, to'g'ri chiziqqa parallel $\vec{p}=(m;n;r)$ vektor berilgan bolsin.

Agar $F(x;y;z)$ to'g'ri chiziqning ixtyoriy nuqtasi bo'lsa, $\overline{EF}=(x-x_0);(y-y_0);(z-z_0)$ va $\bar{p}=(m;n;r)$ vektorlar parallelligidan

$$\frac{(x-x_0)}{m}=\frac{(y-y_0)}{n}=\frac{(z-z_0)}{r} \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

Biror t parametr berilgan bo'lsin. (1) dan

$$\frac{(x-x_0)}{m}=\frac{(y-y_0)}{n}=\frac{(z-z_0)}{r}=t$$

deb olib, $(x-x_0)=mt$, $(y-y_0)=nt$, $(z-z_0)=rt$ tengliklarga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+rt \end{cases} \qquad (2)$$

tenglamalar to'g'ri chiziq parametrik tenglamasi deyiladi.

3. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

$E(x_0;y_0;z_0)$, $F(x_1;y_1;z_1)$ nuqtalardan yagona to'g'ri chiziq o'tishi ma'lum.

Yo'naltiruvchi vektor sifatida $\bar{p}=\overline{EF}=(x-x_0);(y-y_0);(z-z_0)$, berilgan nuqta sifatida $E(x_0;B_0;z_0)$ qaralsa, kanonik tenglama

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \qquad (3)$$

ko'rinish oladi. Bu berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenlamasidir.

4. To'g'ri chiziq - tekisliklar kesishmasi sifatida. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari

Fazoda umumiy tenglamasi bilan berilgan ikki tekislik o'zaro parallel bo'lmasa, biror to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.

$$\begin{cases} A_1x+B_1x+C_1x+D_1=0 \\ A_2x+B_2x+C_2x+D_2=0 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning umumiy tenlamasi deyiladi. Umumiy tenglamalarni masalalar yechishda qo'llash noqulay, shu sababli kanonik yoki parametrik tenglamasiga o'tish kerak bo'ladi.

Tekisliklar normal vektorlari $\overline{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\overline{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$ vektor ko'paytmasi $p=N_1\times N_2$ qaralayotgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi, demak, bu vektorni yo'naltiruvchi vektor sifatida olsa bo'ladi:

$$\vec{p}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

Tog'ri chiziqda yotuvchi biror nuqta topish kerak. Buning uchun, dastlab umumiy tenglamadagi z lar o'rniga biror son qo'yib yuboramiz: $z=z_0$

$$\begin{cases} A_1x+B_1x=(-C_1x-D_1) \\ A_2x+B_2x=(-C_2x-D_2) \end{cases}$$

Kramer formulasiga ko'ra:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} -C_1z_0-D_1 & B_1 \\ -C_2z_0-D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\quad y_0=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1z_0-D_1 \\ A_2 & -C_2z_0-D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Endi $E(x_0;y_0;z_0)$ nuqta umumiy tenglamalarni ikkalovini ham qanoatlantiradi, ya`ni to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi.To'g'ri chiziqning izlangan kanonik tenlamasi.

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalariqa doir asosiy masalalar

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Kanonik tenglamalari bilan berilgan ikki

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{r_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$$

to'g'ri chiziq orasidagi burchak, ularning $\vec{p}_1 = (m_1;n_1;r_1), \vec{p}_2 = (m_2;n_2;r_2)$ yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng bo'ladi. Demak, agar φ o'sha burchak bo'lsa

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + r_1 r_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + r_2^2}}$$

Bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi uchun, yo'naltiruvchi vektorlari parallel bo'lishi kerak, ya'ni $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2}$ tengliklar parallellik shartidir.

Shunga o'xshash to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lishi uchun ham $\vec{p}_1$ va $\vec{p}_2$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi kerak, $m_1 m_2 + n_1 n_2 + r_1 r_2 = 0$.

2. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Fazoda biror $C(x_0;y_0;z_0)$nuqta va

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$$

to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin, ular orasidagi eng qisqa d masofani topish masalasini ko'ramiz.

$\vec{p} = (m_1;n_1;r_1)$yo'naltiruvchi vektorni E nuqtadan boshlangan deb hisoblash mumkin.

$\overline{EC} = (x_1 - x_0);(y_1 - y_0);(z_1 - z_0)$ va $\vec{p}_1$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzi

$$S = \left|\vec{p}_1 \times \overline{EC}\right| = |\vec{p}_1| \cdot d$$

ekanligidan

$$d = \frac{\left|\vec{p}_1 \times \overline{EC}\right|}{|\vec{p}_1|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + r_1^2}},$$

yoki

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & r_1 \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & r_1 \\ x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + r_1^2}}$$

3. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

Fazoda kesishmaydigan, parallel bo'lmagan ikki to'g'ri chiziq o'zaro ayqash deyiladi.

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \text{ va } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$$

ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani topish masalasini qaraymis.

To'g'ri chiziqlarning $E(x_1;y_1;z_1)$ va $E(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalari va $\vec{p} = (m_1;n_1;r_1)$, $\vec{p}_2 = (m_2;n_2;r_2)$ vektorlari ma'lum.

$\overline{E_1E_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ vektorni olamiz. $\vec{p}_2$ning boshini $\overline{E_1}$ nuqtaga keltiramiz.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overline{E_1E_2}$ vektorga qurilgan parallelepipedni qaraymis.

To'g'ri chiziqlar umumiy perpendikulyari uzunligi biz qidiray ko'rinishiga keltiring :

a) $y = \frac{4x-3}{4x+3}$, b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$, c) $y = \frac{1-x}{4x-3}$

20. $xy-1=0$ berilgan. Son o‘qlari $\alpha=45^0$ ga burilsa, tenglama qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi?

21.Qutb koordinatalar sistemasida quyidagi chiziqlar yasalsin.

1) $r=a\varphi\ (a>0)$, 2)$r=a(1+\cos\varphi)$, 3) $r=a3\sin\varphi$.

22.To‘g‘ri chiziq $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ tenglama bilan berilgan. a ning qanday qiymatida berilgan to‘g‘ri chiziq

a) absissalar o‘qiga parallel;

b) ordinatalar o‘qiga parallel;

c) koordinatalar boshidan o‘tuvchi bo‘ladi?

23. To‘g‘ri chiziq $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ tenglama bilan berilgan m va n ning qanday qimatida bu to‘g‘ri chiziq absissalar o‘qiga parallel va ordinatalar o‘qida koordinatalar boshidan hisoblaganda -3 ga teng kesma ajratadi ? Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

24. To‘g‘ri chiziq

$$(2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0$$

tenglama bilan berilgan. m va n ning qanday qimatida bu to‘g‘ri chiziq ordinatalar o‘qiga parallel va absissalar o‘qida +5 ga teng kesma ajraladi? Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

25. $A(0;1)$ va B(1;2) nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

26. Ordinata o‘qidan $b=3$ kesma ajratib absissa o‘qi bilan a) 45° b) 135° burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalarini yozing.

27. Koordinatalar boshidan o‘tib, absissa o‘qi bilan a) 60° b) 120° burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamalarini yozing.

28. $2x-3y-6=0$ va $12x+5y-60=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesmalar bo‘yicha tenglamalarini yozing.

29. $A(4;3)$ nuqtadan o‘tib, koordinatalar burchagidan yuzi 30 kv birlikka teng uchburchak ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

30. Koordinatalar boshidan $12x-5y+52=0$ to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofa topilsin.

31. Koeffitsiyentlari noldan farqli $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziq va son o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzi $S=\frac{1}{2}\frac{C^2}{|AB|}$ formula bilan topilishini isbotlang.

32.Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping

1) $5x-y+7=0$ va $3x+2y=0$, 2) $x-2y+4=0$ va $2x-4y+3=0$, 3) $3x-2y+7=0$ va $2x+3y-3=0$

4) $3x+2y-1=0$ va $5x-2y+3=0$

33. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $r_1=\dfrac{p_1}{\cos(\varphi-\alpha_1)}$ va $r_2=\dfrac{p_2}{\cos(\varphi-\alpha_2)}$ to‘gri chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

34. Parametrik usulda berilgan $\{x=m_1\lambda+x_1, y=n_1\lambda+y_1\}$ va $\{x=m_2\lambda+x_2, y=n_2\lambda+y_2\}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak $\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$ formula bilan topilishini isbotlang. Parallellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.

35. Uchburchak tomonlari $x+3y=0$, $y=3$, $x-2y+3=0$ tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlari koordinatalari, ichki burchaklari topilsin.

36. $y=kx+5$ to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan $d=\sqrt{5}$ masofa uzoqlikda bo‘lsa, k qanday qiymatlar qabul qiladi?

37. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha masofani toping:

1) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$; 2) $B(0;-3)$, $5x-12y-23=0$;

3) $C(-2;3)$, $3x-4y-2=0$; 4) $D(1;-2)$, $x-2y-5=0$.

38. Quyidagi parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$;

2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

3) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$;

4) $24x-10y+39=0,\ 12x-5y-26=0$.

39 Kvadrat ikki tomoni tenglamalar $5x-12y-65=0$ $5x-12y+26=0$ bo'lsa, uning perimetri va yuzini toping.

40. $3x-y-4=0$ va $2x+6y+3=0$ to'g'ri chiziqlar hosil qilgan burchak bissektrisalaridan koordinata boshidan o'tuvchisi tenglamasini toping.

41. $3x+4y-5=0$ va $5x-12y+3=0$ hosil qilgan o'tkir burchak bissektrisasi tenglamasini yozing.

42. Quyidagi aylanalar markazi koordinatalari va radiusi topilsin:

a) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$,

b) $x^2+y^2-8x=0$, c) $x^2+y^2+4y=0$

43. $A(-4;6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesmadan iborat aylana tenglamasini yozing:

44. $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini yozing.

45. Berilgan nuqtadan berilgan aylanagacha bo'lgan eng qisqa (eng uzun) masofa topilsin.

a) $A(6;-8)$, $x^2+y^2=9$.

b) $B(3;9)$, $x^2+y^2-26x+30y+313=0$

46. Aylanalar orasidagi eng qisqa va eng katta masofani toping.

a) $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ va $x^2+y^2-8x-8y+23=0$.

b) $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ va $x^2+y^2=25$.

47. Qutb koordinatalarida berilgan aylanalar markazi va radiusini aniqlang.

a) $r=3\cos\varphi$, b) $r=-4\cos\varphi$, c) $r=\cos\varphi-\sin\varphi$.

48. Fokuslari absissalar o'qida koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan ellips tenglamasini quyidagi shartlarda yozing:

a) yarim o'qlari 5 va 2;

b) katta o'qi 10, 2c=8 ;

c) kichik o'qi 24, $2c=10$;

d) $2c=6$, $\varepsilon=0,6$;

e) direktrisalar orasidagi masofa 32 va $\varepsilon=0,5$.

49. $9x^2+25y^2=225$ ellips berilgan. Quyidagilarni toping:

a) yarim o'qlari;

b) fokuslari;

c) ekssentrisiteti

d) direktrisa tenglamasi

50. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+6x-x^2}$;

b) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$.

51. Fokuslari absiqissa o'qida koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan giperbola tenglamasini quyidagi shartlarda tuzing:

a) 2a=10, 2b=8 ; b) 2c =2, 2b=8; c) 2c=6, ε=1,5; d) 2a=16, ε=1,25;

e) 2c=20 va asimpto'talari $y=\pm\frac{4}{3}x$.

52. $16x^2-9y^2=144$ giperbolada a,b, fokuslar koordinatalari, ekssentrisiteti, asimpto'ta va direktrisa tenglamalari topilsin.

53. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$, b) $x=-\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}$.

54. Quyidagi giperbolalar fokuslari koordinatalari, yarim o'qlari, ekssentrisiteti, asimpto'ta va direktrisa tenglamalari topilsin:

a) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$,

b) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

55. Uchi koordinata boshida joylashgan va quyidagi shartga bo'ysinuvchi parabola tenglamasini tuzing:

a) Absissaga nisbatan simmetrik va $A(9;6)$ nuqtadan o'tuvchi;

b) Ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik va $C(1;1)$ dan o'tuvchi.

56. Quyidagi chiziqlar shaklini chizing:

a) $y=2\sqrt{x}$, b) $y=-3\sqrt{-2x}$, c) $x=-\sqrt{3y}$, d) $x=-4\sqrt{y}$

57. $r=\dfrac{12}{3-\sqrt{12}\cos\varphi}$ ellipsda $r=6$ bo'ladigan nuqtani aniqlang.

58. $r=\dfrac{15}{3-4\cos\varphi}$ giperbolada $r=3$ bo'ladigan nuqtani aniqlang.

59. $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ parabolada eng kichik radiusli nuqtani aniqlang.

60. Kanonik ko'rinishiga keltiring:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$

2) $2x^2-2xy+y^2-12x+12y-14=0$

3) $2x^2+6\sqrt{3}xy+4y^2-9=0$

4) $x^2-3\sqrt{3}xy-2y^2-10=0$

5) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

61. Uchlari $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$, $C(-3;2;1)$ bo'lgan uchburchak teng yonli ekanligini isbotlang.

62. Uchlari $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$, $C(1;-3;2)$ bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli ekanligini isbotlang.

63. Uchlari $A(3;-2;5)$, $B(-2;1;-3)$, $C(5;1;-1)$ bo'lgan uchburchak o'tkir burchakli ekanligini isbotlang.

64. Absissa o'qida $A(-3;4;8)$ nuqtadan 12 birlik uzoqlikdagi nuqtani toping.

65. Ordinatalar o'qida $A(1;-3;7)$, $B(5;7;-5)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi nuqtani toping.

66. Uchlari $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$, $C(-5;0;2)$ bo'lgan uchburchak A uchidan tushirilgan medyanasi uzunligini toping.

67. Slindrik koordinatalarini toping.

a) $(2;\ -2\ -3)$ b) $(-\sqrt{2};\sqrt{2};\ 1)$ c) $(2;\ -\frac{2}{\sqrt{3}};2)$ d) $(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4})$

e) $(4\cos15^\circ-4\sin15^\circ;1)$ f) $\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8};\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)$ k) $(3;\ 4;\frac{1}{2})$

68. Slindrik koordinatalarda tenglamalarni yozing. a) $x^2+y^2+z^2=1$ b) $x^2+y^2+2z^2+2z-5=0$ c) $x-2y+3z-5=0$

69. Slindrik koordinatalarda tekislik tenglamasi $Rr\cos(\varphi-\alpha)+Cz+D=0$ bolishini isbotlang, bunda R,r,C,D haqiqiy sonlar.

70. Sferik koordinatalarini toping.

a) $(1;\ 1;\ 1)$ b) $(7;\ -7;\ 5)$ c) $(\frac{5}{\sqrt{2}};-\frac{5}{\sqrt{2}};\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$ d) $(0;\ 0;\ -\pi)$

e) $(1;\ 2;\ 3)$ f) $(\cos77;\ \sin77;\ 0)$ g) $(0;\ 1;\ 0)$

71. $\vec{a}=(6;3;-2)$ vektor modulini hisoblang.

72. $A(3;\ -2\ ;\ 1)$, $B(5;\ 4;\ -3)$ bo'lsa, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ koordinatalarini yozing.

73. Agar $\vec{a}=(2;-3;-1)$ oxiri $B(1;-1;\ 2)$ bo'lsa, boshini toping.

74. Agar $\vec{a}=(12;-15;-16)$ vektor yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

75. $\vec{a}$ vektor OX, OY o'qlari bilan mos ravishda $60^0, 120^0$ burchak hosil qilsa va $\vec{a}=2$ bo'lsa, koordinatalarini toping.

76. $\vec{a}=13$, $|\vec{b}|=19$ $|\vec{a}+\vec{b}|=24$ bo'lsa, $|\vec{a}-\vec{b}|$ ni toping.

77. $\vec{a}=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$ bo'lsa, $|\vec{a}+\vec{b}|$ ni toping.

78. Agar ABC uchburchak og'irlik markazi 0 bo'lsa, $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$ ekanligini isbotlang.

79. α,β larning qanday qiymatlarida $\vec{a}=(-2;\ 3;\beta)$, $\vec{b}=(\alpha;\ -6;\ 2)$ vektorlar kolleniar bo'ladi.

80. $\vec{a}=(9;4)$ vektorni $\vec{p}=(2;-3)$, $\vec{q}=(1;2)$ lar bo'yicha yoying.

81. $\vec{c}=(11;-6;5)$, vektorni $\vec{p}=(3;-2;1)$, $\vec{q}=(-1;1;2)$, $\vec{r}=(2;1;-3)$ lar bo'yicha yoying.

82. $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ ayniyatni isbotlang.

83. $\vec{a}=(2;-4;4), \vec{b}=(-3;2;6)$ vektorlar orasidagi burchak kosinusini toping.

84. Uchlari $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ bo'lgan uchburchak ichki B burchagini toping.

85. Uchlari $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$ bo'lgan uchburchak A uchidagi tashqi burchagini toping.

86. $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$ uchli uchburchak ichki burchaklarini toping.

87. Shunday $\vec{x}$ vektor topingki $\vec{a}=(2;1;-1)$ uchun $\vec{x}\vec{a}=3$ bo'lsin. Bunda $\vec{x}$ va $\vec{a}$ o'zaro kolleniar.

88. Shunday $\vec{x}$ vektor topingki, $\vec{a}=(2;3;-1), \vec{b}=(1;-2;3)$ larga perpendikulyar $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$ bo'lsin.

89. $|\vec{a}|=10, |\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ bo'lsa, $\vec{a}\times\vec{b}=12$ ni toping.

90. $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=26$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ni toping.

91. Uchlari $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ bo'lgan uchburchak B uchidan tushirilgan balandlik uzunligini toping.

92. $\vec{a}=(1;-1;3), \vec{b}=(-2;-2;1), \vec{c}=(3;-2;5)$ bo'lsa, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)*\vec{c}$ ni hisoblang.

93. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ nuqtalar bir tekislikda yotishini isbotlang.

94. Uchlari $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$ bo'lgan piramida hajmini toping.

95.Nuqtasi $A(2;-1;3)$, normal vektori $\vec{N}=(-1;2;-3)$ bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

96. Normal vektori koordinata boshidan $A(2;-1;-1)$ ga yo'nalgan tekislik tenglamasini yozing.

97. $A(3;4;-5)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{a}=(3;1;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$ vektorlari parallel tekislik tenglamasini yozing.

98. $A(2;-1;3)$, $B(1;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi $\vec{a}=(3;1;-4)$ ga parallel tekislik tenglamasini yozing.

99. $A(1;-1;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(0;3;-2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

100. Quyidagi tekisliklar orasidagi burchakni toping.

a) $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\ x+y\sqrt{2}-z+3=0$,

b) $3y-z=0,\ 2y+z=0$

c) $6x+3y-2z=0,\ x+2y+6z-12=0$;

d) $x+2y+2z-3=0,\ 16x+12y-15z-1=0$;

101. Koordinata boshidan o'tuvchi, $5x-3y+2z-3=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini yozing.

102. $A(1;2;-1)$ nuqtadan o'tuvchi $x-2y+3z+1=0$, $2x-y+z-3=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

103. $A(1;1;-3)$, $B(2;3;1)$ nuqtalardan o'tuvchi $2x-y+3z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

104. $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ umumiy bitta nuqtada kesishadi. Shu nuqtani toping.

105. $5x-6y+3z+120=0$ tekislik son o'qlaridan ajratilgan piramida hajmini toping.

106. Berilgan nuqtalardan berilgan tekislikkacha masofani toping.

a) $a)A(-2;-4;3)$, $2x-y+2z+3=0$,

b) $16x-12y+15z-4=0$, $B(2;-1;-1)$,

c) $C(1;2;-3)$, $5x-3y+z+4=0$.

107. Parallel tekisliklar orasidagi masofani hisoblang.

a) $x-2y-2z-12=0,\ x-2y-2z-6=0$,

b) $2x-3y+6z-14=0,\ 4x-6y+12z+21=0$,

c) $3x-32y+24z-75=0,\ 15x-16y+12z-25=0$.

108. Kub ikki yogi $2x-2y+1+1=0$, $2x-2y+z+5=0$ tekisliklarda bo'lsa, hajmini toping.

109. Oplikatalar o'qida $A(1;-2;0)$ nuqtalardan va $3x-2y+6z-9=0$ tekislikdan bir xil uzoqlikdagi nuqtani toping.

110. $A(1;2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{a}=(2;-3;4)$ ga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

111. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ va $2x-3y+z+1=0$ kesishish nuqtasini toping.

112. $A(1;-2;3)$ nuqtadan $\begin{cases}2x+y-z-3=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}$ gacha masofani hisoblang.

113. $A(2;-3;4)$ dan $B(1;1;0)$ va $C(-2;1;3)$ lardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqacha masofani toping.

114. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ va $\begin{cases}2x-y+z-5=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ orasidagi burchakni va eng qisqa masofani toping.

115. $\{x=1+2t; y=-2+3t; z=1-6t\}$ va $\begin{cases}2x-y-4z+2=0\\ 4x-y-5z+4=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqlar perpendikulyarligini isbotlang.

116. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ va $\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y-5z-8=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqlar parallel ekanligini isbotlang.

117. $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ to'g'ri chiziq $4x-3y+7z-7=0$ tekislikda yotishini isbotlang.

118. $\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ va $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-5}{4}$ to'g'ri chiziqlar parallelligini ko'rsating, ular orasidagi masofani hisoblang.

4-BOB. FUNKSIYALAR. AKSLANTIRISHLAR

4.1.§. Funksiya, xossalari, turlari

Faraz qilaylik, $X,Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar har bir $x \in X$ son uchun biror f qoidaga ko'ra yagona $y \in X$ son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda $y=f(x)$ funksiya berilgan deyiladi.

Tekislikning $\{x; f(x)\}=\{(x; f(x); x\in X, f(x)\in Y\}$ ko'rinishdagi nuqtalari to'plami berilgan funksiya grafigi deyiladi.

X to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, Y to'plam esa o'zgarish sohasi deyiladi va mos ravishda D(y), E(y) ko'rinishida belgilanadi.

$y=f(x)$ yozuvda x erkli o'zgaruvchi (argument), y esa erksiz o'zgaruvchidir.

Funksiya asosan 3 xil: analitik, jadval, grafik usulda beriladi.

Analitik usulda funksiya $y=f(x)$ formula yordamida beriladi, jadval usulida erkli o'zgaruvchili x ning qiymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari beriladi.

Grafik usulda funksiya tenglamasini qanoatlantiradigan $(x;y)\in R^2$ nuqtalar to'plami beriladi.

Funksiyani o'rganish uning aniqlanish sohasini topishdan boshlanadi.

Misol. $y=\frac{\sqrt{x^2-16}}{\log_2(x^2+3x-10)}$ funksiya aniqlanish sohasini toping.

Ma'lumki,bu funksiya

$$\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2+3x-10>0\\ \log_2(x^2+3x-10)\ne 0\end{cases}$$

shartlar o'rinli bo'lgandagina aniqlanadi.

$$\begin{cases} (x-4)(x+4)\ge 0 \\ (x-2)(x+5)>0 \\ x^2+3x-11\ne 0 \end{cases}$$

bu tengsizliklar yechimlari mos ravishda

$$(-\infty;-4]\cup[4;+\infty),\ (-\infty;-5]\cup[2;+\infty),$$

$$\left(-\infty;-\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(-\frac{3+\sqrt{53}}{2};\frac{-3+\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$$

bo'lganligi uchun, berilgan funksiya ularning barchasi o'rinli bo'lgan

$$\left(-\infty;-\frac{3+\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(-\frac{3+\sqrt{53}}{2};-5\right)\cup(4;+\infty)$$

sohada aniqlanadi, xolos.

Funksiyaning asosiy xossalari bilan tanishamiz.

1. Juft-toqlik

Funksiya aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lsin, ya'ni, agar funksiya biror $x\in R$, da aniqlansa, $(-x)\in R$, da ham aniqlanishi shart.

Ta'rif: Agar $f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$ tenglik o'rinli bo'lsa, funksiya qaralayotgan sohada juft(toq) deyiladi.

Masalan, $y=x^2$, $y=cosx$ funksiyalari juft, $y=x^3$, $y=sinx$ funksiyalari toq.

Yuqoridagi ikkala shartga ham bo'ysinmaydigan funksiya juft ham, toq ham emas, umumiy holdagi funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x^2-x, y=1-x+x^2-x^3$ funksiyalar shular jumlasidandir.

Ta'rifdan, juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan, toq funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashishi kelib chiqadi.

Juft funksiya yig'lindisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi (maxrajdagi funksiya noldan farqli bo'lsa) yana juft funksiya bo'ladi.

Toq funksiyalar yig'indisi, ayirmasi toq funksiya, lekin ko'paytmasi, bo'linmasi juft funksiya bo'ladi.

Misol. 1) $y=2^x+2^{-x}$ juft –toqlikka tekshirilsin.

$y(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=y(x)$ o'rinliligidan juftdir.

2) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ juft- toqlikka tekshirilsin.

$$y(-x)=\ln\left((-x)+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-y(x)$$

Demak, bu funksiya toqdir.

2. Chegaralanganlik

Ta'rif. X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi, agar har bir $x\in X$ uchun shunday $M(m)$ soni topilib,

$$f(x)\le M\ (f(x)\ge m)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa.

X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan funksiyalar chegaralangan deyiladi.

Masalan. $y=x^2$ funksiya quyidan 0 bilan, $y=1-x^2$ funksiya yuqoridan 1 bilan chegaralangan.

$y=sinx$ funksiya esa chegaralangandir, chunki $-1\le\sin x\le 1$

Agar X to'plamda $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalar chegaralangan bo'lsa,

$f_1\pm f_2$, Cf_1, $f_2\ne 0$, da $\dfrac{f_1}{f_2}$ funksiyalar ham chegaralangan bo'ladi.

Funksiyaning X to'plamda chegaralangan ekanligi

$$|f(x)|\le C$$

tengsizlik o'rinli bo'ladigan C sonning ko'rsatilishi demakdir.

Misol. $y = 3^{\sin^2 x} + 3\cos 4x$ funksiyaning chegaralanganligini ko'rsating.

$$\left|3^{\sin^2 x} + 3\cos 4x\right| \le 3^{\sin^2 x} + 3\left|\cos 4x\right| \le 3+3=6 \text{ va } 3^{\sin^2 x} \ge 1$$

bo'lishini etiborga olsak,

$$3^{\sin^2 x} + 3\cos 4x \ge 1-3=-2, -2 \le 3^{\sin^2 x} + 3\cos 4x \le 6,$$

berilgan funksiya chegaralangan.

3. Davriylik

X to'plamda funksiya $y = f(x)$ aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif; Agar shunday T≠0 son mavjud bo'lsaki, ixtiyriy x∈X da

1) $x-T, x+T \in X$

2) $f(x+T) = f(x)$ f

bo'lsa, $f(x)$ funksiya davriy deyiladi. Bunday T sonlarning eng kichik musbati funksiyaning davri deyiladi.

Masalan : $y = sinx$, $y = cosx$ funksiya davri 2π, $y = tgx$, $y = ctgx$ funksiyalar davri esa π dir.

Agar $f_1 f_2$, funksiyalar davri T bo'lsa, $f_1 \pm f_2$, $f_1 \times f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, ($f_2 \neq 0$) funksiyalar ham davriy va davri T dir. Agar f_1, f_2, funksiyalar davri T_1 va T_2 bo'lsa $f_1 \pm f_2$], funksiya davri EKUK(T_1, T_2) bo'ladi. Masalan, y=sin2x+ cos3x funksiyada birinchi qo'shiluvchi davri π, ikkinchisiniki $\frac{2\pi}{3}$, funksiyaning o'zi esa EKUK$\left(\pi; \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$ davrlidir.

4. Monotonlik

X to'plamda $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Tarif. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lishidan $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ kelib chiqsa, f(x) funksiya X to'plamda o'suvchi(kamayuvchi) deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Agar f_1, f_2 funksiyalar X to'plamda o'suvchi(kamayuvchi) bo'lsa, $f_1 + c$, $f_1 + f_2$, $c > 0$ da cf_1 funksiyalar o'suvchi (kamayuvchi), $c < 0$ da esa c f_1 funksiya kamayuvchi (o'suvchi) bo'ladi.

Misol. 1) $y = x^2$ funksiya $(-\infty; 0]$da kamayuvchi, $[0; +\infty)$ da o'suvchi. Haqiqatan, $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$, $x_1 < x_2$ bo'lsin.

Unda

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0,$$

chunki $x_1 - x_2 < 0$. $x_1 < x_2$ dan $f(x_1) < f(x_2)$ kelib chiqdi, demak, $f(x) = x^2$ funksiya $[0; +\infty)$ da o'suvchi.

Endi bazi elementar funksiyalarni sanab o'tamiz.

1. $y = |x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ bu funkslya modul deyiladi.

2. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x, 0 \end{cases}$ bu funksiya x ning ishorasi deyiladi.

3. $y = [x]$ ko'rinishda x ning butun qismi belgilanadi. Berilgan sonning butun qismi o'ziga teng yoki undan kichik eng katta butun sondir, masalan, $[1,5] = 1$, $[-1,5] = -2$, $[-1] = 1$

4. $y = \{x\}$ ko'rinishda x ning kasr qismi belgilanadi. $x = [x] + \{x\}$ bo'lishi tushunarlidir.

5. Darajali funksiya: $y = x^n$

6. Ko'rsatgichli funksiya: $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

7. Logarifmik funksiya: $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

8. Trigonometrik funksiyalar: $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$

9. Teskari trigonometr $x = [x] + \{x\}$ tenglik funksiyalar: *y=arcsinx, y=arccosx, y=arctgx, y=arcctgx*

10. Giperbolik funksiyalar:

a) Sinus giperbolik funksiya: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$

b) Kosinus giperbalik funksiya: $y=\frac{e^{+x}+e^{-x}}{2}=chx$

v) Tangens giperbolik funksiya: $y=\frac{e^{+x}-e^{-x}}{e^{+x}+e^{-x}}=thx$

g) Kotangens giperbolik funksiya: $y=\frac{e^{+x}+e^{-x}}{e^{+x}-e^{-x}}=cthx$

Giperbolik funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

$$sh0=0,\ ch0=1,\ thx=\frac{shx}{chx},\ cthx=\frac{chx}{shx}$$

$ch^2x-sh^2x=1,\ ch^2x+sh^2x=ch2x,\ 2shxchx=sh2x$

$Sh(x+y)=shxchy+chxshy,\ ch(x+y)=chxchy+shxshy,$

$th(x+y)=\frac{thx+thy}{1+thxthy}$

Bu funksiyalar aslida ko'rsatgichli funksiyalar yordamida quriladi,lekin xossalari trigonometrik funksiyalar xossalariga o'xshashligidan shinday nomlanishiga sabab bo'lgan.

Elementar funksiyalardan arifmetik amallar yordamida olinadigan barcha funksiyalar elementar funksiyalardir.

Funksiyalar quyidagicha berilishi mumkin:

1°.Oshkor funksiya.Bunda funksiya shunday tenglama bilan beriladiki,uning o'ng tomoni faqat erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi,masalan, $y=x^2-4x+5$.

2°.Oshkormas funksiya.Funksiya y ga nisbatan yechilmagan $F(x;y)=0$tenglama bilan beriladi,masalan, $\frac{x^2-y^2}{a^2+b^2}=1$

3°.Teskari funksiya $y=f(x)$funksiya bitta x ga yagona y ni mos qo'yadi.Endi shu $y\in X$ga yagona $x\in X$ni mos qo'yuvchi $x=\varphi(y)$ funksiyalarni qarash mumkin.Bu funksiya $y=f(x)$ga teskari deyiladi.Uni qayta belgilab (x ni y, y ni x deb) $y=f^{-1}(x)$tarzida yoziladi.Masalan, $y=a^x$ga $y=\log_a x$ funksiya teskaridir. Ixtiyoriy qat'iy monoton funksiya teskarisi doimo mavjud ekanligini isbotlash mumkin.

4°. Murakkab funksiya. Agar $y=f(u)$ funksiya arginumenti ham $u=\varphi(x)$funksiya bo'lsa,ular superpozitsiyasi $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya deyiladi.Masalan $y=lnsinx$, $y=(2x-1)^3$,……

5°. Parametrik funksiya. Agar funksiya ham,argumenti ham biror t parametr yordamida aniqlansa, ya'ni $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ funksiya parametrik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $x^2+y^2=R^2$ aylanani $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$ ko'rinishda berish mumkin.

Funksiyalar quyidagicha klassifikatsiyalanadi:

1°. Butun ratsional funksiyalar:

$$y=P_n(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-1}+...+a_2+a_o$$

2°. Kasr irratsional funksiyalar:

$$y=\frac{Q_m(x)}{P_n(z)}=\frac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0}$$

3°. Irratsional funksiyalar; masalan. $y=\sqrt{x},\ y=x+\sqrt{x}$,…

4°. Transendent funksiyalar, Ratsional yoki irratsional bo'lmagan funksiyalar transendent funksiyalar deyiladi, masalan,

$$y=\sin x,\ y=\arcsin x,\ y=\cos x+x,\ \ldots$$

Funksiya grafiklari ustida arifmetik amallarni bajarish uchun har bir $x\in X$ da berilgan amal bajariladi, natijasi tekislikda belgilanadi. Olingan nuqtalar birlashtirilsa, natijaviy funksiya hosil bo'ladi.

4.2.§. Akslantirishlar

Funksiya tushunchasini umumlashtirish. Funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to'plam bo'lsin. Agar har bir $x\in X$ songa f qoida bo'yicha aniq bir $y=f(x)$ son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya aniqlangan deyiladi. Bunda X to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil bo'lgan $E(f)$ to'plam f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi, ya'ni $E(f)=\{y: y=f(x), x\in X\}$

Agar sonli to'plamlar o'rnida ixtiyoriy to'plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya'ni akslantirish ta'rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar har bir $x\in X$ elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdan yagona y element mos qo'yilsa, u holda X to'plamda aniqlangan Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish* berilgan deyiladi. X to'plamda aniqlangan va Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish* $f: X\to Y$ kabi belgilanadi.

Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: N barcha natural sonlar to'plami, Z barcha butun sonlar to'plami, Q barcha ratsional sonlar to'plami, R barcha haqiqiy sonlar to'plami, $R_+=[0,\infty)$, $Z_+\{0\}\cup N$ hamda R^n sifatida n o'chamli arifmetik Evklid fazo.

$f: X\to Y$ akslantirishga misollar keltiramiz.

1-misol. $f: R\to R,\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$

2-misol. $g: R\to R, g(x)=[x]$.Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi.

3-misol. Dirixle funksiyasi $D: R\to R$,

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ agar } x\in Q\\ 0, \text{ agar } x\in R\setminus Q\end{cases}$$

4-misol. Riman funksiyasi $R_o: R\to R$

$$R_o(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, \text{ agar } x=\frac{m}{n}\in Q-\text{qisqarmas kasr}\\ 0, \text{ agar } x\in R\setminus Q\end{cases}$$

5-misol. Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi

$$P: R^2\to R,\ P(x,y)=x$$

6-misol. Sferik akslantirish

$$S: R^3\to R,\ S(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

7-misol. Yuqorida, 1-6 misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohalarini toping.

Yechish. 1-misolda keltirilgan $f: R\to R$ akslantirishlarning qiymatlar sohasi $E(f)=[1,\infty)$ dan iborat. Chunki barcha $x\in R$ lar uchun $\sqrt{x^2+1}\geq 1$ va ixtiyoriy $y\in[1,\infty)$ uchun $f\left(\sqrt{y-1}\right)=\sqrt{y}$ tenglik o'rinli.

2-misolda keltirilgan $g: R\to R, g(x)=[x]$ akslantirishlarning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko'ra $E(g)=Z$ dan iborat.

Dirixle funksiyasi $D: R\to R$ ning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko'ra $E(D)=\{0;1\}$ ikki nuqtali to'plamdan iborat.

Riman funksiyasi $R_o: R\to R$ ning qiymatlar sohasi,

$$E(R_o)=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\frac{1}{n},\ldots\right\}.$$

Ortogonal proyeksiyalavchi akslantirish $P: R^2\to R,\ P(x,y)=x$ ning qiymatlar sohasi $E(P)=R$ dan iborat.

Sferik akslantirish $S: R^3\to R,\ S(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ning qiymatlar sohasi $E(S)=R_+$ dan iborat.

Har bir $a\in X$ uchun unga mos qo'yilgan $b=f(a)\in Y$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi. Umuman, X to'plamning biror A qism to'plami berilgan bo'lsa, A to'plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat bo'lgan to'plam, A to'plamning f akslantirishdagi tasviri yoki aksi deyiladi va $f(A)$ kabi belgilanadi. $b\in Y$ ixtiyoriy element bo'lsin. X to'plamning b ga akslanuvchi barcha elementlari b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(b)$ kabi belgilanadi. $f: X\to Y$ akslantirishda $B\subset Y$ to'plam uchun X ning B ga o'tuvchi (akslanuvchi) qism to'plami B to'plamning f akslantirishdagi asli deyiladi va $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$ kabi belgilanadi. Agar barcha $b\in B$ elementlar uchun ularning $f^{-1}(b)$ aslilari bo'sh bo'lsa, u holda B to'plamning asli ham bo'sh to'plam bo'ladi.

8-misol. 1 va 2 akslantirishlarda $A=[0;3)$ to'plamning tasviri va $B=(1;4)$ to'plamning aslini toping.

Yechish. f akslantirish $[0;\infty)$ da o'suvchi va uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun $f([0;3))=[1;\sqrt{10})$ bo'ladi. $g([0;3))$esa $[0;3)$ dagi butun sonlardan, ya'ni $g([0;3))=\{0;1;2\}$ dan iborat. Endi $B=(1;4)$ to'plamning aslini topamiz: $f^{-1}(B)=(-\sqrt{15};0)\cup(0;\sqrt{15})$ $g^{-1}(B)=[2;4)$.

9-misol. 3 va 4 akslantirishlarda $A=R\setminus Q$ to'plamning aksini(tasvirini) va $B=(1;\infty)$to'plamning aslini toping.

Yechish. D va R_o akslantirishlar $R\setminus Q$ to'plamning barcha elementlariga nolni mos qo'yadi, shuning uchun $D(R\setminus Q)=R_o(R\setminus Q)=\{0\}$. Dirixle va Riman funksiyalarining 1 dan katta qiymatlari mavjud emas, shuning uchun $D^{-1}(B)=R_o^{-1}(B)=\varnothing$

Aniqlanish sohasi X bo'lgan $f:X\to Y$ akslantirishda $f(X)=Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ustiga* yoki *syuryektiv akslantirish* deyiladi. Umumiy holda, ya'ni $f(X)\subset Y$ bo'lsa, u holda f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ichiga akslantiradi* deyiladi.

Agar $f:X\to Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1=f(x_1)$ va $y_2=f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f *inyektiv akslantirish* yoki *inyeksiya* deyiladi.

Bir vaqtda ham syuryektiv ham inyektiv bo'lgan $f:X\to Y$ akslantirish *biyeksiya*, yoki X va Y to'plamlar orasida *o'zaro bir qiymatli moslik* deb ataladi.

10-misol. $f:R\to R, f(x)=ax+b, a\neq 0$ akslantirishning biyeksiya ekanligini isbotlang.

Yechish. Chiziqli $f:R\to R$ akslantirishning biyeksiya ekanligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy $c\in R$ da $ax+b=c$ tenglamaning yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatish yetarli. Yechimning mavjudligi $f:R\to R$ akslantirishning

syuryektivligini, yechimning yagonaligi esa uning inyektivligini ta'minlaydi. Bu tenglamaning yechimi yagona bo'lib u $x=\dfrac{c-b}{a}$ dir.

11-misol. Agar $f:X\to Y$ biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A\subset X$ uchun $f:A\to B$, $(B=f(A))$ham biyeksiya bo'lishini isbotlang.

Yechish. $f(A)=B$ ekanligidan uning syuryektiv akslantirish ekanligi kelib chiqadi, inyektivligi esa $f:X\to Y$ ning inyektivligidan kelib chiqadi.

1-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) \qquad (2.1)$$

2-teorema. *To'plamlar kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga teng, ya'ni*

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) \qquad (2.2)$$

Ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar birlashmasi va kesishmasi uchun ham 2.1 va 2.2-teoremalar o'rinli, ya'ni

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha),\quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha)$$

3-teorema. *Ikki to'plam birlashmasining tasviri ular tasvirlarining birlashmasiga teng*

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B) \qquad (2.3)$$

3-teorema ham ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar uchun o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$f\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha} f(A_\alpha)$$

tenglik o'rinli.

1-eslatma. Umuman olganda, ikkita to'plam kesishmasining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng emas. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilamiz.

12-misol. 5-misolda keltirilgan ortogonal proyeksiyalavchi akslantirish $P(x,y)=x$ va

$A=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y=0\}$, $B=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y=1\}$ to'plamlar berilgan. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$ tenglik o'rinli emasligini ko'rsating.

Yechish. A va B kesmalar o'zaro kesishmaydi, ya'ni $A\cap B=\varnothing$ Ammo ularning P akslantirishdagi tasvirlari ustma-ust tushadi, ya'ni $P(A)=[0;1]$, $P(B)=[0;1]$ va $P(A)\cap P(B)=[0;1]$.Biroq $P(A\cap B)=\varnothing$.

Mashqlar.

1. Aniqlanish sohasini toping.

1) $y=\frac{1}{4-x^2}$ 2) $y=\sqrt{4x-x^3}$ 3) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

4) $y=\sqrt{\frac{x^2-9x+14}{x^2-9}}$ 5) $y=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2+4}$

6) $y=\lg(5-x)$ 7) $y=\log_2\log_3\log_4 x$

8) $y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}$ 9) $y=\sqrt{1-tg^2 4x}$ 10) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

2. Juft-toqligini tekshiring.

1) $y=x^2-4x^4$ 2) $y=x^3-5x^5$

3) $y=x\sin x$ 4) $y=x\cos x$

5) $y=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$ 6) $y=thx$

7) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 8) $y=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

3. Chegaralanganligini tekshiring.

1) $y=\frac{x^2+x+1}{1+x^2}$ 2) $y=2\sin x+\cos x$

3) $y=\sqrt{9-x^2}$ 4) $y=2^{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}$

5) $y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$ 6) $y=2^{\cos 2x}+5\sin x$

7) $y=2^{1-\sin x}+2\cos x$ 8) $y=2\sin 3x+5\cos 3x$

4. Davrini aniqlang.

1) $y=\cos x+\sin x$ 2) $y=\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}$

3) $y=\cos x+\cos 5x$ 4) $y=\cos 3\pi x+\sin 2\pi x$

5) $y=|\cos x|$ 6) $y=\ln(\sin x)$

7) $y=\ln\sin x$ 8) $y=\sin\sqrt{3}x+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+tg7\sqrt{3}x$

5. Monotonlikka tekshiring.

1) $y=x^3$ 2) $y=\log_2 x$ 3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

4) $y=\frac{1}{x-1}$ 5) $y=\frac{2x+3}{x+1}$

6. Grafigini chizing.

1) $y=x^2$, $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$, $y=x^2+1$, $y=2(x+1)^2+1$, $y=8x-x^2$, $y=x^2-3x+2$.

2) $y=x^3$, $y=-2x^3$, $y=(x-1)^3$, $y=2(x-1)^3+1$

3) $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x-1}$, $y=\frac{1}{x+1}$, $y=\frac{1-x}{1+x}$.

4) $y=\sin^2 x$, $y=\sin^3 x$, $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

5) $y=x+\sin x$, $y=x\sin x$, $y=x\,sgn(\sin x)$

7. $f:R\to R$, $f(x)=0,5[x]$ funksiya berilgan. Agar $A=[0;8]$ $B(2;3)$ bo'lsa, $f(A)$ va $f^{-1}(B)$ larni toping.

8. $f:X\to[5;20]$, $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan. X to'plam qanday tanlansa, f– ustiga (syuryektiv) akslantirish bo'ladi?

9. $f:X\to[0;\infty]$, $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan. X to'plam qanday tanlansa, f inyektiv akslantirish bo'ladi?

10. $f:[0;\pi]\to[-1;1]$, $f(x)=\cos x$, $g:[0;\pi]\to[0;1]$, $g(x)=\sin x$

$\varphi:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to[0;1]$, $\varphi(x)=\sin x$, $\psi:[0;3]\to[0;10]$, $\psi(x)=x^2+1$

akslantirishlar ichidan inyektiv, syuryektiv va biyektivlarini alohida ajrating.

11. $[-1;2]$ va $[-1;0)\cup[1;2]$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

12. Tekislikda $A=\{(x;y):0<x^2+y^2<1\}$ va $B=\{(x;y):x^2+y^2>1\}$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

13. Tekislikdagi ochiq to'rtbo'rchak va tekislik orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

14. Aylana va to'g'ri chiziq orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

15. Kesma va haqiqiy sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

16. Interval va haqiqiy sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

17. Birlik ochiq doira va birlik yopiq doira o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

18. Birlik yopiq doira va uning to'ldiruvchi to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

5-BOB. KETMA-KETLIK VA FUNKSIYA LIMITI. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

5.1.§. Ketma-ketlik limiti

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiya aniqlanish sohasi natural sonlar to'plami N bo'lsa, bu funksiya ketma-ketlik deyiladi, uni $a_n=f(n)$ o'rniga $\{a_n\}$ ko'rinishida belgilanadi.

Boshqacha aytganda, biror qonun bo'yicha har bir natural songa biror a_n son mos qo'yilgan bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan deyiladi.

$a_1,a_2,...,a_n$ sonlar ketma-ketlik hadlari, a_n umumiy hadi deyiladi.

Ketma-ketlik hadlari son o'qida tasvirlanadi.

Ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar quyidagicha kiritiladi.

$$m\{a_n\}=\{ma_n\}=\{ma_1,ma_2,ma_3,...,ma_n,..\}$$
$$\{a_n\}\pm\{b_n\}=\{a_n\pm b_n\}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3,...,a_n\pm b_n,..\}$$
$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_nb_n\}=\{a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3,...,a_nb_n,..\}$$
$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}=\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3},...,\frac{a_n}{b_n}...\right\}.$$

Ta'rif: $\{a_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday m, M sonlar mavjud bo'lib, ixtiyoriy had uchun $m\le a_n\le M$ o'rinli bo'lsa, ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Agar $C=\max\{|m|,|M|\}$ bo'lsa, chegaralanganlik shartini $|a_n|\le C$ ko'rinishida yozish mumkin.

$\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan deyiladi, agar har bir musbat C soni uchun $|a_n|>C$ shatrni qanoatlantiruvchi element topilsa.

Agar ixtiyoriy musbat C son uchun shunday N nomer topilsaki, $n>N$ bo'lganda $|a_n|>C$ bajarilsa, bu $\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deyiladi.

Cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan, lekin chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta bo'lishi shart emas. Masalan.

$\{1;2;1;3;1;4;...;1;n;1;n+1;...\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan, lekin cheksiz katta emas, chunki $|a_n|>C$ barcha toq nomerli hadlar uchun bajarilmaydi.

$\{a_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik deyiladi, agar $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N,\ n>N$ larda $|a_n|\le\varepsilon$ o'rinli bo'lsa.

Demak, $\{a_n\}$ cheksiz katta bo'lsa $\{\frac{1}{a_n}\}$ cheksiz kichik bo'ladi va aksincha.

$\{n\}$ cheksiz katta ekanligi ma'lum, demak, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichikdir.

Ta'rif: a soni $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar ixtiyoriy musbat ε soni uchun shunday N nomer topilsaki, $n>N$ larda $|a_n-a|<\varepsilon$ o'rinli bo'lsa.

Limitga ega ketma-ketlik yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Simvolik tarzda limit $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ yoki $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ tarzida yoziladi. Limit so'zi lotincha "limes" so'zidan olingan.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$ ekanligini isbotlang. $\forall\varepsilon>0$ olamiz.

$|a_n-1|=\left|\frac{n}{n+3}-1\right|=\frac{3}{n+3}<\varepsilon$ dan $n+3>\frac{3}{\varepsilon}$. Demak, $N=[\frac{3}{\varepsilon}-3]$ deyilsa, $n>N$ larda $|a_n-1|<\varepsilon$ bajariladi, demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=1$.

Cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas. Lekin, uni cheksiz limitga ega deb,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

ko'rinishida yozish mumkin. Cheksiz kichiklarning yaqinlashuvchi va limiti nol ekanligi tushunarli.

Yaqinlashuvchu ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

Agar $\{a_n\},\{b_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bo'lsa $ca_n,\{a_n\pm b_n\},a_nb_n,\frac{a_n}{b_n},(b_n\neq0)$ ketma- ketliklar ham yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Ta'rif: Agar ixtiyoriy $n\in N$ va $a_n<a_{n+1}$ bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi deyiladi, $a_n\le a_{n+1}$ bo'lsa, kamaymaydigan, $a_n>a_{n+1}$ bo'lsa, kamayuvchi, $a_n\ge a_{n+1}$ bo'lsa o'smaydigan deyiladi.

Bunday ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi. Ular hech bo'lamagnda bir tomondan chegaralangan bo'ladi.

Teorema. Monoton chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

Agar a soni o'suvchi $\{a_n\}$ elementlarini, masalan, yuqoridan chegaralasa, $a_n\le a$, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ekanligini isbotlash mumkin. a

Teorema. Ichma-ich joylashgan

$$[a;b]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset...\supset[a_n;b_n]\supset...$$

kesmalar uchun, ularning barchasiga tegishli yagona nuqta mavjud.

Misol. $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik yaqinlashishini isbotlaymiz.

Buning uchun uning o'suvchi va yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Nyuton binomi formulasiga ko'ra,

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+...+$$

$$+\frac{n(n-1)...\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

Bu ifodani quyidagicha yozish mumkin.

$$a_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

U holda

$$a_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Bu hadlarda $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ bo'lganligi uchun $a_n<a_{n+1}$, $\{a_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ekan.

$$a_{n+1}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Demak $\{a_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, limitga ega. Bu limit e harfi bilan belgilanadi, $2<e<3$. Aslida e=2.7182818284590….

Misollar. 1). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000}{n+\frac{1}{n}}=0$. Chunki $\frac{1}{n}\to 0, \frac{1000}{n}\to 0$

2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=0$

3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}...\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2.$

4). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2=e^2.$

5.2.§. Funksiya limiti

Biror a nuqta va unga yaqinlashuvchi $x_1, x_2, ..., x_n, ...,\ a\in X$, ketma-ketlik berilgan bo'lsin. X to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilsa,

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

ham sonly ketma- ketlik bo'ladi. Uning limiti mavjudligi masalasini ko'ramiz.

Ta'rif: Agar $x_n\to a$ da $f(x_n)\to A$ bo'lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

ko'rinishida yoziladi. $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik yagona limitga egaligidan A son ham yagona bo'ladi.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy $\forall\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni mavjud bo'lsaki, barcha $x\in X$lar uchun $|x-a|<\delta$ ekanligidan $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqsa, A soni $f(x)$ ning $x=a$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Birinchi ta'rifni sonly ketma-ketliklar tilidagi, ikkinchisini "$\varepsilon-\delta$ tilidagi" limit ta'riflari deyiladi va ular o'zaro ekvivalentdir.

Ta'rif: A soni $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap(o'ng) limiti deyiladi, agar a ga $\{x_n\}$ elementlari chapdan (o'ngdan) yaqinlashganda $f(x_n)$ ketma-ketlik A ga yaqinlashsa.

Bu limitlar bir tomonli limitlar deyiladi va

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=A\ \left(\lim_{x\to a+0}f(x)=A\right)$$

ko'rinishida yoziladi.

Misol. $f(x)=\operatorname{sgn}x$ funksiyaning chap limiti ($x=0$ da)

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{sgn}x=-1;\quad \lim_{x\to 0+}\operatorname{sgn}x=1$$

bundan tashqari $\operatorname{sgn}0=0$

Teorema. $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada limiti mavjud bo'lishi uchun, bu nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud va teng bo'lashi zarur va etarlidir. Bu holda funksiya limiti ham bir tomonli limitlarga tengdir.

Ta'rif: A soni $f(x)$ ning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, agar argumentning cheksiz katta qiymatli ketma-ketliklarida $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik A soniga yaqinlashsa. Uni

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

ko'rinishida yoziladi.

Misol. 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, 2). $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$

Agar biror tovar narchi x ,unga talab y ekanligi berilib, ular bogliqligi $y=200:(x+2)$ bo'lsa, tovar narxi oshganda talab nolga intilishi kelib chiqadi.

Agar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = B$ bo'lsa,

1). $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$, 2). $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

,3). $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}$,

4). $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = A$ bo'lib, qaralayotgan sohada $f(x) \le g(x) \le h(x)$ bo'lsa, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = A$ ham o'rinlidir.

Misollar.

1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(3x+1)^{10}(4x-2)^{10}}{(2x-1)^{20}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(3x+1)}{(2x-1)}\right)^{10} \cdot \left(\frac{(4x-2)}{(2x-1)}\right)^{10} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{2^{10}} 2^{10} = 6^{10}.$$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 + x^2 - 8x + 12}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^2 (x+3)}{(x-2)^2 (x-1)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+3)}{(x-1)} = 5$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = ?$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt[3]{x+6} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+7} + 3}{\sqrt{x+7} + 3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4}{\sqrt{x+7} + 3} = \frac{4+4+4}{3+3} = \frac{12}{6} = 2$$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right] \cdot \frac{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(a+b)x + ab}{x\left(\sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)} + 1\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{(a+b) + \frac{ab}{x}}{\left(\sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)} + 1\right)} = \frac{a+b}{2}.$$

1. Birinchi ajoyib limit. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ekanligini isbotlaymiz.

Isbotlash uchun markazi koordinata boshida bo'lgan, radiusi bir doirani qaraymiz. Radian o'lchovi $x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ bo'lgan markaziy burchakni qaraymiz.

$$S_{AOB} < S_{AOB\ sektor} < S_{AOC}$$

ekanligidan

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot tgx}{2}$$

yoki $\sin x < x < tgx$.

Tengsizlik tomonlarini $\sin x$ ga bo'lsak,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$\frac{x}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$ funksiyalari juftligi uchun olingan tensizlik $0 < x < \frac{\pi}{2}$ da ham o'rinli bo'ladi.

$\lim\limits_{x\to 0} 1 = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ va 4° xossa yordamida $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ ekanligini olamiz. Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Misollar. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 8\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 8.$

2. Ikkinchi ajoyib limit. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Isbotlash uchun, avvaldan ma'lum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ dan foydalanamiz. So'ngra $x = \frac{1}{n}$ almashtirish yordamida ikkinchisi isbotlanadi.

Misollar. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^5 = e^5.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{15} = e^{15}.$

Misol. P% yillik foyda beradigan bankka Q_0 miqdorda omonat qo'yildi. t yildan so'ng qo'yilgan omonat Q_t qancha bo'lishini toping.

Har yilda qo'yilgan omonat $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ marta oshadi.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right), Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, \dots Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

uzluksiz berilsa, t yildan so'ng omonat,

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Ta'rif: Agar $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x) = A$ bo'lsa, $f(x) = A + \alpha(x)$ bo'ladi.

Cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi (ayirmasi), ko'paytmasi yana cheksiz kichik miqdor bo'lishi ravshan.

Ta'rif: $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz katta miqdor deyiladi, agar yetarli katta $M > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x - x_0| < \delta$ shartga bo'ysinuvchi x lar uchun $|f(x)| > M$ bo'lsa, quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

Misol. 1) $x \to \frac{\pi}{2}$ da tgx, $x \to \infty$ da $\sqrt{5x-7}$ lar cheksiz kattadir.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\alpha(x) = 0$ cheksiz kichik bo'lsa, $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ funksiya $x \to x_0(\infty)$ da cheksiz katta bo'ladi.

5.3.§. Funksiyaning uzluksizligi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif: $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar bu nuqtada funksiyaning limiti va qiymati teng bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ekanligidan $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$ kelib chiqadi, ya'ni uzluksiz funksiyalarda limit va funksiya belgisi o'rinlarini almashtirish mumkin.

Ketma-ketliklar tilida funksiya uzluksizligi quyidagichadir: $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar x_0 ga yaqinlashuvchi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik uchun mos $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashsa.

"$\varepsilon - \delta$ tilida" bu ta`rif quyidagicha bo'ladi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday, $\delta>0$ mavjud bo'lsaki, $|x-x_0|<\delta$ shartga bo'ysinuvchi x lar uchun $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Agar $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

$\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ kattaliklar mos ravishda argument va funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.
Uzluksizlik bu tilda $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ ko'rinishida yoziladi.

Teorema: Agar x_0 nuqtada $f(x),g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsa,

$$f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Algebraik ko'phadlar, $\sin x,\cos x,|x|$kabi funksiyalar ixtiyoriy nuqtada uzluksizdir. $[x],\{x\},\operatorname{sgn} x, tgx, ctgx$ kabi funksiyalar uzluksiz bo'lmaydigan nuqtalarni ko'rsatish mumkin.

Ta'rif: Agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lmasa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun uzilish nuqtasi deyiladi.

x_0 uzilish nuqtasi I-tur deyiladi, agar $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ o'rinli bo'lsa.

Masalan, $f(x)=\operatorname{sgn} x$ uchun x_0 nuqta I-tur uzilish nuqtasidir, chunki

$$\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn} x=-1,\ \lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn} x=1$$

x_0 uzilish nuqtasi II-tur deyiladi, agar x_0 nuqtada hech bo'lmaganda bitta bir tomonlama limit mavjud emas yoki cheksiz bo'lsa.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ uchun $x=0$ nuqta II-tur uzilish nuqtasidir, chunki,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

Cheklita nuqtada I-tur uzilishga ega, qolgan nuqtalarda uzluksiz funksiyalar qaralayotgan sohada bo'lakli uzluksiz deyiladi.
Masalan, $f(x)=[x], f(x)=\{x\}$ funksiyalari bo'lakli uzluksizdir.

Agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$$

munosabatlar o'rili bo'lsa, x_0 nuqta yo'nalishining mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi deyiladi.

Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalarini keltiramiz.

Teorema (Bolsano-Koshi birinchi teoremasi): $f(x)$ funksiya $[a,b]$kesmada uzluksiz va $f(a)\cdot f(b)<0$ bo'lsin. U holda shunday $\exists c\in(a,b)$ mavjudki, $f(c)=0$ bo'ladi.

Isboti: $[a,b]$kesmani teng ikkiga bo'lamiz. Agar o'rta nuqtada $f(x)=0$ bo'lsa teorema isbotlanadi, aks holda bo'laklardan chegaralardagi ishoralari turlichasini $[a_1,b_1]$ deb olib, uni ham teng ikkiga bo'lamiz,...

Natijada ichma-ich joylashgan

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset...$$

oraliqlar paydo bo'lib, ularning umumiy nuqtasi c da $f(c)=0$ dir.

Teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi): $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz,

$f(a)=A, f(b)=B$ bo'lsin. Agar $A<C<B$ bo'lsa, shunday $c\in(a,b)$ mavjudki, $f(c)=C$ bo'ladi.

Teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi): Agar, $f(x)$ funksiya $[a,b]$kesmada aniqlangan,uzluksiz bo'lsa, bu kesmada chegaralangan hamdir.

Teorema (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi): Agar, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya bu oraliqda aniq quyi (yuqori) chegarasiga erishadi, ya'ni shunday $x_1,x_2\in[a,b]$mavjudki,

$$f(x_1)=M=\sup_{[a,b]} f(x),\ f(x_2)=m=\inf_{[a,b]} f(x)$$

Isboti: elementar funksiyalar uzluksizligiga asoslangan muhim limitlarni qarab chiqamiz.

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p$.

Isboti. Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+...+x^p$$

Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+px+\dfrac{p(p-1)}{2!}x^2+...+x^p-1}{x}=p$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e$

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Isboti. $a^x-1=t$ almashtirish o'tkazamiz. Undan $x=\log_a(1+t)$ kelib chiqadi. $x\to 0$ da $t\to 0$ ekanligini xisobga olib,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Misollar. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin^2 3x)^{10}-1}{\sin^2 3x}\cdot\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9=90$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg2x)}{tg2x}\cdot\dfrac{tg2x}{2x}\cdot 2=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x+4^x-2}{4^x-2^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(9^x-1)+(4^x-1)}{(4^x-1)-(2^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(9^x-1)}{x}+\dfrac{(4^x-1)}{x}}{\dfrac{(4^x-1)}{x}-\dfrac{(2^x-1)}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 9+\ln 4}{\ln 4-\ln 2}=5$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\sin 4x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x-1+b^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^x-1+b^x-1}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1}{\ln(1+\sin 4x)}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1}{2\ln(1+\sin 4x)}}=e^{\frac{1}{8}(\ln a+\ln b)}=\sqrt[8]{ab}.$

Mavzuga doir misol va masalalar.

1. Tengliklarni isbotlang.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>0$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2. Quyidagilarni toping.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-5n^2+1}{1+n+n^3}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+(n-1)}{n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}}{x}$, $(|a|<1,|b|<1)$, 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+...+(n-1)^2}{n^3}$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$, 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4^2+7^2+...+(3n-2)^2}{(1+7+...+(3n-2))^2}$;

3. Funksiya limiti Ta'rifidan foydalanib isbotlang.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$ 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x_0}$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

4. Limitlarni toping .

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1-2x^2-2}{x^2-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1-2x^2-2}{x^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-7x+10)^{10}}{(x^3-5x^2+2x+8)^{10}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-2}{2-\sqrt{x+2}}$;

5. Limitlarni toping.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{2+\sqrt{2+x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[3]{6+x}}{\sqrt{14+x-4}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

6. Ajoiyib limitlar yordamida toping .

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx^2}{nx^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2 x)^{ctg^2 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+4x)^{10}-1}{\sin x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+tg^2 4x)^{10}-1}{x^2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{tg^2 x}-1}{x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$; 17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}$.

7. Uzliksizlika tekshiring , uzilish nuqtasi tipini aniqlang .

1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; 2) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}\\ x\neq 1\end{cases}$; 3) $y=\dfrac{1}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;

6-BOB. HOSILA. DIFFERENSIYAL

6.1.§. Hosila, mazmuni, hisoblash qoidalari

Hosila Ta'rifi, mazmuni. X oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiyani qaraymiz. Biror $x\in X$ga Δx orttirma beramiz , $x+\Delta x$ ham X ga tegishli bo'lsin. Funksiya $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttima oladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deb , funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini, argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ga aytiladi va $y'(x), f'(x), \dfrac{df}{dx}$ ko'rinishida belgilanadi.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty$ bo'lsa, funksiya bu nuqtada cheksiz hosilaga ega deyiladi .

Ta'rifni $x_1, x_2\in X$ nuqtalar uchun

$$f'(x)=\lim_{x_1\to x_2}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

ko'rinishida kiritish mumkin.

Misollar. 1) $y=x^p\ (p\neq -1)$funksiyaning ixtiyoriy $x\in R$nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz.

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x+x)^p-x^p}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^p}{x}\frac{\left(\frac{\Delta x}{x}+1\right)^p-1}{\frac{\Delta x}{x}}=px^{p-1}.$$

2. $y=\sin x$ $\quad y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(\Delta x+x)-\sin x}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x+2x}{2}}{\Delta x}=\cos x$$

3) $y=\cos x \quad y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(\Delta x+x)-\cos x}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x+2x}{2}}{\Delta x}=-\sin x.$$

4) $y=a^x \quad \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{(\Delta x+x)}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$

Xususan, $(e^x)'=e^x$.

Hosilaning geometrik ma'nosi .

$y=f(x)$ funksiya uchun $f(x)=A, f(x+\Delta x)=B$ bo'lsin. A va B dan o'tuvchi to'g'ri chiziq $f(x)$ ga kesuvchi bo'ladi , uning OX musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi φ bo'lsin.

Agar $\Delta x\to 0$ bo'lsa, B nuqta A nuqtaga yaqinlashadi, kesuvchi to'g'ri chiziq $A(x;f(x))$ nuqtadan o'tuvchi urinmaga aylanadi, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$ hosil bo'ladi. Bu hosilaning x nuqtadagi qiymati urinmaning OX o'q musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi tangensiga teng ekanligini bildiradi .

Masalan, $E(x_0;f(x_0))$ nuqtadan o'tadigan nuqta urinma tenglamasini $y-y_0=k(x-x_0)$ ko'rinishini tarzida o'zgartirib

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

yozish mumkin bo'ladi.

Hosilaning fizik ma'nosi.

Moddiy nuqta $S=S(t)$ qonuniyati bilan harakatlanayotgan bo'lsin. Unda t_1 vaqtgacha $S(t_1), t_2$ vaqtgacha $S(t_2)$ yo'l bosiladi.

$$S'(t_2)=\lim_{t_1\to t_2}\frac{S(t_1)-S(t_2)}{t_1-t_2}=v(t_2)$$

$$S'(t_2)=\lim_{t_1\to t_2}\frac{S(t_1)-S(t_2)}{t_1-t_2}=v(t_2),\ v'(t_2)=\lim_{t_1\to t_2}\frac{v(t_1)-v(t_2)}{t_1-t_2}=a(t_2)$$

munosabatlar bosib o'tilgan yo'l xosilasi tezlik, tezlik xosilasi esa tezlanish ekanligini bildiradi.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi.

Biror t vaqt ishlab chiqarilgan maxsulotni $U=U(t)$ funksiya ifodalasin. t dan $t+\Delta t$ vaqtgacha ishlab chiqarilgan maxsulot soni $U=U(t)$ dan $u(t+\Delta t)=u+\Delta u$ gacha o'zgaradi. Unda o'rtacha mexnat unimdorligi $Z_{o'r}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Demak, t vaqtdagi unimdorligi $Z=\lim\limits_{\Delta t\to 0}Z_{o'r}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=u'(t)$ ko'rinishda topiladi, ya'ni ishlab chiqarilgan maxsulot hajmi hosilasi t vaqtdagi mehnat unumdorligi ekan.

Ta'rif: $f'_+=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\left(f'_-=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ limitlar o'ng (chap) hosilalar deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtada bir tomonli xosilalar mavjud va teng bo'lishi zarur.

$f(x)=|x|$ uchun $x=0$ nuqtada $f'_+=1\neq f'_-=-1$ bo'lganligi uchin berilgan funksiyaning x=0 nuqtada hosilasi mavjud emas .

Dastlab, o'zgarmas son hosilasi nolga, $y=x$ funksiya hosilasi esa birga tengligini aytib o'tamiz, chunki, $c'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}=0,$

$$x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1$$

Hosila hisoblash qoidalari.

Endi hosilasi mavjud $u(x), v(x)$ funksiyalar berilgan deb hisoblab, hosila hisoblash qoidalarini keltirib chiqaramiz.

1. Agar $u=u(x), v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada hosilalarga ega bo'lsa ularning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi $(v(x)\neq 0)$, songa ko'paytmasi ham hosilaga ega bo'lib, quyidagi qoidalar o'rinli:

$$(c_1u\pm c_2v)'=c_1u'\pm c_2v',(uv)'=u'v+uv',\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Isboti .

$$(c_1u\pm c_2v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c_1u(x+\Delta x)\pm c_2v(x+\Delta x)-(c_1u(x)\pm c_2v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c_1(u(x+\Delta x)-u(x))\pm c_2(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}=c_1u'\pm c_2v'$$

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)u(x)+v(x+\Delta x)u(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)v(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}-\frac{v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}\right)=$$

$$=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Bu qoidalardan

$$(c_1u_1+c_2u_2+...+c_nu_n)'=c_1u_1'+c_2u_2'+...+c_nu_n'$$

$$(u_1u_2...u_n)'=u_1'u_2\cdot...\cdot u_n+u_1u_2'\cdot...\cdot u_n+...+u_1u_2\cdot...\cdot u_n'$$

umumiy qoidalarni ham keltirib chiqarishi ham mumkin .

Misollar:

1) $(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

2) Shunga o'xshash $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

2. Teskari funksiya hosilasi .

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada $f'(x)\neq 0$ hosilaga ega, $x=\varphi(y)$uning teskari funksiyasi bo'lsa, $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ tenglik o'rinlidir .

Isbot.

$$y'(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{x'(y)}$$

Bu teorema sodda geometrik manosi ega. $y=f(x)$ga x nuqtada o'tkazilgan urinma OX o'qi bilan α burchak hosil qilsa, OY o'qi bilan β burchak hosil qiladi va $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi'(y)=tg\beta$.

Isbot esa

$$\varphi'(y)=tg\beta=\frac{1}{ctg\beta}=\frac{1}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{f'(x)}$$

tengliklardan kelib chiqadi .

Misol. 1) $y=\arcsin x$ funksiya va $x(y)=\sin y$funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar ekanligidan

1) $y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sin' y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kelib chiqadi.

2) $(\arccos x)'=\frac{1}{\cos' y}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

1) $(\mathrm{arc}\,tgx)'=\frac{1}{tg'y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$;

4) $(\mathrm{arc}\,ctgx)'=\frac{1}{ctg'y}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}$;

5) $(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$ xususan, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

3. Murrakab funksiya hosilasi.

Teorema. Agar $x=\varphi(t)$ funksiya $t=t_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya esa mos $x_0=\varphi(t_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(t))$ murrakab funksiya ham t_0 nuqtada hosilaga ega va $y'=\left(f(\varphi(t))\right)'=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$ o'rinlidir.

Isbot. $y'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}=y'_x(x_0)x'_t(t_0)$

Umuman, $y=f_1\left(f_2\left(...\left(f_n(x)\right)\right)\right)$berilsa, $y'=f_1'\cdot f_2'\cdot...\cdot f_n'$ formula o'rinli bo'ladi.

Misollar:1) $\left(\ln^2\left(\sin^3(x)\right)\right)'=2\ln\left(\sin^3(x)\right)\cdot\frac{3\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin^3 x}=$

$=6\ln\left(\sin^3(x)\right)ctg(x);$

2) $(shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$

3) $(chx)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$

Oxirgi misollar va bo'linma hosilasi formulasidan foydalanib $(thx)'=\frac{1}{ch^2x}$, $(cthx)'=-\frac{1}{sh^2x}$ formulani keltirib chiqarish mumkin.

4. Daraja ko'rsatkichli funksiya hosilasi.

$\left(\ln f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ logarifmik hosila deb ataladi, uning yordamida $y(x)=u(x)^{v(x)}$ daraja ko'rsatkichli funksiya hosilasi uchun formula keltirib chiqaramiz.

$\ln y=v\ln u$ ekanligidan $\frac{y'}{y}=v'\ln u+\frac{v\cdot u}{u'}$ va

$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{v\cdot u}{u'}\right)$ formula hosil bo'ladi.

Misollar.

1) $\left(x^x\right)'=x^x(\ln x+1)=x^x\ln(ex)$

2) $\left(\sin^{\cos x}x\right)'=\sin^{\cos x}x\left(-\sin x\ln(\cos x)+\cos x\cdot ctgx\right)$

5. Parametrik funksiya hosilasi.

Agar funksiya $x=x(t), y=y(t)$ parametrik ko'rinishda berilib, bu funksiyalar $t=t_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya hosilasi ham mavjud va $y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

$$\text{Isboti. } y'_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta y(t)}{\Delta t}}{\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Misol: $\begin{cases}y=r\sin t\\ x=r\cos t\end{cases},(0\le t\le\pi)$bo'lsa, $y'=\frac{(r\sin t)'}{(r\cos t)'}=-ctgt=$

$=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}(x\ne\pm r)$

Aslida $y^2+x^2=r^2$da, $y=\sqrt{r^2-x^2}$ deb olinsa

$y'_x=\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ hosil bo'ladi.

6. Oshkarmas funksiya hosilasi.

Agar funksiya y ga nisbatan echilmagan $F(x;y)=0$ tenglama bilan berilsa, undan murakkab funksiya kabi hosila olish, so'ngra y'_x ni topish mumkin.

Umuman, $y'_x = -\dfrac{F'_y(x;y)}{F'_x(x;y)}$ formula o'rinli bo'ladi lekin, F'_y, F'_x larni topishda ikkinchi o'zgaruvchi o'zgarmas hisoblanadi.

Misol. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$

Agar bu funksiyadan murakkab funksiya kabi hosila olsak, $\dfrac{x'\cdot x}{a^2}+\dfrac{y'\cdot y}{b^2}=0$ yoki $y'_x(x)=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$ kelib chiqadi. Bu natija yozilgan formula bo'yicha ham kelib chiqadi.

Yuqorida elementar funksiyalar hosilalari uchun topilgan natijalardan foydalanib, quyidagi hosilalar jadvalini hosil qilamiz.

1) $(C)'=0,$

2) $(x^p)'=px^{p-1},$

3) $(a^x)'=a^x\ln a,$

xususan, $(e^x)'=e^x,$

4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},$

xususan, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},$

5) $(\sin x)'=\cos x,$

6) $(\cos x)'=-\sin x,$

7) $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},$

8) $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x},$

9) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

10) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

11) $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2},$

12) $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2},$

13) $(shx)'=chx,$

14) $(chx)'=shx,$

15) $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x},$

16) $(cthx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}.$

6.2.§. Differensiyal. Yuqori tartibli hosila va differinsiyallar.

Yuqori tartibli hosilalar

Funksiyaning $f'(x)$ hosilasi birinchi tartibli hosila deb ataladi. $f'(x)$ ham funksiya bo'lganligi uchun undan yana bir marta hosila olish mumkin.

$(f'(x))'$ bu hosila ikkinchi tartibli hosila deyiladi , umuman funksiyaning $(n\text{-}1)$ - tartibli hosilasidan olingan hosila n-tartibli hosila deyiladi .

Bu yuqori tartibli hosilalar, $y^{(n)}$ ko'rinishida belgilanadi.

Demak $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Misollar.

1) $y(x)=a^x$,(a>0,a≠1),

$y'(x)=a^x\ln a,\ y^{(2)}(x)=\left(a^x\ln a\right)'=a^x\ln^2 a$

$y^{(3)}(x)=a^x\ln^3 a,\ y^{(n)}(x)=a^x\ln^n a$ xususan, $y(x)=e^x$ bo'lsa, $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$

2) $y(x)=\sin x$

uchun, $y'(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),\ y^{(2)}(x)=\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)'=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{2}\right)$

$y^{(3)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ tengliklardan $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right)$ kelib chiqadi.

3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\cdot\pi}{2}\right)$ formula o'rinliligi yuqoridagidek tekshiriladi.

Endi $u(x)\cdot v(x)$ ko'paytmaning yuqori tartibli hosilasini olish masalasini qaraymiz.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u'' + 2u'v' + v''$$

$$(uv)''' = u''' + 3u''v' + 3u'v'' + v'''$$

....

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^{n-k} u^{(n-k)} \cdot y^{(k)} \quad (Leybnits\ formula)$$

Oxirgi tenglik Leybnits formulasi deb ataladi .

Misol. 1) $y(x) = x^2 e^x$ funksiyaning 50-hosilasini toping. $u = x^2, v = e^x$ desak, $v' = 2x, v'' = 2, v''' = 0, \dots$ ekanligidan, $\left(x^2 e^x\right)^{(50)} = x^2 e^x + \frac{50}{1!} e^x \cdot 2x + \frac{5049}{1!} e^x \cdot 2,$ chunki, qolgan qo'shiluvchilar no'llardan iborat bo'ladi.

1) $y = x\cos x$ning 10-hosilasini toping.

Agar $u(x) = x, v(x) = \cos x$ desak $u' = 1, u'' = 0, \dots,$ ekanligidan,

$$y^{(10)} = x\cos(5\pi + x) + 10\cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = x\cos x - 10\sin x.$$

Yuqori tartibli hosilalar olishda ayniyatlardan foydalanish mumkin .

1) $y = \sin^4 x$ ning n-tartibli hosilasini toping.

$$y = \sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$$

ekanligini etiborga olib,

$$y^{(n)} = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right) + \frac{1}{8} 4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right)$$

2) $$y = \frac{1}{x^2 - 9x + 20} = \frac{1}{(x-4)(x-5)} =$$

$$= \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} = (x-5)^{-1} - (x-4)^{-1}$$

bo'lganligi uchun

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left((x-5)^{-n-1} - (x-4)^{-n-1}\right);$$

$F(x;y)$ tenglama bilan berilgan oshkormas funksiyaning ikkinchi hosilasini olish uchun, tenglamaning tomonlaridan qiymati qo'yilib, y''topiladi va hokazo.

Differensiyal, ma'nosi, hisoblash qoidalari.

Ta'rif. Agar $y = f(x)$funksiya orttirmasini $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, bunda A-son, $\alpha(\Delta x)$-cheksiz kichik, ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u differensiallanuvchi deyiladi.

Funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun chekli hosila mavjud bo'lishi zaruriy va etarli shart hisoblanadi, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

ya'ni argument va funksiya orttirmalari bir paytda nolga intiladi, bu esa funksiya uzliksizligini bildiradi.

Funksya orttirmasining $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ ko'rinishida, $A\Delta x$ orttirmaning chiziqli bosh qismi, $\alpha(\Delta x)\Delta x$ esa qoldiq qismi deyiladi.

Ta'rif. Funksiya orttirmasining chiziqli bosh qismi uning differensiali deyiladi va $dy = A\Delta x$ tarzida yoziladi.

$y'(x) = A$ ekanligini hisobga olsak, $dy = y'(x)$, agar $y = x$ deyilsa, $dx = 1\Delta x$ bo'ladi va differensial uchun $dy = y'(x)dx$ formula hosil qilamiz.

Differensial uchun topilgan $dy = y'(x)dx$ formula yordamida quyidagi, differensial hisoblash qoidalarini topish mumkin.

1. $d(C_1U \pm C_2V) = (C_1U \pm C_2V)'dx = (C_1U' \pm C_2V')dx =$
$= C_1dU \pm C_2dV$,

2. $d(UV) = (UV)'dx = (U'V + UV')dx = VdU + UdV$,

3. $d = \left(\frac{U}{V}\right) = \left(\frac{U}{V}\right)dx = \frac{VdU - UdV}{V^2}dx = \frac{VdU - UdV}{V^2}.$

Agar $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ funksiyalar yordamida tuzilgan $y = f(\varphi(t))$murakkab funksiya qaralsa, differensial $dy = y'_x t'_x dt = y'_x dx$ ko'rinishida yoziladi, o'z holatini saqlaydi. Differensial o'z ko'rinishini o'zgartirmaslik xususiyati uning invariantligi deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya biror nuqtadagi birinchi differensialidan shu nuqtada olingan differensial uning ikkinchi differensiali deyiladi, $d^2y=d(dy)$ ko'rinishida yoziladi. Shunga o'xshash, $d^3y=d(d^2y)$, $d^ny=d(d^{n-1}y)$ lar ham ko'riladi.

Yuqori tartibli hosila, differensiallarini hisoblashda dx ixtiyoriy va x ga bo'g'liqmas son ekanini, uni o'zgarmas ko'paytuvchi sifatida qarash lozimligini yodda tutish zarur.

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx=(y''dx)dx=y''dx^2$$

$$d^3y=d(d^2y)=d(y''dx^2)=d(y'')dx^2=(y'''dx)dx^2=y'''dx$$

Umuman, $d^ny=y^{(n)}dx^n$,

Agar $y=x^n$, funksiyaning yuqori tartibli differensiali hisoblansa, $d(x^n)$, $d^2(x^n)$ ko'rinishida yoziladi.

Yuqori tartibli differensiallarda invariantlik xossasi o'rinli bo'lmaydi chunki, chunki $y=f(\varphi(t))$ funksiya uchun $d^2y=d(y'_x dx)=y'_x d(dx)=y''_{x^2}dx^2+y'_{x^2}d^2x$ hosil bo'ladi.

Biror $x=x_0$ nuqtada $dy\approx\Delta y$ ekanligidan taqribiy hisoblashlarda unimli foydalaniladi.

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ dan

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi.

Misol. $\sqrt{26}$ taqribiy qiymatini toping.

$f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$ deb, $\sqrt{25+1}\approx\sqrt{25}+\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=5+\dfrac{1}{10}=5{,}1$

ekanligini topamiz

Mavzuga doir misollar va masalalar.

1. Ta'rif yordamida hosilalarni toping.

1) $y=x^2$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$; 4) $y=tgx$ 5) $y=argsinx$

6) $y=x(x-1)^2(x-2)^3\ldots(x-10)^{11}$ bo'lsa $f'(0)$, $f'(1)$ ni toping.

2. Hosilalar jadvali va qoidalari yordamida hisoblang.

1) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$; 2) $y=\dfrac{\ln 5}{x}+\pi^2+e$; 3) $y=(x-a)(x-b)$;

4) $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; 5) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$; 6) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$;

7) $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$; 8) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $y=x\sqrt{1+x^2}$;

10) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 11) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

12) $y=sin4x-4cos2x$;

13) $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$; 14) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$ 15) $y=tgx-\dfrac{1}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$;

16) $y=2^{tg\frac{1}{x}}$; 17) $y=e^x+e^{e^x}$ 18) $y=\lg^3 x^2$; 19) $y=ln(ln(lnx))$;

20) $y=ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$; 21) $y=lntg\dfrac{x}{2}$; 22) $y=ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;; 23) $y=arctg\dfrac{x^2}{a}$; 24) $y=arcsin(sinx-cosx)$;

25) $y=arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 26) $y=\sqrt[5]{x}$; 27) $y=x^{\sin x}$; 28) $y=sh(tgx)$

29) $y=x^2+2xy-y^2-2x=0$; 30) y^2-2px; 31) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

3. Berilgan funksiyaga berilgan nuqtadagi urinma tenglamasini yozing.

1) $y=2+x-x^2$, $x_0=1$; 2) $y=\sqrt{5-x^2}$, $x_0=1$; 3) $y=\dfrac{8}{4+x^2}$; $x_0=2$.

4. Berilgan funksiyalar qanday burchak ostida kesishishini toping.

1) $y_1=x^2$ va $y_1=x^2$; 2) $y_1=\sin x$ va $y_2=\cos x$; 3) $y_1=\dfrac{1}{x}$ va $y_2=\sqrt{x}$;

5. Taqribiy qiymatlarini toping.

1) $\sqrt[3]{65}$; 2) $\sin 29^\circ$; 3) $lntg47^\circ$; 4) $\lg 11$;

6. n-tartibli hosilalarini toping.

1) $y=e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $y=lnx$; 3) $y=\cos^2 x$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$;

5) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; 6) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$; 7) $y=x^2-\sin 2x$; 8) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; 9) $y=sinax\ cosbx$; 10) $y=sin^4x+cos^4x$; 11) $y=e^{ax}\cos bx$;

12) $y=e^{ax}\cos bx$; 13) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

7. Masalalarni yeching

1) Ish kunida sexning mahsulot ishlab chiqarish hajmi u vaqt t bilan o'zaro $u=-t^3-5t^2+75t+425$ funksiya yordamida bog'langan. Ish boshlangandan 2 soat keyingi mehnat unumdorligini toping.

2) Ishlab chiqarish qoldiqlari u(so'm) va mahsulot hajmi x (dona) o'zaro $y=10x-0.04x^3$ formula bilan bog'langan. O'rta va limit qoldiqlarni 5 dona mahsulot uchun toping.

3) Talab q va taklif s funksiyalari p narx bilan quyidagiga berilgan: $q=7-p$; $s=p+1$. Quyidagilar topilsin:

a) Turg'un narx;

b) Talab va taklif elastikligi;

v) Narx 5 % oshirilganda foyda necha foiz ortadi?

Mavsuga doyir joriy nazorat uchun uy vazifasi.

N-talabalarning ro'yxatdagi nomeri)

1. Ta'rif yordamida berilgan funksiyalar hosilasini toping.

1) $y=x^{100-N}+Nx-N$; 2) $y=sinNx+NcosNx$;

3) $y=x(x-N)^2(x-2N)^3$, $y'(0)=?$, $y'(N)=?$;

2. Jadval va qoidalar yordamida berilgan funksiya hosilalarini toping.

1) $y=x^{N+1}+\dfrac{1}{x^{N+1}}+\sqrt[N+1]{N}-\dfrac{N}{\sqrt{x^2-Nx}}$

2) $y=\sin^{N+1}\left[\cos^{100-N}Nx\right]$

3) $y=\sin^{N+1}\left[\cos^{100-N}Nx\right]$;

4) $y=x^{N+10}(N-x^{N+1})(1+N^{100-N})$

5) $y=\sqrt[N+1]{x+\sqrt{N-x}}$

6) $y=\left[\sin(N+1)x\right]^{\frac{N}{x}}$;

7) $x^{N+1}-Nxy+Nx-(N+5)y-y^{100-N}=0$

8) $\begin{cases} x=Nt-\sin Nt+e^{Nt} \\ y=N+\cos(20+N)t-e^{-N} \end{cases}$

3. Berilgan funksiyalar n-tartibli hosilasini toping.

1) $y=\dfrac{2}{2x^2-3N+N^2}$ 2) $y=\dfrac{x+N}{Nx-1}$; 3) $y=\dfrac{x}{\sqrt[N+1]{x+N}}$;

4) $y=sin(N+1)xcos(100-N)x$; 5) $y=x^3cosNx$;

6) $y=\sin^6Nx+cos^6Nx$ 7) $y=\dfrac{x^2}{N-x}$;

4. Talabalarning o'tilgan darslarni qabul qilishi U vaqtga bog'liqligi

$U(t)=-t^3-Nt^2+(100-N)t$, $1\le t\le 6$; tenglama bilan berilgan. Darslar boshlangandan 1 soat keyin va darslar tugashiga 1 soat qolgandagi dars qabul qilish samaradorligini, o'zgarishi tempi va tezligini toping.

2) Iqtisodiyot yo'nalishi bitiruvchilarga ishga taklif etilishi narxi P bo'lsa, kuzatuvlar natijasida bakalavrlarga talablar $q=\dfrac{P+N}{P+(100-N)}$; takliflar esa $S=P+\dfrac{1}{N}$; bo'lsa quyidagilarni toping.

a) Talab va taklif teng bo'ladigan talaba turg'un narxini;

b) Topilgan narx talab va taklif elastikligini.

c) Talaba narxi N% oshirilsa olinadigan foydani.

6.3.§. Differensiyal hisob asosiy teoremalari va tatbiqlari. Differensiyal hisob asosiy teoremalari

Teorema (P.Ferma): Agar differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya X oraliq ichki $c\in X$ nuqtasida eng katta (kichik) qiymatiga erishsa, $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta qiymatga erishadi deylik, $f(x)\le f(c)$.

$f'(c)=\lim\limits_{x\to c+0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ mavjudligidan, bir tomonli $0\le\lim\limits_{x\to c-0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c+0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$ limitlar teng bo'lishi kerak. Bu $f'(c)=0$ da bajariladi xolos. Boshqacha aytganda,funksiyaning eng katta(kichik)qiymatlarida grafikka o'tkazilgan urinma absissalar o'qiga parallel bo'ladi.

Teorema (M.Roll): $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

1). $[a;b]$ kesmada uzluksiz;

2). $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi;

3). $f(a)=f(b)$

U holda kamida bitta $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya Veyershtrass teoremasiga ko'ra eng katta M, eng kichik m qiymatlarga erishadi.

Ikkita hol bo'lishi mumkin.

1) $m=M$. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda o'zgarmas bo'ladi, hamma ichki $c\in(a;b)$ nuqtada eng katta qiymatga erishishi kelib chiaqadi va bu nuqtalarda $f'(c)=0$.

1) M va m turlicha. $f(a)=f(b)$ shartdan biror ichki $c\in(a;b)$ nuqtada eng katta M, eng kichik m qiymatlarga erishishi kelib chiaqadi va Ferma teoremasiga ko'ra $f'(c)=0$.

Teorema (Lagranj): $f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

1) $[a;b]$ kesmada uzluksiz;

2) $(a;b)$ oraliqda differensiyallanuvchi.

U holda shunday kamida bitta $c\in(a;b)$ nuqta mavjudki,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Yordamchi $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun Roll teoremasi shartlari o'rinllidir, shunday $c\in(a;b)$ nuqta mavjudki, $F'(c)=0$ bo'ladi, ya'ni

$0=F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Bundan Lagranj tengligi kelib chiqadi.

Teorema (Koshi): $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin;

1) $f(x)$, $g(x)$funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz;

2) $f(x)$, $g(x)$lar $(a;b)$ da chekli hosilalarga ega, $g'(x)\ne 0$.

U holda kamida bitta $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, quyidagi Koshi tengligi bajariladi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)};$$

Isbot. Avvallo, $g(b)\ne g(a)$ aks holda Poll teoremasiga ko'ra, $g'(c)=0$ bo'lib qolishi mumkin.

Endi yordamchi

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun ham Poll teoremasi shartlari o'rinli, ya'ni shunday $c\in(a;b)$ mavjudki,

$0=F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$ bo'ladi, bundan esa Koshi tengligi kelib chiqadi.

Misollar. 1) $[1;4]$ kesmada $f(x)=x^2$ funksiya uchun Lagranj tengligi o'rinli bo'ladigan nuqtani toping. $\dfrac{4^2-1^2}{4-1}=2C$ dan $C=\dfrac{5}{2}$;

2) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $f(x)=sinx$, $g(x)=cosx$ funksiyalar uchun Koshi tengligi o'rinli bo'ladigan nuqtani aniqlang.

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0}=\frac{\cos c}{-\sin c} \text{ tenglikdan } ctgc=1, \text{ ya'ni } c=\frac{\pi}{4}$$

6.4.§. Differensiyal hisob asosiy teoremalari tatbiqlari. Aniqmasliklarni ochish, Lopital qoidalari

Teorema (Lopital). Biror $a\in x$ nuqta atrofida $f(x)$, $g(x)$ aniqlanib, hosilalar mavjud bo'lsin.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $g'(x)\neq 0$. U holda, agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Isbot. $f(a)=g(a)=0$ deb qabul qilinsa, masalan, $[a;x]$ oraliqda f,g funksiyalar uchun Koshi teoremasi shartlari o'rinli bo'ladi, shunday $c\in(a;x)$ mavjudki, $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ o'rinli, bundan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ kelib chiqadi, chunki $x\to a$ da $c\to a$ bo'lishi tabiiy.

Agar f,g funksiyalar hosilalari ham yuqoridagi shartlarga bo'ysinsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=...=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$;

Ya'ni aniqmaslik yo'qolguncha Lopital qoidasini qo'llash mumkin.

Misol: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$;

Qarab chiqilgan aniqmaslik $\frac{0}{0}$ tipidagi deyiladi.

Agar $x\to\pm\infty$ bo'lsa ham yuqoridagi teorema o'rinlidir, chunki $x=\frac{1}{t}$ almashtirish o'tkazilsa,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Misol. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo'lsa ham, Lopital qoidasi $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ o'rinli bo'ladi.

Misol. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin bx\cos ax}{b\sin ax\cos bx}=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgbx}{tgax}=$

$=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\frac{b\cos^2 ax}{a\cos^2 bx}=1$

$0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 ko'rinishidagi aniqmasliklar ham $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltiriladi.

Misollar. 1) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0+}(-x)=0$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tgx\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+0} x^x=\lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0=1$

Teylor formulasi

Teorema (Teylor Bruk). $f(x)$ funksiya c nuqta va uning atrofida $(n+1)$- tartibli hosilaga ega bo'lsin. c va x orasida shunday ξ nuqta mavjudki, quyidagi formula o'rinli.

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Agar Teylor formulasida $c=0$ bo'lsa Makloren K. formulasi

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

hosil bo'ladi.

Makloren formulasi bo'yicha quyidagi yoyilmalarni olish mumkin.

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n)$

2. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+0(2^{2n})$

3 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(2^{2n+1})$

4. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$

$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+0(x^n)$

5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+0(x^n)$

Misollar. 1) $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyani $x-1$ darajalari bo'yicha yoyilmasi uchta hadini toping.

Teylor formulasi bo'yicha

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2,\ f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Demak, $\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+0\left((x-1)^2\right)$.

2) $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ Eyler ayniyatini isbotlang.

Funksiyalarning Makloren formulasi bo'yicha yoyilmalaridan foydalanamiz.

$$e^{i\varphi}=1+i\varphi-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{i\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{i\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^6}{6!}-\frac{i\varphi^7}{7!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}\right)=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+0(x^n)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right]}{x^3\left[x-0(x)\right]}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+0(x^4)}{x^4+0(x^4)}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$

6.5.§. Funksiyani to'liq tekshirish

Funksiya monotonligini tekshirish.

Teorema. Agar $f(x)$ intervalda $(a;b)$ chekli hosilaga ega, $f'(x)\ge0$ ($f'(x)\le0$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu intervalda o'suvchi(kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. $f'(x)\ge0$ holni qaraymiz. $x_1,x_2(x_1<x_2)\in(a;b)$ nuqtalar uchun Lagranj teoremasiga ko'ra

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c),\ c\in(x_1;x_2)$ o'rinlidir. $f'(c)\ge0,\ x_2>x_1$ ekanligidan $f(x_2)>f(x_1)$ kelib chiqadi,ya'ni funksiya o'suvchi (kamaymaydigan) dir.

$\delta>0$ bo'lganda x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofini qaraymis.

Ta'rif. Agar barcha $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ nuqtalar uchun $f(x)\le f(x_0)$ $[f(x)\ge f(x_0)]$ o'rinli bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum(minimum) nuqtasi deyiladi. Bu nuqtalar birgalikda ekstremum nuqtalari deyiladi. Ularga mos funksiyaning qiymatlari $max f(x_0), min f(x_0)$ tarzida yoziladi.

Funksiyaning bunday qiymatlari shu oraliqdagi eng katta(kichik) qiymatlar bo'lganligi uchun, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)$ bo'ladi. Lekin, aksinchasi doimo o'rinli emas, ya'ni hosila nol bo'ladigan barcha nuqtalarda ham ekstremum bo'lavermaydi. Bundan tashqari hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham ekstremum bo'lishi mumkin. Masalan $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega, lekin hosilasi bu nuqtada mavjud emas.

Aniqlanish sohasiga kirgan, funksiya hosilasi nol yoki mavjud bo'lmaydigan nuqtalar kritik (yoki statsionar) nuqtalar deyiladi.

Aytilganlardan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Teorema (ekstremum topishning 1-qoidasi). Agar $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofida chekli hosilaga ega, $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ bo'lib, x_0 nuqtada hosila o'z ishorasini + dan - ga (- dan +ga) o'sgartirsa,u holda funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimum(minimum) qiymatga erishadi.

Funksiya monotonligi, ekstremumlarini 1-qoida asosida topishda jadvaldan foydalanish qulay.

Misol. $y=\frac{x^3}{3}-x^2$ funksiya ekstremumlarini toping.

$y'=x^2-2x=x(x-2)$ dan $x_1=0, x_2=2$ nuqtalar kritik nuqtalardir.Ular yordamida aniqlanish sohasini bolaklarga ajratamiz,hosila ishorasini tekshiramiz, ekstremumlarini aniqlaymiz. Bularning barchasi quyidagi jadval yordamida oson hal etiladi:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-		+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$
		max		min	

Demak, $f_{max}(0)=0,\ f_{min}(2)=-\frac{4}{3}$.

Funksiya grafigining botiq-qavariqligi. Ekstremum topishning 2-qoidasi.

Biror $(a;b)$ oraliqda $f(x)$ funksiya chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiyaga bu oraliqda $e(x)$ urinma mavjud.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in(a;b)$ uchun $e(x)\le f(x)[e(x)\ge f(x)]$ o'rinli bo'lsa, funksiya bu oraliqda botiq (qavariq) deyiladi.

Teorema. Agar (a;b) oraliqda funksiya ikkinchi tartibli f'' hosilaga ega va $f''(x)\ge 0\,[f''(x)\le 0]$ bo'lsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun,(a,b) da $f''(x)\ge 0$ bo'lsin. Ixtiyoriy $c\in(a;b)$ da $E(c;f(c))$ nuqtadan o'tadigan urinma

$y=f(c)+f'(c)(x-c)$ tenglamaga ega. Qaralayotgan $f(x)$ funksiyaning c nuqtadagi Teylor formulasi bo'yicha yoyilmasi esa

$$Y=f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2;\ \xi=(x;c)$$

deyish mumkin. Ularni solishtirib

$Y-y=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2;\ f''(\xi)\ge 0$ bo'lganda urinma grafikdan pastda joylashishini, ya'ni grafik botiq ekanligini topamiz.

Teorema (ekstremum topishning 2-qoidasi). Agar $x_0\in(a;b)$ kritik $f'(x_0)=0$ nuqta bo'lib, $f''(x_0)>0\,[f''(x_0)<0]$ bo'lsa bu nuqtada funksiya minimum(maxsimum)qiymatiga erishadi.

Ta'rif. Agar $E(x_0, f(x_0))$ nuqtada $f(x)$ funksiyaga o'tkazilgan urinmaning bir qismi $f(x)$ dan yuqori, ikkinchi qismi pastda joylashsa, x_0 nuqta funksiyaning egilish nuqtasi deyiladi.

Egilish nuqtasida botiqlik qavariqlikka, yoki qavariqlik botiqlikka o'zgaradi. Demak, x_0 egilish nuqtasi bo'lsa, $f''(x_0)=0$. Ekstremum topishning 2-qoidasi ham jadval yordamida tekshiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$ funksiya egilishi nuqtalari, botiqlik, qavariqlik sohalari, ekstrimumlari topilsin. $y'=2x^2-x^4=x^2(2-x^2)=0$ dan $x_1=-\sqrt{2}, x_2=0, x_3=\sqrt{2}$ nuqtalar kritik nuqtalardir.

$y''=4x-4x^3=4x(1-x^2)=0$ dan $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$ nuqtalar egilish nuqtalaridir.

$y''(-\sqrt{2})=+4\sqrt{2}>0$, demak $f_{\min}\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{15}$; $y''(0)=0$, egilish nuqtasi xolos.

$y''\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}<0$, demak $f_{\max}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{15}$

Funksiya $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ oraliqda botiq, $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ oraliqda qavariqdir.

2). $y=x^2-\frac{x^4}{2}$ funksiya kritik, egilish nuqtalari,botiqlik-qavariqlik sohalari topilsin. $y'=2x-2x^3=2x(1-x^2)$ dan $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$ kritik nuqtalari, $y''=2-6x^2=6\left(\frac{1}{3}-x^2\right)$ dan $x_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}, x_5=\frac{1}{\sqrt{3}}$ egilish nuqtalaridir. $y''(-1)<0$, $y''(1)<0$, ekanligidan $f_{\max}(-1)=\frac{1}{2}$, $f_{\max}(1)=\frac{1}{2}$,

$y''(0)=2>0$ ekanligidan $f_{\min}(0)=0$.

Botiqlik-qavariqlik sohalarini quyidagi jadval yordamida topish qulay:

x	$(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}};0)$
y''	-	0	+	0	-
y	$\cap$	$\frac{5}{18}$	$\cup$	$\frac{5}{18}$	$\cap$

Ekstremum topishda yuqori tartibli hosiladan foydalanish.

Bazi funksiyalar uchun $x_0\in(a;b)$ da $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)...f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'ladi. Bu holda qoldiq hadli Teyler formulasi bo'yicha $(x-x_0)$ darajali bo'yicha yoyilma

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{n}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko'rinishiga ega bo'ladi, $x\to x_0$ da $\alpha(x)\to 0$ ekanligidan $f(x)-f(x_0)$ ishorasini $f^{n}(x_0)$ ishorasi hal qiladi.

Bunda ikki xil hol bo'lishi mumkin.

1) n-toq son, $n=2k+1$ x ning x_0 dan kichik qiymatlaridan katta qiymatlariga o'tganda $(x-x_0)^{2k+1}$ ishorasini o'zgartiradi va $f(x)-f(x_0)$ ham ishorasini o'zgartiradi. Demak, bu holda ekstrimum mavjud emas.

2) n-juft son, $n=2k$. Bu holda $(x-x_0)^{2n}>0$ bo'lganligi uchun, $f(x)-f(x_0)$ ishorasi o'zgarmaydi, $f''(x_0)$ ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Bulardan quyidagi qoyida kelib chiqadi (K.Makloren, 1942).

Teorema (ekstremum topishning 3-qoidasi). Agar hosilalar ichida x_0 da nolga teng bo'lmaganlaridan birinchisi toq tartibli bo'lib qolsa,bu x_0 nuqtada ekstrimum bo'lmaydi. Agar bu hosila juft tartibli bo'lsa, $f''(x_0)<0$ da maksimum, $f''(x_0)>0$ da minimumga ega bo'ladi.

Misollar. 1) $y=x^3$ uchun $y'=3x^2$, $y''=6x$, $y'''=6>0$ bo‘lganligi uchun $x=0$ nuqtada ekstrimum mavjud emas.

2) $y=x^4$ uchun $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, $y^{IV}=24>0$ bo‘lganligi uchun $f_{\min}(0)=0$ mavjud;

3) $f(x)=e^x+e^{-x}+2cosx$ funksiya uchun $x=0$ kiritik nuqtadir, chunki $f'(0)=e^x+e^{-x}-2\sin x=0$.

Endi $\begin{matrix} f''(0)=e^x+e^{-x}-2cosx=0, \ f'''(0)=e^x+e^{-x}+2sinx=0, \\ f^{IV}(0)=e^x+e^{-x}+2cosx=0, \ f^{IV}(0)=4>0 \end{matrix}$

ekanligidan $f_{\min}(0)=4$.

Funksiya grafigining asimptotalari

Funksiya xarakterini $x\to\pm\infty$ da, 2-tur uzilish nuqtalari yaqinida tekshirganda funksiya grafigi biror to‘g‘ri chiziqqa yaqinlashadi. Bunday to‘g‘ri chiziqlar asimptotalar deyiladi.

Asimtotalar uch xil turda bo‘ladi; vertikal, gorizontal va og‘ma.

Ta’rif 1. Agar $\lim\limits_{x\to a\pm0} f(x)=\pm\infty$ bo‘lsa, x=a to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiyaga vertikal asimtota deyiladi.

Bu holda $E(x;f(x))$ nuqtadan $x=a$ gacha masofa $d=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-f(x))^2}$ bo‘lib, $x\to a$ da $d\to0$.

Ta’rif 2. Agar $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ bo‘lsa, $y=A$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigiga gorizontal asimtota deiladi.

Bu holda $E(x;f(x))$ nuqtadan $y=A$ gacha masofa

$d=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-A)^2}=|f(x)-A|$ bo‘lib $x\to\infty$ va $d\to0$

Misol. $y=\dfrac{1}{x}$ funksiya $x=0$ vertikal, $y=0$ gorizantal asimtotolarga egadir.

Ta’rif 3. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$ bo‘lsa, u holda $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiyga og‘ma asimptota deiladi.

$K=0$ da og‘ma asimptota gorizontal asimptota bo‘lib qoladi.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\left(k+\dfrac{b}{x}\right)\right]=0$ munosabatdan $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ Ta’rifdan $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ usulda topilishi kelib chiqadi

Misol 1. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ funksiya asimptotalarini toping.

II tur uzulish nuqtalari $1-x^2=0$ dan $x=\pm1$ ekanligi kelib chiqadi.

$x=1$ va $x-1$ to‘g‘iri chiziqlar vertikal asimptotalardir.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=-1$ bo‘lganligi $y=-1$ to‘g‘iri chiziq gorizontal asimptota ekanligini ko‘rsatadi. Shuningdek

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=0$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-x^2}=-1$.

Demak, og‘ma asimptota gorizontal asimptota bo‘lib qolgan.

2. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ giperbola og‘ma asimptotalari $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ to‘g‘iri chiziqlar ekanligini isbotlang.

$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ bo‘lganligi uchun,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right]=\pm\frac{b}{a}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)-\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\right]=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2}=0$$

Demak, $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ to‘g‘iri chiziqlar giperbola og‘ma asimptotalari ekan.

Funksiya grafigini to'liq tekshirishi sxemasi

Funksiyalarni tekshirish, grafigini chizish quyidagi qoidalar bo'yicha qilinadi:

1. Funksiya aniqlanish iloji bo'lganda o'zgarishi sohalarini topish,
2. Funksiya uzluksizligini tekshirish,uzilish nuqtalarini topish,
3. Funksiyaning juft –toqligi, davriyligini aniqlash,
4. Funksiyani jadval yordamida monotonlikka, ekstremumga tekshirish
5. Funksiyani jadval yordamida qavariq- botiqlikka tekshirish, egilish nuqtalarini topish,
6. Funksiyaning absissa va ordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari- nollarini topish.
7. Funksiya grafigini asimtotalarini topish.
8. Funksiya grafigini chizish.

Misol 1. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ funksiya to'liq tekshirilsin.

1). Funksiya $x\neq 1$ da, ya'ni $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ da aniqlangan.

2). $x=1$ da II tur usilishga ega,chunki

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty,$$

3). $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-1}=-\dfrac{x^2}{x+1}\neq \pm y(x)$, ya'ni funksiya juft ham, toq ham emas. Funksiya davriy emas.

4). $y'=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ **bo'lgan**ligi uchun $x_1=0, x_2=2$ kritik nuqtalardir.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+
y	↗	0	↘	↘	4	↗
		max			min	

Ekstremum topish 1-qoidasiga ko'ra $f_{max}(0)=0,\ f_{min}(2)=4.$

5). $y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}\neq 0$ **bo'lgan**ligi uchun egilish nuqtalari mavjud emas, lekin $x=1$ nuqtada y'' ishorasini o'zgartiradi.

x	$(-\infty;1)$	$(1;+\infty)$
y''	-	+
y	∩	∪

6). Funksiya uchun $x=1$ togri chiziq vertical asimptota ekanligi 2) da tekshirildi.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

bo'lganligi uchun $y=x+1$ og'ma asimptota boladi.

7). $x=0$ da $y=0$ va aksincha **bo'lgan**ligi uchun,funksiya grafigi son oqlarini faqat $0(0;0)$ nuqtada kesib o'tadi.

8). Topilganlar yordamida funksiya grafigi chiziladi.

Funksiyani eng katta va eng kichik qiymatlarini topishga keltiriladigan masalalar

Agar $f(x)$ funksiya chekli yopiq [a;b] oraliqda aniqlangan, uzluksiz bo'lsa, uning eng katta (kichik) qiymatlari maksimum, minimum qiymatlarda yoki sohaning chegarasida bo'lishi mumkin.

Demak, bunday qiymatlarni topish uchun kritik va chegaraviy nuqtalarda funksiya qiymatlarini topish va ularni o'zaro solishtirish kifoya.

Misol 1. $f(x)=x^2-4x+6$ funksiyaning $[-3;10]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarnini toping.

$f'(x)=2x-4=0$ dan $x=2$ kritik nuqta $[-3;10]$ kesmaga tegishli ekanligini topamiz.

$f(-3)=(-3)^2-4(-3)+6=9+12+6=27,\ f(2)=2^2-4\cdot 2+6=2$

$f(10)=10^2-4\cdot 10+6=66$

Demak, $f_{e.kat}(10)=66,\ f_{e.kich}(2)=2.$

Turli sohalarda funksiyaning eng katta, eng kichik qiymatlarini izlashga keltiriladigan masalalar ko'p.Bunday masalalarda funksiya ekstremumga erishadigan nuqtalar muhimdir.

Masalalar.1) Tomoni a ga teng kvadrat shaklidagi tunukaning burchaklaridan teng kvadratchalar qirqilib, chetlarini qayirib, ochiq to'g'ri to'tburchakli quticha yasaladi. Qanday qilib eng katta sig'imli quti yasash mumkin?

Agar kesilgan kvadratchalar tomoni x bo'lsa,quticha asosi tomonlari $a-2x$, balandligi x bo'ladi. Hajmi $y=x\cdot(a-2x)^2$ funksiya bilan ifodalanadi, bunda $x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)$ bo'lishi mumkin.

$y'=(a-2x)(a-6x)=0$ dan, faqatgina $x=\frac{a}{6}$ ildiz $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ oraliqdan ekanligini topamiz.

$y''=-8a+24x$ bo'lib, $y''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$ ekanligidan, 2-qoidaga ko'ra, $y_{\max}\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$.

2) 1 mlrd. so'm miqdoridagi kapital bankkga yiliga 50% foydaga qo'yilishi yoki daromadidan $p\%$ nalog olinadigan ishlab chiqarishga 100% foydaga ijaraga berilishi mumkin. p ning qanday qiymatlarida kapitalni ishlab chiqarishga berish bankda saqlashdan foydaliroq bo'ladi?

Yechish. Faraz qilaylik, kapitalning x qismi ishlab chiqarishga ijaraga, $(1-x)$ qismi bankga qo'yilsin. Bir yildan so'ng bankdagi **kapital** $(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x$ ishlab chiqarishga ajratilgan **kapital** esa $2x$ bo'ladi, lekin unda sarf-xarajat αx^2 ko'rinishda bo'lsa,foyda $2x-\alpha x^2$ bo'lib, undan $\left(2x-\alpha x^2\right)\frac{p}{100}$ qismi nalogga ketadi, sof daromad $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(2x-\alpha x^2\right)$ ko'rinishda bo'ladi. Demak, 1 yildan so'ng kapital

$$y(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(2x-\alpha x^2\right)=$$
$$=\frac{3}{2}+\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]x-\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2$$

miqdorida bo'ladi. Uning $[0;1]$ kesmadagi maksimal qiymatini topish zarur. $y'(x)=2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}-2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)x=0$ dan kritik nuqta $x_0=\dfrac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)}$ kelib chiqadi.

$y''(x)=-2\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)<0$ ekanligi, 2-qoidaga ko'ra, topilgan x_0 nuqtada maksimum bor ekanligini bildiradi. Uning $[0;1]$kesmaga tegishli bo'lishidan

$y''(x)=-0<2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}<1$ yoki $p<25$ ekanligini topamiz.

Shunday qilib, $p<25$ bo'lsa, mablag'ni bankka qo'yish, $p<25$ da ishlab chiqarishga berishi ma'qul,

$$Y(x_0)=\frac{3}{2}+\frac{\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]^2}{4\alpha\left(1-\frac{p}{100}\right)}>\frac{3}{2}=y(0)$$

Iqtisodiy jarayonlar asosan 6 turdagi funksiyalar bilan beriladi:

1)Bir hil teslik bilan o'suvchi : $y'>0,\ y''=0$.

2)Monoton kamayuvchi teslik bilan o'suvchi: $y'>0,\ y''<0$.

3) Monoton o'suvchi teslik bilan o'suvchi: $y'>0,\ y''>0$.

4) Bir hil teslik bilan kamayuvchi: $y'<0,\ y''=0$.

5) Monoton o'suvchi teslik bilan kamayuvchi: $y'<0,\ y''>0$.

6) Monoton kamayuvchi teslik bilan kamayuvchi: $y'<0,\ y''<0$.

Bu jarayonlar doimo bir xil funksiya bilan ifodalanmaydi, egilish nuqtalari yordamida biridan ikkinchisiga o'tadi, aks holda iqtisodiy inqirozlar bo'lmaydigan zamonlarda yashayotgan bo'lar edik.

Mavzuga doir misol va masalalar.

1. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ funksiya $(-1;1)$ dan $x=0$ da eng kichik qiymatiga erishadi,lekin Ferma teoremasi o'rinli emas.Nima uchun?

2. $f(x)=x(x^2-1)$ funksiya uchun $[-1;1],[0;1]$ oraliqlarda Roll teoremasi shartlarini tekshiring.

3.Lagranj teoremasidan foydalanib isbotlang:

1) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, x>0$ 2) $e^x>ex, x>1$

3) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

4. $f(x)=x^2, g(x)=x^3$ funksiyalar uchun $[-1;1]$ oraliqda Koshi teoremasi o'rinlimi?

5. Lopital qoidalari yordamida limitlarni toping.

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 ax}{\sin^2 bx}$ 2. $\lim_{x\to0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ 3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$

4. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}(x>0)$ 5. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(gosax)}{\ln(\cos bx)}$

6.. $\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$ 7.. $\lim_{x\to0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$ 8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

9. $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}(a>0)$ 10. $\lim_{x\to+\infty}(thx)^x$ 11. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{cthx}$

12. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

6. Mokloren formulasi bo'yicha $0(x^2)$ hadgacha yoying:

1. $y=e^{tgx}$ 2. $y=ln\cos x$ 3. $y=ln\frac{1+2x}{1-x}$

7. Teylor formulasi bo'yicha $0((x-x_0)^2)$ hadgacha yoying.

1) $y=\frac{1}{x}, x_0=2$ 2) $y=xe^{2x}$ $x_0=1$ 3) $y=\frac{2x}{1-x^2}, x_0=2$.

8. Makloren yoyilmalaridan foydalanib limitlarini hisoblang.

1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$

4) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 5) $\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

6) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

7) $\lim_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}(a>0)$) 8) $\lim_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

9. Funksiya manotonlik oraliqlarni aniqlang.

1) $y=4+x-x^2$ 2) $y=3x-x^3$ 3) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 4) $y=x+sinx$

5) $y=\frac{x^2}{2^x}$ 6) $y=x^2lnx$ 7) $y=xe^{-3x}$ 8) $y=arctgx-lnx$

10. Funksiya ekstrimumlari topilsin.

1) $y=2+x-x^2$ 2) $y=2x^2-x^4$ 3) $y=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{x}x^2-6x+3$

4) $y=xe^{-x}$ 5) $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ 6) $y=x+\sqrt{3-x}$ 7) $y=x^x$

11. Funksiya qavariqlik va botiqlik oraliqlari topilsin.

1) $y=x^x$ 2) $y=lnx$ 3) $y=x^5-10x^2+3x$ 4) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 5) $y=e^{-x^2}$ 6) $y=x+sinx$

12. Funksiyani egilish nuqtalari topilsin.

1) $y=cosx$ 2) $y=1+x^2+\frac{x^4}{2}$ 3) $y=e^{2x-x^2}$ 4) $y=(x^2-1)^3$

5) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 6) $y=\sqrt{1-x^3}$

13. Ko'rsatilgan sohada funksiyaning eng katta (kichik) qiymatlarini toping.

1) $y=2^x\,[-1;5]$ 2) $y=x^2-3x+2,[-10;10]$.

3) $y=\sqrt{5-4x}$, $[-1;1]$ 4) $y=6x^2-x^3$; 5) $y=x^2-6x+13$ $[0;6]$

6) $y=2sinx-cos2x$, $[0;\frac{\pi}{2}]$ 7) $y=\sqrt{\frac{1+x}{\ln x}}$, $(1;e)$

15. Berilgan funksiyani to'liq tekshiring, grafigini chizing.

1) $y=5x^2-x^4$; 2) $y=\frac{x^3}{3}-x^5$;

3) $y=2x^2-8x$; 4) $y=\frac{x}{x^3-1}$;

5) $y=x-lnx$; 6) $y=\frac{\ln x}{x}$

7) $y=e^{-x^2}$ 8) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 9) $y=sinx+\cos^2 x$;

10) $y=x+arctgx$; 11) $y=ln(x+\sqrt{x^2+1})$; 12) $y=x^x$.

16. Ekstrimumga doir quyidagi masalalar yechilsin.

1) yig'indisi a bo'lgan ikki musbat son qanday bo'lganda ko'paytmasi eng katta bo'ladi.

2) Yuzasi S bo'lgan uchburchaklar ichida perimetiri eng kichigini toping.

3) moddiy nuqta $S(t)=-t^3+9t^2-24t-8$ qonun bilan harakatlanadi. Uning maksimal tezligini toping.

4) $y=x^2$ dan $y=2x-4$ gacha eng qisqa masofani toping.

5) Yon sirti S bo'lgan konsillar ichida hajmi kattasini toping.

6) Shar hajmi unga ichki chizilgan eng katta hajmi silindr hajmidan necha marta katta bo'ladi?

7) Eni a va b bo'lgan ikki kanal ko'ndalang kavlangan.Qanday uzunlikdagi go'lani bir kanaldan ikkinchiga o'tkazish mumkin.

8) To'la sirti S bo'lgan silindrlar ichida hajmi eng kattasi o'lchovlarini toping.

9) V hajmi qopqoqsiz silindirsimon baklar ichidan sirti eng kichigini toping.

10) R radiusli sharga ichkli chizilgan silindrlar orasidan hajmi kattasini toping.

11) R radiusli sharga ichkli chizilgan konislar orasidan hajmi kattasini toping.

12) Doiradan α burchakli sektor qirqilib, so'ngra undan konus yasalgan. α burchak kattaligi qanday bo'lganda konisning hajmi eng katta bo'ladi.

13) Eni bir xil uchta taxtadan nov (lotok) yasalmoqda. Nov yon devorlarining asosga og'ish burchaklari qanday bo'lganda nov ko'ndalang kesim yuzi eng katta bo'ladi.

14) Funksiyalar grafiklari asimtotalari topilsin.

1) $y=\frac{3-4x}{2+5x}$; 2) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y=\frac{x^5}{2+x^4}$

7-BOB. ANIQMAS INTEGRAL

7.1.§. Aniqmas integral. Aniqmas integral ta'rifi, xossalari, jadvali

Ta'rif. Biror X oraliqda ixtiyoriy $x \in X$ uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning X oraliqdagi boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x) = \cos x$ uchun boshlang'ich funksiya $F(x) = \cos x$ dir,chunki$(\sin x)' = \cos x$.

Ixtiyoriy C soni uchun $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ bo'lganligi uchun, boshlang'ich funksiyalar cheksiz ko'p bo'lishi, ularni $F(x)+C$ ko'rinishida yozish mumkinligi kelib chiqadi.

Ta'rif. Agar biror X oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ bo'lsa $F(x)+C$ to'plam, ya'ni barcha boshlang'ich funksiyalar to'plami $f(x)$ ning shu oraliqdagi animas integrali deyiladi va

$\int f(x)dx = F(x)+C$ ko'rinishida yoziladi, bunda $\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak hosilasiga ko'ra funksiyasini izlash integrallash amalidir.

Aniqmas integral Ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differinsiyali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+C, \quad \int f(x)dx = f(x)dx.$$

Haqiqatan

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)dx\right)' = F'(x) = f(x),$$

2. $d = \int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)dx.$

3. $\int dF(x) = F(x)+C$, chunki $dF(x) = F'(x)dx$ dan $\int F'(x)dx = F(x)+C$

4. Hol bo'lmagan o'zgarmasni integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, chunki $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, $\left[kF(x)\right]' = kf(x)$,

5. $k\int f(x)dx = k\left[F(x)+C\right] = kF(x)+kC = \int kf(x)dx$

6. Ikki funksiya yig'indisi (ayirmasi) aniqmas integrali, ular aniqmas integrallarining yig'indisi (ayirmasiga) teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) \pm \int g(x),$$

chunki

$$F'(x) = f(x), \; G'(x) = g(x)$$

bo'lsa

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = [F(x) \pm G(x)] + C = \int f(x) \pm \int g(x)$$

Bu xossa chekli sondagi funksiyalar yig'indisi uchun o'rinli, umuman,

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k \int f(x)dx + C$$

Elementar funksiyalar hosilalari jadvali yordamida quyidagi aniqmas integral jadvalini hosil qilamiz.

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c(p \neq -1)$; 2. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + c(p \neq -1)$;

3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$; 4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$; 6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \;\; (a > 0, a \neq 1)$ $\int e^x dx = e^x + c$;

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -ars\cos x + c \end{cases}$ $-ctgx + c$, 9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \mathrm{arc}tgx + c \\ -arcctgx + c \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+c}{1-c}\right| + c$; 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$;

12. $\int shxdx = chx + c$; 13. $\int chxdx = shx + c$;

14. $\int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + c$; 15. $\int \frac{dx}{ch^2x} = thx + c$.

Jadvaldagi 10, 11-aniqmas integrallarni to'g'riligiga diferensiallash orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Integrallash usullari

1. Bevosita integrallash. Aniqmas integral jadvali, xossalaridan foydalanib aniqmas integralni topish bevosita integrallash deb ataladi.

Misollar.

1) $\int\left(4x^3 - 2\sin x + 3 + \frac{1}{x} - \frac{5}{1+x^2}\right)dx =$

$= 4\int x^3dx - 2\int \sin xdx + 3\int dx + \int \frac{1}{x}dx - 5\int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= x^4 + 2\cos x + 3x + \ln|x| - 5arctgx.$

2) $\int\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx =$

$= \int(1+\sin x)dx = \int dx + \int \sin xdx = x - \cos x + c.$

3) $\int tg^2xdx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + c$

2. O'zgaruvchini almashtirish usuli.

Ko'p hollarda aniqmas integralda yangi o'zgaruvchi kiritish bevosita Integrallashga olib keladi. Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

Teorema. Agar $x = \varphi(x)$ funksiya biror T oraliqda differensiallanuvchi, qiymatlar sohasi X bo'lsa, $f(x)$ funksiya esa X oraliqda aniqlanib, boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa, T to'plamda quyidagi formula o'rinlidir.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + c$$

Isboti. $F'(x) = f(x)$ bo'lsin.U holda T to'plamda

$$F'(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(x)$$

ya'ni $\int f(\varphi(t))\varphi'(x)dt = F(\varphi(x)) + c.$

Misollar. 1) $\int(4x-5)^{10}dx$

$4x - 5 = t$ almashtirish o'tkazamiz, $x = \frac{t+5}{4}$, $dx = \frac{1}{4}dt$ kelib chiqadi. Topilganlarni o'rniga qo'yamiz.

$\int(4x-5)^{10}dx = \frac{1}{4}\int t^{10}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{11}}{11} + c = \frac{1}{44}(4x-5)^{11} + c$

2) $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$, $\frac{x}{2} = t$, $x = 2t$, $dx = 2dx$ ekanligdan

$\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\int\frac{dt}{\cos^2 t} = 2tgt + c = 2tg\frac{x}{2} + c$

3) $\int\frac{\ln^4(\ln x)dx}{x\ln x}$ $\text{in}(\ln x) = t$ deyilsa $\frac{dx}{x\ln x} = dt$ bo'ladi.

Natijada, 3) $\int\frac{\ln^4(\ln x)dx}{x\ln x} = \int t^4tdt = \frac{t^5}{5} + c = \frac{\ln^5(\ln x)}{5} + c$

$\int\sin^2\cos dx\sin x = t$, $dt = \cos dx$ ekanligidan,

$\int\sin^2\cos dx\sin x = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$

Sodda hollarda integral belgisi ostidagi differensiyal ifodani $\cos xdx = d(\sin x)$; $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ shaklida almashtirilib va qavslar ichidagi ifodani yangi o'zgaruvchi deb kiritish amalini ko'ngilda bajarish, so'ngra

$\int f(\varphi(t))d(\varphi(x))t = F(\varphi(x)) + c$ formuladan foydalanish ham bevosita intervallash deyiladi.

Misollar.

$$1) \int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{x \pm a} = \int \frac{d(x \pm a)}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$$

$$3) \int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = e^{x^2} + c$$

$$4) \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^{10}} = \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^{10}} = -\frac{1}{9}\frac{1}{(x^2+1)^9} + C.$$

$$5) \int \frac{(2x-5)dx}{(x^2-5x+100)^{10}} = \int \frac{d(x^2-5x+100)}{(x^2-5x+100)} = \ln\left|(x^2-5x+100)\right| + C$$

$$6) \quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C$$

Misollar.

$$1) \quad \int \frac{(3x-4)dx}{(x^2-8x+20)} = \int \frac{(3x-12+8)}{((x-4)^2+x^2)}dx = 3\int \frac{(x-4)}{((x-4)^2+x^2)}d(x-4) +$$

$$+8\int \frac{1}{((x-4)^2+x^2)}d(x-4) = \frac{3}{2}\ln[(x-4)^2+4] + 4arctg\frac{(x-4)}{2}$$

$$2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}dx = \arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

$$3) \quad \int \sqrt{x^2-6x+5}dx = \int \sqrt{(x-3)^2-4}d(x-3) =$$

$$= \frac{(x-3)}{2}\sqrt{(x-3)^2-4} - 2\ln|x-3| + \sqrt{(x-3)^2-4} + C$$

3. Bo'laklab integrallash usuli

Bu usul ikki funksiya ko'paytmasi defferensiyalidan foydalanishga asoslangan.

Teorema. Agar X oraliqda aniqlangan $U(x)$, $V(x)$ funksiyalar berilib, $U'(x)$, $V(x)$ funksiyani bashlang'ich funksiyasi mavjud

bo'lsa, u holda $U(x)$, $V'(x)$ funksiya ham bu oraliqda boshlang'ich funksiyga ega va $\int U(x)V'(x)dx = U(x)V(x) - \int U(x)\ V'(x)dx$; formula o'rinlidir.

Isbot. $[U(x)V(x)]' = U(x)V'(x) + U(x)\ V'(x)$ tenglikdan,

$U(x)V'(x) = [U(x)V(x)]' - U(x)\ V'(x)$ kelib chiqadi.

X oraliqda $[U(x)V(x)]'$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $U(x)V(x)$ ekanligi, $U(x)V'(x)$ teorema shartiga ko'ra boshlang'ich funksiyaga egaligidan $U(x)V'(x)$ ham boshlang'ichga egaligi kelib chiqdi. Oxirgi tenglikni integrallaymiz.

$$\int U(x)V'(x)dx = U(x)V(x) - \int U(x)\ V'(x)dx$$

yoki

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. Unda $\int VdU$ o'rniga olinadigan $\int UdV$ soddaroq bo'lishi mumkin.

Misollar.

$$1) \int \ln xdx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ V = X \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C;$$

$$2) \int arctgxdx = \left| \begin{array}{l} U = arctgx \\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ V = X \end{array} \right| = xarctgx - \int x\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Belgilashlarni ko'ngilda bajarishi ham mumkin.

3) $\int xe^x dx = \int xd\left(e^x\right) = xe^x - \int xd\left(e^x\right) = xe^x - e^x + C$.

Bazi hollarda bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llashga to'g'ri keladi.

4) $\int x^2 \cos xdx = \int x^2 d\left(\sin x\right) = x^2 \sin x - 2\int x\sin xdx = x^2 \sin x +$

$+2\int xd\left(\cos x\right) = x^2 \sin x + 2[x\cos x - \int \cos xdx] = x^2 \sin x + 2x\sin x + c$

Umuman, $\int x^k f\left(x\right)dx$ ko'rinishidagi intervallarni k-marta bo'laklab integrallashga to'g'ri keladi.

Bo'laklab integrallash yordamida, asosan

$\int x^n \ln^m dx, \int x^n \sin axdx, \int x^n e^{ax}dx, \int x^{ax} \sin bxdx$ kabi integrallar topiladi.

4) $J_n = \int \sin^n xdx = -\int \sin^{n-1} xd\left(\cos x\right) = -\cos x\sin^{n-1} x + \left(n-1\right) -$

$$-\int \sin^{n-2} xd\left(x\right) - \left(n-1\right)\int \sin^{n-2} xd\left(x\right) =$$

$$= -\cos x\sin^{n-1} x + \left(n-1\right)J_{n-2} - \left(n-1\right)J_n$$

Bundan $J_n = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}$ formula kelib chiqadi,

Bunday formulalar rekkurent formulalar deyiladi. Xususan,

$$\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}J_{n-2}\int \sin^{n-2} xdx$$

formula aniqmas integralda sinusning darajasini pasaytirish formulasi deyiladi, aksincha,

$$\int \sin^{n-2} xdx = \frac{1}{n-1}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^n xdx$$

formula sinusning darajasini oshirish formulasi devilish munkin.

$$\int \cos^n xdx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} xdx$$

formula ham shu yo'sinda chiqariladi.

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{\left(x^2+1\right) - x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}dx = \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx$$

Ikkinch integralda bo'laklab integrallash formuladan foydalanamiz.

$$u = x,\ du = dx,\ dv = \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n},$$

$$v = \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}dx = -\frac{1}{\left(2n-2\right)\left(x^2+1\right)^{n-1}} = \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx =$$

$$= -\frac{1}{\left(2n-2\right)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \int -\frac{1}{\left(2n-2\right)\left(x^2+1\right)^{n-1}}dx$$

Berilgan integral uchun esa

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{\left(2n-2\right)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{\left(2n-2\right)} + I_{n-1}$$

munosabatdan

$$I_n = \frac{x}{\left(2n-2\right)\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{2n-3}{\left(2n-2\right)}I_{n-1}$$

kelib chiqadi, bunda n>1.

Xususan, $I_1 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)} = arctgx + c$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgx + c,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{x}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}arctgx + c.$$

7.2.§. Ko'p uchraydigan integrallar. Ratsional funksiyalarni integrallash.

Ko'p uchraydigan integrallar

Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish, to'la kvadrat bo'lgan ifodani yangi o'zgaruvchi bilan belgilash yordamida quyidagi ko'p uchraydigan integrallarga kelamiz.

$$1)\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c\ \ (a\neq 0)$$

$$2)\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)}=-\int\frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

$$3)\int\frac{xdx}{\left(a^2\pm x^2\right)}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+c$$

$$4)\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c\ (a>0)$$

$$5)\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\ln|\,x+\sqrt{a^2\pm x^2}\,|+c\ (a>0)$$

$$6)\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+c\ (a>0)$$

$$7)\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\ (a>0)$$

$$8)\int\sqrt{a^2\pm x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2\pm x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|\,x+\sqrt{a^2\pm x^2}\,|+C\ (a>0)$$

Ratsional funksiyalarni integrallash.

Ikki ko‘phad nisbati ko‘rinishida yoziladigan ratsiyonal funksiyalarni integrallashda ikki hil hol bo‘lishi mumkin.

1. Ratsional kasr suratidagi ko‘phad darajasi mahrajdagisi darajasidan kichik emas.

Bu holda kasr noto‘g‘ri kasrdir. Dastlab surati maxrajga bo‘linadi, butun qismi alohida, to‘g‘ri kasr qismi alohida yozilib, so‘ngra integrallanadi.

Misol.

$$1)\ \int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int[x-\frac{1}{x^2+1}]dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|\,x^2+1|+c$$

$$2)\ \int\frac{x^2-10x+1}{x+1}dx=\int[x-9-\frac{8}{x+1}]dx=\frac{x^2}{2}-9x-8\ln|\,x+1|+c;$$

2. **Ratsional** kasr suratidagi ko‘phad darajasi mahrajdagisi darajasidan kichik.

Bu holda kasr to‘g‘ri deyilib, uni sodda kasrlarga yoyish mumkinligi haqidagi teorema bilan tanishmiz.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_2}{(x-a)^k}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+px+q\right)^3}$$

bunda A_i, B_i, C_i koeffitsiyentlar.

Demak o`ng tomondagi sodda kasrlarni integrallashda quyidagi 4xil integralga duch kelamiz.

$$1)\ \int\frac{A}{x-a}dx,$$

$$2)\int\frac{A}{(x-a)^k}dx,$$

$$3)\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)}dx,$$

$$4)\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^2}dx,$$

1,2 – tipdagi integralda $x-a=t$ almashtirish o‘tkazilsa kifoya, jadval integrallari hosil bo‘ladi, 3- tipdagi integrallar ko‘p uchraydigan integrallar yordamida doimo topiladi, 4- tipdagi integrallarni topish bilan shug‘ullanamiz.

$$\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^s}=\frac{Bx+C}{\left(\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{2}\right)\right)^s}\text{bunda, } q-\frac{p^2}{2}>0,\ s>1.$$

$$z=\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$$

ko'rinishida almashtirish o'tkazamiz. Undan $x=z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$,

$dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dz$, $z^2+1=\frac{x^2+px+q}{q-\frac{p^2}{4}}$ ekanligini topamiz.

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}dx=\int\frac{B\left(z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2}\right)+C}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^s(z^2+1)^2}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dz,$$ ya'ni

$A_1\int\frac{zdz}{(z^2+1)^s}+A_2a\int\frac{dz}{(z^2+1)^s}$ ko'rinishidagi integrallarga ega bo'lamiz. Birinchi qo'shiluvchi $z^2+1=t$ almashtirish yordamida oson integrallanadi, Ikkinchi qo'shiluvchi esa oldingi punktda tanishgan I_n integralimizdir.

Misollar.

1) $\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$, $z=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\frac{x-1}{2}$ almashtirishdan $x=1+2z$,

$z=2dz$, $x^2-2z+5=(x-1)^2+4=4(z^2+1)$;

Demak, $$\int\frac{(5x+3)dx}{(x^2-2x+5)^2}=\int\frac{(5(1+2z)+3)2dz}{16(z^2+1)^2}=\int\frac{(10z+8)dz}{8(z^2+1)^2}=$$

$$=\int\frac{zdz}{(z^2+1)^2}+\int\frac{zdz}{(z^2+1)^2}$$

Bunda $\frac{5}{4}\int\frac{d(z^2+1)}{(z^2+1)^2}=\frac{-5}{8}\frac{1}{(z^2+1)}$;

$$I_n=\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{2z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx,$$

ekanligini hisobga olib, eski o'zgaruvchilarga qaytib,

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}arctg\,x-1/2+C.$$

2) $\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$; Berilgan ratsiyonal to'gri kasr sodda kasrlarga yoyilmasi.

$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{BC+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ ko'rinishida bo'ladi.

Tomonlarni umumiy maxrajga keltirib suratlarni tenglashtiramiz,

$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)+(Dx+E)x$ yoki

$x^2-1=(A+B)x^4+Cx^3(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$.

Bur xil darajalar koeffitsiyentlarini tenglashtiramiz,

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0=A+B \\ x^3 & 0=C \\ x^2 & 1=2A+B+D \\ x & 0=C+E \\ x^0 & -1=A \end{array}$$

Bu sistemani yechib, A=−1, B=1, C=0, D=2, E=0 ekanligini olamiz. Topilganlarni yoyilmaga qo'yib integrallaymiz.

$$\int\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx=-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=-\ln|x|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{(x^2+1)}+C.$$

7.3.§. Irratsionalliklarni integrallash

Irratsional ifodalar qatlashgan funksiyalarni integrallashda shunday almashtirish o'tkazish kerakki, ifoda ratsional shaklga kelsin. Bu usul integral ostidagi ifodani ratsionallashtirish metodi deyiladi.

Ratsionallashtirish mumkin bo'lgan irratsionalliklarni qarab chiqamiz.

1. $\int R\left(x, \sqrt[\lambda_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[\lambda_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[\lambda_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ ko'rinishidagi integrallarda $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in N \;\; a,b,c,d \in R)$ $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, bunda $S = EKUK(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, almashtirish o'tkazamiz. Unda $x = \frac{dt^s - b^s}{a - ct^2}$, $dx = \frac{sdt^{s-1}(a - ct^s) - (dt^s - b)cst^{s-1}}{(a - ct^s)^2} dt$ larni o'rniga qo'ysak, integral $\int R(\varphi(t), \varphi'(t))dt$ ratsional ifoda integraliga keladi.

Misollar.

1) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x}$ ni toping $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ almashtirish o'tkazamiz.

$x = -1 + 2(t^2+1)^{-1}$ ekanligidan, $dx = -4t(t^2+1)^{-2} dt$ demak,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x} = \int t \frac{-4t\left((t^2+1)^{-2}\right)}{2(t^2+1)^{-2}} dt = -2\int t^2 dt =$$

$$= -2\frac{t^3}{3} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} + C$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}}$ ni toping

$x - 1 = t^6$, $x = t^6 + 1$, $dx = 6t^5 dt$ almashtirishlardan keyin.

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1}} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{3} + t - \ln(t+1)] + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} - \ln\left(6\sqrt[6]{x-1} - 1\right) + C$$

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, $a \neq 0$ ko'rinishidagi integrallar. Eyler almashtirishlari.

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ qatnashgan ifodalarni integrallashda quyidagi Eyler almashtirishlari yordamida ratsional ifoda integrali olinadi.

1) ax^2+bx+c uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas va a> 0. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$ almashtirish o'tkazamiz.

Tomonlarini kvadratga oshirib, soddalashtirib $bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}tx$ ga ega bo'lamiz.

$$x = \frac{t^2 - c}{bx \mp 2\sqrt{a}t}, \; dx = \frac{2t(b \mp 2\sqrt{a}t) \pm 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(b \mp 2\sqrt{a}t)^2} \mathrm{dt}$$

larni o'rniga qo'yib, ratsional ifoda integraliga kelamiz.

2) ax^2+bx+c uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, $a < 0, c > 0$.Bu holda $ax^2+bx+c = xt \pm \sqrt{c}$ almashtirish,oldingi holda o'xhab ratsionallashtiradi.

3) ax^2+bx+c uchhad ikkita turlicha haqiqiy ildizga ega va $a < 0$.Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x - x_1| \sqrt{\frac{a(x-x_1)}{(x-x_1)}}$$

desak,

1. da qaralgan

$\int R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_1)}{(x+x_2)}}\right)dx$ ko'rinishidagi integralga ega bo'lamiz.

Agar $x_1 = x_2$ bo'lsa $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x - x_1|\sqrt{a}$ bo'lib iradsiyanallik o'z–o'zidan yo'qolar edi.

Misol.

1. $\int \frac{\sqrt{2x^2+2x+2}}{x}dx$, $2x^2+2x+2$ uch had haqiqiy ildizlarga ega emasligi, a>0,c>0 ekanligidan, Eyler ning 1-almashtirishni bajaramiz.

$$\sqrt{2x^2+2x+2}=t-x,\ 2x+2=t^2-2tx,\ x=\frac{t^2-2}{2t+2},$$

$$dx=\frac{2t-2(2t+2)-2\left(t^2-2\right)}{4(t+1)^2}dt=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}$$

topilganlarni o‘rniga qo‘yib.

$$\int\frac{\sqrt{2x^2+2x+2}}{x}dx=\int\frac{t-\frac{t^2-2}{2t+2}}{\frac{t^2-2}{2t+2}}\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)^2\left(t^2+1\right)};$$

Ratsional noto’g’ri kasr integraliniga ega bo’lamiz.

Odatda Eyler almashtirishlari uzoq vaqt davom etadigan hisoblashlarga olib keladi. Ularni boshqa qisqa usulda interalni topib bo‘lmasagina qo‘llash zarur.

2. Binomial differensiyallarni integrallash

$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ko‘rinishidagi differensiyal binomiyal differensiyal deyiladi, bunda $a,b\in R,\ m,n,p\in Q$.

Agar $p\in Z$ bo‘lsa, bu ifoda 1-turdagi irratsionallik bo‘ladi. Unda $m,n,p\in Q$ lar maxrajlarning eng kichik bo‘linuvchisi λ deyilsa, $\int R\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)dx$ tipdagi integralga ega bo‘lamiz, $t=\sqrt[\lambda]{x}$ almashtirish ifodani rasionallashtiradi.

$z=x^n$ almashtirish bajarib binomiyal defferensiyal ko‘rinishini o‘zgartiraylik.

$x=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$ larni o‘rniga qo‘ysak,

$\int\left(x^m,\left(a+bx^n\right)^p\right)dx=\int(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$ ko‘rinishiga kelamiz.

Agar $\frac{m+1}{n}\in Z$ bo‘lsa, p kasr maxraji s bo‘lsa, $\int R\left(z,\sqrt[s]{a+bz}\right)dz$ ko‘rinishidagi tanish integralga kelamiz, $t=\sqrt[s]{a+bz}$ almashtirish ifodani ratsionallashtiradi. Nihoyat

$\int\left(x^m,\left(a+bx^n\right)^p\right)dx=\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+\frac{m+1}{n}-1}dz$ ko‘rinishda

yozsak, $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ bo‘lganda $\int R\left(z,\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)dz$ ko‘rinishidagi ratsionallashadigan integralga ega bo‘lamiz.

Binomial differensiyallarni integrallash $p,\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}+p$ sonlardan bittasi butun bo‘lgandagina ratsiollanishi P.L.Chebishev tomonidan isbotlangan.

Demak, binomial differensiyal integrali quyidagi.

1) $p\in Z$ da $x=z^N$, bunda N soni m *va* n kasirlar umumiy maxraji.

2) $\frac{m+1}{n}\in Z$ da $a+bx^n=z^N$, bunda N-soni p kasr maxraji.

3) $\frac{m+1}{n}+p\in Z$ da $ax^{-n}+B=z^N$, bunda N-soni p kasr maxraji hollarda ratsionallashadi, xolos. Boshqa hollarda boshlang‘ich funksiyani elementar funksiylar orqali ifodalab bo‘lmaydi.

Misol.

1) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\left(1+x^4\right)^{\frac{-1}{4}}dx,\ p=-\frac{1}{4}\notin Z,$

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

Demak,

$1+x^{-4}=t^4$ almashtirish o‘tkazamiz. $x=\left(t^4-1\right)^{\frac{-1}{4}}$,

$dx=t^3\left(t^4-1\right)^{\frac{-5}{4}}dt$, $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}{t}$ ekanligidan.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^2dt}{1+t^4}=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-$$

$$-\frac{1}{2}arctgt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$$

7.4-§. Trigonometrik va ko'rsatkichli funksiyalarni o'z ichiga olgan ifodalar integrallari

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishidagi integrallarda universal almashtirish deb ataluvchi $t = tg\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, almashtirish ratsional ifoda integraliga olib keladi, haqiqatdan,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2arctgt$, $dx = \frac{2t}{1+t^2}$ ekanligidan.

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{2-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}dx = \int R_1(t)dt$ kelib chiqadi.

Misol. 1. $\int \frac{dx}{1-\sin x} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + C = \frac{2}{1-tg\frac{x}{2}} + C$

2. $\int \cos^m x \sin^n x dx,\ m,n \in N$ ko'rinishidagi integrallarda m, n larni juft-toqligiga qarab, turlicha ish qilinadi.

1. n,m sonlar juft bo'lsa,

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ daraja pasaytirish formulalaridan foydalaniladi.

Misol.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int [1-\cos 4x]dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C = \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

n toq, m -juft son bo'lsa, $t = \cos x$ almashtirish, aksincha bo'lsa, t = sinx almashtirish o'tkaziladi,

Misol. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx = \int \cos^2 x \sin^4 x d(\sin x) = \int (1-t^2)t^4 dt =$

$= \int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c$

Umuman, $R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$ o'rinli bo'lsa, $cosx = t$ almashtirish, $R(sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$ bajarilsa $sinx = t$ almashtirish, $R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$ bajarilsa, $tgx = t$ almashtirish foydali hisoblanadi.

1. $\int \sin ax \cos bx dx$ kabi integrallarda ko'paytmani yig'indiga aylantirish formulalari.

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

dan foydaliniladi.

Misol. $\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 6x]dx =$

$= \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 6x}{12} + C$

$\int R(e^x)dx$ ko'rinishidagi integrallarda $t = e^x$, $x = lnt$, $dx = \frac{dt}{t}$ almashtirish ifodani ratsionallashtiradi, $\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dt}{t}$.

Misol.

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx = \int\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\frac{dt}{t} = \int \frac{2t-(t+1)}{(t+1)t}dt = 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} 2\ln(t+1) - \ln t + C =$$

$$= 2\ln(1+e^x) - x + C$$

2. $\int R(shx, chx)dx$ ko'rinishidagi integrallarda trigonometrik funksiyalardagi universal almashtirishdan boshqa almashtrishlarni qilishi mumkin, faqatgina

$$ch^2x=\frac{ch2x+1}{2},\ sh^2x=\frac{ch2x-1}{2},\ shxchx\frac{sh2x}{2}$$ formulalarni yodda saqlash zarur.

Misollar.

1)

$$\int sh^3 3xdx=\frac{1}{3}\int sh^2 3xd(ch3x)=\frac{1}{3}\int\left(ch^2 3x-1\right)d\left(ch3x\right)=\frac{ch^3 3x}{9}-\frac{ch3x}{3}+C$$

$$\int\frac{dx}{thx-1}=\int\frac{(e^x-e^{-x})dx}{-2e^{-x}}=-\frac{1}{2}\int(e^{2x}+1)dx=-\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{x}{2}+C;$$

$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx, \int R(x,\sqrt{x^2+1})dx$ kabi integrallarda mos ravishda $x=acht$, $x=asht$ almashtirishlar o'tkazish mumkin. Birinchisida

$$t=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$$ bo'lsa, ikkinchisida $$t=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|$$

bo'ladi.

Misol.

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; $x=2sht$, $dx=2chtdt$ desak.

$$\int\frac{2chtdt}{\sqrt{(4sh^2t+4)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{chtdt}{(sh^2t+1)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{chtdt}{ch^3t}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{ch^2t}=\frac{1}{4}th+C=\frac{1}{4}\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}-\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{-1}}{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{-1}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2-4}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2+4}+C.$$

1. Jadval yordamida integrallarni toping.

1) $\int\frac{10x^8+3}{x^3}dx$ 2) $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$ 3) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$ 4) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ 5) $\int ctg^2xdx$,

6) $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$ 7) $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ 8) $\int\frac{1-x^3}{\sin^2x}dx$

9) $\int\frac{3-ctg^2x}{\cos^2x}dx$

2. Yangi o'zgaruvchi usuli bilan integrallarni toping.

1) $\int\sqrt{4x-1}dx$ 2) $\int(3-2x)^{10}dx$ 3) $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$ 4) $\int ctgxdx$

5) $\int\frac{\cos x}{5+3\sin x}dx$

6) $\int e^{\cos x}\sin xdx$ 7) $\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 8) $\int\frac{\ln^{10}x}{x}dx$

9) $\int\frac{arct\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}dx$;

3. Bo'laklab integrallash yordamida toping.

1) $\int arcctgxdx$ 2) $\int xe^{2x}dx$ 3) $\int x^2\sin 4xdx$ 4) $\int e^{ax}\sin bxdx$ 5) $\int\ln^2xdx$ 6) $\int\frac{xdx}{\cos^2x}dx$ 7) $\int x^3e^{-x}dx$ 8) $\int\cos(\ln x)dx$

9) $\int\frac{\ln(\sin x)}{x}dx$

4. Ko'p uchraydigan integrallar yordamida topining.

1) $\int \frac{dx}{x^2-25}dx$ 2) $\int \frac{dx}{4x^2+9}dx$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ 5) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$

6) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ 7) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ 8) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^2-10x+29}$

9) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$

5. Aniqmas integralda daraja pasaytirish formulasidan foydalanib toping

1) $\int \sin^7 xdx$ 2) $\int \cos^6 xdx$ 3) $\int \frac{1}{\sin^6 x}dx$ 4) $\int \frac{1}{\cos^7 x}dx$

5) $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^4}dx$

6. Aniqmas koiffisientlar usulidan foydalanib toping.

1) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x+3)}dx$ 2) $\int \frac{x^2-2x+5}{x^3-x}dx$ 3) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ 4) $\int \frac{(5x-1)dx}{x^3-3x-2}$

5) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 6) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}$ 7) $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$

8) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$ 9) $\int \frac{dx}{x^6+1}$

7. Noto'g'ri kasrlarning integrallarini toping.

1) $\int \frac{x^3dx}{x-2}$ 2) $\int \frac{x^4dx}{x^2+a^2}$ 3) $\int \frac{x^5dx}{x^3-a^3}$ 4) $\int \frac{x^{10}dx}{x^2+x-2}$

5) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$ 6) $\int \frac{(3x^2-4x+1)dx}{x^2-5x+6}$.

8. Irratsiyonalliklar integralini toping.

1) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$ 2) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$ 3) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x}}$

4) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$ 5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

6) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

9. Eyler almashtirishlari yordamida toping.

1) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2-2x+2}}$ dx 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ 3) $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$ 4) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}$dx

10. Binomial differensiallar integralini toping.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^2}}$ 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{2-x^3}}$ 3) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 4) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}$dx

11. Trigonometrik ifodalar integrallarini toping.

1) $\int \frac{sin^2 x}{cos^4 x}$ dx 2) $\int sin^4 xcos^5 x$dx 3) $\int \frac{1}{sin^4 xcos^4 x}$ dx 4) $\int \frac{1}{sin^3 xcos^5 x}$ dx

5) $\int tg^5 x$dx 6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$ 7) $\int sin6xsin4x$dx

8) $\int cosxcos2xcos3x$dx

12. Ko'rsatkichli funksiya, giperbolik funksiyalar qatnashgan integrallarni toping.

1) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}$dx 2) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$ 3) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}$dx 4) $\int (1+Sh2x)^2$dx

5) $\int \frac{dx}{chx+1}$ 6) $\int sh^4 xchxdx$ 7) $\int ch^2 xdx$

13. Quyidagi integrallarni hisoblang.

1) $\int e^{ax} sin^3 bx$dx 2) $\int ln^n xdx$ 3) $\int$ x|x|dx

4) $\int$ xarccos $\frac{1}{x}$ dx 5) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x+a}}dx$ 6) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}$dx

7) $\int \frac{sin4x}{sin^8 x+cos^8 x}$dx 8) $\int \sqrt{th^2 x+1}$dx

8-BOB. ANIQ INTEGRAL

8.1-§. Aniq integral ta'rifi, mavjudlik shartlari, xossalari

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, $a<b$ bo'lsin, kesmani ixtiyoriy n ta bo'lakka

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$$

nuqtalar yordamida bo'lamiz, x_k, $\left(k=\overline{0,n}\right)$ nuqtalar bo'linish nuqtalri deyiladi.

$[x_k,x_{k+1}]$ bo'lakning har birida ξ_k $(x_k\le\xi_k\le x_{k+1})$ nuqta tanlab, $f(\xi_k)$ ni hisoblaymiz. $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ belgilash kiritib, $[a,b]$ kesmadagi $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deb ataluvchi quyidagi yig'indini tusamiz:

$$\sigma_n=f(\xi_0)\cdot\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+....+f(\xi_k)\Delta x_k+......+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$$

Bu yig'indini geometrik ma'nosi: eni Δx_0, Δx_1,...., Δx_{k-1}, bo'yi mos ravishda $f(\xi_0), f(\xi_1),..., f(\xi_{n-1})$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar yi'gindisi tuzildi, $f(x)\ge 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga taqriban teng bo'ladi.

$\lambda=\max\Delta x_k$ $0\le k\le n-1$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif: Agar chekli $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$ Limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo'yicha aniq integrali deyiladi va $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$ Ko'rinishida yoziladi, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi deyiladi, a va b sonlari integralning quyi va yuqori chegaralari deyiladi.

Agar $\sup\limits_{\Delta x_k}f(x)=M_k$, $\inf\limits_{\Delta x_k}f(x)=m_k$ bo'lsa, ularga mos integral yig'indilar Darbuning yuqori va quyi yig'indilari deyiladi, $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k$, $s=\sum\limits_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k$.

Ravshanki, $s\le\sigma_n\le S$, chunki har bir $[x_k,x_{k+1}]$ bo'lakchada $m_k\cdot\Delta x_k\le f(\xi_k)\Delta x_k\le M_k\Delta x_k$

Bo'linish nuqtalari soni ko'paytirilsa,

$$\lim_{n\to\infty}\sum m_k\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

o'rinli bo'ladi.

Aniq integral quyidagi xossalarga ega:

1°. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$, chunki eni nol bo'lganda yuzi no'ldir.

2°. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$.

Birinchi integralda integral yig'indi $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ oraliqlar bo'yicha bo'lsa, ikkinchida $-\Delta x_k=x_k-x_{k+1}$ oraliqlar bo'yicha yig'iladi. Demak, qarama-qarshi ishoralidir.

3°. Ixtiyoriy a, в, c sonlar uchun $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$

4°. $\int\limits_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$

5°. Agar $[a,b]$ kesmada f(x)≥0 bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$

6°. Agar $[a,b]$ kesmada f(x)≤ $g(x)$ bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$

7°. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx$

8°. Agar $[a,b]$ kesma $\sup f(x)=M$, $\inf f(x)=m$ bo'lsa, $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

9°. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, shunday $c\in[a,b]$ mavjudki, $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(в-a)$

Bu xossa o'rta qiymat haqidagi xossa deyiladi.

Misollar 1) $\int_a^в x^p dx$ $(b>a>0)$, $p\in R$.

$[a,b]$ kesmani teng bo'lmagan, a va b orqasiga n-1 ta o'rta geometrik qiymatlarni qo'yish yordamida bo'lamiz. Buning uchun $q=\sqrt[n]{\frac{в}{a}}>1$ belgilash kiritib, $a, aq, aq^2,..., aq^k,..., aq^n=b$ nuqtalarni bo'linish nuqtalari deb olamiz. Bunda $n\to\infty$ da $q\to1$ va $aq^{k+1}-aq^k$ ayirma tobora kichrayib boradi.

Chap chegaralar uchun funksiyani hisoblab, integral yig'indi tuzamiz.

$$\sigma_* = a^p a(q-1)+a^p\cdot q^p aq(q-1)+....+a^p\cdot\left(q^k\right)^p aq^k(q-1)+$$

$$+...a^p\cdot q^{(n-1)p} aq^{n-1}(q-1)=$$

$$=a^{p+1}(q-1)\left[1+q^{p+1}+...+\left(q^p\right)^{k+1}+...+q^{(n-1)(p+1)}\right]=$$

$$=a^{p+1}\cdot(q-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(q^{p+1}\right)^k$$

$p\ne-1$ bo'lganda

$$\sigma_*=a^{p+1}\cdot(q-1)\cdot\frac{\left(q^{p+1}\right)^n-1}{q^{p+1}-1}=a^{p+1}\left(\sqrt[n]{\frac{в}{a}}-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{в}{a}\right)^{p+1}-1}{\left(\frac{в}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_*=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{в}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]\cdot\left(в^{p+1}-a^{p+1}\right)}{\left(\frac{в}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}-1}=\ln\frac{в}{a}\cdot\frac{в^{p+1}-a^{p+1}}{\ln\left(\frac{в}{a}\right)^{p+1}}=\frac{в^{p+1}}{p+1}-\frac{a^{p+1}}{p+1},$$

Demak, $p\ne-1$ da $\int_a^в x^p dx=\frac{в^{p+1}}{p+1}-\frac{a^{p+1}}{p+1}$.

$p=-1$ bo'lsa, $\sigma_*=n(q-1)=n\left(\sqrt[n]{\frac{в}{a}}-1\right)$ bo'ladi,

$$\int_a^в\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{\frac{в}{a}}-1\right)=\ln в-\ln a$$

2) $\int_a^в \sin x dx$ $(0<a<b)$

$h=\frac{в-a}{n}$ deb, a.ah, a+2h,..., a+kh,...a+(n)h=в nuqtalari yordamida kesmani teng n ta bo'lakka bo'lamiz. Funksiya qiymatlarini o'ng chegaralarda hisoblab integral yig'indi tuzamiz.

$$\sigma_*=h\sum_{k=1}^n\sin(a+kh)=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^n 2\sin(a+kh)\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{k=1}^n\left[\cos(a+k-\frac{h}{2})-\cos(a+k+\frac{h}{2})\right]$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos(a+\frac{h}{2})-\cos(a+n+\frac{h}{2})\right]=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos(a+\frac{h}{2})-\cos(в+\frac{h}{2})\right]$$

Yuqoridagilardan,

$$\int_a^в\sin x dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot=\left[\cos(a+\frac{h}{2})-\cos(в+\frac{h}{2})\right]=\cos a-\cos в$$

8.2-§. Integral hisobning asosiy formulasi. Aniq integral jadvali.
Hisoblash usullari

$a\le x\le b$ bo'lgan holda $S(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt$ yuqori chegarasi funksiyali integral deyiladi. X ga beramiz, $x+\Delta x\le b$. Unda

$$S(x+\Delta x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Bo'ladi, yoki $S(x+\Delta x)=\int_{a}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=S(x)+\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$.

O'rta qiymatini xossasidan $S(x+\Delta x)-S(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x$, $c\in[x;x+\Delta x]$.

Tenglamani Δx ga bo'lib, $\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(c)$ ga ega bo'lamiz. $\Delta x\to 0$ da $c\to x$ va f(x)ning $[a;b]$ da uzluksizligidan $f(c)\to f(x)$, ya'ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

Natijada $S'(x)=f(x)$ ekanligini topdik. Boshlang'ich funksiyalar ko'p bo'lishi, bir–biridan o'zgarmas sonlargagina farq qilishini bilamiz, F(x) funksiya ham f(x) ning biror boshlang'ichi bo'lsin, unda $S(x)=F(x)+C$, $a\le x\le в$ $x=a$ berilsa, $0=S(a)=F(a)+C$ dan $C=-F(a)$ topildi. Endi $S(x)=F(x)-F(a)$ tenglikda $x=b$ desak,

$$S(b)=S=\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{b}.$$

Integral hisobning asosiy formulasi hisoblanadigan Nuyuton-Leybns formulasi kelib chiqdi.

Misollar. 1) $\int_{a}^{в}\sin xdx=-\cos x\big|_{a}^{в}=\cos a-\cos b$,

2) $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x}=\ln x\big|_{1}^{e}=\ln e-\ln 1=1$

Demak, aniq integrallarning qiymati ixtiyoriy c=0 dagi boshlang'ich funksiyaning x=в va x=a dagi qiymatlari ayirmasiga teng ekan.

Aniqmas integral jadvali yordamida aniq integral uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

1) $\int_{a}^{в} dx=в-a$, 2) $\int_{a}^{в} x^{p}dx=\frac{в^{p+1}}{p+1}-\frac{a^{p+1}}{p+1}$, 3) $\int_{a}^{в}\frac{1}{x}dx=\ln в-\ln a$,

4) $\int_{a}^{в}\sin xdx=-\cos в-\cos a$, 5) $\int_{a}^{в}\cos xdx=\sin в-\sin a$,

6) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{\cos^2 x}=tgв-tga$,

7) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgв-ctga$, 8) $\int_{a}^{в} d^{x}dx=\frac{d^{в}}{\ln d}-\frac{d^{a}}{\ln d}$, 9) $\int_{a}^{в} e^{x}dx=e^{в}-e^{a}$,

10) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin в-\arcsin a\\ -\arccos в+\arccos a\end{cases}$ 11) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{x+x^2}=\begin{cases}arctgв-\arcsin a\\ -arcctgв+arcctga\end{cases}$

12) $\int_{a}^{в} shxdx=chв-cha$, 13) $\int_{a}^{в} chxdx=shв-sha$, 14) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{ch^2x}=thв-tha$, 15) $\int_{a}^{в}\frac{dx}{sh^2x}=-cthв+ctha$

Aniq integralda yangi o'zgaruvchi.kiritish, bo'laklab integrallash usullarini qarab chiqamiz.

Teorema. $[a;b]$ kesmada uzluksiz f(x) funksiya berilgan bo'lsin. Agar 1) $x=\phi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada differensialanuvchi $\phi'(t)$ esa $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz

2) $x=\phi(t)$ finksiya o'zgarish sohasi [a;в],

3) $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=в$ shartlari o'rinli bo'lsa,

$\int_{a}^{в} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)]\cdot\phi'(t)dt$ tenglik o'rinlidir.

Isboti. $\int_{a}^{в} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} F(в)-F(a)$ ekanligi ma'lum. $[\alpha,\beta]$ kesmada $\varphi'(t)=F(\phi(t))$murakkab funksiyani qaraymiz,

$$\varphi'(t)=F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)=f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$$

tenglik $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$ning iror boshlang'ichi ekanligini bildiradi. Demak,

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=F(\phi(\varphi\beta))-F(\phi(\alpha))=$$

$$=F(в)-F(a)\int_a^в f(x)dx.$$

Isbotlangan formula aniq integralda yangi o'zgaruvchi formulasi deyiladi.

Misollar. 1) $\int_0^4(4-x)^3dx$

$4-x=t$ desak, $x=4-t,\ dx=-dt$ bo'ladi, bundan tashqari, $x=0$ da $t=4,\ x=4$ da $t=0$ ekanligini topamiz, demak, $\int_0^4(4-x)^3dx=-\int_0^4 t^3dt=\frac{t^4}{4}\Big|_0^4=64$

2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2},\ dx=\cos t dt\ \ x=0$ da $t=0,\ x=1$ da $t=\frac{\pi}{2}$

ekanligidan $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\cos^2 td=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)=\frac{\pi}{2}$

Teorema. Agar $[a;b]$ kesmada $U(x)$, $V(x)$ funksiyalar uzluksiz xossalarga ega bo'lsa,

$\int_a^b Udv=UV\Big|_a^b-\int_a^b Vdu$ o'rinlidir.

Isboti. ekanligidan, Nyuton-Leybnes formulasiga ko'ra,

$$\int_a^в U(x)V'(x)+U'(x)V(x)dx=\Big[U(x)\cdot V(x)\Big]_a^в$$

Demak, $\int_a^в UdV+\int_a^в VdU=\Big[U\cdot V\Big]_a^в$ va izlangan tenglikdan kelib chiqadi.

Misollar. 1) $\int_1^2 xe^xdx=\int_1^2 xd(e^x)=x\cdot e^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^xdx=e^x(x-1)\Big|_1^2=e^2$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx.$

Aniqmas integralda $\int\sin^n xdx=-\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx$

Daraja pasaytirish formulasini hosil qilgan edik.

$-\frac{1}{n}\cos x\cdot\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$ ekanligidan $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx$

tenglika ega bo'lamiz. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

A) $n=2k\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}xdx=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{(2k-1)!!}{2k!!}\cdot\frac{\pi}{2},$

B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}xdx=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{2k!!}{(2k+1)!!}$

8.3.§. Xosmas integrallar

Hozirgacha qaralgan integrallarda integrallash chekli $[a;b]$ oraliq bo'yicha, Hamda funksiyalar chegaralangan edi. Integral tushunchasini ξ_k cheksiz oraliq bo'yiucha yoki c nuqta tanlab, $f(\xi_k)$ ni tanlab olamiz $x_{k+1}-x_k$ desak $f(\xi_k)\Delta x_k$ to'ri to'rt burchak bo'ladi. Uning aylanishida $\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$ hajmli silind hosil bo'ladi.

Barcha silindr hajmi $n\to\infty$ da qidrilayotgan jism hajmini beradi.

$$V_{0x}=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=0}^{n-1}f^2(\xi_k)\Delta x_k=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Agar $f_2(x)\ge f_1(x)\ge0,\quad x=a,\ x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya absissa atrofida aylansa hajm hosil bo'lib, uning hajmi

$$V_{ox}=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar $y=(x)$, $y=0$ $x=a$, $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya ordinata atirofida aylansa, hosil bo'ladigan jism hajmi.

$$V_{oy}=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

formula bilan topiladi. Agar halqa bo'lsa

$$V_{oy}=2\pi\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

formula bilan topish tushunarli.

Qutb koordinatalar sistemasida $0\le\pi\le\varphi\le\beta\le2\pi$, $0\le r\le r(\varphi)$ chiziqlar bilan chegaralangan trapetsiya qutb boshlang'ich o'qi atirofida aylanishidan hosil bo'ladigan jism hajmi

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_a^b r^3(\varphi)\sin(\varphi)dx$$

formula bilan topiladi.

Agar funksiya parametrik usulda berilsa, ya'ni $y=\varphi(t),y=\psi(t)$ $\alpha\le t\le\beta,\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ u holda absissasi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

$A(0;r),B(H;R)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y=r+\frac{R-r}{H}x$ bo'ladi. Demak ,

$$V_{kk}=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_a^b\left(r+\frac{R-r}{H}\right)^2dx=\frac{\pi H}{3(R-r)}\left(r+\frac{R-r}{H}\right)^3\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{\pi H}{3(R-r)}\left(R^3-r^3\right)=\frac{\pi H}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)=\frac{H}{3}\left(S_R+\sqrt{S_RS_r}+S_r\right);$$

2) $y=\sin x$ (bitta yarim to'liq), $y=0$ bilan chegaralangan soha ordinata o'qi atirofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

$$V_{kk}=2\pi\int_0^\pi x\sin(x)dx=2\pi\int_0^\pi xd(-\cos x)=2\pi\left[-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx\right]=$$

$$=2\pi\left(\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right)=2\pi^2$$

Aylanish jismi sirti yuzi

Aylanish jismni topishda $[x_k;x_{k+1}]$ ga mos bo'lakni qaragan edik, shu bo'lakachaga mos sirtni kesik konus sirti bilan almashtirilishi mumkin.

$$P_k=2\pi\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}l_k,$$

bunda $l_k=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$ demak, qidirilayotgan sirt yuzi,

$$P=\lim_{n\to\infty}2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\cdot\Delta x_k=$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Bu formulada funksiyalar parametrik usulda berilganda

$$P=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$$

qutb koordinatalarda

$$P=2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi,$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. 1) $x^2+(y-2)^2=1$ aylanani Ox atrofida aylantirilsa tor hosil bo'ladi.Uning sirtini toping.

$x=\cos t, y=2+\sin t, (0\le t\le 2\pi)$ almashtirish o'tkazamiz.

Tor sirti yuzi

$$P=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)dt=$$
$$=2\pi(2t-\cos t)\Big|_0^{2\pi}=8\pi^2$$

2) $x^2+y^2=1$ ustki qismi absissa atrofida aylantirilsa, shar hosil bo'ladi.Shar sirtini toping.

$x=\cos t, y=\sin t, (0\le t\le \pi)$ almashtirishdan so'ng

$$S_{ш}=2\pi\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}dt=2\pi(-\cos t)\Big|_0^{\pi}=2\pi(1+1)=4\pi$$

Agar $x^2+y^2=R$ bo'lganda, $S_{ш}=4\pi R^2$ bo'lar edi.

8.4 § Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Ba'zi funksiyalar boshlang'ichlari elementar funksiyalar orqali ifodalashni bilamiz. Demak, aniq integrallar qiymatini taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.

$f(x)$ $[a;b]$ kesmalar uzluksiz bo'lsin.Sohani n ta teng bo'lakka bo'lamiz; $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k$ bo'lsin.

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$$

Egri chiziqli trapetsiya yuzi sifatida

$$\int_a^b f(x)dx=h[y_0+y_1+...+y_k+...+y_{n-1}]\text{ yoki}$$

$$\int_a^b f(x)dx=h[y_1+y_2+...+y_{k+1}+...+y_n]$$

$h=\dfrac{b-a}{n}=\Delta x_k$, qiymatlarni olish mumkin.Bu formulalar to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

Trapetsiyalar formulasi

$f(x)\ge 0$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsin.

Sohani yana $a=x_0<x_1<...<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$ nuqtalar yordamida teng n ta bo'lakka bo'lib olamiz.

$h=\dfrac{b-a}{n}$ deb, $[x_k;x_{k+1}]$ bo'lakchani tekshiramiz. Unda asoslari $y_k(x_k); y_{k+1}(x_{k+1})$, balandligi $h=\dfrac{b-a}{n}$ bo'lgan trapetsiya yuzi bo'lakcha yuziga taqriban teng, demak,

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x-x_0)+...+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})]\right)=$$
$$=\frac{b-a}{2n}\left(y_0+y_n+2[y_1+y_2+...+y_{n-1}]\right)=$$
$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$$

Bu formula trapetsiyalar formulasi deyiladi.

Parabolalar (Simpson) formulasi.

Dastlab quyidagi formulani isbotlaymiz.

Teorema. 1) Absissalari turlicha uchta $E_1(x_1;y_1)$, $E_2(x_2;y_2)$, $E_3(x_3;y_3)$ nuqtalardan $y=Ax^2+Bx+C$ ko'rinishdagi yagona parobala o'tadi.

2) $E_1(-h;y_1), E_2(0;y_2), E_3(h;y_3)$ nuqtalardan o'tuvchi $y=Ax^2+Bx+C$ parabola, $y=0, x=\pm h$ chiziqlari bilan chegaralangan soha yuzasi $S=\dfrac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)$ formula bilan topiladi.

Isboti. 1) Berilgan nuqtalar koordinatalarini $y=Ax^2+Bx+C$ ga qo'yib,

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C \\ y_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C \end{cases}$$ sistemaga ega bo'lamiz. Absissalar turlicha ekanligidan

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \neq 0,$$ ya'ni sistema yagona $(A;B;C)$ yechimga ega, $A \neq 0$ da parabola, $A = 0$ da to'g'ri chiziq bo'ladi

2) $y = Ax^2 + Bx + C$ tenglamaga nuqtalar koordinatalarini qo'ysak,

$$\begin{cases} y_1 = Ah^2 - Bh + C \\ y_2 = C \\ y_3 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$ kelib chiqadi.Undan, $y_1 + y_3 = 2Ah^2 + 2C$, $y = C$. Demak izlanayotgan yuza

$$S = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + C)dx + B\int_{-h}^{h} xdx = 2\int_{0}^{h}(Ax^2 + C)dx =$$

$$= \frac{h}{3}(Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

$[a;b]$ kesmada uzluksiz, musbat $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Ya'ni $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasini topishimiz kerak. Kesmani teng $2n$ ta bo'lakka bo'lamiz.

$a = x_0 < x_1 < ... < x_{2k-1} < ... < x_{2n-1} < x_{2n} = b$. Soha yuzasini bu nuqtalar yordamida $2n$ ta bo'lakka bo'lamiz.

$[x_{2k-1}; x_{2k+1}]$ ga mos bo'lgan yuzi, isbotlangan teoremaga ko'ra:

$$\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2k-1} + 2y_{2k} + y_{2k+1})$$

bo'ladi. Bu bo'lakchalarni jamlab,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2[y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}]\right) + $$
$$+ 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1})$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula parabolalar yoki T.Simpson formulasi deyiladi.

Misol. $\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1,219$

ekanligini bilgan holda, yuqoridagi formulalar bilan taqribiy hisoblang. Avval $n = 10$ deb olib, $h = 0,1$ da

$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1, y_1 = \sqrt{1,1} = 1,049, y_2 = 1,095, y_4 = 1,185,$
$y_5 = 1,225, y_6 = 1,265, y_7 = 1,304, y_8 = 1,342, y_9 = 1,378$ ekanligini topib olamiz.

To'g'ri to'rtburchaklar usulida

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 0,1(1 + 1,049 + 1,095 + 1,1 + 1,185 + 1,225 + 1,265 + 1,304 +$$
$$+ 1,342 + 1,378) = 0,1 \cdot 11,98 \approx 1,2$$

Trapetsiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = 0,1\left[\frac{1 + 1,414}{2} + 1,049 + 1,095 + 1,140 + 1,183 + 1,225 + \right.$$

Parabolalar formulasi bo'yicha

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{1}{3 \cdot 10}\left[1 + \sqrt{2} + 4\left(\sqrt{1,1} + \sqrt{1,3} + \sqrt{1,5} + \sqrt{1,7} + \sqrt{1,9}\right) + \right.$$
$$\left. + 2(\sqrt{1,2} + \sqrt{1,4} + \sqrt{1,6} + \sqrt{1,8})\right] \approx 1,2189$$

kelib chiqadi.

1. berilgan kesmani n ta bo'lakka bo'lib, Darbu yig'indilarini tuzing.

1) $y = x^3$, $[-2;3]$ 2) $y = \sqrt{x}, [0;1]$ 3) $y = x^2, [0;10]$.

2. $\int_0^3 x^2 dx, \int_2^4 x^4 dx$ larni $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ integral yigindi limiti sifatida toping.

1) Oraliqni teng n ta bo'lakka bo'ling. ξ_k sifatida har bir bo'lak chap chegarasini oling.

2) Oraliqni teng n ta bo'lakka bo'ling. ξ_k sifatida har bir bo'lak o'ng chegarasini oling.

3) Oraliqni teng n ta bo'lakka bo'ling. ξ_k sifatida har bir bo'lak o'rtasini oling.

4) Oraliqni $x_k = q^k, q = 3^{\frac{k}{n}}$ nuqtalar yordamida ($x_k = 2q^k$, $q = 2^{\frac{k}{n}}$) n ta bo'lakka bo'ling, ξ_k sifatida har bir kesma chap chegarasini oling.

3. Quyidagi integrallarni hisoblang.

1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; 3) $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$;

5) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; 6) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$; 8) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$;

9) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$; 10) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$; 11) $\int\limits_0^{\pi} x \sin x dx$;

12) $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$; 13) $\int\limits_0^1 x\left(2-x^2\right)^{12} dx$; 14) $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$;

15) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$..

4. Daraja pasaytirish formulalari yordamida hisoblang.

1) $\int\limits_1^e \ln^n x dx$; 2) $\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{2n} x dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^5}$; 6) $\int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx$;

5. Xosmas integrallarni hisoblang.

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; 3) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$;

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; 6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 7) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{-x}}$;

8) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a>0)$; 9) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx \quad (a>0)$;

10) $\int\limits_0^{\frac{-\pi}{2}} \ln \sin x dx$.

6. Daraja pasaytirish funksiyalari yordamida hisoblang.

1) $I_n = \int\limits_0^{-\infty} x^n e^{-x} dx$; 2) $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(ax^2+2bx+c\right)}$ $ac-b^2>0$;

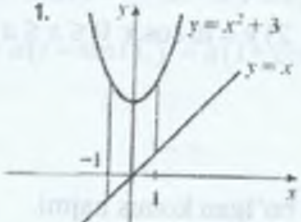
7. Integrallar yaqinlashishga tekshirilsin.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4-x^2+1}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$;

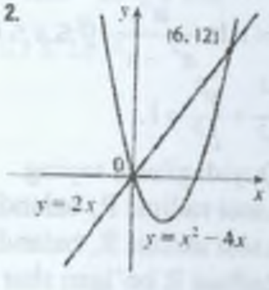
5) $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

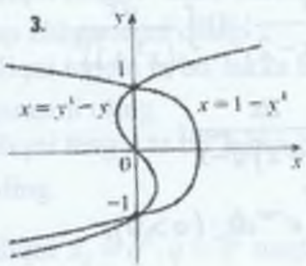
8. Quyidagi grafikda berilgan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

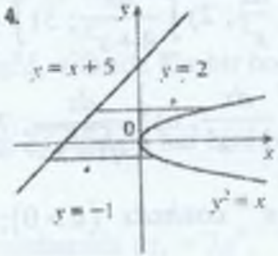
1.



2.







Quyidagi misollarda berilgan funksiya grafiklarini chizing va chegaralangan soha yuzalarini toping.

1) $y=x+1,\ y=9-x^2,\ x=-1,\ x=2;$

2) $y=\sin x, y=x, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi;$

3) $y=x, y=x^2$; 4) $y=x+1, y=(x-1)^2, x=-1, x=2;$,

5) $y=x^2+1, y=3-x^2, x=-2, x=2$; 6) $y=4x^2, y=x^2+3$;

7) $y=\sin x, y=\sin 2x, x=0, x=\frac{\pi}{2}$; 8) $y=\cos x, y=1-\frac{2x}{\pi}$; ,

9) $y=|x|, y=x^2-2$; 10) $y=\sin \pi x, y=x^2-x, x=2.$

9.Quyidagi chiziqlarning berilgan oraliqlardagi yoyi uzunligini hisoblang.

1) $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}\quad 0\le x\le b<a$; 2) $y=\ln\cos x\quad 0\le x\le a<\frac{\pi}{2}$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

10.Quyidagilarni toping.

1) Asosi radiusi R, balandligi H bo'lgan konus hajmi.

2) Asosi radiusi R, balandligi H bo'lgan silindir hajmi.

3) Radiusi R bo'lgan shar hajmi.

11.Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakillarni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanish jismlari hajmini toping.

1) $y^2=2px, y=0, x=a$; 2) $xy=a^2, y=0, x=a, x=2a;$

3) $y=\sin 2x, y=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$; 4) $y=\sqrt{x}e^{-x}, y=0, x=a;$

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, |x|=h.$

12. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakillarni Oyo'qi atrofida aylantirishidan hosil bo'lgan jisimlar hajmini toping.

1) $y=2x-x^2, y=0$; 2) $y=\sin x, y=0\quad 0\le x\le\pi$;

3) $y=e^2, y=0, 0\le x<\infty$;

4) $x=a\sin^3 t, y=a\cos^3 t, 0\le x\le 2\pi, x=2t-t^2, y=4t-t^3.$

13. Quyidagi chiziqlarni 0x o'qi atrofida aylantirishda hosil bo'lgan aylanish sirti yuzalarini hisoblang.

1) $y=tgx, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$; 2) $y=e^{-x}, 0\le\varphi\le a$;

3) $2ay=a^2+x^2, 0\le\varphi\le a$; 4) $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}, |\varphi|\le b$;

5) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$;

6) $x=2\sqrt{3}\cos t, y=\sin 2t$;

14. Quyidagi chiziqlarni 0y o'qi atrofida aylantirishda hosil bo'lgan aylanish sirti yuzalarini hisoblang.

1) $x=\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right), \frac{5}{4}\le y\le\frac{5}{4}$;

2) $4x+2\ln y=y^2, e^{-1}\le y\le e$; 3) $y=ach\frac{x}{a}, a\le x\le b$;

4) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi.$

9-BOB. QATORLAR

9.1-§. Sonli qatorlar, yaqinlashish alomatlari

Faraz qilaylik $\{a_n\}=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ sonlar ketma- ketligi $a_1,a_2,...,a_n,...$ ifoda sonli qator deyiladi.

Bunda $a_1,a_2,...,a_n,...$ sonlari qator hadlar a_n - had esa qatorning umumiy hadi deyiladi.

$$S_1=a_1;$$
$$S_2=a_1+a_2;$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3;$$
$$..........$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

yig'indilar qatorning qismiy yig'indilari deyiladi. Qismiy yig'indilar ham

$$S_1,S_2,S_3,...,S_n,...$$

cheksiz ketma- ketlik hosil qiladi. Agar qismiy yig'indilar ketma-ketligi biror chekli S soniga yaqinlashsa, u holda berilgan qator yaqinlashuvchideyiladi, yig'idisi S bo'ladi.

$$S=a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Agar $\lim_{n\to\infty}S_n$ mavjud bo'lmasa, yoki cheksiz katta son bo'lsa, qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Misol. 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

$S=1$ ekanligidan qator yaqinlashuvchi ekan.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{cases}1, n=2k-1\\ 0, n=2k\end{cases}$ ekanligidan limit mavjud emas, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+...+n+...=\infty$ bu qator ham uzoqlashuvchi ekan.

Yaqinlashuvchi qatorlarning quyidagi xossalari oson isbotlanadi.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n$ qatorlar bir paytda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi, chunki $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ chekli ta chekli son yig'indisi bo'lib qator yaqinlashish, uzoqlashishga ta`sir qiladi.

2. Agar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ qator ham yaqinlashuvchi va yig'indisi $c\cdot S$ bo'ladi.

3. Agar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi,yig'indilari S_1 va S_2 bo'lsa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ qator ham yaqinlashuvchi, yig'indisi $S_1\pm S_2$ bo'ladi.

Teorema. Agar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ bo'ladi.

Isbot. Qator yig'indisi S bo'lsin. $a_n=S_n-S_{n-1}$ ekanligi va $\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$ dan $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ kelib chiqadi. $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ shartli qator yaqinlashishning zaruriy shartidir, lekin yetarli emas.

Misol. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...$ qator garmonik qator deyiladi, zaruriy sharti $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ bajariladi, lekin u yaqinlashuvchi emas, chunki

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

ekanligidan

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\neq 0$$

Demak qator yaqinlashshishning yetarli shartlari (alomatlari) topilishi kerak.

Musbat hadli qatorlar

Teorema. Musbat hadli qator $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun qismiy yig'indilar ketma- ketligi $\{S_n\}$ chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. a) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ mavjud, demak $\{S_n\}$ - chegaralangan.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qismiy yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n\}$ chegaralangan.

U holda hadlar musbatligidan $0\le S_1\le S_2\le ...\le S_n\le ...$ chegaralangan, o'suvchi ketma- ketligi esa limitga ega,yaqinlashuvchi, ya`ni berilgan qator yaqinlashuvchidir.

Endi hadli qatolarning bir qancha yaqinlashish alomati(belgi)larini keltiramiz.

Solishtirish alomati. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar berilib, ixtiyoriy $n\in N$ da $a_n\le b_n$ bo'lsin. U holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchiligidan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorini ham yaqinlashuvchiligi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchiligidan esa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n)^{n+1}}$ yaqinlashuvchidir, chunki masalan, $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\le\frac{1}{2^{n+1}}$ ekanligi va

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ qator yaqinlashuvchiligi buni ta`minlaydi.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},(p\le 1)$ qator uzoqlashuvchi, chunki $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}$ va $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ garmonik qator uzoqlashuvchidir.

Dalamber alomati.

Agar musbat hadi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilib, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ limit mavjud bo'lsa, $q<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $q>1$ bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Shunday N nomer mavjudki, $n>N$ iarda $|\frac{a_{n+1}}{a_n}-q|<\varepsilon$ bo'ladi, ya`ni

$a_n = a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot ...\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot ...$ tenglikdan

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot ...\cdot\frac{a_N}{a_{n-1}}\cdot ...\cdot q\cdot q ...\cdot q ... = M\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$ deyish mumkin.

Oxirgi qator geometrik progressiya bo'lib, $q<1$ da yaqinlashuvchi, $q>1$ da esa uzoqlashuvchidir.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ qator uchun

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

bo'lganligidan Dalamber alomatiga ko'ra yaqinlashuvchidir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ qator uchun

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

ekanligi uzoqlashuvchi ekani bildiradi.

Koshi alomati.

Agar musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lib, $k<1$ bo'lsa qator yaqinlashuvchi, $k>1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchidir.

Isboti. dalamber alomati isbotiga o'xshash, faqatgina yetarlicha $n>N$ lar uchun

$$a_n = k^n$$

Ekanligidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = M \cdot \sum_{n=N}^{\infty} k^n$ bo'lishini nazarda tutish kifoya.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ qator uchun

$K = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$ ekanlgidan yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Koshining integral alomati.

$[1;+\infty)$ yarim intervalda uzluksiz, musbat, kamayuvchi $f(x)$ funksiya bo'lib, unung natural sonlardagi qiymatlaridan quyidagi qator tuzilgan bo'lsin:

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

U holda bu qator va $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral bir paytda yaqinlashadilar, yoki aksincha, uzoqlashadilar.

Isboti.[1;n] kesmada $y=f(x), y=0, x=1, x=n$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya ya'ni qaraymiz. U holda

$$f(2)+f(3)+...+f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1)+f(2)+...+f(n-1)$$

o'rinli, yoki

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n - f(n)$$

Bundan, $\lim_{n\to\infty} S_n$ $\lim_{n\to\infty} S_n$ chekli, ya`ni qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning ham yaqinlashuvchiligi, yoki aksincha, ular bir paytda uzoqlashishi kelib chiqadi.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ qator umumlashgan garmonik qatorga mos xosmas integral

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ bo'lib, uning $p>1$ da yaqinlashuvchi, $p\le 1$ da esa uzoqlashuvchiligi ma'lum. Demak umumlashgan garmonik qator ham $p>1$ yaqilashuvchi, $p\ge 1$ da esa uzoqlashuvchidir.

Ishorasi almashinuvchi qatorlar

$a_n > 0$ bo'lganda

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

qator ishorasi almashinuvchidir.

Leybnis alomati. Agar ishorasi almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati manotan kamayuvchi

$a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ va umumiy hadi nolga intiluvchi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lsa qator yaqinlashuvchidir.

Isboti. Ishorasi almashinuvchi qator berilib, $a_n > a_{n+1}$ va $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lsin

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

tenglikdan bu qismiy yig'indining doimo musbat va o'suvchi ekanligi ko'rinadi.

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_6-a_7)-...-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$$

Tenglikdan $S_n<a_1$ bo'lishi, ya'ni $\{S_{2n}\}$ yuqoridan a_1 soni bilan chegaralanishi kelib chiqadi. O'suvchi va yuqoridan chegaralangan ketma- ketlik limitga ega.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{n+1}$ tenglikda $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ekanligidan $\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S$ kelib chiqadi. Demak, qator yaqinlashuvchidir.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$ qator uchun Leybnis alomati shartlari o'rinli.

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ya'ni, qator yaqinlashuvchi, yig'idisi 1 dan kichik bo'ladi.

Ixtiyoriy $b_n\in R$ sonlardan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ qatorlarni ko'ramiz.

Bu qatorlarning ikkinchisi yaqinlshib, yig'indisi S bo'lsa, birinchi qator ham yaqinlashuvchi, yig'indisi S dan kichik son bo'lishi tushunarli. Lekin, birinchi qator yaqinlashuvchi, ikkinchisi uzoqlashuvchi bo'lib qoladigan hadlar mavjud.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ qator yaqinlashuvchi, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qator esa uzoqlashuvchidir.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi, lekin $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$

uzoqlashuvchi bo'lib qolsa, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

Misol. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$ qator absolyut yaqinlashuvchi, chunki $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ qator ham yaqinlashuvchidir.

$$2)\,1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Ishorasi almashinuvchi qator Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi, lekin,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Umumlashgan garmonik qator $p=\frac{1}{2}$ da uzoqlashuvchi.

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ qator shartli yaqinlashuvchi xolos.

9.2.§. Darajali qatorlar

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ ko'rinishdagi qatorlar darajali qatorlar deyiladi. $a_0,a_1,...,a_n,...$ sonlari darajali qator koeffitsiyentlari deyildi.

$x\in(-\infty;+\infty)$ ning turlicha qiymatlarida turlicha sonli qatorlar hosil qilish mumkin. Ulardan ba'zilari yaqinlashuvchi, ba'zilari uzoqlashuvchi bo'lib qoladi.

Berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladigan $x\in R$ qator yaqinlashish sohasi deyiladi. Bu soha bo'sh emas, chunki hech bo'lmaganda $X=0(X-X_0)$ da yaqinlashuvchi qator paydo bo'ladi.

Bunday qatorlar qismiy yig'indilari ham funksiya bo'ladi

$$S_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$$

Demak, qator yig'indisi ham X ning funksiyasidir: S = S (x)

Dastlab, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ qatorni qaraymiz.

Teorema (Abel N.X). Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qator $x=x_1$ nuqtada yaqinlashsa, $[-x;x_1]$ oraliqda yaqinlashadi. Agar $x=x_2$ nuqtada uzoqlashsa, $(-\infty;-x_2]\cup[x_2;+\infty)$ oraliqda ham uzoqlashadi.

Isboti. $x=x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin, u holda

$$\lim_{n\to\infty} a_nx_1^n=0$$

Ya`ni $\{a_nx_1^n\}$ chegaralangan, $|a_nx_1^n|> M, n\in N$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_1^n\left(\frac{x}{x_1}\right)^n$ qatorni absolyut yaqinlashsa tekshiramiz.

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|<M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_1}\right|^n, |x|<|x_1|$ da kamayuvchi geometrik progressiya hosil bo'ladi va qator yaqinlashuvchi.

Ikkinchi qismini isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz.

$|x|>|x_1|$ da yaqinlashuvchi bo'lin. U holda qator x_2 nuqta ham yaqinlashishga majbur bo'lar edi.

Demak, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ qator uchun shunday bir R soni mavjudki, qator $|x|<$ R da absolyut yaqinlashuvchi, $|x|>|$ R uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu son yaqinlashish radiusi, $(-R;R)$ esa yaqinlashish intervali deyiladi.

Teorema. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (Koshi –Adamar)

Isboti. $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ qatorni absolyut yaqinlashishga tekshiramiz.

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|<1$$

Demak, Dalamber alomatiga ko'ra, $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ qator

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=R$$

bo'lganda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Berilgan qator $\pm R$ da qo'shimcha tekshiriladi.

Misol. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

ekanligidan $x=\pm1$ da qo'shimcha tekshiramiz.

$x=-1$ da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ qator hosil bo'lib, Leybnis alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi.

$x=1$ da garmonik qator hosil bo'lib, u uzoqlashuvchidir.

Berilgan qator $[-R;R]=(-1;1)$ yarim intervalda yaqinlashuvchi

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ qator uchun yaqinlashishi intervali $|x-x_0|<R$ tengsizlikdan topiladi.

Misol. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ qator uchun

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{n+1}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(-\frac{2}{3}\right)^n(-2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

$|x+1|<\frac{1}{3}$ dan $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ va $-\frac{4}{3}<x<-\frac{2}{3}$

$x=-\frac{4}{3}$ da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ishorasi almashinuvchi qator yaqinlashuvchi, $x=-\frac{2}{3}$ da esa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ qator uzoqlashuvchi bo'lganligi uchun yaqinlashish intervali

$$[-\frac{4}{3};-\frac{2}{3})$$

bo'ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(-R;R)$ intervalda darajali qatorga yoyilagan.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Qatorning yaqinlashish intervali ham $(-R;R)$ bo'lsa, bu intervalda

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_1}^{x_2},\ x_1,x_2\in(-R;R)$$

Tengliklar o'rinli. Natijaviy qatorlar ham $(-R;R)$ yaqinlashish intervaliga ega.

Misol. 1) $f(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+...+\frac{x^n}{n(n+1)}+...$ qator yig'indisini toping.

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ ekanligidan $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$

$$S(x)=x\cdot f(x)=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+...+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+...$$

Yig'indidan ikki marta (-1;1) intervalda hosila olamiz.

$$S'(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...$$

$$S''(x)=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...=\frac{1}{1-x}$$

Endi ikki marta integrallab, $S(x)$ ni topamiz.

$$S'(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$$

$$S(x)=-\int\ln(1-x)dx=-x\ln(1-x)-\int\frac{x}{1-x}dx=$$

$$=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x).$$

$$f(x)=\frac{S(x)}{x}=-\ln(1-x)+1+\frac{1}{x}\ln(1-x)=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x).$$

2) $f(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+...$ yig'indini toping.

$a_n=(-1)^{n+1}n^2$ ekanligidan $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1$

Dastlab, $f(x)=x(1-4x+9x^2-16x^3+...)$

yig'indini jamlashga harakat qilamiz.

$$\int S_1(x)dx=x-2x^2+3x^3-4x^4+...=x(1-2x+3x^2-4x^3+...)$$

Agar $S_2=1-2x+3x^2-4x^3+...$ desak,

$$\int S_2(x)dx=x-2x^2+3x^3-4x^4+...=\frac{x}{(1+x)}$$

Demak, $S_2=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$. U holda $\int S_1(x)dx=\frac{x}{(1+x)^2}$

va $S_1(x)=\left[\frac{x}{(1+x)^2}\right]'=\frac{1-x}{(1+x)^3}$

$f(x)=x\cdot S_1(x)$ ekanligidan $f(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$

Teorema. Agar $(-R;R)$ intervalda

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

bo'lsa, bu yoyilma yagona va $f(x)$ ning Makloren qatoridir.

9.3.§. Fure qatorlari

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),a_n,b_n\in R$$

ko'rinishdagi qator trigonometrik qator deyiladi, bunda $a_n,b_n\in R$ trigonometrik qator koeffitsiyentlari deyiladi.

Bu qator ixtiyoriy $n\in N$ da 2π davrga ega funksiyalardan tuzilgan, shuning uchun, agar u$[-\pi;\pi]$ kesmada yaqinlashsa, $(-\infty;\infty)$ da ham yaqinlashadi.

Agar$[-\pi;\pi]$ da

$$\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,...$$

sistemaning bir xil bo'lmagan elementlari ko'paytmasidan integral olsak, natija nolga

$$\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cdot f_2(x)dx=0$$

bitta funksiya kvadrati integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\neq 0$$

ekanligini olamiz. Agar qaralayotgan funksiyalar evalit fazasida deyilsa, sistema elementlari o'zaro ortagonaldir.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos kxdx=\frac{1}{2k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin kxdx=\frac{1}{2k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos kx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x+\cos(k-n)\right]dx=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nxdx=0\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos xdx=0$$

Bundan tashqari,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya$[-\pi;\pi]$ da aniqlangan, integrallanuvchi va hadma-had integrallanadigan trigonometrik qatorga yoyilsa,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

u holda yoyilma yagonadir.

Isboti. Yoyilmani$[-\pi;\pi]$ da integrallaymiz.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=a_0\pi \text{ De}$$

mak. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$ ko'rinishida topilar ekan.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\sin nxdx\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 \mathrm{kxdx}=a_k\pi$$

Bundan, $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{coskxdx}$ ko'rinishida bo'lishi kelib chiqadi.

Yoyilmani $\sin kx$ ga ko'paytirib integrallasak,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{sinkxdx}=b_k\pi$$

kelib chiqadi, undan $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sinkxdx}$ ko'rinishida ekanligi topiladi.

Demak, har bir koeffitsiyenti yuqoridagi integrallar yordamida topiladigan funksiya yoyilamasi yagonadir.

Yuqaridagi a_0, a_k, b_k koeffitsiyentlari $f(x)$ funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fure koeffitsiyentlari,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

qator esa $f(x)$ ning Fure qatori deyiladi.

2π davrli, $[-\pi;\pi]$ $f(x)$ bilan ustma- ust tushadigan, $(-\infty;+\infty)$ da davriy davomi $F(x)$ ga yaqinlashadi.

Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya $[-\pi;\pi]$ da aniqlangan, juft bo'lsin, $f(-x)=f(x)$

U holda

$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sinkxdx}=0$ bo'lib,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar $f(x)$ toq, $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{dx}=0\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{cosnxdx}=0$$

bo'lib,

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sinkxdx}$$

ko'rinishini oladi.

Misol. 1) $f(x)=x$ bo'lsin. U holda funksiyaning toqligidan $a_0=a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right]=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Demak, $f(x)$ uchun Fure qatori

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+...\right]$$

ko'rinishda bo'ladi, tenlik $(-\pi;\pi)$ da o'rinli, $x=\pm\pi$ da

$$f(\pm x)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0 \text{ olinadi.}$$

2) $f(x)=x^2$ bo'lsa,

$$b_n=0 \text{ va } a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin x}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nxdx\right]=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$f(x)=x^2$ ga mos Fure qatori $[-\pi;\pi]$ da

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}-...\right)$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[-l;l]$ da yaqinlashgan $2l$ davrli funksiya bo'lsa, $\S=\frac{\pi x}{l}$ ko'rinishida yangi o'zgaruvchi kiritsak

$$\varphi(\S)=f\left(\frac{l\S}{\pi}\right)=f(x)$$

bo'lib, $[-\pi;\pi]$ da

$$\varphi(\S)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\S+b_n\sin n\S)$$

bo'ladi, bunda

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\S)d\S,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\S)\cos\S d\S,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\S)\sin\S d\S$$

Eski o'zgaruvchilarga qaytsak, $a_0 = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)dx$;

$$a_n = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx;\ b_n = \frac{1}{e}\int_{-e}^{e} f(x)\sin\frac{n\pi x}{e}dx;$$

ko'rinishida, Fure qatori esa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{e} + b_n\sin\frac{n\pi x}{e}\right)$$

ko'rinish oladi.

1. Yaqinlashishni isbotlang va yig'indini toping.

$1)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + ...$

$2)\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + ...$

$3)\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$

$4)\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ...$

2. Solishtirish, Dalamber, Koshi alomatlari yordamida yagonaligiga tekshirilsin.

$1)\ \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + ... + \frac{10^n}{n!} + ...,\ 2)\ \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)}{4!} + ... + \frac{(n!)^2}{n!} + ...,$

$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n},\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}},\ 7)$

$7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right)...\left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right)$

$8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ 9)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}},\ 10)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3^n}},$

3. Integral alomati yordamida yaqinlashishga tekshirilsin.

$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2},\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+9)\ln(10n+9)},$

$4)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2 - 7n + 6}.$

4. Absolyut va shartli yaqinlashishigatekshirilsin.

$1)\ \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + ...,\ 2)\ 1,1 - 1,02 + 1,003 - 1,0004 + ...$

$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n-1}}{n^2 + n - 1}\ 4)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3 + n + 1}\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$

5. Darajali qoidalar yaqinlashish intervali topilsin.

$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n,\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}x^n,\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n,$

$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n},\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n + 3^n}x^n,\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(x+1)^n.$

6. Hadma –had defferensiyal va integrallash yordamida quyidagi qatorlar yig'indisini hisoblang.

$1)\ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...,\ 2)\ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...,$

$3)\ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ...$

$4)\ x + 2x^2 + 3x^3 + ...,\ 5)\ 1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + ...$

$6)\ \frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{3x^2}{a^3} + ...,\ 7)\ \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^4}{4a^3} + ...$

$8)\ \frac{1\cdot 2}{a^2} + \frac{2\cdot 3}{a^3} + \frac{3\cdot 4}{a^4} + ...,\ 9)\ 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + ...$

$10)\ 1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + ...$

7. Ko'rsatilgan oraliqda Fure qatoriga yoying.

$1)\ f(x) = \mathrm{sgn}\,x\ \ (-\pi;\pi),\ 2)\ f(x) = \frac{\pi - x}{2}\ \ (0;2\pi),$

$3)\ f(x) = |x|\ (-\pi;\pi),\ 4)\ f(x) = \pi^2 - x^2\ \ (-\pi;\pi),$

$5)\ f(x) = shx\ \ (-\pi;\pi),\ 6)\ f(x) = e^{ax}\ \ (-\pi;\pi).$

10-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ASOSLARI HODISALAR VA ULARNING EHTiMOLLARI

10.1.§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari. Tasodifiy hodisa. Hodisalar ustida amallar

Tabiatni, texnik jarayonlarni, umuman kundalik hayotni kuzatishda turli hodisalarga duch kelamiz. Masalan, havo o'zgarib yomg'ir yoki qor yog'ishi, otilgan o'qning nishonga tegishi yoki tegmasligi, tanga tashlaganda uning gerbli tomoni bilan yoki raqamli tomoni bilan tushishi hodisalarga misol bo'ladi.

Umuman aytganda, hodisa deganda kuzatish yoki tajriba natijasida yuzaga keladigan fakt tushuniladi.

Odatda hodisalar ma'lum shartlar bajarilganda yoki tajriba (sinov) natijasida sodir bo'ladi (ya'ni ro'y beradi). Hodisalar bosh harflar bilan belgilanadi.

Aytaylik, tanga tashlash tajribasi o'tkazilsin. Bunda

1) tanganing biror tomonini tushishi hodisasi,

2) bir vaqtda tanganing ikkala tomonini tushishi hodisasi,

3) tanganing gerbli yoki raqamli tomonini tushishi hodisasi haqida aytish mumkin

Birinchi holda hodisa har doim sodir bo'ladi.

Odatda bunday hodisa muqarrar hodisa deyiladi va U harfi bilan belgilanadi.

Ikkinchi holda hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi va V harf bilan belgilanadi.

Uchunchi holda hodisa sodir bo'lishi ham mumkin, sodir bo'lmasligi ham mumkin. Bunda hodisa tasodifiy hodisa bo'ladi.

Demak, tajriba natijasida sodir bo'lishi ham, sodir bo'lmasligi ham mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi.

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalar ehtimollari va ularning qonuniyatlari o'rganiladi.

Keyinchalik tasodifiy hodisa deyish o'rniga hodisa deb ketaveramiz.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deyiladi. Barcha elementar hodisalardan iborat to'plam elementar hodisalar fazosi deyilib, u Ω kabi belgilanadi.

Masalan, tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajriba natijalari quyidagicha bo'ladi:

$\tilde{A}\tilde{A}$ – ikki martada ham tanganing gerb tomoni tushishi hodisasi;

$\tilde{A}D$ –birinchi martada gerbli, ikkinchi martada raqamli tomonini tushishi hodisasi;

$D\tilde{A}$ –birinchi martada raqamli, ikkinchi martada gerbli tomonini tushishi hodisasi;

DD – ikkala martada ham tanganing raqamli tomonini tushishi hodisasi.

Demak, bu tajribada 4 ta elementar hodisalar $\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}D, D\tilde{A}, DD$ sodir bo'lib, elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\tilde{A}\tilde{A}, \tilde{A}D, D\tilde{A}, DD\}$ bo'ladi.

Aytaylik, biror tajriba natijasida A va B hodisalar sodir bo'lishi mumkin bo'lsin.

Ta'rif. *Agar A hodisa sodir bo'lganda har doim B hodisa ham sodir bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.*

Bu holda A hodisaning sodir bo'lishi B hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi deb ham aytiladi.

Masalan, tajriba tomonlariga mos ravishda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan kubikni tashlashdan iborat bo'lib, A-ikki raqamli tomonini tushishi hodisasi, B esa juft raqamli tomonini tushishi hodisasi bo'lsa, unda $A \subset B$ bo'ladi.

Agar A va B hodisalari uchun

$$A \subset B, B \subset A$$

bo'lsa, A va B teng kuchli hodisalar deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Ta'rif. *A va B hodisalarning hech bo'lmaganda bittasining sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan hodisa A va B hodisalar yig'indisi deyiladi va $A + B$ kabi yoziladi.*

Masalan, tajriba ikki merganning nishonga qarab bir martadan o'q uzishidan iborat bo'lib, A birinchi merganning o'qining nishonga tegishi hodisasi, B esa ikkinchi merganning o'qini nishonga tegishi hodisasi bo'lsin. Bu hodisalar yig'indisi $A+B$ hodisasi merganlarning hech bo'lmaganda bittasining o'qini nishonga tegishli ifodalovchi hodisa bo'ladi.

Yuqoridagidek, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning yig'indisi ta'riflanadi.

Keltirilgan ta'rifdan

$$A+B=B+A, A+A=A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ta'rif. *A va B hodisalarning sodir bo'lishi natijasida sodir bo'ladigan hodisa, A va B hodisalar ko'paytmasi deyiladi va $A \cdot B$ kabi yoziladi.*

Bu ta'rifdan bevosita

$$A \cdot B = A \cdot B, A \cdot A = A$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqoridagidek, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ko'paytmasi ta'riflanadi.

Ta'rif. *Agar A hodisasining sodir bo'lishi B hodisasining ham sodir bo'lishini inkor etmasa, A va B birgalikda bo'lgan hodisalar deyiladi.*

Masalan, kubikni tashlash tajribasida 4 raqamli tomonini tushishi hodisasini A, juft raqamli tomonini tushishi hodisani B deyilsa, ular birgalikda bo'lgan hodisalar bo'ladi.

Ta'rif. *Agar A hodisasining sodir bo'lishi, B hodisasining sodir bo'lishini inkor etsa, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.*

Masalan, tangani tashlash tajribasida gerbli tomonini tushishi hodisasi A, raqamli tomonini tushishi hodisasi B deyilsa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

Agar tajriba natijasida sodir bo'lishi mumkin bo'lgan

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

hodisalarning birining sodir bo'lishi boshqasining sodir bo'lishiga nisbatan imkoniyatliroq bo'lmasa, $A_1, A_2, ..., A_n$ teng imkoniyatli xodisalar deyiladi.

Agar A va B hodisalar uchun

$$A+B=U, A \cdot B = V$$

bo'lsa, A va B o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\bar{A}$ kabi belgilanadi. Barcha elementar hodisalar to'plami Ω - elementar hodisalar fazosi deyiladi.

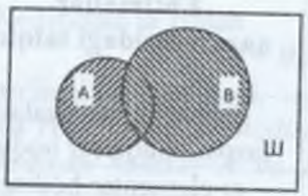
Hodisalarni to'plamlar kabi ham talqin etish mumkin.

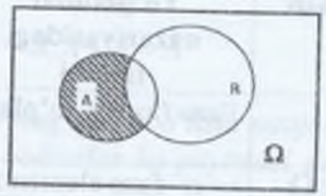
Belgilash	**To'plamlar nazariyasidagi talqini**	**Ehtimollar nazariyasidagi talqini**
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazo elementi	ω elementar hodisa
$A, A \subseteq \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B, A+B$	A va B to'plamlarning yig'indisi, birlashmasi	A va B hodisalar yig'indisi (A va B ning kamida bittasi ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \cap B, A \cdot B$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi (A va B ning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B, A-B$	A to'plamdan B to'plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi (A ning ro'y berishi, B ning ro'y bermasligidan iborat hodisa)
$\varnothing$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\bar{A}$	A to'plamga to'ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa (A ning ro'y bermasligidan iborat)
$A \cap B = \varnothing$, $A \cdot B = \varnothing$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A \subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi

$A=B$	A va B to'plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

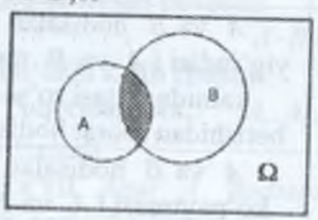
Hodisalar va ular ustidagi amallarni **Eyler-Venn** diagrammalari yordamida tushuntirish (tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.

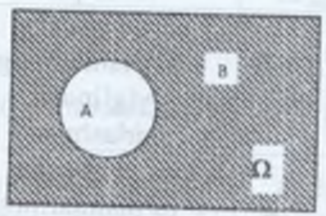
$A+B$, $A-B$



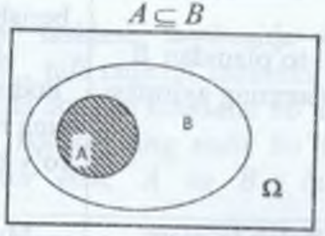


$A\cdot B, \overline{A}$





$A\subseteq B$



10.2.§. Tasodifiy hodisa ehtimoli

1. Hodisa ehtimoli. Aytaylik, tajriba natijasida bir xil imkoniyat bilan

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

hodisalar yuzaga kelgan bo'lsin. (Ravshanki, ular elementar hodisalar bo'ladi).

Ta'rif. *Agar*

1) $e_1+e_2+\dots+e_n=U$ *(muqarrar hodisa)*

2) $e_i\cdot e_j=V$ *(mumkin bo'lmagan hodisa)* $(i,j=1,2,3,\dots,n,\ \ i\neq j)$

bo'lsa, $e_1,e_2,\dots,e_n$ *hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan teng imkoniyatli hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi deyiladi.*

Masalan, kubikni tashlash tajribasida, e_i −kubikning i $(i=1,2,3,4,5,6)$ raqamli tomonini tushishi hodisasi deyilsa, unda

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi. Bunda e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 teng imkoniyatli elementar hodisalardir.

A hodisa hamda hodisalarning to'la gruppasini tashkil etuvchi n ta $e_1,e_2,\dots,e_n$ elementar hodisalarni qaraylik. Aytaylik, bu elementar hodisalardan m tasi $(m\leq n)$ A hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'dirsin.

Ta'rif. *Ushbu*

$$\frac{m}{n}$$

son A hodisaning ehtimoli deyiladi va $P(A)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

(Odatda bu ta'rif hodisa ehtimolining klassik ta'rifi deyiladi).

Misol. *Xaltada, yaxshilab aralashtirilgan 20 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 8 tasi qizil, 2 tasi oq va 10 tasi ko'k rangli. Xaltadan, tavakkal qilib bitta shar olindi. Olingan sharning qizil shar bo'lishi, oq shar bo'lishi va ko'k shar bo'lishi ehtimollari topilsin.*

Olingan sharning qizil bo'lishi hodisasi A, oq shar bo'lishi hodisasi V , ko'k shar bo'lishi hodisasi S bo'lsin.

Ravshanki, barcha elementar hodisalar 20 ta bo'lib, ulardan 8 tasi A hodisani sodir bo'lishiga, 2 tasi B hodisaning sodir bo'lishiga, 10 tasi C hodisaning sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi. Unda A, B va C hodisalarining ehtimollari (1) formulaga ko'ra

$$P(A)=\frac{8}{20}=0,4;\quad P(B)=\frac{2}{20}=0,1;\quad P(C)=\frac{10}{20}=0,5$$

bo'ladi.

Hodisa ehtimolining sodda xossalarini keltiramiz.

1-xossa. *Muqarrar hodisa ehtimoli 1 ga teng bo'ladi.*

$$P(U)=1.$$

Bu holda hodisa ehtimoli ta'rifidagi n va m lar uchun $n=m$ bo'lib,

$$P(U)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

bo'ladi.

2-xossa. *Mumkin bo'lmagan hodisa ehtimoli nolga teng bo'ladi:*

$$P(V)=0$$

Bu holda $m=0$ bo'lib,

$$P(V)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

bo'ladi.

3-xossa. *A tasodifiy hodisa ehtimoli musbat bo'lib, u nol bilan bir orasida bo'ladi:*

$$0<P(A)<1$$

Bu holda hodisa ehtimoli ta'rifidagi m va n lar uchun

$$0<m<n$$

bo'lib,

$$\frac{0}{n}<\frac{m}{n}<\frac{n}{n}$$

bo'lishidan

$$0<P(A)<1$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4-xossa. *A hodisaga qarama-qarshi bo'lgan* $\overline{A}$ *hodisaning ehtimoli*

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

bo'ladi.

A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

bo'lsin. Unda $\overline{A}$ hodisaga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni $n-m$ ga teng bo'ladi.

Demak,

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}.$$

Keyingi tenglikdan

$$P(\overline{A})=1-\frac{m}{n}=1-P(A)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz.

Kombinatirikada **qo'shish** va **ko'paytirish** qoidasi deb ataluvchi ikki muhim **qoida (prinsiplari)** mavjud.

$A=\{a_1,a_2,...a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,...b_n\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A\cdot B=\varnothing$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i,b_j) juftliklar to'plami $C=\{(a_i;b_j):i=\overline{1,n},j=\overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n\cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m $(0<m\le n)$ tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: **qaytarilmaydigan** va **qaytariladigan tanlashlar**. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga

qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

Guruhlashlar soni: n ta elementdan m $(0<m\le n)$ tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi: $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffitsiyentlaridir:

$$(p+q)^n=p^n+C_n^m p^{n-1}q+...+q^n.$$

O'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m $(0<m\le n)$ tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi: $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

O'rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o'rinlashtirish o'rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi: $P_n=n!$.

O'rin almashtirish o'rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (3) da $n=m$ bo'lsa, $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=\dfrac{n!}{0!}=n!$ bo'ladi.

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi.

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan m $(0<m\le n)$tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi: $\overline{C}_n^m=C_{n+m-1}^m$

Qaytariladigan o'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m $(0<m\le n)$ tadan qaytariladigan o'rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi: $\overline{A}_n^m=n^m$.

Qaytariladigan o'rin almashtirishlar soni: k xil n ta elementdan iborat to'plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta,..., k- element n_k marta qaytarilsin va $n_1+n_2+...+n_k=n$ bo'lsin, u holda n ta elementdan iborat o'rin almashtirish

$P_n(n_1,...,n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi: $P_n(n_1,...,n_k)=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

Misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. A={telefon nomeri to'g'ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi(chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}\approx 0{,}011.$$

Misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. B ={10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi } hodisasi bo'lsa,

$$N(B)=C_1^1\cdot C_{99}^9$$

va

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{C_1^1\cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}}=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

Misol. Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C}_6^4$ usul bilan tanlash mumkin. a) A={4 ta bir xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin. A hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni $N(A)=6$. Klassik ta'rifga ko'ra

$$P(A)\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{C_6^4}{\overline{C}_6^4}=\frac{6}{126}=\frac{1}{21}$$

bo'ladi. b) B={4 ta har xil otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin, u holda $N(B)=C_6^4$ ga teng va $P(A)\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{C_6^4}{\overline{C}_6^4}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$

2^0. Hodisa ehtimolining statistik ta'rifi. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifi tajriba natijasida sodir bo'ladigan elementar hodisalarning teng imkoniyatli bo'lishiga asoslangan. Ko'p hollarda elementar hodisalarning teng imkoniyatli bo'lishini ko'rsatish qiyin bo'ladi.

Tabiatda, texnik jarayonlarda ko'p marta takrorlanadigan voqealarga duch kelamiz. Bu tajribalar natijasida biror A hodisa sodir bo'lishi ham mumkin, sodir bo'lmasligi ham mumkin.

Aytaylik, N marta tajriba o'tkazilgan bo'lib, unda A hodisa μ marta sodir bo'lsin.

Ushbu

$$w=\frac{\mu}{N}$$

nisbat hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Ko'p kuzatishlar natijasiga ko'ra, bir xil shart-sharoitlarda ko'p marta takrorlanadigan tajriba o'tkazilganda nisbiy chastota biror o'zgarmas son atrofida tebranib turadi.

Masalan, tangani tashlash tajribasini ko'p marta takrorlaganda tanganing gerbli tomonini tushishi chastotasi quyidagicha bo'lgan.

Tajribalar soni	Gerbli tomoni bilan tushish soni	Nisbiy chastota
4040	2048	0,5080
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Bundan nisbiy chastotaning 0,5 soni atrofida tebranib turishini ko'ramiz.

Demak, hodisaning nisbiy chastotasi tajribalar soni orta borgan sari bitta o'zgarmas son atrofida bo'ladi.

Ta'rif. *Agar n sonining katta qiymatlarida A hodisaning nisbiy chastotasi p soni atrofida tebranib tursa, p soni A hodisaning ehtimoli deyiladi.*

Bu hodisa ehtimolining statistik ta'rifi.

3^0. Hodisa ehtimolining geometrik ta'rifi.

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra, Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.

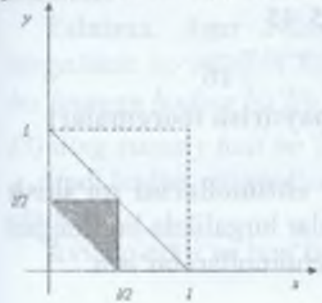
O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi. $A=\{X\in D\}$ -X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

A hodisaning **geometrik ehtimolligi** deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

Misol. l uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo'laklarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolligini toping.



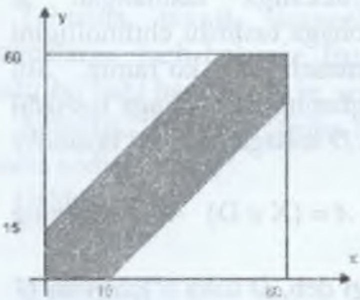
Birinchi bo'lak uzunligini x, ikkinchi bo'lak uzunligini y bilan belgilasak, uchunchi bo'lak uzunligi l-x-y bo'ladi. Bu yerda $\Omega=\{(x,y):0<x+y<l\}$, ya'ni $0<x+y<l$ sterjenning bo'laklari uzunliklarining barcha bo'lishi mumkin bo'lgan kombinatsiyasidir.

Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x+y>l-x-y, x+l-x-y>y$ $, y+l-x-y>x.$.

Bulardan $x<\frac{l}{2}, y<\frac{l}{2}, x+y>\frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 2-rasmdagi bo'yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra:

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\cdot l\cdot l}=\frac{1}{4}.$$



Misol. (Uchrashuv haqida). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momenti x, ikkinchisinikini y bo'lsin: $0\le x\le 60, 0\le y\le 60$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x-y|\le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, $\Omega=\{(x;y):0\le x\le 60, 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$ x va y larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz.

U holda $P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}$.

10.3-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari

1^0. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi. Faraz qilaylik, A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib, $P(A)$ va $P(B)$ ularning ehtimollari bo'lsin.

1-teorema. *A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli bu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Natija. A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisaning ehtimoli

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

bo'ladi.

Misol. *Xaltada 10 ta bir xil shar bo'lib, ulardan 3 tasi qizil, 5 tasi ko'k, 2 tasi oq. Tavakkal qilib olingan sharning rangli bo'lishi ehtimoli topilsin.*

Qizil sharni chiqishi hodisasini A, ko'k sharning chiqishi hodisasini B desak, unda ularning ehtimollari

$$P(A)=\frac{3}{10}, \qquad P(B)=\frac{5}{10}$$

bo'ladi. Qaralayotgan hodisalar birgalikda bo'lmagani uchun, qo'shish teoremasiga ko'ra rangli sharning chiqishi ehtimoli

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{8}{10}=0{,}8$$

bo'ladi.

2^0. Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi.

2-teorema. *Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lgan hodisalar bo'lib, $P(A)$ va $P(B)$ ularning ehtimollari bo'lsa, u holda*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

bo'ladi, bunda $P(AB)$ - A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli.

Eslatma. *Agar 2-teoremada keltirilgan A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib qolsa, unda $A\cdot B$ mumkin bo'lmagan hodisa bo'lib, $P(A\cdot B)=0$ bo'ladi. Demak, (2) formula (3) ning xususiy holi bo'ladi.*

Endi hodisa ehtimollarining ko'paytirish teoremalarini bayon etamiz.

Avvalo erkli va bog'liq hodisalar ta'riflarini keltiramiz.

Ta'rif. *A va B hodisalarining har birining sodir bo'lishi ehtimoli boshqasining sodir bo'lishi yoki bo'lmasligiga bog'liq bo'lmasa, A va B hodisalar erkli hodisalar, aks holda A va B bog'liq hodisalar deyiladi.*

3-teorema. *A va B erkli hodisalar ko'paytmasining ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng bo'ladi:*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Ko'p hollarda A hodisasining ehtimolini biror B hodisasi sodir bo'lgan shartda hisoblashga to'g'ri keladi. A hodisasining bunday ehtimoli shartli ehtimol deyiladi va $P(A/B)$ kabi belgilanadi.

Eslatma. *Agar A va B erkli hodisalar bo'lsa,*

$$P(A/B)=P(A)$$

bo'ladi.

4-teorema. *Agar A va B bog'liq hodisalar bo'lsa, u holda*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

bo'ladi.

Misol. *Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotning 96% yaroqli bo'lib, yaroqli mahsulotlarning 100 tasidan 75 tasi birinchi navli. Korxonada ishlab chiqarilgan yaroqli mahsulotlarning birinchi navli bo'lishi ehtimoli topilsin.*

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqli bo'lishi hodisasi A, ulardan birinchi navli bo'lishi hodisasi esa B bo'lsin. Shartga ko'ra

$$P(A)=0{,}96, \qquad P(B/A)=0{,}75$$

bo'ladi.

Ko'paytirish teoremasidan foydalanib, yaroqli mahsulotlar-ning birinchi navli bo'lishi ehtimolini topamiz:

$$P(A\cdot B)=0{,}96\cdot 0{,}75=0{,}72.\blacktriangleright$$

10.4-§. To'la ehtimol formulasi. Bayes formulasi

Faraz qilaylik, A hodisasi n ta juft-juft bilan birgalikda bo'lmagan (hodisalarni to'la gruppasini tashkil etuvchi)

$$H_1, H_2, ..., H_n$$

hodisalarning faqat bittasi bilangina sodir etishi mumkin bo'lsin. Odatda $H_1, H_2, ..., H_n$ hodisalar A hodisaning gipotezalari deyiladi.

U holda

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+$$
$$+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan shartga ko'ra

$$A=A\cdot H_1+A\cdot H_2+...+A\cdot H_n,$$

$$AH_i\cap AH_j=V \qquad (i\neq j)$$

bo'ladi.

Ehtimolning qo'shish hamda ko'paytirish teoremalaridan foydalanib topamiz:

$$P(A)=P(H_1\cdot A)+P(H_2A)+...+P(H_nA)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n).$$

Bu formula to'la ehtimol formulasi deyiladi.

Misol. *Omborga 360 ta mahsulot keltirilgan. Bulardan: 300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo'lib, 250 tasi yaroqli, 40 tasi ikkinchi korxonada tayyorlangan bo'lib, 30 tasi yaroqli, 20 tasi uchunchi korxonada tayyorlangan bo'lib, 10 tasi yaroqli mahsulot.*

Ombordan tavakkal qilib olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Tavakkal qilib olingan mahsuloti uchun quyidagi gipotezalar o'rinli bo'ladi:

H_1 – mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo'lishi;

H_2 – mahsulotning 2-korxonada tayyorlangan bo'lishi;

H_3 – mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo'lishi.

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$P(H_1)=\frac{300}{360}=\frac{5}{6}, \qquad P(H_2)=\frac{40}{360}=\frac{1}{9}, \qquad P(H_3)=\frac{20}{360}=\frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotni yaroqli bo'lishini A hodisa deyilsa, (4) formulaga ko'ra

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2}=\frac{29}{36}$$

bo'ladi.

$H_1, H_2, ..., H_n$ hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmagan gipotezalarning to'la gruppasidan iborat bo'lib, tajriba o'tkazilganga qadar ularning ehtimollari $P(H_i)$ $(i=1,2,3,...,n)$ ma'lum bo'lsin.

Tajriba natijasida A hodisasi sodir bo'ldi degan shartda tajribadan so'ng H_i hodisalarning ehtimollarini topish masalasini qaraylik. Ravshanki, bu masala

$$P(H_i/A)\quad (i=1,2,3,...,n)$$

ehtimolni topish bilan hal etiladi.

Ko'paytirish formulasidan foydalanib topamiz:

$$P(A\cdot H_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Keyingi tenglikdan

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

Natijada

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n)}$$

formulaga kelamiz. Demak, yuqorida keltirilgan masala shu formula yordamida yechiladi.

Odatda bu formula Bayes formulasi deyiladi.

10.5-§. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari

1°. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Ma'lumki, tajribalar o'tkazilishi natijasida tasodifiy hodisalar yuzaga keladi. Agar tajriba natijasida biror tasodifiy hodisaning sodir bo'lishi ehtimoli boshqa tajriba natijasida qanday tasodifiy hodisa sodir bo'lganiga bog'liq bo'lmasa, bunday tajribalar ketma-ketligi o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar deyiladi.

Aytaylik, n ta tajriba o'tkazilgan bo'lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) tajribalar o'zaro bog'liq bo'lmasin;

2) har bir tajriba natijasida yoki A hodisasi, yoki unga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisalardan biri sodir bo'lsin,

3) har bir tajribada A hodisaning sodir bo'lishi ehtimoli o'zgarmas bo'lib, u p ga teng bo'lsin: $p=P(A)$.

Ravshanki, bunda $\overline{A}$ hodisasining sodir bo'lishi ehtimoli $P(\overline{A})=1-p$ bo'ladi. Uni q bilan belgilaylik: $q=P(\overline{A})$. Demak, $q=1-p$.

Odatda bunday tajribalar ketma-ketligi Bernulli sxemasi deyiladi.

Masala, n ta erkli tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lishi ehtimolini topishdan iborat. Bu ehtimolni $P_n(k)$ bilan belgilaymiz.

Aytaylik, n ta tajribada A hodisa biror marta ham sodir bo'lmasin. Demak, birinchi tajribada $\overline{A}$ hodisa, ikkinchi tajribada ham $\overline{A}$ hodisa va hokazo n -tajribada ham $\overline{A}$ hodisa sodir bo'ladi. Natijada ushbu

$$\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot...\cdot\overline{A}}_{n\ ta}$$

murakkab hodisa yuzaga keladi. Uning ehtimoli ko'paytirish teoremasiga ko'ra

$$\underbrace{P\left(\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}\right)}_{n\ ma}=\underbrace{P\left(\bar{A}\right)\cdot P\left(\bar{A}\right)\cdot...\cdot P\left(\bar{A}\right)}_{n\ ma}=\underbrace{q\cdot q\cdot...\cdot q}_{n\ ma}=q^n$$

bo‘ladi.

Demak, n ta tajribada A hodisaning biror marta ham sodir bo‘lmaslik ehtimoli

$$P_n(0)=q^n$$

ga teng.

n ta tajribada A hodisa faqat bir marta sodir bo‘lsin. Bu holda quyidagi n ta hodisa yuzaga keladi:

$\underbrace{A\cdot\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}}_{n\ ta}$ (birinchi tajribada A hodisa sodir bo‘ldi)

$\underbrace{\bar{A}\cdot A\cdot\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}}_{n\ ta}$ (ikkinchi tajribada A hodisa sodir bo‘ldi)

$\underbrace{\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot A\cdot...\cdot\bar{A}}_{n\ ta}$ (uchunchi tajribada A hodisa sodir bo‘ldi)

……………………………………………………

$\underbrace{\bar{A}\cdot\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}\cdot A}_{n\ ta}$ (n-tajribada A hodisa sodir bo‘ldi)

Bu hodisalarning ehtimollarini ko‘paytirish teoremasidan foydalanib topamiz:

$$P\left(A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}\right)=P(A)\cdot P\left(\bar{A}\right)\cdot P\left(\bar{A}\right)...P\left(\bar{A}\right)=p\cdot q\cdot q\cdot...\cdot q=p\cdot q^{n-1},$$

$$P\left(\bar{A}A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}\right)=P\left(\bar{A}\right)\cdot P(A)\cdot P\left(\bar{A}\right)...P\left(\bar{A}\right)=p\cdot q^{n-1}$$

……………………………………………………

$$P\left(\bar{A}\bar{A}...\bar{A}A\right)=P\left(\bar{A}\right)\cdot P\left(\bar{A}\right)...P\left(\bar{A}\right)\cdot P(A)=p\cdot q^{n-1}$$

Ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan

$$P\left(A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}+\bar{A}A\bar{A}...\bar{A}+...+\bar{A}\bar{A}...\bar{A}A\right)=$$

$$=P\left(A\bar{A}\bar{A}...\bar{A}\right)+P\left(\bar{A}A\bar{A}...\bar{A}\right)+...+P\left(\bar{A}\bar{A}...\bar{A}A\right)=$$

$$=pq^{n-1}+pq^{n-1}+...+pq^{n-1}=npq^{n-1}=C_n^1pq^{n-1}$$

bo‘ladi. Demak,

$$P_n(1)=C_n^1pq^{n-1}.$$

n ta tajribada A hodisasi ikki marta sodir bo‘lsin. Bu holda quyidagi n ta hodisalar yuzaga keladi:

$$AA\bar{A}\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A},$$
$$A\bar{A}A\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A},$$
$$.................,$$
$$\bar{A}\bar{A}\cdot...\cdot\bar{A}AA.$$

Ularning soni

$$\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2$$

bo‘lib, har bir hodisaning ehtimoli

$$p^2q^{n-2}$$

ga teng bo‘ladi. Demak,

$$P_n(2)=C_n^2p^2q^{n-2}.$$

Yuqoridagidek, n ta tajribada A hodisasining k marta sodir bo‘lishi ehtimoli

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}$$

ga teng bo‘lishi ko‘rsatiladi, bunda

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bu formula Bernulli formulasi deyiladi.

Shuni aytish kerakki, n ta tajribada A hodisa 0 marta (ya’ni A hodisa sodir bo‘lmaydi), bir marta, ikki marta va h.k, n marta sodir bo‘lishi mumkin bo‘lib, ularning yig‘indisi muqarrar hodisa bo‘ladi. Demak,

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(n)=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=1.$$

Misol. *Har bir mahsulotning yaroqli bo‘lish (A hodisa) ehtimoli 0,8 ga teng. Tayyorlangan 5 mahsulotdan 3 tasining yaroqli bo‘lish ehtimoli topilsin.*

Masalaning shartidan

$$n=5,\quad k=3,\quad P(A)=p=0{,}8,\qquad P\left(\bar{A}\right)=q=1-p=0{,}2$$

bo‘lishini topamiz.

Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_5(3)=C_5^3 0,8^3\cdot 0,2^2=\frac{5!}{3!(5-3)!}0,8^3\cdot 0,2^2=0,2048$$

bo'ladi.

2^0. Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Bernulli sxemasida tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda $P_n(k)$ ehtimolni Bernulli formulasi yordamida hisoblash katta qiyinchiliklar tug'diradi. Natijada

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

ifodani o'ziga qaraganda soddaroq, ayni paytda hisoblash uchun oson bo'lgan ifoda bilan taqribiy ifodalash zaruriyati tug'iladi. Ko'p hollarda bunday masalalar quyida keltiriladigan teorema yordamida hal etiladi. Bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi). Bernulli sxemasida yetarlicha katta bo'lib, har bir tajribada hodisaning sodir bo'lish ehtimoli o'zgarmas bo'lsa, $(0<p<1)$ u holda ehtimol uchun

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'ladi, bunda

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Agar

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

deyilsa, formula ushbu

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

ko'rinishga keladi. Bunda $\varphi(x)$ juft funksiya bo'lib, x ning ma'lum qiymatlarida 1-ilovada keltirilgan.

Misol. *Har bir ekilgan chigitning unib chiqish (hodisa) ehtimoli $p(A)=p=0,8$ ga teng bo'lsa, ekilgan 100 ta chigitdan 85 tasi unib chiqish ehtimoli topilsin.*

Masalaning shartidan

$$n=100,\quad p(A)=p=0,8,\quad 1-p=0,2,\quad k=85$$

bo'lib,

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{85-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{85-80}{\sqrt{16}}=1,25$$

bo'ladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasiga ko'ra

$$P_{100}(85)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}\varphi(1,25)=\frac{1}{4}\varphi(1,25)$$

bo'ladi. 1-ilovada keltirilgan ma'lumotdan foydalanib

$$\varphi(1,25)\approx 0,1826$$

bo'lishini aniqlaymiz. Demak,

$$P_{100}(85)\approx\frac{1}{4}\cdot 0,1826=0,0456.$$

3^0. Muavr-Laplasning integral teoremasi. Bernulli sxemasini qaraylik. Bunda A hodisaning sodir bo'lish ehtimoli $p(A)=p$ bo'lib, tajribalar soni yetarlicha katta bo'lsin. Bu tajribada A hodisa k_1 martadan kam bo'lmagan, k_2 martadan ortiq bo'lmagan sonda sodir bo'lishi ehtimolini o'rganamiz. Bu ehtimolni $P_n(k_1,k_2)$ deb belgilaylik.

Ehtimollarni qo'shish teoremasiga ko'ra

$$P_n(k_1,k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+...+P_n(k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)$$

bo'ladi.

Agar

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (9) tenglikdan foydalanib ushbu

$$P_n(k_1,k_2)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

taqribiy formulani hosil qilamiz.

Endi

$$x_k=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\qquad (k=k_1,k_1+1,k_1+2,...,k_2)$$

desak, unda

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{(k+1)-np}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

bo'lib, taqribiy formula quyidagi

$$P_n(k_1,k_2)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\varphi(x_k)\cdot\Delta x_k$$

ko'rinishga keladi.

Keyingi munosabatning o'ng tomonidagi yig'indi uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaning $\left[x_{k_1},x_{k_2}\right]$ oraliqdagi integral yig'indisidir.

Ayni paytda $n\to\infty$ da bo'lgani uchun

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\varphi(x_k)\cdot\Delta x_k\to\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}\varphi(x)dx$$

bo'ladi. Demak,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\varphi(x_k)\cdot\Delta x_k\approx\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}\varphi(x)dx.$$

Yuqoridagi munosabatlardan

$$P_n(k_1,k_2)\approx\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}\varphi(x)dx$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar

$$x_{k_1}=\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}},\quad x_{k_2}=\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

hamda

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda ushbu

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

taqribiy formula hosil bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema (Muavr-Laplasning integral teoremasi) *Bernulli sxemasida ehtimol uchun*

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

taqribiy formula o'rinli bo'ladi.

Odatda

$$\Phi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Laplas funksiyasi (yoki ehtimol integrali) deyiladi. Bu funksiya yordamida

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Bu formula Laplas formulasi deyiladi.

Ravshanki, $\Phi(x)$ toq funksiya bo'lib, x ning ma'lum qiymatlarida ning qiymatlari 2-ilovada keltirilgan.

Misol. *Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsin. 400 ta mahsulotdan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo'lishi ehtimoli topilsin.*

Masalaning shartidan foydalanib topamiz:

$n=400,\quad k_1=70,\quad k_2=130,\quad p=0{,}2\quad 1-p=0{,}8$

$$p_{100}(70,130) \approx \Phi\left(\frac{130-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)-\Phi\left(\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)=$$

$$=\Phi(6,25)-\Phi(-1,25)$$

2-ilovada keltirilgan

$$\Phi(-1,25)=-0,39435, \quad \Phi(6,25)=0,5$$

ma'lumotlarga binoan

$$\Phi(6,25)-\Phi(-1,25)=0,89435$$

bo'lib, izlanayotgan ehtimol

$$p_{100}(70,130)\approx 0,89435$$

bo'ladi.

10.6-§. Tasodifiy miqdorlar

Tabiatda, texnik jarayonlarda turli xarakterdagi miqdorlar ko'p uchraydi. Masalan, ma'lum bir shaharda bir oy davomida tug'iladigan o'g'il bolalar soni, otilgan o'qning mo'ljalga olingan nuqtadan chetlanish oralig'i, uy hayvonining bir oy davomida og'irligining o'zgarish miqdori. Bu keltirilgan misollardagi miqdorlar (sonlar) turli tasodifiy holatlarga bog'liq bo'lib, ularning qiymatlarini aniq aytib bo'lmaydi.

Ta'rif. *Ma'lum shart-sharoitlarda tasodifiy holatlarga bog'liq ravishda u yoki bu son qiymatlardan birini qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdor tasodifiy miqdor deyiladi.*

Tasodifiy miqdorlar harflar bilan, masalan, ξ, η, X, Y harflari bilan, ularning qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar bilan belgilanadi.

Masalan, ξ tasodifiy miqdor 5 ta qiymatni qabul qilishi mumkin bo'lsa, unda

$$\xi:\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

kabi yoziladi.

Tasodifiy miqdorlar diskret hamda uzluksiz bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki sanoqli (ya'ni bu qiymatlarni chekli yoki

cheksiz ketma-ketlik shaklida yozish mumkin) bo'lsa, uni diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Masalan, tajriba har bir tomoniga 1 dan 6 gacha raqam yozilgan kubikni tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajriba natijasida kubikning 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamli (ularni ochko deb yuritamiz) tomonlari tushishi mumkin. Ravshanki, chiqadigan sonni avvaldan aytib bo'lmaydi. Binobarin, ochkolar soni tasodifiy miqdor. Bu tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

bo'lib, u diskret tasodifiy miqdor bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari biror oraliqdagi barcha qiymatlardan iborat bo'lsa, u uzluksiz tasodifiy miqdor bo'ladi.

Masalan, mo'ljalga qarab otilgan o'qning mo'ljaldan o'q tekkan nuqta orasidagi masofani ifodalovchi tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor bo'ladi.

Diskret tasodifiy miqdor ehtimolining taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasi

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bo'lsin. Bu tasodifiy miqdor yuqoridagi qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsin:

$$P\{\xi=x_1\}=p_1, \quad P\{\xi=x_2\}=p_2, \ldots, P\{\xi=x_n\}=p_n$$

Keltirilgan ma'lumotlardan ushbu

ξ	x_1	x_2	.....	x_n
$P\{\xi=x_i\}$	p_1	p_2	.....	p_n

jadvalni tuzamiz.

Ravshanki,

$$\{\xi=x_1\},\ \{\xi=x_2\},\ldots,\ \{\xi=x_n\}$$

hodisalar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalar bo‘lib, tasodifiy miqdor, albatta bitta qiymatni qabul qilishi kerakligidan

$$P\{\xi = x_1\} + P\{\xi = x_2\} + ... + P\{\xi = x_n\} = 1,$$

ya'ni

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

bo‘ladi.

jadval ξ tasodifiy miqdorni to‘la xarakterlaydi. Uni ξ diskret tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni deyiladi.

Misol. *Pul-buyum lotoreyasida 1 ta 1 000 000 so'm, 10 ta 100 000 so'mdan, 100 ta 1000 so'mdan yutuq o'ynaladi. Lotoreya biletining umumiy soni 10000 ta. Bitta lotoreya biletiga ega bo'lgan kishining tasodifan yutishining taqsimot qonuni topilsin.*

Ravshanki, tasodifiy miqdor ξ ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari

$$x_1 = 1000, \quad x_2 = 100000, \quad x_3 = 1000000, \quad x_4 = 0$$

bo‘ladi. Ularning ehtimollarini topamiz:

$$p_1 = P\{\xi = x_1\} = \frac{100}{10000} = 0{,}01,$$

$$p_2 = P\{\xi = x_2\} = \frac{10}{10000} = 0{,}001,$$

$$p_3 = P\{\xi = x_3\} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001,$$

$$p_4 = P\{\xi = x_4\} = 1 - (0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001) = 0{,}9889.$$

Yutishning taqsimot qonuni quyidagicha

ξ	1000	100000	1000000	0
P	0,01	0,001	0,0001	0,9889

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, ξ ixtiyoriy tasodifiy miqdor, esa biror haqiqiy son bo‘lsin.

Ushbu

$$\{\xi < x\}$$

hodisani qaraylik. Bu tajriba natijasida sodir bo‘lgan miqdorning (tasodifiy miqdorning) x sondan kichik bo‘lishi hodisasini bildiradi.

Ravshanki, hodisaning ehtimoli

$$P\{\xi < x\}$$

olingan x songa bog‘liq, ya'ni x funksiyasi bo‘ladi.

Odatda, ehtimol bilan aniqlangan funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi va $F(x)$ orqali belgilanadi:

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar ularning taqsimot funksiyalari orqali o‘rganiladi.

Misol. *Ushbu*

ξ	*-1*	*0*	*2*
$P\{\xi < x\}$	*0,2*	*0,3*	*0,5*

qonuniyat bilan taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi topilsin.

Ravshanki, ξ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari

$$-1,\ 0,\ 2$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $x \le -1$ bo‘lsin. Bu holda mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi, chunki tasodifiy miqdorning tengsizlikni qanoatlantiruvchi bitta ham qiymati yo‘q. Demak,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = 0.$$

Aytaylik, $-1 < x \le 0$ bo‘lsin. Bu holda $\{\xi < x\} = \{\xi = -1\}$ bo‘lib,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} = 0{,}2$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $0 < x \le 2$ bo‘lsin. Bu holda

$$\{\xi < x\} = \{\xi = -1\} \cup \{\xi = 0\}$$

bo‘lib,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 0\} = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$

bo‘ladi.

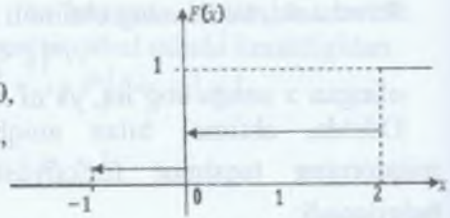
Aytaylik, $x > 2$ bo‘lsin. Bu holda muqarrar hodisa bo‘lib,

$$F(x) = P\{\xi < x\} = 1$$

bo‘ladi.

Shunday qilib ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le -1,\\ 0,2, & agar \quad -1<x\le 0,\\ 0,5, & agar \quad 0<x\le 2,\\ 1, & agar \quad x>2\end{cases}$$



bo'ladi. Uning grafigi chizmada tasvirlangan.

Endi taqsimot funksiyasining xossalarini keltiramiz.

Aytaylik, tasodifiy miqdor, $F(x)$ uning taqsimot funksiyasi bo'lsin.

1-xossa. *Taqsimot funksiya $F(x)$ uchun*

$$0\le F(x)\le 1$$

bo'ladi.

2-xossa. *Taqsimot funksiya $F(x)$ o'suvchi funksiya bo'ladi.*

Natija. Ushbu

$$P\{x_1\le\xi<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3-xossa. *Taqsimot funksiya $F(x)$ uchun*

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

bo'ladi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va uning xossalari

Diskret tasodifiy miqdorlarning xususiyatlarini ularning sonli xarakteristikalari yordamida ham o'rganish mumkin.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalaridan biri ularning matematik kutilishidir.

Faraz qilaylik, ξ diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$$

qiymatlarni mos ravishda ushbu

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

ehtimollar bilan qabul qilsin: $P\{\xi=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\dots,n.$

Ta'rif. Ushbu

$$x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\dots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$

yig'indi ξ diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deyiladi va $M\xi$ kabi belgilanadi:

$$M\xi=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\dots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k. \qquad (1)$$

Faraz qilaylik, n ta tajriba o'tkazilgan bo'lib, ξ tasodifiy miqdor

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k$$

qiymatlarni mos ravishda

$$m_1, m_2, \dots, m_k$$

martadan qabul qilsin. Bunda $m_1+m_2+\dots+m_k=n$ bo'ladi.

Ravshanki, ξ tasodifiy miqdor qabul qilgan qiymatlarning o'rta arifmetik qiymati

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot m_1+x_2\cdot m_2+\dots+x_k\cdot m_k}{n}$$

bo'lib undan

$$\bar{x}=x_1\cdot\frac{m_1}{n}+x_2\cdot\frac{m_2}{n}+\dots+x_k\cdot\frac{m_k}{n}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$w_i=\frac{m_i}{n}\qquad (i=1,2,\dots,k)$$

$\{\xi=x_i\}$ hodisaning nisbiy chastotasi bo'lib, u p_i ehtimol $(p_i=P\{\xi=x_i\})$ dan kam farq qiladi.

Demak,

$$\bar{x}\approx x_1w_1+x_2w_2+\dots+x_kw_k=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_kp_k$$

ya'ni

$$\bar{x}=M\xi$$

bo'ladi. Bu munosabat ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi shu tasodifiy miqdor kuzatilayotgan qiymatlarning o'rta arifmetik qiymatiga taxminan teng ekanini ko'rsatadi. (shuning uchun ham $M\xi$ ni ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati deyiladi).

Endi diskret tasodifiy miqdor matematik kutilishining sodda xossalarini keltiramiz.

4-xossa. *O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu songa teng:*

$$M(C)=C, \qquad C=const.$$

$C=const$ ni faqat bitta C qiymatni qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin.

5-xossa. *ξ tasodifiy miqdor uchun*

$$M(C\cdot\xi)=C\cdot M\xi \ (C=const)$$

bo'ladi.

ξ va η ikkita diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari mos ravishda

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

bo'lsin. Ushbu

$$z_{ij}=x_i+y_j \ (i,j=1,2,\ldots,n)$$

qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan γ tasodifiy miqdor ξ va η tasodifiy miqdorlar yig'indisi deyiladi:

$$\gamma=\xi+\eta.$$

Shu kabi ξ va η tasodifiy miqdorlar ayirmasi $\xi-\eta$, ko'paytmasi $\xi\cdot\eta$ tushunchalari kiritiladi.

6-xossa. *ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun*

$$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$$

bo'ladi.

Eslatma. *2- va 3-xossalardan*

$$M(\xi-\eta)=M\xi-M\eta$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlarning hech birining taqsimot qonuni boshqasining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini qanday qabul qilishiga bog'liq bo'lmasa, ξ va η o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar deyiladi.

7-xossa. *O'zaro bog'liq bo'lmagan ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun*

$$M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta$$

bo'ladi.

Misol. *Aytaylik, ξ diskret tasodifiy miqdor bo'lib, $M\xi$ uning matematik kutilishi bo'lsin.*

Ushbu

$$\xi-M\xi$$

tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan foydalanib topamiz:

$$M(\xi-M\xi)=M(\xi)-M(M(\xi))=M\xi-M\xi=0.$$

Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uning xossalari

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining o'rtacha qiymat atrofida tarqoqlanish darajasini xarakterlovchi son bo'ladi.

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor bo'lib, $M\xi$ uning matematik kutilishi bo'lsin.

Ta'rif. Ushbu

$$M(\xi-M\xi)^2$$

miqdor ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deyiladi va $D\xi$ kabi belgilanadi:

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2.$$

Agar $(\xi-M\xi)^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha

$(\xi-M\xi)^2$	$(x_1-M\xi)^2$	$(x_2-M\xi)^2$	...	$(x_n-M\xi)^2$
P	p_1	p_2	...	p_n

bo'lsa, u holda

$$D\xi=(x_1-M\xi)^2\cdot p_1+(x_2-M\xi)^2\cdot p_2+...+(x_n-M\xi)^2\cdot p_n$$

bo'ladi.

Endi dispersiyasining xossalarini keltiramiz.

8-xossa. *Tasodifiy miqdorning dispersiyasi quyidagicha*

$$D(\xi)=M\xi^2-(M\xi)^2 \qquad (2)$$

ifodalanadi.

9-xossa. *O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng.*

10-xossa. ξ *tasodifiy miqdor va C o'zgarmas uchun*

$$D(C\cdot\xi)=C^2D\xi$$

bo'ladi.

11-xossa. *Agar* ξ *va* η *bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda*

a) $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$,

b) $D(\xi-\eta)=D\xi+D\eta$

bo'ladi.

Misol. *Agar* ξ *tasodifiy miqdorning dispersiyasi 2 ga teng bo'lsa,* $2\xi+1$ *tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.*

Shartga ko'ra

$$D\xi=2$$

Endi $2\xi+1$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini xossalardan foydalanib topamiz:

$$D(2\xi+1)=D(2\xi)+D(1)=4D\xi+0=4\cdot2=8.$$

Endi tasodifiy miqdor dispersiyaga bog'liq bo'lgan bitta tushunchali keltiramiz.

Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor, $D\xi$ esa uning dispersiyasi bo'lsin.

Ta'rif. *Ushbu*

$$\sqrt{D\xi}$$

miqdor ξ *tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deyiladi va* σ *bilan belgilanadi:*

$$\sigma=\sqrt{D\xi}$$

Ta'rif. *Agar* ξ *tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 0, dispersiyasi 1 bo'lsa;*

$$M\xi=0,\ D\xi=1,$$

ξ *normallangan tasodifiy miqdor deyiladi.*

η ixtiyoriy tasodifiy miqdor bo'lib, uning matematik kutilishi a $(a=M\eta)$, o'rtacha kavdratik chetlanish esa σ bo'lsin.

U holda ushbu

$$\xi=\frac{\eta-a}{\sigma}$$

tasodifiy miqdor normallangan tasodifiy miqdor bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi hamda dispersiyasining xossalaridan foydalanib topamiz:

$$M(\xi)=M\left(\frac{\eta-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}(M\eta-a)=\frac{1}{\sigma}(a-a)=0,$$

$$D\xi=D\left(\frac{\eta-a}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}(D\eta+Da)=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1.$$

Demak, ξ-normallangan tasodifiy miqdor.

Diskret tasodifiy miqdorning asosiy taqsimot qonunlari

1°. Binomial taqsimot qonuni. Ravshanki, n ta tajribada A hodisaning sodir bo'lishi soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Uni ξ bilan belgilaylik. Bu tasodifiy miqdorning qabul qilish mumkin bo'lgan qiymatlari

$$0, 1, 2, 3,...,n$$

bo'lib, ularni quyidagi ehtimollar bilan qabul qiladi:

$$P_n(0)=q^n,\ P_n(1)=C_n^1pq^{n-1},\ P_n(2)=C_n^2p^2q^{n-2},...,p_n(n)=p^n$$

Natijada ushbu jadval hosil bo'ladi:

ξ	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^1 p^2 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimotini ifodalovchi bu qonun binomial taqsimot qonuni deyiladi.

Endi binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ ning matematik kutilishi, dispersiyasi hamda o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz.

Agar ξ_i tasodifiy miqdor deb A hodisa i-tajribada sodir bo'lganda 1 ni, sodir bo'lmaganda 0 ni mos p va q ehtimollar bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deyilsa, unda

$$M\xi_i = 0\cdot q + 1\cdot p = p$$

bo'lishini topamiz. Ayni paytda

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$$

bo'lgani uchun

$$M\xi = np$$

bo'ladi.

Shuningdek

$$M\xi_i^2 = 0^2\cdot q + 1^2\cdot p = p$$

bo'lishini e'tiborga olsak,

$$D\xi_i = M\xi_i^2 - (M\xi_i)^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\cdot q$$

va undan

$$D\xi = D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n = npq$$

bo'lishi kelib chiqadi.

ξ tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

bo'ladi.

2^0. Puasson taqsimot qonuni. Bernulli sxemasida ta erkli tajribada A hodisaning k marta sodir bo'lishi ehtimoli ushbu

$$P_n(k) = C_n^k p_n^k q^{n-k}$$

Bernulli formulasi yordamida topiladi. Bu formulani keltirib chiqarishda A hodisaning har bir tajribada sodir bo'lish ehtimoli o'zgarmas va u p ga teng bo'lsin deb olindi.

Ko'pgina masalalarda hodisaning sodir bo'lish ehtimoli tajribalar soni n ga bog'liq bo'lib, n ning ortib borishi bilan p ning kamayib borishiga bog'langan bo'ladi.

Aytaylik, Bernulli sxemasida A hodisaning ehtimoli $P(A) = p_n \quad (p_n > 0)$ bo'lib,

1) $n\to\infty$ da $p_n \to 0$,

2) $np_n = \lambda \qquad (\lambda > 0) \qquad \lambda = const$

bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

Ravshanki,

$$p_n = \frac{\lambda}{n}.$$

Unda Bernulli formulasiga ko'ra

$$P_n(k) = C_n^k p_n^k q^{n-k} = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

bo'lishini topamiz.

Tenglikning o'ng tomonidagi

$$C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k$$

ko'paytuvchini qaraymiz. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}...\frac{n-(k-1)}{n} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Keyingi tenglikdan da

$$C_n^k\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \to \frac{\lambda^k}{k!}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ayni vaqtda tenglikning o'ng tomonidagi

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

uchun

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=1+\left(\left(1+\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{\frac{1}{-\frac{\lambda}{n}}}\right)^{-\lambda}\rightarrow\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

bo‘lib, $n\to\infty$ da

$$\left(\left(1+\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{\frac{1}{-\frac{\lambda}{n}}}\right)^{-\lambda}\rightarrow e^{-\lambda},\quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\rightarrow 1$$

bo‘ladi.

Natijada, $n\to\infty$ da $p_n(k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}p_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, n ning yetarlicha katta qiymatlari uchun ushbu

$$p_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

taqribiy formula hosil bo‘ladi. Ko‘pincha bu taqribiy formula o‘rniga

$$p_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

tenglik ishlatiladi va Puasson formulasi deyiladi.

Tajriba natijasida hodisaning sodir bo‘lishi sonini tasodifiy miqdor deyilsa, uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots,n,\dots$$

bo‘lib, ularni qabul qilish ehtimollari

$$p(\xi=0)=e^{-\lambda},\qquad p(\xi=1)=\lambda e^{-\lambda},$$

$$p(\xi=2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda},\dots,p(\xi=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\dots$$

bo‘ladi.

Natijada ushbu jadval yuzaga keladi:

ξ	0	1	2	…	k	…
p	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

$$(0!=1).$$

Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimotini ifodalovchi bu qonun Puasson taqsimoti qonuni deyiladi.

Bu yerda

$$\sum_{k=0}^{n}p_n(k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

bo‘ladi (chunki $\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$)

Endi Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ ning matematik kutilish hamda dispersiyasini topamiz.

Yuqorida keltirilgan jadval hamda tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ta’rifiga ko‘ra:

$$M\xi=0\cdot\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+1\cdot\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\dots+n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

bo‘ladi.

Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

bo‘lishi hamda

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\lambda}$$

ekanligini e’tiborga olsak, unda

$$M\xi = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi ξ tasodifiy miqdorning matematik dispersiyasini topamiz. Avvalo ξ^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilishini hisoblaymiz:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(k-1+1) =$$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] = \lambda\cdot e^{-\lambda}\left(\lambda\cdot e^{\lambda}+e^{\lambda}\right) = \lambda\cdot e^{-\lambda}e^{\lambda}(\lambda+1) =$$

$$= \lambda^2+\lambda.$$

Dispersiya ta’rifiga ko‘ra

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$$

bo‘ladi.

Shunday qilib Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M\xi = \lambda$ dispersiyasi esa $D\xi = \lambda$ ga teng.

Mashqlar

1. Tangani bir marta tashlash tajribasida A-gerbli tomoni tushishi, B esa raqamli tomonini tushishi hodisasi bo‘lsa, A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$ hodisalar qanday munosabatda bo‘ladi?

2. Yashikda bir xil ko‘rinishda bo‘lgan 12 ta oq, 8 ta qora sharlar bor. Tavakkaliga olingan bitta sharning oq shar bo‘lishi ehtimoli topilsin.

3. Ekilgan 50 to‘p kuchatning 45 to‘pi ko‘kargani ma’lum bo‘lsa, ekilgan ko‘chatning ko‘karish hodisasining nisbiy chastotasi topilsin.

4. Qutida 6 ta yangi va 2 ta ishlatilgan radiobatareyka bor. Qutidan tavakkaliga olingan 2 ta batareykaning yangi bo‘lishi ehtimoli topilsin.

5. Oilada 5ta farzand bor. Qiz yoki o‘g‘il tug‘ilish ehtimollarini teng deb, shu oilada qizlar soni o‘g‘illar sonidan ko‘p bo‘lishi ehtimolini toping.

6. Sugurta kompaniyasi o‘rtacha 10% shartnomalar bo‘yicha sugurta pulini to‘laydi. 12 ta shartnoma tuzilgan. Kompaniya shu shartnomalardan:

a) 5 tasiga,

b) ko‘pi bilan 3 tasiga sugurta pulini to‘lashi ehtimolini toping.

7. Darslik 100 000 nushada nashr qilingan.Uning varaqlari noto‘g‘ri taxlanganligi ehtimoli 0,0001. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) 10ta nusha kitob noto‘g‘ri muqovalangan;

b) kamida 99 995ta kitob to‘g‘ri muqovalangan.

8. Bitta lotoreyaga yutuq chiqish ehtimoli $p = 0{,}01$ ga teng. Hech bo‘lmaganda bittasida yutuq chiqishi uchun qancha lotoreya bileti sotib olinishi kerak, agar $p \geq 0{,}95$ bo‘lsa.

9. Qurilma bir biriga bog‘liq bo‘lmagan uchta element bilan ishlaydi. Har bir o‘tkaziladigan tajribada, har bir elementning ishlamaslik ehtimoli 0,1 ga teng. Har bir o‘tkaziladigan tajribada, har bir elementning ishlamaslik taqsimot qonuni topilsin.

10. Idishda 6 ta bir xil rangdagi shar bor. Ulardan 4 tasi oq va 2 tasi qora rangda. Tavakkaliga olingan 3 ta sharlar ichida oq rangdagilari soni taqsimot qonuni tuzing va taqsimot funksiyasi topilsin.

11. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi topilsin, bunda $n = 100,\ p = 0{,}2$.

1– ILOVA

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ ning jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1696	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2– ILOVA

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$ ning jadvali

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3240	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3949	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3888	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985

11-BOB. ALGEBRAIK STRUKTURALAR TO'PLAMLAR QUVVATI. TO'PLAMLAR SISTEMASI

11.1-§. To'plamlarni sinflarga ajratish. Ekvivalentlik munosabatlari

Berilgan to'plamni elementlarining ba'zi bir xususiyatlariga qarab o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratish mumkin. Misol uchun, uch o'lchamli fazoni markazi koordinata boshida yotuvchi va radiusi har xil bo'lgan sferalarga ajratish mumkin. Bu sferalar o'zaro kesishmaydi. Mamlakat aholisini bir yilda tug'ilganlik belgisiga ko'ra kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratish mumkin. Bunday misollarning har biri to'plamni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish deb ataladi.

To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish qoidalari har xil bo'lishi mumkin. Ammo bu qoidalar ixtiyoriy emas. Biror M to'plam va uning o'zini-o'ziga Dekart ko'paytmasi $M \times M$ berilgan bo'lsin va $K \subset M \times M$ qism to'pam bo'lsin. Agar $(a,b) \in K$ bo'lsa, a element b element bilan φ munosabatda deyiladi va $a \underset{\varphi}{\approx} b$ shaklda belgilanadi.

1-ta'rif. *Agar M to'plam elementlari orasidagi φ munosabat quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga ekvivalentlik munosabati deyiladi:*

1. Ixtiyoriy $a \in M$ element uchun $a \underset{\varphi}{\approx} a$ (refleksivlik);

2. Agar $a \underset{\varphi}{\approx} b$ bo'lsa, u holda $b \underset{\varphi}{\approx} a$ (simmetriklik);

3. Agar $a \underset{\varphi}{\approx} b$ va $b \underset{\varphi}{\approx} c$ bo'lsa, u holda $a \underset{\varphi}{\approx} c$ (tranzitivlik).

4-teorema. *M to'plamda kiritilgan φ munosabat M ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratishi uchun uning ekvivalentlik munosabati bo'lishi zarur va yetarli.*

To'plamni sinflarga ajratish tushunchasi akslantirish tushunchasi bilan uzviy bog'liq. Aytaylik, A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi f akslantirish berilgan bo'lsin. A to'plamda aniqlangan f akslantirishda, B to'plamda tasvirlari ustma-ust tushuvchi elementlarni bir sinfga yig'sak, natijada A ni sinflarga ajratishga ega bo'lamiz. Teskarisi, A ixtiyoriy to'plam va uning biror bir sinflarga ajralishini qaraylik. B orqali to'plam ajralgan sinflar to'plamini belgilaymiz. Har bir $a \in A$ elementga o'zi tegishli bo'lgan sinfni (B to'plam elementini) mos qo'yish bilan A ni B ga akslantiruvchi akslantirishga ega bo'lamiz.

13-misol. Ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P: R^2 \to R$, $P(x,y)=x$ ni qaraymiz. Bunda OX o'qidagi har bir $a \in R$ nuqtaning asli $P^{-1}(a)=\{(a;y): y \in \mathrm{R}\}$, OX o'qiga perpendikulyar bo'lgan vertikal chiziqdan iborat. Shunday ekan, P proyeksiyalavchi akslantirishga tekislikni parallel to'g'ri chiziqlardan iborat sinflarga ajratish mos keladi.

14-misol. Uch o'lchamli R^3 fazoni uning koordinatalar boshidan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarini bir sinfga yig'ish bilan sinflarga ajratamiz. Har bir sinf markazi koordinatalar boshida bo'lgan $r \ge 0$ radiusli sferadan iborat bo'ladi. Demak, R^3 fazoni konsentrik sferalarga ajratishga bu fazoni $[0;\infty)$ yarim o'qqa akslantiruvchi $S: R^3 \to R^3_+, S(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ (2.6-misolga qarang) sferik akslantirish mos keladi.

15-misol. Butun qismlari bir xil haqiqiy sonlarni bir sinfga to'plash yo'li bilan haqiqiy sonlar to'plamini sinflarga ajratish mumkin. Bu sinflarga ajratishga $g(x)=[x]$ (2-misolga qarang) akslantirish mos keladi.

11.2.§. To'plamlar quvvati

Chekli va cheksiz to'plamlar. Ba'zi to'plamlarning elementlari sonini chekli ekanligini aniq aytishimiz mumkin. Masalan, ko'pyoq uchlari soni, ma'lum sondan oshmaydigan tub sonlar soni, mamlakatdagi aholi sonining chekli ekanligini aniq ayta olamiz. Bu to'plamlarning har biri, aniq bo'lmasada, cheklita elementga ega. Ikkinchi tomondan elementlari soni chekli bo'lmagan to'plamlar ham mavjud. Misol uchun, natural sonlar to'plami, to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami, tekislikdagi doiralar

to'plami, ratsional koeffitsiyentli barcha ko'phadlar to'plami va hokazo to'plamlar elementlari soni cheksiz bo'lgan to'plamlarga misol bo'ladi. Biz *cheksiz to'plam* deganda, bu to'plamdan bitta, ikkita, uchta va hokazo marta elementlarni olgandan keyin ham elementlari tugamaydigan to'plamni tushunamiz. Demak, cheksiz to'plam deganda, elementlarining soni cheksiz bo'lgan to'plamni tushunamiz.

Ikki chekli to'plam elementlari sonining tengligi, yoki birinchi to'plam elementlari ikkinchi to'plam elementlaridan ko'pligini sanash bilan taqqoslash mumkin. Ammo, ikki cheksiz to'plam elementlarini biror usul bilan taqqoslash mumkinmi? Boshqacha aytganda, tekislikdagi doiralar, sonlar o'qidagi ratsional sonlar, $[0,1]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar yoki fazodagi to'g'ri chiziqlardan iborat to'plamlardan qaysi birining elementlari ko'p degan savol ma'noga egadir.

Ikki chekli to'plam elementlari sonini taqqoslash usullari bilan tanishamiz. Birinchi usul, to'plamlar elementlarini sanash yo'li bilan taqqoslashdir. Ikkinchi usul, bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish yo'li bilan taqqoslashdir.

Ta'kidlash lozimki, agar birinchi taqqoslash usuli faqat chekli to'plamlar uchun yaroqli bo'lsa, ikkinchi taqqoslash usuli cheksiz to'plamlar uchun ham yaroqlidir.

Sanoqli to'plamlar. Cheksiz to'plamlar ichida eng soddasi sanoqli to'plamlardir.

1-ta'rif. *Agar M to'plam bilan natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, M ga sanoqli to'plam deyiladi.*

Boshqacha ta'riflasak: *agar M to'plam elementlarini natural sonlar vositasida $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida raqamlab chiqish mumkin bo'lsa, M ga sanoqli to'plam deyiladi.*

1-misol. $Z-$ butun sonlar to'plami. Butun sonlar to'plami va natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik quyidagi usul bilan o'rnatiladi:

$$f: Z \to N, f\begin{cases} 2n+1 & agar\ n \ge 0 \\ -2n & agar\ n < 0 \end{cases}$$

Demak, butun sonlar to'plami sanoqli ekan.

2-misol. Barcha juft natural sonlar to'plami va natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslikni $f(2n)=n$ qoida bo'yicha o'rnatish mumkin.

3-misol. Ratsional sonlar to'plamining sanoqli ekanligini ko'rsating.

Yechish. Har bir ratsional son yagona usulda

$$a=\frac{p}{q};\ p\in Z, q\in N$$

qisqarmas kasr ko'rinishida yoziladi. Ushbu ratsional son uchun $|p|+q$ uning balandligi deyiladi. Ravshanki, berilgan balandlikka ega bo'lgan ratsional sonlar cheklita. Masalan, 1 balandlikka faqat $0=\frac{0}{1}$ son mos keladi, 2 balandlikka faqat $1=\frac{1}{1}$ va $-1=\frac{-1}{1}$ $-1=\frac{-1}{1}$ sonlar mos keladi, 3 balandlikka esa $2=\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{2}{1}$ $2=\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{2}{1}$ va $-\frac{1}{2}$ sonlar mos keladi va hokazo. Barcha ratsional sonlarni ularning balandliklari o'sib borishi tartibida nomerlaymiz, ya'ni dastlab balandligi 1 ga teng son, keyin balandligi 2 ga teng sonlar, undan keyin balandligi 3 ga teng sonlar yoziladi va hokazo. Bu tartiblashda har bir ratsional songa aniq biror natural son mos keladi, ya'ni natural sonlar to'plami va ratsional sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Bundan esa ratsional sonlar to'plamining sanoqli ekanligi kelib chiqadi.

1-xossa. *Sanoqli to'plamning ixtiyoriy qism to'plami chekli yoki sanoqlidir.*

2-xossa. *Chekli yoki sanoqlita sanoqli to'plamlar birlashmasi yana sanoqli to'plamdir.*

3-xossa. *Har qanday cheksiz to'plam sanoqli qism to'plamga ega.*

Ekvivalent to'plamlar. U yoki bu cheksiz to'plamlarni natural sonlar to'plami bilan taqqoslash natijasida sanoqli to'plam tushunchasiga keldik. To'plamlarni nafaqat natural sonlar to'plami bilan taqqoslash mumkin, balki ixtiyoriy ikki to'plamni ular

o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik (biyeksiya) o'rnatish bilan taqqoslash mumkin.

2-ta'rif. *Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deyiladi.*

3-ta'rif. *Agar A va B to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda ular ekvivalent to'plamlar deyiladi va $A\sim B$ shaklida belgilanadi.*

Ta'rifdan ma'lumki, ikkita chekli to'plam ekvivalent bo'lishi uchun ularning elementlari soni teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Sanoqli to'plam tushunchasini quyidagicha ta'riflash ham mumkin: *agar to'plam natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lsa, u sanoqli to'plam deyiladi.* Ishonch hosil qilish qiyin emaski, agar ikki to'plam har biri uchunchi to'plamga ekvivalent bo'lsa, ularning o'zlari ham ekvivalentdir, xususan, ixtiyoriy ikkita sanoqli to'plamlar ekvivalentdir.

4-misol. $[a;b]$ va $[c;d]$ kesmalardagi nuqtalar to'plamlari ekvivalentligini ko'rsating, bu yerda $a<b, c<d$.

Yechish. $[a;b]$ va $[c;d]$ to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$\varphi:[a;b]\to[c;d], \varphi(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$$

akslantirish orqali o'rnatish mumkin.

5-misol. Sonlar o'qi $R=(-\infty;\infty)$ va $(0;1)$ interval ekvivalent to'plamlardir. Bu to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik

$$y=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}$$

funksiya yordamida o'rnatiladi.

Cheksiz to'plamlarga oid misollarni o'rganish jarayonida ko'rdikki, ba'zida cheksiz to'plamlar o'zining biror xos qism to'plamiga ekvivalent bo'ladi. Masalan, butun sonlar to'plami va natural sonlar to'plami ekvivalent, sonlar o'qi esa $(0;1)$ intervalga ekvivalent.

Bu holat faqat cheksiz to'plamlarga xosdir. Haqiqatan, 3.2 banddagi 3.3-xossada ko'rilgan cheksiz M to'plam va uning $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ sanoqli qismini qaraylik. Bu A to'plamni

$A_1=\{a_1,a_3,a_5,...\}$ va $A_2=\{a_2,a_4,a_6,...\}$ qism to'plamlarga ajratamiz. Keyin A va A_1 to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatamiz. Bu moslikni undan keyin $A\cup(M\setminus A_2)=M$ va $A_1\cup(M\setminus A_2)=M\setminus A_2$ to'plamlarga quyidagicha davom ettirish mumkin, ya'ni $M\setminus A_2$ to'plamning har bir elementiga o'zi mos qo'yiladi. Shunday qilib, M va $M\setminus A_2$ to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi. Lekin M va $M\setminus A_2$ to'plamlar teng emas, ammo ular ekvivalent. Natijada biz quyidagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

1-tasdiq. *Ixtiyoriy cheksiz to'plam o'zining biror xos qism to'plamiga ekvivalent bo'ladi.*

Sanoqsiz to'plamlar. Biz asosan chekli va sanoqli to'plamlarga misollar qaradik va cheksiz to'plamlarning ayrim xossalari bilan tanishdik. Quyidagi savol paydo bo'lishi tabiiydir: umuman olganda sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plamlar mavjudmi? Bu savolga ijobiy javob quyidagi teoremada keltirilgan.

1-teorema. $[0;1]$ *kesmadagi haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir.*

4-ta'rif. $[0;1]$ *kesma va unga ekvivalent bo'lgan to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.*

Shunday qilib, $[0;1]$ kesma sanoqsiz bo'lgan to'plamga misol bo'ladi. Endi $[0;1]$ kesmaga ekvivalent bo'lgan, ya'ni kontinuum quvvatli to'plamlarga misollar keltiramiz.

6-misol. $[0;1]$ kesma va $(0;1)$ intervalning ekvivalent to'plamlar ekanligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun $(0;1)$ dan $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ sanoqli qism to'plamni ajratamiz va undan foydalanib, $A_1=\{0,1,a_1,a_2,...,a_n\}$ to'plamni quramiz. Ushbu

$$\varphi:[0;1]\to(0;1),\varphi(x)=x,x\in[0;1]\setminus A_1$$

$$\varphi(0)=a_1,\varphi(1)=a_2,\varphi(a_n)=a_{n+2},n\geq1$$

akslantirish $[0;1]$ va $(0;1)$ to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatadi.

7-misol. 4 va 6-misolga asosan $[0;1]$ kesma ixtiyoriy $[a;b]$ kesmaga va $(a;b)$ intervalga ekvivalent bo'ladi, ya'ni $[a;b]$ va $(a;b)$ to'plamlar ham sanoqsizdir.

8-misol. 5 va 6-misollardan sonlar o'qidagi barcha nuqtalar to'plami $[0;1]$ kesmaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi.

9-misol. Tekislikdagi OX o'qiga parallel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlar to'plami $[0;1]$ kesmaga ekvivalent.

Sonlar o'qida murakkabroq tuzilgan kontinuum quvvatli to'plamga misol keltiramiz. Quyida qaralayotgan to'plam "Kantor to'plami", yoki "Kantor mukammal to'plami" nomi bilan taniqlidir.

10-misol. $E=[0;1]$ $E=[0,1]$ bo'lsin. Undan $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=K_1$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, ularning birlashmasini K_2 orqali, qolgan yopiq to'plamni, ya'ni

$$F_1\setminus K_2=\left[0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9};1\right]$$

to'plamni F_2 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu to'rtta kesmaning har biri teng 3 qismga bo'linib, o'rtadagi uzunligi 3^{-3} teng bo'lgan interval chiqarib tashlanadi. Chiqarib tashlangan

$$\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\cup\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\cup\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\cup\left(\frac{27}{27};\frac{26}{27}\right) \qquad (3.1)$$

to'plamni K_3 bilan $F_2\setminus K_3$ ni esa F_3 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq to'plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini olamiz. Agar

$$K=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$$

deb belgilasak, K yopiq to‘plam bo‘ladi. U $[0;1]$ kesmadan sanoqli sondagi $K_1, K_2, ... K_n, ...$ intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan K to‘plam Kantor to‘plami deb ataladi.

Endi K to‘plamning tuzilishini o‘rganaylik. Ravshanki, K ga chiqarib tashlangan intervallarning chegaralari bo‘lgan

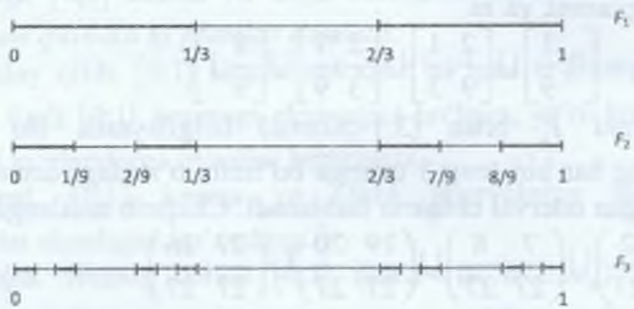
$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, ...$$

nuqtalar tegishli. Biroq K to‘plam faqat shu nuqtalardan iborat emas. $[0;1]$ kesmadagi K ga tegishli bo‘lgan nuqtalarni quyidagicha xarakterlash mumkin. Buning uchun $[0;1]$ kesmadagi har bir x ni uchlik sistemada yozamiz:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + ... + \frac{a_n}{3^n} + ...$$

bu yerda a_n sonlar 0, 1 va 2 raqamlarni qabul qilishi mumkin. O‘nli kasrlar holidagidek bu yerda ham ba’zi sonlarni ikki xil ko‘rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + ... = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{2}{3^n} + ...$$



3– chizma

Endi K to‘plamga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasi haqida fikr yuritamiz. Ravshanki, $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ va

intervaldagi sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_1 son albatta 1 ga teng bo‘ladi, $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ va $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ intervallarga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_2 son albatta 1 ga teng bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$ va $\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)$ intervallarga tegishli sonlar uchun ularning uchlik sistemadagi yoyilmalarida a_3 son albatta 1 ga teng bo‘ladi va hokazo. Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in [0;1] \setminus F$ son uchun uning uchlik sistemadagi yoyilmasida qatnashuvchi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sonlarning kamida bittasi 1 ga teng. Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: K to‘plamga kamida bir usul bilan uchlik kasr ko‘rinishida tasvirlanuvchi shunday $x \in [0;1]$ sonlar kiradiki, ularga mos $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikda 1 raqami biror marta ham uchramaydi. Shunday qilib, har bir $x \in K$ uchun

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \qquad (3.3)$$

ketma-ketlikni mos qo‘yish mumkin, bu yerda a_n raqam 0 yoki 2 ga teng. Bunday ketma-ketliklar to‘plami kontinuum quvvatli to‘plamni tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun har bir (3.3) ketma-ketlikka

$$b_1, b_2, ..., b_n, ... \qquad (3.4)$$

ketma-ketlikni shunday mos qo‘yamizki, agar $a_n = 0$ bo‘lsa, $b_n = 0$ bo‘ladi, agar $a_n = 2$ bo‘lsa, $b_n = 1$ bo‘ladi. Har bir (3.4) ketma-ketlikni, $[0;1]$ kesmadagi biror y sonning ikkilik kasr yozuvi deb qarash mumkin. Shunday qilib, K to‘plamni $[0;1]$ ga biyektiv akslantirishni olamiz. Bu yerdan K ning kontinuum quvvatli to‘plam ekanligi kelib chiqadi. [6]-adabiyotda Kantor to‘plami haqida ko‘proq ma’lumot berilgan. (3.2) ketma-ketlikdagi sonlar to‘plami sanoqli bo‘lgani uchun, ular K ni to‘la qoplamaydi.

Biz ko'rsatdikki, K kontinuum quvvatga ega, ya'ni $[0;1]$ kesma bilan K to'plam o'rtasida biyektiv moslik mavjud.

***2-teorema** (Kantor–Bernshteyn). Ixtiyoriy A va B cheksiz to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar A to'plamni B to'plamning B_1 qism to'plamiga biyektiv akslantiruvchi f akslantirish va B to'plamni A to'plamning A_1 qism to'plamiga biyektiv akslantiruvchi g akslantirish mavjud bo'lsa, u holda A va B to'plamlar ekvivalentdir.*

To'plamlar quvvati. Agar ikkita chekli to'plam ekvivalent bo'lsa, ularning elementlari soni teng bo'ladi. Agar ixtiyoriy A va B to'plamlar ekvivalent bo'lsa, u holda ular *bir xil quvvatga* ega deyiladi. Shunday qilib, quvvat tushunchasi ikki ekvivalent to'plamlar uchun umumiylikni bildiradi. Chekli to'plamlar uchun quvvat tushunchasi shu to'plamdagi elementlar son bilan ustma-ust tushadi. Natural sonlar to'plami va unga ekvivalent to'plamlar quvvati uchun $\aleph_0$ («alef nol» deb o'qiladi) belgi ishlatiladi. $[0;1]$ kesmadagi barcha haqiqiy sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plamlar *«kontinuum quvvat»* ga ega deb aytiladi. Bu quvvat uchun c yoki $\aleph$ belgi ishlatiladi. $\aleph_0$ va c orasida quvvat mavjudmi degan savol juda chuqur muammo hisoblanadi, ammo analizda uchraydigan barcha cheksiz to'plamlar yoki $\aleph_0$, yoki c quvvatga ega. Umuman A to'plam quvvati uchun $\overline{\overline{A}}$ belgi ishlatiladi.

Agar A va B to'plamlar chekli to'plamlar bo'lib, n va m mos ravishda bu to'plamlar elementlarining soni bo'lsa, A to'plamni B to'plamga barcha akslantitishlar soni m^n ga tengdir. Bunga ko'ra ixtiyoriy quvvatlarni darajaga ko'tarishni quyidagicha ta'riflash mumkin: A va B to'plamlar quvvati mos ravishda α va β bo'lsin. U holda A to'plamni B to'plamga barcha aksettirishlar to'plami B^A ning quvvati β *ning* α*-darajasi* deyiladi va β^α kabi belgilanadi.

3-teorema. $2^{\aleph_0}=c$.

***4-teorema.** Agar A to'plam quvvati α bo'lsa, uholda uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam quvvati 2^α, shu A to'plam quvvatidan katta, ya'ni $2^\alpha>\alpha$.*

Quvvati 2^c bo'lgan to'plam *giperkontinuum* quvvatga ega to'plam deb ataladi. Misol uchun $[0,1]$ segmentning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam quvvati giperkontinuum quvvatga ega.

11.3-§. To'plamlar sistemasi

1. To'plamlar halqasi. Elementlari to'plamlardan iborat to'plam *to'plamlar sistemasi* deb ataladi. Biz asosan oldindan berilgan X to'plamning qism to'plamlaridan iborat sistemalarni qaraymiz.

***1-ta'rif.** Agar $\mathfrak{R}$ to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma va kesishma amallariga nisbatan yopiq, ya'ni ixtiyoriy $A,B\in\mathfrak{R}$ to'plamlar uchun $A\Delta B\in\mathfrak{R}$ va $A\cap B\in\mathfrak{R}$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{R}$ to'plamlar sistemasiga halqa deyiladi.*

***1-xossa.** Agar $\mathfrak{R}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{R}$ birlashma va kesishma amallariga nisbatan ham yopiq bo'ladi.*

***2-xossa.** Agar $\mathfrak{R}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{R}$ chekli sondagi birlashma va kesishma amallariga nisbatan ham yopiq bo'ladi.*

Ushbu $A\setminus A=\varnothing$ tenglik ko'rsatadiki, bo'sh to'plam halqaga tegishlidir. Faqat bo'sh to'plamdan iborat sistema mumkin bo'lgan halqalar ichida eng kichigi bo'ladi.

Agar $\mathfrak{R}$ to'plamlar sistemasida shunday $E\in\mathfrak{R}$ to'plam mavjud bo'lib, ixtiyoriy $A\in\mathfrak{R}$ uchun $A\cap E=A$ bo'lsa, E to'plam $\mathfrak{R}$ sistemaning *«birlik elementi»* yoki *«biri»* deyiladi.

***2-ta'rif.** Birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar halqasi algebra deyiladi.*

1-misol. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $M(A)$ sistema, biri $E=A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha chekli qism to'plamlaridan tuzilgan sistema halqa bo'ladi. Bu halqa algebra bo'lishi uchun A chekli to'plam bo'lishi zarur va yetarli.

3-misol. Ixtiyoriy bo's bo'lmagan A to'plam uchun A va $\varnothing$ to'plamlardan tuzilgan $\{A,\varnothing\}$ sistema, biri $E=A$ bo'lgan algebra bo'ladi.

4-misol. Haqiqiy sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'ladi, ammo algebra bo'lmaydi.

1-teorema. *Ixtiyoriy $\{\Re_\alpha\}$ halqalar sistemasi uchun ularning kesishmasi $\Re=\bigcap_\alpha \Re_\alpha$ yana halqa bo'ladi.*

2-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas $\Im$ to'plamlar sistemasi uchun $\Im$ ni o'zida saqlovchi va $\Im$ ni saqlovchi barcha $\Re$ halqalarda saqlanuvchi yagona $\Re(\Im)$ minimal halqa mavjud.*

To'plamlar yarim halqasi. O'lchovli to'plamlar nazariyasida halqa tushunchasi bilan birgalikda unga nisbatan umumiyroq bo'lgan to'plamlar yarim halqasi tushunchasi muhim ahamiyatga ega.

3-ta'rif. *Agar $\Im$ to'plamlar sistemasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga yarim halqa deyiladi:*

a) *bo'sh to'plam $\Im$ sistemaga tegishli;*

b) *$\Im$ to'plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $A,B\in\Im$ munosabatdan $A\bigcap B\in\Im$ munosabat kelib chiqadi;*

c) *$A\in\Im, A_1\in\Im$ va $A_1\subset A$ ekanligidan $\Im$ sistemaning o'zaro kesishmaydigan $A_2,...,A_n$ cheklita elementlari mavjud bo'lib, $A\setminus A_1=\bigcup_{k=2}^{n} A_k$ tenglik o'rinli.*

Agar A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1,A_2,...,A_n$ to'plamlar birlashmasidan iborat bo'lsa, bu birlashma A to'plamning «chekli» yoyilmasi deyiladi.

Ixtiyoriy $\Im$- to'plamlar halqasi yarim halqa bo'ladi, chunki A va $A_1(A_1\subset A)$ to'plamlar $\Im$ ga tegishli bo'lsa, u holda $A_2=A\setminus A_1\in\Im$ bo'lib, $A=A_1\bigcup A_2$ chekli yoyilma o'rinli bo'ladi. Demak, har qanday halqa yarim halqa bo'lar ekan.

5-misol. Ushbu $\Im=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{bc\},\{abc\}\}$ sistema yarim halqa bo'ladi, ammo u halqa emas.

6-misol. Sonlar o'qidagi barcha $[a;b)$ yarim intervallar sistemasi $\Im$ yarim halqa bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $\Im$ sistemaga bo'sh $[a;a)=\varnothing$ to'plam tegishli. $\Im$ to'plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $[a;b),[c;d)\in\Im$ munosabatdan $[a;b)\bigcap[c;d)\in\Im$ munosabat kelib chiqadi. $[a;b)\in\Im,[a_1;b_1)\in\Im$ va $[a_1;b)\subset[a;b)$ ekanligidan $[a;b)\setminus[a_1;b_1)=[a;a_1)\bigcup[b_1;b)$ tenglik o'rinli hamda $[a;a_1)$ va $[b_1;b)$ lar $\Im$ ga tegishli. Demak, $\Im$ - yarim halqa.

7-misol. 4.6-misolda keltirilgan sistemaning halqa bo'lmasligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun $\Im$ sistemaning to'plamlar simmetrik ayirmasi amaliga nisbatan yopiq emasligini ko'rsatish yetarl$\Im$i. sistemadan olingan $A=[0;5)$ va $B=[1;3)$ to'plamlarning simmetrik ayirmasini qaraymiz. Bu holda $A\Delta B=[0;1)\bigcup[3;5)$ bo'lib, u $\Im$ sistemaga tegishli emas. Demak, $\Im$ sistema halqa bo'lmaydi.

1-lemma. *$\Im$ yarim halqadan A to'plam va o'zaro kesishmaydigan $A_1,A_2,...,A_n$ to'plamlar berilgan bo'lib, $A_k\subset A, k\in\{1,...,n\}$ bo'lsin. U holda $A_1,A_2,...,A_n$ to'plamlarni $A_{n+1},...,A_s$ to'plamlar bilan A to'plamning chekli yoyilmasiga qadar to'ldirish mumkin, ya'ni $A=\bigcup_{k=1}^{s} A_k$*

2-lemma. *$\Im$ yarim halqadan olingan har qanday cheklita $A_1,A_2,...,A_n$ to'plamlar sistemasi uchun $\Im$ da shunday o'zaro kesishmaydigan cheklita $B_1,...,B_t$ to'plamlar sistemasi topiladiki, har bir A_k to'plam $B_1,...,B_t$ to'plamlardan ba'zilari yordamida $A_k=\bigcup_{s\in M_k} B_s$ yig'indi ko'rinishida tasvirlanadi.*

Yarim halqadan hosil qilingan halqa. Birinchi bandda ko'rdikki, ixtiyoriy $\Im$ sistema uchun uni o'zida saqlovchi yagona minimal halqa mavjud. Ammo, ixtiyoriy $\Im$ sistema uchun $\Re(\Im)$

ni $\Im$ bo'yicha hosil qilish ancha murakkabdir. Agar $\Im$ sistema yarim halqa bo'lsa, u holda $\Re(\Im)$ ni hosil qilish mumkin.

3-teorema. *Agar $\Im$ yarim halqa bo'lsa, u holda $\Re(\Im)$ minimal halqa A_k to'plamlar ($A_k \in \Im$) bo'yicha $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ chekli yoyilmaga ega bo'lgan A to'plamlarning Ω sistemasi bilan ustma-ust tushadi.*

σ **- algebralar.** Ayrim masalalarni hal etishda, xususan o'lchovlar nazariyasida, sanoqlita to'plamlar kesishmasi va yig'indisini qarashga to'g'ri keladi. Shuning uchun, to'plamlar halqasi tushunchasidan tashqari, quyidagi tushunchalarni ham qarash maqsadga muvofiqdir.

4-ta'rif. *Agar $\Im$ to'plamlar halqasi uchun, undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning yig'indisi $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ham $\Im$ ga tegishli bo'lsa, u holda $\Im$ sistemaga «σ - halqa» deyiladi.*

5-ta'rif. *Agar $\Im$ to'plamlar halqasi uchun, undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning kesishmasi $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ham $\Im$ ga tegishli bo'lsa, u holda $\Im$ sistemaga «δ - halqa» deyiladi.*

6-ta'rif. *Agar σ halqaning birlik elementi mavjud bo'lsa, uni «σ-algebra» deb ataymiz. Birlik elementli δ halqa «δ algebra» deyiladi.*

Shuni ta'kidlash lozimki,

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n), \bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

ikkilik munosobatlaridan σ algebra va δ algebra tushunchalarining ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

A cheksiz to'plamning barcha qism to'plamlari sistemasi $M(A), \sigma$ -algebra bo'ladi. Agar biror $\Im$ sistema berilgan bo'lsa, doim uni o'z ichiga oluvchi σ - algebra mavjud. Haqiqatan ham,

agar $X = \bigcup_{A \in D} A$ desak, X ning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $M(X)$ sistema uchun $\Im$ qism va $M(X)$ sistema σ - algebra bo'ladi. Agar $\Omega - \Im$ ni o'zida saqlovchi ixtiyoriy σ – algebra va $\tilde{X}$ uning biri bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \in \Im$ to'plam $A \subset \tilde{X}$ munosabatga bo'ysunadi va natijada, $X = \bigcup_{A \in D} A \subset \tilde{X}$

Agar $\Im$ ni saqlovchi $\Omega - \sigma$ – algebraning biri $\tilde{X}$ uchun $X = \bigcup_{A \in D} A = \tilde{X}$ munosabat bajarilsa, bu σ– algebra ($\Im$ ga nisbatan) keltirilmaydigan σ- algebra deb ataladi.

4-teorema. *Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan $\Im$ to'plamlar sistemasi uchun (bu sistemaga nisbatan) keltirilmaydigan shunday σ – algebra mavjudki, bu σ - algebra $\Im$ ni saqlaydi va $\Im$ ni saqlovchi barcha σ – algebralarda saqlanadi.*

4-teoremada keltirilgan σ - algebra $\Im$ sistema ustiga qurilgan minimal σ– algebra deb ataladi.

7-ta'rif. *$\Im$- sonlar o'qidagi barcha $[a;b]$ kesmalar, $(a;b]$ va $[a;b)$ yarim intervallar va $(a;b)$ intervallardan tashkil bo'lgan yarim halqa bo'lsin. U holda $\Im$ ustida qurilgan minimal $\Omega(\Im), \sigma$ - algebra elementlari Borel to'plamlari yoki «B » to'plamlar deb ataladi.*

11.4-§. Metrik fazolar

Matematik analizdagi eng muhim amallardan biri, bu limitga o'tish amalidir. Bu amalning asosida sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi yotadi. Analizda kiritilgan ko'pgina fundamental tushunchalar sonlar o'qining algebraik xususiyatlariga bog'liq emas. Haqiqiy sonlar haqidagi tasavvurimizni to'plam ma'nosida umumlashtirib, metrik fazo tushunchasiga kelamiz.

1-ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan X to'plamning ixtiyoriy x va y elementlar juftiga aniq bir nomanfiy $\rho(x,y)$ son mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik*

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(simmetriklik aksiomasi)*, $\forall x,y\in X$;

3) $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ *(uchburchak aksiomasi)* $\forall x,y,x\in X$

shartlarni qanoatlantirsa, ρ funksiyaga X dagi masofa yoki metrika deb ataladi. (X,ρ) juftlik metrik fazo deyiladi.

Odatda metrik fazo, ya'ni (X,ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda (X,ρ_1), (X,ρ_2),..., (X,ρ_n) metrik fazolar mos ravishda $X_1, X_2,..., X_n$ harflari bilan belgilanadi.

1-misol. X qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin va har bir x , y elementlar juftiga

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{ agar } x=y,\\ 1, \text{ agar } x\ne y\end{cases}$$

qonuniyat bo'yicha son mos qo'yilsin. Ravshanki, ρ akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metrika diskret metrika deb ataladi. Hosil bo'lgan metrik fazo yakkalangan nuqtalar fazosi deb ataladi.

2-misol. Haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,\infty)$, $\rho(x,y)=|x-y|$ masofa bo'yicha metrik fazo tashkil qiladi va bu metrik fazo ham R harfi bilan belgilanadi.

3-misol. Ixtiyoriy n ta $x_1, x_2,...,x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ guruhlaridan tashkil bo'lgan to'plamda har bir x va y lar jufti (x,y) ga

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \tag{1.1}$$

manfiymas sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofani aniqlaydi.

4-misol. Yana n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlari $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ dan tuzilgan to'plamni qaraymiz va unda masofani

$$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \tag{1.5}$$

formula vositasida aniqlaymiz. Hosil bo'lgan metrik fazo R_1^n bilan belgilanadi. Bu moslik metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantirishini o'quvchi mustaqil tekshirib ko'rishi mumkin.

5-misol. Yuqoridagi 1.3 va 1.4 misollarda keltirilgan to'plamda elementlar orasidagi masofani

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x_k-y_k| \tag{1.6}$$

formula bilan aniqlaymiz. Metrika aksiomalarining bajarilishi oson tekshiriladi. Hosil bo'lgan metrik fazo R_∞^n bilan belgilanadi.

6-misol. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha funksiyalardan tashkil bo'lgan to'plamni $C[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda

$$\rho(x,y)=\max_{1\le k\le n}|x(t)-y(t)| \tag{1.7}$$

akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Masofaning 1-3 aksiomalari bevosita tekshiriladi. Bu metrik fazo analizda muhim ahamiyatga ega bo'lib, u ham to'plam kabi $C[a,b]$ bilan belgilanadi.

7-misol. Haqiqiy sonlardan tuzilgan va

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan to'plamni ℓ_2 bilan belgilaymiz.

8-misol. $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamida

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{\int_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt}$$

formula yordamida masofa aniqlash mumkin.

9-misol. Yana $[a;b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ushbu

$$\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt \tag{1.11}$$

formula bilan aniqlangan akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo $C_1[a;b]$ bilan belgilanadi. ρ_1 akslantirish metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantirishini tekshirishni, o'quvchiga mustaqil mashq sifatida tavsiya qilamiz.

10-misol. Barcha chegaralangan $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi har bir x va y elementlar juftiga

$$\rho(x,y)=\sup_{1\le k\le n}|x_k-y_k| \qquad (1.12)$$

sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo m harfi bilan belgilanadi. O'quvchi uchun 1-3 aksiomalarning bajarilishini tekshirish qiyin emas.

11-misol. n - ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat R^n to'plamda har bir $p\ge 1$ son uchun

$$\rho_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.13)$$

formula bilan aniqlangan ρ_p moslik masofa aniqlaydi va hosil bo'lgan metrik fazo R_p^n bilan belgilanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar

1. А.В.Дорофеева.Высшая математика. Гуманитарные специальности. Дрофа. Москва.2003.
2. Will H.Moore, David A. Siegel. A Mathematics Course for Political and Social Research. Princeton university press. 2013.
3. А.И.Кареев, З.М. Аксютина, Т.И. Савельев Курс высшей математики для экономических вузов М. «Высшая школа» I,II, 1982, 1983
4. А.М.Ахтямов. Математика для социологов и экономистов.М.2004
5. А.С.Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В.Браилов, И.Г.Шандра» Математика в экономике» Ч 1, 2 Москва» Финансы и статистика» 2005.
6. Jabborov N.M. Oliy matematika. 1, 2-qismlar. 2014- y.
7. Еровенко В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций. Минск: БГУ, 2006. - 175 с.
8. Баврин И.И., Матросов В.Л. Общий курс высшей математики. М.: «Просвещение», 1995 г.
9. В.С.Шипачев.Высшая математика. М. «Высшая школа» 1985
10. Высшая математика для экономистов. под ред. проф. Н.Ш. Кремера. 3-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2008.
11. Г.Л.Луканкин,А.Г. Луканкин.Высшая математика для экономистов М.2006
12. М.С.Красс, Б.П.Чупрынов Основы математики и её приложения в экономическом образовании:. М.:Дело. 2006.
13. Abdushukurov A.A. Extimollar nazariyasi va matematik statistika. O'zMU, 2010 y. - 169 b.
14. James Stewart. Calculus. Brooks/Cole Pablishing Company, 1999.
15. K.A.Kurganov Iqtisodchilar uchunoliy matematika fanidan ma'ruza va mashqlar (1 qism) T.Universitet 2017.

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Stefan Waner, Steven R. Costenoble. Finite Mathematics and Applied Calculus. Brooks/Cole cengage learning 2011.

2. Timothy M. Hagle. *Basic Math for Social Scientists Concepts*. SAGE Publications, Inc.The University of Iowa, 2005.

3. Gres P.V. *Matematika dlya gumanitariev.* Uchebnoe posobie. M.: Universitetskaya kniga, Logos, 2007. - 160 s.

4. Yu.X. Eshqobilov.O'LCHOVLI TO'PLAMLAR.2015.

5. Tan S.T. *Finite Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences*, Davis Drive Belmont, USA, 2011.

Elektron manbalar

1. http://www.allmath.ru/
2. http://www.mcce.ru/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. http://www.webmath.ru/
5. http://www.exponenta.ru/
6. http://www.ziyonet.uz/
7. http://www.techlibrary.net/

Qaydlar uchun

Qaydlar uchun

K.A. KURGANOV, YU.X. ESHKABILOV,
R.R. KUCHAROV

OLIY MATEMATIKA

(Ijtimoiy-gumanitar bakalavr yo'nalishlari uchun)
o'quv qo'llanma

Muharrirlar: A.Tilavov
A.Abdujalilov
Texnik muharrir: Y.O'rinov
Badiiy muharrir: I.Zaxidova
Musahhiha: N.Sultanova

Nash.lits. № AI 245. 02.10.2013.
Terishga 07.10.2019-yilda berildi. Bosishga 16.12.2019-yilda ruxsat etildi. Bichimi: 60x84 1/16. Ofset bosma. «Times New Roman» garniturasi. Shartli b.t. 19. Nashr b.t. 17,67.
Adadi 300 nusxa. Buyurtma № 89.
Bahosi shartnoma asosida.

«Sano-standart» nashriyoti, 100190, Toshkent shahri, Yunusobod-9, 13-54. e-mail: sano-standart@mail.ru

«Sano-standart» MCHJ bosmaxonasida bosildi.
Toshkent shahri, Shiroq ko'chasi, 100-uy.
Telefon: (371) 228-07-96, faks: (371) 228-07-95.