В. ВАХАБОВ, Ш.ЛАКАЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ВАХОБОВ ВАЛИЖОН
ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАДОВИЧ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриатуры 5311000 - Автоматизация и управление технологическими процессами и производством (в водном хозяйстве), 5230900 - Учет и аудит (водные ресурсы), 5311500 - Геодезия и геоинформатика, 5450400-Использование гидротехнических сооружений и насосных станций, 5430100-Механизация сельского хозяйства, 5430500 - Электроснабжение в сельском и водном хозяйстве, 5450200 - Водные ресурсы и мелиорация

Ташкент
«Tafakkur avlodi»
2020

УДК: 51(075.8)
ББК: 22.1я73
В 22

В 22 **Вахобов, В.**
Курс высшей математики [Текст]: учебное пособие / В.Вахобов, Ш.Лакаев. – Ташкент: «Tafakkur avlodi», 2020. – 232 с.

Учебное пособия предназначена для студентов обучающихся по направлениям образования бакалавриатуры 5311000 - Автоматизация и управление технологическими процессами и производством (в водном хозяйстве), 5230900 - Учет и аудит (водные ресурсы), 5311500 - Геодезия и геоинформатика, 5450400-Использование гидротехнических сооружений и насосных станций, 5430100-Механизация сельского хозяйства, 5430500 - Электроснабжение в сельском и водном хозяйстве, 5450200 - Водные ресурсы и мелиорация. В пособие приведены необходимые теоретические сведения, формулы и помещены примеры для практических занятий по курсе математический анализ и дифференциальная уравнения.

Рецензенты:

А. Рахматуллаев – ТИИМСХ, кандидат физико математических наук, доцент.

Т. Эргашев – Институт математика имени В.И. Романовского при академии наук Республики Узбекистан, кандидат физико математических наук, доцент.

УДК: 51(075.8)
ББК: 22.1я73

ISBN 978-9943-6690-9-3

Предисловие

Математическая наука, у истоков развития которой стояли наши великие предки Мухаммад аль-Хорезми, Ахмад Фергани, Абу Райхан Беруни, Мирзо Улугбек, в наши дни приобретает еще большее значение в связи с ускоренным развитием современных отраслей и технике.

Особенно взросла ее роль в сфере информационно-комуникационных технологий, техники, сельскомхозяйстве, экономике и многих других отраслей науки.

Главной целью высшего образования заключается формирование в сознании молодёже глубоких и устойчивых знаний а также воспитание верности идеям национальном независимости, любви к Родине и чувство патриотизма.

В процессе реализации основных целей “закона об образований” и “Национальной программы по подготовке кадров” большое внимание уделяется к точным наукам.

В связи с этим было бы целесообразно существование понятно и математически последовательно изложенных учебных пособий.

Настоящий “Курс высшей математики” является расширенным изложением лекций, которые авторами прочитаны студентам Ташкентского института ирригации инженеров и механизации сельского хозяйства. Он может использован в качестве учебного пособия для студентов естественных факультетов нематематического профиля, где различные разделы высшей математики объединены в один курс.

Авторам стремились изложить материал по возможности полно и доступно и ставили своих целью не просто сообщить читателю те или иные сведения по высшей математике, а развить у него математическое мышление, показать внутренную связь математических понятий, т.е. представить математику в ее развитии.

Книга содержит краткие сведения основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и многих переменных, понятия о теорию дифференциальных уравнений и рядах.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Б.А.Худоярову и доценту А.А.Файзиеву за просмотр рукописи и сделанные им замечания, а также опыт и знания которого помогли в создании книги.

ГЛАВА I
ФУНКЦИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Введение

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Определение. Постоянной величиной называется величина принимающую одно и то же значение.

Переменной величиной называется величина которое может принимать различные числовые значения.

Приведем примеры постоянных и переменных величин.

Пример 1. Диаметр и длина окружности,в зависимости от обстоятельств, могут принимать различные значения и следовательно, вообще говоря, являются величина переменными. Однако отношение длины окружности к ее диаметру сохранят всегда одно и то же значение и, следовательно, есть величина постоянная, называемая числом $\pi \approx 3,14159$

Пример 2. Объем V и давление P определенной массы газа являются величинами переменными; однако $V \cdot P$ есть величина постоянная.

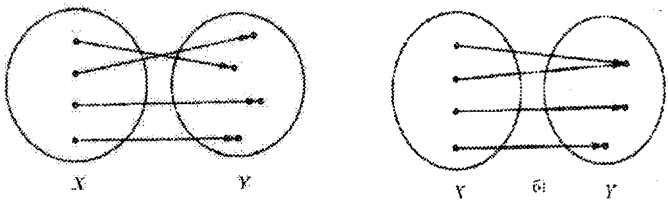
1.1.1. Понятие функции

На практике изучая какое-нибудь явление, мы имеем дело с совокупностью переменных величин, которое связаны между собой так, что значения одних величин (независимые) полностью определяют значения других(зависимые переменные или функции).

Теперь дадим определение понятия функции, являющегося центральным понятием высшей математики.

Пока мы ограничимся случаем двух переменных величин.

Пусть даны два непустых множества X и Y.



Определение 1. Соответствие или правило, которое каждому элементу x из X сопоставляет один и только один элемент y из Y называется функцией, определенной на множестве X со значениями в Y.

Тот факт, что у есть функция от х сокращено обозначают так:

$$y = f(x) \tag{1}$$

где x аргумент, независимая переменная, y функция, зависимая переменная, символ f можно употреблят любую другую букву например, g, h, φ, F и т.д.

Частное значение функци $f(x)$ при $x=a$ записываются так: $f(a)$.

Например, если $f(x)=x(1-x)$ то $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=-2$ и т.п.

Приведем пример поясняющее понятие функции.

Пример 4. Из формулы площади круга $S=\pi R^2$ следует, что каждому допустимому (положительному) значению радиуса R соответствует определенное значение площади S есть функция от R где $S>0$ и $R>0$

Определение 3. Множества всех y из Y для которых существует хоть x из X такое, что $y=f(x)$, называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется числовой функций, если ее $D(f)$ и $E(f)$ содержится в множестве действительных чисел R.

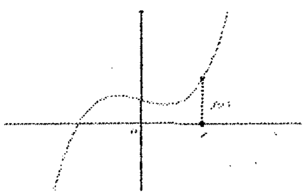
Отметим, что область определения функции могут быт: интервал (a,b), сегмент или отрезок $[a,b]$, полуинтервал $[a,b)$ или $(a,b]$, бесконечные интервалы $[-\infty,a)$, (b,∞), $(-\infty,\infty)$ и т.д.

Определение 5. Множество всех точек (x,y) плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяет уравнение $y=f(x)$ называется графиком функции $y=f(x)$.

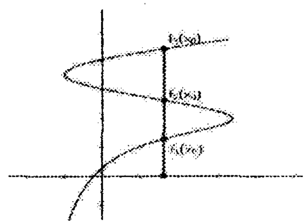
Если каждому значению переменной x соответствует одно значение переменной y, то $y=f(x)$ называется однознач-ной функцией от x; а если же хотя бы некотором значением переменной x соответствует несколько и бесконечное значений переменной y, то $y=f(x)$ называется многозначной функцией от то x.

Например $y=x^2$, $y=\sin x$ однозначные а $y=\pm\sqrt{x}$ – двузначная, $y = arcsinx$ – многозначная функция от x.

В дальнейшем основном мы имеем дело с однозначнами функциями.



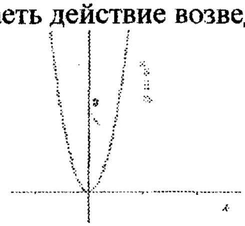
однозначная



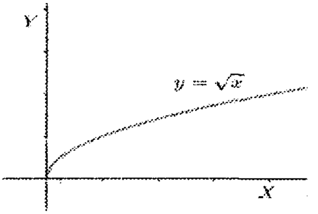
многозначная

Рассмотрим примеры для функции.

Пример 1. $y=x^2$ – функция $D(f)=R, E(f)=R_+$, f – соответствие или правило играеть действие возведение в квадрат.



Пример 2. $y=f(x)=\sqrt{x}$ – функция. $D(f)=E(f)=[0,+\infty)$, f – правило является действие извлечение квадратного корня.



1.1.2. Способы задания функции

Функции могут быт заданы различными способами.

3. Аналитический способ

В этом случае функция задается, при помощи некоторой формулы.

$$Y=f(x)=2x+1,$$

$$y=h(x)=\log_2(x-3),\ y=\varphi(x)=\sin 3x$$

4. Графический способ

Здесь соответствие между x и y устанавливается с помощью заданного графика по которому для каждого значения аргумента x определяется значение функции y.

Часто графики функции вычерчиваются автоматически самопишущими приборами. Например, в метереологии барограф вычерчивает барограмму-график изменения атмосферного давления, в медицине электрокардиограф вычерчивает электрокардиограмму-график работы сердца и т.д.

5. Табличный способ

В этом случае функция задается таблицией. Нам известно таблицы значений функций $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\lg x$, $y=\sin x$ и так далее.

Определение 6. Если функция задана аналитически уравнением $y=f(x)$ (1) разрешенным относительно y, то такое задание функции называется явным.

Например, $y=2x^2-1$, $y=\sin 3x$, $y=4^x$

Определение 7. Если функция задана уравнением

$$F(x,y)=0 \qquad (2)$$

не разрешенным относительно y то такое задание функции называется неявным.

Например, $2x-3y-6=0$, $x^2-e^{xy}+3=0$

Заметим, что не всякое уравнение вида (2) задает функцию. Так, уравнение $x^2+y^2+4=0$ не определяет функцию.

Определение 8. Функция, заданная в виде $y=f(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функцией f и g.

Например, $f(x)=\cos x^2$, $g(x)=1+\sqrt{x}$ $y=f(g(x))=\cos(1-\sqrt{x})^2$

Сложную функцию часто записывают в виде $y=f(u)$, где $u=g(x)$

Например, $y=\lg(\arcsin x)$

1.1.3. Основные характеристики функции

Пусть функция $y=f(x)$, определена на множестве X и $x\in X, -x\in X$.

Определение 9. Если $f(-x)=f(x)$ то функция $y=f(x)$ является четной, а $f(-x)=-f(x)$, то она нечетной.

Например, функция $f(x)=x^2, x\in R$ является четной, так как

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x);$$

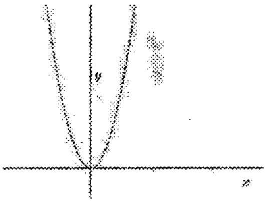
а функция $y=f(x)=x^3, x\in R$ является нечетной, так как

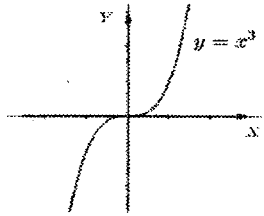
$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

Определение 10. Функция, которые не является ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида.

Например, $f(x)=3x+2$, $g(x)=2^x$ – функции общего вида.

Замечание. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начало координат.





Определение 11. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется возрастающей на интервале (a,b), если при любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

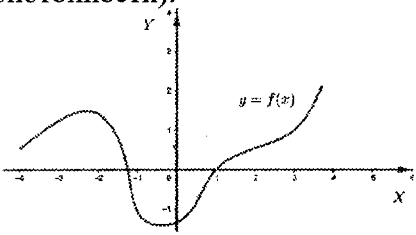
Определение 12. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется убывающей на интервале (a,b), если при любых $x_1 \in (a,b)$ и $x_2 \in (a,b)$ принадлежащих этому интервалу

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Определени 13. Функция $y = f(x)$, $x \in (a,b)$, называется неубывающей (невозрастающей)на интервале (a,b), если для любых $x_1 \in (a,b)$ и $x_2 \in (a,b)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \; (f(x_1) \ge f(x_2))$$

Определение 14. Интервалы, в которых функция либо только возрастает (не убывает), либо только убывает (не возрастает), называются интервалами строгой монотонности (интервалами монотонности).



$y = f(x)$ на $(-4,-2)$ возрастает, $(-2,0)$ убывает на $(0,3)$ она неубывает, на $(-4,-2)$, $(-2,0)$ строго монотонна.

1.1.4. Основные элементарные функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

a) Постоянная функция $f(x)=c,\ c\in R$;

b) Степенная функция $f(x)=x^{\alpha}$, где $\alpha -$ любое действительное число;

c) Показательная функция $f(x)=a^{x}, a>0,\ a\neq 1$;

d) Логарифмическая функция $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1$;

e) Тригонометрические функции $y=\sin x,\quad y=\cos x,$ $y=tgx,\ \ y=ctgx$

f) Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$.

Глава II. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЫ. ТЕОРИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Функция определенного на множестве натуральных чисел, т.е. $f(n), n \in N$ называется числовая последовательность.

Приведем примеры:

Пример 1. Последовательность всех четных чисел т.е. 2, 4, 6, 8,...

Пример 2. Последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$

Пример 3. Последовательности целых десятков 10, 20, 30,..., 90

Общий член последовательности обозначается через $x_n, y_n, a_n, b_n,$ и так далее. Таким образом согласно определению числовая последовательности имеем $x_n = f(n),\ n \in N$.

Для выше приведенных примеров общий члены будут

$$x_n = 2n,\ n \in N;\ y_n = \frac{1}{n}, n \in N;\ z_n = 10n,\ n = 1,2,...,9.$$

2.1.1. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 2. Величина x_n, которое с ростом $n\ (n \to \infty)$ стремится к нулю, то такие величины называется бесконечно малые и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0.$

Определение 3. Величина x_n, которое с увеличением $n\ (n \to \infty)$ стремится к бесконечности, то такие величины называется бесконечно большими т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty.$

Например: 1) Величина $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in N$ есть бесконечно малые.

2) Величина $\beta_n = 2n,\ n \in N$ является бесконечно большим.

Арифметическая и геометрическая прогрессия служат примерами числовой последовательности.

Теоремы о пределах последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c -$ постоянная.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2.1.2. Предел числовой последовательности

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, a – постоянная, α_n – бесконечно малые $\varepsilon > 0$.

Определение 2. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равным числу a и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Определение 3. Если $\{x_n\}$ можно представит в виде

$$x_n = a + \alpha_n$$

то число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Пример 1. Найти предел $x_n = \dfrac{2n+1}{3n}$

Решение. $x_n = \dfrac{2n+1}{3n} = \dfrac{2n}{3n} + \dfrac{1}{3n} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3n}$

Согласно определению 3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{2}{3}$.

2.1.3. Предел последовательности $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718 \qquad (2)$$

При вычисление предел последовательностей воспользуемся следующих формул:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n^k}=\begin{cases}0, & \text{если } k>0\\ \infty, & \text{если } k<0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}A\cdot n^k=\begin{cases}\infty, & \text{если } k>0\\ 0, & \text{если } k<0\end{cases}$$

где A – постоянная.

Пример 2. Найти предел $x_n=\left(\dfrac{n^2+1}{2n^2+5}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{5}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{5}{n^2})}=\frac{1}{2}.$$

2.1.4. Второй замечательний предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

Теорема 1. Переменная величина $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство. По формуле Бинома Ньютона можем написать

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

После алгебраические переобразования, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (2)$$

Покажем, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Замечая, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, и так далее, из (2) получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

Замечая, далее, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}<\frac{1}{2^{n-1}},$$

Можем написать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

Подчеркнутые члены правой части этого неравенства образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членам $a=1$,

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

Следовательно, для всех n получаем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$

Из равенства (2) следует, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2.$

Таким образом, получаем неравенства