

**Ф.Б.АБУТАЛИЕВ, Ч.Б.НАРМУРАДОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОБЛЕМЫ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ  
УСТОЙЧИВОСТИ**



**ТАШКЕНТ**

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ  
УЗБЕКИСТАН

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Ф.Б.АБУТАЛИЕВ, Ч.Б.НАРМУРАДОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ  
УСТОЙЧИВОСТИ

TERMIZ MUHANDISLIK-  
TEKNOLOGIYA INSTITUTI  
AXBOROT-RESURS MARKAZI  
INV. № 7766  
• 23 • 08 20 22 yil

ISLOM KARIMOV NOMIDAN TOSHKENT DAVLAT  
TEKNIKA UNIVERSITETI TERMIZ FILIALI  
AXBOROT-RESURS MARKAZI  
INV. № 82956  
• 27 • 09 20 21 yil

ТАШКЕНТ – 2011

УДК: 519.711.3  
ББК 25.253.3

Ф.Б.Абуталиев, Ч.Б.Нармурадов. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. –Т.: «Fan va texnologiya», 2011, 188 стр.

ISBN 978-9943-10-487-7

В монографии изложено математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков. Главное внимание уделяется разработке и обоснованию спектрально-сеточного метода для исследования математических моделей гидродинамических систем. Доказаны теоремы о сходимости метода и даны оценки скорости сходимости. Приведены результаты вычислительного эксперимента иллюстрирующие высокую точность и эффективность метода. Построены кривые и поверхности нейтральной устойчивости при исследовании проблемы гидродинамической устойчивости.

Монография предназначена для исследователей по прикладной математике и для научных работников различных специальностей.

УДК: 519.711.3  
ББК 25.253.3

**Рецензенты:** Р.Садуллаев – д.т.н., профессор, АН РУз  
Институт математики и информационных технологий;  
И.Аллаков – д.ф-м.н., доцент, Термезский  
государственный университет.

ISBN 978-9943-10-487-7

© Изд-во «Fan va texnologiya», 2011.

---

## ВВЕДЕНИЕ

Численные методы все более широко применяются для исследования математических моделей гидродинамических систем. В то же время их применение к решению основных уравнений - уравнений Навье-Стокса - при больших числах Рейнольдса наталкивается на серьезные трудности. Они связаны, главным образом, с наличием малого параметра при старшей производной и, как следствие, появлением в решении областей сильной пространственной неоднородности. Поэтому требования, предъявляемые к аппроксимационным свойствам численных методов, резко возрастают. Проблема устойчивости однофазных гидродинамических систем сводится к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при старшей производной. Математическому моделированию и построению численных методов решения указанного класса уравнений посвящены работы М.А.Лаврентьева, Б.В.Шабата, Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшица, А.Н.Тихонова, Н.Н.Яненко, Н.С.Бахвалова, С.К.Годунова, О.А.Ладыженской, Н.А.Желтухина, А.Л.Крылова, Б.Л.Рождественского, В.Я.Левченко, А.С.Соловьева, М.А.Гольдштика, В.А.Сапожникова, Б.П.Колобова, А.Г.Слепцова, S.A.Orszag, H.Salwen, C.E.Grosch, D.Gottlieb, E.Turkel, A.T.Patera, T.J.Bridjes, H.G.Ku, A.Zebib и др.

Исследование динамики гетерогенных (многофазных) смесей или, в частности, газозвесей (смесей газов с твердыми частицами) - одно из важных направлений при математическом моделировании сложных гидродинамических систем. Частицы в этом случае называют дисперсными частицами или дисперсной фазой, а

окружающую несущую фазу (газ) - дисперсионной. К настоящему времени имеется значительное число работ, посвященных проблемам построения математических моделей гидромеханики многофазных сред. Это работы Х.А. Рахматуллина, Р.И. Нигматуллина, Н.Н. Яненко, А.Н. Коновалова, В.М. Фомина, Р. Бусройд, С. Соу, Б.П. Стулова, А.Н. Крайко, А.С. Соловьева, А.Н. Осипцова, Д.Ф.Файзуллаева, Ф.Б.Абуталиева, А.И.Умарова, Б.Х.Хужаярова, Р.Садуллаева, P.G. Saffman, D.A. Drew, S.I. Pai, H.V. Stewart, V.H. Rapsom и др.

Изучение математических моделей гетерогенных систем актуально, прежде всего, с точки зрения приложений. Исследование влияния взвешенных частиц на гидродинамическую устойчивость потоков требует, во-первых, тщательного анализа самих математических моделей многофазных систем и, во-вторых, разработки эффективного, надежного математического аппарата для моделирования гидродинамических уравнений устойчивости.

Поэтому разработка и исследование численного метода, который при заданной точности обеспечивал бы высокую эффективность расчёта большого числа собственных значений проблемы устойчивости в широком диапазоне изменения характерных параметров, является актуальным направлением в области математического моделирования. Спектрально – сеточный метод - один из методов, удовлетворяющих указанным требованиям.

При теоретическом обосновании спектрально-сеточного метода используются теоремы о сходимости проекционных и проекционно-сеточных методов. Общая и спектральная теория для операторных уравнений изложены в работах Г.И.Марчука, А.А.Самарского, М.А.Красносельского, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутецкого, В.Я.Стеценко, Т.Д.Джураева, Ш.А.Алимова, А.Г.Слепцова, В.И.Крылова, С.Пашковского и др.

Существующие методы для моделирования проблемы устойчивости гидродинамических систем позволяют с хорошей точностью рассчитывать отдельные собственные значения проблемы устойчивости и получить решение в областях неоднородности. Однако при моделировании спектра собственных значений их эффективность оказывается недостаточной. В более сложных многопараметрических проблемах гидродинамической устойчивости (например, при математическом моделировании устойчивости двухфазных потоков) положение усугубляется — снижение эффективности становится практически неприемлемым.

Гидродинамическая устойчивость двухфазных потоков сводится к проблеме собственных значений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

Математическое моделирование проблемы устойчивости для двухфазных потоков наталкивается, однако, на определенные трудности. Во-первых, уравнения устойчивости содержат малый параметр при старшей производной, поэтому возникают значительные трудности для получения решений с заданной степенью точности. Во-вторых, задача становится многопараметрической и построение параметрических зависимостей приводит к резкому увеличению объема вычислений. В-третьих, с ростом числа уравнений (каждая фаза имеет уравнения движения) порядок алгебраической системы квадратично возрастает, что при численном нахождении собственных значений сильно уменьшает эффективность расчетов.

Одной из важных проблем при математическом моделировании гидродинамических систем является проблема гидродинамической устойчивости. В линейной постановке для плоскопараллельных течений однофазного потока эта задача сводится к проблеме собственных значений для уравнения Орра-Зоммерфельда [1-5]:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left[ (U(y) - \lambda) D - \frac{d^2 U}{dy^2} \right] \psi = 0 \quad (0.1)$$

с однородными краевыми условиями, которые зависят от типа исследуемых течений. В уравнении (0.1)  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  - собственные значения,  $\lambda_r$  - фазовая скорость,  $\lambda_i$  - коэффициент нарастания,  $D = d/dy^2 - k^2$ ,  $y$  - координата направления поперек основного течения,  $k$  - волновое число,  $Re$  - число Рейнольдса,  $U(y)$  - профиль скорости основного течения,  $\psi(y)$  - амплитуда функции тока для возмущений.

Уравнение (0.1) содержит малый параметр  $(kRe)^{-1}$  при старшей производной, поэтому возникают значительные трудности получения приближенных решений, близких к точным. Существующие численные методы [2,4] численного моделирования проблемы (0.1) можно разделить на несколько групп: 1) конечно-разностные методы; 2) методы пошагового интегрирования; 3) метод исключения и дифференциальной прогонки; 4) спектральные методы.

Кратко опишем сравнительные достоинства и недостатки этих методов, уделяя основное внимание исследованиям последних лет.

1. Применение конечно-разностных методов для решения уравнения (0.1) предложено в работе [6]. Суть этих методов заключается в аппроксимации производных, входящих в (0.1) конечными разностями, и решении полученной системы методами линейной алгебры. Такая схема, однако, требует достаточно мелкого шага. При  $kRe \sim 10^4$ , например, для получения достаточно точных (три знака) результатов использована равномерная разностная сетка, содержащая 100 узлов. Другим недостатком этого метода является то, что с его помощью находится только одно собственное значение.

С целью уменьшения числа расчетных узлов в работе [7] для решения уравнения (0.1) предлагается использовать разностную сетку с переменным шагом. Построение такой

сетки зависит от нескольких параметров, выбор которых связан с определенными трудностями. Данные, приведенные в этой работе, показывают, что число узлов растет с ростом параметра  $kRe$ . Метод определяет одно собственное значение.

Методика построения неравномерной сетки для численного решения уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной предложена в [8, 9]. По этой методике в работах [10, 11] для нахождения собственных значений для уравнения (0.1) строится неравномерная сетка с помощью специального отображения. Отображение задается таким образом, чтобы модуль градиента искомой функции оценивался величиной, не зависящей от  $kRe$ . Выбор параметров этого отображения позволяет регулировать расстояние между узлами сетки в соответствии с размером переходной зоны пограничного слоя и критической точки. Применение неравномерной сетки дает возможность вычислить одно собственное значение с высокой точностью при малом числе узлов сетки.

Разностный расчет проблем гидродинамической устойчивости с использованием двумерных сеток изложен в [12]. Анализ необходимых условий, налагаемых на параметры сетки для корректного описания гидродинамических свойств, изложен в [13,14]. Исследования показали, что с ростом параметра  $kRe$  требуется более мелкий шаг.

В работах [15-18] предлагается более эффективный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений – метод локальной коллокации. Его суть в том, что область интегрирования разбивается на части, в каждой из которых с помощью метода коллокации вычисляется приближенное локальное решение. В результате решение во всей области получается с помощью системы линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей. Доказана

сходимость метода и получены оценки скорости сходимости приближенного решения к точному. Показано, что метод локальной коллокации эквивалентен конечно-разностному методу высокого порядка точности. Данный метод позволяет локализовать и определить наиболее опасные собственные значения, он также эффективен для определения одного собственного значения.

2. Наряду с описанными выше методами в проблемах гидродинамической устойчивости применяется метод пошагового интегрирования. Суть этого метода заключается в сведении краевых задач к задачам Коши и интегрировании последних с произвольным переменным шагом. Среди них первым для задач гидродинамической устойчивости был использован метод стрельбы [19]. Проведенные расчеты показали, что если собственные значения матрицы сильно различаются по величине вещественной части, а это характерно для уравнения (0.1), то в процессе интегрирования из-за численных погрешностей в собственных значениях почти не остается ни одного верного знака.

Для преодоления этой трудности в работе [20] предложен метод ортогонализации. Он заключается в разбиении интервала интегрирования на достаточно короткие участки, длина которых должна быть тем меньше, чем больше разница между величинами различных собственных значений. Затем на каждом участке два решения ортогонализуются и нормируются. Неудобством метода является то, что требуется большой объем вычислений для определения одного собственного значения. Метод применялся в работах [21, 22].

3. В работах [23, 24] излагается способ построения базисных решений с помощью метода исключения, который принципиально мало отличается от метода ортогонализации, но в методе исключения процедуры интегрирования и ортогонализации совмещены, что приводит к

экономии арифметических вычислений. В некоторых случаях более удобным является метод дифференциальной прогонки [25, 26]. Его применение для решения проблемы гидродинамической устойчивости изложено в [27]. Суть метода состоит в том, что в процессе прямой прогонки находятся решения, удовлетворяющие граничным условиям на одном из концов интервала. После решения задачи на собственные значения собственная функция находится обратной прогонкой. Близким к методу дифференциальной прогонки является детерминантный метод [28]. В работе [29] этот метод применен для локализации собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя. В этих методах также предусмотрено определение одного собственного значения.

4. Применение спектральных (галеркинских) [30, 31] методов для численного моделирования проблемы (0.1) изложено в работе [32], где в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева первого рода. Показано, что в этом случае сходимость по числу базисных функций экспоненциальная. Основным достоинством этих методов является то, что сразу можно найти все спектральные значения и среди них выбрать наиболее неустойчивое. Однако отыскание всех собственных значений заполненной матрицы высокого порядка очень трудоёмкий процесс, связанный с большими затратами машинного времени. Кроме того, с ростом параметра  $kRe$  размер матриц, необходимый для достаточно точного определения собственных значений, увеличивается, а это налагает дополнительное требование к памяти ЭВМ.

Из приведенного обзора следует, что почти все перечисленные методы, кроме спектрального метода по полиномам Чебышева, предназначены для нахождения одного собственного значения. Среди этих методов эффективными являются методы неравномерных сеток [10-11] и локальной коллокации [15-18]. Они не требуют

больших затрат машинного времени при решении проблемы (0.1). Однако эффективных методов для определения сразу всех собственных значений пока не имеется.

Необходимость в создании таких методов особенно выявляется при математическом моделировании более сложных проблем, в частности проблемы устойчивости двухфазных потоков. Как будет показано в гл. III, уравнения устойчивости двухфазных потоков в линейной постановке с учетом силы Стокса сводятся к проблеме собственных значений следующей системы:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left( U - \lambda + \frac{f}{ik\tau} \right) D\psi + \frac{d^2 U}{dy^2} \psi + \frac{f}{ik\tau} D\varphi = 0, \quad (0.2)$$

$$\frac{1}{ik\tau} D\psi - \left( U - \lambda + \frac{1}{ik\tau} \right) D\varphi + \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi = 0 \quad (0.3)$$

с однородными краевыми условиями.

При достаточно больших значениях параметра  $\tau$ , т.е. при  $\tau \gg 1$ , систему уравнений (0.2) и (0.3) можно свести к одному уравнению вида

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left[ U - \lambda - \frac{if}{k\tau} \left( 1 - \frac{1}{S_1} \right) \right] D\psi + U' \psi = 0. \quad (0.4)$$

С учетом сил Стокса и Архимеда математические модели для двухфазных потоков принимают вид

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left( U - \lambda + \frac{f}{ik\tau} \right) D\psi + \frac{d^2 U}{dy^2} \psi + \frac{f}{ik\tau} D\varphi + \frac{f}{S_1} \lambda D\psi = 0, \quad (0.5)$$

$$\frac{1}{ik\tau} D\psi - \left( U - \lambda + \frac{1}{ik\tau} \right) D\varphi + \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi - \frac{1}{S_1} \lambda D\psi = 0. \quad (0.6)$$

В уравнениях (0.2) - (0.6), в отличие от (0.1),  $f$  - массовая концентрация частиц,  $\tau$  - время релаксации частиц,  $\psi, \varphi$  - амплитуды функции тока для возмущений чистого газа и частиц соответственно,  $U(y)$  - профиль скорости основного потока,  $S_1 = \rho_2 / \rho_1$  - отношение плотностей, где  $\rho_2$  - плотность материала частиц,  $\rho_1$  - плотность газа,  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  - неизвестная постоянная, подлежащая определению,  $\lambda_r$  - фазовая скорость,  $\lambda_i$  - коэффициент нарастания. Если  $\lambda_i > 0$ ,

то течение неустойчиво, если  $\lambda_i < 0$  - устойчиво. Если же  $\lambda_i = 0$ , то колебания нейтрально устойчивы, кривая или поверхность в которой  $\lambda_i = 0$  называется кривой или поверхностью нейтральной устойчивости.

В двухфазных потоках кроме сил Стокса и Архимеда имеются еще сила Бассэ-Буссинеска и сила присоединенных масс. Учет последних двух сил в математических моделях для двухфазных потоков сильно усложняет постановку проблемы гидродинамической устойчивости. В этом случае получается нелинейная проблема на собственные значения.

Численное моделирование проблемы устойчивости (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6) наталкивается, однако, на определенные трудности. Во-первых, в отличие от проблемы устойчивости однофазных течений (0.1), проблема устойчивости математических моделей двухфазных потоков (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6) становится многопараметрической. Она характеризуется не только волновым числом и числом Рейнольдса, но также параметрами массовой концентрации и временем релаксации частиц. В этом случае построение параметрических зависимостей приводит к резкому возрастанию объема вычислений. Во-вторых, система дифференциальных уравнений (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6) по-прежнему, как и (0.1), является системой с малым параметром  $(kRe)^{-1}$  при старшей производной. Поэтому в областях быстрого изменения решения возникает необходимость увеличения числа расчетных узлов. В-третьих, с ростом числа уравнений (каждая фаза имеет свое уравнение движения) порядок алгебраической системы уравнений удваивается. Рост порядка ведет к квадратичному возрастанию размерности системы (матриц коэффициентов), что при численном нахождении собственных значений сильно уменьшает эффективность расчетов. В связи с этим необходимо иметь такой алгоритм численного решения, который обеспечивал бы высокую точность расчетов при небольшом объеме памяти. Кроме

того, желательно, чтобы алгоритм позволял одновременно вычислять все собственные значения задачи. Оказывается, такой алгоритм, отвечающий всем этим требованиям, можно построить, если использовать спектральный метод в «спектрально-элементном» представлении (спектрально-сеточный метод). Он объединяет высокую точность спектральных методов [32] с экономичностью метода неравномерных сеток [8-10,33,34] или метода локальной коллокации [16-19] и одновременно определяет все собственные значения проблемы гидродинамической устойчивости.

В первой главе проведены исследования и разработка спектрально-сеточного метода для анализа устойчивости математических моделей гидродинамических систем общего вида. Спектрально-сеточный метод (ССМ) применен для моделирования обыкновенного дифференциального уравнения  $m$ -го порядка при линейных однородных краевых условиях и проблемы на собственные значения для гидродинамических моделей, так как математические модели многих гидродинамических проблем устойчивости подпадают под этот класс уравнений. ССМ заключается в том, что область интегрирования разбивается на сетку, в каждом из элементов которой приближенное решение ищется в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода. Во внутренних узлах сетки требуется непрерывность решения уравнений устойчивости и их производных до  $(m-1)$ -го порядка. На границе интервала интегрирования требуется удовлетворить соответствующие краевые условия для математических моделей проблемы устойчивости. Приближенное решение проблемы во всей сеточной области определяется путем решения системы линейных алгебраических уравнений со специальной блочно-диагональной матрицей. Построение спектрально-сеточного метода и его обоснование приведены в первом параграфе. Во втором параграфе исследована сходимость ССМ и

получена оценка скорости сходимости. Проблема собственных значений при спектрально-сеточной аппроксимации изложена в третьем параграфе. В этом случае доказана сходимость приближенных собственных значений к точным, получены оценки скорости сходимости.

Для доказательства сходимости ССМ потребуется несколько теорем, которые изложены в монографии [35].

Исследование проекционных методов приближенного решения линейного дифференциального уравнения удаётся, как правило, свести к изучению некоторого другого проекционного метода приближенного решения уравнения второго рода

$$x = Tx + f, \quad (0.7)$$

где  $T$  — линейный непрерывный оператор в некотором банаховом пространстве  $E$ .

Пусть  $\{E_n\}$  — последовательность замкнутых подпространств пространства  $E$ , и пусть при каждом  $n$  задан линейный (вообще говоря, неограниченный) проектор  $P_n$ , проектирующий свою область определения  $D(P_n) \subset E$  на  $E_n$  ( $E_n \subset D(P_n)$ ). Всюду в дальнейшем будем считать, что  $f \in D(P_n)$  и  $TE \subset D(P_n)$ ; тогда решения уравнения (0.7), если они существуют, также принадлежат  $D(P_n)$ . Предполагается, что оператор  $P_n T$  ограничен в  $E$ .

Так как  $P_n x_n = x_n$  для  $x_n \in E_n$ , то проекционный метод Галеркина

$$P_n(x_n - Tx_n - f) = 0 \quad (x_n \in E_n)$$

приводит к следующему уравнению в  $E$ :

$$x_n = P_n T x_n + P_n f; \quad (0.8)$$

условие  $x_n \in E_n$  в (0.8) становится лишним, ибо решения уравнения (0.8), если они существуют, непременно принадлежат  $E_n$ .

Ниже используется, как обычно, обозначение  $P^{(n)} = I - P_n$ , где  $I$  — единичный оператор.

**ТЕОРЕМА А.** Пусть оператор  $I - T$  непрерывно обратим и пусть

$$\|P^{(n)}T\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда при достаточно больших  $n$  уравнение (0.8) имеет единственное решение  $x_n$ . Последовательность  $x_n$ , тогда и только тогда стремится к решению  $x_0$  уравнения (0.7), когда  $P^{(n)}f \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Справедлива оценка

$$c_1 \|P^{(n)}x_0\| \leq \|x_n - x_0\| \leq c_2 \|P^{(n)}x_0\|$$

( $c_1, c_2 = \text{const} > 0$ ), а при условии ограниченности проекторов  $P_n$  — оценка

$$\|x_n - x_0\| \leq c \|P^{(n)}\| \rho(x_0, E_n), \quad (c = \text{const}),$$

где  $\rho(z, E_n) = \inf_{z_n \in E_n} \|z - z_n\|$ .

**ТЕОРЕМА Б.** Пусть для любого  $x \in E$  выполняются неравенства

$$\rho(Tx, E_n) \leq \eta_n \|x\|, \quad (n=1,2,\dots)$$

( $\eta_n$  — постоянная, зависящая от  $n$ ).

Тогда, если операторы  $P_n$  ограничены в  $E$  и  $\|P_n\| \eta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\|P^{(n)}T\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**ТЕОРЕМА В.** Пусть оператор  $T$  вполне непрерывен (компактен) в  $E$ , а проекторы  $P_n$  ограничены в  $E$  и  $P_n \rightarrow I$  сильно при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. для любого  $x \in E$   $\|P_n x - x\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\|P^{(n)}T\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Дальше теоремы будут сформулированы для проблемы на собственные значения.

Рассмотрим в комплексном банаховом пространстве  $E$  уравнение

$$x = \lambda Tx, \tag{0.9}$$

где  $T$  — линейный компактный оператор в банаховом пространстве  $E$ .

Пусть  $\{E_n\}$  - последовательность замкнутых подпространств в  $E$ . Заменяем уравнение (0.9) последовательностью "приближенных" уравнений

$$x_n = \lambda_n T_n x_n \quad (0.10)$$

где  $T_n$  - линейные компактные операторы в  $E_n$  ( $n=1,2,\dots$ ). Чтобы охарактеризовать близость уравнений (0.9) и (0.10), введем проекторы  $P_n$  (возможно, неограниченные), проектирующие на соответствующие подпространства  $E_n$ :

$$P_n z \in E_n \quad (z \in D(P_n)), \quad P_n z_n = z_n \quad (z \in E_n \subset D(P_n)).$$

Предполагается, что  $TE \subset D(P_n)$  ( $n=1,2,\dots$ ) и что  $P_n T$  - ограниченный в  $E$  (а значит, и в  $E_n$ ) оператор. Все основные факты будут доказаны в предположении, что

$$\|S_n\| \rightarrow 0, \|U_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (0.11)$$

$$(S_n = T_n - P_n T, \quad U_n = T - P_n T).$$

Подчеркнем, что операторы  $S_n$  действуют в  $E_n$ , а  $U_n$  - в  $E$ .

Напомним, что в случае ограниченных проекторов  $P_n$  для соблюдения соотношений (0.11) достаточно, чтобы  $\|P_n\|_{\eta_n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\eta_n$  - постоянная, зависящая от  $n$ .

**ТЕОРЕМА Г.** Пусть выполнены условия (0.11). Тогда для каждого собственного значения  $\lambda_0$  уравнения (0.9) найдется последовательность  $\lambda_n$  собственных значений уравнения (0.10) такая, что  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Наоборот, каждая предельная точка любой последовательности  $\lambda_n$  собственных значений уравнений (0.10) является собственным значением уравнения (0.9).

**ТЕОРЕМА Д.** Пусть выполнены условия (0.11). Тогда из всякой последовательности  $x_n$  нормированных собственных элементов уравнений (0.10), соответствующих собственным значениям  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, и каждая сходящаяся подпоследовательность  $x_{n_k}$  имеет своим пределом

собственный элемент уравнения (0.9), соответствующий собственному значению  $\lambda_0$ .

Далее доказывается теорема о быстроте сходимости. Пусть  $\lambda_0$  и  $\lambda_n$  - собственные значения уравнений (0.9) и (0.10) соответственно. В теореме Е введем следующие обозначения:

$$P^{(n)} = I - P_n, \quad X_0^{(n)} = \{x_0 \in E : (I - \lambda_0 T)^r x_0 = 0\},$$

$$F_0^{(n)} = \{f_0 \in E^* : [(I - \lambda_0 T)^r]^* f_0 = 0\}, \quad X_n^{(n)} = \{x_n \in E_n : (I - \lambda_n T_n)^r x_n = 0\},$$

$$\rho(x, X_0^{(n)}) = \inf_{x_0 \in X_0^{(n)}} \|x - x_0\|.$$

Отметим, что если  $X_0^{(n)}$  - корневое подпространство уравнения (0.9), то  $F_0^{(n)}$  - корневое подпространство сопряженного к (0.9) уравнению  $f = \lambda_0 T^* f$  и при этом  $\dim X_0^{(n)} = \dim F_0^{(n)}$ . Оператор  $T^*$  действует и вполне непрерывен в сопряженном к  $E$  пространстве  $E^*$ .

**ТЕОРЕМА Е.** Пусть выполнены условия (0.11). Пусть  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\lambda_0$  и  $\lambda_n$  - собственные значения уравнений (0.9) и (0.10) соответственно, причем  $\lambda_0$  имеет ранг  $r$ . Тогда справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c(\|S_n\| + \varepsilon_n)^{1/r}$$

и, в случае ограниченных проекторов  $P_n$ ,

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c(\|S_n\| + \varepsilon_n \varepsilon_n^*)^{1/r},$$

где  $\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0^{(n)}, \|x_0\|=1} \|P^{(n)} x_0\|$ ,  $\varepsilon_n^* = \sup_{f_0 \in F_0^{(n)}, \|f_0\|=1} \|(P^{(n)})^* f_0\|$ .

Далее, для любого  $x_n^{(k)} \in X_n^{(k)} (\|x_n^{(k)}\| = 1, k \geq 1)$  справедливы оценки

$$\rho(x_n^{(k)}, X_0^{(r)}) \leq c(\|S_n\| + \varepsilon_n)$$

и, при  $k \leq i \leq r$ ,

$$\rho(x_n^{(k)}, X_0^{(r)}) \leq c(|\lambda_n - \lambda_0|^{i-k+1} + \|S_n\| + \varepsilon_n).$$

Доказательства теорем А-Е приводятся в монографии [35]. Эти теоремы нужны при доказательстве сходимости спектрально-сеточного метода для произвольного неоднородного линейного обыкновенного дифференциального

TERMIZ MUHANDISLIK-  
TEKHNOLGIYA INSTITUTI  
RESURS MARKAZI  
INV. № 766  
2018

уравнения (0.1) однородными линейными краевыми усло-  
виями. Сходимость для сходимости приближенных собственных  
значений, полученных с помощью этого метода, к  
собственным значениям произвольного однородного  
линейного обыкновенного дифференциального уравнения с  
однородными линейными краевыми условиями.

В общем случае доказанные теоремы сходимости справедливы для уравнения (0.1). Хотя относительно уравнений (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6) подобные теоремы доказать трудно, но для случая (0.4) они верны. Численные результаты показывают, что теоремы сходимости будут, по-видимому, справедливы и для (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6), которые проверены многочисленным вычислительным экспериментом. Порядок точности метода зависит от общего количества полиномов  $\bar{m}$ , используемых для аппроксимации решения на всем интервале интегрирования. Кроме параметра  $\bar{m}$ , в метод входит другой параметр  $N$  — количество точек, которые разбивают основной отрезок интегрирования (узлы сетки). Изменяя эти параметры, можно ССМ сделать экономичным при моделировании краевой задачи для уравнения устойчивости однофазных потоков (0.1) или для уравнений устойчивости двухфазных потоков (0.2)-(0.3) и (0.5)-(0.6) с различными профилями скорости основного потока  $U(y)$  и различными краевыми условиями.

Во второй главе монографии ССМ применен для исследования математических моделей однофазных гидродинамических систем вида (0.1). Показаны эффективность и высокая точность метода. ССМ применен для исследования математических моделей конкретных проблем устойчивости с симметричным (течение Пуазейля) и несимметричным (пограничный слой) профилем скорости основного стационарного потока  $U(y)$ . Обсуждается выбор оптимальных  $\bar{m}$  и  $N$  (общее число полиномов

13.011.148  
INV. № 12956  
27.04.2018

и количество точек сетки) при вычислении собственных значений гидродинамических систем.

Сущность проблемы гидродинамической устойчивости излагается в первом параграфе. Математические модели однофазных гидродинамических систем исследуются во втором параграфе. В третьем параграфе ССМ применяется для математического моделирования уравнений устойчивости однофазных гидродинамических систем. В четвертом параграфе изложено построение алгебраического преобразования для матричных уравнений устойчивости. В пятом параграфе обосновывается эффективность ССМ, а также проведены анализ и интерпретация результатов вычислительных экспериментов по моделированию устойчивости однофазных потоков Пуазейля и пограничного слоя.

В третьей главе ССМ обобщен для исследования и анализа математических моделей сложных гидродинамических систем, т.е. проблем гидродинамической устойчивости двухфазных потоков Пуазейля и пограничного слоя. Выведены уравнения устойчивости двухфазных потоков (0.2), (0.3) и (0.5), (0.6). Разработан алгоритм решения, построено алгебраическое преобразование, существенно сокращающее размерность решаемой задачи. ССМ применен к решению проблемы гидродинамической устойчивости плоского течения Пуазейля и пограничного слоя.

В первом параграфе на основе закона подобия Рейнольдса математические модели для двухфазных потоков приводятся к безразмерному виду. Исследование и анализ адекватности математических моделей для многофазных потоков приведены во втором параграфе. В третьем параграфе выводится система уравнений устойчивости для двухфазных нестационарных потоков. Алгоритм ССМ для моделирования двухфазных потоков и его обоснование изложены в четвертом параграфе. В пятом

параграфе построены алгебраические преобразования матричных уравнений устойчивости для двухфазных потоков. Анализ и интерпретация численных расчётов по математическому моделированию двухфазных гидродинамических систем Пуазейля и пограничного слоя приведены в шестом параграфе.

В четвертой главе проведено комплексное исследование математических моделей устойчивости гидродинамических систем на основе вычислительного эксперимента. Гидродинамическая устойчивость двухфазного течения Пуазейля изложена в первом параграфе. Во втором параграфе исследована гидродинамическая устойчивость двухфазного пограничного слоя. Математическое моделирование уравнений устойчивости двухфазных гидродинамических систем с учётом сил Стокса и Архимеда приведено в третьем параграфе. В четвертом параграфе приведены результаты вычислительного эксперимента для исследования пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля. Результаты исследований пространственной зависимости характерных параметров для двухфазного пограничного слоя изложены в пятом параграфе. В шестом параграфе приведена структура комплекса программ вычислительного эксперимента для исследования математических моделей устойчивости гидродинамических систем.

Изучено поведение кривых нейтральной устойчивости в широком диапазоне изменения параметра массовой концентрации частиц  $0 \leq f \leq 0,1$  и времени релаксации частиц  $0 \leq \tau \leq 100$  как с учетом силы Стокса, так и с учетом сил Стокса и Архимеда. Приводятся результаты расчетов нейтральных кривых. Показано, что частицы в широком диапазоне изменений параметра  $\tau$  увеличивают устойчивость течения. ССМ применен для математического моделирования и исследования пространственной зависимости характерных гидродинамических параметров

$k$ ,  $\tau$ ,  $Re$  при различных значениях массовой концентрации частиц  $f$ .

Численные результаты расчётов для кривых и поверхностей нейтральной устойчивости даны в приложении.

---

## ГЛАВА I. РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНО - СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

Результаты данной главы изложены в работах [156,164,165,182].

В этой главе излагается ССМ для исследования математических моделей гидродинамических систем общего вида, описываемых краевой задачей и задачей на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения при однородных краевых условиях, так как исследования устойчивости математических моделей многих гидродинамических потоков подпадают под этот класс уравнений.

В параграфе 1.1. изложены построение спектрально – сеточного метода и его обоснование. Сходимость ССМ и оценка скорости сходимости приведены в параграфе 1.2. Проблема собственных значений при спектрально–сеточной аппроксимации гидродинамических систем изложена в параграфе 1.3. Доказана сходимость приближенных собственных значений к точным, дана оценка скорости сходимости.

### 1.1. Построение спектрально – сеточного метода и его обоснование

В этом параграфе дадим конструктивное построение ССМ для решения обыкновенного дифференциального уравнения  $m$ -го порядка с линейными однородными краевыми условиями.

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_0 u = \frac{d^m u}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-1} q_i(x) \frac{d^i u}{dx^i} = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1.1)$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left( \alpha_{ik} \frac{d^k u(-1)}{dx^k} + \beta_{ik} \frac{d^k u(+1)}{dx^k} \right) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (1.2)$$

Предположим, что задача (1.1) – (1.2) при  $f(x)=0$  имеет только тривиальное решение. Это обеспечивает существование функции Грина для рассматриваемой задачи.

В ССМ рассматриваемый интервал интегрирования  $[-1, 1]$  разбивается на сетки:  $-1 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = 1$ , где  $N$  – заданное целое число. Сетка может быть как равномерной, так и неравномерной.

Приближенное решение задачи (1.1) – (1.2) на каждом из элементов сетки  $[y_{j-1}, y_j]$ ,  $j=1, 2, \dots, N$  будем искать в виде линейной комбинации различного числа полиномов Чебышева первого рода  $T_n$ :

$$u_j^{(p)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} \alpha_n^{(p_j)} T_n(\tilde{y}), \quad y \in [y_{j-1}, y_j], \quad y = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} \tilde{y}, \quad (1.3)$$

где  $m_j = y_j + y_{j-1}$ ,  $l_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $-1 \leq \tilde{y} \leq 1$ , причем  $l_j$  – длина  $j$ -го элемента сетки. Вообще говоря,  $\tilde{y}$  зависит от  $j$ , однако здесь и в дальнейшем индекс  $j$  для простоты изложения опускается. Через  $p_j$  обозначено количество полиномов Чебышева, используемых для аппроксимации решения дифференциальной задачи (1.1) – (1.2) на  $j$ -м интервале сетки  $[y_{j-1}, y_j]$ , где  $p_j \rightarrow \infty$  для каждого фиксированного  $j$ . Отметим, что  $p_j$  не должно быть меньше, чем порядок старшей производной дифференциального уравнения  $m$ , т.е.  $p_j \geq m$ . Через  $h = \max_{j=1, \dots, N} l_j = \max_{j=1, \dots, N} (y_j - y_{j-1})$  обозначим максимальный шаг сетки.

Минимальное количество полиномов Чебышева,

аппроксимирующих решение на интервалах сетки, обозначим через  $p_- = \min_{1 \leq j \leq N} p_j$ .

Таким образом, общее количество полиномов Чебышева, требуемых для аппроксимации решения дифференциальной задачи (1.1) – (1.2) во всех интервалах сетки, определяется по формуле

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1).$$

В ССМ во внутренних узлах сетки  $y_j$  ( $j=1, 2, \dots, N-1$ ) налагается требование непрерывности приближенного решения (1.3) и его производных до  $(m-1)$ -го порядка, а в граничных узлах сетки  $y_0 = -1$ ,  $y_N = 1$  - удовлетворение краевых условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^s u_j^{(p_j)}(y_j)}{dy^s} = \frac{d^s u_{j-1}^{(p_{j-1})}(y_j)}{dy^s}, \quad \begin{array}{l} s = 0, 1, \dots, m-1, \\ j = 1, 2, \dots, N-1, \end{array} \\ \sum_{k=0}^{m-1} \left[ \alpha_{ik} \frac{d^k u_1^{(p_1)}(-1)}{dy^k} + \beta_{ik} \frac{d^k u_N^{(p_N)}(+1)}{dy^k} \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Пусть  $U^{(\bar{p})}(y) = (u_1^{(p_1)}(y), \dots, u_N^{(p_N)}(y))$ ,  $(\bar{p}) = (p_1, \dots, p_N)$  - вектор приближенного решения, где его каждая компонента определена на своем интервале. Через  $E^{(p)}$  обозначим пространство всех таких векторов  $U^{(\bar{p})}(y)$ , компоненты которых удовлетворяют соотношениям (1.4).

Коэффициенты приближенного решения  $a_n^{(p_j)}$  определим с помощью требования ортогональности невязки  $(L_0 u_j^{(p_j)} - f_j)$  к полиномам Чебышева до номера  $p_j - m$  с весом  $\rho(\tilde{y})$  на интервале  $[y_{j-1}, y_j]$ , т.е.

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} (L_0 u_j^{(p_j)}(y) - f_j(y)) T_k(\tilde{y}) \rho(\tilde{y}) dy = 0, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, N, \\ k = 0, 1, \dots, p_j - m, \end{array} \quad (1.5)$$

где

$$\rho(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{y}^2}}, \quad f_j(y) = f(y)|_{y \in [y_{j-1}, y_j]}.$$

Видно, что число условий (1.4), (1.5) совпадает с числом неизвестных коэффициентов  $a_n^{(p_j)}$  в (1.3) и равно  $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ .

Покажем, что приближенное решение задачи (1.5) при  $p_j \rightarrow \infty$  сходится к решению исходной дифференциальной задачи (1.1) – (1.2).

ССМ основан на принципиально новой идее. Эта идея заключается в предварительной “аппроксимации” дифференциального уравнения и последующем точном решении “аппроксимирующего” уравнения. Аппроксимирующее уравнение, как правило, конструируется так, что его решение сводится к рассмотрению конечной системы линейных алгебраических уравнений.

## 1.2. Сходимость спектрально – сеточного метода и оценка скорости сходимости

При доказательстве сходимости покажем, что ССМ, примененный к задаче (1.1) – (1.2), эквивалентен операторному уравнению второго рода:

$$X + TX = \bar{F}$$

с компактным оператором  $T$  в банаховом пространстве  $E$ , которое будет определено ниже. К этому уравнению можно применить общие сходимости проекционных методов [35-45].

Обозначим

$$x_j^{(p_j)}(y) = \frac{d^m}{dy^m} u_j^{(p_j)}(y), \quad y \in [y_{j-1}, y_j]. \quad (1.6)$$

Тогда

$$x_j^{(p_j)}(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(p_j)} \left( \frac{2}{l_j} \right)^m T_n^{(m)}(\bar{y}). \quad (1.7)$$

Из (1.4) следует, что  $x_j^{(p_j)}$  в концах интервала  $(y_{j-1}, y_j)$  имеет конечный предел слева и справа. По вектору  $U^{(p)}$  в силу (1.4) можно построить функцию  $u^{(p)}(y)$ , определенную на  $[-1, 1]$  и принадлежащую пространству  $C^{m-1}[-1, 1]$ , причем в

точках разбиения  $y_{j,m}$  -я производная имеет левый и правый предел.

Известна функция Грина оператора  $d^m / dy^m$  для задачи (1.1) [38]. Обозначим ее через  $G(y, \xi)$ . Построим также функцию  $x^{(p)}(y)$ , определенную на всем интервале интегрирования (т.е.  $y \in [-1, 1]$ ) и удовлетворяющую условию

$$x^{(p)}(y) = x_j^{(p)}(y), \quad y \in [y_{j-1}, y_j]. \quad (1.8)$$

Очевидно, что  $x^{(p)}$  может иметь конечные разрывы только во внутренних точках  $y_j$  и, кроме того,

$$x^{(p)} = \frac{d^m u^{(p)}}{dy^m}, \quad (1.9)$$

где в качестве производной  $d^m / dy^m$ , в силу вышеприведенных рассуждений, можно понимать обобщенную производную по определению С.Л.Соболева. Поскольку  $u^{(p)}(y)$  удовлетворяет краевым условиям из (1.4), то  $u^{(p)}(y)$  представляется в виде

$$u^{(p)}(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) x^{(p)}(\xi) d\xi. \quad (1.10)$$

Аналогично можно ввести функцию

$$x(y) = \frac{d^m u(y)}{dy^m}, \quad (1.11)$$

где  $u(y)$  - решение задачи (1.1)-(1.2).

Тогда

$$u(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) x(\xi) d\xi. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.1), и имея ввиду (1.11), получаем

$$x(y) + \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y) G^{(i)}(y, \xi) \right) x(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 G(y, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Введя обозначение

$$T(y, \xi) = \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y) G^{(i)}(y, \xi),$$

последнее уравнение запишем в виде

$$x(y) + \int_{-1}^1 T(y, \xi) x(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 G(y, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (1.13)$$

Из свойств функции Грина следует, что  $T(y, \xi)$  — непрерывная на  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  функция, кроме “диагонали”  $y = \xi$ , на которой имеет конечный разрыв. Если ввести оператор

$$Tx = \int_{-1}^1 T(y, \xi) x(\xi) d\xi$$

и функцию

$$F(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) f(\xi) d\xi,$$

то (1.13) можно записать в операторной форме:

$$(E + T)x = F. \quad (1.14)$$

Получим аналогичное уравнение для  $x^{(p)}$ . Для этого, используя определения (1.8) и соотношения (1.6), подставим  $u^{(p)}$  из (1.10) в (1.5). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p_j)}(y) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{d^i G(y, \xi)}{dy^i} q_i(\xi) x^{(p_j)}(\xi) \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy = \\ & = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \int_{-1}^1 G(y, \xi) f(\xi) d\xi \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, p_j - m. \end{aligned}$$

Используя введенные обозначения для  $T(y, \xi)$ ,  $F(y)$  и разбивая интеграл  $\int_{-1}^1$  на сумму интегралов по отрезкам

$[y_{j-1}, y_j]$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p_j)}(y) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \sum_{i=1}^N T^i x_i^{(p_i)} \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy = \\ & = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \sum_{i=1}^N F_i(y) \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy, \quad (1.15) \end{aligned}$$

где  $T^i$  - операторы и функции  $F_i$ , определяемые по формулам

$$T^i x_i^{(p_i)} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} T(y, \xi) x_i^{(p_i)}(\xi) d\xi,$$

$$F_i(y) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} G(y, \xi) f_i(\xi) d\xi, \quad f_i = f(y), \quad y \in [y_{i-1}, y_i].$$

Введем гильбертово пространство  $L_{2,\rho}(y_{i-1}, y_i)$ , скалярное произведение в котором определяется по формуле

$$(\varphi, \psi)_{L_{2,\rho}} = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi(y) \psi(y) \rho(\tilde{y}) dy.$$

Очевидно,  $T^i : L_{2,\rho}(y_{i-1}, y_i) \rightarrow C[-1,1]$

(а также  $T^i : C(y_{i-1}, y_i) \rightarrow C[-1,1]$ ).

Действительно, пусть

$$g_i(y) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} T(y, \xi) x(\xi) d\xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dg_i}{dy} &= \frac{d}{dy} \left( \int_{y_{i-1}}^y T(y, \xi) x(\xi) d\xi + \int_y^{y_i} T(y, \xi) x(\xi) d\xi \right) = \\ &= (T_- + T_+) x(y) + \int_{y_{i-1}}^y \frac{dT(y, \xi)}{dy} x(\xi) d\xi + \int_y^{y_i} \frac{dT(y, \xi)}{dy} x(\xi) d\xi = \\ &= x(y) + \int_{y_{i-1}}^y \frac{dT(y, \xi)}{dy} x(\xi) d\xi + \int_y^{y_i} \frac{dT(y, \xi)}{dy} x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{dT}{dy}$  ограничены и

$$(T_- + T_+) = (T(y, \xi)|_{\xi=y-0} + T(y, \xi)|_{\xi=y+0}) = \frac{1}{q_m(y)} = 1,$$

поскольку в уравнении (1.1)  $q_m(y) = 1$ .

Поэтому

$$\left\| \frac{dg_i}{dy} \right\|_{L_2(-1,1)} \leq \|x(y)\|_{L_2(-1,1)} + c_1 \|x\|_{L_2(-1,1)} + c_2 \|x\|_{L_2(-1,1)}.$$

Но  $L_{2,\rho} \subset L_2$ , так как  $\rho(\tilde{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\xi}^2}}$ .

Тогда  $\|x\|_{L_2} \leq \|x\|_{L_{2,\rho}}$  и, таким образом,  $g_i \in W_2^1$ . Согласно теореме вложения,  $g_i$  непрерывна и даже удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $1/2$ . Поскольку мы доказали, что

$T^i : L_2(y_{i-1}, y_i) \rightarrow C[-1, +1]$ , то тем более

$T^i : C(y_{i-1}, y_i) \rightarrow C[-1, +1]$ .

Введем вектор  $X^{(p)} = (x_1^{(p)}(y), \dots, x_N^{(p)}(y))$ , компоненты  $x_j^{(p)}$  которого определены на своем интервале и представляют из себя, согласно (1.7), полиномы степени  $(p_j - m)$ . Поэтому они могут быть представлены через линейную комбинацию первых  $(p_j - m)$  полиномов Чебышева.

В пространстве таких векторов ортами могут быть взяты следующие векторы

$$\bar{T}_{i_1} = (T_{i_1}(\bar{y}), 0, \dots, 0), \quad \bar{T}_{i_2} = (0, T_{i_2}(\bar{y}), 0, \dots, 0), \dots, \bar{T}_{i_N} = (0, \dots, 0, T_{i_N}(\bar{y})),$$

где  $T_{i_j}(\bar{y})$  - полиномы Чебышева ( $\bar{y} \in [-1, 1]$ ), и  $i_1 = 0, 1, \dots, p_1 - m$ ;  $i_2 = 0, 1, \dots, p_2 - m, \dots, i_N = 0, 1, \dots, p_N - m$ .

Введем скалярное произведение в конечномерное пространство  $L_{2,\rho}^{(p)}$  векторов  $X^{(p)}$  по формуле

$$(X^{(p)}, Z^{(p)})_{L_{2,\rho}^{(p)}} = \sum_{j=1}^N \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p)}(y) z_j^{(p)}(y) \rho(\bar{y}) dy, \quad \bar{y} \in [-1, 1].$$

В этих обозначениях (1.15) примет следующий вид:

$$(X^{(p)}, \bar{T}_{i_j}) + (TX^{(p)}, T_{i_j}) = (F, \bar{T}_{i_j}), \quad j=1, 2, \dots, N; \quad i_j = 0, 1, \dots, p_j - m, \quad (1.16)$$

где

$$TX^{(p)} = \left( \sum_{i=1}^N T^i x_i^{(p)}(y) \Big|_{y \in [y_0, y_1]}, \sum_{i=1}^N T^i x_i^{(p)}(y) \Big|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots \right),$$

$$F = \left( F_1(y) \Big|_{y \in [y_0, y_1]}, F_2(y) \Big|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots, F_N(y) \Big|_{y \in [y_{N-1}, y_N]} \right).$$

Введем гильбертово пространство  $L_{2,\rho}^N$  вектор – функций

$$X = (x_1(y), \dots, x_N(y)), \text{ где } x_i(y) \in L_{2,\rho}(y_{i-1}, y_i)$$

т.е.  $L_{2,\rho}^N \in L_{2,\rho}(y_0, y_1) \times L_{2,\rho}(y_1, y_2) \times \dots \times L_{2,\rho}(y_{N-1}, y_N)$

со скалярным произведением, как и в  $L_{2,\rho}^{(p)}$ .

Так как по вектору  $X$  всегда можно построить функцию  $x(y)$  по правилу  $x(y) = x_i(y)$  при  $y \in [y_{i-1}, y_i]$ , то пространство  $L_{2,\rho}^N$  изоморфно пространству  $L_{2,\rho}^N(-1,1)$  функций со скалярным произведением

$$(x, z)_{L_{2,\rho}^N} = \sum_{j=1}^N \int_{y_{j-1}}^{y_j} x(y)z(y)\rho(\tilde{y})dy.$$

Теперь введем проектор  $P_{\tilde{p}} : L_{2,\rho}^N \rightarrow L_{2,\rho}^{(\tilde{p})}$  по правилу:

если  $X = (x_1(y), \dots, x_N(y))$  и  $x_j(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} T_k(\tilde{y})$ ,

то  $P_{\tilde{p}} X = \left( \sum_{k=0}^{p_1-m} c_k^{(1)} T_k(\tilde{y}), \dots, \sum_{k=0}^{p_N-m} c_k^{(N)} T_k(\tilde{y}) \right)$ .

*Замечание 1.* О возможности разложения функции  $x_j(y) \in L_{2,\rho}(y_{i-1}, y_i)$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева см. в работе [61, с. 27]. Отсюда же следует аналогичное утверждение о разложении векторов  $X \in L_{2,\rho}^N$  по  $T_{i_j}$ ,  $j=1,2,\dots,N$ ;  $i_j = 0,1,\dots,p_j - m$ .

В этих обозначениях уравнение (1.16) перепишем в виде

$$X^{(p)} + P_p T X^{(p)} = P_p F, \quad X^{(p)} \in L_{2,\rho}^{(p)}. \quad (1.17)$$

*Замечание 2.* Если  $X^{(p)} \rightarrow X$  при  $(p) \rightarrow \infty$  в какой-нибудь норме (например, определяемой скалярным произведением в  $L_{2,\rho}^N$ ), то строя по компонентам  $X^{(p)}$  и  $X$  функции  $x^{(p)}(y)$  и  $x(y)$ ,  $y \in [-1,1]$ , как это было указано, получаем сходимость  $x^{(p)}$  к  $x$  в  $L_{2,\rho}^N$ . Есть основание считать, что эта функция  $x(y)$  есть решение (1.14).

Если определить вектор  $X(y)$  с помощью указанного ранее изоморфизма по функциям  $x(y)$  решения уравнения (1.14), т.е. по правилу

$$X(y) = (x(y)|_{y \in [y_0, y_1]}, x(y)|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots) = (x_1, \dots, x_N),$$

а оператор  $T$  и функцию  $F$  из (1.14) считать действующими по правилам

$$\begin{aligned} TX &= \left( \sum_{i=1}^N T^i x_i|_{y \in [y_0, y_1]}, \sum_{i=1}^N T^i x_i|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots \right) = \\ &= \left( \int_{-1}^1 T(y, \xi) x(\xi) d\xi|_{y \in [y_0, y_1]}, \dots \right) = (Tx, Tx, \dots, Tx), \\ F &= (F_1(y)|_{y \in [y_0, y_1]}, F_2(y)|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots) = \\ &= \left( \int_{-1}^1 G(y, \xi) f(\xi) d\xi|_{y \in [y_0, y_1]}, \dots \right) = (Fy, Fy, \dots, Fy), \end{aligned}$$

то (1.14) примет эквивалентную форму:

$$X + TX = F, \quad F \in L_{2,p}^N. \quad (1.18)$$

Это более удобно при сравнении с уравнением (1.17) для приближенных решений и позволяет использовать известные результаты.

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать некоторые утверждения о сходимости  $X^{(p)}$  к  $X$  при  $(p) \rightarrow \infty$  (т.е. при  $p_j \rightarrow \infty$  для любого  $j$ , где  $(p) = (p_1, \dots, p_N)$ ). А в силу изоморфизма, - сходимости  $x^{(p)}$  к  $x$  и, следовательно, согласно (1.10) и (1.12), сходимости

$$u^{(p)}(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) x^{(p)}(\xi) d\xi \quad \text{к} \quad u(y) \quad \text{- в более сильных}$$

нормах.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1.1) - непрерывные функции. Обозначим через  $X_0$  решение уравнения (1.18) (существование  $X_0$  следует из однозначной разрешимости задачи (1.1) - (1.2)). Тогда при достаточно больших  $(\bar{p})$  (т.е. больших  $p_j$  для всех  $j$ ) уравнение (1.17) имеет единственное решение  $X^{(p)}$  и справедлива оценка

$$\|X^{(p)} - X_0\|_{L_{2,p}^N} \leq c_0 \|X_0 - X_0^0\|_{L_{2,p}^N}, \quad (1.19)$$

где  $X_\rho^0$  — отрезок Фурье по полиномам Чебышева функции  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$  длины « $\rho$ », т.е.  $X_\rho^0 = (x_{\rho_1}^{(0)}, \dots, x_{\rho_N}^{(0)})$ ,

$$x_{\rho_i}^{(0)}(y) = \sum_{j=0}^{\rho_j - m} \tilde{c}_j^i T_j(\bar{y}), \quad \tilde{c}_j^i = \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_i^0(y) T_j(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy,$$

$$\left( \|X_0\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{c}_i^{(j)})^2 \right) \right), \quad \|X_0 - X_\rho^0\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=\rho_j - m + 1}^{\infty} (\tilde{c}_i^{(j)})^2 \right);$$

$c_0$  — постоянная, зависящая от нормы обратного оператора  $(E+T)^{-1}$ ,  $E$  — единичный оператор.

Доказательство. Для доказательства теоремы проверим выполнение условий теоремы А) и Б) из введения. Оператор  $(E+T): L_{2,\rho}^N \rightarrow L_{2,\rho}^N$  непрерывно обратим, так как явно известна функция Грина задачи (1.1) для оператора  $L_0$ , и эта задача эквивалентна обращению оператора  $(E+T)$ , причем  $\|(E+T)^{\pm 1}\| \leq c$ . Везде, где не оговорено особо, норма оператора  $\|S\|$  понимается как

$$\text{Sup}_{\varphi \in L_{2,\rho}} \left( \frac{\|S\varphi\|_{L_{2,\rho}}}{\|\varphi\|_{L_{2,\rho}}} \right).$$

Условие  $\|(E - P_\rho)T\|_{L_{2,\rho}^N} \rightarrow 0$  при  $(\rho) \rightarrow \infty$  следует из

теоремы В, так как оператор  $T$ , как векторный интегральный оператор с кусочно-непрерывным ядром, вполне непрерывен в  $L_{2,\rho}^N$ . Доказательство последнего факта проводится аналогично доказательству вполне непрерывности в  $L_2(-1,1)$  интегрального оператора с суммируемым квадратом по совокупности переменным ядром, так как вес  $\rho(\bar{y})$  имеет особенности порядка  $1/2$ , а ядро равномерно ограничено.

Условие  $\|X - P_\rho X\|_{L_{2,\rho}^N} \rightarrow 0$  при  $(\rho) \rightarrow \infty$  вытекает из того, что векторы  $\bar{T}_j$  образуют полную ортогональную систему в  $L_{2,\rho}^N$  (см. замечание 1), а  $P_\rho$  — это оператор проектирования на

$L_{2,\rho}^{(p)}$ , т.е. отрезок ряда Фурье по  $\bar{T}_j$  от  $x$  до  $(p)$ -го члена. По этой же причине  $(F - P_p F) \rightarrow 0$  при  $(p) \rightarrow \infty$ , так как  $F \in L_{2,\rho}^N$ . Ограниченность оператора  $\|P_p\|$  следует из неравенства Бесселя:

$$\|P_p X\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=0}^{p_i - m} (\tilde{c}_j^i)^2 \right) \leq \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{c}_j^i)^2 \right) = \|X\|_{L_{2,\rho}^N}^2,$$

где  $\tilde{c}_j^i$  – коэффициенты Фурье для  $x$ . Таким образом,  $\|P_p\| \leq 1$ . Утверждение теоремы 1 доказано.

**ТЕОРЕМА 2.** При тех же предположениях, что и в теореме 1, функция  $u^{(p)}(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) x^{(p)}(\xi) d\xi$  стремится к точному решению  $u_0(y)$  задачи (1.1) – (1.2) по норме  $W_2^m$ :

$$\left( \|\varphi\|_{W_2^m}^2 = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \varphi}{dy^k} \right\|^2 \right),$$

и справедлива оценка

$$\|u^{(p)} - u_0\|_{W_2^m(-1,1)} \leq c_0 \|X^{(p)} - X_0\|_{L_{2,\rho}^N}, \quad (1.20)$$

где

$$\tilde{c}_0 = c_0 \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \sup_{\varphi \in L_2} \frac{\left\| \int_{-1}^1 G(y, \xi) \varphi(\xi) d\xi \right\|_{W_2^m}}{\|\varphi\|_{L_2}}.$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы 2 следует из сходимости  $X^{(p)}$  к  $X_0$  с помощью изоморфизма  $X \leftrightarrow x$ , эквивалентности (1.18) и (1.1) и оценки

$$\begin{aligned} \|u^{(p)} - u_0\|_{W_2^m(-1,1)}^2 &= \left\| \int_{-1}^1 G(y, \xi) (x^{(p)}(\xi) - x_0(\xi)) d\xi \right\|_{W_2^m(-1,1)}^2 \leq \\ &\leq \tilde{c}^2 \|x^{(p)} - x_0\|_{L_2(-1,1)}^2 = \tilde{c}^2 \sum_{j=1}^N \int_{y_{j-1}}^{y_j} (x_j^{(p)}(\xi) - x_0(\xi))^2 \rho(\tilde{\xi}) \sqrt{1 - \tilde{\xi}^2} d\xi \leq \\ &\leq \tilde{c}^2 \sum_{j=1}^N \int_{y_{j-1}}^{y_j} (x_j^{(p)}(\xi) - x_0(\xi))^2 \rho(\tilde{\xi}) d\xi = \end{aligned}$$

$$= \tilde{c}^2 \|X^{(p)} - X_0\|_{L_{2,p}^N}^2 \leq \tilde{c}_0^2 \|X_0 - X_p^0\|_{L_{2,p}^N}^2,$$

так как

$$\rho(\tilde{\xi})\sqrt{1-\tilde{\xi}^2} = 1 \text{ и } \sqrt{1-\tilde{\xi}^2} \leq 1$$

$$\xi = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2}\tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi} \in [-1,1].$$

*Следствие 1* (из теоремы 2). Из теоремы вложения в одномерном случае  $W_2^m \subset C^{m-1+\beta}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1/2$ , следует сходимость  $u^p$  к  $u$  по норме  $C^{m-1+\beta}$ :

$$\|u\|_{C^{m-1+\beta}} = \sum_{j=1}^{m-1} \max_{y \in [-1,1]} |u^{(j)}(y)| + \max_{y_1 \neq y_2} \frac{|u^{(m-1)}(y_1) - u^{(m-1)}(y_2)|}{|y_1 - y_2|^\beta}$$

с той же скоростью.

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1.1) принадлежат  $C^{s+\alpha}[-1,1]$ , тогда справедливо утверждение теоремы 1, причем оценка (1.19) имеет вид

$$\|X^{(p)} - X_0\|_{L_{2,p}^N}^2 \leq \tilde{c}_1 \left( \frac{h}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)}, \quad (1.21)$$

где

$$(p) = (p_1, \dots, p_N), \quad p_- = \min_{1 \leq j \leq N} p_j, \quad h = \max_{1 \leq j \leq N} (y_j - y_{j-1}),$$

$$\tilde{c}_1 = c_0 c_1, \quad c_1 = \frac{\pi}{2} (c_s M)^2, \quad c_s = 12 \frac{6^s s^s}{s!} \left( \frac{s+1}{2} \right)^\alpha,$$

константа  $M$  определяется из условия Липшица, т.е.

$$|f^{(s)}(x_1) - f^{(s)}(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\alpha.$$

*Замечание 3.* Условие  $(p) \rightarrow \infty$  равносильно условию, что  $p_- \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Справедливо равенство

$$\|X_p - X_0\|_{L_{2,p}^N}^2 = \sum_{j=1}^N \int_{y_{j-1}}^{y_j} (x_j^{(p_j)}(\xi) - x_j^{(0)}(\xi))^2 \rho\left(\frac{\xi}{\xi}\right) d\xi. \quad (1.22)$$

Используем рассуждения из [38] (т.е. теорему 6, с. 365). Согласно теореме Теплера ([38], с. 307), имеем

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( x_j^{(p_j)}(\xi) - x_j^{(0)}(\xi) \right)^2 \rho(\tilde{\xi}) d\xi \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( D_{p_j}(\xi) - x_j^{(0)}(\xi) \right)^2 \rho(\tilde{\xi}) d\xi, \quad (1.23)$$

где  $D_{p_j}(\xi)$  — алгебраический полином степени не выше  $(p_j - m)$ . Если воспользоваться теперь более точной оценкой из теоремы Джексона (т.е. оценкой (150) из [38], с. 164), то получим, что такой полином  $D_{p_j}(\xi)$  существует, и для него справедлива оценка

$$\left| D_{p_j}(0) - x_j^{(0)}(0) \right| \leq \frac{c_s (y_j - y_{j-1})^{s+\alpha}}{(p_j - m)^{s+\alpha}} M, \quad j=1, 2, \dots, N, \quad p_j - m \geq s+1.$$

Тогда продолжая неравенство (1.23), получаем

$$\begin{aligned} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( D_{p_j}(\xi) - x_j^{(0)}(\xi) \right)^2 \rho(\tilde{\xi}) d\xi &\leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( c_s M \left( \frac{y_j - y_{j-1}}{(p_j - m)} \right)^{2(s+\alpha)} \right)^2 \rho(\tilde{\xi}) d\xi \leq \\ &\leq (c_s M)^2 \left( \frac{h}{(p_- - m)} \right)^{2(s+\alpha)} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \rho(\tilde{\xi}) d\xi = \\ &\leq (c_s M)^2 \left( \frac{h}{(p_- - m)} \right)^{2(s+\alpha)} \frac{l_j \pi}{2} = c_1 \left( \frac{h}{(p_- - m)} \right)^{2(s+\alpha)} \frac{l_j}{2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\pi}{2} (c_s M)^2, \quad p_- = \min_{1 \leq j \leq N} p_j, \quad h = \max_{1 \leq j \leq N} (y_j - y_{j-1}), \\ \int_{y_{j-1}}^{y_j} \rho(\tilde{\xi}) d\xi &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{l_j}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}} = \frac{l_j \pi}{2}. \end{aligned}$$

так как  $\xi = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} \tilde{\xi}$ , а значение интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{1 - \tilde{\xi}^2}} = \frac{\pi}{2}$

вычислено с использованием рекуррентных формул для вета-функции.

Подставляя оценку (1.24) в равенство (1.22), получаем

$$\|X_p - X_0\|_{L_{2,p}^N}^2 \leq \sum_{j=1}^N c_1 \left( \frac{h}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)} \frac{l_j}{2} = c_1 \left( \frac{h}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)},$$

так как  $\sum_{j=1}^N I_j = 2$  (см. 1.1).

После этого оценка (1.21) из теоремы 3 есть следствие теоремы 1 и приведенных рассуждений.

**ТЕОРЕМА 4.** Если коэффициенты и правая часть уравнения (1.1) есть функции из  $C^{s+\alpha}[-1,1]$ , то функция  $u^{(p)}(y) = \int_{-1}^1 G(y, \xi) x^{(p)}(\xi) d\xi$  стремится к точному решению  $u_0(y)$  задачи (1.1) – (1.2) по норме  $W_2^m$  и выполнена оценка

$$\|u^{(p)} - u_0\|_{W_2^m(-1,1)}^2 \leq c_2 \left( \frac{\hbar}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)}, \quad (1.25)$$

где  $c_2 = \tilde{c}_0 \tilde{c}_1$ .

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно оценить правую часть в (1.20). А она оценена при доказательстве теоремы 3.

### 1.3. Проблема собственных значений в спектрально-сеточном методе

Математическое моделирование многих гидродинамических систем как для однофазных, так и для двухфазных потоков сводится к проблеме на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Поэтому теоретическое обоснование сходимости приближенных собственных значений, полученных с помощью ССМ к точным собственным значениям дифференциальной задачи играет весьма важное значение. В данном параграфе ССМ применяется для решения гидродинамических систем общего вида, описываемых проблемой на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения  $m$ -го порядка с линейными однородными краевыми условиями.

Рассмотрим проблему на собственные значения для дифференциального уравнения

$$L^\lambda u = u^{(m)}(y) + \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y) u^{(i)}(y) - \lambda \sum_{i=0}^l \bar{q}_i(y) u^{(i)}(y) = 0, \quad l < m, \quad y \in (-1, 1), \quad (1.26)$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_k u^{(k)}(-1) + \beta_k u^{(k)}(+1)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.27)$$

Будем предполагать, что задача (1.26) – (1.27) при  $\lambda = 0$  имеет только тривиальное решение. Это требование обеспечивает существование функции Грина для оператора  $L^\lambda$  с краевыми условиями (1.27).

Приближенное решение (1.26) – (1.27) ищем в виде (1.3) и требуем выполнение условий (1.4). Условия ортогональности невязки  $L^{2p} u_j^{(p_j)}$  полиномам Чебышева до номера  $p_j - m$  (т.е. выражение вида (1.5)) записываются следующим образом:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} L^\lambda u_j^{(p_j)}(y) T_k(\tilde{y}) \rho(\tilde{y}) d\tilde{y} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, p_j - m, \quad (1.28)$$

где

$$\rho(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{y}^2}}, \quad y = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} \tilde{y}, \quad y \in [y_{j-1}, y_j], \\ \tilde{y} \in [-1, 1], \quad m_j = y_j + y_{j-1}, \quad l_j = y_j - y_{j-1}.$$

В проблемах гидродинамической устойчивости нас не будет интересовать нахождение самих коэффициентов  $a_n^{(p_j)}$  (нетривиальных решений однородной системы), а надо найти параметры  $\lambda^p$ , которые будем называть собственными значениями приближенной задачи и при которых имеется нетривиальное решение однородной системы.

Подставляя (1.12) в (1.26) и имея в виду (1.11), получаем

$$x(y) + \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y) G^{(i)}(y, \xi) x(\xi) d\xi \right) - \lambda \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=0}^l \bar{q}_i(y) G^{(i)}(y, \xi) x(\xi) d\xi \right) = 0.$$

Вводя обозначение  $\bar{T}(y, \xi) = \sum_{i=0}^l \bar{q}_i(y) G^{(i)}(y, \xi)$ , имеем

$$x(y) + \int_{-1}^1 T(y, \xi) x(\xi) d\xi - \lambda \int_{-1}^1 \bar{T}(y, \xi) x(\xi) d\xi = 0; \quad (1.29)$$

функция  $T(y, \xi)$  определена в параграфе 1.2.

Согласно свойствам функции Грина,  $T(y, \xi)$ ,  $\bar{T}(y, \xi)$  - непрерывные на  $C[-1, 1] \times C[-1, 1]$  функции, кроме "диагонали"  $y = \xi$ , на которой имеют конечный разрыв. Если ввести операторы  $Tx$ , как в параграфе 1.2, и  $\bar{T}x = \int_{-1}^1 \bar{T}(y, \xi) x(\xi) d\xi$ , то (1.29) можно записать в операторном виде

$$(E + T)x = \lambda \bar{T}x. \quad (1.30)$$

Получим теперь аналогичное уравнение для  $x^{(p)}$ . Используя (1.6), (1.8), подставим функцию  $u^{(p)}$ , определяемую формулой (1.10), в (1.28). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p)}(y) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d^i G(y, \xi)}{dy^i} q_i(y) \right) x_j^{(p)}(y) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy = \\ & = \lambda^{(p)} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=0}^l \frac{d^i G(y, \xi)}{dy^i} \bar{q}_i(y) x_j^{(p)}(\xi) \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy \right). \end{aligned}$$

Используя введенные обозначения для функций  $T(y, \xi)$ ,  $\bar{T}(y, \xi)$  и разбивая интеграл  $\int_{-1}^1$  на сумму интегралов по отрезкам  $[y_{j-1}, y_j]$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p)}(y) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy + \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \sum_{i=1}^N T^i x_i^{(p)} \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy = \\ & = \lambda^{(p)} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \sum_{j=1}^N \bar{T}^j x_j^{(p)} \right) T_k(\bar{y}) \rho(\bar{y}) dy, \quad (1.31) \end{aligned}$$

где  $\bar{T}^i = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \bar{T}(y, \xi) x_i^{(p)}(\xi) d\xi$ , а  $T^i$  определена в параграфе 1.2.

Повторяя рассуждения, приведенные в параграфе 1.2, перепишем (1.31) в виде

$$(X^{(p)}, \bar{T}_{ij}) + (TX^{(p)}, \bar{T}_{ij}) = \lambda^{(p)} (\bar{TX}^{(p)}, \bar{T}_{ij}), \quad (1.32)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad i_j = 0, 1, \dots, p_j - m,$$

где

$$\bar{TX}^{(p)} = \left( \sum_{i=1}^N \bar{T}^i x_i^{(p)}(y) \Big|_{y \in [y_0, y_1]}, \sum_{i=1}^N \bar{T}^i x_i^{(p)}(y) \Big|_{y \in [y_1, y_2]}, \dots \right),$$

а  $TX^{(p)}$  и  $\bar{T}_{ij}$  определены в параграфе 1.2.

Наконец, введя гильбертово пространство вектор-функции  $L_{2,\rho}^N$  и оператор проектирования  $P_{\bar{p}} : L_{2,\rho}^N \rightarrow L_{2,\rho}^{\bar{p}}$ , как в § 2, систему (1.32) перепишем в виде

$$X^{(p)} + P_{\bar{p}} \Phi X^{(p)} = \lambda^{(p)} P_{\bar{p}} \bar{\Phi} X^{(p)}. \quad (1.33)$$

Уравнение (1.30) также запишем в эквивалентной форме:

$$\Psi + \Phi \Psi = \lambda \bar{\Phi} \Psi. \quad (1.34)$$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости  $\lambda^{(p)}$  к  $\lambda$ . Введем обозначение  $F_1 = (E + T)^{-1}$ . Существование непрерывного из  $L_{2,\rho}^N$  в  $L_{2,\rho}^N$  обратного оператора  $F_1$  следует из эквивалентности задачи (1.34) задаче (1.27) для уравнения (1.26) и в силу связи  $x = \frac{d^m u}{dy^m}$ . Тогда задача (1.34)

эквивалентно редуцируется к задаче

$$X = \lambda F_1 \bar{\Phi} X = \lambda F X, \quad F = F_1 \bar{\Phi}. \quad (1.35)$$

По тем же причинам, что и  $T$  (см. 1.2), оператор  $\bar{T}$  является вполне непрерывным из  $L_{2,\rho}^N$  в  $L_{2,\rho}^N$ . Поэтому оператор  $F$ , как произведение вполне непрерывного  $\bar{T}$  и ограниченного ( $\equiv$  непрерывного) оператора  $F_1$ , является вполне непрерывным.

В силу оценки (см. формулу (5.19) из [35, с. 200])

$$\|(E + P_{\bar{p}} \Phi)^{-1}\| \leq c \quad (1.36)$$

для достаточно больших  $(\bar{p})$  уравнение (1.33) также сводится к эквивалентному уравнению

$$X^{(p)} = \lambda^{(p)}(E + P_p \Phi)^{-1} P_p \bar{\Phi} X^{(p)} = \lambda^{(p)} F_p X^{(p)}, \quad (1.37)$$

где

$$F_p = (E + P_p \Gamma)^{-1} P_p \bar{\Gamma}.$$

Аналогично, так как  $\bar{\Gamma}$  вполне непрерывен, а  $P_p$  ограничен, то  $P_p \bar{\Gamma}$  также вполне непрерывен, а в силу непрерывности  $(E + P_p \Gamma)^{-1}$  (см. оценку (1.36)) оператор  $F_p : L_{2,p}^{(p)} \rightarrow L_{2,p}^{(p)}$  вполне непрерывен ( $(\bar{p})$  — достаточно велико).

Поэтому для справедливости утверждения теорем Г и Д из введения остается только проверить условия

$$\|U_p\| = \|F - P_p F\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (\bar{p}) \rightarrow \infty \quad (1.38)$$

и

$$\|S_p\| = \|F_p - P_p F\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (\bar{p}) \rightarrow \infty.$$

Доказательство первого совпадает с аналогичным рассуждением в теореме 1, так как  $F$  — вполне непрерывный оператор. Доказательство второго очевидно, так как  $S_p = 0$ . Последнее следует из того, что приближенные решения ищутся по методу Бубнова-Галеркина.

Таким образом, выполнены все условия теорем Г и Д, поэтому приближенные собственные значения  $\lambda^{(p)}$  задачи (1.37), полученные ССМ при  $(p) \rightarrow \infty$ , сходятся к точным собственным значениям  $\lambda$  задачи (1.35).

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть коэффициенты уравнения (1.26) принадлежат к классу  $C^{s+\alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Пусть далее  $\lambda^{(p)} \rightarrow \lambda_0$  при  $(p) \rightarrow \infty$ , где  $\lambda^{(p)}, \lambda_0$  — собственные значения задач (1.37) и (1.35) соответственно, причем  $\lambda_0$  имеет ранг  $r$ . Тогда справедлива оценка

$$|\lambda^{(p)} - \lambda_0| \leq c_0 \left( \sqrt{c_1 \left( \frac{h}{p-m} \right)^{s+\alpha}} \right)^{1/r}, \quad (1.39)$$

константы  $c_0$  и  $c_1$  определены в предыдущих теоремах.

Доказательство. Для доказательства теоремы в силу приведенных рассуждений и теоремы E из введения надо уточнить оценку  $\varepsilon_p$ . Аналогичным способом, как при получении оценки в теореме 3, имеем

$$\varepsilon_p = \sup_{X_0 \in X_0^{(i)}, \|X_0\|=1} \|(E - P_p)X_0\|_{L_{2,p}^N} \leq \sqrt{c_1} \left( \frac{h}{p_- - m} \right)^{s+\alpha}.$$

Тогда неравенство  $|\lambda^{(p)} - \lambda_0| \leq c_0 (\|S_p\| + \varepsilon_p)^{1/r}$  из теоремы E влечет неравенство (1.39), так как  $S_p = 0$ . Теорема доказана.

Из оценки (1.39) видно, что приближенные собственные значения  $\lambda^{(p)}$  полученные с помощью ССМ, сходятся к точным собственным значениям  $\lambda_0$  проблемы (1.26), (1.27) как при увеличении минимального количества полиномов Чебышева на элементах, т.е. когда  $p_- = \min_{1 \leq j \leq N} p_j \rightarrow \infty$ , так и при уменьшении максимального шага сетки, т.е. когда  $h = \max_{1 \leq j \leq N} (y_j - y_{j-1}) \rightarrow 0$ .

Исследование математических моделей сложных гидродинамических систем связано с решением проблемы на собственные значения. Эффективное нахождение всех собственных значений проблемы имеет весьма важное значение. Именно анализируя собственные значения, можно судить об устойчивости или неустойчивости гидродинамических потоков.

---

---

## ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО – СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОФАЗНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Результаты данной главы изложены в работах [159,167,178,179,185,189, 195]. В этой главе ССМ, предложенный в главе I, применяется для исследования математических моделей однофазных гидродинамических систем. В параграфе 2.1. изложена общая постановка проблемы гидродинамической устойчивости. В параграфе 2.2. исследуются математические модели для однофазных гидродинамических потоков. Применение ССМ для оценки устойчивости однофазных гидродинамических систем приведено в параграфе 2.3. В параграфе 2.4. изложен способ построения алгебраических преобразований для матричных уравнений устойчивости. В этом случае размерность алгебраической системы, получаемая с помощью спектрально – сеточной аппроксимации, удается существенно снизить без уменьшения точности расчетов. Обоснование эффективности спектрально-сеточного метода иллюстрируется в параграфе 2.5. Показано, что спектральный метод в спектрально - сеточном представлении достаточно эффективен для математического моделирования проблемы устойчивости однофазных потоков. Анализ и интерпретация результатов вычислительного эксперимента по устойчивости однофазных потоков изложены в параграфе 2.6. ССМ применен для моделирования симметричных (профиль Пуазейля) и несимметричных течений (профиль пограничного слоя).

## 2.1. О проблеме гидродинамической устойчивости

Опираясь на классические результаты работ [1-4,108], изложим суть проблемы гидродинамической устойчивости.

Вязкость отражает свойство жидкости сопротивляться относительному перемещению соседних жидких слоев. Иными словами, при слоистом (ламинарном) течении вязкость порождает внутреннее трение, которое выражается величиной касательного напряжения на границах слоев, т.е. величиной касательной силы, приходящейся на единицу площади. Отдельные концентрические слои скользят один по другому, и притом так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого рода называется ламинарным течением (от латинского слова "lamina" – слой).

Течение реальной жидкости во многих случаях резко отличается от ламинарных течений. Они обладают некоторым особым свойством, которое называется турбулентностью. При возрастании числа Рейнольдса в течениях реальной жидкости как в трубах и каналах, так и в пограничном слое на обтекаемом теле происходит отчетливо выраженный переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход ламинарного течения в турбулентное, называемый также возникновением турбулентности, имеет фундаментальное значение для всей гидроаэродинамики. Раньше всего явление перехода было замечено при наблюдении течений в прямых трубах и каналах. В длинной прямой трубе с постоянным поперечным сечением и с гладкими стенками каждая частица жидкости движется при небольших числах Рейнольдса с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. Вследствие вязкости, частицы жидкости близкие к стенкам, текут медленнее, чем частицы более удаленные от стенок. Течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев (слоистое, или ламинарное течение). Однако

наблюдения показывают, что при более высоких числах Рейнольдса течение перестаёт быть упорядоченным. Возникает сильное перемешивание, которое в случае течения в трубе легко сделать видимым, если ввести в поток окрашенную струйку жидкости. Впервые это сделал О.Рейнольдс [108]. До тех пор, пока течение остаётся ламинарным, введенная в него окрашенная жидкость движется в трубе в виде резко очерченной струйки, но, как только течение становится турбулентным, эта струйка расплывается и почти равномерно окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость. Это показывает, что при турбулентном течении на главное течение жидкости, происходящее в направлении оси трубы, налагаются поперечные движения, т.е. движения, происходящие в направлении, перпендикулярном к оси трубы. Эти поперечные движения и приводят к перемешиванию движущейся жидкости. В результате такого перемешивающего движения происходит обмен импульсами в поперечном направлении, в то время как в продольном направлении каждая частица в основном сохраняет свой импульс. Это приводит к тому, что распределение скоростей по поперечному сечению трубы при турбулентном течении получается значительно более равномерным, чем при ламинарном. Более подробный анализ турбулентного течения показывает, что его самым основным признаком является следующий: скорость и давление в каждой фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а изменяются, претерпевая весьма нерегулярные пульсации высокой частоты.

Первые систематические исследования обоих, столь различных форм течения – ламинарной и турбулентной – были выполнены О.Рейнольдсом [108]. Им же был осуществлен упомянутый выше и названный его именем опыт с окрашенной струйкой. В результате своих исследований О.Рейнольдс открыл закон подобия, также

названный впоследствии его именем. Согласно закону подобия Рейнольдса, переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит всегда при приблизительно одинаковом числе Рейнольдса  $Re = \rho UL/\mu$ , где  $\rho$  - плотность жидкости или газа,  $\mu$  - вязкость,  $U$  - характерная скорость основного потока,  $L$  - характерная длина. Число Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, называется критическим числом Рейнольдса  $Re_{кр}$ . Следовательно, те течения, для которых  $Re < Re_{кр}$  - ламинарны, а те же течения, для которых,  $Re > Re_{кр}$  - турбулентны.

Теоретические исследования, имевшие целью объяснить описанное выше, явление перехода ламинарного течения в турбулентное, начались уже в прошлом столетии. В основе всех этих исследований лежит представление, что ламинарное течение подвергается воздействию некоторых малых возмущений. Каждая теория стремилась проследить за развитием во времени возмущений, наложенных на основное течение, причем форма этих возмущений особо определялась в каждом отдельном случае. Решающим вопросом, подлежавшим решению, было установление того, затухают или нарастают возмущения с течением времени. Затухание возмущений со временем должно было означать, что основное течение устойчиво и наоборот, нарастание возмущений со временем должно было означать, что основное течение неустойчиво и поэтому возможен переход в турбулентное течение. Таким путем пытались создать теорию устойчивости ламинарного течения, которая позволяла бы теоретически вычислить критическое число Рейнольдса  $Re_{кр}$  для заданного ламинарного течения.

Существование двух типов течения вязкой жидкости - ламинарного и турбулентного - немедленно ставит вопрос: какой тип движения встречается с большей вероятностью? Теперь уже общепризнано, что турбулентность является более естественным состоянием течения жидкости, а

ламинарное течение встречается только тогда, когда число Рейнольдса так мало, что отклонение от этого течения имеет тенденцию к затуханию. Было найдено, что для некоторых типов течений возможно сохранить поток ламинарным для все больших и больших чисел Рейнольдса, если брать возмущение все меньшим и меньшим. Если же течение задано, то тогда может быть поставлен вопрос: устойчиво ли оно относительно бесконечно малых возмущений? Это и есть проблема гидродинамической устойчивости.

## 2.2. Математические модели для однофазных потоков

Математические модели, характеризующие движение вязкой несжимаемой жидкости, описываются уравнением Навье-Стокса [1-5, 91-107]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $u, v$  - продольная и поперечная компоненты скорости,  $p$  - давление,  $\text{Re} = \rho UL / \mu$  - число Рейнольдса,  $\rho$  - плотность,  $\mu$  - вязкость жидкости,  $U$  и  $L$  - характерные масштабы скорости и длины соответственно.

Для исследования устойчивости решение системы (2.1) представим, как обычно, в виде суперпозиции основного ламинарного течения  $U(y)$  и малого возмущения:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \quad v(x, y, t) = \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Систему (2.1) записываем с учётом (2.2) и, оставляя в полученных уравнениях только члены первого порядка малости по возмущениям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right), \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если учитывать, что основное течение само по себе удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

то система (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{v}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.5)$$

Вводим функцию тока для возмущающего движения в виде

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.6)$$

где  $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$  - комплексная амплитуда возмущений,  $k$  - вещественная величина, связанная с длиной  $\ell$  волны возмущения соотношением  $\ell = 2\pi/k$ . Величина  $\omega$  - комплексная,  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , где  $\omega_r$  - круговая частота отдельного колебания, а  $\omega_i$  - коэффициент нарастания, т.е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если  $\omega_i < 0$ , то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво; если же  $\omega_i > 0$ , то имеет место неустойчивость. Кроме величин  $k$  и  $\omega$ , целесообразно ввести также их отношение  $\lambda = \omega/k = \lambda_r + i\lambda_i$ . Величина  $\lambda_r$  представляет собой скорость распространения волн в направлении  $x$  (фазовая скорость), а  $\lambda_i$  опять является

величиной, позволяющей судить о затухании или возрастании колебания.

Амплитуда  $\psi(y)$  возмущающего движения принята зависящей только от переменной  $y$  потому, что основное течение также зависит только от  $y$ . Для функции тока (2.6) имеем

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx - \alpha t)}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx - \alpha t)},$$

тем самым интегрируется уравнение неразрывности (2.5), а из системы (2.4.) получаем проблему на собственные значения для уравнения Орра-Зоммерфельда:

$$\frac{1}{ik\text{Re}} D^2 \psi - \left( U(\eta) - \lambda \right) D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \psi = 0, \quad \eta_0 < \eta < \eta_1, \quad (2.7)$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi(\eta_1) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_1) = 0 \quad (2.8)$$

с однородными краевыми условиями, которые означают требования непроницаемости и прилипания. Здесь  $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ -дифференциальный оператор,  $U(\eta)$  - профиль скорости основного течения,  $\eta$  - координата, направленная поперек основного течения,  $k$  - волновое число,  $\text{Re}$  - число Рейнольдса,  $\psi(\eta)$ -амплитуда функции тока для возмущений,  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  - собственные значения задачи, где  $\lambda_r$  - фазовая скорость волнового возмущения,  $\lambda_i$ -коэффициент нарастания. Если  $\lambda_i > 0$ , то течение неустойчиво, если  $\lambda_i < 0$ , то оно устойчиво. Если же  $\lambda_i = 0$ , то колебания нейтрально устойчивы.

### 2.3. Применение спектрально-сеточного метода для оценки устойчивости однофазных гидродинамических систем

ССМ - новый эффективный математический аппарат для численного моделирования проблемы гидродинамической устойчивости. Он объединяет в себе высокую точность спектральных методов с экономичностью метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения задачи.

Перейдем к изложению алгоритма ССМ для численного моделирования задачи (2.7), (2.8). Для этого интервал интегрирования  $[\eta_0, \eta_N]$  разобьем на сетку  $\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = \eta_1$  и таким образом получим  $N$  различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Дифференциальное уравнение (2.7) на каждом из этих элементов принимает вид

$$D^2 \psi_j - ik \operatorname{Re} [(U_j(\eta) - \lambda)D - U_j^*(\eta)] \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

Краевые условия (2.8) записываются в точках  $\eta_0$  и  $\eta_N$ :

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0, \quad (2.10)$$

в точках разбиения потребуем непрерывность решения уравнения (2.9) и его производных до 3-го порядка. Эти условия имеют вид

$$\psi_j^{(t)}(\eta_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\eta_j), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.11)$$

где  $t$  - указывает порядок производной.

Решения  $\psi_j$  уравнения (2.9) представим в виде ряда по полиномам Чебышева первого ряда. Для этого каждый элемент  $[\eta_j, \eta_{j+1}]$  отображаем на интервале  $[-1, +1]$  с помощью следующей замены независимой переменной:

$$\eta = \frac{m_j}{2} + \frac{l_j}{2} y, \quad m_j = \eta_j + \eta_{j+1}, \quad l_j = \eta_j - \eta_{j+1}. \quad (2.12)$$

Через  $l_j$  обозначена длина  $j$ -го элемента. После этого преобразования уравнение (2.9) принимает вид

$$D_j^2 \psi_j - ik_j \operatorname{Re}_j [(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j'(y)] \psi_j = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (2.13)$$

где

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2} k, \quad \operatorname{Re}_j = \frac{l_j}{2} \operatorname{Re}.$$

Из условий (2.10) – (2.11) имеем

$$\psi_1(-1) = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dy}(-1) = 0, \quad (2.14)$$

$$l_j^{-t} \psi_j^{(t)}(+1) = l_{j+1}^{-t} \psi_{j+1}^{(t)}(-1), \quad t=0,1,2,3; \quad j=1,2,\dots,N-1,$$

$$\psi_N(+1) = 0, \quad \frac{d\psi_N}{dy}(+1) = 0.$$

Приближенное решение задачи (2.13) – (2.14) на каждом из элементов будем искать в виде

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y), \quad (2.15)$$

$$U_j(y_l^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_l^{(j)}),$$

$$y_l^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l=0,1,2,\dots,p_j; \quad j=1,2,\dots,N,$$

где  $T_n(y)$  – полиномы Чебышева первого рода,  $y_l^{(j)}$  – их узлы, а  $p_j$  – количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на  $j$ -м элементе сетки.

Коэффициенты разложения  $b_n^{(j)}$  для функции  $U_j(y)$  в (2.15)

определяются следующим обратным преобразованием [57-2]:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n=0,1,\dots,p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_n = 1 \quad \text{при } n \neq 0, p_j, \quad j=1,2,\dots,N.$$

Для удобства изложения ССМ уравнение (2.13) запишем в операторном виде, т.е.

$$L_j \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.16)$$

где  $L_j$  - дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$L_j = D_j^2 - ik_j \operatorname{Re}_j [(U_j(y) - \lambda) D_j - U_j''(y)].$$

Подставляя ряды (2.15) в уравнение (2.16), потребуем, чтобы левая часть (2.16) на каждом из элементов сетки была ортогональной к первым  $(p_j - 4)$ -м полиномам Чебышева, т.е.

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.17)$$

где  $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-1/2} dx$  - скалярное произведение на отрезке  $[-1, +1]$ .

Кроме того, потребуем, чтобы ряд по полиномам Чебышева (2.15) точно удовлетворял краевым условиям и условиям непрерывности (2.14). С учетом следующих свойств полиномов Чебышева  $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$  и  $T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2} n^2$  эти условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p_j} (-1)^n a_n^{(j)} &= 0, \quad \sum_{n=0}^{p_j} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} = \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} &= \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \\ \frac{1}{l_j^3} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n'''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n'''(-1), \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} = 0.$$

В формуле (2.18) производные от полиномов Чебышева вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T'_{n+1}(x) = 2xT'_n(x) + 2T_n(x) - T'_{n-1}(x), \quad T'_0(x) = 0, \quad T'_1(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T''_{n+1}(x) = 2xT''_n(x) + 4T'_n(x) - T''_{n-1}(x), \quad T''_0(x) = 0, \quad T''_1(x) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$T'''_{n+1}(x) = 2xT'''_n(x) + 6T''_n(x) - T'''_{n-1}(x), \quad T'''_0(x) = 0, \quad T'''_1(x) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, для определения  $\bar{m} = N(p_j + 1)$  неизвестных  $a_n^{(j)}$  ( $n = 0, 1, \dots, p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ) имеем  $\bar{m} = N(p_j + 1)$  уравнений. Этими уравнениями служат:  $N(p_j - 3)$  - уравнений ортогональности (2.17),  $4(N - 1)$  - условий непрерывности из (2.18) и 4 граничных условия из (2.18). В общем случае, когда на разных элементах задано разное количество полиномов Чебышева, получаем

$\bar{m} = (p_1 + p_2 + \dots + p_N + N)$  уравнений для определения такого же количества неизвестных. Полученную систему удобно записать в матричном виде:

$$(A - \lambda B)x = 0. \quad (2.19)$$

Комплексные матрицы  $A$  и  $B$  имеют структуру:



а вектор  $x$  содержит коэффициенты  $a_n^{(j)}$  в разложении (2.15), т.е.

$$x^T = (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{P_1}^{(1)}, a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{P_2}^{(2)}, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{P_N}^{(N)}).$$

В матрицах  $A$  и  $B$  через  $x$  обозначены ненулевые элементы этих матриц. Видно, что матрица  $B$  вырожденная и содержит  $4N$  нулевых строк, соответствующих крайевым условиям и условиям непрерывности, так как они не зависят от  $\lambda$ . В соответствующих строках матрицы  $A$  будут целые числа, получающиеся от значения полиномов Чебышева и их производных до третьего порядка в точках  $-1$  или  $1$ . Сохранить эти целые элементы в комплексной матрице  $A$  нецелесообразно, кроме того в комплексной матрице  $B$  соответствующие этим строкам элементы равны нулю. Поэтому при составлении программы комплексные матрицы  $A$  и  $B$  описываются следующим образом:

$A(\bar{m} - 4N, \bar{m}), \quad B(\bar{m} - 4N, \bar{m}),$  где  $\bar{m}$  — общее число уравнений в алгебраической системе (2.19), а  $N$  — число элементов сетки в ССМ.

## 2.4. Алгебраическое преобразование матричных уравнений устойчивости

С помощью элементарных преобразований столбцов матриц  $A$  и  $B$  систему (2.19) приведем к виду

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0, \quad (2.20)$$

или

$$(AQ - \lambda BQ)Y = 0, \quad (2.21)$$

где  $Y = Q^{-1}x$ ,

$$Y^T = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{P_1}^{(1)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_{P_2}^{(2)}, \dots, y_0^{(N)}, y_1^{(N)}, \dots, y_{P_N}^{(N)}),$$

а  $Q$  — соответствующее невырожденное преобразование.

Подробно изложим переход от системы (2.19) к системе (2.21). Так как на матрицы  $A$  и  $B$  действует одно и то же преобразование  $Q$ , то опишем преобразование только для матрицы  $A$ , подразумевая, что аналогичные действия

производятся и с матрицей  $B$ . Первый столбец матрицы  $A$  прибавим к четным столбцам и вычтем от нечетных столбцов только для первого блока матрицы  $A$ . Тогда матрица  $A$  примет следующий вид:

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ x & x & x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & \dots & x \\ 1 & 2 & 0 & 2 & \dots & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x \\ 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & x & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 & -4 & 9 & \dots & x & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \\ & & & & & & 0 & 0 & 4 & -24 & \dots & x & 0 & 0 & 4 & 24 & \dots & x \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x & 0 & 0 & 0 & 24 & \dots & x \\ & & & & & & & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & & & x & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 4 & 9 & \dots & x \end{pmatrix}$$

Затем, аналогичным образом, относительно элемента  $a_{22}=1$ , обнуляем все элементы второй строки первого блока. Для этого второй столбец для первого блока умножим на 4 и прибавим к третьему столбцу, затем этот же столбец умножим на 9 и вычтем из четвертого столбца и т.д. Таким образом, во второй строке первого блока только элемент  $a_{22}=1$  будет отличным от нуля, а остальные элементы этой строки обнуляются. Тогда матрица  $AQ$  примет такой вид:





Отсюда можно видеть, что первые четыре компонента собственного вектора из каждого элемента сетки равны нулю, т.е.

$$y_0^{(1)} = 0, y_1^{(1)} = 0, y_2^{(1)} = 0, y_3^{(1)} = 0,$$

$$y_0^{(2)} = 0, y_1^{(2)} = 0, y_2^{(2)} = 0, y_3^{(2)} = 0,$$

.....

$$y_0^{(N)} = 0, y_1^{(N)} = 0, y_2^{(N)} = 0, y_3^{(N)} = 0.$$

Тогда из каждого блока матриц  $AQ$  и  $BQ$  можно исключить первые четыре строки и первые четыре столбца.

Из оставшихся уравнений получается алгебраическая система

$$(T - \lambda W)Y = 0, \quad (2.21)$$

$$Y = Q^{-1}\bar{x}, \quad \bar{x} = (a_4^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}, a_4^{(2)}, \dots, a_{p_2}^{(2)}, \dots, a_4^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}),$$

где  $W$  – в общем случае невырожденная квадратная матрица. Тогда порядок матриц  $T$  и  $W$  будет таким:  $(\bar{m} - 4N) * (\bar{m} - 4N)$ , где  $\bar{m}$  – общее количество полиномов в ССМ, т.е.  $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ .

Преобразование  $Q$  применяется для обнуления некоторых элементов уравнений, получающихся из краевых условий и условий непрерывности. Для наглядности эти условия записаны в матрицах  $A$  и  $B$ . Преобразование  $Q$ , соответствующее краевым условиям и условиям непрерывности, формируется отдельно от матриц  $A$  и  $B$ . Преобразование  $Q$  в основном ориентировано к приведению уравнений с соответствующими краевыми условиями и условиями непрерывности блочно – диагонального вида.

Умножая (2.21) слева на матрицу  $W^{-1}$ , получаем

$$(D - \lambda E)Y = 0, D = TW^{-1}. \quad (2.22)$$

Собственные значения системы (2.22) могут быть найдены стандартными методами [63-90]. В данной работе они определяются с помощью  $QR$ -алгоритма.

## 2.5. Обоснование эффективности спектрально-сеточного метода

После применения преобразования  $Q$  число строк и столбцов комплексных матриц  $A$  и  $B$  уменьшилось на  $4N$ , где  $N$  - число элементов. Отношение общего числа уравнений  $\bar{m}$  к числу оставшихся  $\bar{m} - 4N$  уравнений составляет

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 4N}. \quad (2.23)$$

Таким образом, в результате разбиения интервала интегрирования на элементы размерность каждой комплексных матриц (вещественная и мнимая часть)  $A$  и  $B$  в исходной алгебраической системе (2.19) уменьшается в  $q^2$  раз. Снижение размерности особенно заметно при небольшом числе полиномов на каждом из элементов. Действительно, количество полиномов на  $j$ -м элементе равно  $p_j + 1$  ( $j=1,2,\dots,N$ ). Тогда общее количество полиномов и соответственно алгебраических уравнений равно  $\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ . Заметим, что  $p_j$  не должно быть меньше, чем порядок старшей производной дифференциального уравнения, т.е.  $p_j \geq 4$ . При  $p_j = 4$ , например, для всех  $j$ ,  $\bar{m} = 5N$ ,  $q = 5$ . Это означает, что число уравнений в системе (2.19) уменьшается в 5 раз, а размерности каждой комплексных матриц  $A$  и  $B$  - в 25 раз. В табл. 2.1. иллюстрируется эффективность ССМ.

Таблица 2.1.

$\bar{m}$	Размерности матриц $T$ и $W$ в решаемой алгебраической системе		
	СМ	$N$	ССМ
5	1 x 1	1	1 x 1
10	6 x 6	2	2 x 2
15	11 x 11	3	3 x 3
20	16 x 16	4	4 x 4
40	36 x 36	8	8 x 8
100	96 x 96	20	20 x 20

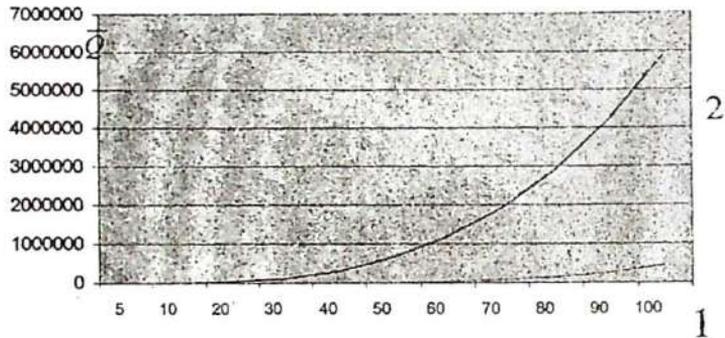
В табл. 2.1. через  $\bar{m}$  обозначено общее количество полиномов для аппроксимации решения в спектральном методе (СМ) и в ССМ.  $N$  показывает число элементов в ССМ. Видно, что с ростом  $\bar{m}$  эффективность ССМ становится сильно заметна.

Для решения задачи на собственные значения вида (2.22) с вещественной матрицей  $D$  реализация одного шага  $QR$  алгоритма требует около  $(10/3)n^3$  арифметических операций (см. [86, с. 255]). В случае комплексной матрицы  $D$  реализация одного шага  $QR$  алгоритма требует приблизительно  $\bar{Q} \approx (20/3)n^3$  арифметических операций, где  $n$  указывает порядок матрицы  $D$ . В табл. 2 показана, эффективность ССМ по числу арифметических операций  $\bar{Q}$  и сравнены СМ и ССМ.

Таблица 2.2.

$\bar{m}$	СМ	ССМ	
	$\bar{Q}$	$N$	$\bar{Q}$
5	6	1	6
10	1440	2	53
20	27306	4	426
30	117173	6	1440
40	311040	8	3413
50	648906	10	6666
60	1170773	12	27306
70	1916640	14	70986
80	2926507	16	146346
90	4240373	18	262026
100	5898240	20	426666

Эффективность ССМ, приведенного в табл. 2.2, наиболее наглядно иллюстрирована на рис. 2.1, где через  $\bar{Q}$  обозначено число арифметических операций.



Кривая 1 - ССМ, кривая 2 – СМ

Рис.2.1

$\bar{m}$

Как будет показано в следующем параграфе, при этом высокая точность ССМ сохраняется.

Теперь перейдем к применению ССМ к моделированию конкретных проблем устойчивости.

## 2.6. Анализ и интерпретация результатов вычислительных экспериментов по устойчивости однофазных потоков

2.6.1. *Моделирование симметричных течений (профиль Пуазейля).* Пусть основное течение  $U(y)$  в (0.1) является симметричной функцией, например, течением Пуазейля в плоском бесконечном канале (см. рис. 2.2), т.е.  $U(y) = 1 - y^2$ .

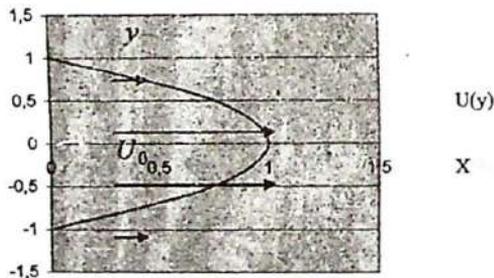


Рис. 2.2.

В этом случае характерной длиной  $l$  является полуширина канала, а характерной скоростью — средняя скорость  $U_0$  основного течения. Число Рейнольдса определяется по формуле  $Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$ , где  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — вязкость газа. Граничные условия (2.8) для возмущений в потоке Пуазейля имеют вид

$$\psi(\pm 1) = 0, \quad \frac{d\psi}{dy}(\pm 1) = 0. \quad (2.24)$$

Равенства (2.24) выражают обычные требования непроницаемости и прилипания.

Приближенное решение задачи (0.1), (2.24) ищем в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода:

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y). \quad (2.25)$$

Подставляем (2.25) и  $U(y)$  в уравнение (0.1) и требуем, чтобы левая часть уравнения (0.1) была ортогональной к первым  $(N-4)$ -м полиномам Чебышева. В этом случае имеем алгебраическую систему [31]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left[ p^3(p^2-4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2-4)^2 \right] a_p - \\ & - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left\{ \left[ 2k^2 + \frac{1}{4} ik \operatorname{Re}(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} c_n p [p^2 - (n+2)^2] - \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \right\} a_p + \\ & + \left\{ ik \operatorname{Re} n(n-1) + [k^4 + ik \operatorname{Re}(k^2 - 2)] \right\} c_n - \\ & - \frac{1}{4} ik^2 \operatorname{Re} c_n (c_n + c_{n-1}) \} a_n - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} [c_{n-2} a_{n-2} + c_n a_{n+2}] - \end{aligned}$$

$$-\lambda \left\{ ik \operatorname{Re} \left[ k^2 c_n a_n - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p \right] \right\} = 0$$

для  $n = 0, 1, 2, \dots, N-4$ ,

$$(2.26)$$

где  $c_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 2, & n = 0, \\ 1, & n > 0, \end{cases}$  и

$$d_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

Граничные условия (2.24) приобретают вид

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0, \quad (2.27)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0. \quad (2.28)$$

При получении уравнений (2.26) - (2.28) использовались формулы для полиномов Чебышева.

Рассмотрим следующий ряд по полиномам Чебышева [29-31, 46-62]:

$$g(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x).$$

Производные от функции  $g(x)$  определяются по формуле

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \sum_{n=0}^N d_n^{(2)} T_n(x), \quad \text{где } d_n^{(0)} = a_n.$$

Для полиномов Чебышева имеют место известные рекуррентные формулы [32, 57]:

$$\frac{c_n}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T'_{n-1}(x) = 2 T_n(x) \quad \text{при } n \geq 0,$$

где  $c_n = d_n = 0$ , если  $n < 0$ ;  $c_0 = 2$ ,  $d_0 = 1$ ,  $c_n = d_n = 1$ , если  $n > 0$ .

С учётом этого равенства ряд для  $d^q g / dx^q$  запишем в виде

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^N a_n^{(q-1)} T_n(x) = \frac{d^q g}{dx^q} = \sum_{n=0}^N a_n^{(q)} T_n(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^{(q)} \left[ \frac{c_n}{n+1} T_{n+1}(x) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T_{n-1}(x) \right].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах  $T_n(x)$  для  $n \geq 1$ , имеем

$$c_{n-1} a_{n-1}^{(q)} - a_{n+1}^{(q)} = 2n a_n^{(q-1)}, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N p a_p, \quad n \geq 0,$$

где  $a \equiv b \pmod{2}$  означает, что  $a-b$  делится на 2 без остатка. Из этих равенств получаем

$$c_n a_n^{(2)} = 2 \sum_{\substack{m=n+1 \\ m+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N m a_m^{(1)} = 4 \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \equiv 2 \pmod{2}}}^N p a_p \sum_{\substack{m=n+1 \\ m+n \equiv 1 \pmod{2}}}^{p-1} m$$

или

$$c_n a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \equiv 2 \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p, \quad n \geq 0.$$

Аналогичным путем имеем

$$c_n a_n^{(3)} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{p=n+3 \\ p+n \equiv 1 \pmod{2}}}^N p \left[ (p^2 - 1)^2 - 2(p^2 + 1)n^2 + n^4 \right] a_p,$$

$$c_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n \equiv 2 \pmod{2}}}^N p \left[ p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^4 + 3n^4 p^2 - n^2(n^2 - 4)^2 \right] a_p.$$

Для выражения  $2x g(x)$   $n$ -й коэффициент Чебышева равен  $c_{n-1} a_{n-1} + a_{n+1}$  для  $n \geq 0$ ,  $n$ -й коэффициент выражения  $4x^2 g(x)$  есть

$$c_{n-2} a_{n-2} + (c_n + c_{n-1}) a_n + a_{n+2} \quad \text{при} \quad n \geq 0.$$

При умножении двух рядов по полиномом Чебышева снова получается ряд по полиномам Чебышева, только с другими коэффициентами.

Действительно, пусть

$$g(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad w(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x).$$

Введем в рассмотрение другой полином

$\bar{T}_n(x) = \exp[in \arccos x]$  для  $|x| \leq 1$ ,  $-N \leq n \leq N$ .

Тогда

$$2T_n(x) = \bar{T}_n(x) + \bar{T}_{-n}(x),$$

$$\bar{T}_n(x)\bar{T}_m(x) = \bar{T}_{n+m}(x).$$

В новых обозначениях исходные ряды имеют вид

$$2g(x) = \sum_{n=-N}^N \bar{a}_n \bar{T}_n(x), \quad 2w(x) = \sum_{n=-N}^N \bar{b}_n \bar{T}_n(x),$$

где

$$\bar{a}_n = c_{|n|} a_{|n|}, \quad \bar{b}_n = c_{|n|} b_{|n|} \quad \text{для } -N \leq n \leq N.$$

Наконец, имеем

$$4g(x)w(x) = \sum_{n=-N}^N \bar{e}_n \bar{T}_n(x) = 2 \sum_{n=0}^N e_n T_n(x),$$

$$e_n = \frac{1}{c_n} \sum_{m=-N}^N \bar{a}_{n-m} \bar{b}_m, \quad \bar{e}_n = c_{|n|} e_{|n|}.$$

Таким образом,  $n$ -й коэффициент произведения  $g(x)w(x)$  есть  $\frac{1}{2}e_n$  для  $n \geq 0$ .

Уравнение (2.7) и граничные условия (2.24) обладают свойством инвариантности относительно замены  $y$  на  $-y$ , поэтому решение можно искать отдельно для четных и нечетных функций  $\psi$ . Согласно этому свойству, система (2.16) – (2.28) распадается на следующие две независимые подсистемы: (2.6), (2.27) с четными индексами  $n$  и (2.26), (2.28) с нечетными  $n$ . Рассмотрим для определенности случай четных  $n$  и обозначим  $N=2M$ . Тогда приходим к системе  $(M+1)$  уравнений с  $(M+1)$  неизвестными:

$$(A - \lambda B)x = 0,$$

где комплексные матрицы  $A$  и  $B$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & 4 & 16 \dots (2M)^2 \\ x & x & x \dots x \\ \cdot & \cdot & \dots \\ x & x & x \dots x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ x & x & x \dots x \\ \cdot & \cdot & \dots \\ x & x & x \dots x \end{pmatrix},$$

а вектор  $x^T = (a_0, a_1, \dots, a_{2M})$ . Используя для решения системы подход, описанный в предыдущих параграфах, получаем [32]

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0,$$

где матрицы  $AQ$  и  $BQ$  имеют вид

$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \dots & T & \cdot \\ x & x & x & \dots & x \end{pmatrix}, \quad BQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \dots & W & \cdot \\ x & x & x & \dots & x \end{pmatrix}.$$

Введя обозначения  $Q^{-1}x = Z$ , видим, что

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0,$$

$$(T - \lambda W)Y = 0, \quad Y = (Z_3, Z_4, \dots, Z_{M+1}).$$

Отсюда  $(D - \lambda E)Y = 0$ ,  $D = TW^{-1}$ .

В табл. 2.3. приведены данные, показывающие точность расчетов неустойчивой моды (гармоника с наибольшей величиной  $\lambda_r$ ) течения Пуазейля для различного числа базисных функций. Параметры  $Re$ ,  $k$  фиксированы:  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$ . Их величина выбрана в соответствии с результатами работ [32, 46, 55]. Вычисления величины  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ , соответствующей  $\max(\lambda_r)$ , приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3.

M+1	Данная работа	Работа [32]
15	0, 23690887 + 0,00365517i	0, 23690887 + 0,00365515i
17	0, 23743315 + 0,00372249i	0, 23743315 + 0,00372248i
20	0, 23752322 + 0,00375327i	0, 23752676 + 0,00373427i
23	0, 23752670 + 0,00373982i	0, 23752670 + 0,00373982i
26	0, 23752650 + 0,00373967i	0, 23752648 + 0,00373967i
32	0, 23752649 +	0, 23752649 +

	0,00373967i	0,00373967i
Точное значение	0,23752649 + 0,00373967i	
[32,55]		

Видно, что с ростом  $m$  точность растет и при  $m+1=32$ , все цифры в мантиссе совпадают с точным значением  $\lambda$ .

2.6.2. Моделирование несимметричных течений (профиль пограничного слоя). Пусть основное течение  $U(y)$  в (0.1) является несимметричной функцией, например, профилем скорости в пограничном слое. Рассмотрим пограничный слой на полубесконечной плоской пластине (рис. 2.3).

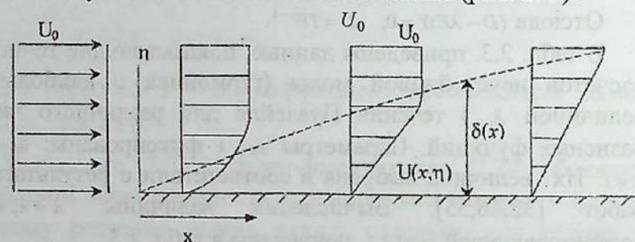


Рис. 2.3.

Обозначим скорость набегающего потока через  $U_0$ , направим ось  $x$  по пластине, ось  $\eta$  - перпендикулярно к ней, а начало координат поместим в переднюю кромку пластинки.

Для вязких течений имеет место прилипание к пластине, которое значительно изменяет картину линий тока вследствие трения прилегающего к пластине тонкого слоя смеси. В этом тонком слое скорость течения возрастает от нуля на пластине (прилипание) до своего полного значения во внешнем потоке, в котором смесь можно рассматривать текущей без трения. Указанный тонкий слой называют

пограничным слоем, или слоем трения [3]. Толщину пограничного слоя обозначим через  $\delta(x)$ . Она постепенно возрастает по мере удаления от передней кромки пластины.

Видно, что в этом случае профили скоростей зависят от двух координат,  $x$  и  $\eta$ , т.е.  $U(x, \eta)$ . Согласно [3], для  $U(x, \eta)$  и  $\eta$  можно подобрать соответствующие масштабы так, чтобы профили скоростей  $U(x, \eta)$  на различных расстояниях  $x$  от переднего края пластины становились аффинно-подобными. В качестве характерного масштаба для  $U(x, \eta)$  выберем скорость  $U_0$  набегающего потока, а в качестве характерного масштаба для  $\eta$  - толщину пограничного слоя  $\delta(x)$ . Тогда профили скоростей в пограничном слое будут аффинно-подобными между собой и будут характеризоваться только одной координатой  $\eta$ , т.е.  $U=U(\eta)$ . Тогда безразмерные параметры для уравнения (0.1) определяются по формулам

$$Re = U_0 \delta / \nu, \quad \delta = \sqrt{2\nu L / U_0}, \quad k\delta = (2\pi/l)\delta = GRe,$$

$$G_1 = 2\pi / R_1, \quad R_1 = lU_0 / \nu.$$

Здесь  $\nu$  - кинематическая вязкость,  $U_0$  - характерная скорость течения вне пограничного слоя,  $L$  - характерная длина вдоль пластины,  $\delta$  - толщина пограничного слоя,  $l$  - длина волны возмущений,  $k, G$  - волновое число,  $R_1$  - число Рейнольдса по длине волны,  $Re$  - число Рейнольдса.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (2.29)$$

$$\psi(\eta), \frac{d\psi}{d\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Первое из этих условий есть требование непроницаемости и прилипания, а второе условие означает, что вдали от стенки возмущения должны затухать.

Основное течение  $U(\eta)$  в пограничном слое определяется как первая производная от решения уравнения Фокнера-Скэна [91]:

$$\ddot{g} + g\dot{g} + \beta[1 - (g')^2] = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \infty, \quad (2.30)$$

с начальными условиями

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = g_0.$$

Различным значениям  $\beta$  соответствуют разные профили скорости  $U(\eta)$  и начальное значение  $g_0$ . Приведем таблицу из [91], показывающую зависимость между параметром  $\beta$  и начальным значением  $g_0$  (табл. 2.4).

Таблица 2.4.

$\beta$	$g_0$	$A(\beta)$
0,2	0,6869	0,984
0,0	0,4696	1,217
-0,19	0,086	2,007

Для нахождения скорости  $U(\eta) = g'$  уравнение (2.30) сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Обозначим

$$g = d_1, \quad d_1' = d_2, \quad d_2' = d_3. \quad (2.31)$$

Тогда

$$d_3' = -d_1 d_3 + \beta(d_2^2 - 1), \quad d_1(0) = 0, \quad d_2(0) = 0, \quad d_3(0) = g_0. \quad (2.32)$$

Для интегрирования этой системы использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Изложим алгоритм метода Рунге-Кутты для решения задачи Коши для систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, заданные в общем виде, а затем этот алгоритм применим относительно системы (2.31), (2.32). Пусть требуется решить следующую систему:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f_1(t, x, y, z), \\ y'(t) &= f_2(t, x, y, z), \quad 0 < t \leq \eta, \\ z'(t) &= f_3(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (2.33)$$

с заданными начальными условиями  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$ ,  $z(0)=z_0$ . Интервал интегрирования  $[0, \eta]$  разобьём на сетку, т.е.  $t_n=n \cdot h$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, M$ ,  $\eta=M \cdot h$ , где  $h=\eta/M$  - шаг сетки.

Алгоритм метода Рунге-Кутты для системы(2.33) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf_1(t_n, x_n, y_n, z_n), \\
 b_1 &= hf_2(t_n, x_n, y_n, z_n), \\
 g_1 &= hf_3(t_n, x_n, y_n, z_n), \\
 k_2 &= hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right), \\
 b_2 &= hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right), \\
 g_2 &= hf_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{b_1}{2}, z_n + \frac{g_1}{2}\right), \\
 k_3 &= hf_1\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right), \\
 b_3 &= hf_2\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right), \\
 g_3 &= hf_3\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{b_2}{2}, z_n + \frac{g_2}{2}\right), \\
 k_4 &= hf_1(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3), \\
 b_4 &= hf_2(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3), \\
 g_4 &= hf_3(t_n + h, x_n + k_3, y_n + b_3, z_n + g_3), \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4), \\
 z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $n=0, 1, \dots, M-1$ .

Систему (2.31), (2.32) запишем в виде (2.33):

$$\begin{cases} d_1' = d_2, \\ d_2' = d_3, \\ d_3' = -d_1 \cdot d_3 + \beta(d_2^2 - 1), \end{cases} \quad (2.35)$$

начальные условия имеют вид

$$d_1(0) = d_0^{(1)} = 0, \quad d_2(0) = d_0^{(2)} = 0, \quad d_3(0) = d_0^{(3)} = g_0.$$

Для проведения численных расчетов в интервале интегрирования  $[0, \infty]$  бесконечность заменяем большой, но конечной величиной  $\eta_l$ . Таким образом, имеем новый интервал интегрирования  $[0, \eta_l]$ .

Тогда алгоритм метода Рунге-Кутты (2.34) для системы (2.35) примет вид:

$$k_1 = h d_n^{(2)},$$

$$b_1 = h d_n^{(3)},$$

$$g_1 = h[-d_n^{(1)} \cdot d_n^{(3)} + \beta((d_n^{(2)})^2 - 1)],$$

$$k_2 = h(d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2}),$$

$$b_2 = h(d_n^{(3)} + \frac{g_1}{2}),$$

$$g_2 = h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_1}{2})(d_n^{(3)} + \frac{g_1}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_1}{2})^2 - 1)],$$

$$k_3 = h(d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2}),$$

$$b_3 = h(d_n^{(3)} + \frac{g_2}{2}),$$

$$g_3 = h[-(d_n^{(1)} + \frac{k_2}{2})(d_n^{(3)} + \frac{g_2}{2}) + \beta((d_n^{(2)} + \frac{b_2}{2})^2 - 1)],$$

$$k_4 = h(d_n^{(2)} + b_3),$$

$$b_4 = h(d_n^{(3)} + g_3),$$

$$g_4 = h[-(d_n^{(1)} + k_3)(d_n^{(3)} + g_3) + \beta((d_n^{(2)} + b_3)^2 - 1)],$$

$$\begin{aligned}
 d_{n+1}^{(1)} &= d_n^{(1)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 d_{n+1}^{(2)} &= d_n^{(2)} + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4), \\
 d_{n+1}^{(3)} &= d_n^{(3)} + \frac{1}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4), \quad n = 0, 1, \dots, M-1.
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

В результате решения системы (2.36) определяются значения профиля скорости основного течения  $U(\eta)$  в узлах сетки  $t_n = nh$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $Mh = t_n = \eta$ . Этими значениями будут:

$$U(0) = d_0^{(1)} = 0, \quad U(h) = d_1^{(1)} = 0, \quad U(2h) = d_2^{(1)}, \dots, \quad U(\eta_i) = d_n^{(1)}.$$

Видно, что значения профиля скорости основного потока получены с равномерным шагом. Для представления профиля скорости основного потока в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода эти значения профиля скорости интерполируются в узлы полиномов Чебышева первого рода, т.е. в следующих узлах  $y_i^{(j)} = \cos(\pi l / p_j)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, p_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$  определяются значения профиля скорости основного потока  $U_j(y_i^{(j)})$ . Затем профиль скорости основного потока представим в виде следующего ряда по полиномам Чебышева первого рода:

$$U_j(y_i^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_i^{(j)}),$$

$$y_i^{(j)} = \cos(\pi l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где  $T_n(y)$  — полиномы Чебышева первого рода,  $y_i^{(j)}$  — их узлы, а  $p_j$  — количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на  $j$ -м элементе сетки.

Коэффициенты разложения  $b_n^{(j)}$  для функции  $U_j(y_i^{(j)})$  определяются следующим обратным преобразованием:

$$b_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_j} \frac{1}{c_l} U_j(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n = 0, 1, \dots, p_j,$$

$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1 \quad \text{при} \quad m \neq 0, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В отличие от течения Пуазейля в задаче устойчивости пограничного слоя появляются некоторые сложности, а именно: задача (2.7), (2.29) не обладает теперь свойством симметрии, и данная задача не распадается на две независимые подсистемы – для четных и нечетных решений в отдельности. Тогда размерность задачи удваивается, и при численном решении становится трудно разместить большое количество алгебраических уравнений в памяти ЭВМ. Поэтому применение ССМ дает возможность, во-первых, распределить полиномы по элементам с учетом поведения градиента решения и, во-вторых, как уже было показано, привести к существенному уменьшению размерности возникающей алгебраической системы.

В этом методе при заданном числе элементов  $N$  для достижения требуемой точности расчетов необходимо правильно расположить узлы сетки и выбрать числа  $p_j$ . Эти вопросы тесно связаны, поскольку сближая узлы стыковки, можно уменьшать число полиномов на элементах и наоборот. Практически более удобно выбрать равномерную сетку, задавая разные  $p_j$  на каждом элементе. Тогда количество необходимых полиномов зависит от относительной величины градиентов решения на том или ином элементе. Градиенты решения часто можно оценить исходя из асимптотического анализа. В задаче об устойчивости пограничного слоя хорошо известно [1], что вблизи стенки – в так называемом критическом слое – поведение решения определяется быстрым изменением вязких решений:

$$\psi \sim e^{-(k \operatorname{Re})^{1/3} y}, \quad k \operatorname{Re} \gg 1.$$

Вдали от стенки возмущения медленно затухают по закону

$$\psi \sim e^{-ky}, \quad k \sim 1.$$

Видно, что относительная величина градиентов решения у стенки в  $\sqrt[3]{\operatorname{Re}}$  раз больше, чем вдали от нее. Поэтому число

узлов, а следовательно, и количество полиномов, должно быть больше вблизи стенки  $\sim$  в  $\sqrt[3]{\text{Re}}$  раз. Более точные значения  $p_j$  выбираются в процессе расчетов.

Используя материал, изложенный в параграфе 2.4, приведем окончательный вид алгебраической системы, полученный на основе (2.17):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24ik_j \text{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} \left[ p^3(p^2-4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2-4)^2 \right] a_p^{(j)} - \\ & - \frac{2k_j}{i \text{Re}_j} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2-n^2) a_p^{(j)} + \frac{k_j^3}{i \text{Re}_j} c_n a_p^{(j)} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=n+2}^{p_j} a_p^{(j)} \sum_{\substack{m \equiv p \pmod{2} \\ |m| < p-2 \\ |n-m| \leq p_j}} p(p^2-n^2) \bar{b}_{n-m}^{(j)} - k_j^2 \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \bar{b}_{n-m}^{(j)} - \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{(j)} \sum_{\substack{p=(n-p)+2 \\ m \equiv p \pmod{2}}} m[m^2(n-p)^2] \bar{b}_{n-m}^{(j)} \right\} - \lambda \left[ k_j^2 c_n a_p^{(j)} - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}} p(p^2-n^2) a_p^{(j)} \right] = 0, \\ & n = 0, 1, 2, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где  $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, p_j$ ) - соответственно коэффициенты Чебышева функций  $\psi, U$  и  $\bar{a}_n^{(j)} = c_{|n|} a_n^{(j)}, \bar{b}_n^{(j)} = c_{|n|} b_n^{(j)}$ , для  $-p_j \leq n \leq p_j, c_0 = 2, c_n = 1$  при  $n > 0$ .

Приведем результаты численных расчетов. Табл. 2.4-2.6 иллюстрируют точность расчетов первой наиболее неустойчивой моды при  $\beta = 0$  и различном числе элементов  $N = 1, 2, 4$ .

Параметры  $\text{Re}, k, \eta_l$  фиксированы:  $\text{Re} = 580; k = 0,179; \eta_l = 20$ . Их величина выбрана в соответствии с результатами работы [92]. Общее количество полиномов  $\bar{m} = 46$ .

В табл. 2.5. приведены результаты при  $N = 1$  ( $[0, \eta_l]$ ). Видно, что собственное значение при указанном  $\bar{m}$  найдено с абсолютной точностью  $10^{-3}$ .

Таблица 2.5.

N=1	$\lambda_r$	$\lambda_i$
Данная работа	0,364168	0,007869
Работа [92]	0,364551	0,007781
Точное значение [92]	0,364122	0,007959

Данные, приведенные в табл. 2.6. показывают, как меняется точность при различном выборе полиномов  $p_1$  и  $p_2$  на двух элементах  $[0,10]$ ,  $[10,\eta_i]$ , ( $N=2$ ). Через  $p_1$  обозначено число полиномов на элементе, примыкающем к стенке. При изменении  $p_1+1$  (23+33) и  $p_2+1$  (13+23) точность для некоторых  $p_1$  и  $p_2$  несколько ниже, чем в случае  $N=1$ , но с увеличением  $p_1$  уже при  $p_1+1=31$ ,  $p_2+1=15$  точность вновь достигает величины  $10^{-3}$ .

Таблица 2.6.

$p_1+1$	$p_2+1$	$\lambda_r$	$\lambda_i$
23	23	0,371648	0,014456
25	21	0,364155	0,012028
27	19	0,362596	0,008805
29	17	0,363771	0,007890
31	15	0,364558	0,007963
33	13	0,365354	0,008758

Сходный эффект наблюдается и при другом числе элементов, например, при  $N=4$  (табл. 2.7). Длины элементов равны  $[0,5],[5,10],[10,15],[15,\eta_i]$ . Оптимальное распределение полиномов на элементах соответствует третьей серии расчетов, приведенных в табл. 2.7. Но и при других значениях параметров  $p_j$  ( $j=1,2,3,4$ ), приведенных в таблице, заданная точность расчетов  $10^{-3}$  снижается незначительно.

Таблица 2.7.

$p_1+1$	$p_2+1$	$p_3+1$	$p_4+1$	$\lambda_r$	$\lambda_l$
21	13	7	5	0,364991	0,007090
21	15	5	5	0,363983	0,007798
23	13	5	5	0,364221	0,007879
25	11	5	5	0,364227	0,007853
27	9	5	5	0,363855	0,007625

Таким образом, расчеты показывают, что высокая точность метода устойчиво сохраняется при разбиении области интегрирования на элементы. В то же время размерность каждой из комплексных матриц  $A, B$  в алгебраической системе (2.19) для  $n=4$  (в случае четырех элементов) уменьшается более чем в два раза ( $q^2 = 2,25$ ).

---

---

## **ГЛАВА III. ОБОБЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО – СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Изложение результатов данной главы содержится в работах [159-164, 168-177, 179, 181, 182, 184, 186-188, 190, 191, 195, 197]. В этой главе спектрально–сеточный метод, изложенный в главах I и II, обобщается для исследования и анализа математических моделей сложных многофазных систем. В параграфе 3.1. на основе закона подобия Рейнольдса математические модели для двухфазных потоков приведены к безразмерному виду. В параграфе 3.2. проводятся исследование и анализ адекватности математических моделей для многофазных потоков. В параграфе 3.3. выводится система уравнений устойчивости для двухфазных нестационарных потоков. В параграфе 3.4. приведены алгоритм ССМ и его обоснование при численном моделировании уравнений устойчивости. Построение алгебраических преобразований для матричных уравнений устойчивости и иллюстрация эффективности изложены в параграфе 3.5. Анализ и интерпретация результатов расчетов по моделированию устойчивости двухфазных потоков приведены в параграфе 3.6.

### **3.1. Закон подобия Рейнольдса и приведение математических моделей для двухфазных потоков к безразмерному виду**

Обычно рассмотрение физической задачи ведется с помощью величин, имеющих размерность, а формулировка

математической задачи дается в безразмерной форме. Это позволяет точно выявить существенные безразмерные параметры. Согласно закону подобия Рейнольдса, изложенному в параграфе 2.1., математические модели для двухфазных потоков не должны зависеть от выбора единиц для входящих в него физических величин: скоростей, давления, масштаба и других. Они должны характеризоваться некоторыми другими безразмерными параметрами, например, числом Рейнольдса, временем релаксации частиц и другими безразмерными параметрами. Согласно этим соображениям, математические модели для двухфазных потоков приведем к безразмерному виду.

Исследование динамики гетерогенных (многофазных) смесей или, в частности, газозвесей (смесей газов с твердыми частицами) – одно из важных направлений при математическом моделировании сложных гидродинамических систем. Частицы в этом случае называют дисперсными частицами или дисперсной фазой, а окружающую несущую фазу (газ) – дисперсионной фазой [109-113]. К настоящему времени имеется значительное число работ, посвященных проблемам построения моделей гидромеханики многофазных сред [109-145].

При построении подобных моделей уравнения движения выводятся обычно при следующих допущениях [132-140]:

1) частицы сферические, и при взаимодействии газа с частицей учитываются силы Стокса и Архимеда;

2) объемная концентрация частиц  $\alpha \ll 1$  мала, так что взаимодействием между отдельными частицами можно пренебречь;

3) не учитывается эйнштейновская поправка к вязкости пропорциональной объемной концентрации частиц.

Наиболее полные уравнения предложены в работах Рахматуллина [109], Нигматуллина [110-113] и Дру [133-136]. Исходная система уравнений [109-113], если

пренебречь в ней фазовыми переходами и эффектами сжимаемости, но учесть вязкие члены [133-136], имеет вид:

уравнения движения для газа

$$(1-\alpha)\rho_1\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v}\right) = -(1-\alpha)\bar{\nabla}p + 6\pi a\mu(\bar{u} - \bar{v}) + \frac{4}{3}\pi a^3\rho_1\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mu\bar{\nabla}^2\bar{v}, \quad (3.1)$$

уравнение неразрывности для газа

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \bar{\nabla}(1-\alpha)\bar{v} = 0; \quad (3.2)$$

уравнения движения для частиц

$$\alpha\rho_2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}\bar{\nabla})\bar{u}\right) = -\alpha\bar{\nabla}p + 6\pi a\mu(\bar{v} - \bar{u}) - \frac{4}{3}\pi a^3\rho_1\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}; \quad (3.3)$$

уравнение неразрывности для частиц

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{\nabla}\alpha\bar{u} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $6\pi a\mu(\bar{u} - \bar{v})$  - сила Стокса,  $\frac{4}{3}\pi a^3\rho_1\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$  - сила

Архимеда,  $\bar{v}, \bar{u}$  - векторы скорости для газа и частиц соответственно,  $\bar{p}$  - давление,  $\alpha$  - объемная концентрация частиц,  $\rho_1$  - плотность газа,  $\rho_2$  - плотность материала частиц,  $a$  - радиус частиц,  $\mu$  - вязкость,  $n = \frac{3\alpha}{4\pi a^3}$  - число частиц в единичном объеме,  $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}i + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}j$ ,  $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}$  - оператор Лапласа,  $i$  и  $j$  - единичные векторы по направлениям  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $\bar{t}$  - время.

Система уравнений (3.1)-(3.4) содержит шесть уравнений для определения шести неизвестных  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{p}, \alpha$ .

Подставляя значения  $n = \frac{3\alpha}{4\pi a^3}$  в уравнения (3.1) и (3.3),

имеем

$$(1-\alpha)\rho_1\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\bar{\nabla})\bar{v}\right) = -(1-\alpha)\bar{\nabla}p + \frac{9}{2}\alpha\frac{\mu}{a^2}(\bar{u} - \bar{v}) + \alpha\rho_1\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mu\bar{\nabla}^2\bar{v}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \bar{\nabla}(1-\alpha)\bar{v} = 0; \quad (3.6)$$

$$\alpha \rho_2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} \right) = -\alpha \nabla p + \frac{9}{2} \alpha \frac{\mu}{a^2} (\bar{v} - \bar{u}) - \alpha \rho_1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha \bar{u} = 0. \quad (3.8)$$

Чтобы записать систему уравнений (3.5)-(3.8) в безразмерной форме, вводим следующие безразмерные параметры:

$$v = \frac{\bar{v}}{V}, \quad u = \frac{\bar{u}}{V} \quad - \text{ скорости,}$$

$$x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L} \quad - \text{ длины,}$$

$$\rho = \frac{2 \bar{\rho}}{\rho v^2} \quad - \text{ давление,}$$

$$t = \bar{t} w_1 \quad - \text{ время,}$$

где  $w_1 = \frac{V}{L}$ ,  $V$  - характерная скорость основного течения,  $L$  - характерная длина.

Используя эти обозначения, систему уравнений (3.5)-(3.8) запишем в виде

$$(1-\alpha) \rho_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \frac{L}{V} t} + v \frac{V^2}{L} \nabla v \right) = -(1-\alpha) \nabla \frac{\rho_1 V^2}{2L} p + \quad (3.9)$$

$$+ \frac{9}{2} \alpha \frac{\mu}{a^2} V(u-v) + \alpha \rho_1 \frac{\partial v}{\partial \frac{L}{V} t} + \mu \nabla^2 v \frac{V}{L^2};$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial \frac{L}{V} t} + \nabla(1-\alpha) v \frac{V}{L} = 0; \quad (3.10)$$

$$\alpha \rho_2 \left( \frac{\partial u}{\partial \frac{L}{V} t} + u \frac{V^2}{L} \nabla u \right) = -\alpha \nabla \frac{\rho_1 V^2}{2L} p + \frac{9}{2} \alpha \frac{\mu}{a^2} V(v-u) - \alpha \rho_1 \frac{\partial v}{\partial \frac{L}{V} t}; \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \frac{L}{V} t} + \nabla \frac{V}{L} \alpha u = 0. \quad (3.12)$$

Систему уравнений (3.9)-(3.12) после несложных выкладок приведем к виду

$$(1-\alpha)\rho_1\left(\frac{V^2}{L}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(v\nabla)v\right)\right)=-\frac{\rho_1 V^2}{2L}\nabla p+ \\ +\frac{9}{2}\alpha\frac{\mu}{a^2}V(u-v)+\frac{V^2}{L}\alpha\rho_1\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{V}{L^2}\mu\nabla^2 v. \quad (3.13)$$

$$\frac{V}{L}\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}+\nabla(1-\alpha)v\frac{V}{L}=0; \quad (3.14)$$

$$\alpha\rho_2\frac{V^2}{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u\right)=-\alpha\frac{\rho_1 V^2}{2L}\nabla p+\frac{9}{2}\alpha\frac{\mu}{a^2}V(v-u)-\frac{V^2}{L}\alpha\rho_1\frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3.15)$$

$$\frac{V}{L}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\nabla\alpha u=0. \quad (3.16)$$

Теперь уравнения (3.13), (3.15) умножим на  $\frac{L}{\rho_1 V^2}$ , а уравнения (3.14), (3.16) - на  $\frac{L}{V}$  и после введения следующих обозначений:

$$\tau=SRe, \quad Re=\frac{\rho_1 VL}{\mu}, \quad S=\frac{2}{9}\left(\frac{a}{L}\right)^2 S_1, \quad S_1=\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

получим искомые математические модели для двухфазных потоков в безразмерном виде

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(v\nabla)v\right)=-\frac{1}{\tau}\nabla p+\alpha\frac{S_1}{\tau}(u-v)+\alpha\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{Re}\nabla^2 v \quad (3.17)$$

- уравнения движения для газа;

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}+\nabla(1-\alpha)v=0 \quad (3.18)$$

- уравнение неразрывности для газа;

$$\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u\right)=-\frac{\alpha}{S_1}\nabla p+\frac{\alpha}{\tau}(v-u)-\frac{\alpha}{S_1}\frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.19)$$

- уравнения движения для частиц;

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\nabla\alpha u=0 \quad (3.20)$$

- уравнение неразрывности для частиц.

Таким образом, исходные размерные уравнения (3.1)-(3.4) записаны в безразмерном виде (3.17)-(3.20). Для системы уравнений (3.17)-(3.20) будет справедлив закон

подобия Рейнольдса. В дальнейшем систему (3.17)-(3.20) будем называть моделью Рахматуллина – Нигматуллина – Дру.

### 3.2. Исследование и анализ адекватности математических моделей для многофазных потоков

Наиболее полные уравнения многофазных потоков предложены в работах Рахматуллина-Нигматуллина [110-113], Дру [133-130], Дру [133-136] и Сэфмена [132]. В безразмерных уравнениях для многофазных потоков (3.17)-(3.20) опущены члены, связанные с ускорением свободного падения, поскольку, согласно [132], для достаточно мелких частиц скорость их осаждения пренебрежимо мала по сравнению с характерной скоростью основного потока. В математических моделях многофазных потоков, предложенных в работах Рахматуллина-Нигматуллина, в уравнении (3.17) не учитываются вязкие члены  $\frac{1}{Re} \nabla^2 v$ , так как в этих работах моделируется движение невязкого газа, но учитываются нестационарные эффекты силового взаимодействия фаз, таких как силы Стокса, Архимеда, Бассэ-Бусинеска и присоединенных масс, а также были учтены фазовые переходы и эффекты сжимаемости. В модели Дру в уравнениях движения для дисперсных фаз (3.17) и (3.19) были учтены только сила Стокса, а сила Архимеда не была учтена. Наряду с моделью Рахматуллина-Нигматуллина и Дру существовала другая упрощенная система уравнений Сафмэна [132]. Отличительной особенностью модели Сафмэна является то, что в уравнении для дисперсной фазы (3.19) отброшен член с градиентом давления (так называемые силы плавучести). Как будет показано ниже, это отличие приводит к качественно другим результатам. В модели Сафмэна также была учтена только сила Стокса.

Проблема устойчивости и перехода потока вязкого газа, содержащего взвешенные частицы примеси, актуальна, прежде всего, с точки зрения приложений. Потoki со взвешенными частицами часто встречаются в задачах аэрогидродинамики [109-126, 128-146], фильтрации [127, 148] и химической технологии [130]. Теоретический интерес к изучению устойчивости таких потоков был в значительной мере стимулирован экспериментами [131], где обнаружено, что добавление небольшого количества частиц в поток ведет к затуханию турбулентных пульсаций, ламинаризирует течение.

Постановка проблемы об устойчивости двухфазных течений впервые была сделана в работе [124]. Несколько позже Сафмэн [132] исследовал устойчивость течения Пуазейля в плоском канале, запыленном твердыми сферическими частицами. Он провел анализ уравнений устойчивости в предельном случае больших и малых значений некоторого безразмерного параметра  $\tau$  - так называемого времени релаксации частиц. Сафмэн пришел к выводу, что мелкие частицы ( $\tau \gg 1$ ) дестабилизируют поток, а добавление более крупных частиц ( $\tau \ll 1$ ) ведет к его стабилизации.

Последующие подробные расчеты кривых нейтральной устойчивости, проведенные на основе этой модели в [140] асимптотическими методами Линя [1], неожиданно не подтвердили выводы работы [132]. Критическое число Рейнольдса вместо того, чтобы возрастать с увеличением  $\tau$ , наоборот, убывало, а сами нейтральные кривые принимали весьма сложный вид. В результате в [140] было высказано предположение, что такое поведение кривых обусловлено ненадежностью использованных асимптотик при больших  $\tau$ .

Впоследствии на основе более полных уравнений (3.17)-(3.20) только с учетом силы Стокса (сила Архимеда не была учтена) была исследована устойчивость двухфазного

течения в слое Стокса [133] и плоского течения Куэтта [134]. Причем в [133] указывалось на несовершенство модели Сафмэна [132]. Показано, что при решении задачи устойчивости учет силы плавучести становится существенным при больших  $\tau$ . В этом случае обнаружено, что в зависимости от времени релаксации частиц течение может дестабилизироваться или стабилизироваться.

Вопросы устойчивости двухфазных потоков рассматривались также в работах [124-129, 141-144, 149-156].

Наконец отметим, что во всех рассмотренных выше работах устойчивость двухфазных потоков исследована с помощью асимптотического метода Линя [1]. Согласно работе [124], решение проблемы устойчивости двухфазного потока асимптотическими методами довольно сложно в связи с наличием большого числа параметров и громоздкостью асимптотических решений.

Таким образом, исследование гидродинамической устойчивости двухфазного течения Пуазейля и пограничного слоя, с учетом силы Стокса, а также с одновременным учетом сил Стокса и Архимеда на основе уравнений (3.17)-(3.20) в широком диапазоне изменений безразмерных параметров представляет несомненный интерес. Автору не известны какие-либо работы по решению этих проблем.

### 3.3. Вывод уравнений устойчивости для двухфазных нестационарных потоков

В этом параграфе выводятся уравнения гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков с учетом нестационарных эффектов силового взаимодействия фаз, таких как силы Стокса и Архимеда.

В уравнениях (3.17)-(3.20) векторы скорости газа  $v$  и частиц  $u$  записываем покомпонентно, т.е.  $v = (v_1, v_2)$ ;  $u = (u_1, u_2)$ . Тогда система (3.17)-(3.20) примет следующий вид:

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \nabla)v_1\right) = -(1-\alpha)\nabla p + \alpha \frac{S_1}{\tau}(u_1 - v_1) + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_1, \quad (3.21)$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + (v_2 \nabla)v_2\right) = -(1-\alpha)\nabla p + \alpha \frac{S_1}{\tau}(u_2 - v_2) + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v_2, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \nabla(1-\alpha)v = 0, \quad (3.23)$$

$$\alpha\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1 \nabla)u_1\right) = -\frac{\alpha}{S_1} \nabla p + \frac{\alpha}{\tau}(v_1 - u_1) - \frac{\alpha}{S_1} \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad (3.24)$$

$$\alpha\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2 \nabla)u_2\right) = -\frac{\alpha}{S_1} \nabla p + \frac{\alpha}{\tau}(v_2 - u_2) - \frac{\alpha}{S_1} \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha u = 0. \quad (3.26)$$

В левых частях уравнений (3.21), (2.22), (3.24), (3.25) присутствуют слагаемые, связанные с оператором  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right)$ . Их записываем, используя свойства ортогональности векторов  $i$  и  $j$ :

$$(v_1 \nabla)v_1 = \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

$$(v_2 \nabla)v_2 = \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}\right),$$

$$(u_1 \nabla)u_1 = \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right),$$

$$(u_2 \nabla)u_2 = \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\right).$$

Тогда система уравнений (3.21)-(3.26) принимает вид

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = -(1-\alpha)\nabla p + \alpha \frac{S_1}{\tau}(u_1 - v_1) + \alpha \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right), \quad (3.27)$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = -(1-\alpha)\nabla p + \alpha \frac{S_1}{\tau}(u_2 - v_2) + \alpha \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t} + \nabla(1-\alpha)v = 0, \quad (3.29)$$

$$\alpha\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{\alpha}{S_1} \nabla p + \frac{\alpha}{\tau}(v_1 - u_1) - \frac{\alpha}{S_1} \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad (3.30)$$

$$\alpha \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\alpha}{S_1} \nabla p + \frac{\alpha}{\tau} (v_2 - u_2) - \frac{\alpha}{S_1} \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha u = 0. \quad (3.32)$$

Обозначим составляющие скорости основного течения, которое будем рассматривать как стационарное, через  $U$  и  $V$ , давление - через  $P$ , а объемную концентрацию частиц - через  $\alpha_0$ . Основное течение представляет собой решение уравнений Навье-Стокса или уравнений пограничного слоя для двухфазного потока. Составляющие скорости и давление для переменного во времени возмущающего движения обозначим через  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$  и объемную концентрацию через  $\tilde{\alpha}$ . Для исследования устойчивости решение системы (3.27)-(3.32) представим, как обычно, в виде суперпозиции основного ламинарного течения  $U(y), V(y)$  с постоянной объемной концентрацией  $\alpha_0$  и малого возмущения [126, 132-142]:

$$\begin{aligned} v &= V(y)i + \tilde{v}(x, y, t), & u &= U(y)i + \tilde{u}(x, y, t), \\ p &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), & \alpha(x, y, t) &= \alpha_0 + \tilde{\alpha}(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где  $i$  - единичный вектор по направлению  $x$ . При этом в большей части случаев предполагается, что скорости и давление возмущающего течения малы по сравнению со скоростями и давлением основного течения.

Уравнения (3.27)-(3.32) записываем относительно малых возмущений (3.33):

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha_0 - \tilde{\alpha}) \left( \frac{\partial V(y)i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + (V(y)i + \tilde{v}_1) \left( \frac{\partial V(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \right) + (V(y)i + \tilde{v}_2) \left( \frac{\partial V(y)i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} \right) \right) = \\ &= (1 - \alpha_0 - \tilde{\alpha}) \nabla (P - \tilde{p}) + \frac{S_1}{\tau} (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) + (U(y)i + \tilde{u}_1 - (V(y)i + \tilde{v}_1)) + \\ &+ (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \left( \frac{\partial V(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V(y)i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(y)i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\alpha_0-\tilde{\alpha})\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + (V(y)i + \tilde{v}_1)\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x}\right) + (V(y)i + \tilde{v}_2)\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y}\right)\right) = \\
 & = (1-\alpha_0-\tilde{\alpha})\nabla(P-\tilde{p}) + \frac{S_1}{\tau}(\alpha_0 + \tilde{\alpha}) + (U(y)i + \tilde{u}_2 - (V(y)i + \tilde{v}_2)) + \\
 & + (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t}\right) + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2 V(y)i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(y)i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2}{\partial y^2}\right) \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

- уравнения движения для газа;

$$\frac{\partial(1-\alpha_0-\tilde{\alpha})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j\right)(1-\alpha_0-\tilde{\alpha})(V(y)i + \tilde{v}) = 0 \quad (3.36)$$

- уравнение неразрывности для газа;

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + (U(y)i + \tilde{u}_1)\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\right) + (U(y)i + \tilde{u}_2)\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y}\right)\right) = \\
 & = -(\alpha_0 - \tilde{\alpha})\frac{1}{S_1}\nabla(P + \tilde{p}) + (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\frac{1}{\tau}(V(y)i - \tilde{v}_1 - (U(y)i + \tilde{u}_1)) - \\
 & - (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\frac{1}{S_1}\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t}\right), \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} + (U(y)i + \tilde{u}_1)\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x}\right) + (U(y)i + \tilde{u}_2)\left(\frac{\partial U(y)i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\right)\right) = \\
 & = -(\alpha_0 + \tilde{\alpha})\frac{1}{S_1}\nabla(P + \tilde{p}) + (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\frac{1}{\tau}(V(y)i - \tilde{v}_2 - (U(y)i + \tilde{u}_2)) - \\
 & - (\alpha_0 + \tilde{\alpha})\frac{1}{S_1}\left(\frac{\partial V(y)i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t}\right) \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

- уравнения движения для частиц;

$$\frac{\partial(\alpha_0 + \tilde{\alpha})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j\right)(\alpha_0 + \tilde{\alpha})(U(y)i + \tilde{u}) = 0 \quad (3.39)$$

- уравнение неразрывности для частиц.

В уравнениях (3.34)-(3.39) частные производные

$\frac{\partial V(y)i}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial V(y)i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 V(y)i}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial U(y)i}{\partial t}$  и  $\frac{\partial U(y)i}{\partial x}$  обращаются в нуль, так как функции  $V(y)i$ ,  $U(y)i$  не зависят от переменной  $t$  и  $x$ .

Система уравнения (3.34)-(3.39) после раскрытия скобок имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& (1-\alpha_0) \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + V(y) \frac{\partial V(y)}{\partial y} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V(y)}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} \right) - \\
& - \alpha' \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + V(y) \frac{\partial V(y)}{\partial y} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V(y)}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} \right) = \\
& = ((1-\alpha_0)) \nabla P + (1-\alpha_0) \nabla \tilde{p} - \tilde{\alpha} \nabla P - \tilde{\alpha} \nabla \tilde{p} + \alpha_0 \frac{S_1}{\tau} (U(y) + \tilde{u}_1 - V(y) - \tilde{v}_1) + \\
& + \tilde{\alpha} \frac{S_1}{\tau} (U(y) + \tilde{u}_1 - V(y) - \tilde{v}_1) + \alpha_0 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + \tilde{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + V^2 \tilde{v}_1 \right),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& (1-\alpha_0) \left( \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + V(y) \frac{\partial V(y)}{\partial y} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V(y)}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right) - \\
& - \tilde{\alpha} \left( \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + V(y) \frac{\partial V(y)}{\partial y} + V(y) \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V(y)}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right) = \\
& = ((1-\alpha_0)) \nabla P + (1-\alpha_0) \nabla \tilde{p} - \tilde{\alpha} \nabla P - \tilde{\alpha} \nabla \tilde{p} + \alpha_0 \frac{S_1}{\tau} (U(y) + \tilde{u}_2 - V(y) - \tilde{v}_2) + \\
& + \tilde{\alpha} \frac{S_1}{\tau} (U(y) + \tilde{u}_2 - V(y) - \tilde{v}_2) + \alpha_0 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + \tilde{\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + V^2 \tilde{v}_2 \right),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial(1-\alpha_0)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \right) [(1-\alpha_0)V(y)i + (1-\alpha_0)\tilde{v} - \alpha V(y) - \tilde{\alpha} \tilde{v}] = 0 \tag{3.42}$$

- уравнения для дисперсионной фазы;

$$\begin{aligned}
& (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + U(y) \frac{\partial U(y)}{\partial y} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} + \tilde{u}_2 \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} \right) = \\
& = -(\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{S_1} \nabla(P + \tilde{p}) + (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{\tau} (V(y)i - \tilde{v}_1 - U(y)i + \tilde{u}_1) - (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + U(y) \frac{\partial U(y)}{\partial y} + U(y) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} + \tilde{u}_2 \frac{\partial U(y)}{\partial y} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \right) = \\
& = -(\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{S_1} \nabla(P + \tilde{p}) + (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{\tau} (V(y)i - \tilde{v}_2 - U(y)i + \tilde{u}_2) - (\alpha_0 + \tilde{\alpha}) \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \alpha_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} i U(y)i + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j U(y)i + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial y} j \right) +$$

$$+ \tilde{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x} i U(y)i + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j U(y)i + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial y} j \right) = 0$$

- уравнения для дисперсионной фазы.

Наложённое возмущающее движение будем предполагать "малым" в том смысле, что всеми квадратичными членами можно пренебречь по сравнению с линейными членами [132, 133, 136, 140]. В уравнениях (3.40)-(3.45),

оставляя только члены первого порядка малости по возмущениям и пренебрегая квадратичными членами относительно возмущений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V}{\partial y} i = -\nabla \tilde{p} + \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \alpha_0} \nabla P + \\ + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{S_1}{\tau} (\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1) + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{1 - \alpha_0} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \tilde{v}_1, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} + \tilde{v}_2 \frac{\partial V}{\partial y} i = -\nabla \tilde{p} + \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \alpha_0} \nabla P + \\ + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{S_1}{\tau} (\tilde{u}_2 - \tilde{v}_2) + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} + \frac{1}{1 - \alpha_0} \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \tilde{v}_2, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$-\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + (1 - \alpha_0) \nabla \tilde{v} + V \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial U}{\partial y} i = -\frac{1}{S_1} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{\tau} (\tilde{v}_1 - \tilde{u}_1) - \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t}, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial U}{\partial y} i = -\frac{1}{S_1} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{\tau} (\tilde{v}_2 - \tilde{u}_2) - \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t}, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \alpha_0 \nabla \tilde{u} + U \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} = 0. \quad (3.51)$$

Для плоскопараллельных течений возмущения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  имеют определенные граничные условия на пластинках. Возникает вопрос, какими должны быть граничные условия в бесконечности? Точное исследование этого вопроса представляет некоторые трудности [1]. Говоря физически, никакой эксперимент не может быть выполнен с аппаратом бесконечных размеров. Математически можно обойти эту трудность, ограничиваясь исследованием возмущений, периодических относительно пространственных координат, в направлении которых жидкость распространяется до бесконечности. Поскольку переменные  $x$ ,  $t$  — циклические и коэффициенты в (3.46)–(3.51) зависят только от  $y$ , то система допускает решения, являющиеся показательными функциями относительно  $x$  и  $t$ . Если решение должно быть ограниченным при  $x$  стремящихся как к  $+\infty$ , так и к  $-\infty$ , то соответствующие показатели должны быть чисто мнимыми. Таким образом,

каждую из составляющих возмущения можно представить в виде [1, 132, 133, 134, 138, 140]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_0 \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{p}_0 \\ \tilde{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_0(y) \\ \tilde{u}_0(y) \\ \tilde{p}_0(y) \\ \tilde{\alpha}_0(y) \end{bmatrix} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.52)$$

Величина  $\omega$  – комплексная и представляется в виде  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , где  $\omega_r$  – круговая частота отдельного колебания, а  $\omega_i$  – коэффициент нарастания, т.е. величина, позволяющая судить о нарастании или затухании колебаний.

В формуле (3.52)  $\tilde{v}_0(y) = (\tilde{v}_{10}, \tilde{v}_{20})$ ,  $\tilde{u}_0(y) = (\tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{20})$ .

Подставляя (3.52) в систему уравнений (3.46) – (3.51), имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial x} + \tilde{v}_{20} \frac{\partial V}{\partial y} i \right) e^{i(kx - \omega t)} &= \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial P}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} + \\ &+ \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{S_1}{\tau} (\tilde{u}_{10} - \tilde{v}_{10}) e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{v}_{10} e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial t} + V \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial x} + \tilde{v}_{10} \frac{\partial V}{\partial y} i \right) e^{i(kx - \omega t)} &= \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial y} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial P}{\partial y} e^{i(kx - \omega t)} + \\ &+ \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{S_1}{\tau} (\tilde{u}_{20} - \tilde{v}_{20}) e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)} + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{v}_{20} e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\alpha}_0 e^{i(kx - \omega t)} + (1 - \alpha_0) \left( \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial y} \right) e^{i(kx - \omega t)} + V \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} = 0, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial x} + \tilde{u}_{20} \frac{\partial U}{\partial y} i \right) e^{i(kx - \omega t)} &= -\frac{1}{S_1} \frac{\partial p_0}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} + \\ &+ \frac{1}{\tau} (\tilde{v}_{10} - \tilde{u}_{10}) e^{i(kx - \omega t)} - \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial x} + \tilde{u}_{10} \frac{\partial U}{\partial y} i \right) e^{i(kx - \omega t)} &= -\frac{1}{S_1} \frac{\partial p_0}{\partial y} e^{i(kx - \omega t)} + \\ &+ \frac{1}{\tau} (\tilde{v}_{20} - \tilde{u}_{20}) e^{i(kx - \omega t)} - \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\alpha}_0 e^{i(kx - \omega t)} + \alpha_0 \left( \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial y} \right) e^{i(kx - \omega t)} + U \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} = 0. \quad (3.58)$$

Для исключения давления из системы уравнений (3.53)-(3.58) поступим следующим образом. Уравнения

(3.53), (3.56) дифференцируем по переменной  $y$ , а уравнения (3.54), (3.57) - по переменной  $x$ . Затем почленно вычтем из уравнения (3.53) уравнение (3.54), а из уравнения (3.56) - уравнения (3.57) и получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) + ikV \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) - ik\tilde{v}_{10} \frac{\partial V}{\partial y} - \tilde{v}_{20} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} = \\
 & = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} \frac{S_1}{\tau} \left[ \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) - \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) + \\
 & + \frac{1}{1-\alpha_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right), \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

$$-i\omega \tilde{\alpha}_0 + (1-\alpha_0) \left( ik\tilde{v}_{10} + \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial y} \right) + Vik\tilde{\alpha}_0 = 0, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) + ikU \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) - ik\tilde{u}_{10} \frac{\partial U}{\partial y} - \tilde{u}_{20} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \\
 & = \frac{1}{\tau} \left[ \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) - \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) \right] - \frac{1}{S_1} i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right), \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

$$-i\omega \tilde{\alpha}_0 + \alpha_0 \left( ik\tilde{u}_{10} + \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial y} \right) + Uik\tilde{\alpha}_0 = 0. \quad (3.62)$$

С целью дальнейшего упрощения системы уравнений (3.59)-(3.62) сделаем, как и в [133], дополнительное допущение, что объемная концентрация частиц постоянная и возмущение для объемной концентрации отсутствует, т.е.  $\alpha_0 = \text{const}$ ,  $\tilde{\alpha}_0 \equiv 0$ . Тогда система уравнений (3.59)-(3.62) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) + ikV \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) - ik\tilde{v}_{10} \frac{\partial V}{\partial y} - \tilde{v}_{20} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} = \\
 & = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} \frac{S_1}{\tau} \left[ \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) - \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) + \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1-\alpha_0} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right), \\
 & ik\tilde{v}_{10} + \frac{\partial \tilde{v}_{20}}{\partial y} = 0, \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) + ikU \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) - ik\tilde{u}_{10} \frac{\partial U}{\partial y} - \tilde{u}_{20} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \\
 & = \frac{1}{\tau} \left[ \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right) - \left( ik\tilde{u}_{20} - \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial y} \right) \right] - \frac{1}{S_1} i\omega \left( ik\tilde{v}_{20} - \frac{\partial \tilde{v}_{10}}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$ik\tilde{u}_{10} + \frac{\partial \tilde{u}_{20}}{\partial y} = 0. \tag{3.66}$$

Следовательно, для определения четырех составляющих скорости  $\tilde{v}_{10}, \tilde{v}_{20}, \tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{20}$  имеем четыре уравнения (3.63)-(3.66). Для решения уравнений (3.46)-(3.51) можно ввести две функции тока:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, y, t) &= \psi(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\
 \Phi(x, y, t) &= \varphi(y)e^{i(kx-\omega t)},
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

так как решения для уравнений возмущений тоже имеют аналогичный вид (3.52). Решения (3.67) представляют собой бегущую волну или так называемую волну Толлмина-Шлихтинга. Здесь  $k$  — волновое число, вещественная величина, связанная с длиной  $\ell$  волны возмущения соотношением  $\ell = 2\pi/k$ , а величина  $\omega$ , как и по-прежнему, комплексная,  $\psi(y), \varphi(y)$  — амплитуды функции тока для возмущений газа и частиц, соответственно. Тогда если положить

$$-\tilde{v}_{10} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tilde{v}_{20} = ik\psi(y), \quad -\tilde{u}_{10} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tilde{u}_{20} = ik\varphi(y),$$

мы тем самым проинтегрируем уравнения неразрывности (3.64), (3.66), а из уравнений (3.63) и (3.65) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}
 & -i\omega \left( ikk\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) + ikV \left( ikk\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) - ik \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial V}{\partial y} - ik\psi \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - ik \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} = \\
 & = \frac{\alpha_* S_1}{1 - \alpha_* \tau} \left[ \left( ikk\varphi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) - \left( ikk\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) \right] + \frac{\alpha_*}{1 - \alpha_*} i\omega \left( ikk\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) + \\
 & + \frac{1}{1 - \alpha_*} \frac{1}{\text{Ro}} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \left( ikk\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega \left[ ikik\varphi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] + ikU \left[ ikik\varphi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] - ik \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial U}{\partial y} - ik\varphi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - ik \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \\
& = \frac{1}{\tau} \left[ \left[ ikik\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] - \left[ ikik\varphi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right] \right] + \frac{1}{S_1} i\omega \left[ ikik\psi - \frac{\partial \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial y} \right].
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Согласно введенным в параграфе 3.1. допущениям  $\alpha_0 \ll 1$  и проводя несложные выкладки из уравнений (3.68), (3.69), имеем

$$\begin{aligned}
& -i\omega \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi + ikV \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi - ik\psi \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\alpha_0 S_1}{\tau} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi \right] - \\
& - \alpha_0 i\omega \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi + ikU \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi - ik\varphi \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \\
& - \frac{1}{\tau} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \varphi \right] + \frac{1}{S_1} i\omega \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \psi = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Уравнения (3.70) умножим на  $\text{Re}$ , а уравнение (3.71) - на  $\tau$  и имеем

$$-ik \text{Re} \lambda D \psi + ik \text{Re} V D \psi - ik \text{Re} \psi \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{f}{S} D \varphi + \frac{f \text{Re}}{\tau} D \psi - \alpha_0 ik \text{Re} \lambda D \psi - D^2 \psi = 0, \tag{3.72}$$

$$-ik\tau \lambda D \varphi + ik\tau U D \varphi - ik\tau \varphi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - D \psi + D \varphi + \frac{\tau}{S_1} ik \lambda D \psi = 0. \tag{3.73}$$

Здесь  $D = \frac{\partial}{\partial y^2} - k^2$  - дифференциальный оператор.

В уравнениях (3.72), (3.73) все функции зависят от одной переменной  $y$  и производные берутся относительно этой переменной, поэтому вместо частных производных можно рассмотреть обыкновенные производные и в результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left( U - \lambda + \frac{f}{ik\tau} \right) D\psi + \frac{d^2 U}{dy^2} \psi + \frac{f}{ik\tau} D\phi + \frac{f}{S_1} \lambda D\psi = 0, \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{ik\tau} D\psi - \left( U - \lambda + \frac{1}{ik\tau} \right) D\phi + \frac{d^2 U}{dy^2} \phi - \frac{1}{S_1} \lambda D\psi = 0, \quad (3.75)$$

где  $D = \frac{d}{dy^2} - k^2$  - дифференциальный оператор,  $\lambda = \frac{\omega}{k}$ ,  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  - неизвестная постоянная, подлежащая определению,  $\lambda_r$  - фазовая скорость,  $\lambda_i$  - коэффициент нарастания,  $f = \alpha_0 S_1$  - массовая концентрация частиц. Если  $\lambda_i > 0$ , то течение неустойчиво, если  $\lambda_i < 0$  - устойчиво. Если же  $\lambda_i = 0$ , то колебания нейтрально устойчивы, кривая или поверхность в которой  $\lambda_i = 0$  называется кривой или поверхностью нейтральной устойчивости.

В уравнениях (3.74) - (3.75) через  $U(\eta)$ ,  $V(\eta)$  обозначены соответственно компоненты продольной скорости стационарного течения чистого газа и твердых частиц. Для плоскопараллельных течений, согласно [135], их разность пропорциональна величине  $\nabla = (a/L)^2$ . В диапазоне практически интересных параметров  $\nabla$  имеет порядок  $10^{-3} \div 10^{-2}$ , т.е. очень мала. Величиной  $\nabla$  тогда обычно пренебрегают [125, 126, 132, 136, 140], полагая

$$U(\eta) = V(\eta). \quad (3.76)$$

Таким образом, уравнения устойчивости для модели Рахматуллина - Нигматуллина - Дру с учетом силы Стокса имеют вид, как в (0.2) и (0.3), т.е.

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left( V - \lambda - \frac{if}{k\tau} \right) D\psi + \psi \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{f}{ik\tau} D\phi = 0, \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{ik\tau} D\psi - \left( U - \lambda - \frac{i}{k\tau} \right) D\phi + \phi \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \quad (3.78)$$

Без учета сил плавучести, согласно работе [132], уравнения устойчивости сводятся к виду

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi + \left( U - \lambda + \frac{f}{ik\tau} \right) D\psi + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \psi + \frac{f}{ik\tau} \left( \frac{d\bar{u}_1}{d\eta} - ik\bar{u}_2 \right) = 0, \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{ik\tau} \frac{d\psi}{d\eta} - \left( U - \lambda + \frac{1}{ik\tau} \right) \tilde{u}_1 - \frac{1}{ik} \frac{dU}{d\eta} \tilde{u}_2 = 0, \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{\tau} \psi + \left( U - \lambda + \frac{1}{ik\tau} \right) \tilde{u}_2 = 0, \quad (3.81)$$

или к эквивалентному (3.79) – (3.81) уравнению

$$D^2\psi - ik \operatorname{Re} \left[ \left( \bar{u} - \lambda \right) D\psi + \left( \frac{d^2 \bar{u}}{d\eta^2} \right) \psi \right] = 0, \quad (3.82)$$

где

$$\bar{u}(\eta) = U + \frac{f(U - \lambda)}{1 + ik\tau(U - \lambda)}, \quad D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2.$$

#### 3.4. Алгоритм спектрально-сеточного метода для моделирования двухфазных потоков и его обоснование

Теперь перейдем к изложению алгоритма ССМ для численного моделирования уравнений устойчивости двухфазных потоков (3.77), (3.78). Этот алгоритм строится так же, как и в параграфе 2.3 гл. II. Поэтому остановимся только на отличительных особенностях метода для уравнений (3.77), (3.78).

Итак, рассмотрим уравнения (3.77), (3.78) при следующих краевых условиях:

$$\psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \quad \varphi(\eta) = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_0, \quad (3.83)$$

$$\psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \quad \varphi(\eta) = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_1. \quad (3.84)$$

Для конкретного вида течений  $U(\eta)$  краевые условия (3.83), (3.84) имеют вполне определенный физический смысл.

Интервал интегрирования  $[\eta_0, \eta_1]$  разобьем на сетку. Краевые условия (3.83), (3.84) записываются в точках  $\eta_0, \eta_N$ , а требования непрерывности решения уравнений (3.77), (3.78) и его производных до  $(m-1)$ -го порядка имеют вид (2.11) и

$$\varphi_j^{(p)}(\eta_j) = \varphi_{j+1}^{(p)}(\eta_j), \quad p = 0, 1; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.85)$$

соответственно, где  $p$  — порядок производной, а  $m$  — порядок старшей производной.

Уравнения (3.77), (3.78) после применения преобразования (2.12) приобретают вид

$$P_j \psi_j + M_j \varphi_j = 0, \quad (3.86)$$

$$S_j \psi_j + K_j \varphi_j = 0, \quad (3.87)$$

где

$$P_j = \frac{1}{ik_j \operatorname{Re}_j} D_j^2 - (U_j(y) - \lambda - \frac{if}{k\tau}) D_j + \frac{d^2 U}{dy_j^2},$$

$$M_j = \frac{f}{ik\tau} D_j, \quad S_j = \frac{f}{ik\tau} D_j, \quad K_j = -(U_j(y) - \lambda - \frac{i}{k\tau}) D_j + \frac{d^2 U_j}{dy_j^2},$$

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2} k, \quad \operatorname{Re}_j = \frac{l_j}{2} \operatorname{Re}.$$

В этом случае краевыми условиями и условиями непрерывности для уравнения (3.86) являются (2.14), а аналогичные условия для (3.87) имеют вид

$$\varphi_1(-1) = 0, \quad l_j^{-p} \varphi_j^{(p)}(+1) = l_{j+1}^{-p} \varphi_{j+1}^{(p)}(-1), \quad p = 0, 1; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \varphi_N(+1) = 0. \quad (3.88)$$

Приближенное решение задачи (3.86), (3.87) на каждом из элементов сетки ищем в виде следующих рядов:

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y), \quad (3.89)$$

$$\varphi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} d_n^{(j)} T_n(y), \quad U_j(y_j') = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_j').$$

Подставляя ряды (3.89) в (3.86), (3.87), потребуем, чтобы левая часть уравнения (3.86) на каждом из элементов была ортогональна к первым  $p_j - 4$ -м и, аналогично, левая часть уравнения (3.87) — к первым  $p_j - 2$ -м полиномам Чебышева, т.е.

$$(P_j \psi_j + M_j \varphi_j, T_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p_j - 4, \quad (3.90)$$

$$(S_1 \psi_j + K_j \varphi_j, T_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p_j - 2, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.91)$$

где  $(f, g)$ - скалярное произведение на отрезке  $[-1, +1]$ .

Условия (3.88) с использованием (3.89) записываются в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n d_n^{(1)} &= 0, & \sum_{n=0}^{p_j} d_n^j &= \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n d_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 d_n^{(j)} &= \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 d_n^{(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \sum_{n=0}^{p_N} d_n^{(N)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Таким образом, для определения  $2 \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$  неизвестных  $\alpha_n^{(j)}, \alpha_n^{(j)}$  ( $n = 0, 1, \dots, p_j, j = 1, 2, \dots, N$ ) имеем  $2 \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$  уравнений. Этими уравнениями будут:  $\sum_{j=1}^N (p_j - 3) + \sum_{j=1}^N (p_j - 1)$  - уравнений ортогональности (3.80), (3.91),  $4N$ - условий (2.18) и  $2N$  - условий вида (3.92).

Систему линейных алгебраических уравнений (3.90), (2.18), (3.91), (3.92) запишем в матричном виде

$$(A - \lambda B)x = 0; \quad (3.93)$$

здесь комплексные матрицы  $A$  и  $B$  имеют следующую структуру:

	1 -1 1 ... x	0 0 0 ... 0	
	0 1 -4 ... x	0 0 0 ... 0	
	x x x ... x	x x x ... x	
	. . . . .	. . . . .	
	x x x ... x	x x x ... x	
0	1 1 1 ... 1 1 -1 1 ... x	0 0 0 ... 0 0 0 0 ...	
0	0 1 4 ... x 0 1 -4 ... x	0 0 0 ... 0 0 0 0 ...	
0	0 0 4 ... x 0 0 4 ... x	0 0 0 ... 0 0 0 0 ...	
0	0 0 0 ... x 0 0 0 ... x	0 0 0 ... 0 0 0 0 ...	
	x x x ... x	x x x ... x	
	. . . . .	. . . . .	
	x x x ... x	x x x ... x	
	.	.	
	.	.	
... x	x x x ... x	x x x	
	. . . . .	. . .	
... .	x x x ... x	x x x	
... x	1 -1 1 ... x 1 1 1 ... 1	0	
	0 0 ... 0 0 0 0 ... 0	0	
	0 1 -4 ... x 0 1 4 ... x	0	
	0 0 ... 0 0 0 0 ... 0	0	
	0 0 4 ... x 0 0 4 ... x	0	
	0 0 ... 0 0 0 0 ... 0	0	
	0 0 0 ... x 0 0 0 ... x	0	
	0 0 ... 0 0 0 0 ... 0		



B=

```
0 0 0...0
0 0 0...0
x x x...x
. . . ....
x x x...x
0 0 0...0 0 0 0...0
0 0 0...0 0 0 0...0
0 0 0...0 0 0 0...0
0 0 0...0 0 0 0...0
      x x x...x
      . . . ....
      x x x...x
      :
      x x x ... x
      . . . ....
      x x x ... x
      0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
      0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
      0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
      0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
            x x x ... x
            . . . ....
            x x x ... x
                  0 0 0 ...0
                  0 0 0 ...0
                  0 0 0 ...0
x x x ... x
      . . . ....
            x x x ... x
0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
      0 0 0 ...0 0 0 0 ...0
            x x x ... x
            . . . ....
                  x x x ... x
      :
            x x x ... x
```



или

$$(AQ - \lambda BQ)Y = 0, \quad (3.95)$$

где  $Y = Q^{-1}x$ ,

$$Y^T = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_{p_1}^{(1)}, y_0^{(2)}, \dots, y_{p_2}^{(2)}, \dots, y_0^{(N)}, \dots, y_{p_N}^{(N)}, \\ \bar{y}_0^{(1)}, \bar{y}_1^{(1)}, \dots, \bar{y}_{p_1}^{(1)}, \bar{y}_0^{(2)}, \dots, \bar{y}_{p_2}^{(2)}, \dots, \bar{y}_0^{(N)}, \dots, \bar{y}_{p_N}^{(N)}).$$

Здесь  $Q$  — соответствующее невырожденное преобразование. Через  $y$  — обозначены компоненты собственного вектора для газа, а через  $\bar{y}$  — компоненты собственного вектора для частиц.

Подробно изложим переход от системы (3.93) к системе (3.95). Так как на матрицах  $A$  и  $B$  действует одно и то же преобразование  $Q$ , то опишем преобразование только относительно матрицы  $A$ , подразумевая, что аналогичные действия производятся и с матрицей  $B$ . Первый столбец матрицы  $A$  прибавим к четным столбцам и вычтем от нечетных столбцов только для первого блока матрицы  $A$ . Тогда матрица  $A$  примет следующий вид:









	1 0 0...0		0 0 0... 0	
	0 1 0...0		0 0 0... 0	
	x x x...x		x x x ... x	
	. . . . .		. . . . .	
	x x x...x		x x x ... x	
0	1 2 0...0	0 1 0...0	0 0 0... 0	0 0 0 0... 0
0	0 1 0...0	0 1 0...0	0 0 0... 0	0 0 0 0... 0
0	0 0 4...0	0 0 0...0	0 0 0... 0	0 0 0 0... 0
0	0 0 0...0	0 0 0...0	0 0 0... 0	0 0 0 0... 0
		x x x...x		x x x ... x
		. . . . .		. . . . .
		x x x...x		x x x ... x
		.		.
		x x x ... x		x x x ... x
		. . . . .		. . . . .
		x x x ... x		x x x ... x
0 0... 0	1 0 0 ...0	1 0 0 ...0		0
0 0... 0	0 1 0 ...0	0 1 0 ...0		0
0 0... 0	0 0 0 ...0	0 0 4 ...0		0
0 0... 0	0 0 0 ...0	0 0 0 ...0		0
0 0... 0	0 0 0 ...0	0 0 0 ...0		0
0 0... 0	0 0 0 ...0	0 0 0 ...0		0
AQ=		x x x ... x		x
x x ... x		.		.
		x x x ... x		
x x x ... x				
	0 0 0...0	1 0 0 ...0	0 0 0... 0	
	x x x...x	0 1 0 ...0	0 0 0... 0	
		1 0 0 ...0		
		x x x ... x		



$$y_0^{(1)} = 0, \quad y_1^{(1)} = 0, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad y_3^{(1)} = 0, \quad \bar{y}_0^{(1)} = 0, \quad \bar{y}_1^{(1)} = 0,$$

$$y_0^{(2)} = 0, \quad y_1^{(2)} = 0, \quad y_2^{(2)} = 0, \quad y_3^{(2)} = 0, \quad \bar{y}_0^{(2)} = 0, \quad \bar{y}_1^{(2)} = 0,$$

$$y_0^{(N)} = 0, \quad y_1^{(N)} = 0, \quad y_2^{(N)} = 0, \quad y_3^{(N)} = 0, \quad \bar{y}_0^{(N)} = 0, \quad \bar{y}_1^{(N)} = 0.$$

Тогда из каждого блока матриц  $AQ$  и  $BQ$  для газовой фазы можно исключить первые четыре строки и первые четыре столбца. Аналогично, из каждого блока матриц  $AQ$  и  $BQ$  для дисперсной фазы (частиц) можно исключить первые две строки и первые два столбца.

Из оставшихся уравнений получаем алгебраическую систему

$$(T - \lambda W)Y = 0, \quad (3.96)$$

где  $W$  - в общем случае невырожденная квадратная матрица. Умножая (3.96) слева на  $W^{-1}$ , получаем

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (3.97)$$

Собственные значения системы (3.97) определяются с помощью  $QR$  - алгоритма.

Из структуры матрицы  $AQ$  видно, что число строк и столбцов матриц  $AQ$  и  $BQ$  уменьшилось на  $6N$ .

Отношение общего числа уравнений  $\bar{m}$  к числу оставшихся  $(\bar{m} - 6N)$  уравнений составляет

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 6N}.$$

Таким образом, в результате разбиения интервала интегрирования на элементы размерности каждой комплексных матриц  $A$  и  $B$  в алгебраической системе (3.93) уменьшаются в  $q^2$  раз.

Снижение размерности особенно заметно при небольшом числе полиномов на каждом элементе. Общее количество полиномов равно  $\bar{m} = 2 \sum_{j=1}^N (p_j + 1)$ , где множитель 2 соответствует числу уравнений в дифференциальной системе (3.77) - (3.78). При  $p_j = 4$ , например, для всех  $j$ ,

$\bar{m} = 10N$ , а  $q = 2,5$ ;  $q^2 = 6,25$ . Видно, что в таком случае размерности каждой комплексных матриц  $A$  и  $B$  уменьшаются более чем в 6 раз.

В табл. 3.8. сравниваются СМ и ССМ и показана эффективность ССМ при моделировании проблемы устойчивости двухфазных потоков (3.77) – (3.78).

Таблица 3.8.

$\bar{m}/2$	Требуемая память для хранения матриц $T$ и $W$ в решаемой системе		
	СМ	N	ССМ
5	64	1	64
10	784	2	256
20	4624	4	1024
30	11664	6	2304
40	21904	8	4096

Из таблицы видно, что ССМ требует значительно меньшей памяти компьютера, чем СМ.

В табл. 3.9. сравниваются эти методы по числу арифметических операций. Для решения задачи на собственные значения вида (3.97) с комплексной матрицей  $D$  реализация одного шага  $QR$  алгоритма требует приблизительно  $\bar{Q} \approx (20/3)n^3$  арифметических операций, где  $n$  – указывает порядок матрицы  $D$ .

Таблица 3.9.

$\bar{m}/2$	СМ	ССМ	
	$\bar{Q}$	N	$\bar{Q}$
5	426	1	426
10	18293	2	3413
20	262026	4	27306
30	1049760	6	92160
40	2701493	8	365813
50	5537227	10	937386
60	9876960	12	1916640

Результаты табл. 3.9. иллюстрируются на рис. 3.4.

Кривая 1 – ССМ, кривая 2 – СМ

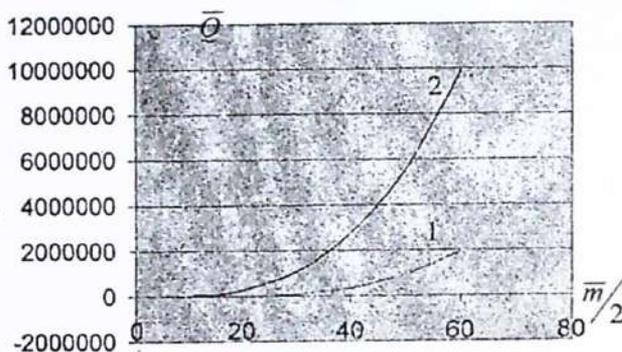


Рис. 3.4.

### 3.6. Анализ и интерпретация результатов расчетов по моделированию устойчивости двухфазных потоков

3.6.1. *Двухфазное течение Пуазейля.* Пусть основное течение  $U(y)$  в уравнениях (3.77), (3.78) является течением Пуазейля (рис 2.2). Граничные условия для возмущений в потоке Пуазейля для (3.77), (3.78) имеют вид

$$\psi(\pm 1) = \frac{d\psi}{dy}(\pm 1) = 0, \quad (3.98)$$

$$\psi(\pm 1) = 0. \quad (3.99)$$

Равенства (3.98) есть требования непроницаемости и прилипания для чистого газа, а (3.99) – условие непроницаемости для твердых частиц. Заметим, что в работах [132, 140] условие (3.99) не учитывалось, так как полученные уравнения (3.79) – (3.81) или (3.82) не требуют постановки таких граничных условий.

Уравнения (3.77) – (3.78) и граничные условия (3.98) – (3.99) обладают свойством инвариантности относительно замены  $y$  на  $-y$ , поэтому решение можно искать отдельно

для четных и нечетных  $\psi(y)$  и  $\varphi(y)$  функций. Приближенное решение системы (3.77) – (3.78) ищем в виде

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y), \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y).$$

Тогда алгебраическая система вида (2.26) для уравнений (3.77), (3.78) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left[ p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2 - 4)^2 \right] a_p - \\ & - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N \left\{ \left[ 2k^2 + \frac{f}{S} + \frac{1}{4} ik \operatorname{Re}(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} c_n p [p^2 - (n+2)^2] - \frac{1}{4} ik \operatorname{Re} d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \right\} a_p + \\ & + \left\{ ik \operatorname{Re} n(n-1) + \left[ k^4 + \frac{fk^2}{S} + ik \operatorname{Re}(k^2 - 2) \right] c_n - \right. \\ & - \left. \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_n (c_n + c_{n-1}) \right\} a_n - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_{n-2} a_{n-2} - \\ & - \frac{1}{4} ik^3 \operatorname{Re} c_n a_{n+2} + \frac{f}{S} \left[ \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) b_p - k^2 c_n b_n \right] - \quad (3.100) \\ & - \lambda \left\{ ik \operatorname{Re} \left[ k^2 c_n a_n - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p \right] \right\} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-4, \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0, \quad (3.101)$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N a_n = 0, \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N n^2 a_n = 0, \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) a_p - k^2 c_n a_n - \\
& - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{4} ik\tau(4 - c_n - c_{n-1}) \right] p(p^2 - n^2) - \frac{1}{4} ik\tau c_n p [p^2 - (n-2)^2] - \right. \\
& - \frac{1}{4} ik\tau d_{n-2} p [p^2 - (n-2)^2] \left. \right\} b_p + \{ ik\tau n(n-1) + \\
& + [k^2 + ik\tau(k^2 - 2)] c_n - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_n (c_n + c_{n-1}) \} b_n - \\
& - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_{n-2} b_{n-2} - \frac{1}{4} ik^3 \tau c_n b_{n+2} - \\
& - \lambda \left\{ ik\tau \left[ k^2 c_n b_n - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^N p(p^2 - n^2) b_p \right] \right\} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-2,
\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N b_n = 0, & \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}}^N b_n = 0.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

В этих уравнениях  $n \geq 0$ ,  $c_l = d_l = 0$ , если  $l > 0$ ,  $c_0 = 2$ ,  $c_l = 1$  при  $l > 0$  и  $d_l = 1$  при  $l \geq 0$ . Согласно описанному выше свойству инвариантности уравнений (3.77) – (3.78), системы (3.100)–(3.104) распадаются на следующие две независимые подсистемы: (3.100), (3.101), (3.103), (3.104) с четными индексами и (3.100), (3.102), (3.103), (3.104) с нечетными  $n$ .

Учет силы Архимеда в уравнениях устойчивости приводит к тому что в левую часть системы уравнений (3.100) прибавится сумма



$$AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & T & \dots & \dots \\ 0 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.107)$$

$$BQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x & x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots & \dots \\ 0 & x & x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначая  $Q^{-1}x = z$ , из (3.106) имеем

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad (T - \lambda W)Y = 0, \quad z_{2M+2} = 0, \quad (3.108)$$

где  $Y = (z_3, z_4, \dots, z_{2M+1})$ .

Квадратные матрицы  $T$  и  $W$  состоят из элементов матриц  $AQ$  и  $BQ$ . Их вид понятен из обозначений (3.107). Первые два и последнее уравнения в системе (3.106) автономны, так как соответствующие им компоненты собственных векторов, очевидно, равны нулю. Поэтому задача отыскания значений  $\lambda$ , удовлетворяющих системе (3.105), эквивалентна следующей задаче:

$$(T - \lambda W)Y = 0. \quad (3.109)$$

Для нахождения постоянных  $\lambda$  система (3.109) сводится к виду

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (3.110)$$

Уравнение вида (3.110) для нечетных коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  выводится аналогично из систем (3.100), (3.102), (3.103), (3.104) с нечетными индексами  $n$ .

В данной работе система (3.110) решается с различным числом полиномов  $T_n$ , причем  $M$  меняется от 6 до 32. Данные табл. 3.10-3.12 показывают точность расчетов первой неустойчивой моды плоского течения Пуазейля со взвешенными частицами при различных числах базисных

функций. В этих таблицах параметры  $f, Re, k$  фиксированы:  $f = 0,05, Re = 10^4, k = 0,9$ .

В табл. 3.10. приведены значения  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  при малых значениях времени релаксации частиц  $\tau$ , т.е. при  $\tau = 1$ .

Таблица 3.10

M + 1	$\lambda_r$	$\lambda_i$
6	0,884	0,012
10	0,325	0,039
15	0,22221	0,00681
23	0,2226709	0,0068574
26	0,2226707330	0,0068672973
32	0,2226707431	0,0068672974

Видно, что с увеличением  $M$  число верных знаков в  $\lambda$  растет.

Аналогичный эффект наблюдается и при больших значениях  $\tau$ . В табл. 3.11. показана сходимость  $\lambda$  при  $\tau = 10$ .

Таблица 3.11.

M + 1	$\lambda_r$	$\lambda_i$
6	0,843	0,014
10	0,335	0,030
15	0,22160	0,00255
23	0,221713	0,002962
26	0,221767	0,002985
30	0,221765	0,0029975
32	0,221766	0,0030014

В табл. 3.12. приведены результаты расчетов при  $\tau = 10^2$ .

Таблица 3.12.

M + 1	$\lambda_r$	$\lambda_i$
6	0,831	0,023
10	0,2299	0,0041
15	0,22574	0,00318
23	0,225852	0,003538
26	0,225957	0,003594

Таким образом, из результатов, приведенных в табл. 3.10.–3.12., следует, что в широком диапазоне изменения параметра  $\tau$ ,  $1 < \tau < 10^2$ , имеет место сходимость  $\lambda$  с увеличением числа базисных функций. Причем, как видно из таблиц, для достижения точности  $10^{-4}$  достаточно ограничиться 26 полиномами Чебышева.

3.6.2. *Двухфазный пограничный слой.* Теперь рассмотрим течение в пограничном слое в присутствии взвешенных частиц. Основное течение  $U(y)$  в уравнениях (3.77), (3.78) по-прежнему определяется через решение уравнения Фокнера-Скэна. Безразмерные параметры для уравнений устойчивости (3.77), (3.78) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Re = U_0 \delta / \nu, \quad \delta = \sqrt{2\nu L / U}, \quad k\delta = (2\pi/l)\delta = GRe, \\ G = 2\pi / R_1, \quad R_1 = lU_0 / \nu, \quad \tau = T / Re, \quad T = (2/9)S_1 R_2^2, \\ R_2 = aU_0 / \nu, \quad S_1 = \rho_2 / \rho_1, \quad f = \alpha_0 S_1. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Здесь  $a$  – радиус частиц,  $R_2$  – число Рейнольдса по радиусу частиц,  $\rho_1, \rho_2$  – плотность чистого газа и материала частиц,  $S_1$  – отношение плотностей,  $\tau, T$  – время релаксации частиц,  $\alpha_0, f$  – объемная и массовая концентрации частиц. Остальные параметры в (3.111) определены в п. 2.6.2 гл. II.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(\eta) = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \quad \varphi(\eta) = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad (3.112) \\ \psi(\eta), \frac{d\psi}{d\eta} \rightarrow 0, \quad \varphi(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для чистого газа – это требования прилипания и непроницаемости, а для твердых частиц – только условие непроницаемости. Возмущения должны затухать вдали от стенки.

Дифференциальные уравнения (3.77), (3.78) с однородными граничными условиями (3.112) образуют задачу на собственные значения для определения неизвестной постоянной  $\lambda$ . Как отмечено в гл. II, проблема устойчивости пограничного слоя не обладает свойством

симметрии и не распадается на две независимые подсистемы — для четных и нечетных решений в отдельности.

Поэтому решение системы дифференциальных уравнений (3.77), (3.78), при отсутствии симметрии, связано с огромными трудностями. Применение ССМ позволяет преодолеть их.

Устойчивость пограничного слоя со взвешенными частицами характеризуется следующими параметрами:  $\beta, G, Re, f, T$ .

Для численного моделирования уравнений (3.77), (3.78) с граничными условиями (3.112) необходимо ограничить интервал интегрирования большой, но конечной величиной  $\eta_l$ . Интервал  $[\eta_0, \eta_l]$  разобьем на сетку. Далее произведем действия, аналогичные действиям в параграфе 3.4. данной главы.

Не повторяя изложенное там, приведем лишь окончательный вид алгебраической системы, вытекающий из уравнений (3.90), (3.91):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24ik_j Re_j} \sum_{\substack{p=2 \\ p=n(\bmod 2)}}^{p_j} \left[ p^3(p^2-4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pn^2(n^2-4)^2 \right] a_p^{(j)} + \\ & + \left( \frac{if}{GT} - \frac{2k_j^2}{ik_j Re_j} \right) \sum_{\substack{p=2 \\ p=n(\bmod 2)}}^{p_j} p(p^2-n^2) a_p^{(j)} + k_j^2 c_n \left( \frac{k_j^2}{ik_j Re_j} - \right) \\ & - \frac{if}{GT} a_n^{(j)} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=2}^{p_j} a_p^{(j)} \sum_{\substack{m=p(\bmod 2) \\ |m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq p_j}} p(p^2-m^2) \bar{b}_{n-m}^{(j)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k_j^2 \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{a}_p^{-(j)} \bar{b}_{n-p}^{-(j)} - \sum_{\substack{|r| \leq p_j \\ |n-r| \leq p_j}} \bar{a}_r \sum_{\substack{p=|n-r|+2 \\ m+n=r \pmod{2}}} m [m^2 - (n-p)^2] b_m^{(j)} \Big\} + \\
& + \frac{f}{iGT} \left[ \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2 - n^2) d_p^{(j)} - k_j^2 c_n d_n^{(j)} \right] - \quad (3.113)
\end{aligned}$$

$$- \lambda \left[ k_j^2 c_n a_n^{(j)} - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}} p(p^2 - n^2) a_p^{(j)} \right] = 0, \quad n=0,1,\dots,p_j-4, \quad j=0,1,\dots,N$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{iGT} \left( \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2 - n^2) a_p^{(j)} - k_j^2 c_n a_n^{(j)} \right) - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=2}^{p_j} d_p^{(j)} \sum_{\substack{m=p \pmod{2} \\ |m| \leq p-2 \\ |n-m| \leq p_j}} p(p^2 - m^2) \bar{b}_{n-m}^{(j)} - k_j^2 \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} \bar{d}_p^{(j)} \bar{b}_{n-p}^{(j)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - \sum_{\substack{|p| \leq p_j \\ |n-p| \leq p_j}} d_p^{(j)} \sum_{\substack{p=|n-p|+2 \\ m+n=p \pmod{2}}} m [m^2 - (n-p)^2] b_m^{(j)} \right\} +$$

$$+ \frac{i}{GT} \left[ \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2 - n^2) d_p^{(j)} - k_j^2 c_n d_n^{(j)} \right] - \quad (3.114)$$

$$- \lambda \left[ k_j^2 c_n d_n^{(j)} - \sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n \pmod{2}}}^{p_j} p(p^2 - n^2) d_p^{(j)} \right] = 0, \quad n=0,1,2,\dots,p_j-2, \quad j=1,2,\dots,N,$$

где  $\bar{a}_n = c_{|n|} a_{|n|}$ ,  $\bar{b}_n = c_{|n|} b_{|n|}$ ,  $\bar{d}_n = c_{|n|} d_{|n|}$  для  $-p_j \leq n \leq p_j$ ,  $c_0 = 2$ ,  $c_n = 1$ ,  $n > 0$ .

С помощью уравнений (3.113), (3.114) и (2.18), (3.92) имеем алгебраическую систему вида (3.93):

$$(A - \lambda B)x = 0.$$

Данную систему приведем к виду (2.22) способом, изложенным в 2.4:

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}.$$

При решении этой системы определяются все значения параметра  $\lambda$  и среди них выбираются самые неустойчивые, т.е. такие, у которых мнимая часть больше нуля либо равна нулю.

В табл. 3.13.–3.14. приведены результаты расчетов первой неустойчивой моды  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  при  $\beta = 0$ ,  $f = 0,1$  и  $T = 3 \cdot 10^4$ . У параметров  $Re, k$  и  $\eta_l$  по-прежнему, как и в гл. II, следующие значения:

$$Re = 580, \quad k = 0,179, \quad \eta_l = 20.$$

Данные, приведенные в табл. 3.13., рассчитаны при общем числе полиномов, равном 36, т.е.  $\bar{m} = 36$ .

Таблица 3.13.

$\bar{m}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$\lambda_r$	$\lambda_i$
	17	7	7	5	1,000613	0,10518 2
36	17	9	5	5	0,371965	- 0,01317 3
	19	7	5	5	0,363443	- 0,01695 0
	21	5	5	5	0,363270	- 0,01887 0

Данные, приведенные в табл. 3.14., рассчитаны при общем числе полиномов  $\bar{m} = 46$ .

Таблица 3.14.

$\bar{m}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$\lambda_r$	$\lambda_l$
	21	13	7	5	0,364985	- 0,019944
	21	15	5	5	0,363989	- 0,019144
46	23	13	5	5	0,364336	- 0,019063
	25	11	5	5	0,364357	- 0,019095
	27	9	5	5	0,364289	- 0,019124

Из этих таблиц видно, что с увеличением числа полиномов на элементах, примыкающих к стенке, число верных знаков в  $\lambda$  растёт. При этом размерность решаемой задачи, как указано в табл.3.8. параграфа 3.5. данной главы, существенно уменьшается.

---

## ГЛАВА IV. КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Изложение результатов данной главы содержится в работах [160–162, 164, 168–177, 180, 192–195, 197–201]. В этой главе проведено комплексное исследование математических моделей гидродинамических систем как для однофазных, так и двухфазных потоков на основе вычислительного эксперимента. В параграфе 4.1. приведены результаты исследований, показывающие влияние взвешенных частиц на гидродинамическую устойчивость плоского течения Пуазейля с учётом силы Стокса. Гидродинамическая устойчивость двухфазного пограничного слоя с учётом силы Стокса изложена в параграфе 4.2. Влияние сил Стокса и Архимеда на гидродинамическую устойчивость плоского течения Пуазейля и пограничного слоя исследовано в параграфе 4.3. В параграфе 4.4. исследована пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля. Результаты исследований пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном пограничном слое изложены в параграфе 4.5. В параграфе 4.6. приведена структура комплекса программ для исследования математических моделей гидродинамических систем.

### 4.1. Устойчивость двухфазного течения Пуазейля

Результаты расчетов, показывающие влияние взвешенных частиц на устойчивость течения Пуазейля с учетом

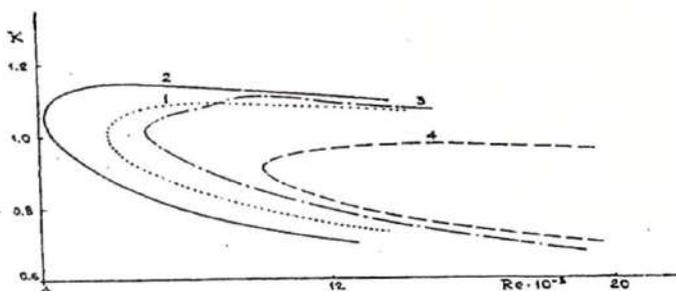
силы Стокса, представлены на рис. 4.1. – 4.7. и в табл. 4.1. – 4.16. (см. приложение).

На рис. 4.1. – 4.4. в плоскости  $(Re, k)$  приведены кривые нейтральной устойчивости ( $\lambda_i = 0$ ). Значение параметра  $f$  фиксировано и  $f = 0,05$ . Всюду цифрой 1 отмечены кривые, соответствующие случаю чистого газа (табл. 4.1). Цифрой 2 – кривые, построенные на основе решения системы (3.77) – (3.78) с граничными условиями (3.98), (3.99), а цифрой 4 – кривые, рассчитанные по уравнениям (3.79) – (3.81) с граничными условиями (3.98), кривые 1,2,4 рассчитаны ССМ (гл. II, III). Здесь же для сравнения приведены кривые нейтральной устойчивости 3, полученные в [140] асимптотическим методом.

На рис. 4.1. приведен вид нейтральных кривых при фиксированном значении параметра  $\tau = 1$ . Видно, что кривая 2 (табл. 4.2.) лежит слева от кривой 1. Это означает уменьшение устойчивости течения при добавлении в поток частиц, характеризующихся сравнительно небольшим временем релаксации. Отметим, что указанный результат согласуется с более ранними выводами работы [132], где предсказывалось уменьшение критического числа Рейнольдса при  $\tau \rightarrow 0$  (случай мелких частиц). Интересным является, однако, тот факт, что при использовании более полных моделей эти выводы оказываются верными не только для  $\tau \rightarrow 0$ , но и для  $\tau \approx 1$  вплоть до  $\tau \approx 6$  (см. ниже). В то же время, кривая 4 (табл. 4.3.), полученная по модели Сафмэна, уже при  $\tau = 1$  дает увеличение устойчивости (кривая 4 расположена справа от кривой 1).

Для сравнения методов на рис. 4.1. приведена кривая 3 из [140], которая, как хорошо видно, не совпадает с кривой 4, рассчитанной ССМ. Последнее свидетельствует о ненадежности асимптотик при возрастании  $\tau$ , что и отмечено в [140].

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.05$ ,  $\tau = 1$



1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 – полные уравнения, 3 – модель Сафмэна (асимптотический метод [140]), 4 – модель

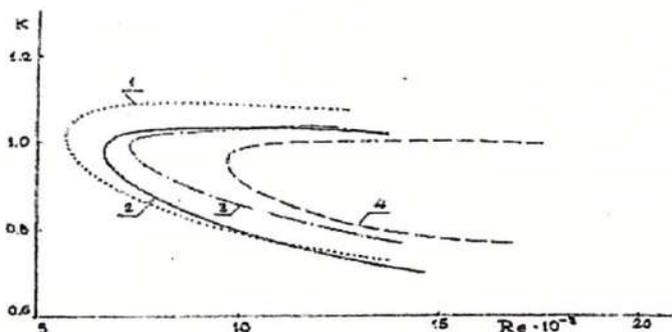
Сафмэна

Рис. 4.1.

Различие между этими кривыми еще более заметно на рис. 4.2.–4.4.

На рис. 4.2 приведены кривые при  $\tau = 10$ . Видно, что кривая 2 (табл. 4.4) указывает на стабилизацию потока, а кривая 4 (табл. 4.5) показывает, что устойчивость потока несколько уменьшается по сравнению со случаем  $\tau = 1$ .

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.05$ ,  $\tau = 10$



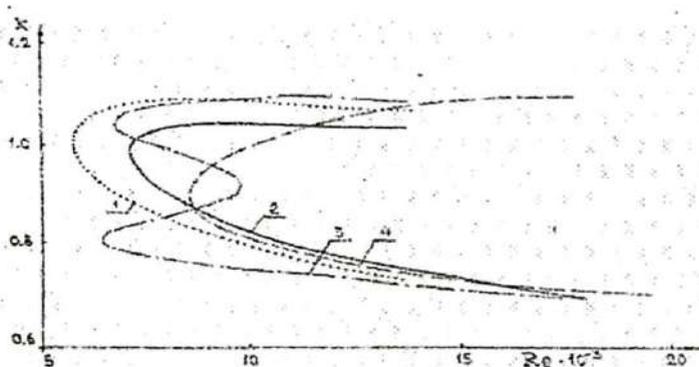
1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 – полные уравнения, 3 – модель Сафмэна (асимптотический метод [140]), 4 – модель

Сафмэна

Рис.4.2.

Кривые нейтральной устойчивости, приведенные на рис. 4.3., получены при  $\tau=30$ . Кривая 2 (табл. 4.6) значительно сдвинута вправо от кривой 1, что свидетельствует о стабилизирующем влиянии частиц с ростом  $\tau (Re. > Re_0)$ , где  $Re.$  и  $Re_0$  - критические числа Рейнольдса для смеси и чистого газа. В то же время кривые 3 и 4 (табл. 4.7) сдвигаются влево по сравнению с соответствующими кривыми 3 и 4 на рис. 4.2. При дальнейшем увеличении значения  $\tau$  кривые 3 и 4 продолжают двигаться влево и указывают тем самым на уменьшение устойчивости потока под влиянием дисперсной фазы. Обращает на себя внимание тот факт, что кривая 3 уже при таких значениях  $\tau$  принимает сложный вид.

Кривые нейтральной устойчивости при  $f=0.05$ ,  $\tau=30$



1 - чистый газ ( $f=0$ ), 2 - полные уравнения, 3 - модель Сафмэна (асимптотический метод [140]), 4 - модель

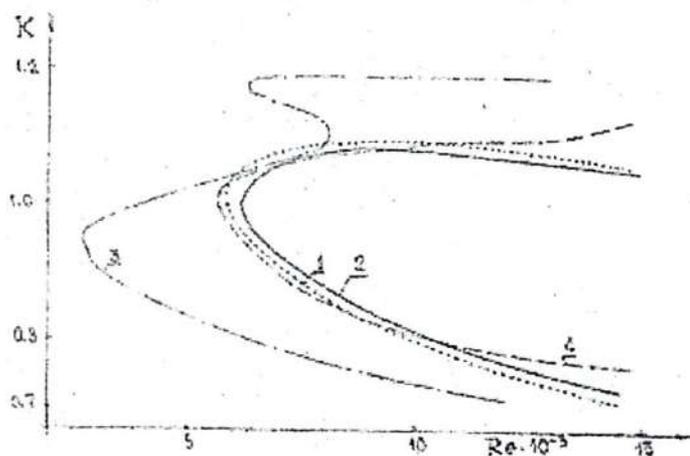
Сафмэна

Рис.4.3.

Кривые нейтральной устойчивости, приведенные на рис. 4.4., получены при  $\tau=100$ . При таких значениях  $\tau$  из поведения кривых 3 и 4 (табл. 4.9) видно, что поток дестабилизируется:  $Re. < Re_0$ . При этом кривая 3 приобретает весьма сложный вид. Необходимо отметить, что кривая

2 (табл. 4.8) указывает на стабилизирующее влияние частиц  $Re_c > Re_0$  и при таких значениях  $\tau$ .

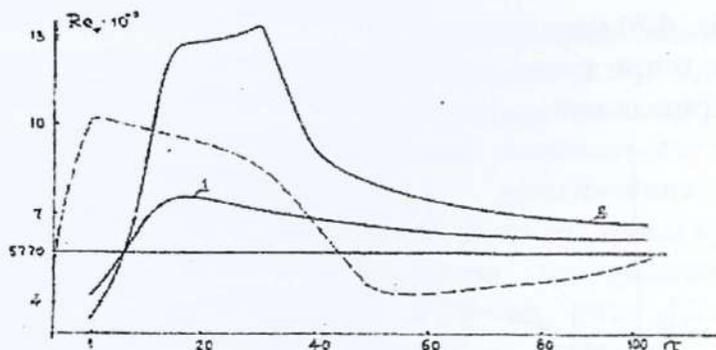
Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.05$ ,  $\tau = 100$



1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 – полные уравнения, 3 – модель Сафмэна (асимптотический метод [140]), 4 – модель Сафмэна

Рис.4.4.

Наиболее наглядно указанные результаты иллюстрируются на рис. 4.5., где приведена зависимость критического числа смеси  $Re_c$  от времени релаксации  $\tau$  при различных значениях массовой концентрации частиц  $f$ . Все кривые рассчитаны согласно ССМ. Прямой линией обозначено критическое число Рейнольдса  $Re_0 = 5770$  для чистого газа  $f = 0$ . Зависимость критического числа Рейнольдса от времени релаксации частиц



1 – полные уравнения ( $f = 0.05$ ), 2 – полные уравнения ( $f = 0.1$ ), прямая линия – чистый газ ( $f = 0$ ), пунктирная линия – модель Сафмэна ( $f = 0.05$ ) Рис.4.5.

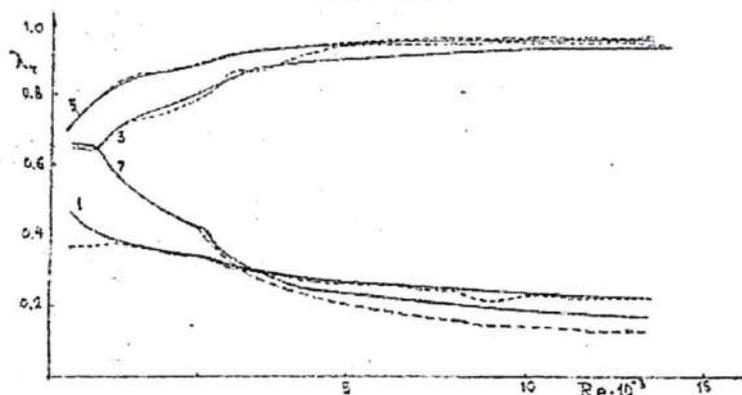
Кривым 1 (табл. 4.10) и 2 (табл. 4.11) соответствуют значения  $f = 0,05; 0,1$ . Из их поведения видно, что при  $\tau < \tau_c$  поток дестабилизируется:  $Re. < Re_0$ , а с увеличением  $\tau$ , начиная с  $\tau_c \approx 6,1$  при  $f = 0,05$  и  $\tau_c \approx 6,3$  при  $f = 0,1$ , частицы начинают оказывать стабилизирующее влияние:  $Re. > Re_0$ . Интересно отметить, что существует интервал времени релаксации  $10 \leq \tau \leq 40$ , соответствующий оптимальным размерам частиц, где эффект стабилизации выражен наиболее сильно. Кроме того, видно, что при  $\tau > 40$  стабилизирующее влияние взвешенных частиц слабеет. Таким образом, кривые 1,2, рассчитанные по уравнениям (0.2) – (0.3), показывают, что частицы в широком диапазоне изменений параметра  $\tau$  увеличивают устойчивость течения.

Здесь же, на рис. 4.5., приведена пунктирная кривая (табл. 4.12), построенная при  $f = 0,05$  на основе уравнений Сафмэна (3.21) – (3.2). Сильное отличие поведения этой кривой от кривой 1 свидетельствует о важности учета сил плавучести в уравнениях гидромеханики двухфазных сред.

Отметим, что все приведенные результаты получены на основе анализа поведения первой моды возмущения. Расчеты высших собственных значений при

$f = 0,05$ ;  $k = 1$ ;  $\tau = 10$  приведены на рис. 4.6, 4.7, где непрерывной линией обозначены результаты для чистого газа ( $f = 0$ ), а пунктирной линией - для смеси. Рис. 4.6 (табл. 4.13 при  $f = 0$ , табл. 4.15 ( $f = 0,05$ )) показывает поведение действительной части собственных значений ( $\lambda_r$ ) в зависимости от числа  $Re$ . На рис. 4.7. (табл. 4.14 при  $f = 0$ , табл. 4.16 ( $f = 0,05$ )) приведены значения мнимой части ( $\lambda_i$ ) тех же собственных значений. Видно, что частицы наиболее сильно влияют на первую моду возмущения. На высшие моды частицы влияют незначительно и качественно не меняют вида спектра в задаче устойчивости течения Пуазейля.

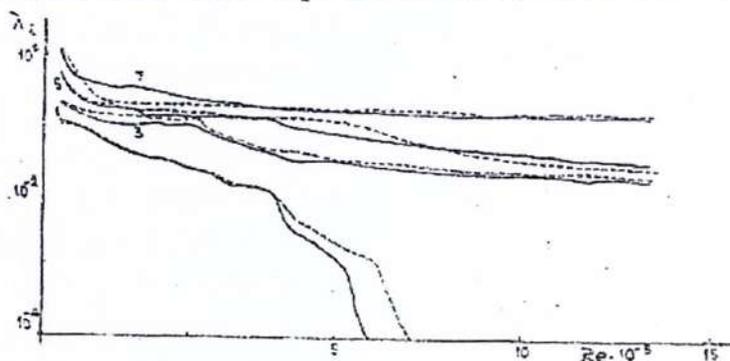
Действительная часть симметричных собственных значений



Сплошная линия – чистый газ ( $f = 0$ ), пунктирная линия – полные уравнения ( $f = 0,05$ ,  $k = 1$ ,  $\tau = 10$ ), цифры указывают номер собственного значения

Рис. 4.6.

## Мнимая часть симметричных собственных значений



Сплошная линия – чистый газ ( $f=0$ ), пунктирная линия – полные уравнения ( $f=0.05$ ,  $k=1$ ,  $\tau=10$ ), цифры указывают номер собственного значения

Рис. 4.7.

### 4.2. Устойчивость двухфазного пограничного слоя

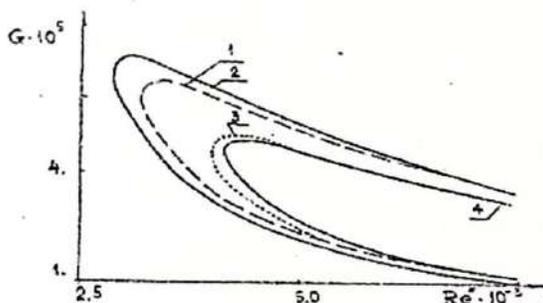
Результаты расчетов устойчивости двухфазного течения в пограничном слое с учетом силы Стокса приведены в табл. 4.17. – 4.29. (см. Приложение) и на рис.4.8– 4.11 Во всех расчетах устойчивости значение параметра  $f$  фиксировано и  $f=0,1$ .

На рис. 4.8. – 4.10. в плоскости  $(G, Re^*)$  приведены кривые нейтральной устойчивости при некоторых значениях параметра Фокнера – Скэн  $\beta$  (пограничный слой с различным распределением градиента давления). При этом  $Re^* = Re \cdot A(\beta)$ , значения  $A(\beta)$  приведены в табл.2.4. Звездочка означает, что число Рейнольдса построено по толщине вытеснения пограничного слоя. Представление результатов в координатах  $G$  и  $T$  (а не  $k$  и  $\tau$ ) удобно, поскольку параметры  $G$  и  $T$  не зависят от числа  $Re$ .

На рис.4.8. показано поведение нейтральных кривых для случая отрицательного градиента давления ( $\beta=0,2$ ). Цифрой

1 обозначена кривая для чистого газа (табл.4.17), цифрами 2 – 4 - кривые, рассчитанные при различных значениях времени релаксации частиц:  $T = 3,2 \cdot 10^2$  (табл.4.18);  $T = 1,9 \cdot 10^5$  (табл.4.19) и  $T = 3,2 \cdot 10^5$  (табл.4.20). Кривая 2 лежит слева от кривой 1, указывая на некоторое уменьшение устойчивости при  $T < 3,2 \cdot 10^2$ . Кривые 3 и 4 расположены справа от кривой 1. Следовательно, с увеличением размера частиц поток становится более устойчивым.

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0,1, \beta = 0,2$

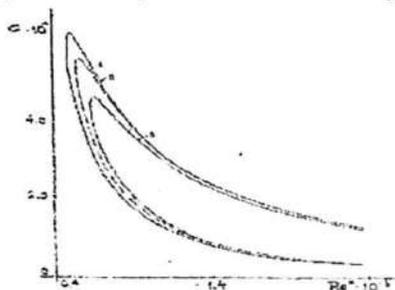


1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 –  $T = 3,2 \cdot 10^2$ , 3 –  $T = 1,9 \cdot 10^5$ , 4 –  $T = 3,2 \cdot 10^5$

Рис. 4.8.

На рис. 4.9. приведены кривые нейтральной устойчивости в случае нулевого градиента давления ( $\beta = 0$ ). Кривая 1 построена при  $f = 0$  (табл.4.21), кривые 2,3 соответствуют значениям  $T = 0,45 \cdot 10^2$  (табл.4.22) и  $T = 3 \cdot 10^4$  (табл.4.23). Видно, что при небольших  $T$ , как и в случае  $\beta = 0,2$ , частицы дестабилизируют течение, а с ростом  $T$  устойчивость потока увеличивается. Эффект стабилизации, однако, выражен при этом слабее, чем при  $\beta = 0,2$ .

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.1$ ,  $\beta = 0$

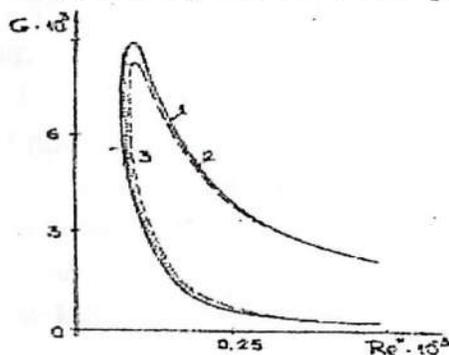


1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 –  $T = 0.45 \cdot 10^2$ , 3 –  $T = 3 \cdot 10^4$

Рис.4.9.

Кривые нейтральной устойчивости, приведённые на рис. 4.10., относятся к случаю, когда градиент давления положителен, причем пограничный слой близок к отрыву ( $\beta = -0.19$ ). Кривые 2 и 3 рассчитаны при  $T = 45$  (табл.4.25) и  $T = 10^3$  (табл.4.26), а цифрой 1 по – прежнему обозначена кривая для чистого газа  $f = 0$  (табл.4.24). Видно, что в этом случае нейтральные кривые практически не меняют своего местоположения, т.е. взвешенные частицы не оказывают влияния на устойчивость пограничного слоя.

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.1$ ,  $\beta = -0.19$

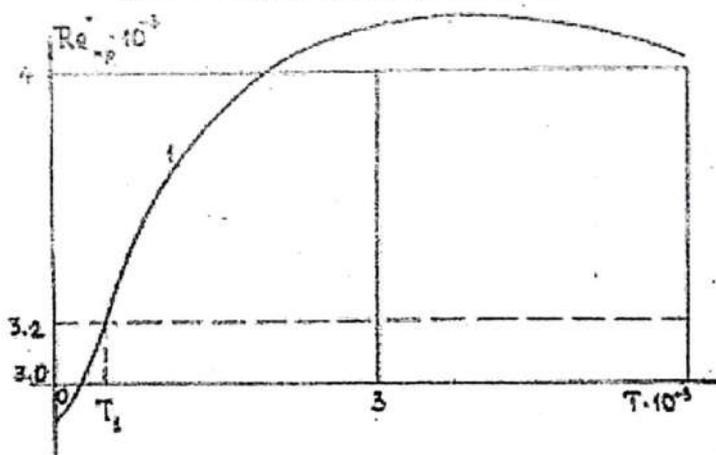


1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2 –  $T = 45$ , 3 –  $T = 10^3$

Рис.4.10.

Наиболее наглядно эти результаты иллюстрируются на рис. 4.11., где приведена зависимость критического числа Рейнольдса  $Re_{cr}^*$  от параметра  $T$ . Кривые 1 – 3 построены при значениях  $\beta = 0,2$  (табл.4.27);  $\beta = 0$  (табл.4.28);  $\beta = -0,19$  (табл.4.29). Соответствующие значения  $Re_{cr}^*$  для чистого газа обозначены прямыми пунктирными линиями. Видно, что при  $\beta = 0,2$  (кривая 1, рис. 4.11a) поток стабилизируется с увеличением  $T$ , начиная со значения  $T = 4,3 \cdot 10^4$ , а при  $T \approx 3,6 \cdot 10^5$  – стабилизация достигает максимума.

Зависимость критического числа Рейнольдса от времени релаксации частиц при  $\beta = 0,2$

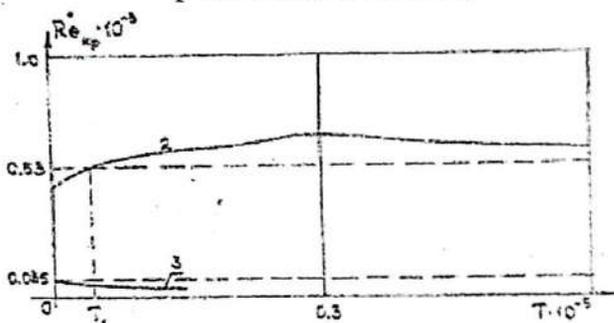


Пунктирная линия – чистый газ ( $f = 0$ ), 1 – полные уравнения ( $f = 0.1$ )

Рис.4.11a.

Аналогичный, но более слабый эффект наблюдается и при  $\beta = 0$  (кривая 2, рис.4.11б). Здесь  $T_1 = 5 \cdot 10^3$ ,  $T_2 \approx 0,3 \cdot 10^5$ . При  $\beta = -0,19$  (кривая 3, рис.4.11б) наблюдается незначительное монотонное снижение устойчивости с ростом  $T$ .

## Зависимость критического числа Рейнольдса от времени релаксации частиц



2 – полные уравнения ( $f = 0.1, \beta = 0$ ), 3 – полные уравнения ( $f = 0.1, \beta = -0.19$ ), пунктирная линия – чистый газ ( $f = 0$ ), при соответствующих значениях  $\beta$

Рис.4.116.

### 4.3. Моделирование двухфазных гидродинамических систем с учетом сил Стокса и Архимеда

В параграфе 4.1. и 4.2. данной главы гидродинамическая устойчивость двухфазных потоков исследована с учётом силы Стокса. Кроме силы Стокса в гетерогенных средах, имеется ещё сила межфазного взаимодействия, так называемая сила Архимеда.

Результаты расчётов, показывающие влияние взвешенных частиц на устойчивость двухфазного течения Пуазейля с учетом сил Стокса и Архимеда приведены на рис.4.12. – 4.13. и в табл. 4.31. – 4.33.

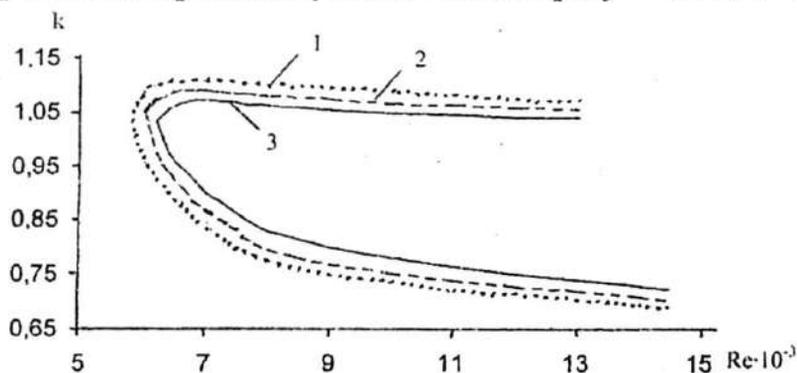
На рис.4.12. в плоскости ( $k, Re$ ) приведены кривые нейтральной устойчивости ( $\lambda_i = 0$ ). Значение параметра  $f$  фиксировано и  $f = 0.05$ .

На нем цифрой 1 отмечены кривые, соответствующие случаю чистого газа ( $f = 0$ ) (табл.4.1). Цифрой 2 – кривые, построенные на основе модели Рахматуллина – Нигматуллина – Дру с учетом сил Стокса и Архимеда.

Кривая 3 получена по этой модели, только с учётом силы Стокса.

Кривые нейтральной устойчивости 2 (табл. 4.31), приведенные на рис. 4.12., получены при  $\tau = 100$  с учётом сил Стокса и Архимеда. Отметим, что кривые 2 и 3 указывают на стабилизирующее влияние частиц и при больших значениях  $\tau$  ( $Re_c > Re_0$ ). Видно, что критическое число Рейнольдса для кривой 2 меньше, чем для кривой 3. Это означает, что при больших значениях времени релаксации частиц сила Архимеда несколько уменьшает устойчивость потока. Рост времени релаксации частиц соответствует росту радиуса частиц и, соответственно, массе. При таких значениях времени релаксации параметров частиц сила Архимеда оказывает влияние на устойчивость потока.

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0.05$ ,  $\tau = 100$



1 — чистый газ ( $f = 0$ ), 2 — полные уравнения с учетом сил Стокса и Архимеда, 3 — полные уравнения с учетом силы Стокса

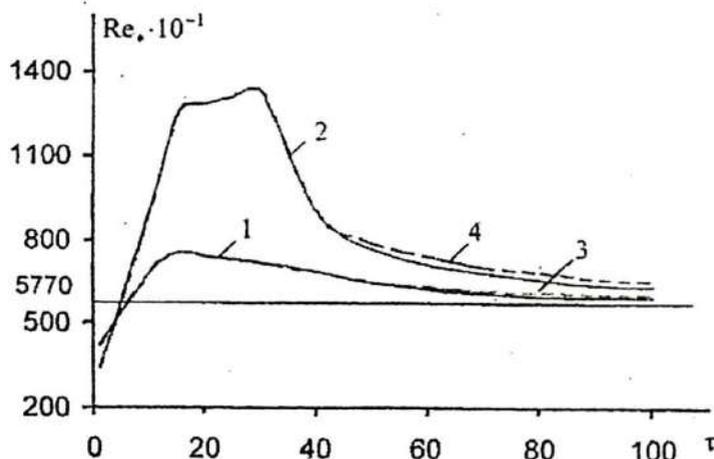
Рис.4.12.

Наиболее наглядно указанные результаты иллюстрируются на рис 4.13., где приведена зависимость критического числа смеси  $Re_c$  от времени релаксации частиц  $\tau$

при различных значениях массовой концентрации частиц  $f$ . Прямой линией обозначено критическое число Рейнольдса:  $Re_0 = 5770$  для чистого газа ( $f = 0$ ).

Кривые 1 (табл.4.32) при  $f = 0,05$  и 2 (табл.4.33) при  $f = 0,1$  построены с учётом сил Стокса и Архимеда. Кроме того, на этом же рисунке приведены кривые 3 ( $f = 0,05$ ) и 4 ( $f = 0,1$ ) с пунктирной линией, построенные с учётом силы Стокса. Видно, что сила Архимеда практически мало влияет на устойчивость потока.

Зависимость критического числа Рейнольдса от времени релаксации частиц



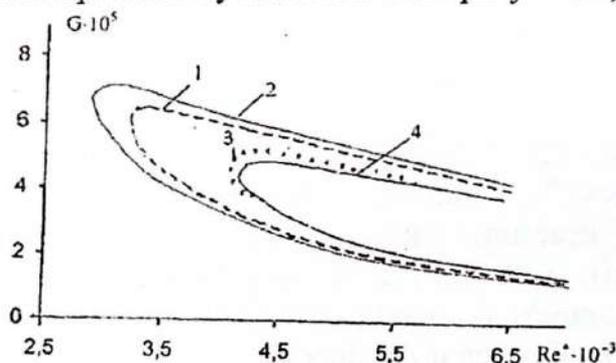
Прямая линия – чистый газ ( $f = 0$ ), кривые 1,2 – модель Рахматуллина – Нигматуллина при  $f = 0.05$  и  $f = 0.1$  соответственно с учетом сил Стокса и Архимеда, кривые 3,4 – модель Рахматуллина - Нигматуллина - Дру с учетом силы Стокса

Рис. 4.13.

Рассмотрим гидродинамическую устойчивость двухфазного потока в пограничном слое с учётом сил Стокса и Архимеда.

На рис. 4.14. в плоскости  $G$ ,  $Re'$  приведены кривые нейтральной устойчивости при значении параметра Фокнера–Скэн  $\beta = 0,2$ . При этом  $Re' = Re \cdot A(\beta)$ , значения  $A(\beta)$  приведены в табл.2.4. Звездочка означает, что число Рейнольдса построено по толщине вытеснения пограничного слоя. Представление результатов в координатах  $G$  и  $T$  (а не  $k$  и  $\tau$ ) удобно, поскольку параметры  $G$  и  $T$  не зависят от числа  $Re$ . Цифрой 1 обозначена кривая для чистого газа (табл.4.18), цифрами 2 – 3 – кривые, рассчитанные при различных значениях времени релаксации частиц:  $\tau = 3,2 \cdot 10^2$  (табл.4.34) и  $\tau = 3,2 \cdot 10^5$  (табл.4.35) с учетом сил Стокса и Архимеда. На этом же рисунке приведена кривая 4, рассчитанная при  $\tau = 3,2 \cdot 10^5$  с учетом силы Стокса.

Кривые нейтральной устойчивости при  $f = 0,1$ ,  $\beta = 0,2$



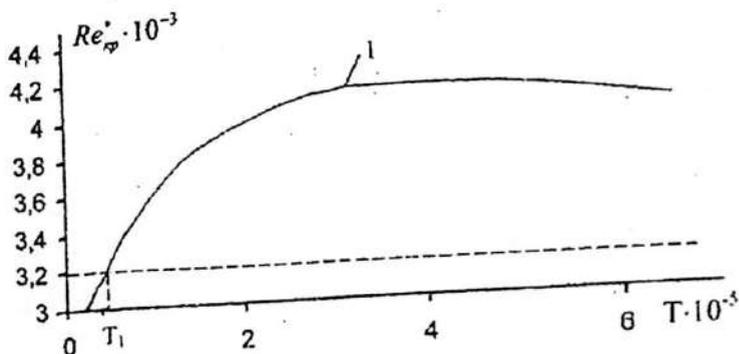
1 – чистый газ ( $f = 0$ ), 2  $\tau = 3,2 \cdot 10^2$ , 3 –  $\tau = 3,2 \cdot 10^5$ , (силы Стокса и Архимеда), 4 –  $\tau = 3,2 \cdot 10^5$  (сила Стокса)

Рис.4.14.

Наиболее наглядно эти результаты иллюстрируются на рис.4.15., где приведена зависимость критического числа Рейнольдса для смеси  $Re'$  от параметра  $\tau$  при  $f = 0,1$ . Кривая 1 построена при значении форм параметра  $\beta = 0,2$ .

соответствующие значения  $Re^*$  для чистого газа обозначены пунктирными линиями.

зависимость критического числа Рейнольдса от времени релаксации частиц при  $\beta = 0.2$



Пунктирная линия – чистый газ ( $f = 0$ ), 1 – модель Матулина - Нигматуллина - Дру с учетом силы Стокса - Архимеда ( $f = 0.1$ )

Рис.4.15.

Видно, что при  $\beta = 0.2$  поток стабилизируется с увеличением  $T$ , начиная со значения  $\tau = 4.3 \cdot 10^4$ , а при  $6 \cdot 10^5$  стабилизация достигает максимума. Расчёты показывают, что кривая 1, построенная с учётом силы Стокса, полностью совпадает с кривой вида 1, построенной с учётом сил Стокса и Архимеда.

#### 4.4. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля

Из результатов предыдущих параграфов следует, что проблема гидродинамической устойчивости для двухфазного потока Пуазейля является многопараметрической задачей. Она характеризуется четырьмя параметрами:  $k$  – волновое число,  $Re$  – число Рейнольдса,  $\tau$ ,  $f$  – время

релаксации и массовая концентрация частиц соответственно. В четырехмерном пространстве параметров  $(k, Re, \tau, f)$  с помощью ССМ построим поверхность, в которой мнимая часть собственных значений равна нулю, т.е.  $\lambda_i = 0$ .

Исследуем пространственную зависимость характерных параметров  $k, Re, \tau$  в пространстве  $(k, Re, \tau)$  при различных значениях массовой концентрации частиц  $f$ .

На рис. 4.15. приведена поверхность нейтральной устойчивости  $\lambda_i = 0$  при  $f = 0.05$ . Внутри этой фигуры течение неустойчиво ( $\lambda_i > 0$ ), вне этой поверхности течение Пуазейля устойчиво ( $\lambda_i < 0$ ).

Поверхность нейтральной устойчивости для двухфазного течения Пуазейля при  $f = 0.05$

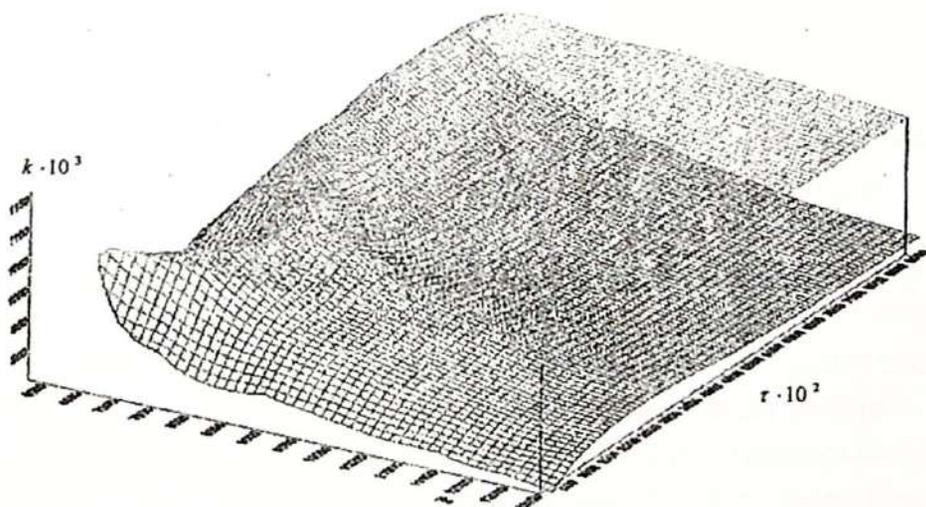


Рис 4.15.

На рис.4.16. изображена поверхность нейтральной устойчивости ( $\lambda_i = 0$ ) при значении массовой концентрации  $f = 0.1$ .

## Поверхность нейтральной устойчивости для двухфазного течения Пуазейля при $f = 0.1$

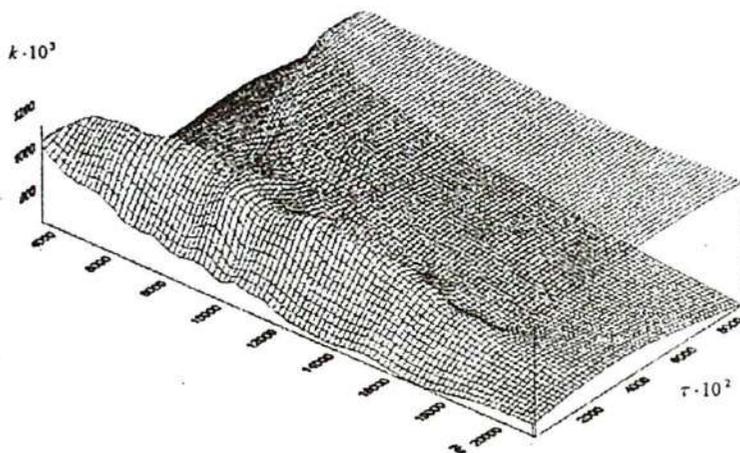


Рис.4.16.

### 4.5. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном пограничном слое

Проблема гидродинамической устойчивости для двухфазного пограничного слоя характеризуется пятью параметрами:  $G$  – волновое число,  $Re^*$  – число Рейнольдса,  $\tau, f$  – время релаксации и массовая концентрация частиц,  $\beta$  – формпараметр Фокнера – Скэн. В этом случае построение параметрических зависимостей приводит к резкому возрастанию объема вычислений. Для построения поверхности нейтральной устойчивости ( $\lambda_i = 0$ ) применяем ССМ. Искомая поверхность при  $\beta = 0.02; f = 0.1$  приведена на рис.4.17.

Во внутренней части этой поверхности течение в двухфазном пограничном слое неустойчиво ( $\lambda_i > 0$ ), вне этой поверхности – устойчиво ( $\lambda_i < 0$ ).

Поверхность нейтральной устойчивости для двухфазного пограничного слоя при  $\beta = 0.02; f = 0.1$

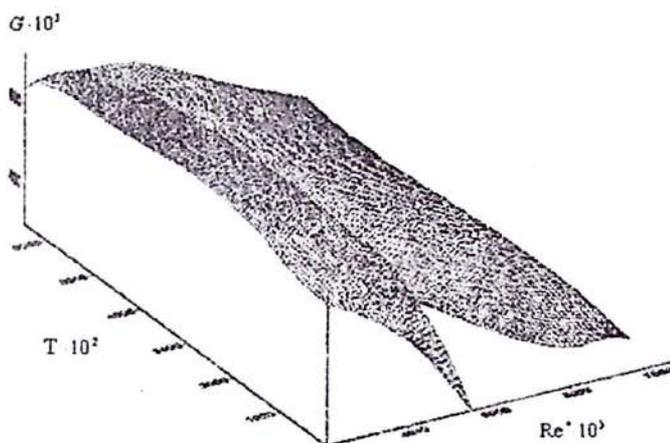


Рис.4.17.

#### 4.6. Структура комплекса программ вычислительного эксперимента для исследования математических моделей гидродинамических потоков

Приведём структуру комплекса программ, реализующего алгоритм ССМ для моделирования проблемы гидродинамической устойчивости (рис.4.18). Основная программа связывает отдельные части программы, входными параметрами являются  $k$ ,  $Re$ ,  $f$ ,  $\tau$ ,  $\beta$ , выходными — собственные значения  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  и собственные векторы. Рассматриваемые течения устойчивы или неустойчивы в зависимости от того,  $\lambda_i < 0$  или  $\lambda_i > 0$ . При  $\lambda_i = 0$  колебания нейтрально устойчивы. Подпрограмма EIGCC с помощью QR алгоритма определяет собственные значения и собственные векторы. Подпрограмма FФ1 уравнение Фокнера — Скэна сводит к системе трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Профиль скорости основного течения  $U(\eta)$

определяются как первая производная от решения уравнения Фокнера–Скэна. Подпрограмма DE14R решает задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с равномерным шагом.

Подпрограмма PARINT значение профиля скорости  $U(\eta)$  интерполирует в узлы полиномов Чебышева. Подпрограмма COIF определяет коэффициенты разложения функций  $U(\eta)$ . Подпрограмма FUNC располагает узлы полиномов Чебышева в порядке возрастания. Подпрограммы MATR11, MATR12, MATR13 предназначены для вычисления специальных сумм, получающихся при аппроксимации ССМ. Подпрограмма SOKP выполняет действия согласно преобразованию Q.

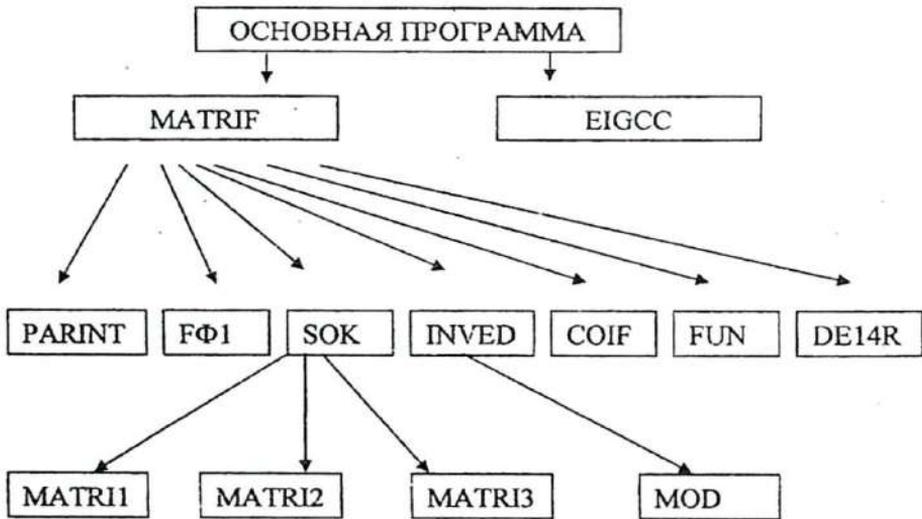


Рис.4.18.

Подпрограмма MOD вычисляет модуль комплексного числа, подпрограмма INVED1 вычисляет обратную матрицу  $W^{-1}$ . Затем с помощью QR алгоритма решается алгебраическая система и определяются собственные значения проблемы гидродинамической устойчивости.

---

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты по моделированию и исследованию устойчивости для однофазных и многофазных гидродинамических систем можно сформулировать следующим образом.

1. Разработан и обоснован новый, эффективный спектрально-сеточный метод для исследования математических моделей гидродинамических систем.

2. Доказана сходимость спектрально-сеточного метода и сходимость приближенных собственных значений гидродинамической устойчивости к точным, получены оценки скорости сходимости.

3. Разработан специальный алгоритм, позволяющий с помощью невырожденных линейных преобразований свести алгебраическую задачу на собственные значения, возникающую при аппроксимации спектрально-сеточным методом, к задаче существенно меньшей размерности.

4. Спектрально-сеточный метод применён для математического моделирования классических проблем устойчивости, описываемых дифференциальным уравнением четвертого порядка с малым параметром при старшей производной: проблема устойчивости однофазных потоков Пуазейля и пограничного слоя. Показано, что спектрально-сеточный метод сочетает высокую точность, характерную для спектральных методов, с экономичностью метода неравномерных сеток.

5. Спектрально-сеточный метод обобщен также для адекватного математического моделирования сложных гидродинамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

6. Сравнены спектрально-сеточный метод и спектральный метод по числу арифметических операций при математическом моделировании гидродинамических систем для однофазных и двухфазных потоков. Показаны высокая точность и эффективность спектрально-сеточного метода.

7. Проведены исследование и анализ спектра собственных значений гидродинамических проблем с применением современной технологии математического моделирования, основанной на спектрально-сеточной аппроксимации. Показано, что частицы наиболее сильно влияют на первое собственное значение.

8. Показано, что спектрально-сеточный метод является новым надежным математическим аппаратом, обеспечивающим вычисление всех гидродинамических характеристик потоков с гарантированной точностью.

9. Спектрально-сеточный метод применен для математического моделирования и исследования пространственной зависимости характерных параметров гидродинамических систем: времени релаксации частиц, числа Рейнольдса и волнового числа при различных значениях массовой концентрации частиц.

10. Проведенное комплексное исследование гидродинамических проблем с применением спектрально-сеточного метода показывает, что в проблеме устойчивости течения Пуазейля, при малых значениях времени релаксации частиц, поток дестабилизируется, а с его увеличением - становится устойчивым. Обнаружено, что существует определённый интервал по времени релаксации, когда поток наиболее устойчив. Для проблемы устойчивости пограничного слоя на пластине показано, что при отрицательных градиентах давления частицы оказывают в целом стабилизирующий эффект, сходный с эффектом, возникающим в течении Пуазейля, а при

возрастании градиента давления влияние частиц на устойчивость уменьшается.

11. Разработан комплекс программ вычислительного эксперимента для исследования математических моделей гидродинамической устойчивости при спектрально-сеточной аппроксимации.

---

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Иностран. лит., 1958. – 195 с.
2. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. – М.: Мир, 1971. – 350 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 571 с.
4. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1977. – 366 с.
5. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. – М.: Физматлит, 2005. – 88 с.
6. Thomas H.H. The stability of plane Poiseuille flow // Phys. rev. – 1953. – № 4(91). – P.780–783.
7. Бахвалов К.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.- Москва, 1969. – № 4(9). – С.841–859.
8. Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной // Числен. методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1981. – № 2(12). – С.45–56.
9. Крылов А.А., Мальхина И.Д. Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра–Зоммерфельда разностным методом // Вычисл. методы и программирование. - Москва, 1968. – Вып.11 – С.44–54.
10. Жарилкасинов А., Лисейкин В.Д., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра –Зоммерфельда // Числен.

методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – № 5(14). – С.45–54.

11. Жарилкасинов А., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н. Эффективная неравномерная сетка для уравнения Орра–Зоммерфельда и спектр течения Пуазейля // Новосибирск, 1984. – 35 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. мех.; № 21.)

12. Loer St. Examination of the stability of disturbed boundary– layer flow by a numerical method // Phys. fluids. – 1969. – № 12(12). – P.139–143.

13. Левитан Ю.Л., Рождественский Б.Л. Спектральные характеристики разностных схем для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися цилиндрами. – Москва, 1973. – 26 с. (Препринт / РАН. Ин –т прикл. матем.; № 29.)

14. Моисеенко Б.Д., Рождественский Б.Л., Сидорова В.К. Спектральные характеристики разностных схем и условия численного моделирования предельных режимов течений вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Москва, 1974. – № 6(14). – С.1499–1515.

15. Колобов Б.П., Слепцов А.Г. Устойчивость двухслойных течений жидкости // Изв. РАН . Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1974. – № 5. – С.155–157.

16. Слепцов А.Г. Проекционно–сеточные методы решения задачи Орра– Зоммерфельда // Числен. методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – № 5(14). – С.111–126.

17. Слепцов А.Г. Метод локальной коллокации и его применение к задачам гидродинамической устойчивости. – Дис. ... канд. Физ – мат. наук.– Новосибирск: ВЦ СО РАН , 1975. – 128 с.

18. Слепцов А.Г. Сходимость метода локальной коллокации // Числен. методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1977.– № 7(8).– С.141–154.

19. Brown W.B. A stability criterion for three-dimensional laminar boundary layers // In: Boundary layer and flow control. – London, 1961. – vol.2. – P.913–923.

20. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – Москва, 1961. – № 3(16). – С.171–174.

21. Левченко В.Я., Соловьев А.С. Устойчивость пограничного слоя на волнистой поверхности // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1972 – № 6. – С.11–16.

22. Левченко В.Я., Соловьев А.С. Устойчивость пространственно – периодических течений типа пограничного слоя // Изв. СО РАН. Сер. техн. наук. – Новосибирск, 1974.– № 13(3). – С.7–15.

23. Гольдштик М.А., Сапожников В.А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии массовых сил // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1968.– № 5.– С.42–46.

24. Jankowski D.F., Takeuchi D.J., Gersting J.M. Jr. The Riccati transformation in the numerical solution of Orr–Sommerfeld problems // Trans. ASME. E.–1972.– № 1(39). – P.280–281.

25. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – Москва, 1961. – № 3(1). – С.524–545.

26. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 2003. – 632с.

27. Сапожников В.А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки // Тр. всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, июль 1986 г. – Новосибирск, 1986. – С.212–219.

28. Желтухин Н.А. Детерминантный метод решения уравнения Орра–Зоммерфельда // *Аэрогазодинамика: Тр. I Сиб. конф. по аэродинамике.* Июль–август 1969. – Новосибирск, 1973. – С.70–73.

29. Лутовинов В.М. О методе локализации собственных значений и одной задаче линейной теории гидродинамической устойчивости // *Уч. зап. ЦАГИ.* – Москва, 1971. – № 2(2). – С.76–80.

30. Orszag S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries I. Galerkin (spectral) representations // *Stud. appl. math.* – 1971. – № 4(50). – P.293-327.

31. Orszag S.A. Galerkin approximations to flows within slabs, spheres and cylinders // *Phys. rev. lett.*–1971. – № 18(26). – P.1100–1103.

32. Orszag S.A. Accurate Solution of the Orr–Sommerfeld stability equation // *J. fluid mech.* – 1971.– № 4(50). – P.689–701.

33. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1980. – 536 с.

34. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

35. Приближенное решение операторных уравнений / Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. – М.: Наука, 1969.– 456 с.

36. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.– 526 с.

37. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.–3–е изд., переработ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

38. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

39. Джураев Т.Д. О спектральных задачах для уравнений третьего порядка составного типа // *Докл. АН Рuz.* – Ташкент, 2006. - №2. – С.5-9.

40. Джураев Т.Д. Об одной спектральной задаче для уравнения третьего порядка составного типа // Докл. АН Руз. – Ташкент, 2006. - №3. – С.3-7.

41. Алимов Ш.А. О суммируемости рядов Фурье функций из  $L_p$  по собственным функциям // Дифференц. уравнения. – Москва, 1970. - №3(6). – С.567-576.

42. Алимов Ш.А. Равномерная сходимость и суммируемость спектральных разложений функций из  $L_p^\alpha$  // Дифференц. уравнения. – Москва, 1973. - №4(9). – С.669-681.

43. Алимов Ш.А. О спектральных разложениях непрерывных функций из классов Соболева // Докл. РАН. – Москва, 1976. - №3(229). – С.529-530.

44. Алимов Ш.А., Сафаев С.А. О числе отрицательных собственных значений оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. – Москва, 1993. - №10(29). – С.1843-1846.

45. Методы расчета турбулентных течений / Дж.Ламли, Ж.Матье и др.; под ред А.Д.Хонкина. – М.:Мир, 1984. – 464 с.

46. Grosch C.E., Salwen H. The stability of steady and time development plane Poiseuille flow // J.fluid mech. – 1968. – № 1(34).–P.177–205.

47. Gottlieb D., Turkel E. On time discretization for spectral methods // Stud.appl.math. – 1980. – № 1(63). – P.67– 86.

48. Kleiser L. Spectral simulation of laminar-turbulent transition in plane Poiseuille flow and comparison with experiments // Lect. notes phys. – 1982. – № 170. – P.280–285.

49. Orszag S.A., Patera A.T. Secondary instability of wallbounded shearflows // J.fluid mech. – 1983. – № 128. – P.347–385.

50. Gottlieb D., Lustman L. The Dufort-Francler Chebyshev method for parabolic initial boundary value problems // Computers and fluids. –1983. – № 2(11). – P.107–120.

51. Bridges T.J., Morris P.J. Spectral calculations of the spatial stability of nonparallel boundary layers // AIAA paper. – 1984. – № 487–P.1–8.

52. Ku H.G., Hatzivramidis D. Solutions of the two – dimensional Navier – Stokes equations by Chebyshev expansion methods // Computers and fluids. – 1985. – № 1(13). – P.99–113.

53. Fulton S.R., Taylor G.D. On the Gottlieb–Turkel time filter for Chebyshev spectral methods // J. comput. phys. – 1984. – № 2(55). – P.302–312.

54. Gottlieb D. The stability of pseudospectral–Chebyshev methods // Math.comput. – 1981. – № 153(36). – P.107–118.

55. Zebib A. A Chebyshev method for the solution of boundary value problems // J.comput.phys. – 1984. – № 3(53). – P.443–455.

56. Dennis S.C.R., Quartapelle L. Direct solution of the vorticity – stream function ordinary differential equations by a Chebyshev approximation // J.comput.phys. – 1983. – № 3(52) – P. 443–455.

57. Fox L., Parker I.V. Chebyshev polynomials in numerical analysis. – London: Oxford university press, 1968. – 205 p.

58. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

59. Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

60. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

61. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2 – х т. – М.: Мир, 1985. Т.1. – 264 с.

62. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. В 2 – х т. – М.: Мир, 1985. Т.2. – 400 с.

63. Коновалов А.Н. Введение в вычислительные методы линейной алгебры. – Новосибирск: Наука, 1983. – 84 с.

64. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

65. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М. - Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
66. Gary J., Helgason R. A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems // J.comput. phys. – 1970. – № 5. – P.169–187.
67. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
68. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1980. – 426 с.
69. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1978. – 591 с.
70. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
71. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. В 2 – х т. – М.: Наука, 1977. Т.1. – 304 с.
72. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. В 2 – х т.–М.: Наука, 1977. Т.2.– 400 с.
73. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
74. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1977. – 196 с.
75. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
76. Василенко В.А. Сплайн – функции: теория, алгоритмы, программы.– М.: Наука, 1983. – 261 с.
77. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
78. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. – Новосибирск: Наука, 1990. – 247 с.

79. Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1981. – 144 с.
80. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
81. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1978. – 464 с.
82. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
83. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
84. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
85. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
86. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
87. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
88. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 192 с.
89. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 2005. – 288 с.
90. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 2007. – 256 с.
91. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. – М.: Физматгиз, 1962. – 479 с.
92. Grosch C., Orszag S.A. Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinate transforms // J.comput. phys.–1977.–№3(25).–Р.273–295.
93. Численные методы в динамике жидкостей / Э.Джеймсон, Т.Мюллер и др.; под ред. Г. Вирц, Ж.Смолдерен. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

94. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2 – х т. – М.: Наука, 1984. Т. 2.– 600 с.

95. Ладъженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Физматлит, 1961.– 204 с.

96. Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматлит, 1959. – 916 с.

97. Темам Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ.– М.: Мир, 1981. – 408 с.

98. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.– М.: Изд – во МГУ, 1990. – 310 с.

99. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. В 4 – х т. – М.: Наука, 1986.Т.4. – 736 с.

100. Иосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 301 с.

101. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний.– М.: Наука, 1976. – 384 с.

102. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. – М.: Мир, 1981.– 640 с.

103. Шапин В.М. Гидромеханика. – М.: Высшая школа, 1990. – 384 с.

104. Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье – Стокса. – М.: Наука, 1985. – 312 с.

105. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.

106. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981.–368 с.

107. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Суинни Х., Голлаб Дж и др.; под. ред. Х.Суинни, Дж.Голлаба. – М.: Мир, 1984. – 344 с.

108. Reynolds O. On the experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water

shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels// Phil. trans.roy. soc.-1883. - №174.-P.935-982.

109. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроницающих движений сжимаемых сред // Прикл. матем. и мех. – Москва, 1956. – №2(20). – С.184–195.

110. Нигматулин Р.И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа.– Москва, 1967. – №5. – С.33–47.

111. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

112. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2 – х т. – М.: Наука, – 1987. Т.1. – 464 с.

113. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2 – х т. – М.: Наука, 1987. Т.2. – 360 с.

114. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Лекции для студентов НГУ. – Новосибирск, 1972. – 128 с.

115. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Яненко Н.Н., Солоухин Р.И. и др. – Новосибирск: Наука, 1980. – 159 с.

116. Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. – М.: Мир, 1975. – 378 с.

117. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. – М: Мир, 1971. – 536 с.

118. Стулов В.П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости газа. – Москва, 1979. – №6. – С.51–60.

119. Крайко А.Н., Стернин Л.Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Прикл. матем. и мех. – 1965. – № 3(29). – С.418–429.

120. Крайко А.Н. К двухжидкостной модели течений газа и диспергируемых в нем частиц // Прикл. матем. и мех. – 1982. – № 1(26). – С.96–106.

121. Осипцов А.Н. О структуре ламинарного пограничного слоя дисперсной смеси на плоской пластине // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1980. – № 4. – С.48–54.

122. Осипцов А.Н. Тонкий профиль в потоке дисперсной смеси // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1981 – №5. – С.147–154.

123. Осипцов А.Н. К учету конечности объема и гидродинамического взаимодействия частиц в газовзвешьях // Докл. РАН. – Москва, 1984. – № 5(275). – С.1073–1076.

124. Гупало Ю.П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1960. № 6. – С.38–46.

125. Желтухин И.Д. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе, несущем твердую примесь // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1971. – № 2. – С.103–110.

126. Дементьев О.Н. Устойчивость конвективного движения среды, несущей твердую примесь // Гидродинамика. Сб. науч. тр. Пермского ГПИ. – Пермь, 1974. № 7. – С.3–15.

127. Садуллаев Р., Сиддиков А.М., Абилкасимов Б. Автоматическая модель и алгоритм расчета вытеснения нефти водой и газом / Вопросы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. тр. – Ташкент, ИК АН РУз, 1996. – вып. 101. – с.57–69.

128. Воинов О.В., Петров А.Г. Устойчивость относительного движения фаз в течениях двухфазных сред // Ж. прикл. мех. и техн. физ. – Москва, 1982. – № 1. – С.83–90.

129. Кирейко Г.В., Пилипенко В.Н. Устойчивость плоского течения Пуазейля вязкой анизотропной жидкости

// Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1983. – № 2. – С.66–72.

130. Hewitt G.F. Applications of two-phase flow // Chem. eng. prog. – 1982. – № 7(78). – P. 38–46.

131. Sproull W.T. Viscosity of dusty gases // Nature. – 1961. – № 4780(190). – P.48–50.

132. Saffman P.G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J. Fluid mech. – 1962. – № 1(13). – P.120–128.

133. Drew D.A. Stability of a Stokes layer of a dusty gas // Phys. fluids. – 1979. – № 11(22). – P.2081–2086.

134. Drew D.A. Lift-generated instability of the plane Couette flow of a particle-fluid mixture // Phys. fluids. – 1975. – № 8(18). – P.935–938.

135. Drew D.A. Two-phase flows: Constitutive equations for lift and Brownian motion and some basic flows // Arch. ration, mech, and anal. – 1976. – № 2(62). – P.149–163.

136. Drew D.A. Mathematical modeling of two – phase flow // Ann. rev. fluid mech. – 1983. – 15. – P.261 – 291.

137. Pai S.I. A critical review of the fundamental equations of a mixture of a gas and small solid particles // Z. flugwiss. – 1971. – № 8 – 9(19). – P.353– 360.

138. Stewart H.B., Wendroff B. Review Article. Two-phase Flows: Models and methods // J. comput. phys. – 1984. – № 3(56). – P.363–409.

139. Ransom V.H., Hisks O.L. Hyperbolic two-pressure models for two– phase flow // J.comput.phys. – 1984. – № 1(53). – P.124–151.

140. Michael D.H. The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // J.fluid mech. – 1964. – № 1(18). – P.19–32.

141. Liu J.T.C. On the hydrodynamic stability of parallel dusty gas flows // Phys. fluids. 1965. – № 11(8). – P.1939–1945.

142. Stewart H.B. Stability of two-phase flow calculation using two-fluid models // J. comput. phys. – 1979. – № 2(33). – P.259–270.

143. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.

144. Протодыяконов И.О., Чесноков Ю.Г. Гидромеханические основы процессов химической технологии. – Л.: Химия, 1987. – 360 с.

145. Умаров А.И., Хамидов А.А. Состояние и развитие механики жидкости и газа в Узбекистане // Проблемы механики. - Ташкент, 1996. – № 3. – С.3–7.

146. Файзуллаев Д.Ф., Умаров А.И., Шакиров А.А. Гидродинамика одно – и двухфазных сред и ее практические приложения. – Ташкент: Фан, 1980. – 167 с.

147. Хашпель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 631 с.

148. Хужаеров Б.Х. Модель многокомпонентной кольматационно – суффозионной фильтрации // Инж. физ. журнал. – Москва, 1994. - № 4(66). – С.427–433.

149. Хужаеров Б.Х., Чулиев Э.А. Влияние сил Стокса и Архимеда на устойчивость двухфазного потока // Труды Института механики РАН. Уфимский научный центр. Уфа: Гелем, 2003. - Вып.3. – С.266–270.

150. Хужаеров Б.Х., Чулиев Э.А. Устойчивость двухфазного течения смесей с учетом сил Стокса и Архимеда // Актуальные проблемы прикладной матем. и механики: Всероссийской конф., посвященная 70 –летию со дня рождения академика А.Ф.Сидорова. – Екатеринбург, 2003. – С. 83–84.

151. Чулиев Э.А. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля с учетом силы Стокса и Архимеда // Современные проблемы механики жидкостей, многофазных сред и распространения волн в сплошных средах: Материалы респ. конф. с участием иностранных ученых, посвященной 90 – летию академика АН РУз Х.А.Рахматуллина. – Ташкент, 1999. – С. 380–383.

152. Khuzhayorov V.Kh. Filling and releasing of pores by porticles // International conference on porous media and their

applications in science, engineering and industry. Hawaii, USA. 16 – 21.06.96. - P. 3.

153. Khuzhayorov B.Kh., Chuliev E.A. Stability of two – phase fluxes with taking into account Stokes and Archimed forks // Science and technology. International jurnal of scientific articles. Book 1 – part 1. Atyrau. – 2002. – P. 30.

154. Manuilavich S.V., Asmolov E.S. Stability of dusty–gas channel flow with non – uniform distribution of particle density // EUROMECH 3rd European Fluid mechanics conference. Book of abstracts. Gottingen. Sept. 15 – 18. 1997. - P. 23.

155. Ozgen S., Sarma G.S.R. Two–fluid boundary layer flow stability // EUROMECH 3rd European Fluid mechanics conference. Book of abstracts. Gottingen. Sept. 15 – 18. 1997. – P. 271.

156. Чулиев Э.А. Гидродинамическая устойчивость двухфазного течения с учётом сил Стокса и Архимеда: Дис. ... канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 2004. – 117 с.

157. Нармурадов Ч.Б. О сравнении итерационных схем для численного решения разностных аналогов повышенной точности задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Числен. методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1979. – № 6(10). – С. 97–104.

158. Соловьев А.С., Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном прямом методе решения уравнения Пуассона. – Новосибирск, 1983.–17 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отделение. Ин–т теорет. и прикл. мех.; №9 ).

159. Нармурадов Ч.Б. Устойчивость запыленного потока Пуазейля в плоском канале // Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики: Тр. Межд. конф. молодых ученых и специалистов, 4–6 апреля 1984.– Новосибирск, 1985. – С. 201–205.

160. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Устойчивость плоского течения Пуазейля со взвешенными частицами. –

Новосибирск, 1984. – 18 с. – (Препринт / РАН. Сиб. отделение. Ин-т теорет. и прикл. мех.; №19).

161. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Численное решение задачи устойчивости пограничного слоя со взвешенными частицами. Новосибирск, 1985. – 24 с. (Препринт / РАН. Сиб. отделение. Ин-т теорет. и прикл. мех.; №20).

162. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1986. – № 1. – С. 46–50.

163. Нармурадов Ч.Б. Сеточный метод Галёркина и его приложения к задачам гидродинамической устойчивости двухфазных потоков: Дис. ... канд. физ. – мат. наук. – Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1987. – 140 с.

164. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С. Устойчивость двухфазного потока газ – твердые частицы в пограничном слое // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. – Москва, 1987. – № 2. – С. 60–64.

165. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость проекционно – сеточного галеркинского метода // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1989. – № 4(3). – С. 113–130.

166. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Численный метод решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений на основе неоднородной сплайн – аппроксимации // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Сб. науч. тр. Инс-т. матем. СО РАН. – Новосибирск, 1989. – С. 151–164.

167. Нармурадов Ч.Б., Бегалиев О., Турсунов У.К. Применение метода предварительного интегрирования для решения задачи на собственные значения // Моделирование и исследование устойчивости систем: Тез. Межд. Украинской конф. 15–19 мая 1995. – Киев, 1995. – С. 78.

168. Нармурадов Ч.Б. Об одном высокоточном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. // II городская конф. молодых ученых и специал.: Тез. докл. 25–27 мая 1990. - Самарканд, 1990. – С. 34.

169. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Применение сеточного метода Галеркина для решения задачи устойчивости слоя сдвига: Задачи прикл. матем. Сб. науч. ст. – Самарканд, 1992. – С. 27–31.

170. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Об уравнениях устойчивости некоторых двухфазных потоков // Науч–техн. и прак. конф.: Тез. докл. 20–22 мая 1993. – Навои, 1993. – С. 28.

171. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Икки фазали оқимлар гидродинамик тургунлик масаласини тадқиқ қилиш учун амалий программалар пакети: ТерДУ XXVI илмий- назарий конференцияси маърузалар баёни. – Термиз, 1994.–169 б.

172. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Фазоларнинг ўзаро таъсир кучлари барқарор бўлмаган самараларини эътиборга олган ҳолда икки фазали оқимларнинг тургунлик тенгламалари: Сб. науч. тр. СамГУ. – Самарканд, 1995. – С. 23–29.

173. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Уравнения гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Современные проблемы прикладной математики и экономики: Тез. докл. межд. науч. конф. 18 – 20 ноября 1997. – Самарканд, 1997. – С. 99–102.

174. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Уравнения гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Актуальные проблемы механики контактного взаимодействия: Сб. науч. тр. респ. конф. СамГУ. – Самарканд, 1997. – С. 181–183.

175. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А., Хужаёров Б.Х. Влияние силы Стокса и Архимеда на устойчивость двухфазного потока Пуазейля // Доклады АН РУз. – Ташкент, 1998. – № 2. – С. 27–30.

176. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А., Хужаёров Б.Х. Устойчивость пограничного слоя двухфазных потоков с учетом сил Стокса и Архимеда // Узбекский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 1998. – № 4. – С.13–17.

177. Нармурадов Ч.Б., Хуррамов Ш.Ш. Эффективность спектрально – сеточного метода // XXX научно – теорет. конф. ТерГУ.: Тез. докл. - Ташкент, 1998. – С. 96–97.

178. Нармурадов Ч.Б. Решение уравнения Орра – Зоммерфельда спектрально – сеточным методом // Докл. АН РУз. - Ташкент, 2001. – № 10–11. – С.9–12.

179. Нармурадов Ч.Б. Алгоритм спектрально–сеточного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости пограничного слоя

// Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2001. – № 5–6. – С. 57–60.

180. Нармурадов Ч.Б. Спектрально–сеточный метод и его применение к задачам гидродинамической устойчивости // Современные проблемы алгоритмизации и программирования: Тез. докл. респ. конф. 5–7 сентября 2001. – Ташкент, 2001. – С.186–188.

181. Нармурадов Ч.Б. Пакет прикладных программ для решения задачи гидродинамической устойчивости // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2002. – № 2. – С.40–43.

182. Нармурадов Ч.Б., Чулиев Э.А. Об одном эффективном методе решения задачи устойчивости движения двухфазных потоков // Математическое моделирование и вычислительный эксперимент: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25–27 марта 2002. – Ташкент, 2002. – С.85–86.

183. Нармурадов Ч.Б., Подгаев А.Г. Сходимость спектрально – сеточного метода // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2003. – №2. – С.64–71.

184. Нармурадов Ч.Б., Хаккулов Ю.А. Применение спектрально – сеточного метода для решения задачи

гидродинамической устойчивости двухфазных потоков // Математическое моделирование и вычислительный эксперимент: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25–27 марта 2002. – Ташкент, 2002. – С.85–86.

185. Нармурадов Ч.Б., Соловьев А.С., Турдиев Р.Т. Решение уравнения Пуассона с помощью спектрального метода // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2003. – № 2. – С.97–101.

186. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Спектрально – сеточный метод для исследования гидродинамической устойчивости двухфазного течения в пограничном слое // Математическое моделирование экологических систем: Тез. докл. Межд. науч. конф. 9–12 сентября. 2003. – Алматы, 2003. – С. 131.

187. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Численное решение задачи гидродинамической устойчивости с помощью спектрально–сеточного метода // Инновация–2003: Тез. докл. Межд. науч. – практ. конф. 13 – 15 мая 2003. – Ташкент, 2003. – С.60–62.

188. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Решение задачи гидродинамической устойчивости двухфазных потоков спектрально – сеточным методом / Вопросы кибернетики: Сб. науч. тр. – Ташкент, ИК АН РУз, 2002. - вып. 168 – 5–9.

189. Нармурадов Ч.Б. Численное решение уравнения Пуассона с помощью рядов по полиномам Чебышева/ Алгоритмы: Сб. науч. тр. – Ташкент, ИК АН РУз, 2003. - вып. 90 – с. 35–40.

190. Нармурадов Ч.Б. Матричное преобразование в спектрально – сеточном методе // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». - Ташкент, 2003. – №4. – С. 9–13.

191. Нармурадов Ч.Б. Об эффективном методе решения задачи гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Докл. АН РУз. – Ташкент, 2004. №1. – С.19–26.

192. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Исследование пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля // Проблемы механики и сейсродинамики сооружений: Материалы Межд. конф. 27–28 мая 2004. – Ташкент, 2004. – С.361–363.
193. Нармурадов Ч.Б. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном течении Пуазейля // Узбекский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. – №1. – С.46–48.
194. Нармурадов Ч.Б. Пространственная зависимость характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Узбекский журнал «Проблемы механики». – Ташкент, 2004. – №3. – С.21–24.
195. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Спектрально – сеточная аппрок – симация уравнений гидродинамической устойчивости для двухфазных потоков // Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Тр. Межд. конф. 18–27 апреля 2005 – Ташкент, 2005. – Т.2. – С. 102–104.
196. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра – Зоммерфельда // Математическое моделирование. – Москва, 2005. – № 9(17). – С. 35–42.
197. Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных и двухфазных потоков // Современные проблемы и перспективы механики: Материалы Межд. конф. 17–18 мая 2006. – Ташкент, 2006. – С.73–75.
198. Нармурадов Ч.Б. Исследование пространственной зависимости характерных параметров в двухфазном пограничном слое // Техника и технология. – Москва, 2007. – № 5(23). – С. 48–51.
199. Нармурадов Ч.Б. Поверхность нейтральной устойчивости для двухфазного течения Пуазейля // Техника и технология. – Москва, 2007. – № 5(23). – С. 52–54.

200. Нармурадов Ч.Б. Спектр собственных значений для двухфазного течения Пуазейля и пространственная зависимость характерных параметров // Техника и технология. – Москва, 2007. – № 5(23). – С.55–57.

201. Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование. – Москва, 2007. – № 6(19). – С. 53–60.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 4.1

Нейтральная кривая для течения Пуазейля ( $f = 0$ )

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,7	1658	0,1818	1,8
0,73	1382	0,1919	0,0
0,75	1265	0,1977	2,1
0,8	994	0,2133	0,8
0,85	836	0,2267	3,7
0,9	697	0,2407	0,0
0,95	623	0,2520	0,4
1,0	577	0,2610	0,3
1,05	613	0,2645	2,9
1,095	800	0,2567	0,6
1,095	926	0,2500	0,8
1,09	1065	0,2433	1,3
1,08	1217	0,2365	3,5
10,7	1382	0,2301	3,7

Таблица 4.2.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 1$   
(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,7	1298	0,1888	0,5
0,75	994	0,2048	8,4
0,83	686	0,2297	-0,2
0,9	555	0,2476	4,3
0,95	474	0,2608	0,9
1,0	425	0,2701	2,0
1,05	410	0,2793	1,0
1,1	425	0,2828	2,4
1,15	584	0,2714	1,7
1,14	800	0,2511	3,9
1,12	1109	0,2383	3,1
1,1	1383	0,2270	3,6

Таблица 4.3.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 1$   
(модель Сафмэна)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,5	5978	0,1253	3,6
0,63	3155	0,1527	3,2
0,7	1968	0,1764	1,3
0,77	1470	0,1948	3,4
0,83	1170	0,2109	1,0
0,89	1036	0,2225	0,4
0,92	1022	0,2262	0,6
0,94	1065	0,2274	1,5
0,97	1217	0,2245	1,4
0,98	1563	0,2152	0,0
0,97	1968	0,2052	1,7
0,94	2979	0,1876	1,9

Таблица 4.4.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 10$   
(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,7	1489	0,1812	-1,0
0,75	1201	0,1953	1,1
0,8	994	0,2089	1,7
0,85	849	0,2217	1,5
0,9	764	0,2325	3,0
0,95	697	0,2428	0,3
1,0	686	0,2496	-0,9
1,03	837	0,2448	3,6
1,04	1065	0,2350	3,8
1,03	1382	0,2233	1,3

Таблица 4.5.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 10$   
(модель Сафмэна)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,63	3726	0,1470	3,3
0,7	2266	0,1713	2,3
0,77	1600	0,1916	2,7
0,83	1217	0,2095	0,4
0,89	1065	0,2219	3,3
0,94	980	0,2317	2,0
1,0	1094	0,2328	0,5
1,01	1217	0,2293	-0,7
1,01	1562	0,2190	3,3
0,94	3125	0,1876	3,6

Таблица 4.6.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 30$   
(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,7	1758	0,1790	3,0
0,75	1383	0,1928	1,1
0,8	1109	0,2074	-0,6
0,83	1008	0,2161	3,3
0,87	8740	0,2263	-1,5
0,92	800	0,2369	3,8
0,96	730	0,2456	1,9
1,0	719	0,2512	2,8
1,02	753	0,2514	3,9
1,05	800	0,2519	0,3
1,04	1065	0,2386	0,3
1,04	1383	0,2259	1,2

Таблица 4.7.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 30$   
(модель Сафмэна)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_r 10^4$
0,7	1968	0,7162	4,0
0,77	1249	0,2021	1,9
0,83	939	0,2193	2,1
0,89	862	0,2297	0,7
0,92	862	0,2333	1,2
0,94	887	0,2354	3,2
0,97	926	0,2365	3,0
1,0	994	0,2357	2,7
1,02	1079	0,2339	1,9
1,04	1170	0,2319	1,9
1,09	1525	0,2262	9,1
1,1	1562	0,2241	2,3
1,1	1758	0,2210	4,8
1,09	1968	0,2180	5,2

Таблица 4.8.

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 100$   
(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_i 10^4$
0,7	1737	0,1803	2,1
0,74	1382	0,1931	3,3
0,77	1154	0,2039	1,5
0,8	1065	0,3103	3,6
0,85	874	0,2248	1,6
0,9	741	0,2381	1,4
0,95	654	0,2499	0,5
1,0	613	0,2588	0,4
1,02	623	0,2604	2,0
1,08	800	0,2554	1,5
1,08	926	0,2489	1,0
1,077	1065	0,2422	1,3
1,06	1382	0,2290	3,0

Таблица 4.9

Нейтральная кривая при  $f = 0.05$ ;  $\tau = 100$   
(модель Сафмэна)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_i 10^4$
0,71	1845	0,1736	0,5
0,74	1790	0,2686	3,5
0,77	1300	0,2009	1,2
0,8	1050	0,2130	1,2
0,84	824	0,2233	2,8
0,85	800	0,2282	1,0
0,89	770	0,2356	1,5
0,9	760	0,2370	0,8
0,95	675	0,2491	3,6
0,97	623	0,2554	2,0
1,0	560	0,2641	2,4
1,05	686	0,2604	2,9
1,09	1300	0,2300	1,8
1,12	1400	0,2283	1,8
1,14	1500	0,2270	0,6

Таблица 4.10.

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $\tau$  при  $f=0.05$ 

(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$\tau$	$Re_{кр} \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_l 10^4$
1	425	0,2715	2,0
10	686	0,2496	-0,9
15	753	0,2471	1,1
20	741	0,2488	0,8
25	730	0,2501	1,8
30	719	0,2540	2,8
40	686	0,2536	2,8
50	654	0,2558	1,4
60	633	0,2573	2,8
70	625	0,2579	0,2
80	618	0,2585	0,0
90	616	0,2586	0,3
100	613	0,2550	0,4

Таблица 4.11

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $\tau$  при  $f=0.1$ 

(модель Рахматуллина – Нигматуллина – Дру)

$\tau$	$Re_{кр} \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_l 10^4$
1	336	0,2800	2,5
10	926	0,2326	2,0
15	1165	0,8205	0,0
20	1277	0,6639	0,4
25	1298	0,5801	1,9
30	1331	0,2223	0,8
40	900	0,2414	0,0
50	800	0,2469	2,5
60	741	0,2503	2,6
70	707	0,2520	2,4
80	689	0,2539	2,1
90	664	0,2558	1,2
100	654	0,2560	1,0

Таблица 4.12.

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $\tau$  при  $f = 0.05$   
(модель Сафмэна)

$\tau$	$Re_{кр} \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda, 10^4$
0,01	560	0,2607	0,4
0,1	600	0,2579	0,8
1	1020	0,2260	0,6
10	980	0,2317	2,0
30	860	0,2297	0,7
40	449	0,2705	0,8
50	437	0,2720	0,0
60	436	0,2726	0,2
70	450	0,2720	2,1
80	460	0,2717	2,0
90	500	0,2689	2,5
100	560	0,2641	2,4

Таблица 4.13.

Действительная часть  $\lambda_r$  симметричных собственных значений при  $f = 0; k = 1$

$Re \cdot 10^{-2}$	$\lambda_r$	1	3	5	7
1		0,4784	0,6931	0,651	0,663
10		0,3462	0,8881	0,798	0,427
20		0,3121	0,9209	0,857	0,331
30		0,2922	0,9354	0,883	0,286
40		0,2785	0,9440	0,899	0,259
50		0,2681	0,9499	0,904	0,239
60		0,2598	0,9543	0,917	0,225
70		0,2529	0,9577	0,923	0,213
80		0,2740	0,9604	0,929	0,204
90		0,2419	0,9627	0,933	0,197
110		0,2335	0,9663	0,940	0,183
130		0,2226	0,9690	0,943	0,173

Таблица 4.14.

Мнимая часть  $\lambda_r$  симметричных собственных значений при  $f=0$ ,  $k=1$

$\lambda_r$ $\text{Re} \cdot 10^{-2}$	1	3	5	7
1	-0,1629	-0,3825	-0,873	-1,56
10	-0,0421	-0,1100	-0,197	-0,29
20	-0,0197	-0,0782	-0,140	-0,26
30	-0,0101	-0,0639	-0,114	-0,23
40	-0,0049	-0,0554	-0,099	-0,22
50	-0,0017	-0,0496	-0,089	-0,21
60	-0,0003	-0,0453	-0,081	-0,20
70	-0,0017	-0,0420	-0,075	-0,19
80	-0,0026	-0,0393	-0,071	-0,19
90	-0,0033	-0,0370	-0,066	-0,18
110	-0,0040	-0,0335	-0,058	-0,17
130	-0,0042	-0,0308	-0,051	-0,17

Таблица 4.15.

Действительная часть  $\lambda_r$  симметричных собственных значений при  $f=0.05$ ,  $\tau=10$

$\lambda_r$ $\text{Re} \cdot 10^{-2}$	1	3	5	7
1	1,0407	0,6937	0,661	0,663
10	0,3428	0,8916	0,792	0,419
20	0,3078	0,9234	0,873	0,313
30	0,2879	0,9354	0,881	0,260
40	0,2742	0,9446	0,925	0,227
50	0,2538	0,9523	0,944	0,204
60	0,2555	0,9559	0,952	0,186
70	0,2487	0,9573	0,956	0,172
80	0,2429	0,9578	0,959	0,161
90	0,2222	0,9562	0,973	0,142
110	0,2299	0,9544	0,968	0,137
130	0,2226	0,9533	0,973	0,125

Таблица 4.16.

Мнимая часть  $\lambda_i$  симметричных собственных значений при  $f = 0.05$ ,  $\tau = 10$

$\lambda_i$ $Re \cdot 10^{-2}$	1	3	5	7
1	-0,0974	-0,3875	-0,878	-1,570
10	-0,0431	-0,1165	-0,216	-0,319
20	-0,0212	-0,0858	-0,138	-0,294
30	-0,0116	-0,0678	-0,157	-0,279
40	-0,0064	-0,0618	-0,125	-0,269
50	-0,0033	-0,0543	-0,108	-0,262
60	-0,0012	-0,0480	-0,093	-0,255
70	0,0000	-0,0436	-0,078	-0,249
80	0,0009	-0,0409	-0,0068	-0,245
90	0,0015	-0,0284	-0,043	-0,195
110	0,0020	-0,0365	-0,048	-0,233
130	0,0021	-0,0321	-0,043	-0,227

Таблица 4.17.

Нейтральная кривая для пограничного слоя при  $f = 0$ ;  $\beta = 0,2$

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,7	9540	0,2406	0,4
1,0	7880	0,2449	-0,1
2,0	5410	0,2563	1,5
3,0	4330	0,2658	0,8
4,0	3720	0,2732	1,5
5,0	3340	0,2795	0,6
5,5	3240	0,2817	1,8
6,0	3200	0,2834	1,4
6,4	3250	0,2833	0,1
6,45	3320	0,2824	0,0
6,43	3360	0,2819	0,0
6,4	3490	0,2804	-0,0
6,0	4000	0,2745	1,3
4,0	6500	0,2594	1,1

Таблица 4.18.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $T = 3,2 \cdot 10^2$

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^4$
1,0	7530	0,2437	-0,3
2,0	5160	0,2546	0,0
4,0	3560	0,2706	1,0
6,3	2950	0,2816	1,0
6,5	2890	0,2828	0,7
6,7	2890	0,2833	1,0
7,0	2950	0,2833	0,4
7,1	3150	0,2808	-1,0
7,0	3280	0,2790	-0,8
6,5	3730]	0,2735	1,0
6,0	4230	0,2692	-0,8
5,0	5160	0,2630	1,0

Таблица 4.19.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $T = 1,9 \cdot 10^5$

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^4$
2,0	5400	0,2506	-0,3
3,0	4520	0,2579	1,0
4,0	4070	0,2544	0,4
4,5	3980	0,2668	0,1
4,8	4030	0,2679	0,3
4,9	4180	0,2667	1,0
4,9	4430	0,2653	0,4
4,8	4570	0,2642	1,8
4,5	5100	0,2667	1,0
4,0	5800	0,22572	0,7
3,0	7650	0,2490	-0,6

Таблица 4.20.

Нейтральная кривая для пограничного слоя

при  $f=0,1$ ;  $\beta=0,2$ ;  $\Gamma=3,2 \cdot 10^5$ 

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^4$
1,0	7790	0,2400	0,7
2,0	5600	0,2488	0,3
3,0	4690	0,2572	-0,0
4,0	4270	0,2644	1,2
4,3	4190	0,2659	-0,0
4,5	4160	0,2666	0,2
4,8	4270	0,2669	-0,0
4,8	4580	0,2651	-0,1
4,5	5120	0,2617	-0,1
4,0	5830	0,2578	1,0
6,0	4230	0,2692	-0,8

Таблица 4.21.

Нейтральная кривая для пограничного слоя

при  $f=0$ ,  $\beta=0$ 

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^4$
0,1	3650	0,3065	8,3
0,3	2430	0,3135	0,4
0,5	1820	0,3204	3,6
1,1	1210	0,3357	3,2
1,7	970	0,3471	1,9
2,5	760	0,3521	1,5
3,2	670	0,3721	3,2
4,0	600	0,3816	3,0
5,6	530	0,3988	1,1
5,7	560	0,3990	2,7
5,6	580	0,3988	2,7
5,4	630	0,3963	1,2
4,8	730	0,3897	0,7
4,5	780	0,3864	0,1
4,3	800	0,3847	0,1
4,2	830	0,3831	0,1
3,1	1100	0,3663	1,5
1,8	1740	0,3419	1,4
1,2	2430	0,3239	2,4
0,7	3650	0,3022	1,2

Таблица 4.22.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0$ ;  $T = 45$

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,2	2900	0,3088	1,0
0,5	1800	0,3183	0,5
1,0	1230	0,3311	-0,8
2,0	840	0,3501	2,0
2,5	740	0,3585	1,0
3,0	670	0,3650	-0,6
4,0	580	0,3772	0,6
5,0	520	0,3877	1,6
5,6	500	0,3939	-0,3
6,0	500	0,3971	2,0
6,2	500	0,3988	0,9
6,3	520	0,3997	0,5
6,2	540	0,3988	1,3
6,0	560	0,3970	3,4
5,0	700	0,3871	-0,2
4,0	860	0,3755	3,0
3,0	1120	0,3611	2,0
2,0	1580	0,3420	-0,9
1,0	2740	0,3123	0,8

Таблица 4.23.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0$ ;  $T = 3 \cdot 10^4$

$G \cdot 10^4$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_r \cdot 10^4$
0,2	2970	0,3080	2,0
0,5	1800	0,3165	-0,6
1,0	1260	0,3273	-0,6
2,0	890	0,3460	1,2
3,0	740	0,3627	0,6
4,0	660	0,3771	1,2
4,5	645	0,3836	0,8
4,6	650	0,3848	0,2
4,7	66	0,3855	-0,1
4,6	690	0,3850	-0,0
4,5	710	0,3839	0,6
4,0	820	0,3777	2,3
3,0	1100	0,3632	-1,2
2,0	1560	0,3436	-0,8
1,8	1740	0,3374	0,2
1,0	2730	0,3130	1,3

Таблица 4.24.

Нейтральная кривая для пограничного слоя

при  $f = 0$ ;  $\beta = -0,19$ 

$G \cdot 10^3$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_r \cdot 10^4$
0,02	1500	0,3376	0,3
0,04	1000	0,3382	8,0
0,2	430	0,3442	1,0
0,3	350	0,3472	0,4
0,6	270	0,3548	-0,0
1,3	180	0,3742	-0,1
1,8	150	0,3853	2,0
3,0	120	0,4090	0,5
4,3	100	0,4323	3,0
5,0	95	0,4434	1,0
5,7	90	0,4537	1,0
6,9	86	0,4717	1,0
7,4	85	0,4794	0,4
7,9	86	0,4859	0,3
8,3	95	0,4985	2,0
7,6	115	0,4999	0,1
4,7	200	0,4906	-0,1
3,2	300	0,4883	-0,0
2,4	400	0,4894	0,4
1,0	1000	0,4921	1,3
0,7	1500	0,4914	1,3

Таблица 4.25.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0.1$ ;  $\beta = -0,19$ ;  $T = 45$

$G \cdot 10^3$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,04	950	0,3376	2,6
3,0	110	0,4023	2,0
5,5	86	0,4413	-0,7
6,5	81	0,4550	1,0
7,5	78	0,4680	1,0
8,5	77	0,4815	3,1
9,0	96	0,5012	0,9
8,5	106	0,5009	0,3
7,5	125	0,4989	0,3
6,5	146	0,4964	0,8
3,0	327	0,4942	8,0
1,0	980	0,4986	0,4

Таблица 4.26.

Нейтральная кривая для пограничного слоя  
при  $f = 0.1$ ;  $\beta = -0,19$ ;  $T = 10^3$

$G \cdot 10^3$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,04	950	0,3377	-0,7
0,6	250	0,3519	-2,0
3,0	109	0,3939	-0,5
5,0	85	0,4158	4,0
7,0	76	0,4347	0,5
7,5	76	0,4427	1,0
7,6	75	0,4444	0,7
7,7	75	0,4462	1,0
9,0	96	0,4979	0,38
4,7	204	0,4938	0,2
2,5	4060	0,4958	8,0
1,0	980	0,4985	0,6

Таблица 4.27.

Зависимость  $Re_{кр}^*$  от  $\Gamma$  при  $f = 0,1; \beta = 0$ 

$G \cdot 10^4$	$T \cdot 10^{-2}$	$Re_{кр}^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^5$
6,0	0,45	494	0,3971	0,3
5,7	5	498	0,3941	-4,2
5,5	10	606	0,3920	1,3
5,0	50	543	0,3858	1,4
4,7	100	586	0,3829	9,4
4,6	200	631	0,3835	2,3
4,5	300	645	0,3836	8,7
4,5	350	642	0,3840	1,3
4,5	400	639	0,3844	-4,5
4,5	500	638	0,3850	10
4,5	600	626	0,3855	-4,0

Таблица 4.28.

Зависимость  $Re_{кр}^*$  от  $\Gamma$  при  $f = 0,1; \beta = 0,2$ 

$G \cdot 10^4$	$T \cdot 10^{-2}$	$Re_{кр}^*$	$\lambda_r$	$\lambda_l \cdot 10^5$
6,5	3,24	2890	0,2833	10
6,3	162	2970	0,2814	4,7
5,9	324	3110	0,2785	4,5
5,8	430	3190	0,2772	-1,7
5,5	648	3390	0,2741	7,7
4,7	1296	3770	0,2686	5,1
4,5	1944	3985	0,2668	1,1
4,5	2592	4100	0,2665	1,1
4,5	2916	4130	0,2665	0,2
4,5	32	4160	0,2666	2,6
4,60	4860	4130	0,2682	6,1
4,5	6480	4030	0,2695	5,5

Таблица 4.29.

Зависимость  $Re_{кр}^*$  от  $T$  при  $f = 0,1$ ;  $\beta = -0,19$ 

$G \cdot 10^4$	$T \cdot 10^{-2}$	$Re_{кр}^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^5$
7,6	0,05	78,3	0,4700	6,7
7,7	0,2	78,2	0,4712	21
7,5	0,45	78,1	0,4684	4,2
7,6	5	75,9	0,4606	3,5
7,6	7	75,4	0,4563	1,3
7,7	9	75,2	0,4503	3,1
7,5	10	75	0,4427	10

Таблица 4.30.

Нейтральная кривая при  $f = 0,05$ ;  $\tau = 100$  (модель Рахматуллина–Нигматуллина–Дру с учетом сил Стокса и Архимеда)

$k$	$Re \cdot 10^{-1}$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^4$
0,7	1635	0,1801	2,1
0,74	1420	0,1932	3,3
0,77	1345	0,2038	1,5
0,8	1038	0,2103	3,6
0,85	862	0,2247	1,6
0,9	735	0,2380	1,4
0,95	644	0,2487	0,5
1,0	582	0,2573	0,4
1,02	590	0,2510	2,0
1,08	762	0,2601	1,5
1,08	826	0,2551	1,0
1,077	965	0,2482	1,3
1,06	1280	0,2421	3,0

Таблица 4.31.

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $\tau$  при  $f = 0,05$  (модель Рахматуллина-Нигматуллина-Дру с учетом сил Стокса и Архимеда)

$\tau$	$Re_{кр} \cdot 10^{-1}$	$\lambda_{\tau}$	$\lambda_{\tau} \cdot 10^4$
1	425	0,2711	2,0
10	686	0,2492	-0,9
15	753	0,2470	1,1
20	741	0,2483	0,8
25	730	0,2502	1,8
30	719	0,2541	2,8
40	686	0,2533	2,8
50	644	0,2553	1,4
60	621	0,2569	2,8
70	612	0,2574	0,2
80	608	0,2579	0,0
90	605	0,2580	0,3
100	603	0,2547	0,4

Таблица 4.32.

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $\tau$  при  $f = 0,1$  (модель Рахматуллина-Нигматуллина-Дру с учетом сил Стокса и Архимеда)

$\tau$	$Re_{кр} \cdot 10^{-1}$	$\lambda_{\tau}$	$\lambda_{\tau} \cdot 10^4$
1	336	0,2802	2,5
10	926	0,2322	2,0
15	1265	0,8201	0,0
20	1277	0,6634	0,4
25	1298	0,5803	1,9
30	1331	0,2221	0,8
40	900	0,2409	0,0
50	755	0,2421	2,5
60	711	0,2501	2,6
70	692	0,2517	2,4
80	651	0,2528	2,1
90	619	0,2542	1,2
100	612	0,2552	1,0

Таблица 4.33.

Нейтральная кривая для пограничного слоя при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $T = 3,2 \cdot 10^2$

(модель Рахматуллина-Нигматуллина-Дру с учетом сил Стокса и Архимеда)

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_r \cdot 10^4$
1,0	7530	0,2437	-0,3
2,0	5160	0,2546	0,0
4,0	3560	0,2706	1,0
6,0	2950	0,2816	1,0
6,3	2900	0,2828	0,7
6,5	2890	0,2833	1,0
6,7	2890	0,2837	1,0
7,0	2950	0,2833	0,4
7,1	3150	0,2808	-1,0
7,0	3280	0,2790	-0,8
6,5	3730	0,2735	1,0
6,0	4230	0,2692	-0,8
5,0	5160	0,2630	1,0

Таблица 4.34.

Нейтральная кривая для пограничного слоя при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $T = 3,2 \cdot 10^5$

(модель Рахматуллина-Нигматуллина-Дру с учетом сил Стокса и Архимеда)

$G \cdot 10^5$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_r \cdot 10^4$
1,0	7770	0,2400	0,7
2,0	5580	0,2488	0,3
3,0	4670	0,2572	-0,0
4,0	4250	0,2644	1,2
4,3	4170	0,2659	0,0
4,5	4140	0,2666	0,2
4,8	4250	0,2669	-0,0
4,8	4560	0,2651	-0,1
4,5	5100	0,2517	-0,1
4,0	5810	0,2578	1,0

Таблица 4.35.

Зависимость  $Re_{кр}$  от  $T$  при  $f = 0,1$ ;  $\beta = 0,2$   
 (модель Рахматуллина-Нигматуллина-Дру с учетом сил  
 Стокса и Архимеда)

$G \cdot 10^5$	$T \cdot 10^{-2}$	$Re^*$	$\lambda_r$	$\lambda_i \cdot 10^5$
6,5	3,24	2890	0,2833	1,0
6,3	162	2970	0,2814	4,7
5,9	324	3110	0,2785	4,5
5,8	430	3190	0,2771	-1,7
5,5	648	3390	0,2741	7,7
4,7	1296	3770	0,2686	5,1
4,5	1994	3955	0,2668	1,1
4,5	2592	4070	0,2665	1,1
4,5	2916	4100	0,2665	0,2
4,5	3240	4130	0,2666	2,6
4,6	4860	4100	0,2682	6,1
4,5	6480	4000	0,2695	5,5

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ.....	3
<b>ГЛАВА I. РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНО - СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА</b>	
1.1. Построение спектрально-сеточного метода и его обоснование .....	21
1.2. Сходимость спектрально-сеточного метода и оценка скорости сходимости .....	24
1.3. Проблема собственных значений в спектрально- сеточном методе .....	35
<b>ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО- СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОФАЗНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ</b>	
2.1. О проблеме гидродинамической устойчивости .....	42
2.2. Математические модели для однофазных потоков.....	45
2.3. Применение спектрально-сеточного метода для моде- лирования уравнения устойчивости однофазных гидродинами- ческих систем.....	48
2.4. Алгебраическое преобразование матричных уравнений устойчивости.....	53

2.5. Обоснование эффективности спектрально-сеточного метода .....	58
2.6. Анализ и интерпретация результатов вычислительных экспериментов по устойчивости однофазных потоков:.....	60
2.6.1. Моделирование симметричных течений (профиль Пуазейля).....	60
2.6.2. Моделирование несимметричных течений (профиль пограничного слоя) .....	64

**ГЛАВА III. ОБОБЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО –  
СЕТОЧНОГО МЕТОДА  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗА  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

3.1. Закон подобия Рейнольдса и приведение математических моделей для двухфазных потоков к безразмерному виду.....	76
3.2. Исследование и анализ адекватности математических моделей для многофазных потоков .....	81
3.3. Вывод уравнений устойчивости для двухфазных нестационарных потоков .....	83
3.4. Алгоритм спектрально-сеточного метода для двухфазных потоков и его обоснование .....	94
3.5. Алгебраическое преобразование матричных уравнений устойчивости. ....	100

3.6. Анализ и интерпретация результатов расчетов по моделированию устойчивости двухфазных потоков .....	110
3.6.1. Моделирование двухфазного течения Пуазейля.....	110
3.6.2. Моделирование двухфазного пограничного слоя ....	116

**ГЛАВА IV. КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

4.1. Устойчивость двухфазного течения Пуазейля .....	121
4.2. Устойчивость двухфазного пограничного слоя .....	128
4.3. Математическое моделирование двухфазных гидро- динамических систем с учетом силы Стокса и Архи- меда.....	132
4.4. Пространственная зависимость характерных пара- метров в двухфазном течении Пуазейля .....	136
4.5. Пространственная зависимость характерных пара- метров в двухфазном пограничном слое.....	138
4.6. Структура комплекса программ вычислительного экспе- римента для исследования математических моделей гидродина- мических потоков .....	139
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	141
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	144
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	164

**АБУТАЛИЕВ ФАРАДЕЙ БАСИРОВИЧ,  
НАРМУРАДОВ ЧАРИ БЕГАЛИЕВИЧ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ  
УСТОЙЧИВОСТИ**

**Ташкент – Издательство «Fan va texnologiya» – 2011**

Редактор: М.Миркомиллов  
Тех. редактор: А.Мойдинов  
Художник: Х.Гулямов  
Корректор: Ж.Тураханов  
Компьютерная  
вёрстка: Н.Хасанова

**Изд.лиц. АИ№149, 14.08.09. Разрешено в печать 14.04.2011.  
Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура «Times New Roman».  
Офсетная печать. Усл. печ.л. 11,0. Изд. печ.л. 11,75.  
Тираж 300. Заказ № 58.**

**Изд-во «Fan va texnologiya». 100066, г.Ташкент, Алмазар-171.**



Абуталиев Фарадей Басырович – академик Академии наук Республики Узбекистан, заслуженный деятель науки, доктор физико-математических наук, крупный ученый и организатор, широко известный специалист не только стран Содружества независимых государств, а также среди ученых других зарубежных государств.

Ф.Б. Абуталиев родился в 1932 году, в городе Ташкенте. В 1992 году окончил Средне-азиатский (а ныне Национальный) университет по специальности – механика. В период с 1992 по 1999 годы – аспирант Института математики им. В.И. Романовского АН РУз. В 1961 году защитил кандидатскую, а в 1969 году – докторскую диссертацию в отделении физико-математических наук объединенного научного совета АН РУз. В 1984 году за достигнутые высокие результаты в области прикладной математики и вычислительной техники был избран член корреспондентом АН РУз, а в 2000 году академиком Академии наук Республики Узбекистан.

В настоящее время является заведующим кафедрой «Высшая математика» Ташкентского Университета информационных технологий.



Нармуратов Чирбиевич родился в 1953 году в городе Джаркурган Сурхандарьинской области. В 1976 году окончил Самаркандский государственный университет по специальности – прикладная математика.

В период с 1977 года по 1979 год – стажёр-исследователь, с 1979 года по 1981 год – научный сотрудник Новосибирского университета.

С 1981 по 1984 годы – аспирант Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН. В 1987 году в Вычислительном центре СО РАН защитил кандидатскую диссертацию, а в 2008 году в Институте математики и информационных технологий АНРУз докторскую диссертацию. Доктор физико-математических наук. Проректор по научной работе и информационных технологий Термезского государственного университета.

ISBN 978-9943-10-487-7



9 789943 104877

Ташкентский  
Университет  
Информационных  
Технологий