Г. М. Фихтенгольц

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

2-ТОМ

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

II том

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА МУВОФИК
ЎЗБЕКЧА БИРИНЧИ НАШРИ

СССР Олий таълим министрлиги давлат университетларининг механика-математика ва физика-математика факультетлари учун дарслик ҳамда педагогика институтларининг физика-математика факультетлари учун ўқув қўлланмаси сифатида тасдиқлаган

„ЎҚИТУВЧИ" НАШРИЁТИ • ТОШКЕНТ—1972

ЎН БЕШИНЧИ БОБ

СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1- §. КИРИШ

234. Асосий тушунчалар. Сонларнинг бирор чексиз кетма-кетлиги берилган бўлсин:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\ \ldots \tag{1}$$

Бу сонлардан тузилган ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

символга чексиз қатор (ёки қисқача — қатор) дейилиб, (1) сонларнинг ўзлари эса қаторнинг ҳадлари дейилади. (2) ни, йиғинди белгисидан фойдаланиб, кўпинча

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2a}$$

кўринишда ҳам ёзадилар, бу ерда кўрсаткич n 1 дан ∞ гача бўлган барча натурал қийматларни қабул қилади*).

Қаторнинг ҳадларини кетма-кет қўша бориб, қуйидаги (чексиз кўп миқдордаги) йиғиндиларни тузайлик:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots \\ \ldots,\ A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots; \end{array}\right\} \tag{3}$$

Бу йиғиндиларга қаторнинг хусусий (қисмий) йиғиндилари ёки кесмалари дейилади. Хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги $\{A_n\}$ ни доимо (2) қатор билан таққослаб борамиз: бу символнинг роли ҳам айтилган кетма-кетликни вужудга келтиришдан иборатдир.

Агар (2) *қаторнинг хусусий йиғиндиси* A_n, $n \to \infty$ *да чекли ёки чексиз лимит* A *га эга бўлса:*

$$A = \lim A_n,$$

бу лимитга қаторнинг йиғиндиси дейилади ва

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*) Баъзан, қатор ҳадларини номерлашни бирдан бошламасдан нолдан ёки бирдан катта бўлган бирор натурал сондан бошлаш қулайдир.

каби ёзиб, (2) ёки (2а) символга сон маъно берадилар. *Агар қатор чекли йиғиндига эга бўлса, унга яқинлашувчи, акс ҳолда эса (яъни йиғинди $\pm\infty$ га тенг бўлса, ёки йиғинди бутунлай мавжуд бўлмаганда) узоқлашувчи қатор дейилади.*

Шундай қилиб, (2) қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масала, таърифга кўра, (3) кетма-кетлик учун чекли лимитнинг мавжудлиги ҳақидаги масалага тенг кучлидир. Аксинча, аввалдан ҳар қандай

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

кетма-кетлик олинган бўлмасин, унинг учун чекли лимитнинг мавжуд бўлиши ҳақидаги масала, хусусий йиғиндилари бу кетма-кетликнинг ҳадларига тенг бўлган ушбу

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots, \qquad (4)$$

қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалага келтирилиши мумкин. Бунда қаторнинг йиғиндиси кетма-кетликнинг лимитига тенг бўлади.

Бошқача айтганда, чексиз қаторни ва унинг йиғиндисини қараш, кетма-кетликни ва унинг лимитини ўрганишнинг янги бир формасидир. Лекин бу форма лимитнинг ўзининг мавжудлигини тайинлашда ҳам, уни ҳисоблашда ҳам бебаҳо афзалликка эгадир — буни ўқувчи кейинги баёнимизда кўради. Бу ҳолат чексиз қаторларни, математик анализдаги ва унинг татбиқларидаги текширишларнинг муҳим қуроли қилиб қўяди.

Мисоллар. 1) Чексиз қаторга энг содда мисол қилиб (ўқувчига маълум бўлган) геометрик прогрессияни йиғишдан ҳосил бўлган қаторни олиш мумкин.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Унинг хусусий йиғиндиси ($q \neq 1$ бўлганда)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

га тенг бўлади.

Агар прогрессиянинг махражи абсолют қиймати бўйича бирдан кичик бўлса, s_n чекли лимит

$$s = \frac{a}{1-q}$$

га эга бўлади [30-n°, 6 дан маълум], яъни қаторимиз яқинлашувчи ва s — унинг йиғиндиси бўлади.

$|q| \geqslant 1$ бўлганда ўша прогрессия узоқлашувчи қатор мисолини беради. Агар $q \geqslant 1$ бўлса, унинг йиғиндиси (a нинг ишорасига қараб) $+\infty$ ёки $-\infty$ бўлади; бошқа ҳолларда йиғинди мутлақо йўқ. $a = 1, q = -1$ бўлганда ҳосил бўладиган ушбу қизиқарли қаторни қайд этиб кетайлик:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots {}^{*)}$$

Унинг хусусий йиғиндилари навбат билан ёки 1 ёки 0 бўлади.

2) Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қаторнинг узоқлашувчи эканлигини исботлаш осон.

Ҳақиқатан, қаторнинг ҳадлари камайиб боради, шунинг учун n-хусусий йиғиндиси

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

бўлиб, n билан биргаликда чексизликкача ўса боради.

3) Ниҳоят, мураккаброқ мисол сифатида

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

ўзгарувчини олиш мумкин. 49-n° да унинг e сонига интилганини кўрсатган эдик. Бу эса e ушбу

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

қаторнинг йиғиндиси деган тасдиққа тенг кучлидир.

49-n° да e сонини тақрибий ҳисоблаш масаласи кўрилган эди. Бу кўрилаётган мисолда e нинг тақрибий қийматлари қаторнинг хусусий йиғиндиларини кетма-кет киритиш билан ҳисобланади. Бу йиғиндилар борган сари камроқ тузатишлар талаб қилиб, e нинг хусусий йиғиндилар шаклида олинаётган тақрибий қийматларини яхшилаб боради.

235. Энг содда теоремалар. (2) қаторда биринчи m та ҳадни ташлаш натижасида ҳосил бўлган ушбу

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \qquad (5)$$

қаторга (2) қаторнинг m ҳадидан кейинги қолдиғи дейилади.

1°. *Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган қолдиғи (5) ҳам яқинлашувчи бўлади; аксинча, (5) қолдиқнинг яқинлашувчи бўлишидан дастлабки (2) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.*

---

*) Агар қаторнинг бирор a ҳади манфий сон бўлса: $a = -b$ (бу ерда $b > 0$) у ҳолда, $\ldots + (-b) + \ldots$ ни $\ldots - b + \ldots$ каби ёзадилар. Бу ерда қаторнинг ҳади b бўлмасдан, $-b$ бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

m ни тайинлайлик ва (5) қаторнинг k-хусусий йиғиндисини A'_k орқали белгилайлик:

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Бу ҳолда, равшанки,

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \qquad (6)$$

Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, яъни $A_n \to A$ бўлса, у ҳолда k чексиз ўсганда, A'_k йиғинди ҳам чекли лимит

$$A' = A - A_m \qquad (7)$$

га эга, бу эса (5) қатор яқинлашувчи демакдир.

Аксинча, агар (5) қаторнинг яқинлашувчи эканлиги маълум бўлса, яъни $A'_k \to A'$ бўлса (6) тенгликни, унда $k = n - m$ $(n > m)$ деб, қайтадан қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

Бундан, n чексиз ўсганда, хусусий йиғинди A_n нинг лимит-

$$A = A_m + A' \qquad (8)$$

га эга эканлиги кўринади, бу эса (2) қатор яқинлашувчи деган сўздир.

Бошқача қилиб айтганда, *қаторнинг чекли сондаги бошланғич ҳадларини ташлаш ёки унинг бошланғич қисмига бир неча янги ҳадларни қўшиш қаторнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигига таъсир қилмайди.*

(5) қаторнинг йиғиндисини, агар у яқинлашувчи бўлса, одатдагича A' билан белгиламасдан, α_m символ билан белгилайлик, бу ерда m — қолдиқнинг қайси ҳаддан кейин олинганлигини к ў р с а т а д и. Бу ҳолда (8) ва (7) формулалар қуйидагича ёзилади:

$$A = A_m + \alpha_m, \qquad \alpha_m = A - A_m. \qquad (9)$$

Агар m чексиз ўстирилса, у ҳолда $A_m \to A$ ва $\alpha_m \to 0$ бўлади. Шундай қилиб:

2°. *Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг m-ҳадидан кейинги қолдиғининг α_m йиғиндиси m нинг ўсиши билан нолга интилади.*

Яқинлашувчи қаторларнинг қуйидаги содда хоссаларини эслатиб ўтайлик.

3°. *Агар яқинлашувчи (2) қаторнинг ҳадларини бир хил c сонга кўпайтирилса, унинг яқинлашувчи бўлиши бузилмайди, йиғиндиси эса c га кўпайтирилади.*

Ҳақиқатан, ҳосил бўлган

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

қаторнинг хусусий йиғиндиси

$$\overline{A}_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

бўлиб, cA лимитга эга бўлади.

4°. *Яқинлашувчи бўлган иккита*

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

ва

$$B = b_1 + b_2 + \dots b_n + \dots$$

қаторни ҳадма-ҳад қўшиш ёки айириш мумкин, яъни

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси мос равишда $A \pm B$ га тенг бўлади.

Агар айтилган қаторларнинг хусусий йиғиндиларини A_n, B_n ва C_n десак, у ҳолда, равшанки,

$$C_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

Бундан, лимитга ўтиб, топа оламиз:

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

бу эса даъвомизни исботлайди.

Охирида, яна бир фактни келтирамиз.

5°. *Яқинлашувчи қаторнинг у м у м и й ҳ а д и a_n нолга интилади.* Буни жуда содда йўл билан исботлаш мумкин: A_n (унинг билан A_{n-1} ҳам) чекли лимит A га эга, демак

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

Бу даъво *қаторнинг яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти бўлиб,* ундан биз кўп фойдаланамиз. У б у з и л г а н д а қ а т о р а л б а т т а у з о қ л а ш у в ч и б ў л а д и. Аммо бу шартнинг ўринли бўлиши қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун е т а р л и эмаслигини қайд қилиб ўтиш лозим. Бошқача айтганда, б у ш а р т б а ж а р и л г а н д а ҳ а м, қатор у з о қ л а ш у в ч и б ў л и ш и м у м к и н.

Бунга юқорида [234-$n°$, 2 да] кўрилган $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ қатор мисол бўла олади; бундай мисолларни ўқувчи кейинги баёнимизда кўп учратади.

2- §. МУСБАТ ҚАТОРЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

236. Мусбат қаторнинг яқинлашиш шарти. Энди қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаш масаласи билан шуғулланайлик. Бу масала ҳадлари манфий бўлмаган қаторлар учун жуда содда ечилади; бундай қаторларни, қисқалик учун, мусбат қаторлар деб атаймиз.

Ушбу мусбат

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

қатор берилган бўлсин, яъни $a_n \geqslant 0 \, (n = 1, 2, 3 \ldots)$. Бу ҳолда, равшанки,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

яъни ўзгарувчи A_n — ўсувчидир. Монотон ўзгарувчининг лимити ҳақидаги теоремани [44-$n°$] эсга олиб, бевосита мусбат қаторлар назариясидаги қуйидаги асосий теоремага келамиз.

Теорема. *Мусбат (A) қатор доимо йиғиндига эга; агар қаторнинг хусусий йиғиндилари юқоридан чегараланган бўлса, бу йиғинди чекли (ва, демак, қатор яқинлашувчи) бўлиб, акс ҳолда йиғинди чексиз (қатор эса — узоқлашувчи) бўлади.*

Мусбат қаторларнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини текшириш учун қўлланиладиган барча амалий аломатлар, ана шу содда теоремага асослангандир. Лекин уни бевосита татбиқ қилиш камдан-кам ҳоллардагина қаторнинг характери ҳақида ҳукм чиқаришга имкон беради. Бу хилдаги мисолларни келтирайлик.

1) Гармоник қатор деб аталган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

қаторни кўрайлик*).

Равшанки,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

*) Унинг ҳар бир ҳади иккинчисидан бошлаб, иккита қўшни ҳадининг ўрта гармонигидир. Агар $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ бўлса, c сони a ва b сонларининг ўрта гармониги дейилади.

Агар гармоник қаторнинг ҳамма ҳадларини, иккинчисидан бошлаб ҳар бирида 2, 4, 8, ... тадан ҳад бўлган группаларга кетма-кет бўлиб чиқсак:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{2}; \quad \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{15}}_{2^3}; \ \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}}_{2^{k-1}}; \ \ldots;$$

бу йиғиндиларнинг ҳар бири $\frac{1}{2}$ дан катта бўлади; бунга ишонч ҳосил қилиш учун (1) да навбат билан $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ дейиш керак. Гармоник қаторнинг n — хусусий йиғиндисини H_n билан белгилайлик; бу ҳолда, равшанки,

$$H_{2k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Бундан, хусусий йиғиндиларнинг юқоридан чегаралана олмаслигини кўрамиз; қатор чексиз йиғиндига эга.

Бу ерда n нинг ўсиши билан H_n нинг жуда секин ўсишини айтиб ўтайлик. Масалан, Эйлер қуйидагиларни ҳисоблаган:

$$H_{1000} = 7{,}48 \ldots, \ H_{1\,000\,000} = 14{,}39 \ldots \text{ ва ҳоказо.}$$

Кейинроқ, [238-$n°$,4], H_n йиғиндиларнинг ўсишини аниқроқ характерлаш имконига эга бўламиз.

2) Энди умумийроқ бўлган ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

қаторни текширайлик, бу ерда s — исталган ҳақиқий сон. Бу қатор, хусусий ҳол сифатида ($s = 1$ бўлганда), юқорида кўрилган қаторни ўз ичига олган. (1) қаторга ўхшаш бўлганидан, бу қаторни ҳам гармоник қатор деб атайдилар.

$s < 1$ бўлганда кўрилаётган қаторнинг ҳадлари (1) қаторнинг тегишли ҳадларидан катта бўлгани сабабли, хусусий йиғиндилар юқоридан чегараланган эмаслиги турган гап; демак, қатор узоқлашувчи.

$s > 1$ бўлган ҳолни текширайлик, қулайлик учун $s = 1 + \sigma$ дейлик, бу ерда $\sigma > 0$. (1) га ўхшаш, бу галда:

$$\frac{1}{n^s} + \frac{1}{(n+1)^s} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^s} < n \cdot \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma} \tag{2}$$

га эга бўламиз.

Ҳадларнинг юқоридагига ўхшаш группаларини тузайлик:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{2}; \quad \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{2^2}; \quad \underbrace{\frac{1}{8^s} + \ldots + \frac{1}{15^s}}_{2^3}; \ \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \ldots + \frac{1}{(2^{k-1})^s}}_{2^{k-1}}; \ \ldots$$

Я1

(2) нинг ёрдамида бу йиғиндиларнинг ушбу

$$\frac{1}{2^s},\ \frac{1}{4^s}=\frac{1}{2^{2s}},\ \frac{1}{8^s}=\frac{1}{2^{3s}},\ \ldots,\ \frac{1}{(2^{k-1})^s}=\frac{1}{2^{(k-1)s}},\ \ldots$$

прогрессиянинг тегишли ҳадларидан кичик эканлигини исботлаш осон. Бу ҳолда текширилаётган қаторнинг қайси бир хусусий йиғиндисини олмайлик, у ўзгармас сон

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}$$

дан кичик бўлишлиги равшан; демак, қатор яқинлашувчи.

237. ҚАТОРЛАРНИ ТАҚҚОСЛАШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Мусбат қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаш учун кўпинча уни яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлиги аввалдан маълум бўлган бошқа бир мусбат қатор билан солиштирадилар. Бундай таққослашнинг (солиштиришнинг) асосида қуйидаги содда теорема ётади.

1- теорема. *Иккита мусбат қатор берилган бўлсин:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (A)$$

ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (B)$$

Агар, ҳеч бўлмаганда бирор жойдан бошлаб (айтайлик, $n > N$ учун) $a_n \leqslant b_n$ тенгсизлик бажариладиган бўлса, у ҳолда (B) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги ёки бари бир — (A) қаторнинг узоқлашувчи бўлишлигидан (B) қаторнинг узоқлашувчи бўлишлиги келиб чиқади.

Исбот. Қаторнинг чекли сондаги бошланғич ҳадларини ташлаш унинг характерига таъсир этмагани сабабли [235-$n°$, 1] умумийликка зиён келтирмасдан, $a_n \leqslant b_n$ тенгсизлик n нинг барча $n = 1, 2, 3 \ldots$ қийматларида ўринли деб ҳисоблай оламиз. (A) ва (B) қаторларнинг хусусий йиғиндиларини мос равишда A_n ва B_n лар орқали белгилаб,

$$A_n \leqslant B_n$$

ни ҳосил қиламиз.

(B) қатор яқинлашувчи бўлсин, бу ҳолда, асосий теоремага кўра [236-$n°$] B_n йиғиндилар чегараланган:

$$B_n \leqslant L \ (L = \text{const};\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Аввалги тенгсизликка асосан, албатта

$$A_n \leqslant L$$

бу эса, яна ўша теоремага кўра (A) қаторнинг яқинлашувчи эканлигини кўрсатади.

Баъзан амалда биринчи теоремадан келиб чиқадиган қуйидаги теорема қулайроқ бўлади.

2- теорема. *Агар*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{*)} \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $K < \infty$ бўлганда (B) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги, $K > 0$ бўлганда эса биринчи қаторнинг узоқлашувчи бўлишлигидан иккинчи қаторнинг узоқлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. [Шундай қилиб, $0 < K < \infty$ бўлганда, иккала қатор бир вақтда яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлади.]

Исбот. (B) қатор яқинлашувчи бўлиб, $K < \infty$ бўлсин. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ олиб, лимитнинг таърифига кўра, етарли катта n лар учун ушбу $\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$ га эга бўламиз, бундан $a_n < (K+\varepsilon)\, b_n$ ва [235-$n°$,3] га биноан (B) қатор билан бирга унинг ҳадларини ўзгармас сон $(K+\varepsilon)$ га кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган $\sum (K+\varepsilon)\, b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Бундан, аввалги теоремага кўра, (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади.

Агар (B) қатор узоқлашувчи бўлиб, $K > 0$ бўлса, бу ҳолда тескари нисбат $\frac{b_n}{a_n}$ чекли лимитга эга бўлади; (A) қатор узоқлашувчи бўлиши керак, чунки, агар у яқинлашувчи бўлса эди, исботланганга кўра, (B) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб қолар эди.

Ниҳоят, яна биринчи теореманинг натижаси бўлган ушбу теоремани келтирамиз.

3- теорема. *Агар, ҳеч бўлмаганда бирор жойдан бошлаб (айтайлик, $n > N$ учун)*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}{}^{**)} \qquad (3)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (B) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши, ёки — бари бир — (A) қаторнинг узоқлашувчи бўлишлигидан (B) қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

---

*) Бунда биз $b_n \neq 0$ деб фараз қиламиз.

**) Бу ерда a_n ва b_n лар албатта, нолдан фарқли деб фараз қилинади.

Исбот. Биринчи теоремани исботлангандагига ўхшаш, умумийликка зарар келтирмасдан, (3) тенгсизлик n нинг ҳамма $n = 1, 2, 3 \ldots$ қийматлари учун ўринли деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда $\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}$, $\frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}$, $\ldots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}$ бўлади.

Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириб, топамиз: $\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1}$ ёки $a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. (B) қатор яқинлашувчи бўлсин: бу қатор билан бирга унинг ҳадларини ўзгармас сон $\frac{a_1}{b_1}$ га кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. У ҳолда, 1- теоремага кўра, (A) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади, шуни исботлаш талаб этилган эди.

Энди таққослаш теоремаларини бевосита татбиқ қилиб, қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлашга мисоллар келтирайлик.

238. Мисоллар. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ қатор яқинлашувчи, чунки

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n(2n-1)!!} < \frac{1}{2^n} \text{ (1- теорема)}.$$

2) Гармоник қаторлар [236-$n°$] билан солиштириш, кўпгина қаторларнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқлашга имкон беради. 1- теоремага кўра:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ қатор яқинлашувчи, чунки $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$;

(б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p > 0)$ қатор узоқлашувчи, чунки етарли катта n лар учун $(\ln n)^p < n$;

(в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ қатор яқинлашувчи, чунки етарли катта n лар учун $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$.

3) 2- теоремага кўра:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ қатор узоқлашувчи, чунки $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \to x$;

Шунга ўхшаш, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) (x > 0), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \qquad (a > 1)$$

қаторлар ҳам узоқлашувчи;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)$ қатор яқинлашувчи, чунки

$$\left(1 - \cos\frac{x}{n}\right) : \frac{1}{n^2} \to \frac{x^2}{2}.$$

4) Ниҳоят, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$$

қаторни кўрайлик.

Дифференциал ҳисобининг усуллари ёрдамида

$$\ln(1 + x) < x \qquad (x \neq 0, \ -1 < x < \infty)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини исботлаш осон. Ундан фойдаланиб, ушбуни ёза оламиз:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

ва, иккинчи томондан,

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Шунинг учун

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Шундай қилиб, берилган қаторнинг ҳадлари мусбат ва яқинлашувчи бўлган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қаторнинг [236-$n°$] тегишли ҳадларидан кичик, демак берилган қатор ҳам яқинлашувчи.

Агар унинг йиғиндисини C билан белгиласак, хусусий йиғинди

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1) \to C$$

(H_n, ҳар ғалдагидай гармоник қаторнинг хусусий йиғиндисини билдиради) бўлади. Бу ерда $\ln(n+1)$ ни $\ln n$ га алмаштириш мумкин, чунки уларнинг айирмаси $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ га тенг бўлиб, нолга интилади. Хуллас, γ_n орқали бирор чексиз кичик миқдорни белгилаб, H_n учун ажойиб

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n \tag{4}$$

формулага эга бўламиз. У, n чексиз ўсганда гармоник қаторнинг хусусий йиғиндиси $\ln n$ каби ўсишини кўрсатади.

(4) формулада қатнашган ўзгармас C га Эйлер ўзгармаси дейилади. Унинг (бошқа мулоҳазалар ёрдами билан ҳисобланган) сон қиймати қуйидагидир:

$$C = 0{,}577215\ldots$$

239. Коши ва Даламбер аломатлари. Берилган (мусбат) қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

ни яқинлашувчи ёки узоқлашувчи экани аввалдан маълум бўлган турли стандарт қаторлар билан таққослашни бошқача, анча уюштирилган формада ҳам олиб бориш мумкин.

Таққослаш учун (B) қатор сифатида, бир томондан, яқинлашувчи бўлган геометрик прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \quad (0 < q < 1)$$

ни, иккинчи томондан эса—узоқлашувчи бўлган прогрессия

$$\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

ни олайлик.

Синалаётган (A) қаторни бу қаторлар билан 1-теорема схемаси бўйича таққослаб қуйидаги аломатга келамиз:

Коши аломати. *(A) қатор учун*

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

ифодани тузамиз. Агар етарли катта n ларда

$$b_n \leqslant q$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, бунда q ўзгармас ва $q < 1$ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади; лекин, бирор жойдан бошлаб,

$$b_n \geqslant 1$$

бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Ҳақиқатан, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ ёки $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ тенгсизликлар, мос равишда $a_n \leqslant q^n$ ёки $a_n \geqslant 1$ тенгсизликларга тенг кучли; 1-теоремани татбиқ қилишгина қолади*.

Аммо, бу аломатнинг бошқа, лимит кўриниши кўпроқ қўлланилади. *b_n ифода (чекли ёки чексиз) лимит*

$$\lim b_n = b$$

га эга бўлсин. Бу ҳолда $b < 1$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлиб, $b > 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Агар $b < 1$ бўлса, $1 - b$ дан кичик бўлган мусбат сон ε оламиз, демак $b + \varepsilon < 1$. Лимитнинг таърифига биноан, $n > N$ бўлганда

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$$

бўлади. $b + \varepsilon$ сони юқорида келтирилган аломатдаги q нинг ролини ўйнайди. қатор яқинлашади.

Агар $b > 1$ ва чекли бўлса, $\varepsilon = b - 1$, яъни: $b - \varepsilon = 1$ деб оламиз. Бу сафар n нинг етарли катта қийматлари учун $b_n > 1$ бўлади: қатор узоқлашади. Шунга ўхшаш хулосага $b = \infty$ бўлганда ҳам келиш мумкин.

$b = 1$ бўлган ҳолда бу аломат қаторнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслиги ҳақида ҳукм чиқаришга имкон бермайди.

Агар (A) қаторни кўрсатилган стандарт қаторлар билан 3-теоремага кўра солиштирсак, қуйидаги аломатга келамиз:

Даламбер аломати. *(A) қатор учун*

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

нисбатни қараймиз. Агар етарли катта n лар учун

$$\mathcal{D}_n \leqslant q$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, q ўзгармас, $q < 1$ бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади; агар бирор жойдан бошлаб

$$\mathcal{D}_n \geqslant 1$$

*бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади**).*

---

*) Қаторнинг узоқлашувчи бўлишлигини, қаторнинг яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарт бузилганлигини эътиборга олиб аниқласа ҳам бўлар эди. [235 - n°,5].

**) Бу ерда ҳам қаторнинг узоқлашувчи бўлишлиги, қаторнинг яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти бузилишидан келиб чиқади: агар $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ ёки $a_{n+1} \geqslant a_n$ бўлса, a_n нолга интила олмайди-да.

Аммо аломатнинг лимит кўринишидан фойдаланиш ўнғайроқдир. $\mathcal{D}_n$ нисбат (*чекли ёки чексиз*) *лимит*

$$\lim \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

га эга бўлсин. У ҳолда $\mathcal{D} < 1$ *бўлганда қатор яқинлашувчи* $\mathcal{D} > 1$ *бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Коши аломатининг исботи кабидир.

Агар $\mathcal{D} = 1$ бўлса бу аломат ҳам ҳеч нима бермайди.

Эслатма. Биз, одатдагича, баён қилинган аломатнинг, Даламбер номига мансублигини сақладик. Аслида Даламберда қаторнинг яқинлашиши ҳақида ва унинг хусусий йиғиндиларининг лимити деб тушунилган йиғиндиси ҳақида очиқ-ойдин фикр бўлмаган. Даламбер, кейинги ҳаднинг аввалги ҳадига нисбати, оқибат натижада, бирдан катта бўлган қаторлардан фойдаланишдан огоҳлантиради ва бундай қаторларни „нотўғри" деб ҳисоблайди. Қатор „яхши ва нотўғримас" бўлиши учун у эслатилган нисбатнинг (мутлақо) бирдан кичик бўлишини талаб қилади; биз бу нисбатдан бошқани, яъни бу нисбатнинг ўзгармас тўғри каср q дан кичик бўлишини талаб қилганимизни таъкидлаб ўтайлик. Қаторнинг ҳозирги замон маъносида яқинлашувчи бўлишлигининг Даламбер шарти етарли эмас: бу шарт, масалан, узоқлашувчи бўлган гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ учун бажарилади.

Аломатнинг лимит кўриниши биринчи марта Коши томонидан тўғри таърифланган ва исботланган.

Мисоллар. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ қатор берилган бўлсин. Унга Коши аломатини татбиқ қилиш табиийдир:

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \qquad b = \frac{1}{e} < 1,$$

демак, қатор яқинлашувчи.

2) Қуйидаги қаторларга Даламбер аломатини татбиқ қилайлик:

(а) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x > 0)$; $\mathcal{D}_n = \frac{x}{n+1}$, $\mathcal{D} = 0$.

x нинг исталган қийматида қатор яқинлашувчи;

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$; $\mathcal{D}_n = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$; $\mathcal{D} = \frac{x}{e}$,

$x < e$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлиб, $x > e$ бўлганда—узоқлашувчи; $x = e$ бўлганда Даламбер аломатининг лимит кўриниши ҳеч нима бермайди, лекин $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ ва ҳамма вақт $\mathcal{D}_n > 1$ бўлгани сабабли қатор узоқлашувчи бўлади.

3) Гармоник қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} \ldots \qquad (s > 0) \qquad (H_s)$$

га кўрсатилган аломатларни татбиқ қилиб бўлмайди. Ҳақиқатан, бу ҳолда $b_n = \frac{1}{n^{s/n}} < 1$, лекин $\lim b_n = 1$, чунки

$$\ln b_n = -s \cdot \frac{\ln n}{n} \to 0 \qquad [121\text{-}n^\circ, 3].$$

Шунга ўхшаш, $\mathcal{D}_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s} < 1$, лекин, яна равшанки,

$$\lim \mathcal{D}_n = 1$$

Аммо, бошқа мулоҳазалардан [236-n°], гармоник қаторнинг $s > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлиб, $s \le 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлишини биламиз.

240. Раабе аломати. Кўрсатилган содда аломатлар жавоб бермай қолган ҳолларда, текширилаётган қаторни прогрессияга нисбатан „сустроқ" яқинлашувчи ёки „сустроқ" узоқлашувчи бошқа стандарт қаторлар билан таққослашга асосланган мураккаброқ аломатларга мурожаат қилишга тўғри келади.

Биз бу ерда берилган (А) қаторни (H_s) гармоник қаторлар билан солиштиришни амалга оширадиган Раабе*) аломатини кўрамиз. Бунинг учун ушбу

$$\mathcal{R}_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

ифодани қараш керак бўлади.

Раабе аломати. *Агар етарли катта n лар учун*

$$\mathcal{R}_n \geqslant r$$

тенгсизлик бажарилиб, ўзгармас сон $r > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи бўлади; агар бирор жойдан бошлаб

$$\mathcal{R}_n \leqslant 1$$

бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.

Исбот. Етарли катта n ларда

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \text{ ёки } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{r}{n}$$

бўлсин. Энди 1 ва r лар орасидаги бирор s сонни олайлик: $1 < s < r$.

*) Йозеф Людвиг Раабе (1801—1859) — немис математиги.

Маълум лимит муносабатга [65-n°, 3] кўра,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{-\frac{1}{n}}=s$$

бўлгани сабабли, етарли катта n лар учун [36-n°, 1°]

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{-\frac{1}{n}}<r \text{ ёки } \left(1-\frac{1}{n}\right)^s>1-\frac{r}{n}$$

ва, демак,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^s$$

бўлади. Бу тенгсизликни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n-1}{n}\right)^s=\frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}.$$

Ўнг томонда яқинлашувчи бўлган (H_s) қаторнинг ($s>1$!) иккита кетма-кет ҳадларининг нисбати турибди; 3- теоремани татбиқ қилиб, (А) қаторнинг яқинлашувчи эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Агар бирор жойдан бошлаб

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leqslant 1$$

бўлса, бундан дарҳол:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}};$$

(А) қаторга ва узоқлашувчи (H_1) қаторга 3- теоремани татбиқ қилиб, (А) қатор яқинлашувчи деган хулосага келамиз.

Раабе аломати ҳам кўпинча лимит кўринишида ишлатилади.

$\mathcal{R}_n$ ифода (чекли ёки чексиз)

$$\lim \mathcal{R}_n=\mathcal{R}$$

лимитга эга бўлсин. Бу ҳолда $\mathcal{R}>1$ бўлганда қатор яқинлашувчи бўлиб, $\mathcal{R}<1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Даламбер ва Раабе аломатларини ўзаро солиштириб, кейинги аломатнинг Даламбер аломатидан анча кучли эканини

кўрамиз. Агар лимит $\mathcal{R}=\lim\mathcal{R}_n$ мавжуд ва бирдан фарқли бўлса, $\mathcal{R}_n=n(1-\mathcal{D}_n)$ учун $\mathcal{D}<1$ ёки $\mathcal{D}>1$ бўлишига қараб $+\infty$ ёки $-\infty$ га тенг бўлган $\mathcal{R}$ лимит мавжуд. Шундай қилиб, агар Даламбер аломати берилган қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақидаги саволга жавоб берса, Раабе аломати ҳам, албатта, жавоб беради; ҳатто кўрамизки, бундай ҳолларнинг ҳаммаси $\mathcal{R}$ нинг атиги иккита, $\pm\infty$ қийматлари билангина ҳал бўлади. Қаторнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслиги ҳақидаги саволга жавоб берадиган $\mathcal{R}$ нинг ($\mathcal{R}=1$ дан фарқли) барча қолган қийматлари, шундай қилиб, Даламбер аломати жавоб бера олмайдиган ҳолларга ($\mathcal{D}=1$ бўлган ҳолларга) мос келади.

Раабе аломатини татбиқ қилишга доир мисол сифатида ушбу қаторни кўрайлик:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

Бу қаторга Даламбер аломатини татбиқ қилиб бўлмайди, чунки

$$\mathcal{D}_n=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\to 1$$

(ва шу билан бирга $\mathcal{D}_n<1$). Раабе ифодасини тузайлик:

$$\mathcal{R}_n=n\cdot\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)=\frac{6n-1}{2(2n+1)}.$$

$\mathcal{R}=\lim\mathcal{R}_n=\frac{3}{2}>1$ бўлгани сабабли, қатор яқинлашувчи бўлади.

Аммо $\mathcal{R}=1$ бўлганда қаторнинг қандай бўлиши ҳақидаги саволга яна жавоб ола олмаймиз. Бундай (камдан-кам учрайдиган) ҳолларда яна ҳам нозикроқ ва мураккаброқ бўлган аломатларга мурожаат қилишга тўғри келади.

241. Маклорен-Кошининг интеграл аломати. Охирида, юқорида кўрилган аломатлардан шаклан фарқ қиладиган яна битта аломатни чиқарайлик.

Берилган қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \qquad (5)$$

кўринишда ва $f(n)$ эса $x\geqslant 1$ лар учун аниқланган бирор $f(x)$ функциянинг $x=n$ даги қиймати бўлсин.*) Бу функцияни узлуксиз, мусбат ва монотон камаювчи деб фараз қилайлик.

*) n номернинг бошланғич қиймати 1 ўрнида исталган бошқа натурал сон n_0 бўлиши мумкин; бу ҳолда $f(x)$ функцияни ҳам $x\geqslant n_0$ лар учун қараш керак бўлади.

$f(x)$ нинг бирор бошланғич функциясини кўрайлик:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Унинг ҳосиласи $F'(x) = f(x) > 0$ бўлгани сабабли, $F(x)$ функция x билан бирга ўсади ва $x \to \infty$ бўлганда чекли ёки чексиз лимит L га эга бўлади [47-$n°$]. Қуйидаги яқинлашиш ва узоқлашиш аломати бу ҳолларнинг фарқланишига асосланган. Бу аломат геометрик кўринишда 1742 йилда Маклорен томонидан баён қилинган бўлиб, у билинмай қолиб кетган ва 1827 йилда Коши томонидан қайтадан кашф қилинган.

Интеграл аломат. *Агар бошланғич функция $F(x)$ нинг лимити L чекли сон бўлса, (5) қатор яқинлашувчи, $L = \infty$ да қатор узоқлашувчи бўлади.*

Қайси бошланғич функция ҳақида сўз боришининг аҳамияти йўқлиги равшан, чунки исталган иккита бошланғич функция бир-биридан фақат ўзгармасгагина фарқланиши мумкин:

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,dx \tag{6}$$

дейлик. $f(x)$ функция монотон бўлгани сабабли, $n \leqslant x \leqslant n+1$ учун

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n$$

ва, демак,

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant a_n.$$

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

қатор учун n — хусусий йиғинди

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = F(n+1)$$

бўлади; бу қатор, L нинг чекли ёки чексиз бўлишига қараб яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши равшан. L чекли сон бўлганда, 1- „таққослаш теоремасига“ кўра [237-$n°$], ҳадлари кичик бўлган $\sum_1^{\infty} a_{n+1}$ қатор унинг билан бирга (5) қатор ҳам — яқинлашувчи бўлади; аксинча, $L = \infty$ бўлганда ҳадлари катта бўлган $\sum_1^{\infty} a_n$ қатор ва, демак, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисоллар. 1) Энг аввал яна гармоник қаторларни кўрайлик:

$$\text{(а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s < 1)$$

(а) ҳолда:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \to \infty \text{ да } F(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln x \to \infty,$$

қатор узоқлашувчи.

(б) ҳолда:

$$f(x) = \frac{1}{x^s}, \quad x \to \infty \text{ да } F(x) = \int \frac{dx}{x^s} = -\frac{1}{s-1} \cdot x^{-(s-1)} \to 0,$$

ва қатор яқинлашувчи.

Бизга маълум бўлган бу натижаларни [236-$n°$] янгиси билан тўлдирайлик:

2) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

Бу ерда

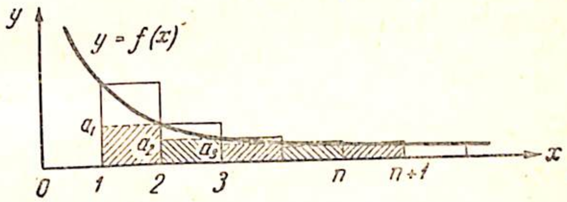
$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x \to \infty \text{ да } F(x) = \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \to \infty,$$

қатор узоқлашувчи.

$x \to \infty$ да (6)-интегралнинг лимитига 1 дан ∞ гача бўлган интеграл дейилади*) ва

$$F(\infty) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

кабн ёзилади.



1- чизма.

Шундай қилиб, *берилган (5) қатор, бу интегралнинг чекли ёки чексиз қийматга эга бўлишига қараб яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлади* дейиш мумкин.

Интеграл аломатнинг бундай кўринишига, Маклорен ғоясига яқин турган, оддий геометрик маъно бериш мумкин. Агар $f(x)$ функцияни эгри чизиқ билан ифодаласак (1- чизма), $F(x)$ интеграл, бу эгри чизиқ, x ўқи ва иккита ордината би-

*) Бу умумлаштирилган (хосмас) интеграл деб аталадиган интегралдир; бундай интеграллар билан биз XVII бобда шуғулланамиз.

лан чегараланган шаклнинг юзини ифодалайди; $F(\infty)$ интегрални эса, бирор маънода, эгри чизиқнинг устида ётиб ўнгга чегарасиз чўзилган шаклнинг юзини ифодалайди деб қараш мумкин. Иккинчи томондан, (5) қаторнинг $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ҳадлари эса $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ нуқталардаги ординаталарнинг катталикларини ёки, бари бир, асоси 1 бўлиб, баландликлари ўша ординаталарга тенг бўлган тўғри тўртбурчакларнинг юзларини ифодалайди.

Шундай қилиб, (5) қаторнинг йиғиндиси ташқарига чиққан тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисидан иборат бўлиб, фақат биринчи ҳади билан ичкарида ётган тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисидан фарқланади. Бу юқорида топилган натижани жуда кўргазмали қилиб ифодалайди: агар эгри чизиқли шаклнинг юзи чекли бўлса, унда унинг ичида ётган зинасимон шаклнинг юзи албатта чекли бўлиб, берилган қатор яқинлашувчи бўлади; агар эгри чизиқли шаклнинг юзи чексиз бўлса, уни ўз ичига олган зинасимон шаклнинг юзи ҳам чексиз бўлиб, қатор бу ҳолда узоқлашувчи бўлади.

3- §. ИХТИЁРИЙ ҚАТОРЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

242. Яқинлашиш принципи. Ҳадларининг ишоралари ихтиёрий бўлган қаторларнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани текширайлик. Маълумки [234-n°] таърифга биноан,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} + \cdots \qquad (A)$$

қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масала, хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}, \ldots \qquad (1)$$

нинг чекли лимити мавжуд бўлиши ҳақидаги масалага тенг кучлидир. [52-n°] да кетма-кетликнинг чекли лимити мавжуд бўлишининг зарурий ва етарли шарти бўлган умумий шартни берувчи яқинлашиш принципи исботланган эди. Бу принципни (1) кетма-кетликка нисбатан қайта таърифлаб қаторнинг яқинлашиш принципини ҳосил қиламиз:

(A) *қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун, аввалдан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам, шундай номер N мавжуд бўлиши керакки, $n > N$ бўлиб, исталган $m = 1, 2, 3, \ldots$ да ушбу*

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (2)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир). (Бу ердаги $n+m$,* 52-n° даги n га боғлиқ бўлмаган, ва, умумийликка зиён келтирмасдан, n дан катта қилиб олиниши мумкин бўлган иккинчи номер n' нинг ролини ўйнайди.)

Агар қаторни яқинлашувчи деб фараз қилиб, (2) тенгсизликда, хусусан, $m = 1$ десак,

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \qquad (n > N \text{ бўлганда})$$

бўлади, яъни $a_{n+1} \to 0$ ёки, бари бир, $a_n \to 0$, бу эса 235-n°, 5° да келтирилган зарурий шартдир. Бу шартнинг ўзигина қаторнинг яқинлашувчи бўлишини таъмин этолмайди, чунки у юқорида баён қилинган шартнинг мазмунини тўла қамраб ололмайди: қаторнинг етарли узоқликда турган ҳадларининг айрим-айрим исталганча кичик бўлишидан ташқари, бундай ҳадларнинг йиғиндиси ҳам, ҳадларнинг қанча олинишидан қатъи назар, исталганча кичик бўлиши керак. Буни яққол кўрсатиш учун гармоник $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қаторни олайлик. Қаторнинг умумий ҳади $\left(=\frac{1}{n}\right)$ 0 га интилади ва шу билан бирга, бу ҳаддан кейин яна $n-1$ та кейинги ҳадларини олсак, уларнинг ҳаммасининг йиғиндиси $> \frac{1}{2}$ бўлиб чиқади [236-n°), (1)].

243. Абсолют яқинлашиш. Яқинлашиш принципини бевосита татбиқ қилиш кўпинча қийин бўлгани сабабли, яқинлашиши соддароқ воситалар ёрдами билан аниқланиши мумкин бўлган қаторлар синфларини ўрганиш қизиқарлидир.

Аввалги параграфларда мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш, ўнғай аломатлар бор бўлгани туфайли, кўпинча осон эканини кўрдик. Шунинг учун, берилган қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалага келтирилиши мумкин бўлган ҳоллардан бошлаш табиийдир.

Агар қаторнинг ҳамма ҳадлари мусбат бўлмасдан, бирор жойдан бошлаб мусбат бўлса, етарли миқдордаги бошланғич ҳадларни ташлаб [235-n°, 1], масалани мусбат ҳадли қаторни текширишга олиб келамиз. Агар қаторнинг ҳадлари манфий ёки, ҳеч бўлмаганда, бирор жойдан бошлаб манфий бўлса, ҳамма ҳадларнинг ишораларини ўзгартиш билан [235-n°, 3°] кўрилган ҳолга қайтиб келамиз. Шундай қилиб, берилган қа-

*) Бу шартнинг авторлари Больцано ва Коши — иккаласи ҳам — уни чексиз қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалага мувофиқ қилиб исботлаганлар.

торнинг ҳадлари орасида чексиз кўп мусбат ва чексиз кўп манфий ҳадлар бўлган ҳол — чинакам янги ҳол бўлади.

Қуйидаги таърифни берайлик: *агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad \text{(A}^*\text{)}$$

қатор билан бир вақтда яқинлашувчи бўлса, (A) *қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.*

Қуйидаги теорема ўринлидир:

Коши теоремаси. (A) *қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган* (A*) *қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан,* (A) *қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади.*

Исботи яқинлашиш принципидан дарҳол келиб чиқади:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|$$

тенгсизлик кўрсатадики, агар (A*) қатор учун яқинлашиш шарти бажарилса, у (A) қатор учун ҳам албатта бажарилади.

Бошқача мулоҳаза қилиш ҳам мумкин. (A) қаторнинг мусбат ҳадларини алоҳида ва манфий ҳадларининг абсолют қийматларини алоҳида қарайлик. Уларни ҳам, буларни ҳам ҳадларнинг (A) қаторида туриш тартибини бузмасдан, қайтадан номерлаб чиқайлик, натижада иккита (мусбат) қатор ҳосил бўлади:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots \text{(B)}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \ldots \qquad \text{(C)}$$

(A*) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан бу қаторларнинг иккаласининг ҳам яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, у ёки бу қаторларнинг исталган хусусий йиғиндиси B_k ёки C_m (A*) қаторнинг бирор хусусий йиғиндисидан ва, демак, бу қаторнинг йиғиндиси A*) дан кичик бўлади [236-n°].

Агар энди (A) қаторнинг хусусий йиғиндиси A_n ни олсак, уни қуйидаги айирма кўринишида ёзиш мумкин:

$$A_n = B_k - C_m$$

бу ердаги k ва m лар, мос равишда A_n йиғиндининг таркибидаги мусбат ва манфий ҳадларнинг сонлари бўлиб, улар n га

боғлиқ ҳамда n билан бирга чексизликкача ўсадилар*). Бу ҳолда, равшанки, чекли лимит

$$A = \lim A_n = B - C \qquad (3)$$

мавжуд, бу ерда B ва C лар (B) ва (C) қаторларнинг йиғиндилари, ва шу билан (A) қаторнинг яқинлашувчи эканлиги исботланди. Шу билан бирга бу ерда айтилган теоремадан бошқа яна қўшимча фойдали даъво исботланди: қўйилган шартлар бажарилганда, берилган қаторнинг йиғиндиси, унинг мусбат ҳадларидан тузилган қаторнинг йиғиндисидан манфий ҳадларидан тузилган қаторнинг йиғиндисининг айрилганига тенг.

Шундай қилиб, (A*) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши, (A) қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши учун етарлидир.

(A) қатор яқинлашувчи бўлиб, (A*) қатор эса узоқлашувчи бўлган ҳоллар бўлиши мумкин, бу каби ҳолларни қуйида учратамиз. Шундай бўлганда (A) *қаторга абсолютмас (шартли) яқинлашувчи қатор дейилади.*

(A) қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканлигини тайинлаш учун, мусбат ҳадли (A*) қаторга, аввалги параграфда ўрганилган, ҳамма яқинлашиш аломатларини татбиқ қилиш мумкин. Лекин узоқлашиш аломатлари билан эҳтиёт бўлиш керак: агар (A*) қатор узоқлашувчи бўлса-да, (A) қатор (абсолютмас, шартли) яқинлашувчи бўлиб қолиши мумкин. Бундан фақат Коши ва Даламбер аломатлари истисно, чунки улар (A*) қаторнинг узоқлашувчи эканини таъкидласа, бу — (A*) қаторнинг умумий ҳади $|a_n|$ нолга интилмайди*) демакдир, бу ҳолда a_n ҳам нолга интилмайди, ва, демак, (A) қатор узоқлашувчи. Шунинг учун Коши ва Даламбер аломатларини ихтиёрий қаторга мувофиқлаштириб айтиш мумкин. Буни, масалан, Даламбер аломати учун қилайлик.

Даламбер аломати. $\mathcal{D}^*_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *нисбат учун аниқ*

$$\mathcal{D}^* = \lim \mathcal{D}^*_n$$

лимит мавжуд бўлсин; бу ҳолда, $\mathcal{D}^* < 1$ *бўлганда, берилган* (A) *қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб* $\mathcal{D}^* > 1$ *бўлганда эса, у узоқлашувчи бўлади.*

1) Даламбер аломатини [239-n°, 2] да кўрилган (а) ва
Мисоллар. (б) қаторларга, $x > 0$ деган талабни олиб ташлаб, татбиқ қилайлик. У ҳолда
қуйидаги натижага эга бўламиз:
(а) қатор x нинг барча қийматлари учун абсолют яқинлашувчи;
(б) қатор $-e < x < e$ бўлганда, абсолют яқинлашувчи бўлиб, $x \geqslant e$
ёки $x \leqslant -e$ бўлганда узоқлашувчи бўлади ($x = \pm e$ бўлганда яқинлашув-
чи бўлишнинг зарурий шарти бузилади).

*) Биз доимо (A) қаторнинг ҳадлари орасида чексиз кўп мусбат ва чексиз кўп манфий ҳадлар бўлган ҳолни назарда тутамиз.

*) 15- бетдаги сноскага қаранг.

2) Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\pm\frac{x^n}{n}\pm\ldots$$

қатор учун

$$\mathcal{D}_n^*=\frac{n}{n+1}|x|,\qquad \mathcal{D}^*=|x|.$$

Демак, $|x|<1$ бўлганда, қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, $|x|>1$ бўлганда узоқлашувчи. $x=-1$ бўлганда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади, чунки у гармоник қатор ҳадларининг ишораларини ўзгартириш натижасида ҳосил бўлган. $x=1$ бўлганда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

қатор ҳосил бўлади, бу қаторнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслиги ҳақидаги савол ҳозирча очиқ қолдирилади.

244. Ўзгарувчан ишорали қаторлар. Аввалги номердаги мулоҳазалар ёрдами билан берилган қаторнинг фақат абсолют яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш мумкин, аммо шартли яқинлашувчи қаторларга уларни татбиқ қилиб бўлмайди. Шунинг учун баёнимизнинг охирида, қаторларнинг ўзгарувчан ишорали қаторлар деб аталувчи битта махсус, лекин муҳим синфини текширайлик. Бу синфнинг қаторлари орасида шартли (абсолютмас) яқинлашувчилари ҳам бор.

Ўзгарувчан ишорали қаторлар деб, ҳадлари навбат билан мусбат ва манфий ишорага эга бўлган қаторларга айтилади. Бундай қаторни ёзганда ҳадларининг ишораларини очиқ-ойдин кўрсатиб, масалан,

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\ldots+(-1)^{n-1}c_n+\ldots \tag{4}$$

каби ёзиш қулайдир (бу ерда ҳамма $c_n>0$ деб ҳисобланади).

Бундай қаторларга нисбатан Лейбниц 1714 йилдаёқ (Иог. Бернуллига ёзган хатида) қуйидаги содда теоремани айтган эди.

Лейбниц теоремаси. *Агар ўзгарувчан ишорали (4) қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича монотон камайса:*

$$c_{n+1}\leqslant c_n\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{5}$$

ва нолга интилса,

$$\lim c_n=0,$$

у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

Исботи. Жуфт тартибли хусусий йиғинди C_{2m} ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$C_{2m}=(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+\ldots+(c_{2m-1}-c_{2m}).$$

Ҳар бир қавс, (5) га кўра, мусбат сон бўлгани сабабли, m нинг ўсиши билан C_{2m} йиғиндининг ҳам ўсиши равшан. Иккинчи томондан, C_{2m} ни

$$C_{2m}=c_1-(c_2-c_3)-\ldots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})-c_{2m}$$

кўринишда ёзиб олинса, C_{2m} нинг юқоридан чегараланганлигини кўриш осон:

$$C_{2m}\leqslant c_1$$

У ҳолда, монотон ўзгарувчи ҳақидаги теоремага кўра [44-n°] m чексиз ўсганда C_{2m} хусусий йиғинди чекли лимитга эга:

$$\lim_{m\to\infty}C_{2m}=C.$$

Тоқ тартибли хусусий йиғинди C_{2m-1} га ўтсак: $C_{2m-1}=C_{2m}+c_{2m}$ эканини кўрамиз. Умумий ҳад нолга интилгани сабабли,

$$\lim_{m\to\infty}C_{2m-1}=C.$$

Бундан, берилган қаторнинг йиғиндиси C экани келиб чиқади.

Эслатма. Жуфт тартибли хусусий йиғинди C_{2m} ларнинг қатор йиғиндиси C га ўсиб яқинлашишини кўрдик. C_{2m-1} ни

$$C_{2m-1}=c_1-(c_2-c_3)-\ldots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})$$

кўринишда ёзиб, тоқ тартибли хусусий йиғиндиларнинг C га камайиб интилишини кўриш осон. Шундай қилиб, ҳамма вақт

$$C_{2m}\leqslant C\leqslant C_{2m-1}.$$

Хусусан,

$$0<C<c_1$$

бўлади деб даъво қилиш мумкин.

Бу кўрилаётган қаторнинг қолдиғини жуда содда ва осон баҳолашга имкон беради (қолдиқнинг ўзи ҳам ўзгарувчан ишорали қатордир). Яъни қолдиқ:

$$\gamma_n=(-1)^{n-1}\{c_n-c_{n+1}+\ldots\}$$

дан иборат (6) га кўра, қавсдаги ифода мусбат ва c_n дан кичик.

Шундай қилиб, ҳамма ҳолларда *Лейбниц типидаги* қаторнинг қолдиғи, ўзининг биринчи ҳадининг ишорасига эга бўлиб, абсолют қиймати бўйича ундан кичик бўлади.*

Бу фактдан қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисоблашларда кўп фойдаланадилар ([260-n°] га қаранг).

*) Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантирувчи ўзгарувчан ишорали қаторни биз шундай деб атаймиз.

Лейбниц типидаги қаторларга энг содда мисоллар сифатида қуйидаги қаторларни олиш мумкин:

(а) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

ва

(б) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Бу иккала қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги исботланган теоремадан келиб чиқади.

Шу билан бирга, бу қаторлар ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторлар узоқлашувчидирлар: (а) қатор учун у гармоник қатор бўлиб, (б) қатор учун эса

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

қатор ҳосил бўлиб, унинг узоқлашувчи бўлишлиги хусусий йиғиндиси

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_n$$

тенгсизликни қаноатлантиришидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, (а) ва (б) қаторлар абсолютмас (шартли) яқинлашувчи қаторларга биринчи мисоллар бўла олади. {Қуйида биринчи қаторнинг йиғиндиси ln2, иккинчисининг йиғиндиси эса $\frac{\pi}{4}$ эканини кўрсатамиз. [256-n° (22)] ва [255-n° (20)] ларга қаранг}.

4- §. ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

245. Группалаш хоссаси. Чексиз қаторнинг йиғиндиси тушунчаси, арифметика ва алгебрада қараладиган чекли сондаги қўшилувчининг йиғиндиси тушунчасидан лимитга ўтиш амали борлиги билан анча фарқ қилади. Оддий йиғиндиларнинг баъзи хоссалари чексиз қаторларнинг йиғиндилари учун ўринли бўлса-да, бу ҳол, кўпинча маълум шартлар бажарилганда рўй беради; биз бу шартларни ўрганишимиз керак. Бошқа ҳолларда йиғиндининг биз одатланиб қолган хоссалари бутунлай бузилади, демак, бу масалада, умуман, эҳтиётликни сақлаш керак.

Яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (A)$$

қаторни кўрайлик; унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \qquad (1)$$

қаторнинг йиғиндиси A га яқинлашади. Қаторнинг ҳадларини, уларнинг жойланишини ўзгартирмасдан, ихтиёрий равишда группаларга бирлаштирайлик:

$$a_1+\ldots+a_{n_1},\ a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2},\ \ldots,\ a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k},\ldots$$

Бу ерда $\{n_k\}$ — натурал қатордан ажратилган номерларнинг бирор ўсувчи хусусий кетма-кетлиги.

Теорема. Бу йиғиндилардан тузилган

$$(a_1+a_2+\ldots a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots+$$
$$+(a_{n_{k-1}+1}+\ldots+a_{n_k})+\ldots \qquad (\tilde{A})$$

қатор ҳар доим яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси берилган қатор йиғиндиси A га тенг бўлади. Бошқача айтганда: *яқинлашувчи қатор группалаш хоссасига эга.*

Ҳақиқатан, янги қаторнинг хусусий йиғиндиларидан ташкил топган

$$\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2,\ \ldots,\ \tilde{A}_k,\ \ldots$$

кетма-кетлик (1) кетма-кетликнинг $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$, қисмий кетма-кетлигидан иборат ва, демак, у худди шу A лимитга яқинлашади.

Ҳозирча, одатдаги йиғиндилар билан тўла ўхшашликни кўрамиз; агар группалаш хоссасини тескари тартибда татбиқ қилсак, бу ўхшашлик бузилади. Агар ҳар бир ҳади чекли сондаги қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлган яқинлашувчи $(\tilde{A})$ қатор берилган бўлса, қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган янги (A) қатор узоқлашувчи бўлиб қолиши мумкин. Оддий бир мисол: равшанки,

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

қатор яқинлашувчи, лекин ундан қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

қатор — узоқлашувчидир.

Агар қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган (A) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг йиғиндиси, албатта $(\tilde{A})$ қаторнинг йиғиндисига тенг бўлади. Бу юқорида исботлангандан келиб чиқади.

Эслатма. Баъзи ҳолларда (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини олдиндан таъмин этиш мумкин. Бундай ҳилдаги энг содда ҳол, $(\widetilde{A})$ даги ҳар бир қавснинг ичидаги ҳамма қўшилувчилар бир хил ишорага эга бўлганда ҳосил бўлади*).

Ҳақиқатан, бу ҳолда n n_{k-1} дан n_k гача ўзгарганда хусусий йиғинди A_n монотон ўзгаради, демак, у $A_{n_{k-1}} = \widetilde{A}_{k-1}$ билан $A_{n_k} = \widetilde{A}_k$ орасида ётади. k етарли катта бўлганда кейинги йиғиндилар $(\widetilde{A})$ қаторнинг йиғиндиси $\widetilde{A}$ дан исталганча кам фарқланади, демак, n етарли катта бўлганда худди шу мулоҳаза $\widetilde{A}_n$ йиғиндига нисбатан ҳам тўғри, шунинг учун $A_n \to \widetilde{A}$ дир.

246. Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ўрин алмаштириш хоссаси. Йиғиндиси A бўлган яқинлашувчи (A) қатор берилган бўлсин. Унинг ҳадлари ўринларини ихтиёрий равишда алмаштириб, янги

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k + \ldots \qquad (A')$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторнинг ҳар бир a'_k ҳади берилган қаторнинг бирор аниқ ҳади a_{n_k} га тенгдир**).

(A') қатор яқинлашувчи бўладими ва яқинлашувчи бўлса унинг йиғиндиси берилган қаторнинг йиғиндиси A га тенг бўладими, деган савол туғилади. Бу масалани текширганда абсолют ва абсолютмас яқинлашувчи қаторларни кескин фарқлантириш керак бўлади.

Дирихле теоремаси**). *Агар (А) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, ундан ҳадларининг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган (A′) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси берилган қаторнинг йиғиндиси A га тенг бўлади.* Бошқача қилиб айтганда, *абсолют яқинлашувчи қатор ўрин алмаштириш хоссасига эга.*

Исботи. Исботлашни икки қисмга бўлиб ўтказайлик.

(а) Аввал, берилган (А) қаторни мусбат ҳадли қатор деб фараз қилайлик.

(A') қаторнинг ихтиёрий хусусий йиғиндиси A'_k ни кўрайлик.

$$a'_1 = a_{n_1},\ a'_2 = a_{n_2},\ \ldots, \qquad a'_k = a_{n_k}$$

---

*) Бу ишора бир қавсдан иккинчисига ўтганда ўзгариши мумкин.

**) Номерларнинг $\{n_k\}$ кетма-кетлиги (сонларни қолдирмай ва такрорламай ёзилганда) — тартибигача аниқликда — натурал қаторни беради.

***) Петер Густав Лежен — Дирихле (1805 — 1859) — немис математиги.

бўлгани сабабли, n' ни ҳамма $n_1, n_2, \ldots, n_k$ номерлардан катта қилиб олсак, $A'_k \leqslant A_{n'}$ бўлади ва, демак, албатта

$$A'_k \leqslant A.$$

Бу ҳолда (A') қатор яқинлашувчи бўлади [236-$n°$] ва унинг йиғиндиси A' A дан катта бўла олмайди:

$$A' \leqslant A.$$

Лекин (A) қатор ҳам (A') дан ҳадларининг ўринларини алмаштириш билан ҳосил бўлади, шунинг учун, юқоридагига ўхшаш йўл билан,

$$A \leqslant A'$$

га эга бўламиз. Ҳосил қилинган иккита муносабатни солиштириб, талаб қилинган

$$A' = A$$

тенгликка келамиз.

(б) Энди (А) ихтиёрий абсолют яқинлашувчи қатор бўлсин.

Мусбат

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (A^*)$$

қатор яқинлашувчи бўлгани сабабли, исботланганга кўра, ҳадларининг ўринларини ҳар қандай қилиб алмаштирганда ҳам, қатор яқинлашувчи бўлиб қолаверади, демак [243-$n°$] даги теоремага кўра, (A) қатор ҳам ўзининг (абсолют) яқинлашувчилигини сақлайди.

Сўнгра [243-$n°$] да (A) қатор абсолют яқинлашувчи бўлган ҳолда, унинг йиғиндиси каби ифодаланишини кўрган эдик, бу ерда B ва C лар (A) қаторнинг мос равишда, мусбат ва манфий ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган мусбат ҳадли (B) ва (C) қаторларнинг йиғиндилари. (A) қаторда ҳадларнинг ўринларини алмаштириш натижасида бу қаторларда ҳам ҳадларнинг ўринлари алмашади, лекин бу ҳодиса (исботланганга кўра) уларнинг йиғиндилари B ва C га таъсир этмайди. Демак, (A) қаторнинг йиғиндиси ҳам аввалгисича қолади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

247. Абсолютмас яқинлашувчи қатор бўлган ҳол. Энди абсолютмас яқинлашувчи қаторларни текширишга ўтайлик ва *уларнинг ўрин алмаштириш хоссасига эга эмасликларини кўрсатайлик.*

Аввало қуйидагига эътибор берайлик. (A) қатор яқинлашувчи, лекин абсолютмас яқинлашувчи деб фараз қилайлик. Қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\lim a_n = 0$

эканлиги келиб чиқади [235-n°, 5°]. Аввалги номерда эслатилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad (B), \qquad\qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m \qquad (C)$$

қаторлар учун, равшанки,

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad \text{ва} \quad \lim_{m\to\infty} C_m = 0 \tag{2}$$

бўлса-да, бу ҳолда уларнинг иккаласи ҳам узоқлашувчи бўлади. Ҳақиқатан, агар (A) қаторнинг дастлабки n та ҳадининг орасида k та мусбат ва m та манфий ҳад бўлса, у ҳолда

$$A_n = B_k - C_m, \qquad A_n^* = B_k + C_m$$

бўлади. Бу тенгликларнинг иккинчиси (B) ва (C) қаторларнинг иккаласининг ҳам бир вақтда яқинлашувчи бўла олмаслигини кўрсатади, чунки акс ҳолда фаразимизга зид ўлароқ, (A^*) қатор ҳам яқинлашувчи бўлар эди. Биринчи тенгликдан эса, бу қаторларнинг бири яқинлашувчи бўлиб, иккинчиси узоқлашувчи бўла олмаслиги келиб чиқади, чунки акс ҳолда (A) қатор ҳам узоқлашувчи бўлар, бу эса фаразимизга зид бўлар эди.

Энди қуйидаги ажойиб теоремани исботлайлик.

Риман теоремаси. *Агар (A) қатор абсолютмас яқинлашувчи бўлса, аввалдан чекли ёки $\pm\infty$ га тенг бўлган ҳар қандай сон L берилган бўлмасин, бу қаторда ҳадларнинг ўринларини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил бўлган янги қаторнинг йиғиндиси худди шу L га тенг бўлади.*

Исботи. L чекли сон бўлган ҳолни кўрайлик. Аввало шунга эътибор берайлик: (B) ва (C) қаторларнинг узоқлашувчи бўлишидан, [235-n°, 1°] га кўра, уларнинг ҳамма қолдиқлари ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади, демак, бу қаторларнинг ҳар бирида, исталган жойдан бошлаб, шунча ҳад олиш мумкинки, уларнинг йиғиндиси исталган сондан катта бўлади.

Бундан фойдаланиб (A) қатор ҳадларининг ўринларини қуйидагича ўзгартирайлик.

Аввал, берилган қаторда ҳадларининг жойланиш тартибини бузмасдан, шунча мусбат ҳадини олайликки, уларнинг йиғиндиси L дан катта бўлсин:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{k_1} > L$$

Бу йиғиндига, ҳадларнинг жойлашиш тартибини бузмасдан, шунча манфий ҳадлар қўшайликки, ҳосил бўлган янги йиғинди L дан кичик бўлсин:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} < L.$$

Бундан сўнг, яна қолган мусбат ҳадлардан шунчасини жойлаштирайликки, натижада

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} > L$$

бўлсин. Сўнгра, қолган манфий ҳадлардан шунчасини оламизки, натижада

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} - c_{m_1+1} - \ldots - c_{m_2} < L$$

бўлсин ва ҳ. к. Бу жараён чексиз давом эттирилган деб фараз қиламиз; Равшанки, (A) қаторнинг ҳар бир ҳади, ўз ишораси билан, аниқ жойда учрайди.

Агар, ҳар гал талаб қилинган тенгсизликни ҳосил қилиш учун b ёки c ҳадлар керагидан ортиқ олинмаса, L сонидан у ёки бу томонга четланиш, абсолют қиймати бўйича, охирги ёзилган ҳаддан катта бўлмайди. Бу ҳолда (2) дан, равшанки,

$$(b_1 + \ldots + b_{k_1}) - (c_1 + \ldots + c_{m_1}) + \ldots + (b_{k_{l-1}+1} + \ldots + b_{k_l}) - (c_{m_{l-1}+1} + \ldots + c_{m_l}) + \ldots$$

қаторнинг йиғиндиси L бўлади. [245-n°] даги эслатмага кўра, қавсларни очгандан кейин ҳосил бўлган қатор ҳам шу L йиғиндига эга бўлади.

Энди $L = +\infty$ бўлсин. Бу ҳолда мусбат сонларни (ҳадларни) шундай талабни қаноатлантирадиган қилиб олиш мумкинки, бунда ҳосил бўлган йиғиндилар 1, 2, 3, ... лардан кетма-кет катта бўла борсин; сўнгра мусбат ҳадларнинг ҳар бир группасидан кейин биттадан манфий ҳад жойлаштирамиз. Шу йўл билан, равшанки, йиғиндиси $+\infty$ га тенг бўлган қатор тузилган бўлур эди. Шунга ўхшаш йиғиндиси $-\infty$ бўлган қатор ҳам ҳосил қилиш мумкин.

Исботланган бу факт, қаторнинг абсолютмас (шартли) яқинлашувчи бўлиши унинг мусбат ва манфий ҳадларининг ўзаро қисқариб кетиши натижасида рўй беришини қайд этади ва шу сабабли бундай қаторлар учун ҳадларнинг қайси тартибда бирин-кетин келиши ғоят муҳим роль ўйнайди, абсолют яқинлашувчилик эса шу ҳадларнинг камайиш тезлигига асослангандир ва ҳадларнинг жойлашиш тартибига боғлиқ эмас.

Мисол. Шартли (абсолютмас) яқинлашувчи эканлиги аввалдан маълум бўлган

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \ldots \tag{3}$$

МУНДАРИЖА

Ўн бешинчи боб

Сонли қаторлар

1- §. Кириш

2- §. Мусбат қаторларнинг яқинлашиши

3- §. Ихтиёрий қаторларнинг яқинлашиши

4- §. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

5- §. Чексиз кўпайтмалар

6- §. Элементар функцияларни даражали қаторларга ёйиш

7- §. Қаторлар ёрдами билан тақрибий ҳисоблашлар

Ўн олтинчи боб

Функционал кетма-кетликлар ва қаторлар

1- §. Текис яқинлашиш

2- §. Қатор йиғиндисининг функционал хоссалари

3- §. Даражали қаторлар ва кўпҳадликлар қаторлари

4- §. Қаторлар тарихининг очерки

Ўн еттинчи боб

Хосмас интеграллар

1- §. Чегаралари чексиз бўлган хосмас интеграллар

2- §. Чегараланмаган функциялардан олинган хосмас интеграллар

3- §. Хосмас интегралларни алмаштириш ва ҳисоблаш

Ўн саккизинчи боб

Параметрга боғлиқ интеграллар

1- §. Элементар назария

2- §. Интегралларнинг текис яқинлашиши

3- §. Интегралларнинг текис яқинлашишидан фойдаланиш

4- §. Эйлер интеграллари

Ўн тўққизинчи боб

Ошкормас функциялар. Функционал детерминантлар

1- §. Ошкормас функциялар

2- §. Ошкормас функциялар назариясининг баъзи татбиқлари

3- §. Функционал детерминантлар ва уларнинг формал хоссалари

Йигирманчи боб

Эгри чизиқли интеграллар

1- §. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар

2- §. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

Йигирма биринчи боб

Икки каррали интеграллар

1- §. Икки каррали интегралларнинг таърифи ва энг содда хоссалари

2- §. Икки каррали интегрални ҳисоблаш

3- §. Грин формуласи

4- §. Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шартлари

5- §. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

Йигирма иккинчи боб

Сирт юзи. Сирт интеграллари

1- §. Икки томонли сиртлар

2- §. Эгри сирт юзи

3- §. Биринчи тур сирт интеграллари

4- §. Иккинчи тур сирт интеграллари

Йигирма учинчи боб

Уч каррали интеграллар

1- §. Уч каррали интеграл ва уни ҳисоблаш

2- §. Остроградский формуласи

3- §. Уч каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш

4- §. Майдон назарияси элементлари

5- §. Кўп каррали интеграллар

Йигирма тўртинчи боб

Фурье қаторлари

1- §. Кириш

2- §. Функцияларни Фурье қаторига ёйиш

3- §. Фурье интеграли

4- §. Функциялар тригонометрик системасининг ёпиқлиги ва тўлалиги

5- §. Тригонометрик қаторлар тарихи очерки

Хотима

Математик анализнинг кейинги тараққиёти очерки

На узбекском языке

ФИХТЕНГОЛЬЦ ГРИГОРИЙ МИХАЙЛОВИЧ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ II

Предназначено для студентов высших учебных заведений

Перевод с русского 4 издания издательство „Наука" М., 1964

Издательство „Ўқитувчи"
Ташкент—1972

Таржимонлар: Ф. С. Хожимуллаев,
Т. А. Азларов
Махсус редактор М. Мирзааҳмедов
Нашриёт редактори Х. Алимов
Бадиий редактор П. А. Бродский
Техредактор: Э. В. Вильданова
Корректор М. Тошимова

Теришга берилди 15/IV-1971 й. Босишга рухсат этилди 21/VI-1972 й. Қоғози 60×90$^1/_{16}$. Физик л. 29,5. Нашр. л. 28,9. Тиражи 15000.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 58-66. Баҳоси 81 т. Муқоваси 20 т.

ЎзССР Министрлар Совети Матбуот Давлат комитетининг 1- босмахонаси. Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. Қоғози № 3. 1972 йил. Заказ № 272.

Типография № 1 Государственного комитета Совета Министров УзССР по печати.
г. Ташкент, ул. Хамзы, 21.