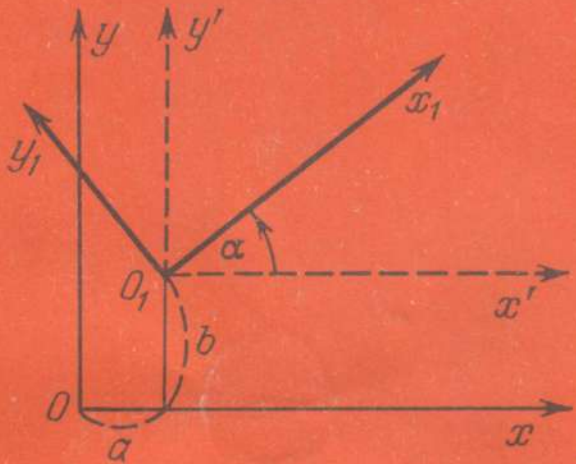
514
В 49

И. М. ВИНОГРАДОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



И. М. ВИНОГРАДОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.151.5
В49
УДК 514.12

Виноградов И. М. Аналитическая геометрия.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 176 с.

В книге наглядно и просто изложены основы аналитической геометрии. Примеры и упражнения помогут читателю быстро и основательно усвоить методы этой области математики.

Для студентов первых курсов вузов. Может быть использована также преподавателями средней школы и старшеклассниками.

БИБЛИОТЕКА
25170

ЎҚИШ ЗАЛИ 271

В $\frac{1702040000-116}{053(02)-86}$ 52-86

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана И. М. Виноградовым в 1932 г. на основе лекций, которые он читал в Ленинградском политехническом институте. Иван Матвеевич преподавал высшую математику, являясь доцентом, профессором Пермского университета (1918—1920 гг.), профессором Ленинградского политехнического института (1920—1929 гг.), преподавателем, профессором физико-математического факультета Ленинградского государственного университета (1920—1932 гг.), проректором, заведующим кафедрой физико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (1944—1947 гг.). Им выпущено две книги под общим названием «Элементы высшей математики»: Вып. 1. Аналитическая геометрия.— Л.: Изд-во КУБУЧ, 1932, и Вып. 2. Дифференциальное исчисление. — Л.: Изд-во КУБУЧ, 1933.

Математику Иван Матвеевич воспринимал как мощное орудие для решения проблем естествознания. Поэтому он стремился возможно быстрее дать в руки студента это орудие, на большом количестве простых, но принципиально важных примеров научить пользоваться им. При этом он никогда не делал различия, будет ли впоследствии оно применяться в инженерной работе или в абстрактных математических исследованиях. С таких позиций написана «Аналитическая геометрия». С первой страницы читатель получает в руки простой, но важный инструмент, с помощью которого сразу же может решать задачи геометрии и механики.

При издании книги внесены исправления обнаруженных неточностей. Все остальное, включая ставшие малоупотребительными старые понятия и названия, оставлено без изменений. Это позволит читателю в какой-то мере услышать живую речь великого математика и неповторимого человека — Ивана Матвеевича Виноградова.

Большую работу при подготовке к изданию этой книги провели профессор В. И. Благодатских и профессор Е. В. Шикин.

А. А. Карацуба

Глава 1

ВЕКТОРЫ И УГЛЫ

§ 1. Ось

Пусть дана прямая PQ (рис. 1). По этой прямой точка может двигаться по двум противоположным направлениям. Одно из этих направлений принимается за положительное, а другое за отрицательное. Безразлично, какое направление принять за положительное, но выбор мы должны сделать так, чтобы он был наиболее удобен. Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется *осью*. Положительное направление на оси отмечается стрелкой.

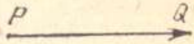


Рис. 1

§ 2. Вектор

a. Очень часто приходится иметь дело с направленными отрезками, у каждого из которых направление указывается стрелкой, поставленной у его конца. Отрезок, на котором дано направление, называется *вектором*.

Вектор обозначается обычно двумя буквами, сначала пишется буква, указывающая начало, а потом буква, указывающая конец вектора; например, на рис. 2 изображены вектор AB и вектор CD. Вместо того чтобы писать перед буквами слово «вектор», для краткости условились ставить над этими буквами черту сверху так, что, например, вместо «вектор AB» пишем $\overline{AB}$.

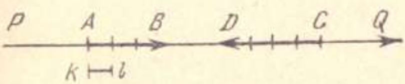


Рис. 2

b. Мы будем предполагать, что каждый вектор находится на оси, например, $\overline{AB}$ находится на оси PQ. Может случиться, что на одной оси находятся несколько векторов; они могут отличаться и *направлением*, и *величиной*. Для того чтобы их лучше различать, условились, что те векторы, у которых направление совпадает с направлением оси, имеют положительную величину, а те векторы, у которых направление противоположно направлению оси, имеют отрицательную величину.

Величину вектора мы будем обозначать так же, как и сам вектор, но без черты сверху; например, вместо: «величина $\overline{AB}$» пишем просто AB.

c. Если дана единица измерения, то величину мы можем выразить числом, например,

$$AB = +3, \quad CD = -4.$$

Если у вектора начало сделать концом, а конец началом, то он изменит свое направление на противоположное. Нетрудно понять, что его величина изменит знак, так что

$$BA = -AB.$$

Если у величины вектора отбросить знак, то мы получим просто *длину*.

Длину условились записывать так же, как величину, но слева и справа писать вертикальную черточку, например,

$$|AB| = 3, \quad |CD| = 4.$$

d. Понятие о векторе имеет большое значение как для математических, так и для технических наук.

В технических науках все время приходится говорить о силах. Известно, что силу нельзя выразить одним только числом, так как сила имеет еще и направление. Поэтому силу приходится изображать направленным отрезком, т. е. вектором. Точно так же скорость, ускорение, перемещение точки приходится изображать векторами.

§ 3. Направленные углы

a. Выше было сказано, что перемещение точки приходится изображать направленным отрезком, т. е. вектором. Подобно этому вращение оси приходится изображать направленным углом.

Пусть даны две пересекающиеся оси L и M. Для простоты обозначим каждую ось одной буквой (рис. 3). Одна из осей является началом вращения, она называется *началом угла*; другая является концом вращения, она называется *концом угла*.

Конец и начало угла называются его *сторонами*. На рис. 3 сторона L — начало, а M — конец. Углы будем измерять в радианах. Если угол получен вращением против часовой стрелки, то его величина считается положительной, в противном случае его величина считается отрицательной. Направление угла отмечается (как на рис. 3) стрелкой.

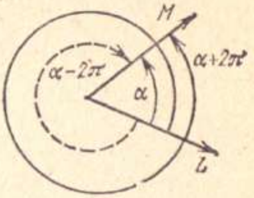


Рис. 3

Указанное расположение сторон может быть получено бесконечным числом вращений, а потому начало и конец дают не один угол, а бесконечное число положительных и отрицательных углов.

b. *Величина* любого *угла*, образуемого сторонами L и M, обозначается условно так:

$$(LM),$$

причем слева пишется начало, справа — конец.

Если обозначить через α величину наименьшего положительного угла между данными сторонами, то величина любого угла, образуемого теми же сторонами, может быть получена из формулы

$$(LM) = \alpha + 2\pi k,$$

где k — любое целое положительное или отрицательное число, в том числе и нуль, потому что оно обозначает число полных оборотов.

Действительно, при $k = 0$ получается сам угол

$$(LM) = \alpha.$$

Подставляя вместо k числа $1, 2, 3, \ldots,$ получим все другие положительные углы. Если $k = -1$, мы получим наименьший по абсолютной величине отрицательный угол

$$(LM) = \alpha - 2\pi.$$

На рис. 3 этот угол отмечен пунктирной стрелкой. Подставляя вместо k числа $-1, -2, -3, \ldots,$ получим все другие отрицательные углы.

c. Если начало угла сделать концом, а конец началом, то все углы изменят знаки на обратные:

$$(ML) = -\alpha - 2\pi k.$$

Положим $k = -k_1$, тогда

$$(ML) = -\alpha + 2\pi k_1.$$

Очевидно, k_1 может принимать также все целые значения — положительные, отрицательные и нуль.

d. Мы видели, что задание начала и конца угла не определяет угол однозначно (т. е. определяет не один, а много углов). Однако любая тригонометрическая функция определяется вполне однозначно, например,

$$\sin(LM) = \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha.$$

Более того, чтобы вполне определить косинус, достаточно задать только стороны, не указывая даже, какая из них является началом и какая концом. Действительно,

$$\cos(LM) = \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,$$
$$\cos(ML) = \cos(-\alpha + 2\pi k_1) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

так что

$$\cos(LM) = \cos(ML)\ ^{*)}.$$

§ 4. Проекция вектора с оси на ось

a. *Проекцией точки A* на ось PQ (рис. 4) называется основание a перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную ось. Та ось, на которую мы проектируем, называется *осью проекций*.

b. Пусть даны две оси и вектор $\overline{AB}$, указанные на рис. 5. Вектор $\overline{ab}$, началом которого служит проекция

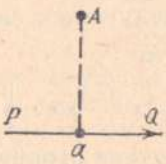


Рис. 4

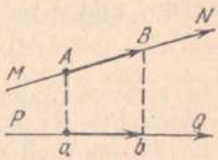


Рис. 5

начала и концом — проекция конца данного вектора, называется *проекцией вектора* $\overline{AB}$ на ось PQ. Записывается это так:

$$\overline{ab} = \text{пр}_{PQ}\,\overline{AB}.$$

Иногда указатель PQ внизу не пишется, это делается в тех случаях, когда кроме PQ нет другой оси, на которую можно было бы проектировать.

*) Разумеется, то же самое справедливо для секанса.

c. Теорема I. *Величины векторов, лежащих на одной оси, относятся как величины их проекций на любую ось.*

Пусть даны оси и векторы, указанные на рис. 6. Из подобия треугольников видно, что длины векторов относятся, как длины их проекций, т. е.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|ab|}{|cd|}. \qquad (1)$$

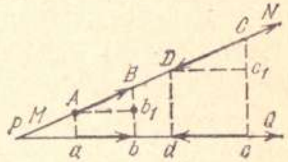


Рис. 6

Так как векторы на чертеже направлены в разные стороны, то величины их имеют различный знак, следовательно,

$$\frac{AB}{CD} = -\frac{|AB|}{|CD|}. \qquad (2)$$

Очевидно, величины проекций также имеют различный знак:

$$\frac{ab}{cd} = -\frac{|ab|}{|cd|}; \qquad (3)$$

подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$-\frac{AB}{CD} = -\frac{ab}{cd}.$$

Меняя знаки на обратные, получим

$$\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}. \qquad (4)$$

Если векторы будут одинаково направлены, то будут одного направления и их проекции; в формулах (2) и (3) знаков минус не будет. Подставляя (2) и (3) в равенство (1), мы сразу получим равенство (4). Итак, теорема доказана для всех случаев.

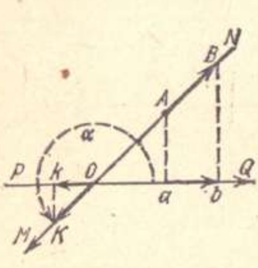


Рис. 7

d. Теорема II. *Величина проекции вектора на любую ось равна величине вектора, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью вектора.*

Пусть даны оси и вектор $\overline{AB}$, как указано на рис. 7. Построим вектор $\overline{OK}$, одинаково направленный со своей осью и отложенный, например, от точки пересечения осей. Пусть длина его равна единице. Тогда и величина его

$$OK = +1. \qquad (1)$$

Очевидно, вектор $\overline{Ok}$ есть линия косинуса для угла α между осями, следовательно, его величина

$$Ok = \cos \alpha. \qquad (2)$$

Применяя теорему 1, получим

$$\frac{ab}{Ok} = \frac{AB}{OK}. \qquad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим

$$\frac{ab}{\cos \alpha} = \frac{AB}{+1}.$$

Отсюда

$$ab = AB \cos \alpha. \qquad (4)$$

§ 5. Векторные цепи

а. Если несколько векторов расположены так, что конец каждого вектора служит началом следующего, то такую их совокупность будем называть *векторной цепью* (см., например, рис. 14).

Вектор, соединяющий начало первого звена цепи с концом последнего, называется *замыкающим вектором* для данной цепи. По характеру расположения векторов мы можем подразделить цепи на пространственные, плоские и прямолинейные. *Пространственной* мы будем называть такую цепь, у которой все звенья не могут уместиться в одной плоскости; если же все звенья цепи лежат в одной плоскости, то цепь будет *плоская*; наконец, если все звенья цепи лежат на одной прямой, то цепь будет *прямолинейной*. Сначала мы будем говорить о прямолинейных цепях, потом о плоских; пространственными цепями мы будем заниматься много позднее.

b. Теорема Шаля. *Алгебраическая сумма величин векторов прямолинейной цепи равна величине ее замыкающего вектора.*

Пусть имеется сначала цепь из двух векторов.

Могут представиться несколько случаев. Разберем сначала случаи, где точка b правее a.

Случай I. Даны векторы, указанные на рис. 8 (c правее b). Здесь очевидно, что

$$ab + bc = ac. \qquad (1)$$

Случай II. Векторы расположены так, как на рис. 9 (c между a и b). Мы видим, что

$$ab = ac + cb.$$

Так как нам надо доказать (1), то переносим cb в левую часть с обратным знаком: $ab - cb = ac$, откуда ввиду $cb = -bc$ имеем опять $ab + bc = ac$.

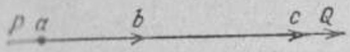


Рис. 8

Рис. 9

С л у ч а й III. Векторы расположены, как на рис. 10 (c левее a). Мы видим, что $ca + ab = cb$, откуда $ab - cb = -ca$ или, ввиду $cb = -bc$ и $ca = -ac$, имеем

$$ab + bc = ac.$$

Остаются случаи, где b левее a, как на рис. 11—13.

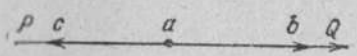


Рис. 10

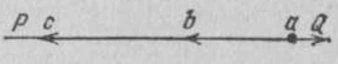


Рис. 11

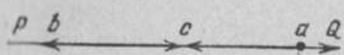


Рис. 12

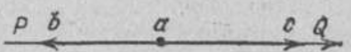


Рис. 13

Эти случаи рассматриваются аналогично первым трем, а потому разбор их в виде упражнения предоставляем самим учащимся.

Итак, всегда

$$ab + bc = ac.$$

Таким образом, для двух векторов теорема Шаля доказана.

Пусть теперь дана цепь, состоящая из любого числа векторов, например, ab, bc, cd, de, ef, . . ., kl *).

Сложим алгебраически их величины и будем постепенно применять теорему Шаля каждый раз для двух векторов:

$$\begin{aligned} ab + bc + cd + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ac + cd + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ad + de + ef + \ldots + kl &= \\ = ae + ef + \ldots + kl &= \\ = af + \ldots + kl &= \\ = ak + kl &= \\ &= al. \end{aligned}$$

*) Мы умышленно не приводим чертежа, так как вопрос ясен и без него.

Теперь теорема Шаля доказана для любого числа векторов.

с. Теорема о проекции векторной цепи на любую ось. Пусть имеется какая-нибудь цепь (рис. 14), все звенья которой лежат в одной плоскости. Здесь вектор $\overline{AL}$ является замыкающим. Спроектируем

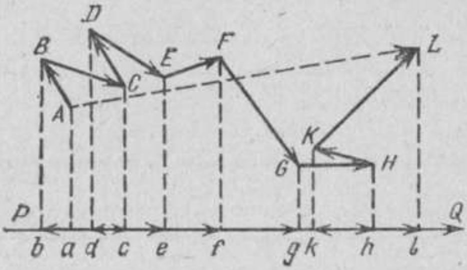


Рис. 14

цепь и ее замыкающий вектор на ось PQ. Нетрудно видеть, что на оси PQ получится прямолинейная векторная цепь.

На основании теоремы Шаля имеем

$$ab + bc + cd + de + ef + fg + gh + hk + kl = al.$$

Так как

$$ab = \text{пр}\,\overline{AB},\quad bc = \text{пр}\,\overline{BC}, \ldots,\quad kl = \text{пр}\,\overline{KL},\ al = \text{пр}\,\overline{AL},$$

то имеем

$$\text{пр}\,\overline{AB} + \text{пр}\,\overline{BC} + \text{пр}\,\overline{CD} + \text{пр}\,\overline{DE} + \text{пр}\,\overline{EF} + \\ + \text{пр}\,\overline{FG} + \text{пр}\,\overline{GH} + \text{пр}\,\overline{HK} + \text{пр}\,\overline{KL} = \text{пр}\,\overline{AL},$$

т. е. алгебраическая сумма величин проекций звеньев векторной цепи на любую ось равна величине проекции замыкающего вектора на ту же ось.

d. Понятие о цепи векторов имеет большое значение для механики. Приведем примеры.

Представим себе, что точка делает несколько последовательных перемещений. Например, как указано на рис. 14, точка перемещается из положения A в положение B, затем из B в C и т. д., наконец, из положения K в положение L. Очевидно, окончательное перемещение точки будет изображаться вектором $\overline{AL}$; таким образом, замыкающий вектор заменяет собой всю цепь перемещений.

То же самое можно сказать, если звенья цепи изображают векторы, равные и параллельные силам, приложенным к одной точке A. Замыкающий вектор $\overline{AL}$ изображает тогда равнодействующую всех этих сил, действие которой заменяет действие всех этих сил.

е. Поэтому замыкающий вектор называется также *геометрической суммой векторной цепи.*

Записывается это так:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}.$$

Нужно только помнить, что плюсы, стоящие в левой части, имеют другой смысл, чем в алгебре: они обозначают не алгебраическое, а геометрическое сложение. Только в том случае, когда все векторы лежат на одной прямой, геометрическая сумма переходит в алгебраическую.

§ 6. Цепи углов

Подобно тому как точка может совершать несколько последовательных перемещений, ось может совершать несколько последовательных вращений. Здесь мы приходим к понятию цепи углов. *Цепью углов* мы будем называть совокупность углов, расположенных так, что конец каждого угла совпадает с началом следующего.

Пусть, например, вокруг точки O ось совершает несколько вращений, которые изображены на рис. 15 углами

$$(AB),\ (BC),\ \ldots,\ (KL).$$

Очевидно, все эти вращения можно заменить одним вращением, изображаемым углом (AL).

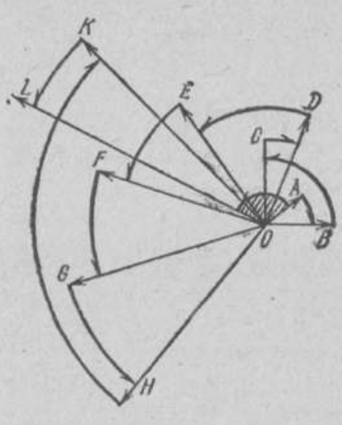


Рис. 15

Для цепи углов также можно доказать теорему Шаля. Метод доказательства тот же, что и для векторов:

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DE) + (EF) + (FG) + \\ + (GH) + (HK) + (KL) = (AL),$$

т. е. *алгебраическая сумма величин углов, образующих цепь, равна величине угла, образуемого началом первого и концом последнего угла цепи.*

b. Как мы видим, направленные углы аналогичны векторам.

§ 7. Проекции вектора на две взаимно перпендикулярные оси

a. Пусть имеются две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy (рис. 16).

Пусть еще имеется вектор $\overline{P}$, лежащий на оси Ol. Обозначим через α наименьший положительный угол (xl) и через β тот угол (ly), который получается, если ось Ol сначала повернуть до оси Ox по часовой стрелке, а потом до оси ординат против часовой стрелки. Таким образом, всегда

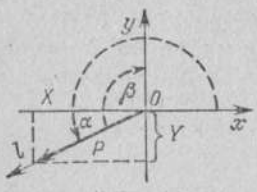


Рис. 16

$$\beta = -\alpha + 90°. \quad (1)$$

Обозначим через X и Y проекции вектора $\overline{P}$ на оси. Тогда

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta \quad (2)$$

или, так как

$$\cos\beta = \cos(-\alpha + 90°) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

то

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\sin\alpha. \quad (3)$$

Формулы (3) можно представить также в виде

$$\sin\alpha = \frac{Y}{P}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{P}, \quad (4)$$

откуда, разделив первую формулу на вторую, можно еще найти

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}. \quad (5)$$

b. Если направление вектора $\overline{P}$ совпадает с направлением оси Ol (что мы и имеем на чертеже), то величина вектора равна его длине. Обозначая длину через r, получим

$$X = r\cos\alpha, \quad Y = r\sin\alpha$$

или в другом виде

$$\sin\alpha = \frac{Y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{r}.$$

c. Нетрудно также получить формулу для вычисления длины вектора. Если мы длины проекций вектора обозначим, как обычно, $|X|$ и $|Y|$, то по теореме Пифагора (рис. 16)

$$r = \sqrt{|X|^2 + |Y|^2}.$$

Так как при возведении в квадрат знак минус, если он имеется, исчезает, то

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

§ 8. Угол между двумя векторами. Условия параллельности и перпендикулярности

a. Пусть даны два вектора, указанные на рис. 17: $\overline{P}_1$ с проекциями X_1 и Y_1, лежащий на оси Ol_1, и $\overline{P}_2$ с проекциями X_2 и Y_2, лежащий на оси Ol_2. Для простоты предположим, что направления этих векторов совпадают с направлениями их осей.

Обозначим углы

$$(xl_1) = \alpha_1, \quad (xl_2) = \alpha_2,$$
$$(l_1 l_2) = \varphi.$$

Очевидно,

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,$$

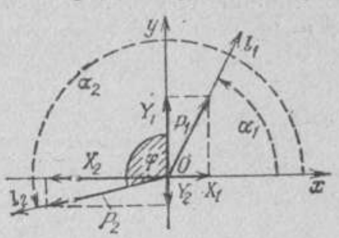


Рис. 17

а потому

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1, \\ \cos\varphi &= \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1. \end{aligned} \tag{1}$$

В предыдущем параграфе было доказано, что

$$\sin\alpha_1 = \frac{Y_1}{r_1}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{X_1}{r_1}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{Y_2}{r_2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{X_2}{r_2}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\sin\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{r_1r_2}, \quad \cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{r_1r_2}. \tag{3}$$

БИБЛИОТЕКА 25170

b. Умножая обе части каждого равенства (3) на r_1r_2, получим еще

$$r_1r_1 \sin\varphi = X_1Y_2 - X_2Y_1, \tag{4}$$

$$r_1r_2 \cos\varphi = X_1X_2 + Y_1Y_2. \tag{5}$$

Обе эти формулы имеют большое применение в механике.

Выражение $r_1r_2 \cos\varphi$ называется *скалярным произведением* двух *векторов*.

Если разделить первую из формул (3) на вторую, то получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{X_1X_2 + Y_1Y_2}. \tag{6}$$

c. Формулы этого и предыдущего параграфа выведены в предположении, что векторы выходят из начала координат. Однако они будут верны при любом расположении векторов. Действительно, если какой-либо вектор перенести параллельно самому себе, то ни длина его, ни величины проекций не изменятся, не изменятся также и углы с осями, и следовательно, никакого изменения в формулах не произойдет.

Может случиться, что векторы параллельны. Тогда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, откуда $\sin\varphi = 0$.

Формула (4) тогда превратится в

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0. \tag{7}$$

Формула (7) называется *условием параллельности двух векторов*; она нам позволяет узнать, когда векторы параллельны. Очевидно, (7) можно представить так:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}. \tag{8}$$

Однако так писать возможно лишь в том случае, если ни X_2, ни Y_2 не равны нулю, в противном случае формула (8) теряет всякий смысл, ибо на нуль делить нельзя.

Если же $X_2 = 0$, то тогда (7) превратится в

$$X_1Y_2 = 0.$$

Мы знаем, что произведение может равняться нулю только в том случае, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, либо $X_1 = 0$, либо $Y_2 = 0$. Если $Y_2 = 0$, то второй вектор превращается в точку, этот случай не представляет никакого интереса. Если же $X_1 = 0$, то формула (7) превращается в

$$0 = 0.$$

Но в этом случае нам не нужна никакая формула, чтобы узнать, параллельны ли векторы.

Действительно, если одновременно $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, то оба вектора перпендикулярны оси Ox и, следовательно, параллельны между собой.

Теперь рассмотрим перпендикулярность векторов. Тогда $\varphi = 90^\circ$ или $\varphi = 270^\circ$, откуда $\cos \varphi = 0$.

Равенство (5) принимает вид

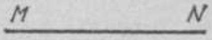
$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = 0.$$

Формула (9) является *условием перпендикулярности двух векторов.*

§ 9. Упражнения и контрольные вопросы

1a. Что такое ось?

1b. Дана прямая MN



Как отметить, что за положительное выбрано направление справа налево?

2a. Что такое вектор?

2b. Какая разница между длиной вектора и его величиной?

2c. Как обозначается длина и как обозначается величина вектора?

3a. Имеется ось MN и на ней несколько векторов (рис. 18). Какие из этих векторов имеют положительные величины и какие отрицательные?

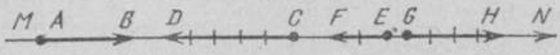


Рис. 18

3b. Какая длина и какая величина у тех векторов, которые изображены на рис. 18, если за единицу принят сантиметр?

4a. Какие величины в природе изображаются векторами?

4b. Можно ли сказать, что объем — векторная величина?

4c. Является ли работа векторной величиной?

4d. Является ли вес величиной векторной; если да, то куда эта величина направлена?

5a. При получении какого рода движения возникло понятие о направленном угле?

5b. Что называется началом угла и что концом?

5c. Какие углы считаются положительными и какие отрицательными?

6a. Определяется ли угол вполне своим началом и концом? Если нет, то почему? *Ответ*: нет.

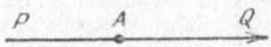
6b. Если наименьший положительный острый угол, определяемый двумя сторонами угла, равен $\pi/4$, то как записать общий вид всех других углов, определяющихся теми же сторонами?

7a. Определяются ли тригонометрические функции, если заданы стороны угла с указанием, какая сторона является началом и какая концом, но не указано направление угла? Если да, то почему?

7b. Какая тригонометрическая функция вполне определена, если заданы только стороны угла без указания, какая сторона является началом и какая концом?

8a. Что называется проекцией точки на ось?

8b. Даны ось PQ и на ней точка A



Найдите проекцию точки A на ось PQ.

9a. Что называется проекцией вектора на ось?

9b. Даны ось PQ и вектор $\overline{AB}$ (рис. 19). Какой вектор является проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось PQ?

9c. Даны ось PQ и вектор $\overline{CD}$ на ней (см. рис. 19). Какой вектор является проекцией вектора $\overline{CD}$ на ось PQ?

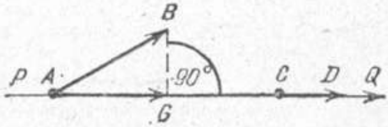


Рис. 19

10a. Даны ось PQ и несколько векторов (рис. 20). У каких векторов величины проекций положительны и у каких отрицательны?

10b. Какую величину имеет проекция вектора на ось, если сам вектор перпендикулярен этой оси?

11a. Может ли случиться, что длина проекции вектора на некоторую ось больше длины самого вектора?

11b. Может ли случиться, что длина проекции вектора на некоторую ось равна длине самого вектора?

12. Вычислите величину проекции вектора на ось x_1x, если его величина $AB = -6$ и угол между осью L_1L

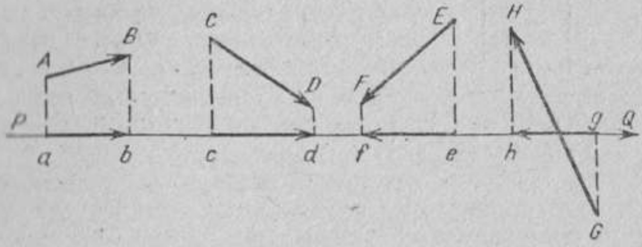


Рис. 20

вектора и осью x_1x проекций равен $4\pi/3$ (рис. 21). *Ответ*: $ab = 3$.

13a. Что называется векторной цепью?

13b. Какие бывают векторные цепи?

14a. В чем состоит теорема Шаля?

14b. Ртуть в термометре поднялась от 0° до 15°, затем поднялась на 20°, далее она спустилась на 39°, наконец поднялась еще на 17°. Можно ли сказать, что совокупность всех перемещений ртути образует векторную цепь? На какой высоте будет находиться уровень ртути после всех этих перемещений? *Ответ*: да; 13°.

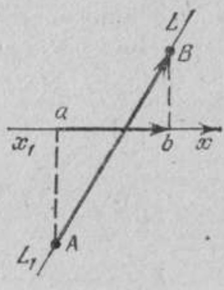


Рис. 21

14c. Паровоз маневрирует. Выходя от станции, он прошел вправо 5/2 км, затем сделал влево 4 км, потом влево 1/2 км, далее вправо 2 км, наконец вправо 1 км. Если перемещение вправо считать положительным, а влево отрицательным, то каково окончательное перемещение относительно станции? *Ответ*: 1 км.

15a. Стрелка гальванометра отклонилась от нуля на 41° против часовой стрелки, потом на 22° по часовой стрелке, затем на 13° по часовой стрелке, наконец отклонилась на 14° против часовой стрелки. Является ли совокупность всех этих поворотов цепью углов? Какой угол составляет окончательное положение стрелки с начальным? *Ответ*: да; 20°.

15b. На левую чашку весов брошен груз (рис. 22). Стрелка весов от удара отклонилась против часовой стрелки от нулевого положения на 16°, затем весы начали колебаться. После первого отклонения последовало отклонение по часовой стрелке на 1/3 от 16°, далее на 1/9 от 16° против часовой стрелки, потом на 1/27 от 16° по часовой стрелке и т. д. Теоретически говоря, эти затухающие колебания будут продолжаться вечно, но стрелка будет стремиться к некоторому предельному положению. Какой угол с начальным положением составляет это предельное положение? *Ответ*: 12°.

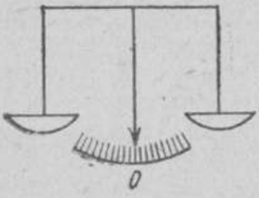


Рис. 22

16a. Что такое замыкающий вектор?

16b. Какое значение имеет для механики понятие о замыкающем векторе?

17a. Векторная цепь состоит из двух векторов, длина каждого из которых равна a. Эти векторы наклонены друг к другу под углом 60° (рис. 23). Постройте замыкающий вектор. Какова его длина? *Ответ*: a.

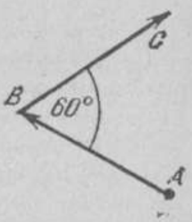


Рис. 23

17b. Векторная цепь состоит из пяти векторов, равных a, причем каждый из них наклонен к следующему под углом 120°. Цепь расположена так, как указано на рис. 24. Какова длина замыкающего вектора? *Ответ*: a.

18a. Вычислить длину проекции замыкающего вектора на ось x_1x цепи:

1. Вектор равен a и наклонен к оси под углом 45°.
2. Вектор равен $2a$ и наклонен к оси под углом 315°.
3. Вектор равен $3a$ и наклонен к оси под углом 0°.
4. Вектор равен $\sqrt{3}a$ и наклонен к оси под углом 90°.
5. Вектор равен a и наклонен к оси под углом 135°.
6. Вектор равен $2a$ и наклонен к оси под углом 225°.

Ответ: $3a$.

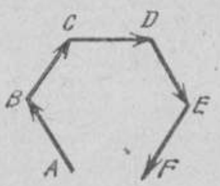


Рис. 24

Указание. Когда не упоминается ось вектора, нужно считать, что его ось имеет то же направление, что и сам вектор.

18b. Вычислить длину проекции замыкающего вектора на ось цепи:

1. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен $60°$.
2. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен $300°$.
3. Вектор равен $6a$, его наклон к оси x_1x равен $30°$.
4. Вектор равен $6a$, его наклон к оси x_1x равен $150°$.
5. Вектор равен a, его наклон к оси x_1x равен $180°$.

Ответ: 0.

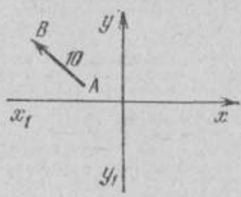


Рис. 25

18c. Объяснить, почему в предыдущей задаче получилось, что сумма проекций всех векторов цепи на ось x_1x оказалась равной нулю.

19a. Замкнутой векторной цепью называется такая цепь, где конец последнего вектора совпадает с началом первого. Чему равен замыкающий вектор такой цепи?

19b. Чему равна сумма проекций векторов замкнутой цепи на любую ось?

20a. Даны две взаимно перпендикулярные оси x_1x и y_1y, расположенные, как указано на рис. 25. Вектор имеет длину $r = 10$ и наклонен к оси x_1x под углом $135°$. Вычислить его проекции на оси. *Ответ*: $X = -5\sqrt{2}$, $Y = 5\sqrt{2}$.

20b. Длина вектора $r = 18$, а наклон его к оси x_1x равен $240°$. Вычислить его проекции на оси x_1x и y_1y. *Ответ*: $X = -9$, $Y = -9\sqrt{3}$.

21a. Вычислить длину вектора и его наклон к осям, если его проекции $X = 3$, $Y = -4$. *Ответ*: $r = 5$, $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$.

21b. Вычислить длину вектора и наклон к осям, если его проекции $X = -2$, $Y = -2$. *Ответ*: $r = 2\sqrt{2}$, $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\sin\alpha = -\sqrt{2}/2$, $\alpha = 225°$.

22a. Даны два вектора своими проекциями на две взаимно перпендикулярные оси:

проекции первого вектора $X_1 = \sqrt{3}$, $Y_1 = 1$;

проекции второго вектора $X_2 = 0$, $Y_2 = 11$.

Вычислить косинус угла между этими векторами. *Ответ*: $\cos\varphi = 1/2$, $\varphi = 60°$.

22b. То же, что и в задаче 22a, но векторы имеют проекции $X_1 = -6$, $Y_1 = -8$; $X_2 = 3$, $Y_2 = 4$. *Ответ*: $\cos\varphi = -1$, $\varphi = 180°$.

23a. Если вектор r_1 выражает силу, а вектор r_2 — ее перемещение, то доказать, что произведение этих векторов выражает работу.

23b. Вычислить работу силы, проекции которой на оси $X_1 = 5$, $Y_1 = 7$, если эта сила сделала перемещение, проекции которого $X_2 = 1$, $Y_2 = 5$. *Ответ*: работа равна 40.

24. Даны два вектора, проекции на оси у первого равны A_1, B_1 и проекции на оси у второго равны A_2, B_2. Вычислить тангенс угла между этими векторами. *Ответ*:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

25a. Будут ли векторы параллельны, если их проекции на оси

$$X_1 = -1, \quad Y_1 = 5; \qquad X_2 = 0{,}125, \quad Y_2 = -0{,}625?$$

Ответ: да.

25b. Будут ли векторы перпендикулярны, если их проекции

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B; \qquad X_2 = -B, \quad Y_2 = A?$$

Ответ: да.

26a. Дан вектор с проекциями $X_1 = 4$, $Y_1 = -2$ и дана только одна проекция второго вектора $X_2 = 8$. Найти вторую проекцию, если известно, что векторы параллельны. *Ответ*: $Y_2 = -4$.

26b. То же, если векторы перпендикулярны. *Ответ*: $Y_2 = 16$.

Глава 2

КООРДИНАТЫ

§ 1. Метод координат

Одним из самых важных вопросов математики является определение положения точки. Это можно сделать многими способами.

На плоскости положение точки удобнее всего определить относительно двух взаимно перпендикулярных осей.

Оси должны быть заранее заданы и носят название *координатных осей*; одна из них называется *осью абсцисс* или осью иксов, другая *осью ординат* или осью игреков, точка их пересечения называется *началом координат*. Начало координат обозначается обычно буквой O, ось абсцисс обозначается Ox, ось ординат Oy. Координатные оси делят всю плоскость на четыре угла, которые называются *координатными углами* и которые мы будем нумеровать в порядке, указанном на рис. 26.

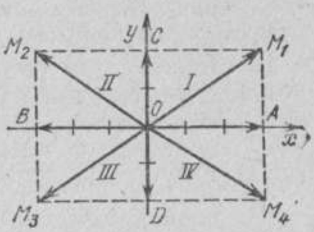


Рис. 26

Положение любой точки вполне определяется, если мы соединим начало координат с этой точкой и найдем величины проекций полученного вектора на оси. Построенный таким способом вектор имеет направление от начала координат к точке и носит название *радиус-вектора* данной точки, величина его проекции на ось абсцисс называется *абсциссой точки*, величина его проекции на ось ординат называется *ординатой точки*.

Заметим, что вообще числа, определяющие положение точки, называются *координатами* этой *точки*.

Абсцисса и ордината являются именно такими числами; поэтому их называют ***координатами точки*** на пло-

скости, причем добавляют слово *прямоугольные* *), так как координатные оси перпендикулярны.

Абсциссу мы будем обозначать буквой x, ординату — буквой y.

Мы знаем, что знак величины проекции вектора на какую-либо ось будет положителен, когда ее направление совпадает с направлением этой оси; в противном случае знак будет отрицателен.

Рассматривая чертеж, можно убедиться, что в различных координатных углах знаки координат точек будут такие:

Углы \ *Координаты*	x	y
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Условились, обозначая точку, писать рядом в скобках ее координаты, причем на первом месте пишется абсцисса, а на втором — ордината. Например, для точек M_1, M_2, M_3, M_4, лежащих в различных углах (см. рис. 26), мы будем иметь обозначения

$$M_1\,(3;\ 2),\quad M_2\,(-3;\ 2),\quad M_3\,(-3;\ -2),\quad M_4\,(3;\ -2).$$

Очевидно, если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю; если же она лежит на оси ординат, ее абсцисса равна нулю. Например, координаты точек A, B, C, D (см. рис. 26) таковы:

$$A\,(3;\ 0),\quad B\,(-3,\ 0),\quad C\,(0;\ 2),\quad D\,(0;\ -2).$$

Для начала координат имеем обозначение

$$O\,(0;\ 0).$$

Произвольную точку плоскости обозначают так:

$$M\,(x;\ y).$$

---

*) Часто вместо названия «прямоугольные координаты» употребляют название «декартовы координаты» в честь знаменитого французского математика и философа Декарта, который ввел их в математику.

Очевидно, каждой точке плоскости соответствует пара чисел — ее координат — и, обратно, каждой произвольной паре чисел соответствует точка плоскости. С помощью координат мы производим учет всех точек плоскости. Такой учет имеет огромное значение: он позволяет соединить в одно единое целое геометрию и анализ. Анализ изучает свойства чисел и взаимоотношения между ними, к нему относится, между прочим, арифметика и алгебра; геометрия изучает свойства фигур, которые все зависят от положения частей фигуры. Поэтому учет положения точек с помощью чисел даст возможность использовать в геометрии методы алгебраического анализа. При этом мы, с одной стороны, получаем возможность алгебраически решать чрезвычайно трудные геометрические задачи, с другой стороны, геометрически пояснять теоремы анализа, которые приобретают от этого необычайную наглядность.

Каждое понятие, каждая теорема могут быть высказаны как бы на двух языках — на геометрическом и аналитическом. Например, на языке анализа задать точку означает задать ее координаты, найти точку — значит найти ее координаты.

Решение геометрических задач с помощью анализа и составляет сущность метода координат, к изучению которого мы теперь и приступаем.

§ 2. Основные задачи, решаемые методом координат

а. Задача первая. *Вычисление проекций вектора по координатам его начала и конца.*

Пусть имеется вектор $\overline{M_1M_2}$, изображенный на рис. 27, причем его проекции на оси будут

$$X = m_1m_2, \qquad Y = n_1n_2.$$

Рис. 27

Согласно определению $\overline{OM}_1$ и $\overline{OM}_2$ — радиус-векторы начала и конца данного вектора, и их проекциями на оси будут координаты точек M_1 и M_2.

Ломаная линия OM_1M_2 есть цепь двух векторов $\overline{OM}_1$ и $\overline{M_1M_2}$, причем вектор $\overline{OM}_2$ замыкает цепь. Проектируя эту цепь на ось абсцисс и на ось ординат, найдем

$$\text{пр}_x\overline{OM}_1 + \text{пр}_x\overline{M_1M}_2 = \text{пр}_x\overline{OM}_2,$$
$$\text{пр}_y\overline{OM}_1 + \text{пр}_y\overline{M_1M}_2 = \text{пр}_y\overline{OM}_2.$$

Отсюда имеем $x_1 + X = x_2$ и $y_1 + Y = y_2$. Перенося x_1 и y_1 в правые части, найдем

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1.$$

Таким образом, проекция вектора на ось абсцисс равна абсциссе конца минус абсцисса начала, а проекция на ось ординат равна ординате конца минус ордината начала.

Например, если имеется вектор с началом в точке $M_1(-5; 6)$ и концом в точке $M_2(2; 8)$, то получим

$$X = 2 - (-5) = 2 + 5 = 7, \quad Y = 8 - 6 = 2.$$

b. Задача вторая. *Вычисление длины вектора по координатам его начала и конца.*

Пусть требуется вычислить длину вектора $\overline{M_1M_2}$ (рис. 27), если даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Для вычисления длины вектора по его проекциям X и Y мы уже раньше имели формулу

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Для вычисления проекций мы также получили формулы, поэтому, заменяя X через $x_2 - x_1$ и Y через $y_2 - y_1$, найдем

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Это равенство служит для вычисления длины вектора непосредственно по координатам начала и конца; его называют также *формулой расстояния между двумя точками.*

Пусть, например, нужно найти расстояние между точками $M_1(2; 6)$ и $M_2(-1; 2)$, тогда получим

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (6 - 2)^2} =$$
$$= \sqrt{(2 + 1)^2 + 4^2} = 5.$$

c. Задача третья. *Деление отрезка в данном отношении.*

Пусть дан вектор $\overline{M_1M_2}$ с началом в точке $M_1(x_1; y_1)$ и концом в точке $M_2(x_2; y_2)$ (рис. 28).

Разделить отрезок в данном отношении — это значит найти на нем такую точку M, которая делила бы его на две части M_1M и MM_2, пропорциональные заранее заданным числам. Например, если нужно разделить отрезок в отношении $2:3$, то M_1N должно быть меньше MM_2 во столько раз, во сколько 2 меньше 3.

Будем решать задачу в общем виде. Пусть требуется деление произвести в отношении $l_1 : l_2$.

Обозначим искомую точку M $(x;\ y)$. По условию должно быть

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{l_1}{l_2}. \qquad (1)$$

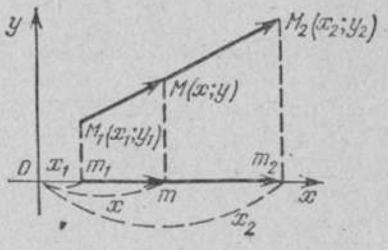


Рис. 28

Раньше было доказано, что величины проекций векторов, лежащих на одной оси, относятся, как величины самих векторов, т. е. $\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{m_1m}{mm_2}$, поэтому

$$\frac{m_1m}{mm_2}=\frac{l_1}{l_2}. \qquad (2)$$

Далее, нам известно из задачи первой, что $m_1m = x - x_1$ и $mm_2 = x_2 - x$, откуда имеем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{l_1}{l_2}. \qquad (3)$$

Выше было сказано, что задать точку значит задать ее координаты; найти точку значит найти ее координаты. Так как точки M_1 и M_2 даны, а точку M мы ищем, то в уравнении (3) известно все, кроме x. Решая это уравнение относительно x, найдем

$$xl_2 - x_1l_2 = x_2l_1 - xl_1,$$

$$xl_2 + xl_1 = x_1l_2 + x_2l_1,$$

$$x(l_2 + l_1) = x_1l_2 + x_2l_1,$$

$$x=\frac{x_1l_2+x_2l_1}{l_2+l_1}. \qquad (4)$$

Так же найдем, что

$$y=\frac{y_1l_2+y_2l_1}{l_2+l_1}. \qquad (5)$$

В частности, если точка M делит вектор на две равные части, то $l_1 = l_2$, и тогда, заменяя l_2 в формулах (4) и (5) через l_1, вынесем l_1 за скобку и сократим на него.

Получим

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{6}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Итак, абсцисса середины вектора равна полусумме абсцисс его начала и конца, а ордината середины вектора равна полусумме ординат его начала и конца.

Пример 1. Имеется вектор, у которого начало в точке M $(-1; -3)$ и конец в точке M_2 $(7; 13)$. Требуется разделить его в отношении $3:5$.

Решение:

$$x = \frac{(-1)\cdot 5 + 7\cdot 3}{5+3} = 2; \qquad y = \frac{(-3)\cdot 5 + 13\cdot 3}{5+3} = 3.$$

Пример 2. Найти середину того же вектора.
Решение:

$$x = \frac{(-1) + 7}{2} = 3; \qquad y = \frac{(-3) + 13}{2} = 5.$$

d. Задача четвертая. *Вычисление площади треугольника по координатам его вершин.*

Пусть дан треугольник $M_0M_1M_2$, изображенный на рис. 29. Любопытно, что решение этой задачи зависит от того порядка, в котором расположены возрастающие номера вершин. Для определенности разместим возрастающие номера, обходя периметр треугольника против часовой стрелки, как это и показано на рис. 29.

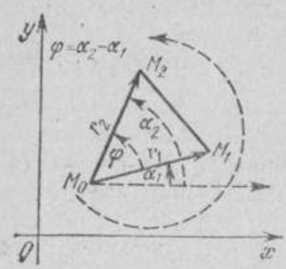


Рис. 29

Пусть координаты вершин будут

M_0 $(x_0; y_0)$, M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$.

Стороны треугольника M_0M_1 и M_0M_2 можно рассматривать как векторы, имеющие начало в точке M_0.

Обозначим длины этих векторов и проекции их на координатные оси соответственно через r_1, X_1, Y_1; r_2, X_2, Y_2, а их углы с осью абсцисс через α_1 и α_2. Если обозначить через φ угол между этими векторами, то

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{1}$$

Раньше мы доказали такую формулу:

$$r_1 r_2 \sin\varphi = X_1Y_2 - X_2Y_1. \tag{2}$$

Умножим обе части этого равенства на 1/2, тогда получим

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\varphi = \frac{1}{2}(X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \tag{3}$$

Из тригонометрии известно, что площадь S треугольника равна половине произведения длин двух его сторон, умноженного на синус угла между этими сторонами.

Рассматривая левую часть равенства (3), видим, что она равна площади треугольника, если только φ — число положительное. Очевидно, угол φ положителен, если α_2 больше α_1. Поэтому вместо левой части равенства (3) можно написать S. Если мы выберем другой порядок нумерации, размещая возрастающие номера вершин при обходе периметра по часовой стрелке, как на рис. 30, то угол α_2 будет меньше, чем угол α_1. Поэтому угол φ будет отрицателен и левая часть уравнения (3) будет равна площади треугольника S, взятой со знаком минус. Вместо левой части этого равенства мы должны будем написать $-S$.

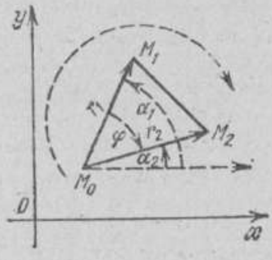


Рис. 30

Оба случая мы можем объединить в одной формуле:

$$\pm S = \frac{1}{2}(X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \tag{4}$$

Необходимо помнить, что в левой части, а следовательно, и в правой части этого равенства знак плюс появляется, если, обходя вершины в порядке возрастающих номеров, мы движемся против часовой стрелки, в противном случае появляется знак минус.

Мы знаем, что

$$X_1 = x_1 - x_0,\ Y_1 = y_1 - y_0;\ X_2 = x_2 - x_0,\ Y_2 = y_2 - y_0. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), окончательно получим

$$\pm S = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)]. \tag{6}$$

В частности, если вершина M находится в начале координат, то $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ и мы имеем

$$\pm S = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{7}$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами M_0 (—3; 2), M_1 (5; 6), M_2 (7; —10).

Решение: $\pm S = \frac{1}{2}[(5-(-3))\cdot(-10-2)-$

$-(7-(-3))\cdot(6-2)] = \frac{1}{2}[8\cdot(-12)-10\cdot 4] = -68.$

В правой части мы получили знак минус, а потому и в левой части необходимо взять минус. Следовательно, если мы будем переходить от M_0 к M_1 и от M_1 к M_2, то мы будем двигаться по часовой стрелке, в чем можно убедиться непосредственно, построив эти точки. *Ответ*: $S = 68$.

§ 3. Упражнения

1. Построить на миллиметровой бумаге точки с координатами:

M_1 (1; 2), M_2 (0; 6), M_3 (—6; 0), M_4 (—1; —1,5),
M_5 (4; 0), M_6 (—7; 0), M_7 (—3; 9), M_8 (2; —8).

2a. Вычислить проекции вектора, если координаты его начала M_1 (—1; —2), а координаты конца M_2 (6; 7). *Ответ*: $X = 7$, $Y = 9$.

2b. Вычислить проекции вектора, если координаты его начала M_1 (—6; —7), а конца M_2 (0; 1). *Ответ*: $X = 6$, $Y = 8$.

3a. Заданы проекции вектора $X = 3$, $Y = 2$ и координаты его начала M (1; —1). Вычислить координаты конца. *Ответ*: M_2 (4; 1).

3b. Заданы проекции вектора: $X = -7$, $Y = -2$ и координаты конца M_2 (2; —3). Вычислить координаты начала. *Ответ*: M_1 (9; —1).

4a. Даны вершины треугольника (—22; 12), (34; 45), (—2; —3). Вычислить периметр. *Ответ*: 150.

4b. Вычислить периметр треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (42; 56), M_3 (—21; 72). *Ответ*: 210.

4c. То же, если вершины имеют координаты M_1 (2; 3), M_2 (65; 87), M_3 (—12; 51). *Ответ*: 240.

4d. То же, если вершины имеют координаты M_1 (—3; —5), M_2 (69; 25), M_3 (13; 58). *Ответ*: 208.

5a. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек M_1 (2; 8), M_2 (7; 7). *Ответ*: (3; 0).

5b. На оси ординат найти такую точку, чтобы ее расстояние до точки M_1 (2; 12) было в пять раз больше, чем расстояние до точки M_2 (1; 3). *Ответ*: две точки (0; 1), (0; 17/4).

6a. Найти в первом координатном угле точку такую, чтобы ее расстояния от осей координат и от точки (8; 9) были равны между собой. *Ответ*: две точки (5; 5), (29; 29).

6b. Найти точку, равноотстоящую от трех точек (—7; 4), (1; —8), (11; 16). *Ответ*: (6; 4).

7a. На оси абсцисс найти точку M так, чтобы угол M_1MM_2, где M_1 (1; 2), M_2 (6; 3), был прямой. *Ответ*: (4; 0), (3; 0).

7b. Найти центр C и радиус r круга, описанного вокруг треугольника с вершинами M_1 (3; 9), M_2 (4; 2), M_3 (10; 10). *Ответ*: C (7; 6), $r = 5$.

8a. По координатам вершин треугольника (0; 2), (—4; 6), (8; 0) найти координаты середин его сторон. *Ответ*: (—2; 4), (4; 1), (2; 3).

8b. По координатам середин сторон треугольника (4; 3), (5; 4), (7; 3) найти координаты его вершин. *Ответ*: (2; 4), (6; 2), (8; 4).

8c. По координатам середин сторон треугольника (4; 2), (3; 3), (2; 1) вычислить координаты его вершин. *Ответ*: (1; 2), (3; 0), (5; 4).

9a. Найти точку, делящую отрезок M_1M_2, где M_1 (—1; —2), M_2 (9; 3), в отношении 3 : 2. *Ответ*: (5; 1).

9b. Найти точку, делящую отрезок M_1M_2, где M_1 (1; 1) и M_2 (10; 7), в отношении 1 : 2. *Ответ*: (4; 3).

10a. Из механики известно, что центр масс однородного треугольника находится в точке пересечения медиан и делит каждую медиану в отношении 2 : 1 в направлении от вершины к основанию. Зная это, показать, что координаты центра масс треугольника с вершинами M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, M_3 $(x_3; y_3)$ суть

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

10b. Найти координаты центра масс треугольника с вершинами M_1 (2; 3), M_2 (1; 4), M_3 (3; —4). *Ответ*: (2; 1).

10c. Найти координаты середин сторон треугольника и его центр масс, если вершины треугольника суть M_1 (3; 2), M_2 (7; 3), M_3 (8; 4). *Ответ*: (15/2; 7/2), (11/2; 3), (5; 5/2); центр масс в точке (6; 3).

11. Считая известным, что центр масс двух материальных точек с массами m_1 и m_2 находится на отрезке, их соединяющем, и делит этот отрезок на части, обратно

пропорциональные массам, доказать, что центр масс n материальных точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ имеет координаты

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

12. Даны координаты (3; 1) и (9; 9) концов диаметра некоторого круга. Найти центр C и радиус r. *Ответ*: C (6; 5), $r = 5$.

13a. Точка M_1 (1; 3) есть начало отрезка, точка M (12; —14) — его середина. Найти конец M_2 этого отрезка. *Ответ*: M_2 (23; —31).

13b. Задана точка M_1 (0; 1). Найти координаты точки M_2, если известно, что точка M (4; 7) делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 1. *Ответ*: M_2 (6; 10).

13c. По трем вершинам параллелограмма M_1 (0; 1), M_2 (2; 2), M_3 (3; 4) найти четвертую, если известно, что она противоположна M_2. *Ответ*: M_4 (1; 3).

14a. Дан центр масс (2; 2) треугольника и две его вершины (2; 3) и (3; 1). Найти третью вершину. *Ответ*: (1; 2).

14b. Точка (4; 5) есть середина отрезка, а точка (3; 3) делит его в отношении 1 : 3. Найти координаты концов. *Ответ*: (2; 1) и (6; 9).

15a. Вычислить площадь S треугольника с вершинами (—19; 17), (37; 50), (1; 2). *Ответ*: $S = 750$.

15b. Найти площадь треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (1; 4), M_3 (3; 2). *Ответ*: 5.

16. Узнать, лежат ли точки (1; —1), (3; 2), (7; 8) на одной прямой, или нет. *Ответ*: лежат.

17. Дан треугольник с вершинами M_1 (2; 1), M_2 (6; 4), M_3 (3; 3). Вычислить высоту, опущенную из вершины M_3 на сторону M_1M_2. *Ответ*: высота равна 1.

18a. Внутри треугольника с вершинами (2; 1), (4; 2), (3; 3) найти точку такую, чтобы прямые, соединяющие ее с вершинами, делили площадь на три равные части. Решите задачу, пользуясь полученной формулой для площади. Проверить решение, замечая, что искомая точка есть центр масс.

18b. Внутри треугольника с вершинами M_1 (0; 0), M_2 (4; 1), M_3 (1; 3) найти такую точку M, чтобы имело место соотношение

(пл. $\triangle M_1M_2M$) : (пл. $\triangle M_2M_3M$) : (пл. $\triangle M_3M_1M$) = = 2 : 4 : 5.

Ответ: M (2; 1).

19a. В треугольнике с вершинами (0; 0), (63; 84), (−14; 48) найти радиус вписанного круга. *Ответ*: $r = 17{,}5$.

19b. В треугольнике с вершинами (0; 0), (21; 0), (6; 8) найти координаты центра вписанного круга. *Ответ*: (7; 3,5).

19c. Дан треугольник с вершинами (0; 0), (3; 0), (3; 4). Найти центр C и радиус r вписанного круга. *Ответ*: C (2; 1), $r = 1$.

Глава 3

ФУНКЦИИ

§ 1. Переменные и постоянные

a. Все величины можно подразделить на переменные и постоянные.

Примером постоянной величины может служить, например, сумма углов любого треугольника; она всегда, как известно, равна 180°. Еще пример: в любой окружности отношение ее длины к длине диаметра есть величина постоянная.

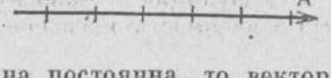
Примером переменной величины может служить время, скорость свободно падающего тела, высота растущего дерева и т. д.

b. Постоянная величина будет задана, если дано число, ее измеряющее. Для того чтобы задать переменную величину, нужно указать, как она изменяется.

c. Обычно величины, как известно, обозначаются буквами. Всегда необходимо указывать, какую величину — переменную или постоянную — обозначает та или иная буква. Чаще всего, хотя и не всегда, постоянные величины обозначаются первыми буквами латинского алфавита, а переменные величины последними.

d. Всякую величину можно изобразить графически на оси вектором, отсчитываемым от какой-либо неподвижной данной точки.

Например, если OP — единица длины, то число 11/2 изобразится вектором $\overline{OA}$:



Если величина постоянна, то вектор, ее изображающий, не будет изменяться; если же величина переменна, то и вектор, ее изображающий, будет также изменять свою длину.

§ 2. Понятие о функциональной зависимости

a. При рассмотрении количественной стороны различных процессов мы почти всегда наблюдаем, что переменные величины зависят друг от друга; например, путь, проходимый свободно падающим в пустоте телом, зависит только от времени, давление в паровом котле зависит только от температуры пара.

Глубина океана в одном пункте постоянна, но в различных пунктах различна, она зависит только от двух переменных — от географической долготы и географической широты места.

Высота растущего дерева зависит от многих переменных — от солнечного освещения, от влажности, от количества питательных веществ в почве и т. д.

Мы видим, что некоторые переменные изменяются независимо, они и называются *независимыми переменными* или *аргументами*, другие же от них зависят, их называют *функциями*.

Сама зависимость называется *функциональной*. Между прочим, функциональная зависимость представляет собой одно из самых важных понятий математики.

b. Следует всегда различать, от какого числа независимых переменных зависит функция. Проще всего поддаются изучению функции одной переменной, ими мы будем заниматься в первую очередь. Изучение функций многих переменных сложнее, но так или иначе сводится к изучению функций одной переменной.

c. Если мы желаем записать математически, что переменная y зависит от x, то будем употреблять такое обозначение:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Эта запись читается так:

«игрек есть функция от икс». (2)

Не следует думать, что буква f умножается на x, она является лишь сокращением слова «функция», а вся запись является сокращенной фразой (2).

Точно так же, если функция U зависит от двух аргументов x и y, то эта зависимость обозначается следующим образом:

$$U = f(x, y). \tag{3}$$

Здесь буквы f, x и y также не являются сомножителями.

Совершенно ясно, как обозначается функция трех, четырех и большего числа аргументов.

Вместо буквы f употребляют и другие буквы, чаще всего F, φ, ψ, Φ.

d. Записи типа (1) и (3) являются самыми общими обозначениями функций, так как под ними можно понимать какие угодно функции, а потому, имея в руках только эти обозначения, мы ничего не сможем узнать о свойствах этих функций.

Для того чтобы иметь возможность изучать функцию, нужно ее задать.

e. Имеется много способов задать функцию, но все они сводятся к трем основным типам:

1) функцию можно задать таблицей ее числовых значений, соответствующих числовым значениям ее аргумента;

2) функцию можно задать графически;

3) функцию можно задать математической формулой.

f. Приведем примеры. Известно, что при вращении махового колеса возникают напряжения, которые стремятся разорвать его обод. Если обод колеса сделан из однородного материала, то напряжения зависят только от скорости вращения. Обозначая скорость через v, а напряжение в ободе через p, мы можем записать, что

$$p = f(v). \tag{4}$$

Теория сопротивления материалов дает такую таблицу для значений функции (4), если обод сделан из литой стали:

v	25	50	100	150	200	400
p	500	2000	8000	18000	32000	128000

Здесь v измеряется в метрах в секунду, p — в ньютонах на квадратный сантиметр.

Большим достоинством табличного способа задания функции является то, что числа таблицы непосредственно могут быть использованы для различных вычислений.

Недостатком является то, что всякая таблица дается не для всех значений аргумента, а через некоторые интервалы, так что, если каких-либо значений функции в таблице нет, то нужно брать более подробную таблицу; если же последней нет, то приходится подбирать нужное число более или менее приблизительно, сообразуясь с характером изменения чисел таблицы.

g. Большим недостатком является также и то, что если таблица содержит много чисел, то характер изменения функции уловить трудно. Наконец, третьим недостатком является то, что изучать свойства функции, заданной таблицей, трудно; кроме того, полученные свойства будут неточными.

h. От первых двух недостатков свободен графический способ задания функции.

Чтобы пояснить графический способ, рассмотрим такой пример.

Если какой-либо материал подвергнуть растяжению, то сила, необходимая для растягивания, будет зависеть от того, какое растяжение необходимо сделать, т. е. сила есть функция от удлинения. Если удлинение в процентах обозначить через λ, а растягивающую силу, которая обычно измеряется в ньютонах на квадратный сантиметр, обозначить через p, то $p = f(\lambda)$.

Для различных материалов эта зависимость будет различной. Возьмем координатные оси и будем считать λ за абсциссу, а p за ординату, тогда для каждой пары их значений получим точку на плоскости.

Все эти точки расположатся на некоторой кривой, которая имеет различный вид для различных материалов. Существуют приборы, которые такие кривые чертит автоматически.

Для мягкой стали мы получим следующую кривую (рис. 31):

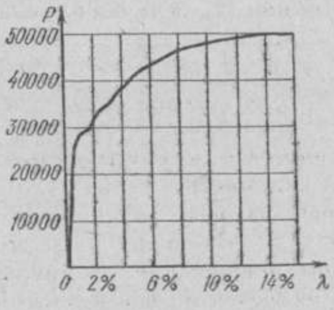


Рис. 31

k. Как мы видим, действительно графический способ нагляден и дает значения функции для всех значений аргумента. Но третий недостаток и здесь имеет место. Изучать свойства функции, заданной графически, все-таки затруднительно.

l. Теперь покажем способ задания функции формулой. Возьмем такой пример. Площадь круга очевидно зависит от радиуса. Если радиус обозначить через x, а площадь через y, то, как известно из геометрии, $y = \pi x^2$, где π — отношение длины окружности к длине диаметра. Мы видим, что зависимость здесь задается математической формулой, поэтому третий способ называется математическим способом. Еще пример: длина гипотенузы прямоугольного треугольника зависит от длин обоих катетов. Если длину гипотенузы обозначить через L, а длины катетов через x и y, то по теореме Пифагора будем иметь $L = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как оба катета мы можем изменять независимо друг от друга, то мы имеем здесь пример функции двух аргументов, заданной математически.

Можно привести еще много примеров функций, заданных математически, из области различных наук.

m. Математический способ обладает огромным преимуществом перед другими способами задания функций, а именно: к изучению функций, заданных математически, можно привлечь математический анализ.

Помимо того, если необходимо, всегда можно математический способ превратить в табличный. Действительно, мы вправе задать аргументам желательные нам числовые значения и по формуле вычислить сколько угодно значений функции. Таким образом, одна формула заменяет всю таблицу.

n. Математический способ имеет только один недостаток, а именно, формула не дает наглядного представления об изменении функции. Однако этот недостаток мы всегда можем восполнить, так как всегда математический способ задания можно превратить в графический. Это делается так.

o. Если мы имеем функцию одной переменной, то составляем таблицу и каждую пару значений аргумента (x) и функции (y) принимаем за координаты, после этого строим возможно большее число точек. Все полученные точки расположатся на некоторой кривой линии, которая и будет графиком функции. Если мы имеем функцию двух или более аргументов, то и ее можно изобразить графически. Но это уже значительно сложнее, а потому этим вопросом мы займемся несколько позднее.

p. Все сказанное свидетельствует о том, что математический способ задания функций является наиболее выгодным.

Поэтому всегда стремятся, если функция задана таблицей или графиком, выразить ее формулой. Эта задача обычно очень трудная, но чрезвычайно важная для естествознания и технических наук. Без преувеличения можно сказать, что все проблемы механики, естествознания и прикладных наук сводятся к установлению и изучению функциональных зависимостей между теми переменными величинами, с которыми эти дисциплины имеют дело. Если удается эти функциональные зависимости выразить формулами, то наука приобретает надежный рычаг для применения всей огромной мощи математического анализа и далеко продвигается в своем развитии.

С другой стороны, математический анализ, получая эту прекрасную пищу, сам растет и совершенствуется.

q. Ввиду того, что перевод на язык формул функциональных зависимостей не является непосредственной задачей математики, мы будем предполагать, что функции уже выражены формулами. Таким образом, в дальнейшем мы будем заниматься только функциями, заданными математически.

§ 3. Классификация математических функций

a. Если сказано, что

$$y = f(x) \tag{1}$$

есть функция математическая, то правая часть равенства (1) представляет собой формулу. Здесь буква f обозначает те действия, которые нужно совершить над аргументом для того, чтобы вычислить функцию. По характеру этих действий мы и будем классифицировать функции.

b. Если в состав формулы входят только алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня, совершаемые над аргументом в ограниченном количестве, то функция называется *алгебраической*.

Все остальные функции называются *трансцендентными*.

c. Например, функция

$$y = \frac{x^2 - \sqrt{x} + 3}{(x-2)^2}$$

будет алгебраической.

Напротив, функция

$$y = \sin x$$

трансцендентная.

d. Алгебраические функции разделяются на рацио-нальные и иррациональные. *Рациональной* называется такая функция, в которой ни разу над аргументом не совершается извлечение корня или возведение в дробную степень. В противном случае функция называется *иррациональной.*

Например, функции

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4, \quad y = \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 + 8}$$

суть функции рациональные. Наоборот, функция, приведенная в пункте c, иррациональная.

e. Иррациональные функции не подразделяются, а рациональные подразделяются на целые и дробные.

Целыми функциями называются такие, где аргумент ни разу не встречается в знаменателе, в противном случае мы имеем *дробную функцию.*

Например, функции

$$y = x^3 - x^2 + x - 1, \quad y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{7}x + 9$$

целые. Напротив, функции, приведенные в пункте d, дробные.

f. В свою очередь целые функции еще подразделяются на порядки, причем *порядком* называется наибольшая степень, в которую возводится аргумент. Общий вид функции первого порядка:

$$y = ax + b,$$

где a и b — постоянные числа, $a \neq 0$. Общий вид функции второго порядка:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

и т. д.

Наконец, общий вид функции n-го порядка:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \; a_0 \neq 0.$$

g. Дробные функции далее никак не подразделяются. Общим видом любой дробной функции будет частное от деления двух целых функций:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

h. Имеется очень большое число типов трансцендентных функций. Мы будем здесь говорить только о тех, с которыми мы встречаемся в элементарной математике. К числу их относятся *тригонометрические функции*; затем *логарифмические функции*

$$y = \log_a x;$$

далее, функции типа

$$y = a^x,$$

называемые *показательными*; наконец, так называемые *обратные тригонометрические функции*, с которыми мы познакомимся дальше.

Эти перечисленные функции называются *элементарными трансцендентными функциями*.

k. Теперь проведем классификацию несколько по другой линии. Мы еще будем подразделять функции на явные и неявные. Все функции, о которых мы говорили выше, называются *явными*. Они характеризуются тем, что зависимая переменная прямо дается формулой, содержащей аргумент.

Но может оказаться, что функция задается уравнением, где в одной части равенства находятся и зависимая переменная, и независимая. Например, пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Здесь, очевидно, y зависит от x, но непосредственно выражением, содержащим x, не задается.

Такая функция называется *неявной*. Ее можно сделать явной, если разрешить уравнение относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

если обозначить $-A/B = a$ и $-C/B = b$, то мы получим

$$y = ax + b.$$

Заметим попутно, что уравнение вида (1) всегда неявно выражает функцию первого порядка.

l. Общий вид неявной функции одной переменной будем записывать так:

$$f(x, y) = 0.$$

m. Возьмем еще пример. Пусть дана неявная функция y от x, определяемая уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r \text{ постоянное}). \qquad (1)$$

Сделаем ее явной; для этого решим уравнение относительно y:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}. \quad (2)$$

Мы здесь видим, что одному значению x отвечает не одно значение y, а два, так как мы можем брать перед корнем как знак плюс, так и знак минус. Такая функция называется двузначной. Могут быть функции трехзначные, четырехзначные и т. д., вообще *многозначные*.

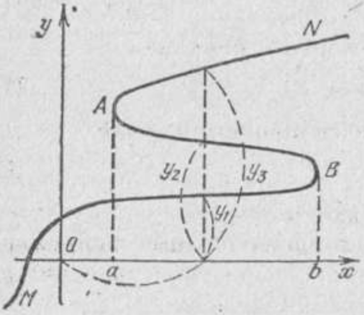


Рис. 32

Чтобы лучше понять последние случаи, покажем на чертеже, как может случиться, что функция будет, например, трехзначной.

Пусть функция задана графически кривой линией $MBAN$.

На рис. 32 мы видим, что каждому значению x в интервале от a до b соответствуют три значения y.

п. Заметим, что изучение многозначных функций сводится к изучению однозначных. Действительно, можно, например, отдельно рассмотреть выражение (2) пункта m, взяв в нем перед корнем знак плюс, а потом отдельно взять знак минус. Следовательно, вместо одной двузначной функции мы будем изучать две однозначные. Поэтому в дальнейшем мы исключительно будем заниматься только изучением однозначных функций.

о. Сделаем еще одно замечание по отношению к неявным функциям.

Было бы ошибкой думать, что мы всегда можем неявную функцию превратить в явную, практически это сделать иногда нельзя.

Например, если мы пожелаем решить уравнение

$$y + xa^{x+y} = 0$$

относительно y, то этого сделать совершенно невозможно. Следовательно, y здесь не может быть сделан явной функцией x.

р. Все, что было сказано в этом параграфе относительно классификации функций одной переменной, можно без всяких оговорок повторить и для функций многих переменных.

§ 4. Обзор и графическое изображение простейших функций одного аргумента

а. Мы начнем с рассмотрения наиболее простых функций.

Пусть мы имеем функцию первого порядка

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Сначала разберем еще более простой случай

$$y = kx, \tag{2}$$

т. е. тот частный случай, когда $b = 0$.

Составим таблицу, давая x произвольные, например, целые значения, и вычисляя соответствующие значения y.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	$-3k$	$-2k$	$-k$	0	k	$2k$	$3k$	...

Примем теперь пары значений x и y за координаты точек и будем наносить на бумагу эти точки. Предположим сначала, что число k положительно и что оно изображается отрезком RT, а единица длины — отрезком OR; тогда, соединяя все точки, получим прямую AB, изображенную на рис. 33.

В таблице даны семь пар значений x и y, эти пары нам дали семь точек.

Но, очевидно, и любая пара значений x и y, полученная из уравнения (2), дает точку, лежащую на той же прямой. Обратно, любая точка $M (x; y)$ этой прямой имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (2). Это следует непосредственно из подобия треугольников ORT и ON_1M_1.

Действительно,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{PT}{OP} = \frac{k}{1} = k, \tag{3}$$

т. е.

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \tag{4}$$

откуда

$$y_1 = kx_1. \tag{5}$$

Из равенства (4) мы усматриваем, что

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

Если k — число отрицательное, то для положительных значений x мы получим отрицательные значения y и обратно. Теперь мы получим прямую GD, которая проходит

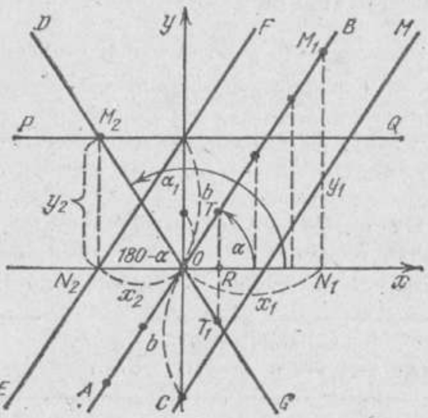


Рис. 33

также через начало координат, но из второго угла в четвертый, а следовательно, наклонена к оси абсцисс под тупым углом α_1.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{y_2}{-x_2} = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_1) = -\operatorname{tg}\alpha_1,$$

откуда

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Таким образом, и здесь

$$k = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Итак, графиком функции (2) всегда будет прямая линия, проходящая через начало координат и составляющая с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен коэффициенту при x. Этот коэффициент определяет собой наклон прямой к оси абсцисс. Если он положителен, то прямая проходит из первого координатного угла в третий, если же он отрицателен, то прямая проходит из второго угла в четвертый. Поэтому число k называется *угловым коэффициентом прямой*.

b. Возьмем теперь прямую AB

$$y = kx \tag{2}$$

и поднимем ее вверх на расстояние b так, чтобы она заняла положение EF (см. рис. 33). Тогда все ординаты прямой AB увеличатся на одно и то же положительное число b, и мы получим уравнение

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Если число b будет отрицательно, то мы получим прямую CM, сдвинутую вниз. Следовательно, уравнение (1) выражает прямую, не проходящую через начало координат, но отсекающую на оси ординат отрезок, равный b, и имеющую угловой коэффициент k. При различных b и k мы можем получить все прямые плоскости (кроме прямых, параллельных оси Oy).

Итак, графиком функции первого порядка всегда является прямая, поэтому уравнение (1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

c. В частности, если $k = 0$, то получим прямую PQ (см. рис. 33), параллельную оси абсцисс, отстоящую от нее на расстояние, равное $| b |$. Уравнение ее примет вид

$$y = b,$$

т. е. функция первого порядка выродилась в постоянное число.

В дальнейшем постоянное число мы будем рассматривать как такую переменную величину, у которой все числовые значения равны. Поэтому можно сказать, что график постоянного числа есть прямая, параллельная оси абсцисс, отстоящая от нее на расстояние, равное этому постоянному числу, взятому по абсолютной величине.

d. Функции первого порядка очень часто встречаются в науке. Нередко зависимость, выраженную функцией первого порядка, называют *линейным законом*. Приведем конкретный пример: мы знаем, что если тело движется равномерно ускоренно, то, обозначая через v_0 начальную скорость, через g ускорение, через t время и через v скорость, мы будем иметь формулу:

$$v = v_0 + gt.$$

Таким образом, изменение скорости в равномерно ускоренном движении подчиняется линейному закону.

e. Частным случаем линейного закона будет зависимость

$$y = kx \quad (\text{при } b = 0). \tag{2}$$

Мы замечаем, что если x увеличить в несколько раз, то численная величина y также увеличится во столько же раз; если x уменьшится в некоторое число раз, то численная величина y уменьшится во столько же раз.

Такая функциональная зависимость называется *прямой пропорциональностью*. Общим математическим выражением прямой пропорциональности является уравнение (2), причем число k носит название *коэффициента пропорциональности.*

Если начальная скорость $v_0 = 0$, то зависимость скорости или времени в равномерно ускоренном движении выразится так:

$$v = gt.$$

Коэффициентом пропорциональности здесь является постоянное ускорение g.

f. Теперь займемся графическим изображением функций второго порядка.

Мы рассмотрим лишь частный случай

$$y = ax^2. \tag{6}$$

Пусть для определенности сначала $a = 1/4$, т. е.

$$y = \frac{1}{4} x^2.$$

Составляем таблицу

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	...

Построим по этой таблице точки. По нанесенным точкам схематически обрисовывается контур кривой A, изображенной на рис. 34.

Полученная кривая называется *параболой* второго порядка, точка O называется ее *вершиной.* Мы здесь пользовались так называемым способом построения кривой по точкам. Это наиболее употребительный и простой способ вычерчивания графиков функций. Заметим, что чем подробнее мы составим таблицу, т. е. чем меньше промежутки будем брать для последовательных значений аргумента, тем точнее мы построим кривую.

Пусть теперь $a = 1/2$, т. е.

$$y = \frac{1}{2} x^2.$$

Мы получим кривую B с более крутым подъемом. Для функции

$$y = \frac{1}{8} x^2,$$

т. е. для $a = 1/8$, получим более пологую кривую C. Далее, для отрицательных значений коэффициента, на-

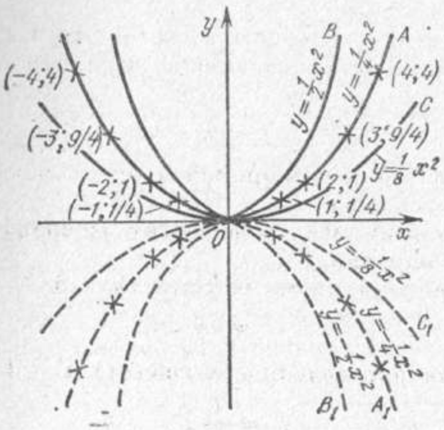


Рис. 34

пример, для $a = -1/4$, $a = -1/2$, $a = -1/8$, т. е. для функций

$$y = -\frac{1}{4} x^2, \quad y = -\frac{1}{2} x^2, \quad y = -\frac{1}{8} x^2,$$

мы получим кривые, изображенные пунктиром. Если бы ось абсцисс обладала свойством зеркала, то кривые A_1, B_1, C_1 были бы зеркальными отражениями кривых A, B, C. Заметим, что для всех значений коэффициента a мы получим аналогичные графики. Все кривые типа (6) называются также параболами второго порядка, все они имеют вершину в начале координат, все они будут симметричны относительно оси ординат. Очевидно, форма параболы зависит только от числового значения коэффициента a.

Если мы пожелаем вычерчивать графики функции второго порядка общего типа

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{7}$$

то получим также параболы, но вершины их не будут находиться в начале координат; это будет строго доказано позднее.

g. Функции второго порядка в науке встречаются часто. Когда мы говорим о табличном задании функций, то приводим пример зависимости напряжений в ободе махового колеса от скорости его вращения. Эта зависимость может быть очень точно выражена формулой

$$p = \rho v^2,$$

где ρ — плотность материала колеса.

Еще пример: при равномерно ускоренном движении путь зависит от времени, и эта зависимость выражается формулой

$$S = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + S_0,$$

где g — ускорение силы тяжести, v_0 — начальная скорость, S_0 — начальный путь, S — путь, пройденный за время t.

h. Теперь займемся дробными функциями. Для простоты мы рассмотрим только один частный, но очень важный случай

$$y = \frac{k}{x}. \tag{8}$$

При построении графиков дробных функций мы нередко встречаемся с одной характерной особенностью, которая отлично видна даже на этом простом примере, а именно, при составлении таблицы для данной функции мы аргументу можем задавать любые значения, за исключением $x = 0$, так как на нуль делить нельзя. Таким образом, при $x = 0$ наша функция не существует. Последнее обстоятельство вынуждает нас осмотреть окрестности нуля. Для этого мы будем задавать аргументу численно уменьшающиеся положительные и отрицательные значения, осторожно подходя к нулю справа и слева, например, так, как это показано в нижеследующей таблице, где для определенности мы взяли $k = 3$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
y	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	-6	-9	-12	$\cdots$	12	9	6	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$

Построим теперь график нашей функции (рис. 35). Мы изобразили график функции сплошной линией. При рассмотрении его нетрудно заметить, что кривая состоит из двух ветвей, совершенно отделенных друг от друга координатными осями, так что одна ветвь расположена в первом координатном углу, а другая — в третьем. Если мы проследим ход кривой, безгранично удаляясь от начала координат в обе стороны по горизонтальному и по вертикальному направлениям, то убедимся, что каждая ветвь неограниченно приближается к координатным осям, но никогда их не достигает. Заметим, что, вообще, если мы встречаемся с какой-либо кривой, которая неограниченно стремится к некоторой прямой, то такая прямая называется *асимптотой* кривой. Таким образом, изображенная на чертеже кривая имеет две асимптоты, одной является ось абсцисс, другой ось ординат.

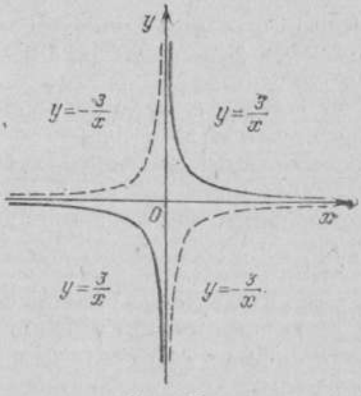


Рис. 35

Если мы возьмем $k = -3$, то получим кривую, изображенную на чертеже пунктиром; она является зеркальным отражением первой кривой относительно оси абсцисс, а также и относительно оси ординат.

Для других значений k мы получим аналогичные кривые. Все кривые типа (1) называются *равнобочными гиперболами*, все они имеют своими асимптотами координатные оси, все они состоят из двух отдельных ветвей, причем при положительных k ветви будут расположены в первом и третьем координатных углах, а при отрицательных k ветви будут расположены во втором и четвертом координатных углах.

k. Уравнение (1) показывает, что если величину аргумента x увеличить в несколько раз, то численная величина функции y уменьшается во столько же раз, и обратно: при уменьшении аргумента в несколько раз численное значение функции во столько же раз увеличивается.

Такая зависимость называется *обратной пропорциональностью*, и уравнение (8) выражает математически в общем виде закон обратной пропорциональности.

Приведем конкретный пример на закон обратной пропорциональности.

Из физики известно, что при постоянных массе газа и температуре произведение величины объема газа на величину его давления есть величина постоянная.

Если обозначить объем через v, а давление через p, то можем написать $vp = c$, или же $v = c/p$, где c — постоянная величина.

§ 5. Обратные функции

а. Возьмем какую-либо функцию

$$y = f(x) \tag{1}$$

и вычертим ее график (на рис. 36 он изображен кривой AB).

Далее построим биссектрису CD первого и третьего координатных углов и повернем весь чертеж на 180° так, чтобы прямая CD была осью вращения. Тогда наша кривая AB перейдет в новое положение, и мы получим вторую кривую A_1B_1. Обе кривые, первая и вторая, будут очевидно взаимно симметричны или, выражаясь иначе, зеркальны относительно биссектрисы CD.

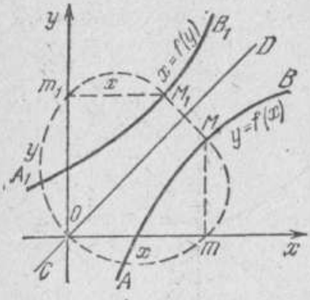


Рис. 36

Если мы проследим за тем, что произошло с координатами точек первой кривой, то увидим, что при переходе на новое место абсциссы, не меняя своей величины, превратились в ординаты точек второй кривой, а ординаты превратились в абсциссы.

Например, абсцисса m точки M переходит в ординату m_1 точки M_1, а ордината переходит в абсциссу.

Таким образом, уравнение второй кривой будет

$$x = f(y). \tag{2}$$

Если решить уравнение (2) относительно y, то получим новую функцию, которую обозначим, например, так:

$$y = \varphi(x). \tag{3}$$

Очевидно, зависимость, задаваемая уравнениями (1) и (3), одна и та же; разница только в том, что зависимая переменная функции (1) является независимой для функции (3) и обозначается уже не через y, а через x. Обратно, независимая переменная функции (1) является зависимой для функции (3) и обозначается уже не через x, а через y.

b. Пусть имеется функция

$$y = \frac{1}{4} x^2. \tag{4}$$

Обратную функцию получаем, заменяя y на x, а x на y и решая полученное уравнение относительно y:

$$x = \frac{1}{4} y^2, \quad y = \pm 2 \sqrt{x}, \tag{5}$$

так что для степенной функции обратная функция является иррациональной.

На рис. 37 функция (4) изображена сплошной линией, тогда как функция (5) пунктиром. Полученные кривые, как мы видим, являются параболами, расположенными симметрично относительно биссектрисы CD.

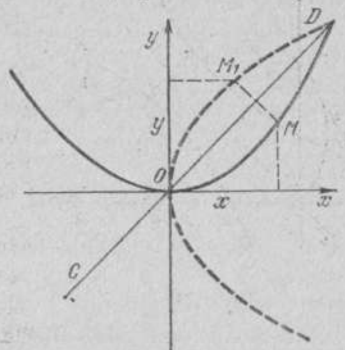


Рис. 37

c. В качестве второго примера мы рассмотрим показательную функцию

$$y = a^x. \tag{6}$$

Заменяя y на x и x на y, имеем

$$x = a^y.$$

Решить это уравнение относительно y можно только с помощью логарифмической функции

$$y = \log_a x. \tag{7}$$

Таким образом, логарифмическая функция обратна показательной.

Согласно тому, что было сказано выше, нам достаточно построить график только для показательной функции, так как график для логарифмической функции будет лишь его зеркальным отражением относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Для простоты пусть $a = 2$; составляя таблицу и вычерчивая графики, получим кривые, изображенные на рис. 38. Нетрудно видеть, что кривая, изображающая функцию

$y = 2^x$, имеет своей асимптотой ось абсцисс; например, кривая, изображающая функцию $y = \log_2 x$, имеет асимптотой ось ординат.

Учащемуся самому рекомендуется вычертить графики функций (6) и (7) при других значениях основания a.

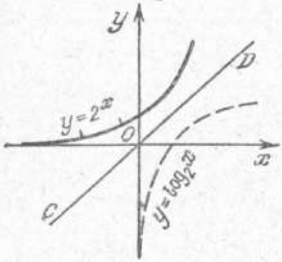


Рис. 38

d. Теперь рассмотрим функцию

$$y = \sin x. \quad (8)$$

Сделаем теперь зависимую переменную независимой, тогда независимая переменная станет зависимой.

В соответствии с этим переменим названия: y заменим на x, а x на y. Тогда получим уравнение

$$x = \sin y. \quad (9)$$

Это уравнение нам дает функцию, обратную для синуса, но дает неявно.

Чтобы выразить y через x явно, нужно решить уравнение (9) относительно y. Однако этого сделать нельзя, имея в руках только те обозначения, которые нам дает алгебра и тригонометрия. Нужно вводить новый символ. Прежде всего заметим, что уравнение (2) можно прочитать так:

«y есть такая дуга, синус которой равен x». (10)

Условимся эту фразу записывать сокращенно так:

$$y = \arcsin x. \quad (11)$$

Это и есть необходимое нам обозначение для функции, обратной синусу; последняя функция называется *арксинусом*.

Нужно всегда помнить, что теперь x — это синус и, следовательно, не может быть численно больше единицы, а y — это дуга; кроме того, нельзя забывать, что знак

arcsin

есть просто сокращенная фраза (10) и, следовательно, отрывать arc от sin никогда нельзя.

Вычертим теперь график синуса, попутно мы получим и график арксинуса. Таблицу мы здесь составлять не станем, а воспользуемся геометрическим приемом, который хорошо виден на рис. 39.

Мы строим с центром где-либо на оси абсцисс окружность радиуса, равного единице. Далее, разделяя окружность на равные части, на оси абсцисс откладываем длины

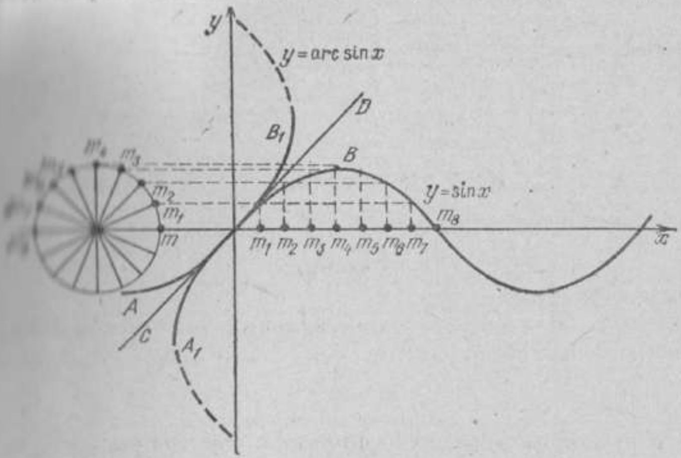


Рис. 39

этих дуг. (Практически мы, конечно, просто отложим отрезок, равный $2\pi = 6,28\ldots$, и разделим его на такое же число равных частей, как и окружность.)

Полученные отрезки нам дадут абсциссы; соответствующие же ординаты получим, проводя из точек деления окружности прямые параллельно оси абсцисс.

Нетрудно видеть, что графиком синуса является волнообразная кривая, неограниченно уходящая вправо и влево. Периодичность синуса отражается в правильном повторении волн.

Кривая называется *синусоидой*. Вместе с тем путем отражения от биссектрисы CD мы получим такую же синусоиду около оси ординат, которая будет графиком арксинуса.

Нетрудно заметить, что каждой абсциссе последней кривой (которая, конечно, численно никогда не больше единицы) соответствует бесконечное множество ординат. Это, разумеется, происходит потому, что каждому синусу отвечает не одна, а бесчисленное множество дуг. Такая многозначность, как мы уже говорили в § 3 главы 3, весьма неудобна, а потому мы ограничим область изменения арксинуса так:

$$-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2.$$

От такого ограничения мы ничего не теряем, так как при изменении дуги в этих пределах синус успевает пробежать все возможные для него значения от -1 до 1.

На рис. 39 это соответствует тому, что мы рассматриваем не всю кривую арксинуса, а только ее дугу A_1B_1, изображенную сплошной линией (остальная часть отмечена пунктиром). Подобным же образом мы введем функцию, обратную косинусу.

Если имеем

$$y = \cos x,$$

то обратную функцию будем обозначать

$$y = \arccos x$$

и называть *арккосинусом*.

Последний ввиду его многозначности мы тоже ограничим, но не границами от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, а границами

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Это вызывается тем, что именно при изменении дуги от 0 до π косинус успевает пробежать все свои значения от -1 до $+1$. Чтобы построить график косинуса, а следовательно, и арккосинуса, заметим, что

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, косинус есть просто синус, запоздавший на четверть окружности. Поэтому график косинуса получится, если график синуса сдвинуть влево на $\pi/2$.

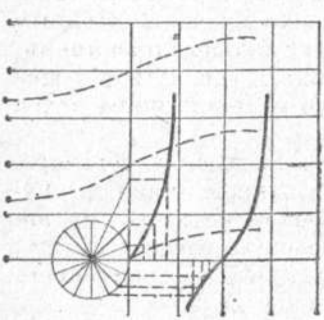


Рис. 40

После этого, отразив график относительно биссектрисы CD, получим график арккосинуса. Учащимся самим рекомендуется построить эти графики и найти, какую именно дугу арккосинуса мы оставляем.

Аналогично мы вводим функции, обратные другим тригонометрическим функциям.

Для нас важны в дальнейшем лишь арктангенс и арккотангенс. Ввиду многозначности первый мы ограничиваем подобно синусу пределами:

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2,$$

которой ограничиваем подобно косинусу:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Мы здесь приводим только графики тангенса и арктангенса (рис. 40), рекомендуя учащимся самим в нем разобраться, а также рекомендуем учащимся самим построить график котангенса и арккотангенса.

§ 6. Понятие об уравнении линии

a. В настоящей главе мы занимались построением графиков различных функций, пользуясь уравнением, связывающим функцию y с аргументом x. Всякому уравнению между y и x отвечает своя линия — *график уравнения*. Если уравнение было явное

$$y = f(x),$$

то график мы строим непосредственно по нему. График неявного уравнения

$$F(x, y) = 0$$

тоже можно построить, обратив его сначала в явное (т. е. решив относительно y).

График уравнения является не чем иным, как собранием (или, как говорят, геометрическим местом) всех точек, удовлетворяющих этому уравнению. Если бы мы построили не все точки, удовлетворяющие уравнению, то получили бы не весь график, а только его часть. Полным графиком уравнения может считаться только такая линия, которой исчерпываются все точки, удовлетворяющие уравнению, и, следовательно, вне которой таких точек уже нет.

b. В дальнейшем мы будем решать задачу, обратную построению графика. А именно, по данной линии мы будем отыскивать то уравнение, графиком которого эта линия является. При этом особенно следует следить за тем, чтобы наша линия была полным графиком найденного уравнения. Иными словами, уравнение должно

1° удовлетворяться всеми точками линии,

2° не удовлетворяться точками, посторонними линии.

Уравнение, подобранное согласно требованиям 1° и 2°, и называется *уравнением данной линии*.

c. Конечно, чем сложнее линия, тем, вообще говоря, сложнее будет и ее уравнение. Особенно просто выводится уравнение линии, обладающей каким-либо простым гео-

метрическим свойством, общим для всех точек этой лини
и вполне ее определяющим. Вывод уравнения такой ли
нии будет простым переводом этого геометрического свой
ства на язык анализа.

d. Напротив, если таким свойством линия не облада
ет, примером чего может служить линия, начерченная со
вершенно произвольно от руки, то подобрать для не
уравнение можно только приближенно. Но такими ли
ниями ввиду сложности этого вопроса мы заниматься не
будем.

e. Дальнейшие две главы будут посвящены разыска
нию уравнений и исследованию на основании этих урав
нений простейших линий, характерных своими замечатель
но простыми геометрическими свойствами. Именно, в гла
ве 4 мы разберем прямую, а в главе 5 окружность и неко
торые другие важные кривые.

f. Составление уравнений линий и исследовани
свойств линий по их уравнениям методами алгебры явля
ется одной из важнейших задач отдела высшей математи
ки, называемого *аналитической геометрией*.

§ 7. Упражнения

1. Построить графики функций:

$$y = x;\ y = -x;\ y = 2x;\ y = 2x + 3;$$
$$y = 3x - 4;\ y = -4x - 1;\ y = 0{,}5x - 0{,}75.$$

2. Построить графики функций:

$$y = x^2 + 2;\ y = x^2 - 2;\qquad y = x^2 - 4x;$$
$$y = x^2 + 4x;\ y = -x^2 - 4x;\ y = -x^2 + 4x,$$
$$y = x^2 + x + 1;\ y = -x^2 - x - 1.$$

3. Построить графики функций:

$$y = x^3;\qquad y = \pm\sqrt{x};\qquad y = x^{1/3};$$
$$y = \frac{12}{x};\quad y = \frac{1}{x+2};\quad y = \frac{x-2}{x+2};$$
$$y = \frac{1}{x^2};\quad y = -\frac{1}{x^2};\quad y = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Построить графики функций:

$$y = \frac{1}{\sin x};\quad y = \frac{1}{\cos x};$$

$y = A\cos(kx + b)$ (где $A = 2$; $k = 0{,}5$; $b = \pi/3$).

5. Из жестяного прямоугольного листа с основанием a и высотой b вырезаны по углам квадраты со стороной x; из оставшейся части согнута коробка (рис. 41). Найти объем коробки как функцию от x. *Ответ*: $y = (a - 2x)(b - 2x)x$.

6. В прямоугольном треугольнике с постоянной гипотенузой 1 и переменным катетом x выразить другой катет как функцию от x. *Ответ*: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. В шар радиуса R вписан цилиндр (рис. 42). Найти объем V этого цилиндра как функцию радиуса x его основания. *Ответ*: $V = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$.

Рис. 41

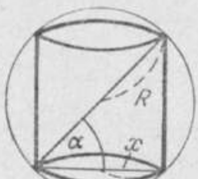


Рис. 42

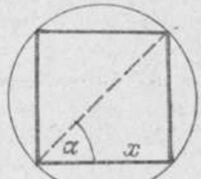


Рис. 43

8. Выразить тот же объем как функцию угла α (см. предыдущую задачу). *Ответ*: $V = 2\pi R^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$.

9. В круг радиуса R вписан прямоугольник (рис. 43). Выразить площадь S этого круга как функцию его основания x. *Ответ*: $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$.

10. Выразить ту же (смотри предыдущую задачу) площадь как функцию угла α. *Ответ*: $S = 2R^2 \sin 2\alpha$.

11. В прямоугольном треугольнике с постоянным катетом a и переменной гипотенузой выразить последнюю как функцию другого катета x. *Ответ*: $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.

12. На стене висит плакат AB, на расстоянии x от стены находится глаз наблюдателя; верхний конец B плаката выше глаза на b, а нижний конец A выше глаза на a (рис. 44). Выразить угол зрения как функцию от x. *Ответ*: $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{x} - \operatorname{arctg}\frac{a}{x}$.

13. Миноносец находится в точке A на расстоянии a от берега. На расстоянии b от ближайшей к миноносцу точки берега в точке C находится военный лагерь. Гонец плывет в шлюпке до точки B, а потом идет пешком расстоя-

ние $BC = x$ (рис. 45). Выразить время T, необходим… чтобы проплыть и пройти расстояние, как функцию от …

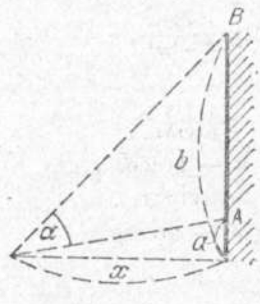


Рис. 44

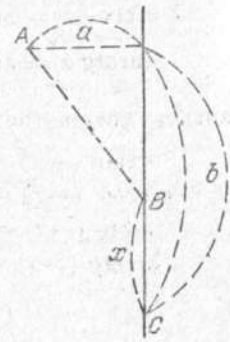


Рис. 45

если скорость шлюпки v_1, а скорость пешехода v_2. *Ответ*:

$$T = \frac{\sqrt{a^2 - (b-x)^2}}{v_1} + \frac{x}{v_2}.$$

14. Доказать, что для любого x (разумеется, численно меньшего единицы) имеет место тождество

$$\arccos x + \arcsin x = \pi/2.$$

15. Доказать, что для любого x имеет место тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2.$$

16. Доказать тождества:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x};$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

17. Доказать тождества:

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1 - y^2} \pm y\sqrt{1 - x^2});$$

$$\arccos x \pm \arccos y = \arccos (xy \mp \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)});$$

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

9. Доказать тождества:

$$2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2};$$
$$2 \arccos x = \arccos (2x^2 - 1);$$
$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

10. Доказать тождества:

$$\arcsin (-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos (-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Глава 4

ПРЯМАЯ

§ 1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку

Положение прямой вполне определено, если на н дана какая-либо точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и дано направление пр мой. Последнее известно, если известно направление ве тора $\overline{PQ}$, перпендикулярного прямой. Такой вектор н зовем *направляющим вектором.* Он может быть прои вольной длины и с началом в любой точке плоскости; него требуется только, чтобы был перпендикулярен прямой. На правляющий вектор будем задава величинами его проекций A и B н оси координат (рис. 46). Итак, буд считать известными

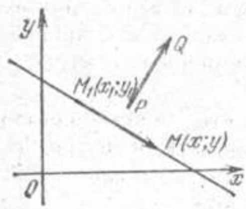


Рис. 46

1) точку $M_1(x_1;\ y_1)$ прямой;

2) величины проекций A и B на равляющего вектора $\overline{PQ}$ на оси коор динат.

Имея эти данные, постараемся вывести уравнение пря мой. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка прямой. Г бы она на прямой ни находилась, вектор $\overline{M_1M}$ перпенд кулярен $\overline{PQ}$. Так как величины проекций вектора $\overline{P}$ суть A и B, а величины проекций вектора $\overline{M_1M}$ равны ра ностям $x - x_1$, $y - y_1$ абсцисс и ординат его конца начала, то условие перпендикулярности обоих векторо дает

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (1)$$

Это условие не выполняется, если точка M не лежи на прямой, потому что тогда указанные векторы не пер пендикулярны.

Итак, уравнение (1) выполняется для всех точек пря мой и не выполняется для точек, на прямой не лежащих оно, следовательно, и является уравнением нашей прямой.

Например, уравнение прямой, проходящей через точку (1; 2), с направляющим вектором, имеющим проекции 2 и −4, будет

$$3(x-1)-4(y-2)=0.$$

§ 2. Общее уравнение прямой

a. Раскрывая скобки в уравнении (1) § 1, получим

$$Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0.$$

Обозначая

$$-Ax_1-By_1=C,$$

мы можем это уравнение переписать в виде

$$Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Таким образом, уравнение всякой прямой можно написать в виде (1), где A и B одновременно не равны нулю (в противном случае длина направляющего вектора была бы равна нулю).

b. Обратно, можно показать, что всякое уравнение вида (1), где A и B одновременно не равны нулю, всегда изображает прямую. Действительно, всегда найдутся числа x_1, y_1, удовлетворяющие условию

$$Ax_1+By_1+C=0 \qquad (2)$$

(например, при B, не равном нулю, мы x_1 выбираем произвольно; соответствующее же ему y_1 выбираем из условия (2)). Вычитая тогда равенство (2) из уравнения (1), мы приведем последнее к виду

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

А это как раз и есть уравнение прямой, проходящей через точку $(x_1; y_1)$, с направляющим вектором, имеющим проекции A и B.

c. Ввиду доказанного в пунктах a и b уравнению (1), где A и B одновременно не равны нулю, присвоено название *общего уравнения прямой*.

Например, общее уравнение прямой, рассмотренной в конце § 1, будет

$$3x-3-4y+8=0, \quad \text{или} \quad 3x-4y+5=0.$$

§ 3. Частные случаи

В некоторых частных случаях общее уравнение прямой значительно упрощается. А именно:

а. Для прямой, параллельной оси абсцисс, направляющий вектор перпендикулярен этой оси. Следовательно, его проекция A на эту ось равна нулю. Уравнение прямой принимает вид

$$By + C = 0$$

или, если решить его относительно y,

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Полагая же $-\frac{C}{B} = b$, приведем наше уравнение к виду

$$y = b.$$

Последнее уравнение отмечает собою не что иное, как тот факт, что все ординаты прямой, параллельной оси абсцисс, равны между собою, так как равны одному и тому же постоянному числу b. Это число b, очевидно, представляет собою величину отрезка OB, который прямая отсекает на оси ординат (рис. 47).

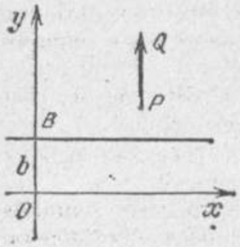


Рис. 47

В частности, при $b = 0$ получаем уравнение самой оси абсцисс:

$$y = 0.$$

Оно выражает тот факт, что ординаты всех точек оси абсцисс равны нулю.

b. Рассуждая подобным же образом, убедимся, что для прямой, параллельной оси ординат, $B = 0$. Уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0,$$

или, обозначая $-\frac{C}{A} = a$, получим

$$x = a,$$

где a есть величина отрезка OA, который прямая отсекает на оси абсцисс (рис. 48).

В частности, уравнение самой оси ординат будет

$$x = 0.$$

6. Если прямая проходит через начало координат, то общему уравнению

$$Ax + By + C = 0$$

данной прямой должны удовлетворять координаты (0; 0) начала координат, т. е. должно быть $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0$, или $C = 0$. Итак, общее уравнение прямой, проходящей через начало координат, должно иметь вид

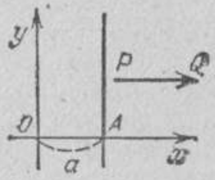


Рис. 48

$$Ax + By = 0.$$

Примеры. Прямая $2y - 7 = 0$, или $y = 7/2$, параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок величиной $b = 7/2$.

Прямая $x + 2 = 0$, или $x = -2$, параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок величиной $a = -2$.

Наконец, прямая $x + y = 0$ проходит через начало координат.

§ 4. Переход к уравнению с угловым коэффициентом

В частности, если B не равно нулю, то общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

можно привести к виду, разобранному в § 4 предыдущей главы. Действительно, решая относительно y, получим

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначая

$$-A/B = k, \quad -C/B = b,$$

будем иметь

$$y = kx + b.$$

А это как раз уравнение прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b.

Пример. Пусть дана прямая

$$2x - 4y - 7 = 0.$$

Имеем

$$4y = 2x - 7, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}.$$

Значит, для нашей прямой $k = 1/2$, $b = -7/4$.

§ 5. Построение прямой

Прямая линия вполне определяется двумя точками. Поэтому для построения прямой достаточно знать две ее точки. В исключительных же случаях прямую можно построить и проще.

a. Пусть требуется построить прямую

$$2x - 3y + 4 = 0. \qquad (1)$$

Чтобы найти две точки этой прямой, мы абсциссы этих точек выберем произвольно, например, 0 для первой точки и 1 для второй. Соответствующие ординаты найдутся из уравнения (1). Именно, подставляя $x = 0$, получим

$$-3y + 4 = 0, \qquad y = 4/3.$$

Подставляя же $x = 1$, получим

$$2 - 3y + 4 = 0, \ y = 2.$$

Итак, имеем две точки $B\ (0;\ 4/3)$, $C\ (1;\ 2)$, которыми и воспользуемся для построения прямой (рис. 49).

b. Построим еще прямую

$$2x - 3y = 0.$$

Здесь свободный член равен нулю и потому прямая проходит через начало координат. Таким образом, одна

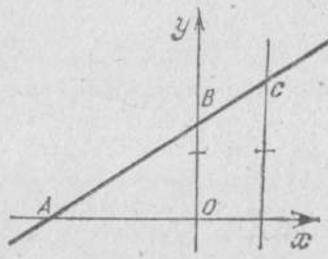


Рис. 49

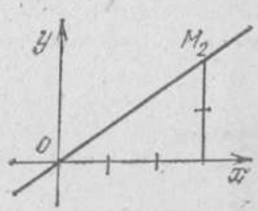


Рис. 50

точка прямой (начало координат) известна. Для построения прямой достаточно знать еще только одну точку. За абсциссу этой последней точки возьмем, например, $x = 3$. Тогда ордината найдется из уравнения $2 \cdot 3 - 3y = 0$, $y = 2$, и, следовательно, для построения прямой, кроме начала координат, имеем еще одну точку $M_2\ (3;\ 2)$ (рис. 50).

c. Построим прямую

$$2y - 3 = 0.$$

Отсюда, решая относительно y, имеем

$$y = 3/2.$$

Следовательно, прямая параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3/2$ (рис. 51).

d. Наконец, построим прямую

$$4x + 7 = 0.$$

Решая относительно x, имеем (рис. 52)

$$x = -7/4.$$

Следовательно, прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -7/4$.

e. Прямую пункта a

$$2x - 3y + 4 = 0$$

можно было бы построить и проще. Действительно, эта

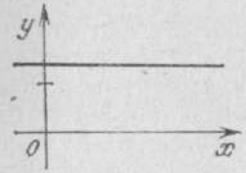


Рис. 51

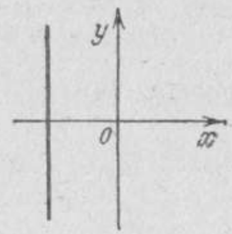


Рис. 52

прямая не параллельна ни одной из осей (ни A ни B не равны нулю) и не проходит через начало координат (C не равно нулю). Она очевидно пересекает оси Ox и Oy в двух различных точках A и B. И для построения прямой самое простое найти именно эти ее точки. Если обозначим $OA = a$ и $OB = b$ отрезки, отсекаемые прямой на осях, то координаты точек A и B будут (рис. 49)

$$A\ (a;\ 0), \quad B\ (0;\ b).$$

Точки A и B лежат на прямой, следовательно, их координаты удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$2a + 4 = 0, \ a = -2; \qquad -3b + 4 = 0, \quad b = 4/3.$$

Итак, прямая отсекает на осях координат отрезки $a = -2$, $b = 4/3$. Это дает возможность построить точки A и B, а по ним и прямую.

§ 6. Определение угла между двумя прямыми

а. Пусть даны две прямые I и II. Эти прямые, как бы-
ло указано в главе 1, образуют различные положитель
и отрицательные углы, которые при этом могут быть
острыми, так и тупыми. Зная один из этих углов, мы ле
найдем какой-либо другой.

Между прочим, у всех этих углов численная величи
тангенса одна и та же, различие может быть только в зна

b. Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad I$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad II$$

— уравнения прямых. Числа A_1, B_1 и A_2, B_2 суть прое
ции направляющих векторов первой и второй прямой. Уго
между этими векторами равен одному из углов, образу
мых прямыми линиями. Поэтому задача сводится к опр
делению угла между векторами. Мы получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (1)$$

Для простоты можно условиться под углом φ между двумя прямыми понимать острый положительный угол (как, например, на рис. 53). Тогда тангенс этого угла будет всегда положительным. Таким образом, если в правой части формулы (1) получится знак минус, то мы его должны отбросить, т. е. сохранить только абсолютную величину.

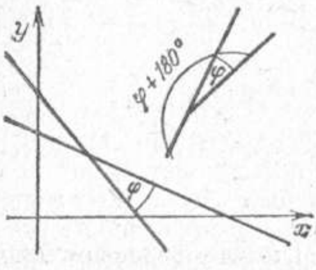


Рис. 53

Пример. Определить угол между прямыми

$$2x - 3y + 7 = 0,$$
$$4x - 8y + 9 = 0.$$

По формуле (1) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2\cdot(-8) - (-3)\cdot 4}{2\cdot 4 + (-3)\cdot(-8)}\right| = \left|\frac{-4}{32}\right| = \frac{1}{8}.$$

с. Если будет указано, какая из сторон угла является его началом и какая концом, то, отсчитывая всегда направление угла против часовой стрелки, мы можем из формулы (1) извлечь нечто большее. Как нетрудно убедиться из рис. 53, знак, получающийся в правой части фор-

(1), будет указывать, какой именно — острый или тупой — угол образует вторая прямая с первой. (Действительно, из рис. 53 мы усматриваем, что угол между первым и вторым направляющими векторами или равен искомому углу между прямыми, или отличается от него на $\pm 180°$.)

d. Если прямые параллельны, то параллельны и их направляющие векторы. Применяя условие параллельности двух векторов, получим:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2. \tag{2}$$

Это есть условие, необходимое и достаточное для параллельности двух прямых.

Пример. Прямые

$$2x - 4y + 1 = 0, \quad -x + 2y + 3 = 0$$

параллельны, так как

$$2/{-1} = -4/2.$$

e. Если прямые перпендикулярны, то их направляющие векторы тоже перпендикулярны. Применяя условие перпендикулярности двух векторов, мы получим условие перпендикулярности двух прямых, а именно

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3}$$

Пример. Прямые

$$2x - 4y + 7 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0$$

перпендикулярны ввиду того, что

$$2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 0.$$

В связи с условиями параллельности и перпендикулярности решим следующие две задачи.

f. Через точку $(x_1;\ y_1)$ провести прямую параллельно данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Решение проводится так. Так как искомая прямая параллельна данной, то за ее направляющий вектор можно взять тот же самый, что и у данной прямой, т. е. вектор с проекциями A и B. А тогда уравнение искомой прямой напишется в форме (§ 1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку (1; 3) параллельно прямой

$$2x - 7y + 2 = 0,$$

будет следующее:

$$2(x - 1) - 7(y - 3) = 0.$$

g. Через точку $(x_1;\ y_1)$ провести прямую перпендикулярно данной прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Здесь за направляющий вектор уже не годится брать вектор с проекциями A и B, а надо взять вектор, ему перпендикулярный. Проекции A_1 и B_1 этого вектора должны быть выбраны, следовательно, согласно условию перпендикулярности обоих векторов, т. е. согласно условию

$$AA_1 + BB_1 = 0.$$

Выполнить же это условие можно бесчисленным множеством способов, так как здесь одно уравнение с двумя неизвестными A_1 и B_1. Но проще всего взять $A_1 = B$; $B_1 = -A$ или же $A_1 = -B$; $B_1 = A$. Тогда уравнение искомой прямой напишется в форме

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

или

$$-B(x - x_1) + A(y - y_1) = 0.$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку (−7; 2) и перпендикулярной прямой

$$4x - 3y + 9 = 0,$$

будет следующее (по второй формуле):

$$3(x + 7) + 4(y - 2) = 0.$$

h. В том случае, когда прямые заданы уравнениями вида

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2,$$

переписывая эти уравнения иначе, имеем

$$k_1x - y + b_1 = 0, \quad k_2x - y + b_2 = 0,$$

так что

$$A_1 = k_1, \ B_1 = -1; \quad A_2 = k_2, \ B_2 = -1.$$

Применяя формулы (1) — (3), для тангенса угла между прямыми получим выражение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2 + 1}.$$

Для условия параллельности имеем $k_1/k_2 = -1/-1$, т. е.

$$k_1 = k_2. \qquad (2^*)$$

Наконец, для условия перпендикулярности имеем $k_1 k_2 + 1 = 0$ или же

$$k_2 = -1/k_1. \qquad (3^*)$$

Как нам о том говорит формула (2*), условие параллельности двух прямых в этом случае заключается в том, что угловые коэффициенты прямых равны.

Формула (3*) говорит о том, что условие перпендикулярности заключается в том, что угловые коэффициенты прямых обратны друг другу и противоположны по знаку.

П р и м е р ы. Угол между прямыми

$$y = 4x - 7, \ y = 3x + 2$$

дается формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 - 3}{4 \cdot 3 + 1} = \frac{1}{13}.$$

Прямые

$$y = 2x + 3, \quad y = 2x + 1$$

параллельны.

Прямые

$$y = 4x - 2, \ y = -0{,}25x + 1$$

перпендикулярны ввиду того, что $-0{,}25 = -1/4$.

§ 7. Условие совпадения прямых

Выясним теперь, при каком условии уравнения

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (1)$$

определяют одну и ту же прямую.

Очевидно, совпадение двух прямых есть частный случай параллельности. Поэтому должно быть

$$A_1/A_2 = B_1/B_2. \qquad (2)$$

Обозначая общую величину обоих отношений через t, имеем

$$A_1/A_2 = t, \ B_1/B_2 = t, \qquad (3)$$

откуда

$$A_1 = A_2t, \; B_1 = B_2t.$$

Тогда верхнее уравнение системы (1) примет вид

$$A_2tx + B_2ty + C_1 = 0,$$

или же

$$A_2x + B_2y + \frac{C_1}{t} = 0. \qquad (4)$$

Если уравнения (1) изображают одну и ту же прямую, то одни и те же координаты x, y удовлетворяют как уравнению (4), так и второму уравнению системы (1). Поэтому, если вычтем из уравнения (4) второе уравнение (1), то получим $C_1/t - C_2 = 0$, или $C_1 = C_2t$, или же $C_1/C_2 = t$. Сопоставляя это с (3), находим

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2.$$

Это и есть условие совпадения двух прямых, которое говорит нам о том, что коэффициенты совпадающих прямых пропорциональны, т. е. одно уравнение получается из второго путем умножения на некоторое постоянное число (число $t \neq 0$).

Пример. Прямые

$$2x - 7y + 1 = 0, \quad 10x - 35y + 5 = 0$$

совпадают, так как имеет место равенство

$$2/10 = -7/-35 = 1/5.$$

Здесь первое уравнение получается из второго умножением на постоянное число $t = 1/5$.

§ 8. Пересечение прямых

Точка пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (1)$$

есть общая точка обоих прямых. Она, следовательно, должна одновременно удовлетворять уравнениям обеих прямых, т. е. системе (1).

Обратно, если точка удовлетворяет системе (1), то тем самым она удовлетворяет каждому уравнению системы в отдельности. Следовательно, она лежит на каждой из данных прямых, т. е. является точкой их пересечения.

Итак, координаты точки пересечения обеих прямых получаются совместным решением уравнений (1) этих прямых.

Однако следует помнить, что пересекаются в одной точке только непараллельные прямые, т. е. прямые, для которых

$$A_1/A_2 \text{ не равно } B_1/B_2.$$

Пример 1. Найдем точку пересечения прямых

$$x - 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0. \qquad (2)$$

Здесь 1/2 не равно —2/1, следовательно, прямые пересекаются в одной точке. Для разыскания координат $(x;\ y)$ этой точки решаем уравнения (2) совместно. Умножая второе на 2 и складывая с первым, получим

$$\begin{array}{r} x - 2y - 1 = 0 \\ + \; 4x + 2y - 4 = 0 \\ \hline 5x \qquad\quad - 5 = 0, \end{array} \quad x = 5.$$

Далее, из второго уравнения получим

$$y = 2 - 2x = 2 - 10 = -8.$$

Итак, прямые пересkаются в точее (5; —8).

Пример 2. Прямые

$$2x + y - 2 = 0, \quad 4x + 2y + 1 = 0$$

параллельны, но не совпадают ввиду того, что 2/4 = 1/2, но не равно —2/1. Точек пересечения, следовательно, нет.

Пример 3. Прямые

$$2x - y + 2 = 0, \; 4x - 2y + 4 = 0$$

сливаются в одну ввиду того, что

$$2/4 = -1/-2 = 2/4.$$

Можно сказать, что эти прямые имеют бесчисленное множество точек пересечения, так как все точки обеих прямых являются общими.

§ 9. Расстояние от точки до прямой

а. Найдем расстояние d от точки $M_1\ (x_1;\ y_1)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Известно, что *расстоянием от точки до прямой* называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Пусть $M\ (x;\ y)$ — основание этого перпендикуляра. Тогда длина вектора $\overline{MM_1}$ и будет искомым расстоянием.

Рассмотрим скалярное произведение направляющего вектора $\overline{PQ}$ и вектора $\overline{MM_1}$ (рис. 54).

Так как эти векторы параллельны, то, смотря по тому, будут ли они направлены в одну или же в противоположные стороны (что тоже может случиться), их скалярное произведение будет $rd \cos 0° = rd$ или же $rd \cos 180° = -rd$.

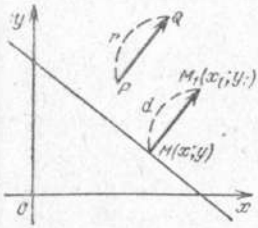


Рис. 54

С другой стороны, то же самое скалярное произведение равно сумме произведений проекций A и B вектора $\overline{PQ}$ на соответствующие проекции $x_1 - x$ и $y_1 - y$ вектора $\overline{MM_1}$, т. е.

$$\pm rd = A(x_1 - x) + B(y_1 - y) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + C - (Ax + By + C).$$

Но так как точка $M(x; y)$ лежит на нашей прямой, то

$$Ax + By + C = 0,$$

и потому

$$\pm rd = Ax_1 + By_1 + C.$$

Отсюда, замечая, что $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, и помня, что d, как расстояние, должно быть положительным, имеем

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

b. В частности, расстояние d от начала координат до прямой

$$Ax + By + C = 0$$

получим, если возьмем $M_1(0; 0)$.

Будем иметь

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

c. Примеры. Расстояние от точки (1; 2) до прямой

$$3x - 4y - 10 = 0$$

будет

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Расстояние от начала координат до прямой

$$5x + 12y + 26 = 0$$

Тогда

$$d=\frac{|26|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{13}=2.$$

§ 10. Другой подход к выводу уравнения прямой

a. К выводу уравнения прямой можно подойти несколько иначе, а именно, задавая направляющий вектор не перпендикулярно прямой, а параллельно ей.

Пусть дана точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и вектор с проекциями l и m, параллельный данной прямой.

Этот вектор будем также называть *направляющим*. В частности, он может находиться на самой прямой. На рис. 55 этот вектор лежит именно на той прямой, которую он должен направлять. Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;\ y)$. Где бы эта точка на прямой ни находилась, вектор $\overline{M_1M}$ будет параллелен направляющему вектору (или будет с ним совпадать). Поэтому проекции $x-x_1$ и $y-y_1$ этого вектора будут всегда пропорциональны проекциям l и m направляющего вектора.

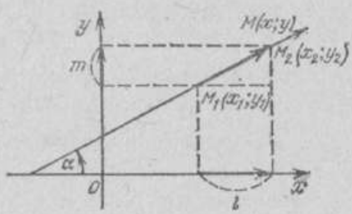


Рис. 55

Следовательно, будем иметь уравнение

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}, \qquad (1)$$

которое будет выполняться для любой точки, лежащей на прямой, и не будет выполняться для точек, на ней не лежащих. Таким образом, полученное равенство (1) есть искомое уравнение прямой.

b. Уравнение (1) можно представить также в таком виде:

$$y-y_1=\frac{m}{l}(x-x_1).$$

Нетрудно видеть, что

$$m/l=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α есть угол наклона прямой линии к оси абсцисс, так что m/l равно угловому коэффициенту прямой, который мы ранее условились обозначать через k.

Следовательно, уравнение (1) можно написать в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2)$$

Эта форма уравнения называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом*.

c. Если мы точку $M_1(x_1;\ y_1)$ будем считать неподвижной, а угловой коэффициент k переменным, то наша прямая будет вращаться вокруг точки M.

Если k пробежит все числовые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то наша прямая сделает полный оборот вокруг точки M_1.

Таким образом, при произвольном k уравнение (2) выражает любую прямую, проходящую через точку M_1 (кроме прямой, параллельной оси ординат; ее уравнение $x = x_1$). Поэтому при произвольном k уравнение (2) носит название

«уравнение пучка прямых с центром в точке $M_1(x_1;\ y_1)$».

Если числу k задать числовое значение, то мы из пучка выхватываем ту прямую, угловой коэффициент которой равен данному числу.

§ 11. Прямая, проходящая через две точки

Как известно, прямая вполне определяется двумя своими точками. Поэтому если задать две ее точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, то прямая вполне определена (см. рис. 55).

Нетрудно понять, что вектор $\overline{M_1M_2}$ можно принять за направляющий для данной прямой. Тогда будем иметь

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

которое называется *уравнением прямой, проходящей через две точки*.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;\ 3)$ и $M_2(-2;\ 5)$.

Применяя уравнение (1), получим

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{5-3}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{2}, \quad 2x - 2 = -3y + 9,$$

$$2x + 3y - 11 = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 1)$ и $M_2(4; 1)$.

Поступая, как в предыдущем примере, получим

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{1-1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}.$$

Последний результат кажется нелепым, так как на нуль делить нельзя, тем не менее здесь мы имеем верный результат.

Действительно, если мы обратим внимание на ординаты данных точек, то сразу сообразим, что наша прямая параллельна оси абсцисс, так как ординаты обоих точек равны. А если так, то и у всех других точек этой прямой независимо от их абсцисс ординаты равны. Следовательно, уравнение прямой будет иметь вид $y = 1$, или $y - 1 = 0$. Однако то же самое мы получим, упростив последнее полученное уравнение:

$$(x-2)\cdot 0 = 2(y-1), \quad y - 1 = 0.$$

§ 12. Уравнение прямой в отрезках на осях

a. В предыдущем параграфе мы получили уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Особенно интересный вид получится для уравнения прямой, если эти точки даны на координатных осях. Пусть имеем такие две точки: $M_1(a; 0)$, $M_2(0; b)$. Тогда мы получим $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, или $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}$, откуда

$$xb - ab = -ay, \quad xb + ay = ab.$$

Или, разделив обе части уравнения на ab, окончательно получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Числа a и b суть не что иное, как величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях. Поэтому уравнение (1) называется *уравнением прямой в отрезках на осях*.

b. Если уравнение прямой задано в общей форме

$$Ax + By + C = 0$$

и нам было бы желательно его иметь в форме с отрезками на осях, то мы можем просто найти величины этих отрезков так, как это указано в пункте е § 5, а затем подставить в уравнение (1) § 10.

Пример. Привести уравнение

$$2x - 3y - 5 = 0$$

к виду с отрезками на осях.

Находим a и b. Очевидно,

$$a = 5/2, \quad b = -5/3.$$

Следовательно, искомое уравнение будет

$$\frac{x}{^5/_2} + \frac{y}{-^5/_3} = 1.$$

§ 13. Задачи на прямую линию

1a. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (1; —3), если известно, что перпендикулярный к прямой направляющий вектор имеет проекции $A = 2$, $B = 7$. *Ответ*: $2x + 7y + 19 = 0$.

1b. Написать уравнение прямой, если известно, что она проходит через начало координат, а ее направляющий вектор имеет проекции $A = 0,1$, $B = -0,3$. *Ответ*: $x - 3y = 0$.

2a. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (0; 5), если известно, что проекция направляющего вектора на ось абсцисс в три раза больше его проекции на ось ординат. *Ответ*: $3x + y - 5 = 0$.

2b. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (1; 1), если ее направляющий вектор является биссектрисой второго координатного угла. *Ответ*: $-x + y = 0$.

3a. Каковы проекции направляющего вектора для прямой

$$8x - 15y - 1 = 0$$

и какова длина этого вектора? *Ответ*: длина вектора равна 17.

3b. Что произойдет с направляющим вектором прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

если обе части уравнения умножить на какое-либо положительное число N? *Ответ*: направляющий вектор изменит свою длину в N раз, но направление его не изменится.

4a. Проверить, лежит ли точка (5; 7) на прямой $2x + 3y - 31 = 0$. *Ответ*: лежит.

4b. На прямой $16x - y + 1 = 0$ найти точку, у которой абсцисса $x = 1$. *Ответ*: (1; 17).

5a. Найти на прямой $x - 5y + 4 = 0$ такую точку, у которой абсцисса равна ординате. *Ответ*: (1; 1).

5b. На прямой $x - y - 81 = 0$ найти такую точку, у которой абсцисса в десять раз больше ординаты. *Ответ*: (90; 9).

6a. На прямой $x - 2y = 0$ найти точку, у которой абсцисса на 4 больше ординаты. *Ответ*: (8; 4).

6b. На прямой $x - 4y - 6 = 0$ найти точку, у которой ордината $y = 5$. *Ответ*: (26; 5).

7a. На прямой $2x - 3y + 3 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек (1; 4) и (2; 1). *Ответ*: (3; 3).

7b. На прямой $2x - y - 1 = 0$ найти точку, равноотстоящую от точек (1; 1) и (4; 2). *Ответ*: (2; 3).

8a. Построить прямые:

$$x - 3 = 0; \quad y = 2; \quad 2x + 1 = 0;$$
$$4y - 8 = 0; \quad 3y + 10 = 0; \quad 13 - y = 0.$$

8b. Построить прямые:

$$5x - 6y = 0; \quad 2x + 7y = 0; \quad 2x + 3y = 0.$$

9a. Какая прямая имеет уравнение $x = 0$?

9b. Какая прямая имеет уравнение $6y = 0$?

10a. Построить прямые:

$$x + 2y - 4 = 0; \quad 2x + 3y + 5 = 0; \quad x - 2y - 7 = 0;$$
$$x - 2y - 8 = 0.$$

10b. Построить прямые:

$$y = 2x + 3; \quad y = 3x - 2; \quad y = -x - 1;$$
$$y + x = 0; \quad y - x = 0.$$

11a. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 19/4$.

11b. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $x + y + 2 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 5$.

12a. Найти острый угол между прямыми $2x + y + 7 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

12b. Найти острый угол между прямыми $y - x\sqrt{3} + 9 = 0$, $y + x\sqrt{3} + 5 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 60°$.

13a. Привести к виду с угловым коэффициентом уравнения прямых:

$$2x + 2y - 1 = 0; \quad 2x + 3y + 9 = 0; \quad 4x - 2y + 5 = 0.$$

13b. Найти острый угол между прямыми $x = 0$, $x + y + 2 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

14a. Вычислить тангенс острого угла между прямыми $y = 2x + 1$, $y = 3x + 5$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = 1/7$.

14b. Вычислить тангенс острого угла между прямыми

$$y = \frac{a+b}{a-b}x + c, \quad y = \frac{2b-a}{2a+b}x + d.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = 3$.

14c. Вычислить тангенс угла между прямыми $3x - 2y + 1 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. *Ответ*: $\operatorname{tg} \varphi = -19/4$.

15a. Будут ли параллельны прямые $5x - 9{,}5y + 5 = 0$, $-7{,}5x + 14{,}25y + 1 = 0$?

15b. Будут ли параллельны прямые $y = 3x + b_1$, $y = 3x + b_2$?

16a. Будут ли перпендикулярны прямые

$$2x - 7y + 6 = 0, \quad 14x + 4y + 3 = 0?$$

16b. Будут ли перпендикулярны прямые

$$y = 4x + 3, \; y = -0{,}25x + 17?$$

17a. Даны прямые:

$$1)\; 2x - y + 7 = 0; \quad 2)\; x - \frac{1}{2}y + 1 = 0;$$

$$3)\; 3x - 4y + 1 = 0; \quad 4)\; 4x + 3y - 1 = 0.$$

Какие из них параллельны и какие перпендикулярны?

17b. Почему следует считать, что прямые

$$Ax + By + C = 0, \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

параллельны?

17c. Почему следует считать, что прямые

$$Ax + By + C = 0, \quad B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

перпендикулярны?

18a. Через точку (5; 2) провести прямую параллельно прямой $3x - 2y + 5 = 0$. *Ответ*: $3x - 2y - 11 = 0$.

18b. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (4; —1) параллельно прямой $2x - 3y + 1 = 0$. *Ответ*: $2x - 3y - 11 = 0$.

19a. Через точку (1; 2) провести прямую перпендикулярно прямой $4x - y + 2 = 0$. *Ответ*: $x + 4y - 9 = 0$.

19b. Через точку (1; 2) провести прямую перпендикулярно прямой $2x + 4y - 1 = 0$. *Ответ*: $2x - y = 0$.

20a. Через точку (1; 3) провести прямую параллельно прямой $y = 2x + 7$. *Ответ*: $y = 2x + 1$.

20b. Через точку (3; -1) провести прямую перпендикулярно прямой $y = 3x - 1$. *Ответ*: $y = -x/3$.

21a. Через точку (2; -1) провести прямую под углом 45° к прямой $x - 2y - 1 = 0$. *Ответ*: $3x - y - 7 = 0$.

21b. Через точку (1; 2) провести прямую под углом 45° к прямой $y = x + 3$. *Ответ*: $x - 1 = 0$.

22a. Через точку (1; 2) провести прямую, наклоненную к прямой $3x - 2y + 6 = 0$ под углом, тангенс которого равен 5. *Ответ*: $x + y - 3 = 0$.

22b. Через точку (3; -4) провести прямую, наклоненную к прямой $y = -2x + 1$ под углом, тангенс которого равен 2. *Ответ*: $7y - x + 31 = 0$.

23a. Совпадают ли прямые $0{,}25x + 0{,}875y - 0{,}125 = 0$, $x + 3{,}5y - 0{,}5 = 0$? *Ответ*: совпадают.

23b. Совпадают ли прямые $7x - 35y + 42 = 0$, $3x - 15y + 17 = 0$? *Ответ*: не совпадают.

24a. Найти точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$, $7x + 5y - 12 = 0$. *Ответ*: (1; 1).

24b. Найти точку пересечения прямых $ax + by = 1$, $a^2x - b^2y = a$. *Ответ*: $(1/a; 0)$.

25a. Пересекаются ли прямые $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $C_2 \neq C_1$? Если нет, то почему?

25b. Можно ли сказать, что совпадающие прямые пересекаются? Если да, то сколько точек пересечения имеют совпадающие прямые?

26a. Найти координаты вершин треугольника, если стороны заданы уравнениями $x - 2y + 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$. *Ответ*: (1; 2), (2; 1), (3; 3).

26b. Найти вершины треугольника, если его стороны заданы уравнениями $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$, $x + y = 0$. *Ответ*: (1/2; 1/2), (1/2; $-1/2$), ($-1/2$; 1/2).

27a. Через точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$, $x + y = 0$ провести прямую параллельно прямой $x + 2y + 3 = 0$. *Ответ*: $2x + 4y - 1 = 0$.

27b. Через точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$, $x + y = 0$ провести прямую перпендикулярно прямой $x + 2y + 3 = 0$. *Ответ*: $4x - 2y + 3 = 0$.

28a. Написать уравнение высоты треугольника, образованного прямыми $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$, если известно, что высота опущена из точки пересечения первых двух прямых на третью. *Ответ*: $2x - y + 1 = 0$.

28b. Через точку пересечения прямых $x - y = 0$, $x + y + 1 = 0$ провести прямую параллельно прямой $2x + 3y - C = 0$. *Ответ*: $4x + 6y + 5 = 0$.

29. Через точку пересечения прямых $y = 2x$ ... $3x - 2y = 0$ провести прямую перпендикулярно пр... $6x - 7 = 0$. *Ответ*: $y - 3 = 0$.

30a. Найти расстояние от точки (1; 1) до пря... $3x - 4y + 6 = 0$. *Ответ*: $d = 1$.

30b. Доказать, что расстояния от точки (2; 1) до пр... мых $3x - 4y + 8 = 0$ и $5x - 12y + 28 = 0$ одинак... (равны 2).

31a. Доказать, что расстояние между двумя паралле... ными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = ...$ выражается формулой $L = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

31b. Найти расстояние между параллельными пря... ми $5x + 12y - 12 = 0$, $5x + 12y + 1 = 0$. *Ответ*: $L = 1$.

31c. Найти расстояние между параллельными пр... мыми $8x - 15y + 14 = 0$, $8x - 15y - 20 = 0$. *Ответ*: $L = 2$.

32a. Написать уравнение прямой, параллельной пр... мым $2x - 3y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 5 = 0$ и проходящ... посередине между ними. *Ответ*: $2x - 3y + 6 = 0$.

32b. Написать уравнение прямой, параллельной пр... мым $4x - 3y + 16 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$ и делящ... расстояние между ними в отношении 2 : 1 в направлени... от первой прямой ко второй. *Ответ*: $4x - 3y + 10 = 0$.

32c. Провести прямую параллельно прямым

$$x - 2y + 6 = 0, \quad 2x - 4y + 9 = 0,$$

расположенную между ними так, чтобы расстояние ее до первой прямой было в два раза больше расстояния до второй прямой. *Ответ*: $x - 2y + 5 = 0$.

33. Проследить за тем, какой знак имеет выражение

$$f(x, y) = Ax + By + C$$

для различных точек плоскости:

a) Для точек, лежащих выше прямой $Ax + By + C = 0$. *Ответ*: $+$ при $B > 0$, $-$ при $B < 0$.

b) Для точек, лежащих ниже этой прямой. *Ответ*: $-$ при $B > 0$, $+$ при $B < 0$.

c) Для точек, лежащих справа от этой прямой. *Ответ*: $+$ при $A > 0$, $-$ при $A < 0$.

d) Для точек, лежащих слева от этой прямой. *Ответ*: $-$ при $A > 0$, $+$ при $A < 0$.

e) Для точек, лежащих по ту же сторону от прямой, что и начало координат. *Ответ*: $+$ при $C > 0$, $-$ при $C < 0$.

для точек, лежащих по другую сторону от начала координат относительно этой прямой. *Ответ*: — при $C > 0$, + при $C < 0$.

34a. Узнать, лежит ли точка (1; 2) выше или ниже прямой $x + y - 2 = 0$. *Ответ*: выше.

34b. То же для точки (1; 3) относительно прямой $x - 2y + 1 = 0$. *Ответ*: выше.

34c. Лежит ли точка (3; 7) справа или слева от прямой $4x - 5y + 9 = 0$? *Ответ*: слева.

35a. Лежат ли точка (1; 1) и начало координат по одну сторону или по разные стороны относительно прямой $x - 3y + 4 = 0$? *Ответ*: по одну сторону.

35b. Лежат ли точки (1; 2) и (3; 4) по одну или по разные стороны от прямой $x + 2y - 6 = 0$? *Ответ*: по разные стороны.

36. Доказать, что точка (2; 2) находится внутри треугольника, заданного уравнениями сторон $x + 2y - 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $3x - 2y - 7 = 0$.

37a. Доказать, что если даны прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то уравнения обеих биссектрис двух смежных углов, образованных этими прямыми, будут

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

37b. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми $4x - 3y + 3 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$, в котором лежит точка (1; 2). *Ответ*: $7x - 7y + 5 = 0$.

38. Через точку (1; 1) провести прямую, равноудаленную от точек (6; 1) и (2; 5) и проходящую между ними. *Ответ*: $2x - 3y + 1 = 0$.

39a. Вывести формулу для вычисления расстояния от точки до прямой, исходя из тех соображений, что удвоенная площадь треугольника $M_1M_2M_3$, вершинами которого служат точки M_2 и M_3 пересечения прямой с осями и данная точка M_1, выражается произведением искомого расстояния на длину M_2M_3.

39b. Доказать, что расстояние p от начала координат до прямой $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ выражается формулой

$$p = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

40. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1; -1)$ и отстоящей от точки $(4; 0)$ на расстоя... *Ответ*: две прямые $y + 1 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$.

41. Через точку $(1; 0)$ провести прямую, проходя... над точкой $(10; 3)$ на расстоянии 3 единиц от после... *Ответ*: $3x - 4y - 3 = 0$.

42. Написать уравнение прямой, параллельной пря...

$$3x - 4y + 5 = 0$$

и отстоящей от нее на расстояние 2 единиц. *Ответ*: ... прямые $3x - 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$.

43a. Найти отражение точки $(1; 8)$ относительно пря... мой $3x - 4y + 4 = 0$, как в зеркале. *Ответ*: ... У к а з а н и е. *Отражением точки M* относительно пря... мой P_1P называется точка M_1, лежащая на продолже... перпендикуляра, опущенного на прямую из точки ... причем прямая делит расстояние между M и M_1 попола...

43b. Найти отражение точки $(3; 3)$ относительно пря... мой $3y - 2x = 16$. *Ответ*: $(-1; 9)$.

44a. Написать уравнения сторон треугольника с вер... шинами $(1; -1)$, $(2; 0)$, $(5; 1)$. *Ответ*: $x - y - 2 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$.

44b. Написать уравнения сторон треугольника, за... данного вершинами $(1; 3)$, $(2; 4)$, $(-1; 2)$. *Ответ*: $x - y + 2 = 0$, $2x - 3y + 8 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$.

45a. Провести прямую через точку $(1; 2)$ и через точку пересечения прямых $3x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$. *Ответ*: $7x + y - 9 = 0$.

45b. Провести прямую через точку $(1; 1)$ и точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$, $x + y = 0$. *Ответ*: $x - 3y + 2 = 0$.

45c. Через точку пересечения прямых $x - y = 0$, $x - 4y + 1 = 0$ провести прямую так, чтобы ее начальная ордината (отрезок на оси ординат) равнялась 1. *Ответ*: $2x + y - 1 = 0$.

46. Даны вершины треугольника M_1 $(1; 2)$, M_2 $(2; 3)$, M_3 $(3; 1)$. Написать уравнение высоты, опущенной из точки M_1. *Ответ*: $x - 2y - 3 = 0$.

47. Найти площадь треугольника по координатам его вершин M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, M_3 $(x_3; y_3)$, вычисляя длину стороны и опущенного на нее перпендикуляра. *Ответ*:

$$S = + \left[\frac{1}{2} (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \right].$$

[illegible] Привести к виду в отрезках на осях уравнение [illegible] $- 15 = 0$ и построить эту прямую. *Ответ:* [illegible] $= 1$.

[illegible] Привести к виду в отрезках на осях, а затем [illegible] прямые:

$$6x + 5y - 30 = 0, \quad 2x + 3y + 6 = 0,$$

$$y = 4x + 8, \qquad 3x - 4y - 60 = 0.$$

[illegible] Отрезки, отсекаемые прямой на осях, суть $a =$ [illegible], $b = 1$. Написать уравнение прямой в форме [illegible] коэффициентом. *Ответ:* $y = \frac{1}{2} x + 1$.

[illegible] Написать уравнение прямой в форме в отрезках на [illegible], если дано, что она наклонена к оси абсцисс под [illegible] $45°$ и отсекает на оси ординат отрезок длиной 1. *Ответ:* $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$.

51a. Через точку (2; 1) провести прямую так, чтобы [illegible] отсекала от первого координатного угла площадь, равную 4. *Ответ:* $x + 2y - 4 = 0$.

51b. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y - 1 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла площадь, равную 5. *Ответ:* $2x + 5y - 10 = 0$.

52. Даны уравнения сторон треугольника $M_1M_2M_3$: $(M_1M_2)\ x + 6y - 5 = 0$, $(M_2M_3)\ x + y - 5 = 0$, $(M_3M_1)\ 2x - 3y + 5 = 0$.

a) Найти вершины. *Ответ:* $M_1(-1; 1)$, $M_2(5; 0)$, $M_3(2; 3)$.

b) Найти центр масс. *Ответ:* (2; 4/3).

c) Найти уравнения медиан. *Ответ:* $x - 9y + 10 = 0$, $4x + 9y - 20 = 0$, $x - 2 = 0$.

d) Найти уравнения высот. *Ответ:* $x - y + 2 = 0$, $3x + 2y - 15 = 0$, $6x - y - 9 = 0$.

e) Найти прямые, проходящие через вершины параллельно сторонам. *Ответ:* $x + y = 0$, $2x - 3y - 10 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$.

f) Вычислить периметр. *Ответ:* периметр равен $\sqrt{37} + \sqrt{18} + \sqrt{13}$.

g) Вычислить длины высот. *Ответ:* $h_1 = 5/\sqrt{2}$, $h_2 = 15/\sqrt{13}$, $h_3 = 15/\sqrt{37}$.

h) Вычислить площадь этого треугольника. *Ответ:* 15/2.

k) Найти центр и радиус описанного круга. Отв... центр $(19/10; -1/10)$, $R = \sqrt{9,62}$.

l) Вычислить тангенсы углов этого треугольн... *Ответ*: $\operatorname{tg} \angle M_1 = 15/16$, $\operatorname{tg} \angle M_2 = 5/7$, $\operatorname{tg} \angle M_3$ ...

53. Световой луч, падая из точки $(-3; 4)$ и отраж... от прямой $y - x = 0$, проходит затем через точку (... 5). Написать уравнение луча падающего и луча отра... ного. *Ответ*: $3x + 4y - 7 = 0$, $4x + 3y - 7 = 0$.

54. Доказать, что в равностороннем треугольн... сумма расстояний от любой внутренней точки до сто... постоянна, а именно равна стороне, умноженной ... $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

55. Даны две точки $M_1\,(1; 2)$, $M_2\,(6; 3)$. На оси аб... цисс найти точку M так, чтобы угол M_1MM_2 был прям... (Решить: a) не пользуясь уравнением прямой, b) поль... зуясь им.) *Ответ*: $(4; 0)$.

56a. Основание равнобедренного треугольника име... уравнение $x + 7y - 21 = 0$. Одна из боковых сторо... имеет уравнение $4x + 3y - 34 = 0$. Найти уравнени... другой боковой стороны, если известно, что она проходи... через точку $(8; 9)$. *Ответ*: $3x - 4y + 12 = 0$.

56b. Даны уравнения боковых сторон равнобедренно... го треугольника $x - y - 3 = 0$, $x - 7y + 3 = 0$ и точ... ка $(1; 2)$ на его основании. Написать уравнение основа... ния. *Ответ*: $x - 2y + 3 = 0$.

57. Написать уравнение прямой, равноудаленной от то... чек $M_1\,(x_1; y_1)$, $M_2\,(x_2; y_2)$. *Ответ*: $(x_2 - x_1)\,x + (y_2 - y_1)\,y +$
$$+ \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2} = 0.$$

Глава 5

ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

§ 1. Окружность

a. В качестве следующего примера отыскания уравнения геометрического места точек мы рассмотрим окружность. Очевидно, окружность будет вполне определена, если дан ее центр $C\ (m;\ n)$ и радиус a.

Пусть $M\ (x;\ y)$ — какая-либо точка плоскости (рис. 56); квадрат расстояния от нее до центра $C\ (m;\ n)$ окружности выражается величиной

$$(x - m)^2 + (y - n)^2.$$

Эта величина будет равна a^2 (квадрату радиуса), если точка M лежит на окружности, она будет меньше a^2, если точка M расположена внутри окружности, и будет больше a^2, если точка M расположена вне окружности. Таким образом, для всех точек окружности имеем уравнение

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2.$$

Для точек же, не лежащих на окружности, оно не будет верно.

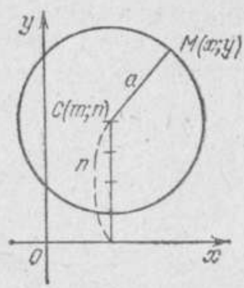


Рис. 56

Таким образом, это уравнение и есть *уравнение окружности*.

Например, уравнение окружности радиуса 3 с центром в точке (2; 4), изображенной на рис. 56, будет

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

b. В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то $m = 0$ и $n = 0$. Уравнение окружности принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение иногда полезно представить и в
форме:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Наличие двух знаков в правой части уравнения го-
рит о том, что каждой абсциссе
чают две точки окружности M_1 и
у которых ординаты равны по
по имеют различные знаки. По
данная окружность симметрична
носительно оси абсцисс.

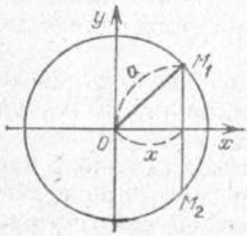


Рис. 57

Например, уравнение окру
сти, изображенной на рис. 57 (a
= 2), будет

$$x^2 + y^2 = 4,$$

или в явной форме $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$.

§ 2. Эллипс. Построение посредством нити. Зависимость между полуосями и полуфокусным расстоянием

a. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых его *фокусами*, есть величина постоянная.

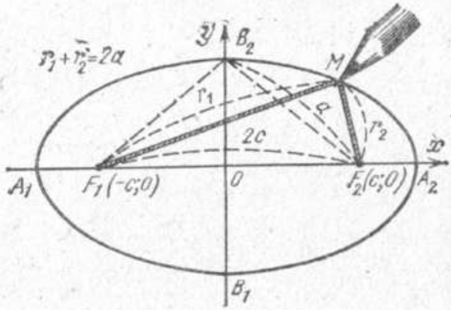


Рис. 58

Постоянную сумму расстояний обозначим через $2a$, так что для любой точки M эллипса имеем (рис. 58).

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

b. Построение эллипса можно осуществить посредством нити длиной $2a$, закрепленной концами в фокусах.

нить острием карандаша и двигая его так, чтобы она все время была в натянутом состоянии, мы заставим острие вычертить эллипс.

Действительно, при любом положении острия карандаша сумма расстояний его до фокусов равна длине нити, т. е. $2a$.

Середина расстояния между фокусами называется *центром эллипса*, так как относительно этой точки эллипс симметричен.

Длина F_1F_2 называется *фокусным расстоянием*, обозначим его через $2c$; а половина этого расстояния называется *полуфокусным расстоянием*, оно равно c.

Весьма удобно центр эллипса принять за начало координат, а за ось абсцисс принять прямую, проходящую через фокусы (как на рис. 58). Тогда координаты фокусов будут $F_1(-c;\, 0)$, $F_2(c;\, 0)$.

Всякий отрезок, соединяющий две точки эллипса, если он проходит через центр, называется *диаметром эллипса*. Рассматривая форму эллипса, мы видим, что наибольший диаметр проходит через фокусы. Этот диаметр A_1A_2 называется *большой осью эллипса*.

Нетрудно показать, что длина большой оси эллипса равна $2a$.

В самом деле, основное свойство эллипса (1), справедливое для всех его точек, применимо, между прочим, и для точек A_1 и A_2. Поэтому

$$F_1A_2 + F_2A_2 = 2a. \tag{2}$$

Но из рис. 58 видно, что

$$F_1A_2 = OA_2 + c, \quad F_2A_2 = OA_2 - c.$$

Ввиду этого из равенства (2) получаем $2OA_2 = 2a$ или $OA_2 = a$. Ясно, что и $A_1O = a$, так что

$$A_1A_2 = 2a.$$

Число a называется *большой полуосью*. Мы видим также, что наименьший диаметр эллипса перпендикулярен наибольшему, его называют *малой осью эллипса* и обозначают через $2b$, так что $B_1B_2 = 2b$.

Число b называется *малой полуосью*. Концы осей, т. е. точки A_1, A_2, B_1, B_2, называются *вершинами эллипса*.

Очевидно, основное свойство эллипса применимо и для вершин B_1 и B_2. Применяя его, например, к вершине B_2, получим $F_1B_2 + F_2B_2 = 2a$, а так как $F_1B_2 = F_2B_2$, то $2F_2B_2 = 2a$, или $F_2B_2 = a$.

После этого из прямоугольного треугольника OF_1B_1 найдем очень важное соотношение между полуосями и полуфокусным расстоянием эллипса:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

или же

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Нетрудно понять, что эллипсы могут быть различной формы, причем при заданной длине нити форма эллипса зависит только от расстояния между фокусами, т. е. при заданном a форма зависит только от c. Проследим эту зависимость.

Допустим, что фокусы сближаются и, наконец, сливаются с началом координат, тогда эллипс постепенно обратится в окружность, так как отрезки F_1M и F_2M будут стремиться совпасть, и когда они совпадут, нить, при помощи которой чертится эллипс, будет действовать наподобие циркуля.

Наоборот, если фокусы отодвигаются от начала координат, то эллипс постепенно сплющивается, и когда фокусы совпадут с концами большой оси, нить совпадет с осью абсцисс и острие будет двигаться только по отрезку A_1A_2, так что эллипс вырождается в прямолинейный отрезок A_1A_2.

Степень сжатия эллипса принято характеризовать дробью

$$e = c/a.$$

Эта дробь называется *эксцентриситетом эллипса*. Из вышесказанного следует, что он может изменяться от нуля до единицы, причем для окружности эксцентриситет

$$e = 0/a = 0,$$

а для эллипса, выродившегося в прямолинейный отрезок, $e = a/a = 1$.

§ 3. Построение эллипса по точкам

Данное выше построение эллипса посредством нити имеет свои неудобства. Поэтому мы дадим еще способ построения эллипса по точкам.

Согласно определению эллипса сумма расстояний r_1 и r_2 для всех его точек должна быть одна и та же. Значит, если мы, желая перейти от одной точки эллипса к другой, увеличиваем или уменьшаем r_1, то r_2, наоборот, должно уменьшиться или увеличиться и притом на такую же величину.

Основываясь на этом, построение эллипса можно осуществить так (рис. 59).

Сначала строим точки A_1 и A_2. Мы видим, что A_2 есть точка касания двух окружностей, из которых одна имеет

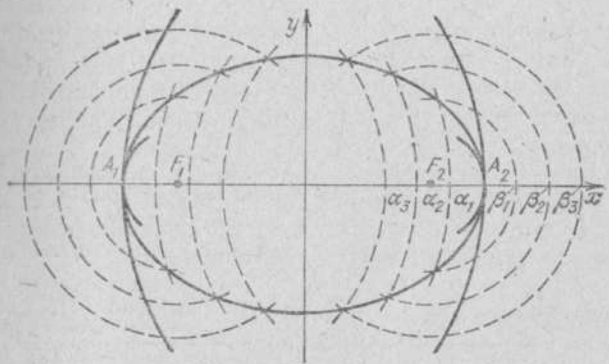


Рис. 59

центр в фокусе F_1 и радиус, равный F_1A_2, а другая — центр в фокусе F_2 и радиус F_2A_2.

Дальнейшие точки эллипса получим уже пересечением пар окружностей с центрами в фокусах F_1 и F_2 и радиусами r_1 и r_2, соответственно равными

$$r_1 = F_1\alpha_1, \quad r_2 = F_2\beta_1;$$

$$r_1 = F_1\alpha_2, \quad r_2 = F_2\beta_2;$$

$$r_1 = F_1\alpha_3, \quad r_2 = F_2\beta_3,$$

т. е. каждое новое значение r_2 больше, а новое значение r_1 меньше предыдущего на одну и ту же величину.

Разумеется, чем ближе друг к другу точки

$$\alpha_2, \alpha_1, A_2, \beta_1, \beta_2,$$

тем точнее наше построение.

Левая половина эллипса строится таким же путем, причем здесь мы будем начинать от точки A_1. Учащимся рекомендуется самим построить этим способом эллипс по данным: $a = 5$, $c = 4$.

§ 4. Уравнение эллипса

а. Для любой точки $M(x; y)$ эллипса (рис. 60) мы должны иметь

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Очевидно, r_1 есть расстояние между точками $F_1(-c; 0)$ и $M(x; y)$, точно так же r_2 есть расстояние между точками $F_2(c; 0)$ и $M(x; y)$.

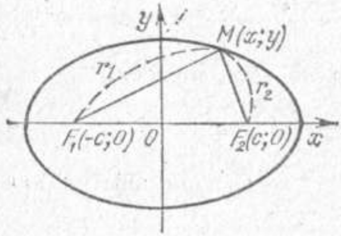


Рис. 60

Поэтому по формуле расстояния между двумя точками мы получим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2}$$

Это и есть уравнение эллипса, но оно имеет довольно сложный вид, а потому мы постараемся его упростить. А именно, перенося первый радикал в правую часть, мы возведем в квадрат обе части уравнения, благодаря чему освободимся от одного радикала:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Раскрывая скобки в левой и правой части и вычеркивая из обеих частей равенства одинаковые члены, получим

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc.$$

Теперь уединим оставшийся радикал и, сократив обе части уравнения на $4a$, получим

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x. \tag{3}$$

Последнее равенство понадобится нам в дальнейшем, но сейчас мы еще раз возведем в квадрат обе его части, чем

...бавимся от последнего радикала:

$$(x+c)^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

или, приводя подобные члены, имеем

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2,\quad \frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2}+y^2=a^2-c^2.$$

Разделив обе части равенства на a^2-c^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{4}$$

Вспоминая теперь, что $a^2-c^2=b^2$, получим уравнение эллипса в простейшем виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

Последнее уравнение получено путем упрощения основного уравнения (2), поэтому координаты каждой точки эллипса ему удовлетворяют. Следует, впрочем, заметить, что, производя упрощения, мы два раза позволили себе возводить обе части уравнения в квадрат. Это обстоятельство имеет немаловажное значение, так как из алгебры мы знаем, что при возведении уравнений в квадрат могут появиться посторонние решения, а потому не исключена возможность, что уравнению (3) удовлетворяют координаты каких-либо точек, не принадлежащих эллипсу. Однако в данном случае эти опасения не оправдываются. Мы сейчас покажем, что никакие точки, не принадлежащие эллипсу, не удовлетворяют уравнению (4). Для этого решим уравнение (4) относительно y. Тогда будем иметь

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{6}$$

b. Рассматривая полученное уравнение, мы видим, что, во-первых, абсциссы не могут по численной величине превосходить число a, так как иначе правая часть равенства (6) будет мнимой.

Во-вторых, каждой абсциссе соответствуют численно равные и противоположные по знаку ординаты. Но то же самое мы наблюдаем и на чертеже эллипса, сделанном посредством нити. Поэтому уравнение (5) вполне соответствует чертежу и, следовательно, не может удовлетворяться никакими точками, кроме точек эллипса.

§ 5. Связь эллипса с окружностью

a. К эллипсу можно подойти еще с другой точки зрения, чем мы это делали до сих пор. Мы покажем сейчас, что эллипс с полуосями a и b можно получить из окружности радиуса a, центр которой, как и у эллипса, находится в начале координат, путем умножения длин всех ординат на одну и ту же дробь b/a. Действительно, если через y_1 и y обозначим соответственно ординаты окружности и эллипса, отвечающие одной и той же абсциссе x (рис. 61), то

$$y_1 = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Сравнивая эти уравнения, получим равенство

$$y = \frac{b}{a}\, y_1,$$

которое и доказывает наше утверждение.

b. Указанное изменение ординат окружности с целью получить из них ординаты эллипса можно сделать чисто

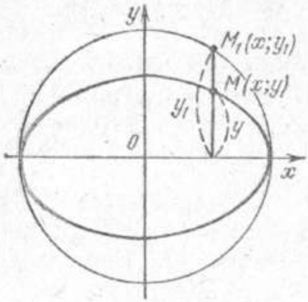


Рис. 61

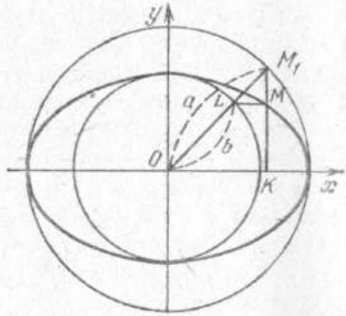


Рис. 62

геометрически, и тогда мы получим другой способ построения эллипса.

Для этого строим две концентрические окружности с радиусами a и b и центром в начале координат.

Если теперь мы возьмем какую-либо точку M_1 на внешней окружности, то путем построения, указанного на рис. 62, мы немедленно получим соответствующую точку M эллипса. (Строим радиус OM_1 и ординату KM_1, тогда прямая, проведенная через точку L параллельно оси абсцисс, пересекаясь с ординатой KM_{11} и дает искомую точку M эллипса.)

Действительно, имея в виду теорему о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла, имеем

$$\frac{KM}{K_1M}=\frac{b}{a}, \quad KM=\frac{b}{a}KM_1,$$

т. е. KM получается из ординаты окружности путем умножения ее на b/a, а следовательно, KM и есть ордината эллипса.

§ 6. Директрисы эллипса

a. В § 4 нами получена формула (3). Как мы видим, ее левая часть выражает расстояние от точки $M(x; y)$ эллипса до левого фокуса. Следовательно, формула (3) может быть переписана так:

$$r_1 = a - ex \qquad (e = c/a). \tag{1}$$

Если вынесем в правой части эксцентриситет e за скобку, то получим

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} - x\right).$$

b. Выражению в скобках можно дать простое геометрическое толкование. Для этой цели строим прямую PQ, параллельную оси Oy и задаваемую уравнением $x = -a/e$ (рис. 63) (так как $e < 1$, то она не принадлежит

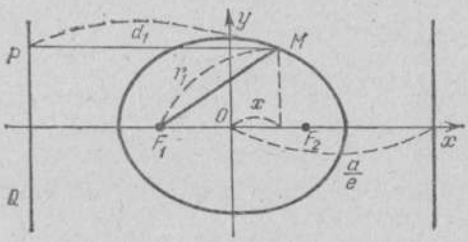


Рис. 63

эллипсу). Эту прямую назовем *директрисой* левого фокуса; если мы рассмотрим расстояние d_1 от точки $M(x; y)$ до директрисы, то увидим, что оно как раз равняется выражению в скобках.

Поэтому формулу (1) можно переписать так: $r_1 = ed_1$, или $r_1/d_1 = e$.

§ 7. Гипербола. Построение посредством нити

a. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний до двух данных точек F_1 и F_2, называемых ее *фокусами*, есть величина постоянная.

Постоянную разность расстояний обозначим через $2a$, так что для любой точки M гиперболы имеем (рис. 64)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \tag{1}$$

(знак $+$ берем, если $r_1 > r_2$, и знак $-$ берем, если $r_1 < r_2$).

b. Построение гиперболы можно осуществить посредством нити и чертящего острия с малым кольцом около него. Согнув нить вдвое (в точке N) с тем расчетом, чтобы

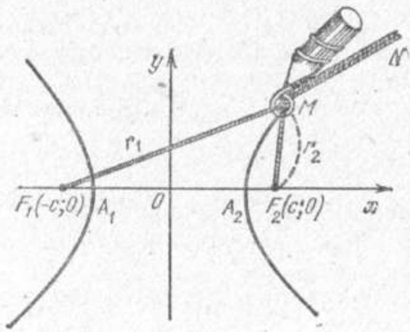


Рис. 64

разность длин полученных частей нити равнялась $2a$, закрепим затем концы нити в фокусах F_1 и F_2, согнутый же вдвое конец нити проденем через кольцо.

Если теперь, взяв нить за согнутый конец N, мы будем поддерживать ее в натянутом состоянии и одновременно другой рукой будем двигать чертящее острие, то и получим гиперболу. Действительно, при любом положении чертящего острия разность расстояний его до фокусов будет оставаться неизменной (насколько увеличится или уменьшится r_1, настолько же увеличится или уменьшится и r_2).

c. Середина расстояния между фокусами называется *центром гиперболы*, так как относительно этой точки гипербола симметрична.

Длина F_1F_2 называется *фокусным расстоянием*. Мы ее обозначим через $2c$, а половина этого расстояния называется *полуфокусным расстоянием*, она равна c.

Весьма удобно центр гиперболы принять за начало координат, а за ось абсцисс принять прямую, проходящую через фокусы (как на рис. 64). Тогда координаты фокусов будут

$$F_1(-c;\ 0),\quad F_2(c;\ 0).$$

d. Всякий отрезок, соединяющий две точки гиперболы, если он проходит через центр, называется *диаметром гиперболы*. Рассматривая форму гиперболы, мы видим, что наименьший диаметр лежит на оси абсцисс; этот диаметр A_1A_2 называется *действительной осью* гиперболы. Нетрудно показать, что длина действительной оси гиперболы равна $2a$.

В самом деле, основное свойство гиперболы (1), справедливое для всех ее точек, справедливо и для точек A_1 и A_2. Поэтому

$$F_1A_2 - F_2A_2 = 2a. \tag{2}$$

Но из чертежа видно, что

$$F_1A_2 = c + OA_2,\quad F_2A_2 = c - OA_2.$$

Ввиду этого равенство (2) дает $2OA_2 = 2a$, или $OA_2 = a$. Ясно, что и $A_1O = a$, так что $A_1A_2 = 2a$.

Число a называется *действительной полуосью*. Концы действительной оси, т. е. точки A_1 и A_2, называются *вершинами гиперболы*.

e. Совершенно ясно далее, что для гиперболы $2a \leqslant 2c$.

Действительно (рис. 64), разность двух сторон треугольника меньше или равна третьей и потому из треугольника F_1MF_2 имеем

$$F_1M - F_2M \leqslant F_1F_2,\quad r_1 - r \leqslant 2c,\quad 2a \leqslant 2c,\quad a \leqslant c.$$

Поэтому также будем иметь $a^2 \leqslant c^2$, и выражение $a^2 - c^2$ для гиперболы будет уже отрицательным (а не положительным, как у эллипса). Это выражение мы обозначаем теперь уже через $-b^2$:

$$a^2 - c^2 = -b^2.$$

Геометрический смысл величины b выяснится дальше.

Отношение $c/a = e$ для гиперболы тоже носит назва-ние *эксцентриситета*. Но здесь ввиду $a \leqslant c$ имеем

$$e \geqslant 1,$$

тогда как для эллипса

$$e \leqslant 1.$$

§ 8. Построение гиперболы по точкам

Данное выше построение гиперболы посредством нити имеет свои неудобства. Поэтому мы дадим еще один способ построения гиперболы по точкам.

Согласно определению гиперболы разность расстояний r_1 и r_2 для всех ее точек должна быть одна и та же. Значит, если мы, желая перейти от одной точки гиперболы к другой, увеличиваем или уменьшаем r_1, то r_2 тоже должно увеличиться или уменьшиться, и притом на такую же величину.

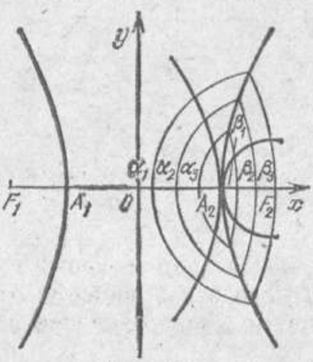


Рис. 65

Основываясь на этом, построение гиперболы можно осуществить так (рис. 65).

Строим сначала точки A_1 и A_2. Мы видим, что A_2 есть точка касания двух окружностей, из которых одна имеет центр в фокусе F_1 и радиус, равный F_1A_2, а другая имеет центр в фокусе F_2 и радиус, равный F_2A_2.

Дальнейшие точки гиперболы получим уже пересечением пар окружностей с центрами в фокусах F_1 и F_2 и радиусами r_1 и r_2, соответственно равными

$$r_1 = F_1\alpha_1, \quad r_2 = F_2\beta_1,$$

$$r_1 = F_1\alpha_2, \quad r_2 = F_2\beta_2,$$

$$r_1 = F_1\alpha_3, \quad r_2 = F_2\beta_3,$$

т. е. каждые новые значения r_1 и r_2 больше предыдущих на одну и ту же длину.

Чем ближе точки..., α_3, α_2, α_1, A, β_1, β_2, β_3, . . ., тем точнее, конечно, наше построение.

§ 9. Уравнение гиперболы

а. Для любой точки M $(x;\ y)$ гиперболы (рис. 66)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Рассматривая же r_1 как расстояние между точками F_1 $(-c;\ 0)$ и M $(x;\ y)$, а r_2 как расстояние между точками F_2 $(c;\ 0)$ и M $(x;\ y)$, имеем отсюда

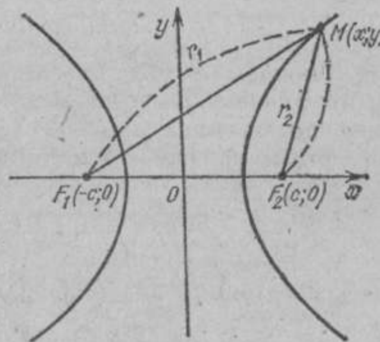


Рис. 66

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{1}$$

Это и есть уравнение гиперболы, но оно имеет довольно сложный вид, а потому мы постараемся его упростить.

А именно, перенеся первый радикал в правую часть, мы возведем обе части уравнения в квадрат с целью освободиться от одного из радикалов:

$$-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Однако, сравнивая это уравнение с соответствующим уравнением для эллипса, мы видим, что эти уравнения отличаются друг от друга только знаком, стоящим перед радикалом в левой части.

По возведении же в квадрат это различие пропадет, а потому дальнейшие преобразования будут такие же точно, как и у эллипса, вплоть до уравнения (4) § 4, т. е. мы придем к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Но тогда как у эллипса было

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

здесь мы должны положить

$$a^2 - c^2 = -b^2,$$

а потому уравнение (2) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

b. Далее, как и у эллипса, здесь не лишним будет проверить, не будут ли уравнению (3) удовлетворять какие-либо точки, не принадлежащие гиперболе.

Но, решая уравнение относительно y, имеем

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (4)$$

Мы видим, что, во-первых, абсциссы по абсолютной величине могут быть только больше или равны a ($x^2 > a^2$) (иначе правая часть уравнения (4) будет мнимой).

Во-вторых, каждой абсциссе отвечают численно равные и противоположные по знаку ординаты. Но то же самое мы наблюдаем и на чертеже гиперболы, сделанном посредством нити.

§ 10. Асимптоты. Геометрическое значение b

a. Явному уравнению (4) § 9 гиперболы можно придать следующий вид (беря пока только знак $+$):

$$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \qquad (1)$$

Эта форма уравнения гиперболы позволит нам исследовать, что будет, когда точка M гиперболы удаляется в бесконечность, т. е. когда абсцисса x точки M бесконечно возрастает.

Если x бесконечно возрастает, то выражение под знаком радикала, а следовательно, и сам радикал приближается к 1 (потому что дробь a/x, имея бесконечно возрастающий знаменатель, приближается к нулю).

b. Попробуем поэтому заменить этот радикал единицей и посмотрим, что тогда сделается с y. Будем иметь

$$y_1=\frac{b}{a}x, \qquad (2)$$

т. е. y обратится в ординату прямой с угловым коэффициентом b/a, проходящей через начало координат.

c. Так как отброшенный радикал меньше 1, то $y_1 > y$, т. е. любая ордината прямой больше соответствующей ординаты гиперболы (2). Следовательно, прямая лежит выше гиперболы.

d. Изучим разность $d = y_1 - y$ между обеими ординатами (на рис. 67 $d = M_1M$). Имеем

$$y_1-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a}x\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)=$$

$$= \frac{b}{a} x \frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{b}{a} x \frac{1-\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} = \frac{\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} < \frac{ab}{x}$$

(потому что отброшенный знаменатель больше 1). Итак, $d < \frac{ab}{x}$. Но при бесконечном возрастании x эта дробь стремится к нулю и, следовательно, к нулю стремится и d.

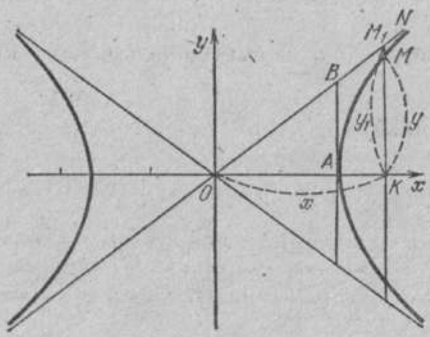


Рис. 67

Итак, при бесконечном возрастании x разность $d = y_1 - y$ между ординатами прямой и гиперболы приближается к нулю.

Иными словами, при бесконечном возрастании x гипербола приближается к прямой ON. Эта прямая, таким образом, является *асимптотой* гиперболы.

е. Ввиду симметрии нижний конец правой ветви гиперболы будет иметь асимптотой прямую $y = -\frac{b}{a}x$; эти же асимптоты

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

будут служить и асимптотами концов левой ветви гиперболы.

f. Теперь нетрудно установить и геометрическое значение b.

Действительно, рассмотрим ординату $y = AB$ асимптоты, восставленную из вершины A. Ее абсцисса $x = OA = a$, и потому, имея в виду, что координаты точки B должны удовлетворять уравнению (2) асимптоты, получим

$$AB = \frac{b}{a} \cdot a = b.$$

Итак, $b = AB$, т. е. равно ординате асимптоты, восставленной из вершины гиперболы.

g. Заметим еще, что из треугольника OAB ввиду $OA = a$, $AB = b$ имеем

$$|OB| = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Этим обстоятельством удобно пользоваться для построения фокуса. Построив точку B по данным a и b, откладываем далее $OF = OB$ на оси Ox.

§ 11. Директрисы гиперболы

a. В § 9 нами было сказано, что, начиная с известного места, вывод уравнения гиперболы будет совпадать с

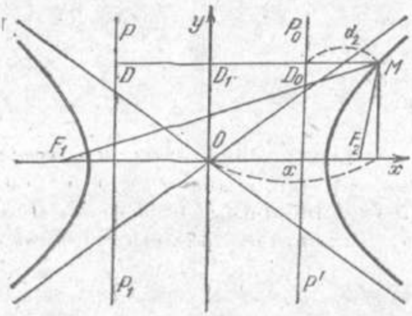


Рис. 68

таковым для эллипса. Следовательно, и для гиперболы будем иметь равенство

$$r_1 = a + ex \qquad (e = c/a).$$

Если теперь вынесем в правой части эксцентриситет e за скобку, то получим

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} + x\right). \tag{1}$$

b. Выражению в скобках можно дать простое геометрическое истолкование (рис. 68). Для этой цели строим прямую P_1P с уравнением

$$x = -a/e.$$

Тогда расстояние $d_1 = DM$ от точки M до этой прямой будет

$$d_1 = DD_1 + D_1M = \frac{a}{e} + x,$$

т. е. как раз равно выражению в скобках. Формула (1) принимает вид

$$r_1 = ed_1, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{d_1} = e.$$

с. Нетрудно показать далее, что правому фокусу F_2 будет отвечать и правая директриса P_0P' с уравнением $x = a/e$. Подставляя $r_1 = a + ex$ в равенство $r_1 - r = 2a$, получим

$$r = a + ex - 2a = ex - 2 = e\left(x - \frac{a}{e}\right).$$

Мы видим, что выражение в скобках равно как раз расстоянию

$$d_2 = D_0M = D_1M - D_1D_0 = x - \frac{a}{e},$$

или

$$\frac{r}{d} = e. \tag{2}$$

Прямая P_1P называется директрисой, отвечающей фокусу F_1. Формула (2) показывает, что отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e гиперболы.

§ 12. Парабола. Построение по точкам

а. Выше мы показали, что как эллипс, так и гиперболу можно рассматривать как геометрическое место точек, отношение расстояний которых до фокуса и до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e:

$$\frac{r}{d} = e.$$

На рис. 69 мы умышленно взяли для эллипса левые фокус и директрису, а для гиперболы — правые.

Разница между эллипсом и гиперболой, однако, состоит в том, что для эллипса $c/a = e < 1$, тогда как для гиперболы $c/a = e > 1$. Естественно возникает вопрос:

посмотреть, нет ли кривой, у которой всегда $e = 1$. Кривая, отвечающая этому случаю, не будет ни эллипсом,

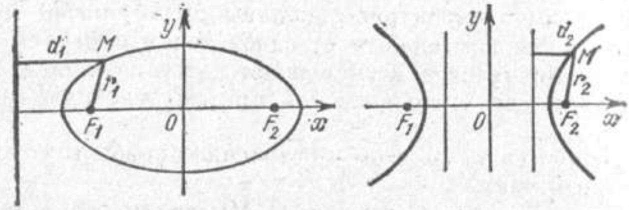


Рис. 69

ни гиперболой. Это будет новая кривая — ее называют *параболой*.

Таким образом, для любой точки параболы

$$r/d = 1, \quad r = d,$$

т. е. расстояния от нее до фокуса и до директрисы равны, b. Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса и от директрисы.

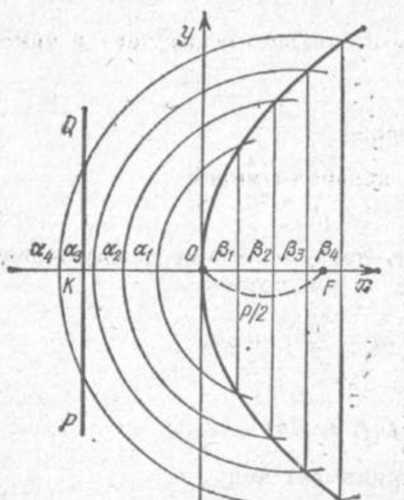


Рис. 70

Директрису PQ и *фокус* F располагают, как указано на рис. 70. Середина O отрезка KF (перпендикулярного к директрисе) принадлежит параболе, так как равноудалена от фокуса и директрисы. Ее мы принимаем за начало координат, направляя ось абсцисс по KF.

Точка O называется *вершиной параболы*, форма параболы, очевидно, зависит только от расстояния KF. Это расстояние обозначается буквою p и называется *параметром параболы*.

Имеем, очевидно, равенство

$$KO = OF = p/2.$$

Координаты фокуса F будут $(p/2;\ 0)$.

c. Чтобы выяснить, какую форму имеет парабола, покажем, как ее можно построить по точкам. Согласно определению расстояния r и d от любой точки параболы до фокуса и до директрисы должны быть равны. Поэтому, если мы, желая перейти от одной точки параболы к другой, увеличиваем или уменьшаем r, то d должно тоже увеличиться или уменьшиться и притом на такую же величину.

Основываясь на этом, построение параболы можно осуществить так.

Сначала строим вершину O. Мы видим, что O есть точка касания окружности с центром в F и радиусом FO с осью Oy.

Дальнейшие точки параболы получим уже пересечением прямых, параллельных Oy, и окружностей с центром в F, причем расстояния d прямых от директрисы и радиусы окружностей берутся соответственно равными:

$$r = F\alpha_1, \quad d = K\beta_1,$$
$$r = F\alpha_2, \quad d = K\beta_2,$$
$$r = F\alpha_3, \quad d = K\beta_3,$$

так что каждые новые r и d больше предыдущих и притом на одну и ту же величину.

§ 13. Уравнение параболы

a. Для каждой точки параболы имеем

$$r = d. \tag{1}$$

Но r можно рассматривать как расстояние между точками F $(p/2; 0)$ и M $(x; y)$ (рис. 71), и потому

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Далее имеем

$$d = D_1M = D_1D + DM = \frac{p}{2} + x.$$

Поэтому равенство (1) принимает вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x.$$

b. Однако найденное уравнение следует еще упростить. Возводя в квадрат и раскрывая скобки, имеем

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2.$$

Приводя подобные члены, мы и получим простейшее уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

c. Решая это уравнение относительно y, имеем

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Отсюда видим, что x может принимать только положительные значения (и нуль), иначе y будет мнимым. При этом каждому положительному x отвечают два значения y. Итак, форма параболы, получаемая согласно уравнению (2), в точности соответствует чертежу, сделанному выше.

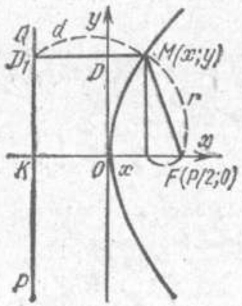


Рис. 71

d. *Связь с параболой* $y = ax^2$. Наша цель — показать, что рассмотренные нами раньше параболы

$$y = ax^2$$

те же самые, что и рассматриваемые сейчас.

Действительно, поступим с графиком параболы $y^2 = 2px$ так, как мы это делали в начале книги при рассмотрении обратных функций. Повернем плоскость чертежа вокруг оси (биссектрисы первого координатного угла) на 180° (рис. 72). Тогда ось Ox совпадет с Oy и ось Oy совпадет с Ox. Парабола займет новое положение. Ее новое уравнение получим из старого, переставив в нем y на место x и x на место y. Оно теперь будет

$$x^2 = 2py,$$

или

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

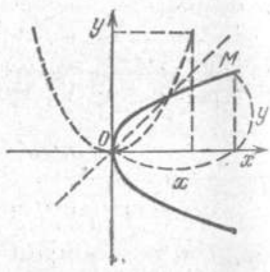


Рис. 72

Из этого уравнения, употребляя обозначение

$$\frac{1}{2p} = a,$$

имеем

$$y = ax^2.$$

§ 14. Преобразование координат

а. При решении какого-либо вопроса методами аналитической геометрии (например, при изучении свойств кривых линий) весьма важно бывает целесообразным образом выбрать координатные оси.

Может оказаться, что при одном выборе осей координаты некоторых интересующих нас точек или уравнения интересующих нас линий выглядят сложно.

Тогда возникает вопрос о замене выбранных осей новыми, относительно которых можно предполагать, что интересующие нас координаты или уравнения получаются в более простом виде.

Но когда новые координатные оси намечены, возникает вопрос, как, зная старые координаты точек или уравнения линии, найти новые координаты или уравнения.

Для решения поставленных задач служат так называемые *формулы перехода*, связывающие старые координаты точки с новыми ее координатами.

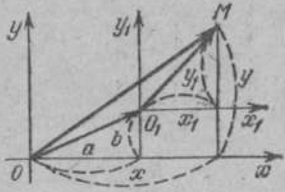


Рис. 73

Именно, эти формулы дают выражения старых координат $(x; y)$ точки через новые координаты $(x_1; y_1)$.

b. Начнем с простейшего случая, когда новые оси имеют новое начало координат, но старое направление, т. е. когда они параллельны старым.

Пусть $(a; b)$ — старые координаты нового начала O_1 и O_1x_1, O_1y_1 — новые оси. Рассмотрим векторную цепь OO_1M и ее замыкающий вектор $\overline{OM}$ (рис. 73).

Проектируя на старую ось абсцисс, имеем

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = \text{пр}_{Ox}\overline{OO_1} + \text{пр}_{Ox}\overline{O_1M},$$

откуда, ввиду того что

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = x, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{OO_1} = a, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{O_1M} = \text{пр}_{O_1x_1}\overline{O_1M} = x_1,$$

получим

$$x = a + x_1.$$

Аналогично, проектируя на старую ось ординат, получим

$$y = b + y_1.$$

Итак, имеем формулы

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1$$

перехода при параллельном переносе осей.

с. Пример. Пусть дан треугольник с вершинами $L(1+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{2})$; $M(2+\sqrt{3};\ 3-\sqrt{2})$; $N(3+\sqrt{3};\ -\sqrt{2})$. Попробуем перенести оси, поместив новое начало в вершину L. Тогда $a = 1+\sqrt{3}$ и $b = 2-\sqrt{2}$, и наши формулы для данного случая примут вид

$$x = 1 + \sqrt{3} + x_1, \quad y = 2 - \sqrt{2} + y_1,$$

или же, выражая новые координаты $(x_1; y_1)$ через старые, имеем

$$x_1 = x - 1 - \sqrt{3}, \quad y_1 = y - 2 + \sqrt{2}.$$

Подставляя теперь сюда вместо x и y последовательно старые координаты вершин нашего треугольника, получим следующие новые координаты этих вершин: $L(0, 0)$, $M(1; 1)$, $N(2; -2)$.

Таким образом, треугольник имел весьма сложные старые координаты вершин, новые же координаты очень простые. Разумеется, это сильно упростит решение всех задач, связанных с этим треугольником.

§ 15. Пример на упрощение уравнения кривой путем параллельного переноса осей

Пусть имеем уравнение кривой относительно старых осей Ox и Oy. Тогда, подставляя в это уравнение вместо x и y равные им их выражения на основании формул перехода, получим уравнение, связывающее новые координаты $(x; y)$ любой точки нашей линии, т. е. новое уравнение линии.

Удачным выбором новых осей можно достигнуть того, что новое уравнение линии будет проще старого.

В качестве примера рассмотрим кривую, заданную относительно старых осей уравнением

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3.$$

Что это за кривая, сразу по внешнему виду уравнения определить трудно. Во всяком случае, такой кривой мы еще не рассматривали.

С целью упростить уравнение нашей кривой перенесем начало координат в точку $(a; b)$, координаты которой временно оставляем неопределенными — из дальнейшего будет видно, как их выбрать наиболее целесообразно.

Вводя в данное нам уравнение вместо x и y их выражения по формулам перехода

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1,$$

мы получим новое уравнение нашей линии

$$b + y_1 = \frac{1}{4}(a + x_1)^2 - 2(a + x_1) + 3,$$

или

$$b + y_1 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{4}x_1^2 - 2a - 2x_1 + 3,$$

или, наконец, собирая члены с одинаковыми степенями y_1 и x_1, имеем

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 + \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x_1 + \left(\frac{1}{4}a^2 - 2a + 3 - b\right).$$

Получив теперь новое уравнение нашей кривой, мы можем задать себе вопрос, как же надо выбрать a и b, чтобы это новое уравнение выглядело наиболее просто. К ответу на этот вопрос можно подойти так: у нас имеются две буквы a и b, которым мы можем по желанию придать какие угодно числовые значения. Эти буквы мы можем выбрать из тех соображений, чтобы выполнялись какие-либо два условия. В качестве этих условий мы потребуем, чтобы оба последние коэффициенты нового уравнения были нулями, т. е. чтобы

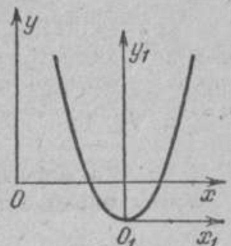


Рис. 74

$$\frac{1}{2}a - 2 = 0, \quad \frac{1}{4}a^2 - 2a + 3 - b = 0,$$

откуда находим

$$a = 4, \quad \frac{1}{4}\cdot 16 - 2\cdot 4 + 3 - b = 0, \quad b = -1.$$

Итак, если перенести начало координат в точку $(4; -1)$, то последние два члена уравнения пропадут, и мы будем иметь новое уравнение нашей кривой в форме

$$y_1 = \frac{1}{4}x_1^2.$$

А это, как мы видим, уравнение параболы. Расположение старых осей, новых осей и параболы указано на рис. 74.

§ 16. Поворот осей

Теперь рассмотрим второй важный случай преобразования координат, при котором новые оси имеют старое начало координат, но новые направления.

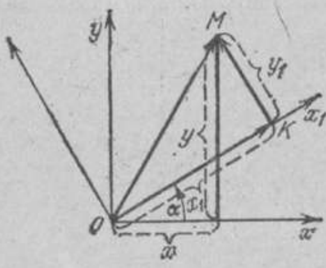


Рис. 75

Пусть новые оси будут Ox_1, Oy_1, причем дается угол $xOx_1 = \alpha$, которым определяется положение новых осей относительно старых и который называется *углом поворота* (рис. 75). Рассмотрим векторную цепь OKM и ее замыкающий вектор $\overline{OM}$.

Проектируя их на старую ось абсцисс, имеем

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = \text{пр}_{Ox}\overline{OK} + \text{пр}_{Ox}\overline{KM},$$

откуда ввиду того, что

$$\text{пр}_{Ox}\overline{OM} = x, \quad \text{пр}_{Ox}\overline{OK} = x_1\cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Ox}\overline{KM} = y_1\cos(\alpha + 90°) = -y_1\sin\alpha,$$

получим

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha.$$

Теперь спроектируем на старую ось ординат:

$$\text{пр}_{Oy}\overline{OM} = \text{пр}_{Oy}\overline{OK} + \text{пр}_{Oy}\overline{KM},$$

откуда ввиду того, что

$$\text{пр}_{Oy}\overline{OM} = y, \quad \text{пр}_{Oy}\overline{OK} = x_1\sin\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}\overline{KM} = y_1\sin(\alpha + 90°) = y_1\cos\alpha,$$

получим

$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

П р и м е р. Упростим уравнение так называемой равнобочной гиперболы (т. е. гиперболы, у которой $a = b$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad (1)$$

Ввиду $a = b$ асимптоты такой гиперболы взаимно перпендикулярны, и их можно принять за новые оси. Эти новые оси обозначим, как указано на рис. 76. Мы видим, что здесь новая ось абсцисс получается из старой поворотом на угол $\alpha = -45°$, а потому формулы перехода будут

$$x = x_1 \cos(-45°) - y_1 \sin(-45°) =$$

$$= x_1 \cos 45° + y \sin 45° = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$y = x_1 \sin(-45°) + y_1 \cos(-45°) =$$

$$= -x_1 \sin 45° + y_1 \cos 45° = \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}.$$

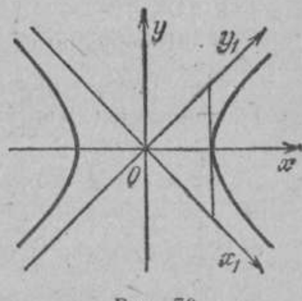


Рис. 76

Вводя это в уравнение (1), имеем

$$\frac{(x_1+y_1)^2 - (y_1-x_1)^2}{2a} = 1,$$

откуда

$$\frac{4x_1y_1}{2a^2} = 1, \quad x_1y_1 = \frac{a^2}{2}$$

или, полагая для краткости

$$a^2/2 = k,$$

имеем новое уравнение нашей гиперболы в виде

$$x_1y_1 = k, \quad y_1 = k/x_1,$$

т. е. в том виде, как в начале нашей книги.

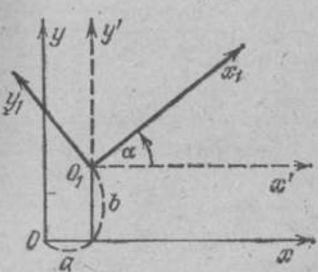


Рис. 77

§ 17. Общий случай

а. В общем случае новые оси будут иметь и новое начало и новые направления. Пусть $(a; b)$ — координаты нового начала относительно старых осей и α — угол наклона новой оси абсцисс к старой (рис. 77). Чтобы вывести формулы перехода, введем еще вспомогательную систему осей O_1x', O_1y', у которых новое начало и старые направления. Координаты точки K относительно вспомогательных осей назовем $(x'; y')$.

b. Так как оси O_1x', O_1y' получаются из осей Ox, Oy переносом начала в точку $O_1\,(a;\,b)$, то

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \qquad (1)$$

Так как, далее, новые оси O_1x, O_1y получаются из вспомогательных поворотом на угол α, то

$$x' = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y' = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), найдем выражения старых координат через новые:

$$x = a + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = b + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

§ 18. Полярные координаты

a. Кроме прямоугольной (или декартовой) системы координат, для определения положения точек на плоскости очень часто пользуются *полярными координатами*.

Именно, положение какой-либо точки M плоскости определяется расстоянием r от точки M до неподвижной точки O — *полярным радиусом* и углом φ, который вектор $\overline{OM}$ образует с неподвижной осью Ox,— *полярным углом*.

Эти r и φ называются *полярными координатами точки* M.

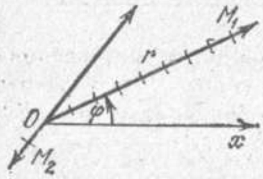


Рис. 78

То обстоятельство, что M имеет координаты r и φ, записывают так: $M\,(r;\,\varphi)$.

Точка O называется *полюсом*, прямая Ox — *полярной осью*.

b. Задание r и φ вполне определяет положение точки M, при этом угол φ может быть любым числом интервала $(-\infty,\,\infty)$, величина r неотрицательна.

Например, на рис. 78 точка с координатами $(9;\,\pi/6)$ есть точка M_1, а точка с координатами $(2;\,-\pi/3)$ есть точка M_2.

c. Однако обратная задача — нахождение координат r и φ по заданной точке — задача неопределенная. Действительно, если за полярные координаты точки M можно взять $(r;\,\varphi)$, то с таким же успехом можно взять и $(r;\,\varphi - 2\pi)$ и вообще угол φ можно изменять на любое кратное 2π.

d. Но эту обратную задачу можно сделать определенной, ограничив возможность выбора r и φ некоторыми добавочными условиями, например, потребовав, чтобы φ находилось в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

§ 19. Спираль Архимеда

a. Всякое уравнение, содержащее r и φ (или только одну из этих величин), если r и φ рассматривать как полярные координаты на плоскости, изобразит, вообще говоря, некоторую линию. Эту линию можно приближенно построить по точкам. Для этой цели принимаем φ за аргумент, а r — за функцию. Давая φ ряд значений и вычисляя согласно данному уравнению соответствующие значения r, получим ряд точек $(r;\ \varphi)$. Геометрическим местом этих точек будет, вообще говоря, некоторая линия.

b. В качестве первого примера построим график функции $r = a\varphi$.

Для построения углу φ придаем только положительные значения, отстоящие друг от друга на $\pi/8$. (Для более точного построения вместо $\pi/8$ можно было бы взять $\pi/16$, $\pi/32$ и т. д.)

Соответствующие значения r вычисляем по следующей таблице:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	...
r	0	$a\cdot\frac{\pi}{8}=h$	$a\cdot 2\cdot\frac{\pi}{8}=2h$	$a\cdot 3\cdot\frac{\pi}{8}=3h$	...

Таким образом, все построение сводится к последовательному отложению на сторонах углов 0, $\pi/8$, $2\cdot\pi/8$, $3\cdot\pi/8$, . . . возрастающих длин 0, h, $2h$, $3h$, . . . (рис. 79).

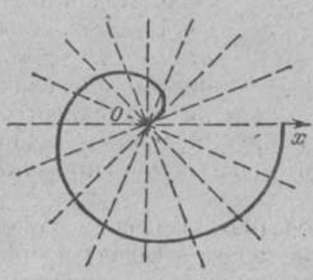


Рис. 79

c. Заметим, что $a\,(\varphi_0 + 2\pi) = a\varphi_0 + 2\pi a$. Но $a\,(\varphi_0 + 2\pi)$ — это полярный радиус, отвечающий полярному углу $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$; значит, когда полярный угол φ увеличивается на 2π, полярный радиус увеличивается на постоянную величину $2\pi a$.

§ 20. Логарифмическая спираль

В качестве второго примера построим график функции

$$r = a^{\varphi},$$

где полярному углу φ придаем все значения от $-\infty$ до ∞ (рис. 80).

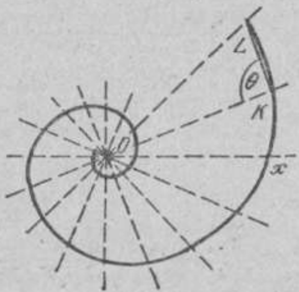


Рис. 80

Беря опять значения φ отстоящими друг от друга на $\pi/8$, составим таблицу соответствующих значений r:

φ	...	$-2\cdot\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$2\cdot\frac{\pi}{8}$	$3\cdot\frac{\pi}{8}$	...
r	...	$a^{-2\cdot\frac{\pi}{8}}=h^{-2}$	$a^{-\frac{\pi}{8}}=h^{-1}$	1	$a^{\frac{\pi}{8}}=h$	$a^{2\cdot\frac{\pi}{8}}=h^2$	$a^{3\cdot\frac{\pi}{8}}=h^3$	...

А так как

$$\ldots\frac{h^{-1}}{h^{-2}}=\frac{1}{h^{-1}}=\frac{h}{1}=\frac{h^2}{h}=\frac{h^3}{h^2}=h,$$

то все треугольники OKL, образованные двумя последовательными полярными радиусами и хордой KL, стягивающей их концы, подобны. Угол θ для всех таких углов, следовательно, будет один и тот же.

§ 21. Примеры на составление полярных уравнений кривых

а. В качестве примера выведем полярные уравнения эллипса, гиперболы или параболы. Эти кривые имеют общее полярное уравнение, которое получим, если будем исходить из общего свойства этих кривых по отношению к фокусу и директрисе. Саму кривую располагаем, как показано на рис. 81, помещая директрису справа от кривой. (Для эллипса A будет правой вершиной, для гиперболы — вершиной левой ветви, так что для гиперболы рассматриваем только левую ветвь; наконец, параболу для вывода полярного уравнения приходится повернуть на 180°.) Полюс O берем в фокусе F, полярную ось направляем из полюса F к вершине кривой.

b. Обозначим эксцентриситет кривой буквой e и буквой p — ординату, восставленную из фокуса. Для любой точки M имеем

$$r/d = e. \qquad (1)$$

В частности, это верно и для точки S, т. е. $p/OD = e$, $OD = p/e$.

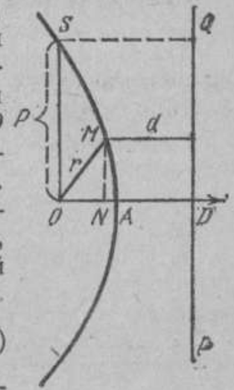


Рис. 81

Далее, имеем $d = ND = OD - OM = \frac{p}{e} - r\cos\varphi$, после чего уравнение (1) дает

$$\frac{r}{\frac{p}{e} - r\cos\varphi} = e, \quad r = p - er\cos\varphi, \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Это и есть искомое полярное уравнение.

c. Предлагается самим доказать для эллипса и гиперболы равенство

$$p = b^2/a$$

(рассматривая p как ординату, восставленную из фокуса).

§ 22. Выражение прямоугольных координат через полярные

Одновременно с полярной системой координат рассмотрим прямоугольную, у которой начало координат совпадает с полюсом и ось абсцисс — с полярной осью (рис. 82).

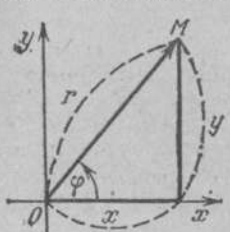


Рис. 82

Если $(x;\ y)$ — прямоугольные и $(r;\ \varphi)$ — полярные координаты точки M, то, замечая, что x и y суть проекции вектора $\overline{OM}$ на оси Ox и Oy, находим

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Это *формулы перехода* от прямоугольных координат к полярным.

§ 23. Уравнение лемнискаты

a. В качестве примера, где найденные формулы при-носят пользу, выведем полярное уравнение лемнискаты.

Эта кривая есть геометрическое место точек, произве-дение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина a^2, где $2a$ — расстояние F_1F_2.

Таким образом, для любой точки $M(x; y)$ лемнискаты будем иметь

$$r_1 r_2 = a^2. \tag{1}$$

b. Приступая к выводу уравнения, мы оси координат располагаем, как показано на рис. 83. Координаты точек F_1 и F_2 тогда будут $F_1(-a; 0)$, $F_2(a; 0)$.

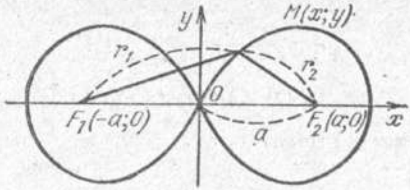


Рис. 83

Рассматривая r_1 как расстояние между точками $F_1(-a; 0)$ и $M(x; y)$ и r_2 как расстояние между точками $F_2(a; 0)$ и $M(x; y)$, из (1) получим

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2,$$

$$(x^2+a^2+y^2+2ax)(x^2+a^2+y^2-2ax)=a^4,$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=a^4,$$

$$(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)-4a^2x^2=0,$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2). \tag{2}$$

Это и есть уравнение лемнискаты в прямоугольных коор-динатах.

c. Однако гораздо проще будет выглядеть уравнение лемнискаты, отнесенное к полярным координатам (полюс в O, полярная ось Ox). Его получим, если в уравнение (2) заменим x и y их выражениями, получаемыми из формул перехода

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$[r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)]=2a^2r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi),$$

или

$$r^2=2a^2\cos 2\varphi,$$

или, извлекая корень и оставляя только знак $+$,

$$r=a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

d. В заключение дадим краткое исследование формы лемнискаты согласно найденному уравнению. Ход изменения r с изменением φ ясен из нижеследующей таблицы:

φ	2φ	r
Возрастает от 0° до 45°	Возрастает от 0° до 90°	Убывает от $h=a\sqrt{2}$ до 0
Возрастает от 45° до 135°	Возрастает от 90° до 270°	Мнимое
Возрастает от 135° до 180°	Возрастает от 270° до 360°	Возрастает от 0 до h
При дальнейшем изменении от 180° до 360° все указанные изменения r повторятся в той же последовательности.		

Эта таблица подтверждает форму лемнискаты, изображенную на рис. 83.

§ 24. Параметрическое задание линий

a. Очень часто при изучении функциональной зависимости между x и y обе эти переменные рассматриваются не как функция одна другой, а как функции некоторой третьей переменной t:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{1}$$

Эта третья переменная теперь является аргументом, а x и y — функциями от нее.

Этот новый аргумент t обыкновенно называют *параметром*, а само представление функциональной зависимости в форме (1) — *параметрическим*.

b. Два параметрические уравнения (1) связывают три переменные t, x, y. Если бы мы из этих уравнений исключили t, то получили бы одно уравнение, уже непосредственно связывающее x и y, т. е. обычное уравнение между x и y.

Однако такое исключение t может или оказаться невозможным, или же если и возможно, то привести к сложному уравнению.

Но мы увидим далее, что в таком исключении нет большой надобности — можно изучить зависимость между x и y и, в частности, построить график этой зависимости, основываясь непосредственно на уравнениях (1).

§ 25. Построение графика

a. Для построения графика придаем аргументу t ряд значений и по уравнениям (1) § 24 находим ряд соответствующих пар значений x и y, которые принимаем за координаты точки на плоскости. Соединяя эти точки плавной линией, мы и получим график зависимости между x и y.

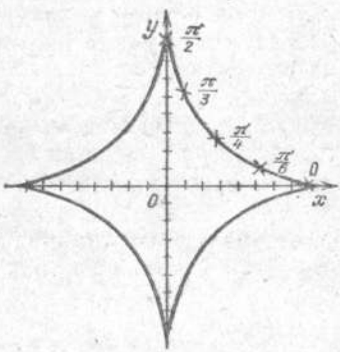


Рис. 84

b. В качестве примера построим график функции, заданной следующими параметрическими уравнениями:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad (1)$$

полагая для простоты $a=8$.

Имеем таблицу (нами взяты только те значения t, для которых $\cos t$ и $\sin t$ вычисляются просто, вычисления проведены с точностью до 0,1):

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	8	$\sqrt{27}\approx 5,2$	$\sqrt{8}\approx 2,8$	1	0
y	0	1	2,8	5,2	8

Мы остановились на $t=\pi/2$, так как при дальнейшем изменении t в интервалах $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$ получатся участки кривой, подобные построенному.

Чтобы знать, какая точка какому значению параметра отвечает, около точки мы ставим соответствующее значение параметра (рис. 84).

Построенная кривая называется *астроидой*. Чтобы получить обыкновенное уравнение астроиды, исключаем t из уравнений (1). Имеем

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \cos t, \quad \left(\frac{y}{a}\right)^{1/3} = \sin t,$$

откуда, возводя в квадрат и складывая, найдем

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$$

или, наконец,

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

§ 26. Циклоида

Циклоидой называется кривая, описываемая какой-либо точкой M окружности, катящейся по прямой.

За начало координат O возьмем то положение точки M, когда она является точкой касания окружности и прямой.

Построение циклоиды можно осуществить посредством линейки и катящегося по ней круга с прикрепленным на его ободе чертящим острием M (конечно, круг катится по линейке в плоскости чертежа).

Чтобы вывести параметрические уравнения циклоиды, возьмем за параметр t угол NCM (рис. 85; положительным

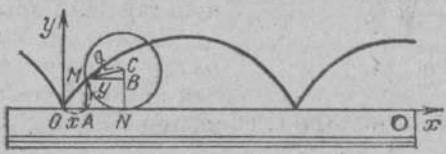


Рис. 85

здесь приходится считать вращение по часовой стрелке). Так как круг катится без скольжения, то

$$ON = NM = at.$$

Далее, находим

$$x = OA = ON - AN = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = AM = NB = NC - BC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды будут:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

§ 27. Упражнения

1. Написать уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке (3/2; — 5/2). *Ответ*: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$.

2. Найти общее уравнение той же окружности. Указание. Общим уравнением окружности называется уравнение, получаемое раскрытием скобок и приведением подобных членов. *Ответ*: $2x^2+2y^2-6x+10y+9=0$.

3. Какое геометрическое значение имеют уравнения:

a) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$,

b) $x^2+y^2-4x-6y+13=0$,

c) $x^2+y^2-4x-6y+17=0$?

Ответ: a) окружность $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$; b) точка (2; 3); c) уравнение не изображает никакой кривой.

4. Написать уравнение окружности радиуса a с центром $(a; 0)$ и построить ее, полагая $a=2$. *Ответ*: $x^2+y^2-2ax=0$.

5. Какой вид имеет общее уравнение окружности, проходящей через начало координат? *Ответ*: $x^2+y^2+Ax+By=0$.

6. В каком виде может быть написано общее уравнение окружности, концентрической по отношению к окружности $x^2+y^2+Ax+By+C=0$? *Ответ*: $x^2+y^2+Ax+By+C_1=0$.

7. Привести к виду $(x-m)^2+(y-n)^2=a^2$ и построить следующие окружности:

a) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$,

b) $x^2+y^2-2x-2y=0$,

c) $3x^2+3y^2+6x-2y-2=0$,

d) $x^2+y^2+x=0$,

e) $x^2+y^2+2y-8=0$,

f) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$.

Ответ: a) $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$, b) $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$, c) $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, e) $x^2+(y+1)^2=3^2$, f) $(x+1)^2+(y+1)^2=1^2$.

8. Найти уравнение окружности, для которой точки (2; 2) (8; 10) являются концами одного из диаметров. *Ответ*: $x^2+y^2-10x-12y+36=0$.

9. Найти уравнение окружности, проходящей через точки (1; —1), (2; 6), (9; 5). *Ответ*: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.

10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки (1; 1), (0; 2), (2; 3). *Ответ*: $3x^2 + 3y^2 - 7x - 13y + 14 = 0$.

Указание. Написать уравнение окружности в общем виде $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, а затем определить коэффициенты из тех соображений, что координаты точек должны удовлетворять уравнению.

11. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ с прямой $x + y - 1 = 0$. *Ответ*: M_1 (2; —1), M_2 (—1; 2).

12. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 5 = 0$ с прямой $x - y - 1 = 0$. *Ответ*: (2; 1), (—1; —2).

13. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ с прямой $x + y - 4 = 0$. *Ответ*: (2; 2).

14. Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой $x + y - 4 = 0$. *Ответ*: не пересекаются.

15. Доказать, что уравнение любой окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ с прямой $Lx + My + N = 0$, может быть написано в виде

$$m(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n(Lx + My + N) = 0.$$

16. Найти точки пересечения окружностей

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

Ответ: (1; 0), (9/13; 6/13).

17. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ с прямой $x - y + 3 = 0$ и через точку (1; 1). *Ответ*: $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$.

18. Показать, что общее уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружностей

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \quad x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

можно представить в виде

$$m(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + n(x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

19. В частности, показать, что уравнение предыдущей задачи при $n = -m$ изображает прямую, проходящую через точку пересечения обеих окружностей.

20. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Найти a, b, c, e, уравнения директрис. Построить этот эллипс по точкам обоими изложенными в курсе способами. *Ответ*: уравнение директрис $x = \pm 169/12$.

21. Выразить длину диаметра M_1M_2 эллипса как функцию абсциссы его конца $M\ (x;\ y)$ и, исследуя найденное выражение, еще раз убедиться, что наименьшим диаметром будет $B_1B_2 = 2b$, а наибольшим $A_1A_2 = 2a$.

22. Написать уравнение эллипса, если известно, что он расположен относительно осей обычным способом и проходит через точки $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(2;\ \sqrt{3})$. *Ответ*: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

23. Найти точки пересечения эллипса

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

и окружности

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Ответ: четыре точки $(\pm 4;\ \pm 3)$.

24. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(6;\ 5)$ и $(-1;\ 4)$, если известно, что ее центр лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ответ: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

25. Если каждая ордината эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получается умножением ординаты окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

на постоянное число b/a, то каким способом получается из площади круга площадь S эллипса и чему она равна? *Ответ*: $S = \pi ab$.

26. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Найти a, b, c, e, уравнения директрис. Построить эту гиперболу по точкам. *Ответ*: уравнение директрис $x = \pm 225/17$.

27. Найти точки пересечения эллипса и гиперболы, если известно, что они имеют общие фокусы, причем $c = 1$; для эллипса эксцентриситет $e = 5/13$, а для гиперболы $e = 5/4$. *Ответ*: четыре точки $(\pm 52; \pm 36)$.

28. Найти длину общей хорды парабол

$$y^2 = 5\frac{1}{3}x, \qquad y = \frac{4}{9}x^2.$$

Ответ: 5.

29. Привести к простейшему виду уравнение $y = 0{,}25x^2 - x + 2$. *Ответ*: $y = 0{,}25x^2$; начало координат надо перенести в точку $(2; 1)$.

30. Доказать параллельным переносом осей, что уравнение

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad A \neq 0,$$

выражает параболу, и найти общее выражение для координат вершины. *Ответ*: вершина в точке $\left(-\frac{B}{2A}; -\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$.

31. Решить задачу 3 этого параграфа путем параллельного переноса осей.

32. Доказать переносом осей, что уравнение

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

всегда или изображает окружность или точку или ничего не изображает.

33. Переносом осей доказать, что уравнение $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad \neq bc$, выражает равнобочную гиперболу.

34. Упростить уравнение $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$. *Ответ*: $y = x^3$, перенос в точку $(-1; 6)$.

35. Доказать, что при повороте осей на любой угол уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$ не меняется.

36. Упростить путем поворота осей на 45° уравнение $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$. *Ответ*: парабола $y^2 = a\sqrt{2}x - \frac{a^2}{2}$ с вершиной в точке $(a\sqrt{2}/4; 0)$ (точнее, часть этой параболы).

37. Путем поворота осей на 30° упростить уравнение $5x^2 + 7y^2 - 2\sqrt{3}xy - 4 = 0$. *Ответ*: эллипс $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = \frac{1}{2}$.

38. Найти полярные координаты вершин правильного шестиугольника со стороной a, расположенного, как на

рис. 86. *Ответ*: $(0;\ 0)$, $(a;\ 0)$, $(a\sqrt{3};\ \pi/6)$, $(2a;\ \pi/3)$, $(a\sqrt{3};$ $\pi/2)$, $(a;\ 2\pi/3)$.

39. Объяснить, почему уравнение $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — постоянная, изображает луч, проходящий через полюс и наклоненный к полярной оси под углом φ_0.

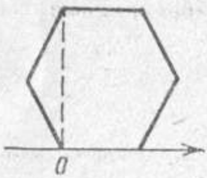


Рис. 86

40. Объяснить, почему уравнение $r = a$, где $a > 0$ — постоянная, изображает окружность радиуса a с центром в полюсе.

41. Даны полярные координаты точек $M_1\,(a\sqrt{2}/2;\ \pi/4)$, $M_2\,(a\sqrt{2}/2;\ 3\pi/4)$, $M_3\,(a\sqrt{2}/2;\ 5\pi/4)$, $M\,(a\sqrt{2}/2;\ 7\pi/4)$. Вычислить их декартовы координаты (оси расположены обычно). *Ответ*: $M_1\,(a;\ a)$, $M_2\,(-a;\ a)$, $M_3\,(-a;\ -a)$, $M_4\,(a;\ -a)$.

42. Даны декартовы координаты точек $M_1\,(b/2;\ b\sqrt{3}/2)$, $M_2\,(-b/2;\ b\sqrt{3}/2)$, $M_3\,(0;\ -b)$. Вычислить полярные координаты, взяв наименьшие положительные полярные углы (полярная ось расположена обычно). *Ответ*: $M_1\,(b;\ \pi/3)$, $M_2\,(b;\ 2\pi/3)$, $M_3\,(b;\ 3\pi/2)$.

43. Дано уравнение гиперболической спирали в декартовых координатах

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{a}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Выразить его в полярных координатах и начертить эту спираль. *Ответ*: $r = a/\varphi$.

44. Дано уравнение $r = 2a\cos\varphi$. Доказать путем перехода от полярных координат к декартовым, что это уравнение окружности. *Ответ*: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

45. Вывести полярное уравнение прямой, считая данными:

1) длину p перпендикуляра, опущенного на нее из полюса;

2) угол α наклона его к полярной оси.

Ответ: $r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$.

46. Вывести отсюда уравнение прямой в прямоугольных координатах. *Ответ*: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

47. Начертить следующие кривые:

1) $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ (*кардиоида*),

2) $r = a\,(1 + \cos 4\varphi)$.

48. Дана кривая параметрическими уравнениями

$$x = \frac{3at}{1+t}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t}.$$

Найти ее уравнение. *Ответ*: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

49. Дана кривая параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Найти ее уравнение. *Ответ*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

50. Материальная точка движется в плоскости так, что ее координаты выражаются такими функциями времени: $x = v_0 t$, $y = gt^2/2$. Написать уравнение траектории. *Ответ*: парабола $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$.

51. Дана окружность $x^2 + y^2 - 2ax = 0$. Найти геометрическое место середин ее хорд, проведенных из начала координат. *Ответ*: окружность $x^2 + y^2 - ax = 0$.

52. Дана парабола $y^2 = 2px$; найти геометрическое место середин хорд, проведенных из начала координат. *Ответ*: парабола $y^2 = px$.

53. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти геометрическое место точек, делящих расстояние от центра до любой точки эллипса в отношении $2:1$. *Ответ*: эллипс с полуосями, равными $2a/3$ и $2b/3$.

54. Найти геометрическое место точек, каждая из которых отстоит от точки $(-4; 0)$ на расстояние, вдвое большее, чем от точки $(-1; 0)$. *Ответ*: $x^2 + y^2 = 4$.

55. Прямолинейный стержень AB скользит по координатным осям так, что длина его $AB = a + b$ постоянна. Найти, какую кривую описывает точка C, отстоящая от конца B на расстояние a, а от конца A — на расстояние b (рис. 87). *Ответ*: эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

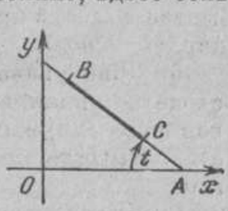


Рис. 87

Указание. Проще всего найти сначала параметрическое уравнение, взяв, например, за параметр угол t, а затем параметр исключить. Подобный метод полезен во многих случаях.

56а. Даны точки $M_1(-2; 0)$, $M_2(4; 0)$. Найти геометрическое место таких точек M, для которых угол M_1MM_2

вдвое больше угла MM_2M_1. *Ответ*: гипербола $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

56b. Дана точка $M_1(-a; 0)$. Найти геометрическое место таких точек M, для которых угол xOM вдвое больше угла xM_1M. *Ответ*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

57. Даны точки $M_1(-1; 0)$ и $M_2(1; 0)$ и прямая $y = -1$. По этой прямой скользит точка M. Найти геометрическое место точек пересечения высот треугольника M_1MM_2. *Ответ*: парабола $y = x^2 - 1$.

58. Доказать, что построение параболы $y = ax^2$, если дана хотя бы одна ее точка M,

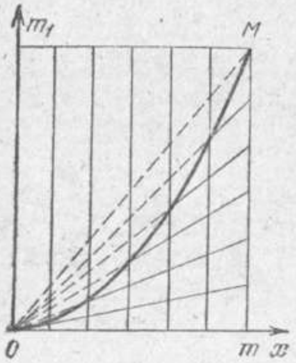


Рис. 88

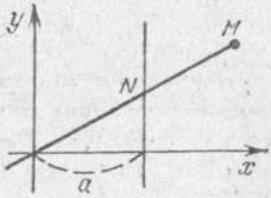


Рис. 89

можно осуществить способом, указанным на рис. 88. (Для большей точности делений можно взять больше.) Применить этот результат к построению параболы $y = \frac{1}{4}x^2$.

59. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек $F_1(-c; 0)$ и $F(c; 0)$ есть величина постоянная, равная a^2. *Ответ*: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ (*овалы Кассини;* в частности, при $a = c$ получается лемниската).

60. Дана прямая $x = a$. Через начало координат проводятся различно наклоненные прямые. От точек N пересечения их с прямой $x = a$ на них откладываются одинаковые отрезки b (рис. 89). Найти геометрическое место концов M этих отрезков. *Ответ*: $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = x^2b^2$ (конхоида Никомеда).

Глава 6

ВЕКТОРЫ, ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Оси, векторы, углы

Так же, как и на плоскости, будем рассматривать оси и векторы в пространстве. Здесь только следует заметить, что две оси в пространстве могут и не пересекаться. Однако, если одну из них передвинем параллельно самой себе с тем расчетом, чтобы в новом своем положении она пересекла вторую ось, то, каким бы путем это перемещение ни совершили, угол между новыми положениями осей получится один и тот же. Этот угол мы и принимаем за *угол между осями* (рис. 90).

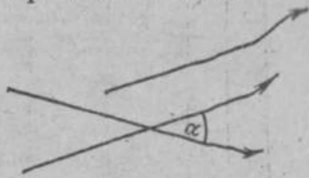


Рис. 90

Этот угол α будем теперь рассматривать только как положительный. Он, следовательно, может быть или острым, или тупым в зависимости от расположения стрелок на осях.

§ 2. Проекции

a. *Проекцией точки* M на ось PQ будем называть точку M_1 пересечения с этой осью плоскости, перпендикулярной PQ и проходящей через точку M.

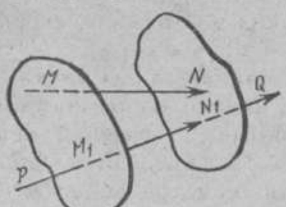


Рис. 91

b. *Проекцией вектора* MN на ось PQ называется такой вектор $\overline{M_1N_1}$, лежащий на оси, начало которого есть проекция начала, а конец — проекция конца вектора $\overline{MN}$ (рис. 91).

c. Так же, как и на плоскости, величина проекции не изменится, если мы передвинем вектор в новое положение параллельно самому себе или же если переместим параллельно самой себе ось проекций.

Кроме того, очевидно, что пр $\overline{AB} = -$пр $\overline{BA}$.

d. Далее, рассмотрим проектирование векторов с одной оси на другую. Если переместим первую ось вместе с вектором, в ней лежащим, в новое положение, в котором бы эта ось пересекла ось проекций, то величина проекции от этого не изменится (рис. 92). Но тогда мы можем

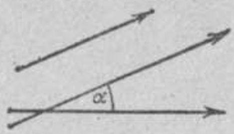


Рис. 92

применить теоремы, доказанные нами для плоскости (потому что теперь обе оси лежат в одной плоскости), т. е. и для пространства справедливы следующие теоремы:

e. *Величины векторов относятся как величины проекций этих векторов на какую-либо ось.*

f. *При проектировании вектора с одной оси на другую величина проекции равна величине проектируемого вектора, умноженной на косинус угла между осями, и, в частности, если направление оси одинаково с направлением вектора, то величина проекции вектора равна его длине, умноженной на косинус угла между вектором и осью.*

Далее, легко доказывается для пространства теорема, относящаяся к проекции векторной цепи.

g. *Алгебраическая сумма величин проекций отдельных звеньев цепи равна величине проекции замыкающего вектора* (рис. 93). Доказательство одинаково с тем, которое было

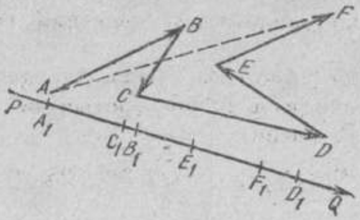


Рис. 93

для плоскости, с той лишь разницей, что здесь проектирование точек на ось осуществляется посредством плоскостей, перпендикулярных оси, а не прямых. Это доказательство в виде упражнения рекомендуем проделать самим учащимся.

§ 3. Проекции на три взаимно перпендикулярные оси. Длина вектора через проекции

a. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz, исходящие из общей точки O, расположенные, как указано на рис. 94. Наша цель — выяснить вопросы, связанные с проектированием векторов на указанные оси.

b. Пусть вектор $\overline{AB}$ длины r, лежащий на оси MN, образует с осями углы α, β, γ и имеет проекции x, y, z. Для большей отчетливости перенесем вектор вместе с его осью параллельно самому себе в новое положение $\overline{OP}$ с тем расчетом, чтобы его начало попало в точку O. Указанные выше величины от такого перенесения не изменятся. Опуская из нового конца P вектора перпендикуляры на плоскости xOy, yOz, zOx, строим параллелепипед, как показано на рис. 94. Вектор $\overline{OP}$ является диагональю этого параллелепипеда, и, следовательно, квадрат его длины равен сумме квадратов трех его измерений:

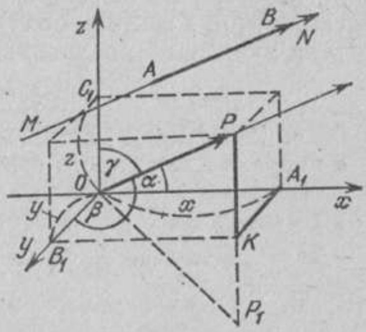


Рис. 94

$$|OP|^2 = |OA_1|^2 + |OB_1|^2 + |OC_1|^2,$$

но

$$|OP| = r, \quad OA_1 = x,$$
$$OB_1 = y, \quad OC_1 = z,$$

и, следовательно,

$$r^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций.

Например, длина вектора, имеющего проекции

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 6,$$

будет

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

§ 4. Простейшие зависимости, содержащие величину вектора, проекции и направляющие косинусы

a. Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ углов, образуемых осью вектора с осями Ox, Oy, Oz, называются *направляющими косинусами*, так как характеризуют направление вектора.

b. Согласно теореме о величине проекции вектора проекции x, y, z вектора получатся умножением его величины p на указанные направляющие косинусы:

$$x = p\cos\alpha,\quad y = p\cos\beta,\quad z = p\cos\gamma. \tag{1}$$

c. В частности, возьмем направление оси совпадающим с направлением самого вектора; тогда p обратится в длину r вектора и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — в направляющие косинусы самого вектора, и найденные формулы примут вид:

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\cos\beta,\quad z = r\cos\gamma. \tag{2}$$

d. Из этих формул можно выразить направляющие косинусы вектора через его проекции:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

e. Геометрически ясно, далее, что сами направляющие косинусы не могут быть независимыми, потому что когда известны два угла α и β, для $\overline{OP}$ возможно только самое большее два направления (например, на рис. 94, кроме изображенного на нем, еще симметричное направление $\overline{OP_1}$ ниже плоскости xOy).

Мы выведем сейчас уравнение, связывающее эти направляющие косинусы. Действительно, возводя (2) в квадрат и складывая, имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

откуда, деля обе части на $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

f. Например, найдем проекции x, y, z вектора длины 6, образующего с осями равные острые углы.

Здесь $\alpha = \beta = \gamma$, и потому равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

обращается в

$$3\cos^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = 1/3, \quad \cos\alpha = 1/\sqrt{3}.$$

Берем знак плюс, потому что угол α по предположению острый. Итак,

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3},$$

и следовательно, согласно формуле (2) ввиду $r = 6$ получим

$$x = y = z = 6\cdot 1/\sqrt{3} = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Найдем еще направляющие косинусы вектора, заданного проекциями $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

Указанные косинусы можно было бы вычислять непосредственно по формулам (3) в окончательном виде. Однако удобнее раньше вычислить r. Имеем

$$r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

и, следовательно, согласно формулам (3)

$$\cos\alpha = 1/3, \quad \cos\beta = -2/3, \quad \cos\gamma = 2/3.$$

§ 5. Проекция вектора на оси. Косинус угла между двумя векторами. Скалярное произведение векторов

а. Пусть вектор $\overline{OP}$ задан своими проекциями x, y, z на оси (рис. 95). Тогда решим такой вопрос. Какова проекция этого вектора на ось ON, заданную своими направляющими косинусами $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ (мы опять берем вектор с началом в O и проектируем его на ось, проходящую через O, но как вектор, так и ось можно, конечно, брать где угодно).

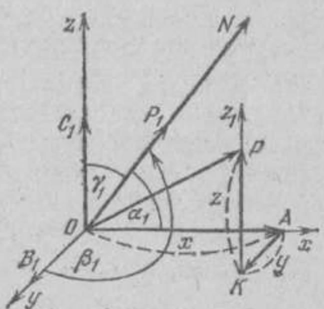


Рис. 95

Как мы видели выше, проекции x, y, z нашего вектора $\overline{OP}$ можно рассматривать как звенья векторной цепи $OAKP$, замыкающим которой является сам вектор $\overline{OP}$.

Согласно теореме о проекции векторной цепи имеем

$$\text{пр}\,\overline{OP} = \text{пр}\,\overline{OA} + \text{пр}\,\overline{AK} + \text{пр}\,\overline{KP}.$$

Но если φ — угол между вектором и осью и r — длина вектора, то

$$\text{пр}\,\overline{OP} = r\cos\varphi.$$

Далее, вектор $\overline{OA}$ лежит в оси Ox, наклоненной к оси ON под углом α_1; следовательно,

$$\text{пр}\,\overline{OA} = x\cos\alpha_1.$$

Вектор $\overline{AK}$ мы заменим вектором $\overline{OB_1}$, который получается параллельным переносом $\overline{AK}$ на ось Oy. Так как ось Oy образует с осью ON угол β_1, то

$$\text{пр}\,\overline{AK} = \text{пр}\,\overline{OB_1} = y\cos\beta_1.$$

Наконец, вектор $\overline{KP}$ заменим вектором $\overline{OC_1}$, который получается параллельным переносом $\overline{KP}$ на ось Oz. А так как ось Oz образует с осью ON угол γ_1, то

$$\text{пр}\,\overline{KP} = z\cos\gamma_1.$$

Итак, имеем двоякое выражение проекции вектора $\overline{OP}$:

$$\text{пр}\,\overline{OP} = r\cos\varphi = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1. \quad (1)$$

Отсюда, деля на r и замечая, что ввиду (3) § 4

$$\cos\alpha = x/r, \quad \cos\beta = y/r, \quad \cos\gamma = z/r,$$

имеем следующую формулу косинуса угла между двумя осями (или векторами):

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1. \quad (2)$$

b. Возьмем далее на оси ON вектор $\overline{OP_1}$ длиной r с направлением, совпадающим с направлением оси. Его направляющие косинусы будут одинаковы с таковыми для оси ON, т. е. будут $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$; проекции же его обозначим через x_1, y_1, z_1.

Применяя формулу (3) § 4, имеем

$$\cos\alpha_1 = x_1/r_1, \quad \cos\beta_1 = y_1/r_1, \quad \cos\gamma_1 = z_1/r_1,$$

ввиду чего формула (1) дает

$$r\cos\varphi = x\frac{x_1}{r_1} + y\frac{y_1}{r_1} + z\frac{z_1}{r_1},$$

откуда

$$rr_1\cos\varphi = xx_1 + yy_1 + zz_1. \quad (3)$$

В левой части равенства стоит произведение длин векторов на косинус угла между ними. Оно называется *скалярным произведением векторов* и имеет большое значение в механике. Формула (3) показывает, что скалярное произведение равно сумме произведений одноименных проекций обоих векторов.

c. Формула (3), в частности, дает выражение для $\cos\varphi$ — косинуса угла между двумя векторами через их проекции:

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1},$$

что ввиду (1) § 3 можно переписать еще так:

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}. \qquad (4)$$

d. Выведем условие параллельности и условие перпендикулярности векторов.

Если два вектора, один с проекциями x, y, z, другой — с проекциями x_1, y_1, z_1, параллельны, то при параллельном переносе их с тем расчетом, чтобы начала их совпали с точкой O, эти векторы или совпадут, или составят продолжение один другого.

Изображая тогда проекции этих векторов ребрами параллелепипедов по способу § 3, мы видим, что ввиду подобия параллелепипедов ребра x, y, z параллелепипеда, диагональю которого является вектор $\overline{OP}$, должны быть пропорциональны ребрам x_1, y_1, z_1 параллелепипеда, диагональю которого является вектор $\overline{OP_1}$ (рис. 96):

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}. \qquad (5)$$

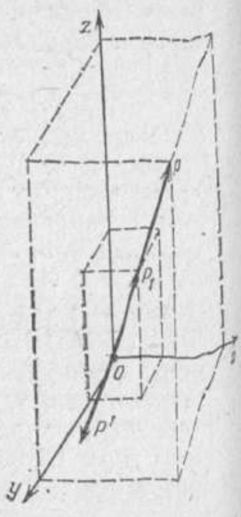


Рис. 96

Обратно, если имеет место эта пропорция, то параллелепипеды подобны, а потому их диагонали, т. е. векторы $\overline{OP}$ и $\overline{OP_1}$, совпадают. Значит, пропорция (5) и выражает собою *условие параллельности*.

Нетрудно видеть, что условие (5) параллельности сохранит силу и в том случае, если вектор $\overline{OP}$ заменить ему противоположным $\overline{OP'}$, так как от такой замены проекции x_1, y_1, z_1, превратятся в $-x_1, -y_1, -z_1$, отчего пропорция (5) не нарушится.

Замечание. Пропорция (5) есть прямое следствие пункта е § 2. Действительно, согласно ему все отношения (5) должны равняться одному и тому же числу $|OP|/|OP_1|$.

e. Особенно следует отметить случай, когда какая-либо проекция одного из векторов равна нулю, например, пусть $x = 0$. Это значит, что вектор $\overline{OP}$ перпендикулярен оси Ox. Но тогда для параллельности векторов необходимо, чтобы и второй вектор был перпендикулярен оси Ox, т. е. $x_1 = 0$.

Итак, пропорцию (5) можно условно писать и в том случае, когда какие-либо ее члены — нули. Но тогда следует помнить, что при параллельности векторов члены, составляющие одно отношение в пропорции (5), могут обращаться в нуль только одновременно.

f. Условие перпендикулярности векторов получим непосредственно из формулы (3). Именно, должно быть $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, и потому

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$

это и есть *условие перпендикулярности*.

g. Примеры. В пункте f § 4 нами был рассмотрен вектор с направляющими косинусами 1/3; —2/3; 2/3. Найдем проекции на направление этого вектора другого вектора с проекциями 6, 3, 2.

Согласно формуле (1) эта проекция будет

$$6\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\cdot\frac{2}{3} = 2 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Найдем, далее, угол между направлением, которое мы только что рассмотрели, т. е. с направляющими косинусами 1/3, —2/3, 2/3, и направлением, образующим с осями равные острые углы. Последнее, как следует из примера в пункте f § 4, имеет направляющие косинусы $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$.

Поэтому согласно формуле (2)

$$\cos\varphi = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Найдем далее скалярное произведение векторов, из которых один имеет проекции 2, 6, 3, а другой — проекции 6, 7, 6.

Имеем

$$rr_1 \cos\varphi = 2\cdot 6 + 6\cdot 7 + 3\cdot 6 = 72.$$

Наконец, найдем косинус угла между векторами с проекциями 2, 1, 2 и 3, 2, 6.

Имеем

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 2\cdot 6}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\,\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{20}{21}.$$

h. Векторы с проекциями 2, −6, 5 и −1, 3, −2,5 параллельны ввиду того, что

$$\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{5}{-2{,}5}.$$

Векторы с проекциями 1, 4, 0 и 2, 8, 0 параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{0}{0}.$$

Векторы с проекциями 1, 0, 0 и 12, 0, 0 параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{12} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Векторы с проекциями 2, −1, 4 и 1, 4, 0,5 перпендикулярны ввиду того, что

$$2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 4\cdot 0{,}5 = 0.$$

§ 6. Координаты

a. Переходим к определению положения точки в пространстве. Для этой цели берем три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz, расположенные, как и раньше. Положение какой-либо точки M пространства тогда определится проекциями x, y, z вектора $\overline{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz.

Эти величины x, y, z называются *координатами точки* M; x называется *абсциссой*; y — *ординатой*, наконец, z — *аппликатой*. Геометрически они изобразятся векторами $x = \overline{OA}$, $y = \overline{OB}$, $z = \overline{OC}$, или также звеньями векторной цепи $OAKM$ (рис. 97). При этом замыкающим вектором является сам вектор $\overline{OM}$.

То обстоятельство, что точка M имеет координаты [illegible] y, z, записываем так:

$$M\ (x;\ y;\ z).$$

Оси Ox, Oy, Oz называются *осями координат*. [illegible] Ox называется *осью абсцисс*, Oy — *осью ординат*, [illegible] *осью аппликат*. Точка O называется *началом координат*.

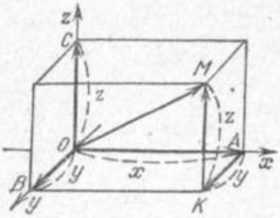


Рис. 97

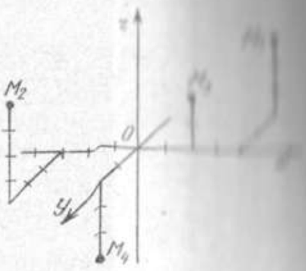


Рис. 98

Ь. Для построения точки M по заданным ее координатам $(x;\ y;\ z)$ самое лучшее — строить векторную цепь $OAKM$.

На рис. 98 построены четыре точки:

$M_1\ (4;\ -2;\ 3)$, $M_2\ (-3;\ 3;\ 4)$, $M_3\ (2;\ 0;\ 2)$, $M_4\ (0;\ 2;\ -3)$.

§ 7. Выражение проекций вектора через координаты конца и начала

Пусть вектор $\overline{M_1M_2}$ задан координатами $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ начала и конца. Найдем его проекции X, Y, Z на оси координат.

Согласно известной теореме, проектируя векторную цепь OM_1M_2 и замыкающий ее вектор $\overline{OM_2}$ на ось абсцисс, имеем (рис. 99)

$$\text{пр}\ \overline{OM_1} + \text{пр}\ \overline{M_1M_2} = \text{пр}\ \overline{OM_2}.$$

Но

$$\text{пр}\ \overline{OM_1} = x_1,$$

$$\text{пр}\ \overline{M_1M_2} = X,\quad \text{пр}\ \overline{OM_2} = x_2,$$

и потому

$$x_1 + X = x_2,\quad X = x_2 - x_1.$$

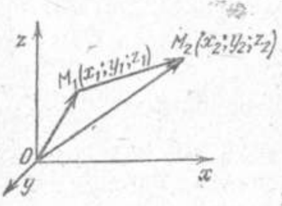


Рис. 99

Подобным образом найдем

$$Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Проекция вектора на ось абсцисс равна разности абсцисс конца и начала, проекция на ось ординат — разности ординат, проекция на ось аппликат — разности аппликат.

Например, вектор $\overline{M_1M_2}$, где $M_1(1; 3; 5)$, $M_2(2; 1; 2)$, имеет проекции $X = 2-1$, $Y = 1-3$, $Z = 2-5$, т. е.

$$X = 1, \quad Y = -2, \quad Z = -3.$$

§ 8. Выражение длины вектора через координаты его концов. Расстояние между двумя точками

a. Длина r вектора, рассмотренного в предыдущем параграфе, согласно (1) § 3 равна

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Заменяя же X, Y, Z их выражениями $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, получим

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В частности, расстояние от точки $M(x, y, z)$ до начала координат найдем отсюда как длину вектора, соединяющего точки $M_1(0; 0; 0)$ и $M_2(x; y; z)$, и, следовательно, это расстояние будет равно r.

b. Например, вектор $\overline{M_1M_2}$, где $M_1(4; 0; 3)$, $M_2(2; 1; 5)$, имеет длину

$$r = \sqrt{(2-4)^2 + (1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Можно сказать также, что расстояние между точками $M_1(4; 0; 3)$, $M_2(2; 1; 5)$ равно 3.

Далее, расстояние от точки $(4; 4; 7)$ до начала координат будет

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = 9.$$

§ 9. Деление отрезка в данном отношении

a. На отрезке, соединяющем точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 100), требуется найти точку $M(x; y; z)$, делящую этот отрезок в данном отношении $\frac{k_1}{k_2}$, т. е. надо найти такую точку M, чтобы

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{k_1}{k_2}.$$

Помня теорему о том, что величины векторов пропорциональны их проекциям на любую ось и, в частности, на ось Ox, имеем

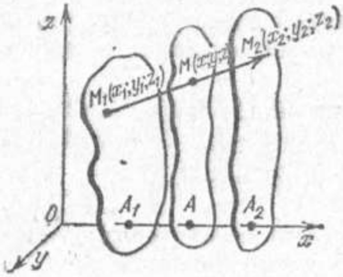


Рис. 100

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{A_1A}{AA_2}.$$

Значит,

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{k_1}{k_2}.$$

А так как

$$A_1A=x-x_1, \quad AA_2=x_2-x,$$

то

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{k_1}{k_2},$$

$$k_2x-k_2x_1=k_1x_2-k_1x, \quad (k_1+k_2)x=k_1x_2+k_2x_1,$$

$$x=\frac{k_1x_2+k_2x_1}{k_1+k_2}.$$

Аналогичные выражения найдем для y и z.

Таким образом, окончательно будем иметь

$$x=\frac{k_1x_2+k_2x_1}{k_1+k_2}, \quad y=\frac{k_1y_2+k_2y_1}{k_1+k_2}, \quad z=\frac{k_1z_2+k_2z_1}{k_1+k_2}.$$

b. В частности, координаты середины отрезка ($k_1 = k_2$) будут

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

c. Примеры. 1. На отрезке M_1M_2, где M_1 (1; 2; 6), M_2 (6; 12; 21), найти точку M, делящую отрезок в отношении $M_1M/MM_2 = 2/3$.

Решение. Согласно формулам координаты точки M будут

$$x=\frac{2\cdot 6+3\cdot 1}{2+3}=\frac{15}{5}=3, \quad y=\frac{2\cdot 12+3\cdot 2}{2+3}=\frac{30}{5}=6,$$

$$z=\frac{2\cdot 21+3\cdot 6}{2+3}=\frac{60}{5}=12.$$

Итак, искомая точка M (3; 6; 12).

2. Найти середину M отрезка M_1M_2, где M_1 (1; 3; 8), M_2 (−3; 5; 16).

Решение. Согласно формуле имеем

$$x=\frac{1-3}{2}=-1,\quad y=\frac{3+5}{2}=4,\quad z=\frac{8+16}{2}=12.$$

Итак, искомая точка $M(-1;\ 4;\ 12)$.

§ 10. График уравнения с двумя переменными

a. Мы выясним здесь, какое геометрическое значение имеет уравнение, связывающее переменные

$$x,\ y,\ z$$

(иногда все три, иногда и не все), если эти переменные рассматривать как координаты точки в пространстве.

Уравнение, связывающее x, y, z, мы предположим разрешенным относительно z. Пусть

$$z=f(x,\ y). \tag{1}$$

Чтобы построить какую-либо точку искомого геометрического места, выберем значения двух переменных x и y (независимых переменных) произвольно. Соответствующее значение z тогда определим из формулы (1). Получим точку $M(x;\ y;\ z)$. Выбрав для x и y другую пару значений, из (1) получим новое значение z, т. е. новую точку нашего геометрического места; выбирая для x и y новые значения, получим еще одну точку и т. д.

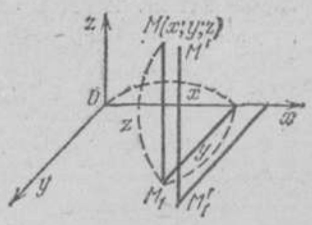


Рис. 101

Таким образом, мы можем построить сколько угодно точек искомого геометрического места.

b. Для выяснения характера геометрического места точек M рассмотрим одновременно с M еще проекцию ее M_1 на плоскость xOy (рис. 101). Эта точка M_1, рассматриваемая как точка плоскости xOy, имеет координаты x и y. Таким образом, задавая произвольно x и y, мы произвольно задаем некоторую точку M_1 плоскости xOy. Но тогда аппликата $z=MM_1$ уже не может быть произвольной — она определяется уравнением (1).

Каждой точке M_1 плоскости xOy будет отвечать своя аппликата M_1M, определяемая уравнением (1). Концы M

этих аппликат и образуют наше геометрическое место. Оно, очевидно, является некоторой поверхностью.

Вид поверхности, конечно, зависит от вида уравнения (1).

§ 11. Поверхность как след, образуемый перемещением некоторой деформируемой плоской кривой

a. Построение поверхности по данному уравнению (1) § 10 можно осуществить следующим образом. Сначала строим точки, отвечающие какому-либо определенному значению $y = y_1$. Эти точки будут лежать в плоскости,

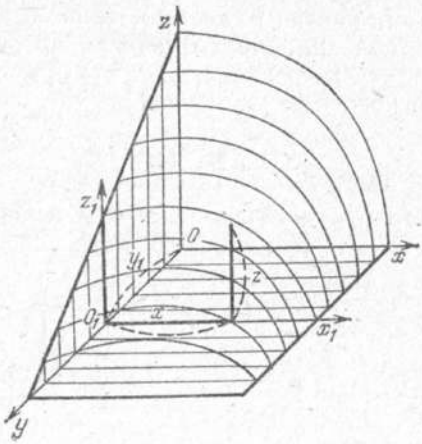


Рис. 102

параллельной плоскости xOz и отстоящей от нее на расстояние y_1. Они, следовательно, образуют линию пересечения указанной плоскости с поверхностью (1) § 10.

Для всех точек кривой y одно и то же: $y = y_1$. Аппликата z для точек этой кривой зависит теперь от одного только x. Выражение ее через x получим, заменив в уравнении (1) § 10 y на постоянное y_1:

$$z = f(x; y_1). \tag{1}$$

По уравнению (1) мы можем эту кривую построить (рис. 102).

b. Изменяя немного y_1, мы изменим немного и само уравнение кривой (y_1 является как бы параметром, определяющим форму кривой). Получим новую кривую, немного измененную, расположенную в плоскости, близкой к прежней и параллельной прежней. Меняя y еще раз, получим еще новую кривую и т. д.

Таким образом, придавая переменной y ряд поставленных значений, например, увеличивая ее все время на одну и ту же малую величину h, мы получим ряд кривых, расположенных на плоскостях, параллельных плоскости xOz, которые и охарактеризуют рассматриваемую нами поверхность. Конечно, чем меньше возьмем расстояние h между плоскостями, тем точнее эта поверхность будет охарактеризована.

На рис. 102 изображена часть поверхности, представляющей собою график функции

$$z=\frac{a-y}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

При постоянном $y=y_1$ это уравнение изображает эллипс с полуосями a и $b=a-y_1$. На рис. 102 изображены только эллипсы, отвечающие значениям

$$y_1=\frac{ka}{10},\quad k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6,\,7,\,8,\,9,\,10\qquad\left(h=\frac{3}{10}\right).$$

Это будут эллипсы, у которых большая полуось — постоянная, равная a. Малая же полуось b меняется вместе с y_1:

$$b=a-y_1=a-\frac{k}{10}a=\frac{10-k}{10}a.$$

Итак, последовательные значения b на рис. 102 будут такими:

$$b=\frac{10-k}{10}a,\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,10,$$

или

$$b=\frac{am}{10},\quad m=10,\,9,\,8,\,7,\,6,\,5,\,4,\,3,\,2,\,1,\,0.$$

§ 12. Цилиндрические поверхности

а. В частности, рассмотрим тот особый случай, когда в уравнении из трех переменных отсутствует одна или две. Например, пусть отсутствует y. Уравнение будет иметь вид

$$F(x,\,z)=0;\tag{1}$$

здесь, каково бы ни было y, уравнение сохраняет один и тот же вид, так как y в уравнение не входит. Значит, линии пересечения нашей поверхности с плоскостями, параллельными плоскости xOz, будут одинаковы.

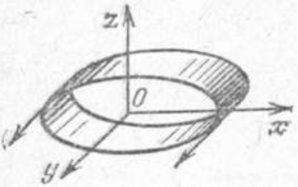


Рис. 103

Поверхность будет цилиндром с образующими, параллельными оси Oy. Линия плоскости xOz с уравнением (1) называется *направляющей* (рис. 103).

b. Например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

изобразит *эллиптический цилиндр*, называемый так потому, что его направляющая — эллипс.

§ 13. Обратная задача. Уравнение шаровой поверхности

a. Так же, как и на плоскости, здесь можно поставить и обратную задачу: по данной поверхности подобрать ее уравнение, т. е. найти такое уравнение между x, y, z, которому удовлетворяли бы все точки этой поверхности и не удовлетворяли бы точки, на поверхности не лежащие.

Эта задача, конечно, очень сложна, и чтобы ее разрешить, надо исходить из какого-либо свойства, общего всем точкам поверхности.

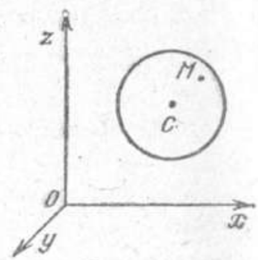


Рис. 104

b. Для примера выведем уравнение шаровой поверхности радиуса a с центром в точке C $(m;\ n;\ p)$ (рис. 104). Квадрат расстояния от какой-либо точки $M(x;\ y;\ z)$ пространства до центра C $(m;\ n;\ p)$ выражается формулой

$$|CM|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2.$$

Этот квадрат равен a^2, если точка M лежит на шаровой поверхности,

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = a^2, \tag{1}$$

и не равен a^2, если точка лежит вне шаровой поверхности. Поэтому уравнение (1) и является *уравнением шаровой поверхности*.

§ 14. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

а. Приступим к выводу уравнения плоскости. Положение плоскости определяется заданием точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на ней и направляющим вектором.

Под последним мы будем понимать вектор любой длины с точкой приложения в любой точке пространства и единственным условием, чтобы он был перпендикулярен плоскости.

Направляющий вектор $\overline{PQ}$ задается своими проекциями A, B, C на оси координат (начало этого вектора может помещаться в любой точке пространства).

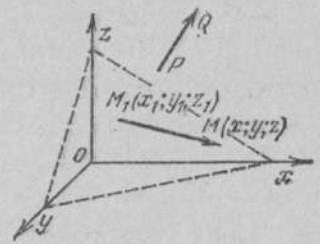


Рис. 105

Если теперь $M(x; y; z)$ — любая точка пространства, то вектор $\overline{M_1M}$ будет перпендикулярен направляющему вектору или нет в зависимости от того, будет ли точка M лежать на плоскости или нет (рис. 105).

А так как вектор $\overline{M_1M}$ имеет проекции $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, то условие перпендикулярности его направляющему вектору как вектору, имеющему проекции A, B, C, выразится формулой

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (1)$$

Таким образом, уравнение (1) выполняется, если $M(x; y; z)$ лежит на плоскости, и не выполняется, если M на плоскости не лежит. Оно, следовательно, и является *уравнением плоскости*.

b. Например, уравнение плоскости, проходящей через точку $(1; -2; 3)$ с направляющим вектором, имеющим проекции 3, 2, 6, будет

$$3(x - 1) + 2(y + 2) + 6(z - 3) = 0.$$

§ 15. Общее уравнение плоскости

а. Раскрывая скобки в уравнении (1) § 14, получим

$$Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0.$$

Обозначая

$$-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D,$$

приведем это уравнение к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где A, B, C не равны 0 одновременно. Итак, уравнение всякой плоскости может быть написано в форме (1).

Обратно, легко показать, что уравнение (1), где A, B, C одновременно не равны 0, всегда изображает плоскость.

Действительно, всегда можно подобрать числа x_1, y_1, z_1, удовлетворяющие условию

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \tag{2}$$

(например, при C, не равном 0, x_1 и y_1 выбираем произвольно, а z_1 находим из условия (2)). Вычитая тогда (2) из уравнения (1), приведем последнее к виду

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

А это, как мы видим, есть уравнение плоскости, проходящей через точку

$$(x_1;\ y_1;\ z_1).$$

Ввиду доказанного уравнению (1) присвоено название *общего уравнения плоскости.*

b. Например, общее уравнение плоскости, рассмотренной в § 14, будет

$$3x - 3 + 2y + 4 + 6z - 18 = 0;$$
$$3x + y + 6z - 17 = 0.$$

§ 16. Частные случаи

a. В частности, плоскость может быть параллельна одной из осей, и тогда направляющий вектор будет перпендикулярен этой оси. Проекции его на эту ось равна нулю, и, значит, в уравнении плоскости пропадет соответствующая переменная.

b. Например, если плоскость параллельна оси Ox, то направляющий вектор перпендикулярен Ox, проекция A его на Ox равна нулю, уравнение (1) § 15 примет вид

$$By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Исследуем это уравнение подробнее. Ему, в частности, удовлетворяют точки линии пересечения плоскости с плоскостью yOz. Значит, это уравнение, рассматриваемое только в отношении точек плоскости yOz, изобразит в ней прямую BC пересечения нашей плоскости с плоскостью yOz — *след* нашей плоскости на плоскости yOz (рис. 106).

c. Читателю предоставляется самому установить связь рассматриваемого случая с тем, что было сказано в § 12 о цилиндрических поверхностях вообще.

d. В частности, построение нашей плоскости сводится к построению следа ее на плоскости yOz.

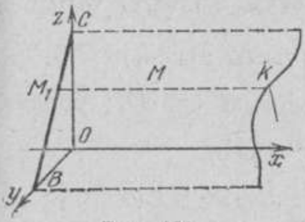


Рис. 106

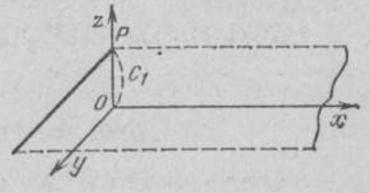


Рис. 107

e. Отметим случай, когда плоскость, кроме оси Ox, параллельна и другой оси, например, оси Oy. Тогда уравнение плоскости (оно же уравнение следа плоскости на плоскости yOz) примет вид

$$Cz + D = 0$$

(след — прямая, параллельная Oy). Решая относительно z, приведем это уравнение к виду

$$z = C_1 \quad (C_1 = -D/C).$$

Последнее уравнение отмечает собою не что иное, как тот факт, что все аппликаты плоскости, параллельной плоскости xOy, равны между собою — равны постоянной C_1. В частности, величине C_1 равна, следовательно, и аппликата точки пересечения плоскости с осью Oz (рис. 107).

f. В частности, при $C = 0$ получаем уравнение самой плоскости xOy в форме

$$z = 0$$

(оно отмечает собою тот факт, что все аппликаты плоскости xOy равны нулю).

Читатель сам сообразит далее, как будут выглядеть уравнения плоскостей, параллельных другим координатным осям или плоскостям.

g. В рассмотрении частных случаях обращались в нуль коэффициенты A, B, C. Теперь посмотрим, что будет, если $D = 0$.

Тогда уравнение плоскости можно написать в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Но, переписав его в форме

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0,$$

мы видим, что оно изображает плоскость, проходящую через начало координат.

b. Например, уравнение

$$y + 2z - 1 = 0$$

изображает плоскость, параллельную оси Ox; уравнение

$$2x + 3z - 6 = 0$$

— плоскость, параллельную оси Oy; уравнение

$$4x - y + 2 = 0$$

— плоскость, параллельную оси Oz; наконец, уравнение

$$x - y + z = 0$$

— плоскость, проходящую через начало координат.

§ 17. Выяснение расположения плоскости относительно осей

a. Положение плоскости выяснится, если будем знать следы ее на координатных плоскостях, т. е. прямые, по которым она пересекает эти плоскости. Достаточно при этом знать только два следа, так как плоскость вполне определится двумя различными прямыми, на ней лежащими.

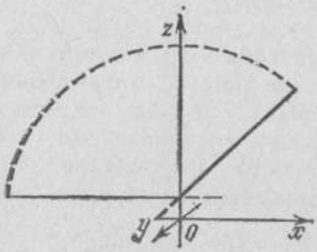


Рис. 108

b. Пусть, например,

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

— уравнение плоскости.

След ее на плоскости xOz получим, полагая в этом уравнении $x = 0$ (рис. 108). Получим уравнение следа в форме

$$3x - 2z + 1 = 0.$$

Построив оба следа по правилам построения прямых, мы сообразим по расположению следов, как расположена плоскость.

c. В частности, построение плоскости, параллельной хоть одной координатной оси, указано в предыдущем параграфе.

d. Для плоскости общего вида, не параллельной ни одной из осей и не проходящей через начало координат, мы укажем еще способ построения по отрезкам, отсекаемым на осях.

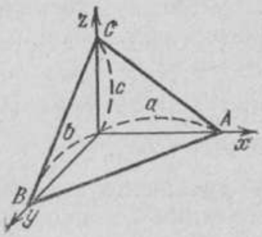


Рис. 109

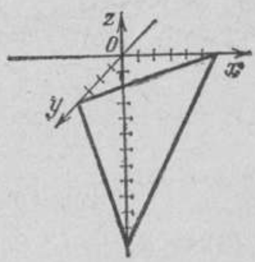


Рис. 110

Пусть a, b, c — величины этих отрезков (рис. 109). Тогда точки A, B, C — пересечения нашей плоскости с осями — имеют координаты

$$A\,(a;\ 0;\ 0),\ B\,(0;\ b;\ 0),\ C\,(0;\ 0;\ c).$$

А так как эти точки принадлежат плоскости, то они удовлетворяют уравнению плоскости

$$Aa + D = 0,\ Bb + D = 0,\ Cc + D = 0,$$

откуда найдем a, b, c, и тогда, зная их, построим плоскость.

e. Построим, например, плоскость

$$2x + 3y - z - 12 = 0.$$

Имеем

$$2a - 12 = 0,\ \ a = 6;\ \ 3b - 12 = 0,\ \ b = 4;$$
$$-c - 12 = 0,\ c = -12.$$

Плоскость расположена, как показано на рис. 110.

§ 18. Угол между плоскостями. Условие параллельности. Условие перпендикулярности

a. Угол между двумя плоскостями определяется по косинусу. Вообще углов будет два — один острый, другой — тупой (в частности, оба могут быть прямые). При этом тупой угол дополняет острый до 180°, так что косинусы обоих углов отличаются только знаком.

Легко видеть, что один из этих углов совпадает с углом между направляющими векторами плоскостей. Значит, чтобы найти косинусы обоих углов, которые образуются пересечением плоскостей, надо найти косинус угла между направляющими векторами и затем этому косинусу приписать оба знака.

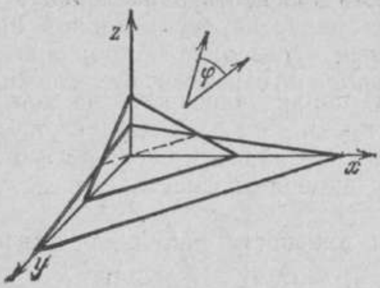


Рис. 111

Но если

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

— уравнения плоскостей, то проекции их направляющих векторов будут A, B, C; A_1, B_1, C_1 и поэтому (рис. 111)

$$\cos\varphi = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Условие параллельности:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Условие перпендикулярности:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0.$$

b. Например, угол между плоскостями

$$4x - 4y + 7z - 1 = 0, \quad x + 2y + 2z - 2 = 0$$

определится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{4\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + 7\cdot 2}{\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \pm\frac{10}{27}.$$

Плоскости

$$x - y + 2z - 1 = 0, \ -2x + 2y - 4z - 9 = 0$$

параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}.$$

Плоскости

$$2x - 3y + 4z - 2 = 0, \ 4x + 4y + z - 4 = 0$$

взаимно перпендикулярны ввиду того, что

$$2\cdot 4 + (-3)\cdot 4 + 4\cdot 1 = 0.$$

с. Решим следующую задачу.

Через точку $(x; y; z)$ провести плоскость, параллельную плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Решение проводим так. Искомая плоскость должна пройти через точку $(x; y; z)$; кроме того, так как она параллельна данной, за ее направляющий вектор можно взять тот же самый вектор, что и у данной плоскости, т. е. вектор с проекциями A, B, C.

Тогда уравнение искомой плоскости напишется так:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Например, уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 3; 2) и параллельной плоскости

$$4x - y + 2z - 3 = 0,$$

будет следующее:

$$4(x - 1) - (y - 3) + 2(z - 2) = 0.$$

§ 19. Условие совпадения плоскостей

а. Выясним теперь, при каком условии плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{1}$$

совпадают, иными словами, когда оба уравнения изображают одну и ту же плоскость.

Для решения этой задачи заметим, во-первых, что совпадение есть частный случай параллельности. Поэтому должно быть

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}. \tag{2}$$

С другой стороны, ввиду совпадения плоскостей координаты $(x; y; z)$ в обоих уравнениях принимают одни и те же значения.

Умножая уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

на общую величину отношений

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

имеем

$$Ax + By + Cz + D_1\frac{A}{A_1} = 0$$

Вычитая отсюда

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

получим

$$D_1 \frac{A}{A_1} - D = 0, \quad \frac{D}{D_1} = \frac{A}{A_1}.$$

Итак, пропорция (2) дополняется еще одним звеном и принимает вид

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}. \qquad (3)$$

Обратно, при соблюдении условий (3) уравнения (1) действительно изображают одну и ту же плоскость, так как первое получается из второго умножением на общую величину отношений (3).

b. Например, уравнения

$$2x - 3y + z - 4 = 0, \quad -4x + 6y - 2z + 8 = 0$$

изображают одну и ту же плоскость, так как

$$\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} = \frac{-4}{8}.$$

§ 20. Расстояние от точки до плоскости

a. Найдем расстояние d от точки $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для вывода формулы рассмотрим два вектора (рис. 112).

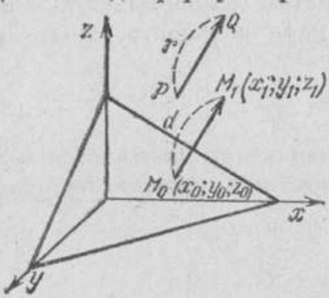


Рис. 112

1. Направляющий вектор $\overline{PQ}$. Его проекции A, B, C и длина

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \qquad (1)$$

2. Вектор $\overline{M_0M_1}$, перпендикулярный плоскости, с началом в точке M_0 плоскости и концом в данной точке M_1. Его проекции $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$. Длина же его и есть искомое расстояние d от точки M_1 до плоскости.

Рассмотрим скалярное произведение обоих векторов. Оно равно произведению этих векторов на косинус угла между ними, т. е. $rd \cos \varphi$. Но направления этих векторов или совпадают, или противоположны, значит, $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, т. е. $\cos\varphi = 1$ или $\cos\varphi = -1$. Следовательно, искомое скалярное произведение $\pm rd$ должно равняться сумме произведений одноименных проекций:

$$\pm rd = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0).$$

А так как

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0 = 0,$$

то ввиду (1)

$$\pm rd = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

и

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b. Пример 1. Найдем расстояние от точки $M(2; 1; 1)$ до плоскости

$$2x - 6y + 3z - 8 = 0.$$

Имеем

$$d = \frac{|2\cdot 2 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1 - 8|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{28}{7} = 4.$$

c. Пример 2. Найдем еще расстояние от плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

до начала координат, т. е. до точки $(0; 0; 0)$. Здесь имеем

$$d = \frac{|A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

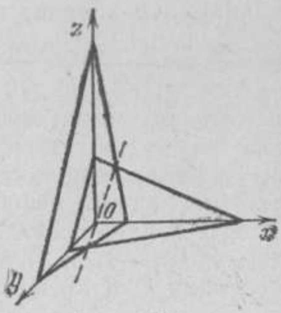


Рис. 113

§ 21. Прямая как пересечение двух плоскостей

Две плоскости в пространстве (если они не параллельны), пересекаясь, образуют прямую линию. Пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

— уравнения этих плоскостей (рис. 113).

Каждая точка прямой, как одновременно лежащая на обеих плоскостях, удовлетворяет обоим уравнениям (1).

Точки же, не принадлежащие прямой, не находятся на обеих плоскостях одновременно и, следовательно, не могут одновременно удовлетворять обоим уравнениям (1).

Итак, системе (1) удовлетворяют все точки нашей прямой и не удовлетворяют точки, не принадлежащие прямой. Эту систему мы назовем *системой уравнений прямой*.

§ 22. Прямая, проходящая через данную точку

a. Положение прямой вполне определено, если на ней дана какая-либо точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и дано направление прямой. Последнее определим, задав проекции l, m, n некоторого вектора, параллельного прямой,— направляющего вектора. Этот направляющий вектор можно, например, взять на самой прямой. Возьмем за такой вектор $\overline{M_1M_2}$.

Если точка M лежит на прямой, то проекции $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ вектора $\overline{M_1M}$ будут пропорциональны проекциям l, m, n направляющего вектора:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \qquad (1)$$

Напротив, эта пропорциональность не имеет места, если точка M не лежит на прямой, так как тогда указанные векторы не параллельны. Поэтому пропорция (1) и дает нам систему уравнений прямой.

b. Следует отметить, что пропорция равносильна системе двух уравнений, взятых из следующих трех:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}, \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}, \quad \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n},$$

потому что среди этих уравнений только два (например, два первые) могут быть приняты за независимые. Третье же является следствием их (две величины, равные порознь третьей, равны между собою).

c. Например, система уравнений прямой, проходящей через точку (1; 3; 1), направляющий вектор которой имеет проекции 2, 6, 3, будет следующая:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z - 1}{3}.$$

Эта пропорция может быть заменена равносильной системой двух уравнений:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{6}, \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{z - 1}{3},$$

или

$$6x - 6 = 2y - 6,\ 3x - 3 = 2z - 2,$$

или, наконец,

$$6x - 2y = 0,\ 3x - 2z - 1 = 0.$$

d. Система уравнений прямой, проходящей через точку (2; 1; 1), направляющий вектор которой имеет проекции 0, 0, 2, будет следующая:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2},$$

что может быть заменено равносильной системой

$$\frac{x-2}{0} = \frac{z-1}{2}, \quad \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2},$$

или

$$2x - 4 = 0,\ 2y - 2 = 0.$$

§ 23. Прямая, проходящая через две точки

a. В частности, положение прямой может быть определено двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 114).

Тогда прямую рассматриваем как проходящую через точку $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и имеющую направляющий вектор $\overline{M_1M_2}$. Но проекции $\overline{M_1M_2}$ суть

$$l = x_2 - x_1,\ m = y_2 - y_1,\quad n = z_2 - z_1,$$

и потому уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

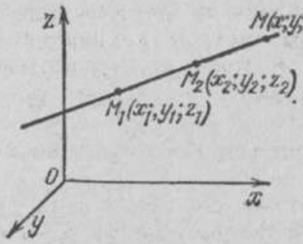


Рис. 114

b. Например, уравнение прямой, проходящей через точки M_1 (1; 4; 2), M_2 (2; 5; 4), будет следующим:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-4}{5-4} = \frac{z-2}{4-2},$$

или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

c. Уравнение прямой, проходящей через точки

$$M_1\ (1;\ 2;\ 3),\ M_2\ (1;\ 5;\ 8),$$

будет следующим:

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{8-3},$$

или

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{5}.$$

§ 24. Переход от системы уравнений прямой в общем виде к системе в виде пропорций

Система уравнений прямой в виде пропорций имеет особенно важное значение ввиду того, что туда входят проекции направляющего вектора. Поэтому, когда задана система уравнений прямой в общем виде, весьма важно уметь привести эту систему к системе в виде пропорций. Способ, которым это достигается, мы покажем здесь на частном примере.

Пусть требуется привести к такому виду систему

$$x-2y+3z-4=0, \quad 2x+y-z+1=0. \qquad (1)$$

Пользуясь этими уравнениями, мы сначала постараемся найти две какие-либо точки M_1 и M_2 нашей прямой. Чтобы найти M_1, мы придаем абсциссе x какое-либо определенное значение, например, полагаем $x = 0$ (это можно сделать, так как точка прямой должна удовлетворять системе (1) двух уравнений с тремя неизвестными, и, значит, одному из неизвестных мы можем давать любое значение).

Тогда для определения y и z можно пользоваться системой (1), где положено $x = 0$. Получим

$$-2y+3z-4=0, \; y-z+1=0,$$

откуда

$$y=1, \; z=2.$$

Итак, наша прямая проходит через точку

$$M_1\,(0;\,1;\,2).$$

Чтобы найти другую точку M_2, можно было бы придать x какое-либо другое значение, например, взять $x = 1$, и затем найти соответствующие значения y и z согласно системе (1), но лучше делать не так, а иначе. Именно, для разыскания M_2 можно положить $y = 0$ и затем подобрать соответствующие x и z согласно системе (1).

Итак, положив в уравнениях (1) $y = 0$, получим

$$a+3z-4=0, \; 2x-z+1=0,$$

откуда

$$x = 1/7, \quad z = 9/7.$$

Значит, наша прямая проходит также через точку M_2 (1/7; 0; 9/7).

Поэтому систему уравнений нашей прямой, как проходящей через две точки

$$M_1\ (0;\ 1;\ 2),\ M_2\ (1/7;\ 0;\ 9/7),$$

можно написать в форме

$$\frac{x-0}{\frac{1}{7}-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-2}{\frac{9}{7}-2},$$

или, умножая знаменатели на 7,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-2}{-5}.$$

Последняя же система пропорций, как известно, изображает прямую, проходящую через точку (0; 1; 2), с направляющим вектором, имеющим проекции

$$l = 1,\ m = -7,\ n = -5.$$

§ 25. Угол между прямыми. Условие параллельности. Условие перпендикулярности

а. Прямые в пространстве образуют между собою два угла, один из которых будет острым, другой — тупым (в частном случае оба угла могут оказаться прямыми, или же один будет нулем, другой 180°). Косинусы обоих углов отличаются только знаком (в сумме углы образуют 180°).

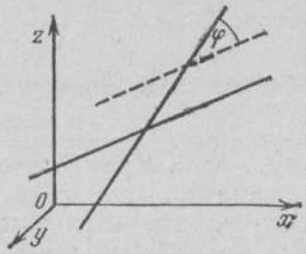


Рис. 115

Легко видеть, что один из углов совпадает с углом между направляющими векторами прямых.

Но если

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

$$\frac{x-x'}{l_1} = \frac{y-y'}{m_1} = \frac{z-z'}{n_1}$$

— системы уравнений прямых (как было показано в предыдущем параграфе, их к такому виду всегда можно привести), то направляющие векторы прямых имеют проекции l, m, n; l_1, m_1, n_1. Следовательно, косинус угла φ между прямыми (рис. 115) будет

$$\cos\varphi = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n}\,\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}\,.$$

b. *Условие параллельности прямых:*

$$\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}\,.$$

c. *Условие же перпендикулярности:*

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

d. Чтобы покончить с разбираемым вопросом, решим следующую задачу.

Через точку $(x_1; y_1; z_1)$ провести прямую параллельно прямой

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}\,.$$

Искомая прямая должна пройти через точку $(x_1; y_1; z_1)$, а так как она параллельна данной, то за направляющий вектор ее можно взять вектор с теми же проекциями l, m, n, что и у данной прямой. Значит, уравнение искомой прямой может быть написано в форме

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}\,.$$

e. П р и м е р ы.

1. Угол между прямыми

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-3}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot(-2) + 2\cdot 6 + (-1)\cdot(-3)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\,\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{21}.$$

2. Прямые

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-4}, \quad \frac{x-2}{0{,}5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-2}$$

параллельны ввиду того, что

$$\frac{1}{0{,}5} = \frac{2}{1} = \frac{-4}{-2},$$

3. Прямые

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{7}$$

взаимно перпендикулярны ввиду того, что $-4\cdot 1+(-3)\times \times 1+1\cdot 7=0$.

4. Через точку (1; 2; 3) провести прямую параллельно прямой

$$x-y+z+1=0, \; x+2y-z+2=0. \qquad (1)$$

Чтобы решить эту задачу, сначала приведем систему (1) к системе в виде пропорций. Полагая $x=0$, получим

$$-y+z+1=0, \; 2y-z+2=0,$$

откуда

$$y=-3, \; z=-4,$$

и, следовательно, прямая проходит через точку M_1 (0; −3; −4). Положив далее $y=0$, получим

$$x+z+1=0, \; x-z+2=0,$$

откуда

$$x=-3/2, \; z=1/2.$$

Следовательно, прямая проходит также через точку M_2 (−3/2; 0; 1/2). Система уравнений этой прямой в форме пропорций будет

$$\frac{x-0}{-\frac{3}{2}-0}=\frac{y+3}{0+3}=\frac{z+4}{\frac{1}{2}+4},$$

или (умножая знаменатели на 2)

$$\frac{x-0}{-3}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{9}, \quad \frac{x-0}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+4}{3}.$$

Итак, задача свелась к следующей: через точку (1; 2; 3) провести прямую параллельно прямой

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{3}.$$

Решением этой задачи будет

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Однако эту задачу можно решить и проще, хотя тогда решение и не получится в виде пропорций. Именно, рассмотрим плоскости, параллельные плоскостям

$$x-y+z+1=0, \quad x+2y-z+2=0$$

и проходящие через точку (1; 2; 3). Уравнения этих плоскостей будут

$$(x-1)-(y-2)+(z-3)=0, \quad (x-1)+2(y-2)-(z-3)=0. \quad (2)$$

Прямая пересечения новых плоскостей будет параллельна прежней и пройдет через точку (1; 2; 3). Следовательно, прямая, заданная системой (2), и будет той, которая нам требуется.

§ 26. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности

а. Углов между прямой и плоскостью будет два: один острый, который обозначим буквой φ, другой — тупой, равный $180^\circ-\varphi$.

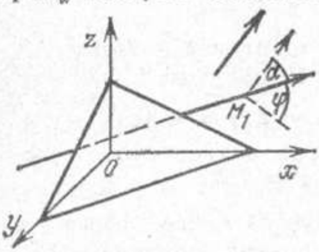


Рис. 116

Точно так же два угла будут и между прямой и направляющим вектором плоскости. Острый угол обозначим буквой α, тупой будет равен $180^\circ-\alpha$ (рис. 116).

Очевидно,

$$\varphi=90^\circ-\alpha, \quad \sin\varphi=\cos\alpha,$$

но $\cos\alpha$ мы сейчас найдем. Действительно, угол α как раз совпадает с углом между направляющими векторами прямой и плоскости или же дополняет этот угол до 180°. Следовательно, $\cos\alpha$ от косинуса последнего угла может отличаться только знаком.

Поэтому, если

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— уравнение плоскости,

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

— система уравнений прямой, то

$$\cos\alpha=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Следовательно, так как $\sin\varphi=\cos\alpha$, то

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

b. В частности, прямая параллельна плоскости, если направляющие векторы прямой и плоскости взаимно перпендикулярны, и, наоборот, прямая перпендикулярна плоскости, если она параллельна направляющему вектору плоскости. Поэтому условием параллельности прямой и плоскости будет

$$lA + mB + nC = 0$$

и условием перпендикулярности — пропорция

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

c. В заключение решим задачу: через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ провести прямую, перпендикулярную плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Направляющий вектор плоскости имеет проекции A, B, C. С такими проекциями можно взять и направляющий вектор прямой, тогда прямая будет параллельна направляющему вектору плоскости и, следовательно, перпендикулярна плоскости. Значит, уравнение искомой прямой напишется так:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

d. Читатель далее сам убедится, что уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

будет следующим:

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

§ 27. Простейшие поверхности. Эллипсоид

a. Из поверхностей мы рассмотрим только эллипсоид. Уравнение эллипсоида подобно уравнению эллипса. Оно имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — положительные постоянные. Мы выясним форму эллипсоида, рассекая его плоскостями, параллельными осям координат (рис. 117).

b. Во-первых, находим сечение плоскостью xOz. Уравнение его получим, полагая $y = 0$ (уравнение здесь понимается условно — в смысле зависимости между x и z, когда y — постоянная). Это уравнение будет

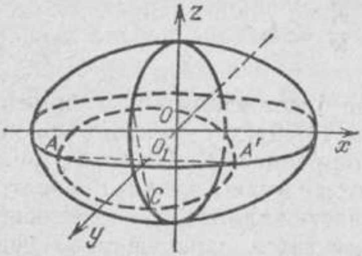


Рис. 117

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (1)$$

т. е. искомое сечение — эллипс с полуосями a и c.

c. Далее, мы должны рассмотреть еще уравнения других сечений, параллельных плоскости xOz. Для этого положим теперь

$$y = y_1 > 0$$

(т. е. рассматриваем сечение плоскостью, параллельной xOz и отстоящей от xOz на расстояние $y = y_1$). Уравнение сечения будет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2}, \qquad (2)$$

левая часть уравнения есть сумма квадратов и, значит, $\geqslant 0$. Следовательно, выражение в правой части тоже должно быть $\geqslant 0$.

Представляя это выражение в форме

$$1 - \frac{y_1^2}{b^2} = \left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2$$

и деля на него обе части найденного уравнения, получим

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

А это показывает, что найденное нами сечение есть эллипс. Полуоси этого эллипса будут

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}, \qquad (3)$$

они получаются из полуосей a и c эллипса (1) умножением на одно и то же число

$$\sqrt{1-\frac{y_1^2}{b^2}}<1.$$

С увеличением y_1 этот эллипс будет удаляться от плоскости xOz, причем его полуоси (3) будут уменьшаться (потому что уменьшается подкоренное выражение), пока, наконец, обе полуоси обратятся в нули и эллипс превратится в точку. Таким образом, часть эллипсоида, отвечающая положительным $y = y_1$, получается перемещением некоторого деформируемого эллипса параллельно плоскости xOz. Центр O этого эллипса скользит по оси Oy, полуоси же $O'A' = a_1$ и $O'C' = c_1$ его все время уменьшаются, пока не обратятся в нуль при $y_1 = b$.

d. Совершенно ясно далее, что от изменения знака у y_1 уравнение (2) не изменится, т. е. отрицательным y_1 будут отвечать такие же эллипсы, как и положительным. Значит, часть эллипсоида, отвечающая отрицательным y_1, будет симметрична той, которая отвечает положительным y_1.

e. Интересно далее выяснить, по каким кривым скользят вершины A' и C' переменного эллипса, описывающего эллипсоид?

Вершина A' скользит по кривой пересечения эллипсоида с плоскостью xOz. Ее получим, полагая $z = 0$. Следовательно, ее уравнением будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

f. Точно таким же образом убедимся, что вершина C' скользит по эллипсу

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащему в плоскости yOz $(x = 0)$.

g. Длины a, b, c отрезков, отсекаемых эллипсоидом на осях, называются *полуосями*.

h. В частности, при $a = c$ уравнение эллипсоида будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

эллипсы будут кругами ($a_1 = c_1$). Такой эллипсоид может быть получен вращением вокруг оси Oy эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

лежащего в плоскости xOy, и поэтому называется *эллипсоидом вращения*.

k. Если же $a = b = c$, то уравнение эллипсоида принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Эллипсоид обращается в шаровую поверхность.

§ 28. Другие простейшие поверхности

Читателю предлагается самому исследовать поверхности (исследуя их сечения плоскостями $z = \text{const}$):

1. Эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

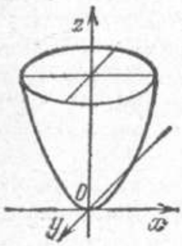


Рис. 118

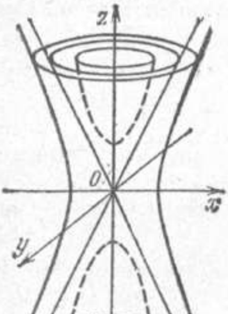


Рис. 119

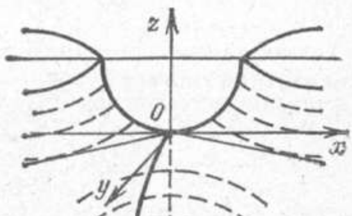


Рис. 120

5. Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}.$$

Показать, что они имеют форму, указанную на рис. 118—120.

В частности, для поверхностей 2, 3, 4 показать, что при одних и тех же a, b и c двуполостный гиперболоид лежит внутри конуса, а конус в свою очередь лежит внутри однополостного гиперболоида.

§ 29. Кривая в пространстве как пересечение двух поверхностей

Линия в пространстве рассматривается как линия пересечения двух поверхностей, и если

$$F(x;\ y;\ z) = 0,\quad \Phi(x;\ y;\ z) = 0 \tag{1}$$

— уравнения этих поверхностей, то система (1) является *системой уравнений линии*.

Действительно, всякая точка линии одновременно лежит на обеих поверхностях и, следовательно, удовлетворяет системе (1). Точки же, не принадлежащие линии, не могут одновременно лежать на обеих поверхностях и, тем самым, не могут удовлетворять системе (1).

§ 30. Параметрические уравнения

a. Однако описанный способ задания линий имеет свои неудобства. Гораздо чаще пользуются другим — параметрическим способом задания линии. Именно, подобно тому, как мы делали в плоской аналитической геометрии, рассматриваем текущие координаты $(x;\ y;\ z)$ точки линии как функции некоторой новой независимой переменной t:

$$x = f_1(t),\quad y = f_2(t),\quad z = f_3(t); \tag{1}$$

эту новую переменную t называем *параметром* (переменным), сами же уравнения (1) — *параметрическими уравнениями кривой*.

b. Так же как и в плоской геометрии, за параметр t можно принимать любую переменную, характеризующую положение точки на линии,— какой-либо отрезок, дугу, угол.

§ 31. Винтовая линия

a. В качестве примера мы выведем параметрические уравнения винтовой линии. Эту кривую можно получить следующим образом.

Прямой круговой цилиндр с радиусом основания a обертываем листом бумаги, как показано на рис. 121.

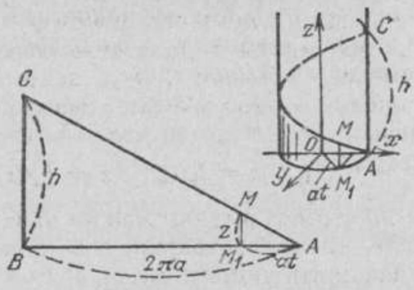


Рис. 121

Этот лист имеет форму треугольника с основанием AB, равным длине $2\pi a$ окружности основания цилиндра, и высотой h (h — шаг винта). Сторона AC треугольника и нарисует на цилиндре винтовую линию.

b. Выведем параметрические уравнения винтовой линии, принимая за параметр t угол AOM_1 (считая здесь положительным то вращение, которое идет от оси Ox к оси Oy). Точка M_1 является проекцией точки M на плоскость xOy. Абсцисса x и ордината y точки M_1 совпадают с абсциссой и ординатой точки M — они суть проекции вектора $\overline{OM_1}$ на оси Ox и Oy и равны

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Что касается аппликаты z точки M, то ее лучше всего найдем из рассмотрения $\triangle ABC$ в виде, еще не навернутом на цилиндр. Здесь $|AM_1|$ — выпрямленная дуга в верхней части рис. 121 и, следовательно,

$$|AM_1| = at$$

(дуга измеряется произведением радиуса на угол). Имеем пропорцию

$$\frac{|M_1M|}{|BC|} = \frac{|AM_1|}{|AB|}, \quad \frac{z}{h} = \frac{at}{2\pi a} = \frac{t}{2\pi},$$

откуда

$$z = \frac{h}{2\pi} t.$$

Итак, параметрическими уравнениями винтовой линии будут

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t.$$

§ 32. Параметрические уравнения в механике

Материальная точка, перемещаясь в пространстве с течением времени t, описывает некоторую кривую — *траекторию*. Координаты x, y, z этой точки M, меняющиеся с изменением времени t, суть некоторые функции времени. Движение можно считать известным, если эти функции заданы:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1}$$

так как тогда по этим формулам можно найти координаты x, y, z точки M, а, следовательно, и ее положение в любой наперед заданный момент t.

Уравнения (1) будут представлять собою не что иное, как *параметрические уравнения траектории*, причем параметром здесь является само время t.

§ 33. Переход от параметрического представления к общему и обратно

a. Параметрические уравнения содержат три уравнения с четырьмя неизвестными x, y, z, t. Исключая из них t, получим два уравнения с тремя неизвестными x, y, z, т. е. систему уравнений обычного типа.

Например, из параметрических уравнений винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi}t$$

мы можем исключить параметр t следующим образом.

Из третьего уравнения находим

$$t = 2\pi z/h.$$

Подставляя это в первые два уравнения, найдем обыкновенную систему уравнений винтовой линии:

$$x = a\cos\frac{2\pi z}{h}, \quad y = a\sin\frac{2\pi z}{h}.$$

b. Обратно, обыкновенное представление кривой

$$F(x;\ y;\ z) = 0, \quad \Phi(x;\ y;\ z) = 0 \tag{1}$$

можно свести к параметрическому, взяв за параметр одну из координат, например x.

Выражая из (2) y и z через x, имеем

$$y = f_2(x), \quad z = f_3(x).$$

Присоединяя сюда тождество $x = x$, имеем

$$x = x, \quad y = f_2(x), \quad z = f_3(x),$$

т. е. все x, y, z выражены через x ($f_1(x) = x$).

§ 34. Преобразование координат

a. Если даны координаты x, y, z какой-либо точки M пространства относительно данной системы осей Ox, Oy, Oz, то весьма важно бывает знать связь этих координат с координатами той же точки относительно какой-либо новой системы осей.

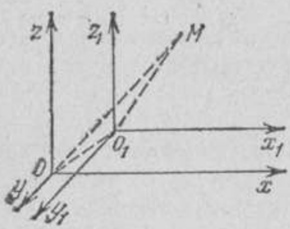


Рис. 122

b. Сначала рассмотрим случай параллельного переноса осей, т. е. случай, когда новые оси параллельны старым.

Пусть a, b, c — старые координаты нового начала O (рис. 122).

Проектируя векторную цепь OO_1M и замыкающий ее вектор $\overline{OM}$ на старую ось Ox, имеем

$$\text{пр}\,\overline{OM} = \text{пр}\,\overline{OO_1} + \text{пр}\,\overline{O_1M},$$

но

$$\text{пр}\,\overline{OM} = x, \quad \text{пр}\,\overline{OO_1} = a, \quad \text{пр}\,\overline{O_1M} = x_1$$

и потому

$$x = a + x_1.$$

Аналогично этому, проектируя на ось Oy, получим

$$y = b + y_1.$$

Наконец, проектируя на ось Oz, найдем

$$z = c + z_1.$$

Таким образом, будем иметь следующие формулы перехода:

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1, \quad z = c + z_1,$$

которые выражают старые координаты точки через ее новые координаты и так же, как в плоской геометрии, носят название *формул перехода*.

c. Теперь рассмотрим случай, когда новые оси имеют старое начало, но новые направления (рис. 123). Положение новых осей тогда определится углами, которые новые оси координат образуют со старыми осями.

Пусть эти углы даются следующей таблицей:

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	α	β	γ
Oy_1	α_1	β_1	γ_1
Oz_1	α_2	β_2	γ_2

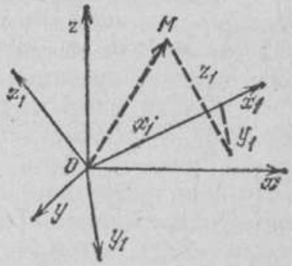


Рис. 123

Обратно, легко видеть, что если принять за основную не старую, а новую систему осей, то старые оси суть оси, образующие с новыми следующие углы:

с осью Ox — углы α, α_1, α_2,

с осью Oy — углы β, β_1, β_2,

с осью Oz — углы γ, γ_1, γ_2.

Вектор $\overline{OM}$ имеет проекциями на новые оси числа x_1, y_1, z_1; следовательно, его проекции x, y, z на старые оси как на оси, образующие с новыми осями указанные выше углы, согласно (1) § 4 выразятся так:

$$x = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1 + z_1 \cos \alpha_2,$$

$$y = x_1 \cos \beta + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2,$$

$$z = x_1 \cos \gamma + y_1 \cos \gamma_1 + z_1 \cos \gamma_2.$$

Это *формулы перехода* для рассматриваемого случая.

d. Читателю предлагается самому показать по аналогии с плоской геометрией, что в общем случае, когда новые оси имеют и новое начало, и новые направления, *формулы перехода* будут иметь вид

$$x = a + x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \alpha_1 + z_1 \cos \alpha_2,$$

$$y = b + x_1 \cos \beta + y_1 \cos \beta_1 + z_1 \cos \beta_2,$$

$$z = c + x_1 \cos \gamma + y_1 \cos \gamma_1 + z_1 \cos \gamma_2.$$

§ 35. Упражнения

1. Найти длину вектора, заданного проекциями $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$. *Ответ*: $r = 7$.

2. Проверить, что векторная цепь, состоящая из трех векторов с проекциями 2, -4, 4; -3, 2, -5; 1, 2, 2, образует замкнутый треугольник, и затем вычислить периметр этого треугольника. *Ответ*: периметр 16.

3. Найти направление вектора, заданного проекциями 7; 4; -4. *Ответ*: $\cos\alpha = 7/9$, $\cos\beta = 4/9$, $\cos\gamma = -4/9$.

4. Три силы $x = 6$, $y = -6$, $z = 7$, приложенные к началу координат, направлены по осям координат. Найти длину и направление равнодействующей. *Ответ*: длина 11; $\cos\alpha = 6/11$, $\cos\beta = -6/11$, $\cos\gamma = 7/11$.

5. Ребра параллелепипеда имеют длины 2, 6, 9. Найти проекции этих ребер на направление диагонали. *Ответ*: 4/11, 36/11, 81/11.

6. Три силы с проекциями -1, 2, 3; 1, 1, 1; 1, 1, 2 приложены к одной точке. Найти длину и направление равнодействующей. *Ответ*: длина 9; $\cos\alpha = 1/9$, $\cos\beta = 4/9$, $\cos\gamma = 8/9$.

7. Вектор образует с осью Ox угол 60°, а с осью Oy — угол 45°. Найти угол, образуемый этим вектором с осью Oz. *Ответ*: $\gamma_1 = 60°$, $\gamma_2 = 120°$.

8. Точке, находящейся в начале координат, сообщены три скорости 9, 8 и 5, каждая образует с осями равные острые углы, но первая лежит в первом координатном угле, вторая — в третьем, наконец, третья — в шестом. Найти, по какому направлению и с какой скоростью начнет двигаться точка. *Ответ*: скорость $14/\sqrt{3}$, $\cos\alpha = -2/7$, $\cos\beta = 3/7$, $\cos\gamma = 6/7$.

9. Проекции вектора суть 6, 6, 7. Найти его проекции на направление вектора из упражнения 3. *Ответ*: 38/9.

10. Проекции вектора суть 2, 3, 7. Найти его проекцию на ось с направляющими косинусами 12/13; $-3/13$; $-4/13$, проверив сначала, что такая ось существует. *Ответ*: -1.

11. Найти проекцию силы величиной 4, расположенной в плоскости xOy под углом 30° к оси Ox, на направление, образующее с осями равные острые углы (с точностью до 0,01). *Ответ*: 3,15.

12. Найти скалярное произведение векторов с проекциями 2, 6, 3 и 1, 2, 2. *Ответ*: 20.

13. То же самое для векторов с проекциями 4, -5, 20 и -7, 4, 4. *Ответ*: 32.

14. Найти косинус угла между векторами из упражнения 12. *Ответ*: 20/21.

15. Найти косинус угла между векторами с проекциями 4, 4, 2 и 14, 5, 2. *Ответ*: 8/9.

16. Найти проекцию первого вектора из упражнения 12 на направление вектора (1, 2, 2). *Ответ*: 20/3.

17. Будут ли параллельны векторы с проекциями $0{,}5;\ -0{,}7;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и $-1{,}5;\ 2{,}1;\ \frac{3}{1-\sqrt{3}}$? *Ответ*: да.

18. Будут ли взаимно перпендикулярны векторы с проекциями 1, 3, −4 и −2, 2, 1? *Ответ*: да.

19. Какой вид имеют формулы (1) § 3, (1)—(4) § 4, когда вектор $\overline{OP}$ лежит в плоскости xOy? *Ответ*: $x^2+y^2=r^2$, $x=p\cos\alpha$, $y=p\sin\alpha$, $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos^2\alpha+$ $+\sin^2\alpha=1$.

20. Во что обратятся формулы (1), (2), (3), (5) § 5, когда оба направления лежат в плоскости xOy? *Ответ*

$$\text{пр}\,\overline{OP}=r\cos\varphi=x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1,$$

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha_1+\sin\alpha\sin\alpha_1,$$

$$rr_1\cos\varphi=xx_1+yy_1,$$

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}.$$

21. Во что обратится формула (2) § 5, когда $\varphi=0$? *Ответ*: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

22. Найти периметр треугольника с вершинами $M_1(2;\ 4;\ 5)$, $M_2(3;\ 8;\ 13)$, $M_3(-1;\ 0;\ 5)$. *Ответ*: 26.

23. Найти периметр теругольника с вершинами $M_1(0;\ 0;\ 0)$, $M_2(-4{,}2;\ -5{,}6;\ 24)$. *Ответ*: 120.

24. На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от точек $M_1(6;\ 6;\ 6)$, $M_2(7;\ 4;\ 7)$, $M_3(4;\ 4;\ 8)$. *Ответ*: (3; 0; 0).

25. Найти центр и радиус шаровой поверхности, проходящей через точки $M_1(0;\ 0;\ 0)$, $M_2(7;\ 1;\ -2)$, $M_3(8;\ 6;\ -4)$. *Ответ*: центр (4; 7; 4), радиус 9.

26. На оси ординат найти такую точку M, чтобы угол M_1MM_2 был прямым. При этом $M_1(-6;\ 7;\ 7)$, $M_2(2;\ 10;\ -6)$. *Ответ*: (0; 1; 0).

27. Разделить отрезок M_1M_2, где $M_1(1;\ 4;\ 8)$, $M_2(8;\ 18;\ -20)$, в отношении 2 : 5. *Ответ*: M (3; 8; 0).

28. Дано M_1 (2; 2; 1). Найти M_2, если известно, что точка M (6; 4; 5) делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 3. *Ответ*: M_2 (12; 7; 11).

29. В треугольнике с вершинами M_1 (4; 8; 8), M_2 (16; 12; 4), M_3 (0; 4; 8) середины сторон принимаем за вершины нового треугольника. Найти середины сторон этого нового треугольника. *Ответ*: (9; 9; 6), (5; 7; 7), (6; 8; 7).

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (3; 1; 0), если известно, что ее направляющий вектор имеет проекции 2, 6, 3. *Ответ*: $2x + 6y + 3z - 12 = 0$.

31. Найти уравнение плоскости, если известно, что она проходит через точку M_1 (3; 4; 1) и перпендикулярна вектору $\overline{M_1M_2}$, где M_2 (—4; 8; 2). *Ответ*: $-2x + 4y + z - 11 = 0$.

32. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 4; 2), M_2 (2; 3; 1), M_3 (1; 1; 2). *Ответ*: $x + z - 3 = 0$.

33. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 1; 1), M_2 (2; 3; 0) и отсекающей на оси Oz отрезок длиной 5. *Ответ*: $7x - 3y + z - 5 = 0$, $-13x + 7y - z + 5 = 0$.

34. Доказать, что уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки a, b, c, будет

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

35. Найти точку пересечения плоскостей $2x - 4y + 3z + 3 = 0$, $x - y + z = 0$, $x + 2y + z - 6 = 0$. *Ответ*: (1; 2; 1).

36. Найти косинус острого угла между плоскостями $12x - 3y + 4z - 8 = 0$, $4x + 8y + z - 1 = 0$. *Ответ*: 28/117.

37. Найти косинус угла между плоскостями $x + y + z = 0$, $2x - z = 0$. *Ответ*: $\pm 1/\sqrt{15}$.

38. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (1; 3; 1) и параллельной плоскости $2x - 4y + 3z - 1 = 0$. *Ответ*: $2x - 4y + 3z + 7 = 0$.

39. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (4; 2; 1) и перпендикулярной плоскостям $x + y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 2 = 0$. *Ответ*: $3x - y - 2z - 16 = 0$.

40. Найти расстояние от точки (2; 2; 3) до плоскости $8x - 4y + z - 38 = 0$. *Ответ*: 3.

41. Найти расстояние от плоскости $2x - 2y + z - 6 = 0$ до начала координат. *Ответ*: 2.

42. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (3; 1; 4), если направляющий вектор прямой имеет проекции 2, 3, 6. *Ответ*: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{6}$.

43. Найти уравнения сторон треугольника из упражнения 22. *Ответ*: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{8}$, $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-8}{-8} = \frac{z-13}{-8}$, $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{0}$.

44. Написать в виде пропорций уравнения прямой $x + y - z + 1 = 0$, $2x - y + 2z - 3 = 0$. *Ответ*: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-3}$.

45. Найти косинус острого угла между прямой $4x - y - z - 3 = 0$, $y - z + 6 = 0$ и прямой $2x - 6y + z = 0$, $4x - 3y - z + 1 = 0$. *Ответ*: 19/21.

46. Найти синус угла между первой прямой из упражнения 45 и плоскостью $2x - 6y + 9z - 1 = 0$. *Ответ*: 8/33.

47. Через точку (2; 3; 6) провести плоскость перпендикулярно второй прямой из упражнения 45. *Ответ*: $3x + 2y + 6z - 48 = 0$.

48. Через точку (3; 3; —1) провести прямую перпендикулярно плоскости $3x - 3y + 4z - 9 = 0$. *Ответ*: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

49. Через точку (1; 2; 1) провести плоскость параллельно прямым $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. *Ответ*: $3x - 7y + 2z + 9 = 0$.

50. Доказать, что уравнение

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

при m и n, одновременно не равных нулю, изображает плоскость, проходящую через линию пересечения плоскостей

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

(если, конечно, эти плоскости не параллельны).

51. Доказать, что уравнение плоскости, являющейся биссектрисой двугранного угла между плоскостями

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

будет следующим:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}.$$

Указание. Если преобразовать уравнения данных плоскостей с тем, чтобы длины направляющих векторов оказались равными (что проще всего сделать, приняв эти длины равными 1), то направляющий вектор биссектрисы явится геометрической суммой этих направляющих векторов. Уравнение второй биссектрисы получим, заменив один из направляющих векторов вектором, ему противоположным.

52. Доказать, что уравнение биссектрисы угла, образуемого пересекающимися прямыми

$$\frac{x-x_1}{k}=\frac{y-y_1}{l}=\frac{z-z_1}{m},\quad \frac{x-x_1}{k_1}=\frac{y-y_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{m_1},$$

будет следующим:

$$\frac{x-x_1}{\frac{k}{r}\pm\frac{k_1}{r_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{l}{r}\pm\frac{l_1}{r_1}}=\frac{z-z_1}{\frac{m}{r}\pm\frac{m_1}{r_1}},$$

$$r=\sqrt{k^2+l^2+m^2},\quad r_1=\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}.$$

53. Посмотреть, что дает метод упражнений 51 и 52 в применении к плоской геометрии.

54. Найти расстояние от точки (1; 3; 5) до прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}$. *Ответ*: 1.

55. Вычислить объем тетраэдра с вершинами M_1 (0; 0; 0), M_2 (1; 1; 1), M_3 (0; 1; 2), M_4 (2; 0; 1). *Ответ*: 0,5.

56. Доказать, что поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

получается из шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=a,$$

если аппликату z каждой точки последней заменить на z_1, где

$$z_1/z=c/a.$$

57. Доказать, что поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

получается из поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если ординату каждой точки последней заменить на y_1, где

$$y_1/y = b/a.$$

58. Пользуясь доказанным в упражнениях 56 и 57, показать, что объем эллипсоида из упражнения 56 будет $4\pi a^2c/3$, а объем эллипсоида из упражнения 57 будет $4\pi abc/3$.

59. Найти точки пересечения поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,$$

шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=2$$

и плоскости

$$x+y-\frac{1}{\sqrt{2}}z-1=0.$$

Ответ: $\left(-1;\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ и $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\quad -1;\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

60. Найти точки пересечения шаровой поверхности

$$x^2+y^2+z^2=121$$

и прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-4}{2}.$$

Ответ: $M_1(2;\ 9;\ \ 6)$, $M_2\left(-\frac{64}{9};\frac{173}{9};\frac{146}{9}\right)$.

61. На параболоиде $z=x^2+y^2$ отыскать точку, равноудаленную от точки $M\,(6/5;\ 8/5;\ 1)$, от плоскости xOy и от оси Oz. *Ответ:* $(3/5;\ 4/5;\ 1)$.

62. Найти уравнение проекций на плоскости xOy, yOz, zOx линии пересечения шаровой поверхности $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскости $x=y$. *Ответ:* $x=y$, $\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$.

Иван Матвеевич Виноградов

Аналитическая геометрия

Редакторы *В. В. Донченко, Е. В. Шикин*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *О. А. Бутусова, О. М. Березина*

ИБ № 12994

Сдано в набор 18.03.86. Подписано к печати 19.06.86.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 2.
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,45.
Уч-изд. л. 8,32. Тираж 74300 экз.
Заказ № 2384. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической
литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, [redacted] проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии.— 22 л. — (темплан 1987 г., поз. 62)

Излагаются основные сведения о геометрии евклидова образования и теорию кривых и поверхностей, основы тенпространства и пространства Минковского, включая их презорного анализа и римановой геометрии, сведения из вариационного исчисления, пограничные с геометрией, элементы наглядной топологии многообразий. Изложение ведется в свете современных представлений о геометрии реального мира.

Для студентов физико-математических специальностей университетов.

Предварительные заказы на эту книгу принимаются без ограничения всеми магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими физико-математическую литературу

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, [redacted] проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.— 25 л.— (темплан 1987 г., поз. 55)

Задачник соответствует программе по объединенному курсу аналитической геометрии и линейной алгебры для втузов с расширенной программой по математике и для физико-математических, инженерно-физических и инженерно-технических специальностей вузов. Он составлен применительно к учебнику Д. В. Беклемишева «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры» (4-е изд.— 1980 г.). Все разделы сборника содержат краткие теоретические введения и задачи типа вопросов, способствующие закреплению теоретического материала. В задачнике много упражнений различной степени трудности. Все задачи и упражнения снабжены ответами, типовые и более сложные задачи — указаниями и решениями.

Для студентов и преподавателей втузов и вузов.

Предварительные заказы на эту книгу принимаются без ограничения всеми магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими физико-математическую литературу