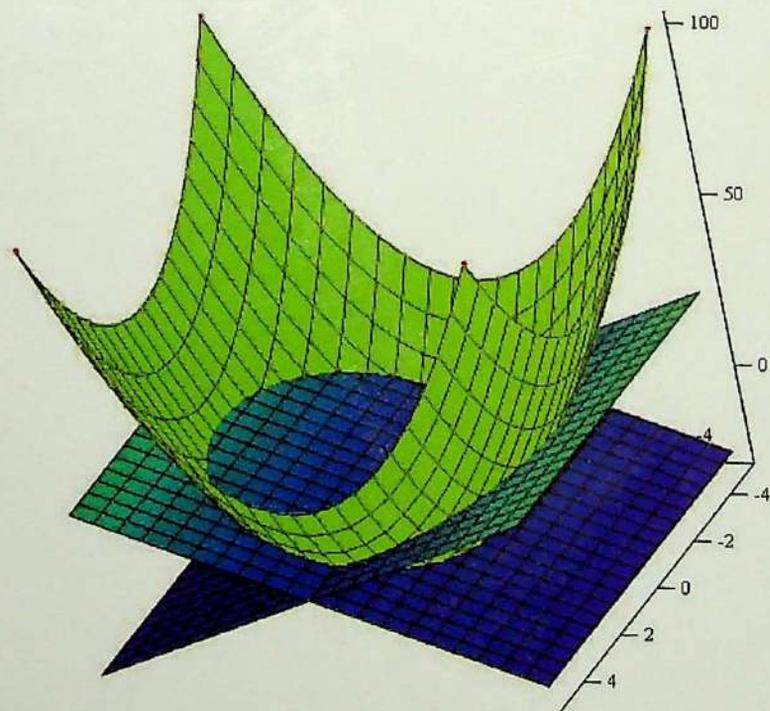


ДРЕМОВА Н.В.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

В решении задач с применением
программного продукта
«Mathcad»



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И
ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Дремова Надежда Васильевна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

в решениях задач с применением
программного продукта

«Mathcad»

Учебное пособие

Для направления образований
5320300 – «Технологические машины и оборудование
(текстильной, легкой и хлопковой промышленности),
5640100 – «Безопасность жизнедеятельности»

Ташкент
«Yosh avlod matbaa»
2021

TERMIZ MUHANDISLIK-
TEKNOLOGIYA INSTITUTI
AXBOROT-RESURS MARKAZI
INV. № 16606
• 11 • 02 20 23 yil

УДК: 677.02(075.8)
ББК: 32.965я7 / 42.16я7
Д 77

Дремова, Надежда Васильевна

Сопроотивление материалов в решениях задач с применением программного продукта «Mathcad»
[Текст]: учебник / Н.В.Дремова. – Ташкент: «Yosh avlod matbaa», 2021. 320 стр.

Учебное пособие составлено в соответствии с образовательным стандартом, предназначено для студентов вузов направлений – 5320300 – «Технологические машины и оборудование (текстильной, легкой и хлопковой промышленности)», 5640100 – «Безопасность жизнедеятельности».

Поскольку при изучении данного курса наибольшую трудность представляет решение задач, большинство заданий сформулировано именно в виде задач, причем наиболее сложные из них разделены на несколько логических этапов, не требующих для решения сложных расчетов. Такой подход к подаче материала позволяет привить студентам навыки самостоятельного анализа задач и активизирует мышление.

В сопроотивлении материалов задачи решаются простыми математическими методами с использованием ряда упрощений и гипотез, с использованием экспериментальных данных, а также с применением математического пакета «Mathcad».

Рецензенты:

д.т.н., проф, академик. М. Мирсаидов (ТИИМСХ)

д.т.н., проф И.Г.Шин (ТИТЛП)

ISBN 978-9943-7849-2-5

© Н.В.Дремова
© «Yosh avlod matbaa», 2021

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН

и их наиболее употребляемые единицы

- A — площадь поперечного сечения, м^2 ;
 E — модуль продольной упругости, МПа;
 F, P — сила (сосредоточенная), кН;
 G — модуль сдвига, МПа;
 J — момент инерции сечения, м^4 ;
 $J_x J_y$ — осевые моменты инерции;
 J_{xy} — центробежный момент инерции;
 J_p — полярный момент инерции;
 M — изгибающий момент, кН·м;
 N — продольная сила, кН;
 Q — поперечная сила, кН;
 R — реактивная сила, кН;
 S — статический момент сечения, м^3 ;
 W — момент сопротивления сечения, м^3 ;
 X — реакция в отброшенной связи, кН;
 b, d, h — ширина, диаметр, высота сечения, м;
 i — радиус инерции сечения, м;
 l — длина стержня, балки, м;
 m — сосредоточенный момент; пара сил, кН·м;
 q — интенсивность распределенной силы, кН/м;
 γ — удельный вес, кН/м³ ;
 Δ, δ — перемещение линейное, мм;
 ε — деформация;
 θ — угол поворота поперечного сечения, рад;
 λ — гибкость стержня;
 μ — коэффициент Пуассона;
 σ — нормальное напряжение, МПа;
 τ — касательное напряжение, МПа.

ЕДИНИЦЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

в Международной системе единиц (СИ)

Величина		Единица СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	Соотношение единиц
Сила	P, F, Q, N	Ньютон	Н	10Н=1 кгс
Напряжение	σ, τ	Паскаль	Па	1Па=1Н/м ²
Модуль упругости	E, G	паскаль	Па	1МПа=10кгс/см ²
Момент силы	M	ньютон·м	Н·м	1Н·м=0,1кгс·м
Погонная нагрузка	q	ньютон/м	Н/м	1Н/м=0,1кгс/м

КРАТНЫЕ И ДОЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Сантим	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	10 ⁹	10 ⁶	10 ³	10 ²	10	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹



Перед подстановкой числовых значений необходимо все исходные величины привести к единым согласованным единицам измерения.

ОСНОВНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В сопротивлении материалов задачи решаются простыми математическими методами с использованием ряда упрощений и гипотез, а также с использованием экспериментальных данных и с применением математического пакета «Mathcad»

Решения доводятся до расчетных формул, а вычисления выполняются с точностью до второго знака после запятой.

Прочностной расчет решает задачи трех типов:

- а) проверка прочности;
- б) подбор безопасных размеров поперечного сечения стержня;
- в) определение допускаемой нагрузки.

Расчет из условия жесткости должен дополняться расчетом на прочность.

Список специальных обозначений



– «Формула, которую нужно запомнить»



– «Важно»



– «Вопросы для самопроверки»



– «Тесты»



– «Помнить», – «Обратить внимание»

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ

Понимание постановки задачи – ясно понять предложенную задачу:

➤ *Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие? Определяется ли неизвестное данными или они недостаточны? Или чрезмерны? Или противоречивы? Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условие на части. Постарайтесь записать их.*

Составление плана решения – найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотрев промежуточные задачи

(Анализ):

➤ *Сформулируйте отношение между неизвестными и данными. Преобразуйте неизвестные элементы. Попробуйте ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи. Решайте только часть задачи. Удовлетворите только часть условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? Обобщите. Рассмотрите частные случаи. Примените аналогию.*

Осуществление плана – реализовать найденную идею решения

(Синтез)

➤ *Контролируйте каждый свой шаг, принимая лишь то, «что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью»*

(Р. Декарт)

Взгляд назад – решение проверить и оценить критически:

➤ *Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения.*

Глава 1. Основные положения, метод сечений, напряжения. Построение эпюр внутренних усилий.

Методические указания:

При решении задач важно помнить следующее:

Продольная сила N в произвольном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций *всех* внешних сил, взятых *по одну сторону от сечения*, на продольную ось.



Правило знаков:

сила, направленная ОТ сечения, берется со знаком «+»;
сила, направленная НА сечение, берется со знаком «—».



Штриховка

на эпюре N всегда должна быть *перпендикулярна* продольной оси стержня, а значит, и оси эпюры.



Ординаты

эпюр, отложенные в выбранном масштабе, должны сопровождаться числовой характеристикой, а поле эпюры — *знаком*.



«Скачки»

на эпюре N должны быть равны значениям внешних *сосредоточенных сил*, приложенных в соответствующих сечениях.

Нормальные напряжения σ в произвольном поперечном сечении стержня определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Основные понятия

Внутри любого материала имеются внутренние силы меж-атомного сцепления. Эти силы являются первопричиной прочности твердого тела.

Под действием внешних сил тело деформируется, что вызывает в теле изменение внутренних сил за счет появления дополнительных сил взаимодействия между частицами тела. В сопротивлении материалов изучаются именно эти дополнительные внутренние силы – *силы упругости*, вызванные приложением к телу внешних нагрузок.

Такой подход равносителен принятию *гипотезы о ненапряженном начальном состоянии тела*: до приложения к телу внешних нагрузок внутренние силы в любом его сечении равны нулю.

В природе не существует материалов, для которых это предположение выполняется. Однако в обычных условиях эти силы невелики и их не учитывают.

Внутренние силы, а значит, и прочность твердого тела, обусловлены его деформацией и связаны с ней как по характеру, так и по величине. Если внутренние силы между частицами невелики, то деформации бруса будут упругими. При возрастании внешних сил увеличиваются деформации бруса, растут и внутренние силы. При некоторой нагрузке деформации достигают такой величины, что наступает разрушение. В этом случае внутренние силы достигли своего предельного значения. Это предельное значение внутренних сил определяется как физико-механическими свойствами материала данного бруса, так и величиной и характером его нагружения.

Из практики повседневной жизни известно, что если взять достаточно тонкую и длинную деревянную балку с небольшим пролетом L и значительной консолью длиной a , то при расположении груза P в пределах пролета (рис.1, а) балка не разру-

шится. Но стоит груз передвинуть на конец консоли, как произойдет разрушение бруса (рис. 1, б).

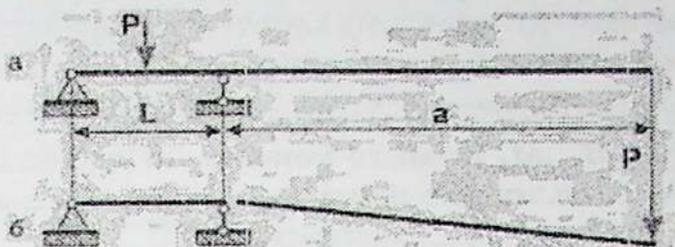


Рис. 1

Итак, непосредственной причиной разрушения конструкции являются внутренние силы, возникающие в сечениях бруса при действии на него внешних нагрузок.

Метод сечений

Величины внутренних сил так же, как и в курсе «Теоретическая механика», определяются с помощью метода сечений, сущность которого сводится к следующему.

Исследуемое тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил и реакций связи, мысленно разрезают плоскостью, проведенной через исследуемую точку тела, на две части (рис.). Затем одну из частей (например, 2) отбрасывают, а действие отброшенной части заменяют реакциями связи, которые этим приемом переводятся из категории внутренних сил в категорию внешних, что позволяет для оставшейся части записать уравнение равновесия.

Нет никакого принципиального различия, какую из частей тела отбросить, т.к. на основании третьего закона Ньютона внутренние силы действия и противодействия равны по величине и обратные по направлению. Неизвестные, распределенные по сечению, внутренние силы заменяем эквивалентной системой сил: силой и парой сил (численно равных главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M}), приведенным к центру тяжести рассматриваемого сечения (рис.2). Эта операция

выполняется в связи с тем, что из шести уравнений равновесия для абсолютно твёрдого тела мы можем найти только шесть неизвестных величин, а именно: проекции главного вектора и главного момента на координатные оси.

Выбирая некоторую систему координат и составляя уравнения равновесия системы сил, приложенной к отсеченной части бруса, определяют проекции N_x, Q_y, Q_z главного вектора \bar{R} и проекции M_x, M_y, M_z главного момента \bar{M} на оси координат (рис.3). Эти составляющие называются *внутренними силовыми факторами*.

Итак, метод сечений (РОЗУ) состоит из следующих четырех операций:

- *разрезают* мысленно тело плоскостью в том сечении, где нужно определить внутренние силы;
- *отбрасывают* одну из частей тела;
- *заменяют* действие отброшенной части тела реакциями связей;
- *уравновешивают*, составляют *уравнения равновесия* для оставленной части, из которых и определяют главный вектор и главный момент внутренних сил.

Метод сечений иногда называют еще методом РОЗУ (рис.2.) по первым буквам слов: (РОЗУ) – *Разрезаю, Отбрасываю, Заменяю, Уравновешиваю*.

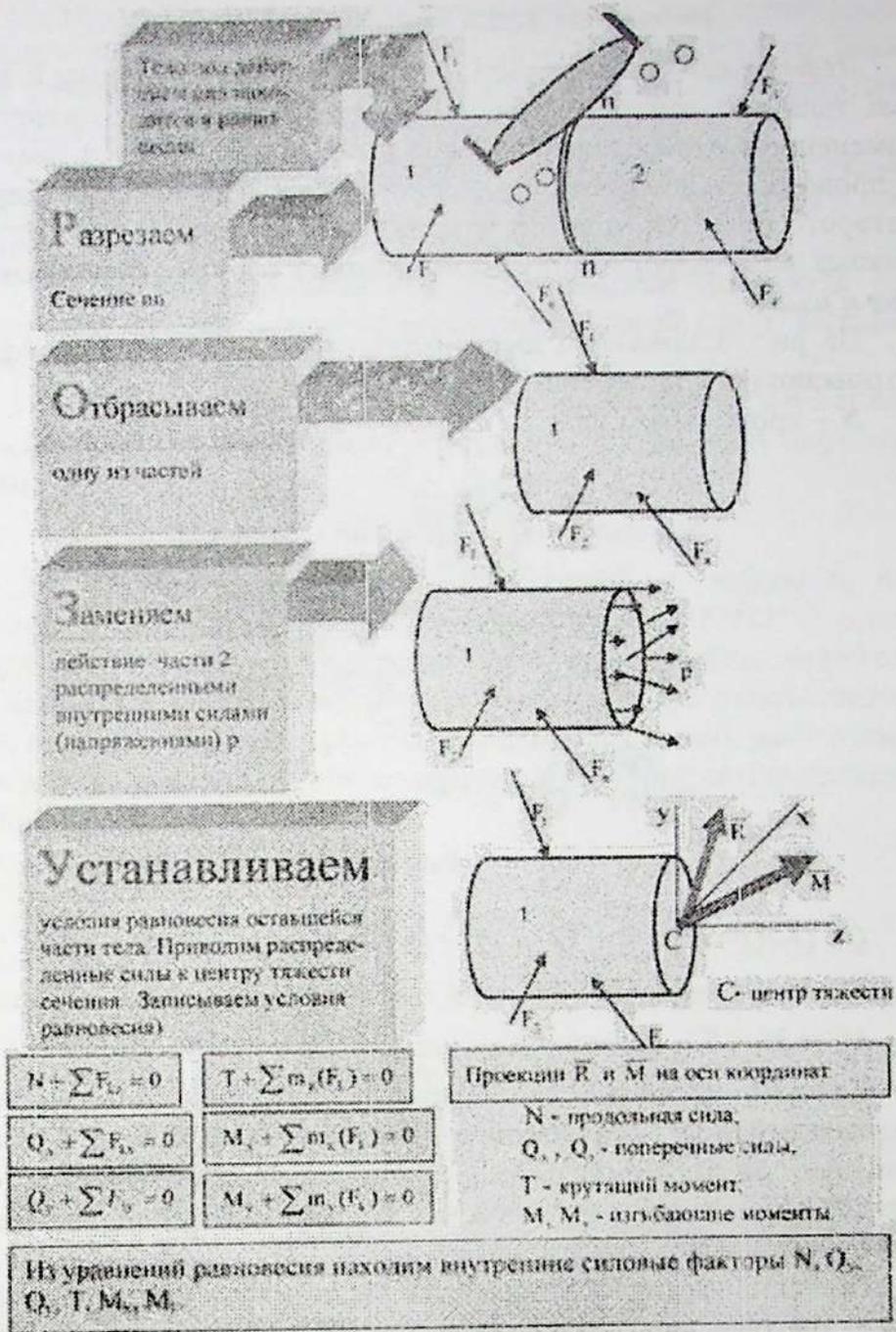


Рис. 2

Основные виды деформаций бруса

Деформация (deformation; strain) – изменение формы и объема тела под действием внешних сил. Деформация связана с изменением относительного положения частиц тела и обычно сопровождается изменением величин межуатомных сил, мерой которого является упругое напряжение. Различают четыре основных вида деформаций: *растяжение/сжатие, сдвиг, кручение и изгиб*.

На рис. 3 показаны шесть внутренних силовых факторов, возникающих в поперечных сечениях бруса:

N – продольная сила;

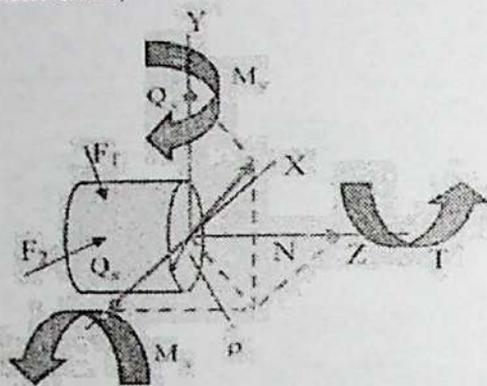


Рис. 3

Q_y, Q_z ($Q = Q_y + Q_z$; $Q^2 = Q_y^2 + Q_z^2$) – поперечные силы;

M_y, M_z ($M_u = M_y + M_z$; $M_u^2 = M_y^2 + M_z^2$) – изгибающие моменты;

$M_x = M_k = T$ – крутящий момент.

Каждому из внутренних усилий N , T , M_u и M_k соответствует определенный вид деформаций бруса. Продольной силе N соответствует *растяжение (сжатие)* бруса, поперечной силе Q – (*изгиб*) *сдвиг*, крутящему моменту (T) M_k – *кручение*, изгибающему моменту M_u – *изгиб*.

Продольная сила N стремится переместить поперечное сечение параллельно самому себе вдоль оси бруса, вызывая деформацию растяжения (сжатия) бруса. На растяжение (сжатие) работают цепи, канаты, тросы, тяги, колонны и т.д.

Поперечная сила T , расположенная в плоскости поперечного сечения, стремится сдвинуть его относительно смежных сечений, вызывая деформацию сдвига. На срез работают заклепки, шарнирные болты, деревянные врубки и т.п.

Крутящий момент M_k стремится повернуть данное сечение вокруг оси x на некоторый угол относительно смежного с ним сечения, вызывая деформацию кручения бруса.

Изгибающие моменты M_z , M_y стремятся повернуть исследуемое сечение соответственно вокруг осей z и y , вызывая деформацию изгиба бруса.

Перечисленные четыре вида деформаций бруса называются *простыми*, а их возможные сочетания — *сложными* деформациями бруса.

Определение внутренних усилий

Для определения внутренних усилий в заданном поперечном сечении бруса пользуются методом *РОЗУ*. В месте разреза прикладывают внутренние силовые факторы, направляя их вектора в произвольном направлении, и для рассматриваемой отсеченной части бруса составляют уравнения равновесия, каждое из которых будет содержать только один внутренний силовой фактор:

$$\sum X = 0; \quad N_x + \sum_{\text{отс. часть}} P_{ix} = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y + \sum_{\text{отс. часть}} P_{iy} = 0;$$

$$\sum Z = 0; \quad Q_z + \sum_{\text{отс. часть}} P_{iz} = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \quad M_x + \sum_{\text{отс. часть}} M_x(P_i) = 0;$$

$$\sum M_y = 0; \quad M_y + \sum_{\text{отс. часть}} M_y(P_i) = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad M_z + \sum_{\text{отс. часть}} M_z(P_i) = 0.$$



Решая эти уравнения относительно искомых величин, определяют все внутренние силовые факторы. Положительная величина найденных внутренних усилий означает правильность их направлений, указанных на расчетной схеме, а знак минус будет означать, что направление силового фактора надо изменить на обратное.

Чтобы судить о сравнительной прочности бруса в различных сечениях, нужно знать закон изменения внутренних усилий по длине бруса. Этот закон может быть выражен в виде аналитических зависимостей или изображен графически в виде эпюр.

Эпюрой внутреннего силового фактора называется график, показывающий закон изменения внутреннего усилия в различных сечениях по длине бруса.

Каждая ордината эпюры в определенном масштабе представляет собой величину внутреннего усилия в соответствующем поперечном сечении бруса.

Алгоритм построения эпюр

➤ Освобождают брус от связей. Действие связей заменяют реакциями связи.

➤ Из условий равновесия системы сил, приложенных к брусу, определяют реакции связей.

➤ Брус разбивается вдоль его оси на участки, в пределах которых характер внешней нагрузки не изменяется, т. е. границами участков являются точки приложения силовых факторов: сосредоточенных сил, моментов, распределенной нагрузки.

➤ На каждом из участков брус мысленно рассекается на две части. Одна часть отбрасывается (обычно та, к которой приложена более сложная нагрузка, но мы всегда будем отбрасывать правую часть бруса; это позволит упростить написание программ в *MathCAD*, а действие отброшенной части заменяется реакциями связи – внутренними силовыми факторами N , Q_y , Q_z , M_x , M_y , M_z .

➤ Для отсеченной части записывают уравнения равновесия, из которых находят аналитические выражения для N , Q_y ,

Q_z, M_x, M_y, M_z . В случае плоской системы сил сумму моментов всех сил системы записывают относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

➤ Строят графики функций $N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ вдоль оси бруса в пределах рассматриваемого участка. Правильность поведения эпюр на каждом из участков проверяют с помощью дифференциальных зависимостей. Правило знаков для внутренних силовых факторов приведено на рис.4.

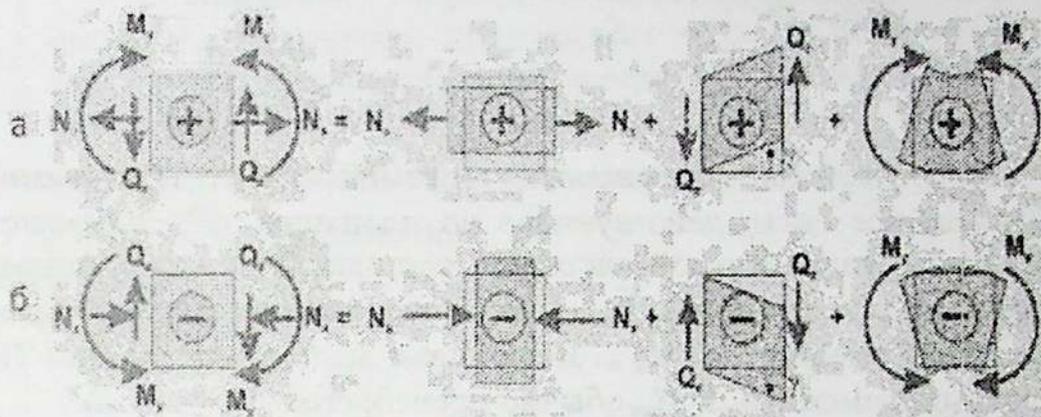


Рис. 4

Напряжения. Понятие о напряженном состоянии

Пусть задано твердое тело, нагруженное некоторой системой сил (рис. 5, а).

Поставим задачу определить внутреннюю силу в достаточно малой окрестности точки K по площадке заданного направления. Рассечем тело плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной заданному направлению, на две части – A и B . После рассечения тела часть B отбросим. В плоскости сечения у точки K выделим элементарную площадку DP ; направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью ν . При помощи внешней нормали мы кратко и ясно указываем не только направление площадки, но и ту часть тела B или A , которая отбрасывается.

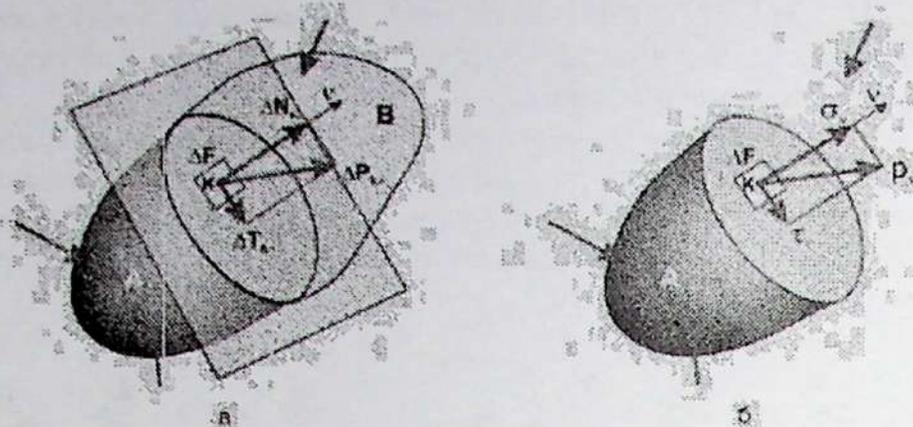


Рис.5

В соответствии с основной теоремой статики (*теоремой Пуансо*) все силы, действующие по площадке ΔF , мы можем заменить эквивалентной системой, состоящей из силы, равной главному вектору сил $\Delta \bar{P}_{kv}$ и пары сил, момент которой равен главному моменту $\Delta \bar{M}_{kv}$. Вследствие малости площадки ЛР главным моментом $\Delta \bar{M}_{kv}$ обычно пренебрегают (рис. 5, а).

Отношение главного вектора сил $\Delta \bar{P}_{kv}$ к размеру элементарной площадки ΔF .

$$(\Delta \bar{P}_{kv})_{cp} = \frac{\Delta \bar{P}_{kv}}{\Delta F}$$

называется *средним напряжением* в рассматриваемой точке K по площадке с нормалью v .

При стремлении элементарной площадки ΔF к нулю изменяется как направление, так и модуль главного вектора \bar{P}_{kv} , который также стремится к нулю. Однако из физических соображений можно заключить, что предел отношения $\bar{P}_{kv} / \Delta F$ при стремлении ΔF к нулю будет величиной конечной:



$$\bar{P}_{kv} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_{kv}}{\Delta F}$$

Векторная величина \bar{P}_{kv} называется *полным напряжением* в данной точке K по рассматриваемой площадке с нормалью v .

В системе СИ единицей измерения напряжений является паскаль (Н/м^2). В практических расчетах удобнее измерять напряжения в меганаскалях $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н/м}^2 = \text{Н/мм}^2$.

В технике еще часто измеряют напряжения в килограммах силы на квадратный сантиметр ($\text{кгс/см}^2 \times 0,1 \text{ МПа}$) или квадратный миллиметр ($\text{кгс/мм}^2 \times 10 \text{ МПа}$).



$$P_V = \sqrt{(\sigma_V)^2 + (\tau_V)^2}$$

Совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется **напряженным состоянием в данной точке**.

Построение эпюр внутренних усилий

а) Растяжение-сжатие

Задача № 1

Дано: $d_1 = 1,5 \text{ см} = 10 \text{ мм}$, $d_2 = 2 \text{ см} = 20 \text{ мм}$, $l_1 = 100 \text{ см}$,
 $l_2 = 150 \text{ см}$, $l_3 = 250 \text{ см}$

$P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = -20 \text{ кН}$, $P_3 = 30 \text{ кН}$.

Определить: Продольную силу – N , нормальное напряжение – σ перемещение сечений – δ и построить их эпюры –?

Для определения N мысленно рассекаем брус по сечению I-I, 2-2 и 3-3 (рис.6.).

Из условия равновесия части стержня сечения 1-1 получим:

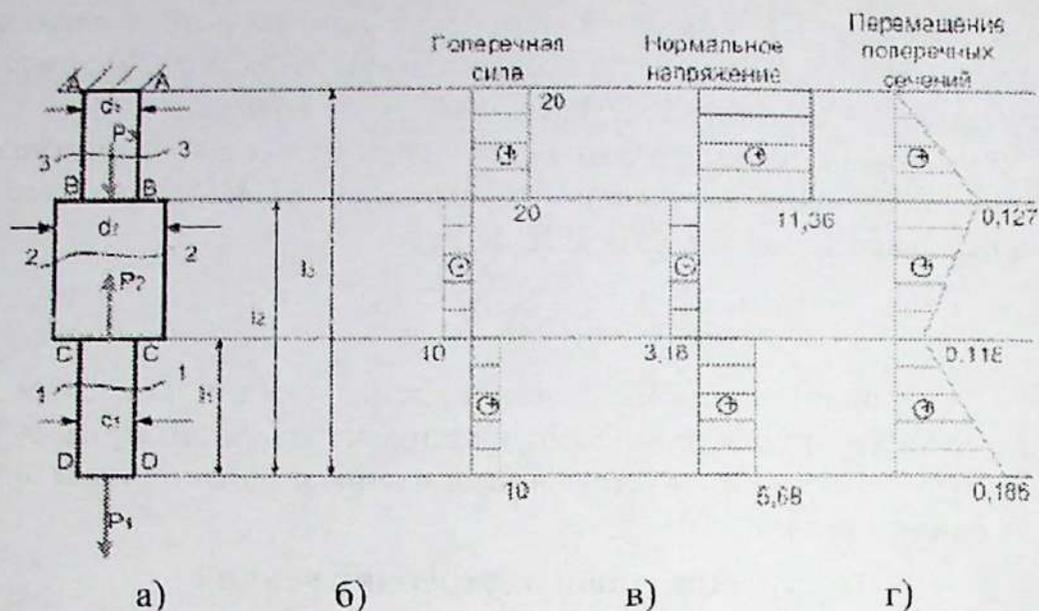
$$\sum x = 0, N_1 - P_1 = 0, N_1 = P_1 = 10 \text{ кН} \text{ (растяжение)}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 2-2 получим:

$$\sum x = 0, N_2 + P_2 - P_1 = 0, \text{ откуда } N_2 = -10 \text{ кН, (сжатие).}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 3-3 получим:

$$\sum x = 0, N_3 + P_2 - P_1 - P_3 = 0, \text{ откуда } N_3 = 20 \text{ кН, (растяжение).}$$



Сечение I-I

Сечение 2-2

Сечение 3-3

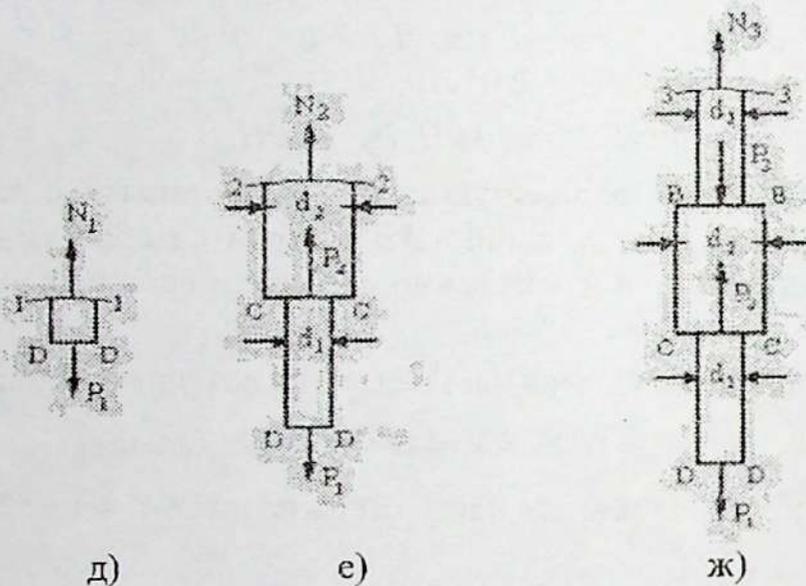


Рис. 6

Выбрав масштаб, строим эпюры продольных сил, (рис. 6б).

Определим площадь поперечного сечения \$A_1\$ и \$A_2\$:

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{4} = 1,76 \text{ см}^2 \quad A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$$

Напряжения равны:

в сечении нижней части :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10}{1,76} = 5,68 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{растяжение}),$$

в сечении средней части стержня:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10}{3,14} = -3,18 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{сжатие}).$$

в сечении верхней части стержня:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{20}{1,76} = 11,36 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{растяжение}).$$

В определенном масштабе строим эпюру напряжений (рис.6в)

Для построения эпюры δ определяем перемещения характерных сечений В-В, С-С и D-D (перемещение сечения А-А равно нулю ($\delta_A = 0$)). Сечение В-В будет перемещаться вниз, поскольку верхняя часть стержня растягивается:

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_3 = 0 + \frac{N_3 \cdot (l_3 - l_2)}{E \cdot A_3} = 0 + \frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,785} = 0,127 \text{ см} \quad (\text{растяжение})$$

Перемещение сечения вниз считаем положительным, вверх – отрицательным. Перемещение сечения С-С является алгебраической суммой, перемещения сечения В-В (δ_B) и абсолютной деформации второго участка:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = 0,127 + \frac{N_2 \cdot (l_2 - l_1)}{E \cdot A_2} = 0,127 + \frac{-10 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 0,118 \text{ см} ,$$

Перемещение сечения D-D является алгебраической суммой, перемещения сечения С-С (δ_C) и абсолютной деформации первого участка:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = 0,118 + \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = 0,118 + \frac{10 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,785} = 0,186 \text{ см} .$$

В определенном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C , δ_B , δ_D , соединяем полученные точки прямыми линиями, и получаем эпюру перемещений.

Эту же задачу можно решить с применением математической программы «Mathcad».

Задача № 2.

Дано: Для стержня показанного на рисунке 2 необходимо.

Определить: Продольную силу – N , нормальное напряжение – σ и перемещение сечений – δ и построить их эпюры, если $d_1 = 1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$, $d_2 = 2 \text{ см} = 20 \text{ мм}$, $l_1 = 100 \text{ см}$, $l_2 = 150 \text{ см}$, $l_3 = 250 \text{ см}$, $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = -20 \text{ кН}$, $P_3 = 30 \text{ кН}$.

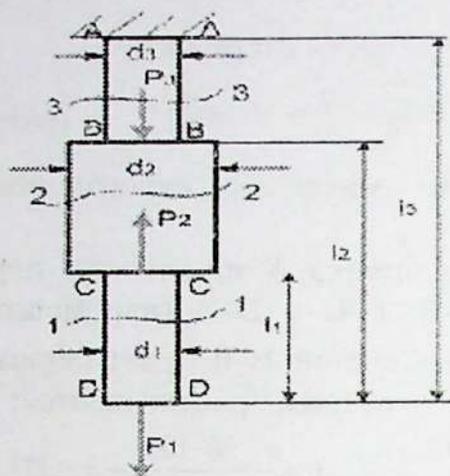


Рис. 7

Решение:

$$m = \text{м}; \text{см} = 0.01 \cdot \text{м} \quad \text{кН} = 1000 \text{ Н} \quad \text{МПа} = 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad d_1 = 1.0 \text{ см} \quad d_2 = 2.0 \text{ см}$$

$$F = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ кН} \quad L_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \text{ см} \quad L = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ см}$$

$n = 3$

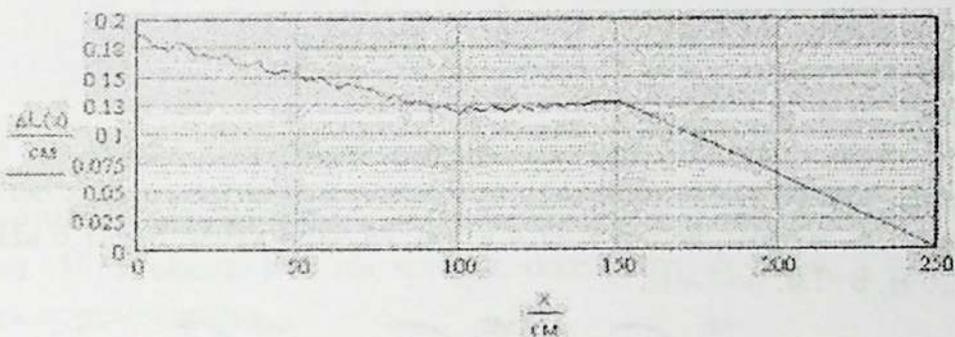
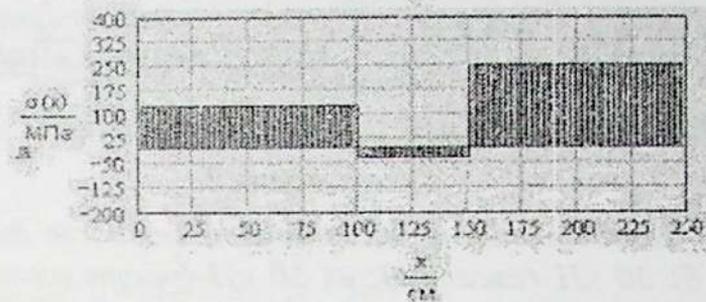
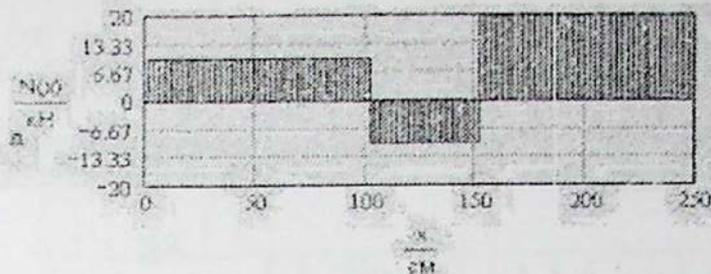
$$N(x) = \left[\sum_{i=1}^n F_i \cdot (x > L_{Fi}) \right]$$

$$A(x) = \begin{cases} \left(x \cdot \frac{d_1^2}{4} \right) & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \left(x \cdot \frac{d_2^2}{4} \right) & \text{if } L_1 < x < L_2 \\ \left(x \cdot \frac{d_1^2}{4} \right) & \text{if } L_2 < x \leq L_3 \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\Delta L(x) = \int_x^{L_3} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx$$

$$x = 0 \text{ см} \cdot \frac{L_3}{100} \cdot L_3$$



$$x = 0.01 \text{ cm} \cdot \frac{L_3}{10} \cdot i_3$$

$x =$	$N(x) =$	$\sigma(x) =$	$\delta L(x) =$
	kN	MPa	cm
$1 \cdot 10^{-4}$ m	10	127.324	0.186
0.25	10	127.324	0.165
0.5	10	127.324	0.154
0.75	10	127.324	0.138
1	10	127.324	0.118
1.25	-10	-31.831	0.124
1.5	-10	-31.831	0.127
1.749	20	254.648	0.096
1.999	20	254.648	0.064
2.249	20	254.648	0.032
2.499	20	254.648	$1.145 \cdot 10^{-4}$

Задача № 3

Построить эпюры продольной силы.

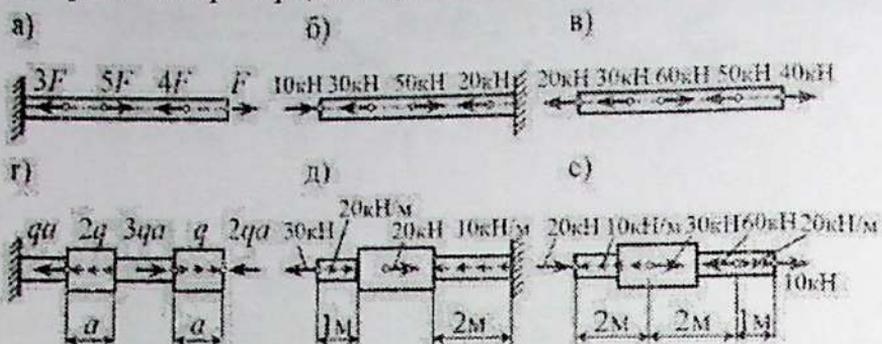


Рис. к задаче 3

Ответ: Наибольшие по абсолютной величине силы: а) $3F$ (сжатие); б) 30 кН (сжатие); в) 50 кН (растяжение); г) $2qa$ (растяжение и сжатие); д) 30 кН (растяжение); е) 30 кН (растяжение и сжатие).

б) Кручение

Задача № 4

К стальному валу приложены три известных момента M_1 , M_2 , M_3 . Требуется определить крутящие моменты по участкам и построить эпюры, если $M_1=1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2=0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_3=1,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a=1,6 \text{ м}$, $b=1 \text{ м}$, $c=1,4 \text{ м}$.

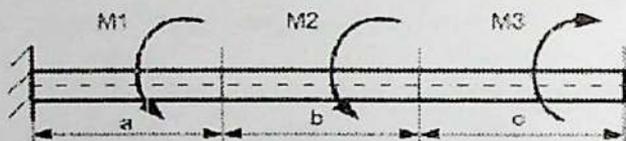


Рис. к задаче 4

Составляем уравнение статики и определяем M_A .

$$\sum M_A = 0$$

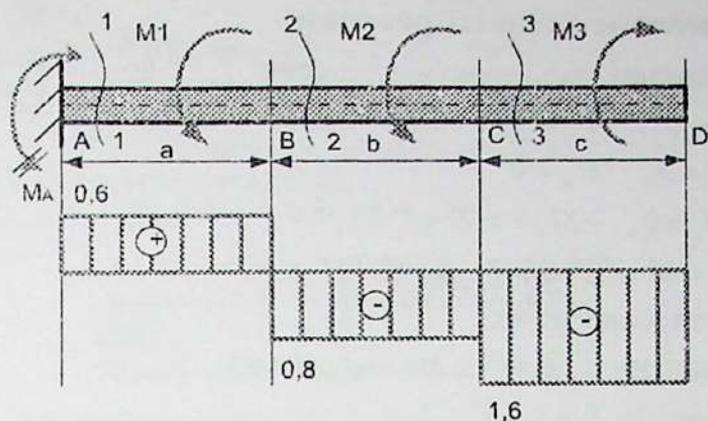
$$M_1 + M_2 - M_3 + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 1,6 - 1,4 - 0,8 = -0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Строим эпюру крутящего момента

$$1 \text{ сечение } M_{K1} = M_A = 0,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$2 \text{ сечение } M_{K2} = M_A - M_1 = 0,6 - 1,4 = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

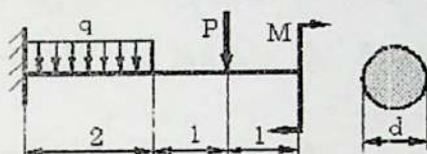
$$3 \text{ сечение } M_{K3} = M_A - M_1 - M_2 = 0,6 - 1,4 - 0,8 = -1,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$$



в) Изгиб

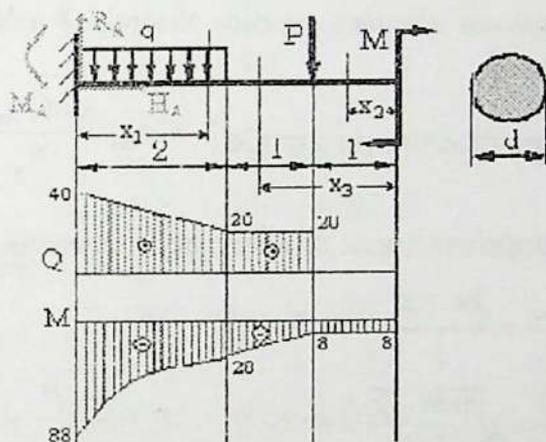
Задача № 5

Дано: $P = 20 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$



Требуется определить: продольную силу Q , изгибающий момент M_x и построить их эпюры, подобрать сечение и определить перемещение.

Решение:



1. Определение опорных реакций:

составляем уравнение равновесия: $\sum Y = 0$; $R_A - q \cdot 2 - P = 0$

$$R_A = q \cdot 2 + P = 10 \cdot 2 + 20 = 40 \text{ кН}$$

$$\sum Z = 0; \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 3 + M = 0;$$

$$M_A = 10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 8 = 88 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Построение эпюр:

2. Определение Q и M_n по участкам:

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = R_A - q \cdot x_1$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2} - M_A$$

при $x_1 = 0$ $Q_1 = 40 \text{ кН}$ $M_1 = -88 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$x_1 = 2$ $Q_1 = 20 \text{ кН}$ $M_1 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$

2 участок $0 \leq x_2 \leq 1$

$$Q_2 = 0 \quad M_2 = -M = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $1 \leq x_3 \leq 2$

$$Q_3 = P = 20 \text{ кН} \quad M_3 = -M - P \cdot (x_3 - 1)$$

при $x_3 = 1$ $M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$x_3 = 2$ $M_3 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$

По полученным данным строим эпюры Q и M_n .

3. Подбор сечения:

Условия прочности при изгибе: $\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_y} \leq [\sigma]$

Момент сопротивления для круглого сечения: $W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$

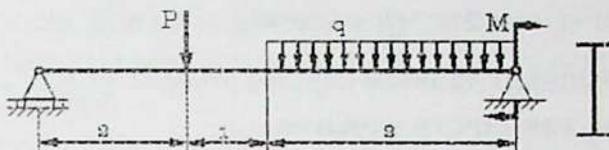
$$W_y = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{88 \cdot 100}{1} = 8800 \text{ см}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_y \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8800 \cdot 32}{3,14}} = 45 \text{ см}; \quad J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 201187 \text{ см}^4$$

Задача № 6.

Дано: $P = 40 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 10 \text{ кН/м}$

Требуется определить: продольную силу Q , изгибающий момент M_u и построить их эпюры, подобрать двутавровое сечение и определить прогиб (Z).



1. Определение опорных реакций:

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M - R_B \cdot 5 = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{80 + 80 + 20}{5} = 36 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + M + R_A \cdot 5 = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - M}{5} = \frac{120 + 20 - 20}{5} = 24 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - P - q \cdot 2 = 0$
 $24 + 36 - 40 - 20 = 0$
 $60 - 60 = 0$

2. Определение Q и M_u по участкам:

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = R_A = 24 \text{ кН}$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1$$

$$x_1 = 0; \quad M_1 = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ м}; \quad M_1 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2 участок $2 \leq x_2 \leq 3$

$$Q_2 = R_A - P = -16 \text{ кН}$$

$$M_2 = R_A \cdot x_2 - P \cdot (x_2 - 2)$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_2 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$x_2 = 3 \text{ м}; \quad M_2 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $0 \leq x_3 \leq 2$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot x_3$$

$$M_3 = R_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} - M$$

$$x_3 = 0; \quad Q_3 = -36 \text{ кН}; \quad M_3 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$x_3 = 2; \quad Q_3 = -16 \text{ кН}; \quad M_3 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным строим эпюры Q и M .

3. Подбор двутаврового сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

Где: M_{\max} - Максимальный изгибающий момент, берется из эпюры моментов;

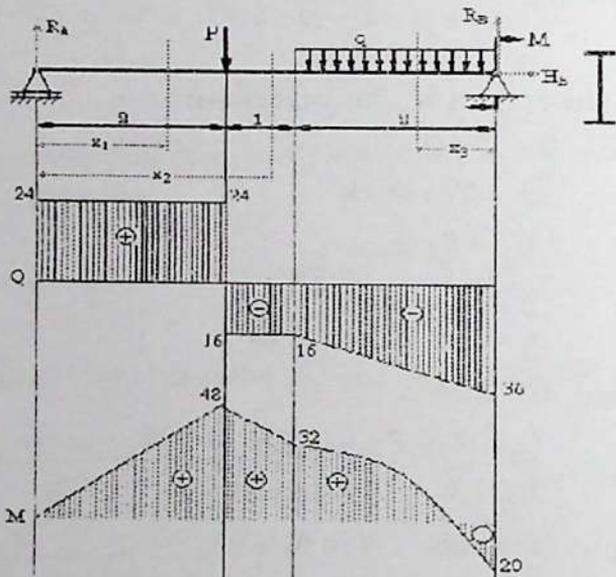
W_y - осевой момент сопротивления;

$[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение.

$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{48 \cdot 100}{16} = 300 \text{ см}^3$$

Из таблицы сортамента подбираем номер двутавра

№ двутавра 24 а при $W_y = 317 \text{ см}^3$, $J_y = 3800 \text{ см}^4$



Тесты для самопроверки

Основные положения, метод сечений, напряжения

Вариант 1

1. Прямой брус нагружается внешней силой F . После снятия нагрузки его форма и размеры полностью восстанавливаются. Какие деформации имели место в данном случае?

Варианты ответов:

1) незначительные, 2) пластические, 3) упругие, 4) остаточные.

2. Как называют способность конструкции сопротивляться упругим деформациям?

Варианты ответов:

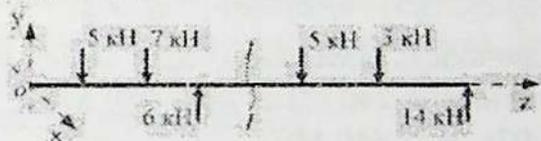
1) пластичность, 2) упругость, 3) устойчивость, 4) выносливость.

3. По какому из уравнений, пользуясь методом сечений, можно определить продольную силу в сечении?

Варианты ответов:

1) $Q_x = \sum F_{zx}$, 2) $Q_y = \sum F_{zy}$, 3) $N = \sum F_{zx}$, 4) $T = M_K = \sum M_z(F_{Kz})$

4. Пользуясь методом сечений определить величину поперечной силы в сечении I-I.



Варианты ответов:

1) 2 кН, 2) 4 кН, 3) -6 кН, 4) 7 кН.

5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении I-I бруса под действием крутящего момента M_K ?



σ - нормальное напряжение,
 τ - касательное напряжение.

Варианты ответов: 1) τ , 2) σ , 3) σ, τ , 4) $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

Основные механические характеристики

Вариант 1

1. Как называется и обозначается напряжение, при котором деформации растут при постоянной нагрузке?

Варианты ответов:

- 1) предел прочности σ_u , 2) предел текучести σ_y , 3) допускаемое напряжение σ_{adm} , 4) предел пропорциональности σ_{pr} .
2. Определить допускаемое напряжение, если $F_{pr} = 1,6$ кН, $F_y = 2$ кН, $F_u = 5,0$ кН, коэффициент запаса $n_u = 2$, площадь поперечного сечения $A = 40$ мм².

Варианты ответов:

- 1) 25 МПа, 2) 20 МПа, 3) 50 МПа, 4) 62,5 МПа.
3. Вычислить максимальное удлинение в момент разрыва, если начальная длина образца 200 мм, а длина в момент разрыва 240 мм.

Варианты ответов:

- 1) 20%, 2) 17%, 3) 0,25%, 4) 12%.
4. Выбрать основные характеристики прочности материала.

Варианты ответов:

- 1) σ_u , σ_y , 2) σ_y , σ_{pr} , 3) σ_{pr} , σ_y , 4) δ , ψ .
5. Проверить прочность материала, если максимальное напряжение в сечении $\sigma = 240$ МПа, $\sigma_{pr} = 380$ МПа, $\sigma_y = 400$ МПа, $\sigma_u = 640$ МПа, коэффициент запаса $n_u = 1,5$.

Варианты ответов:

- 1) $\sigma < \sigma_{adm}$, 2) $\sigma = \sigma_{adm}$,
3) $\sigma > \sigma_{adm}$, 4) данных не достаточно.



Вопросы для самоконтроля

- В чем состоит задача расчета на прочность? на жесткость? на устойчивость?
- Какие основные задачи решаются в курсе сопротивления материалов?
- Что называется брусом, оболочкой, пластинкой, массивным телом?
- Что такое поперечное сечение бруса? Какие типы брусьев вы знаете?
- Какое свойство тел называется упругостью?
- Что представляет собой расчетная схема сооружения и чем она отличается от действительного сооружения?
- По каким признакам и как классифицируются нагрузки?
- Что представляет собой интенсивность распределенной нагрузки?
- В каких единицах выражаются сосредоточенные силы и моменты, а также интенсивности распределенных силовых нагрузок?
- Что представляют собой внутренние силы?
- Какие внутренние усилия (внутренние силовые факторы) могут возникать в поперечных сечениях брусьев и какие виды деформации с ними связаны?
- В чем сущность метода сечений?
- Какой метод используется при определении внутренних силовых факторов?
- Сколько внутренних силовых факторов возникает в поперечных сечениях стержня в общем случае нагружения? Назовите их.
- Какие случаи простого нагружения вам известны?
- Что называется напряжением в точке и какова его размерность?

Глава 2. Растяжение и сжатие

При растяжении или сжатии в поперечном сечении стержня из 6 компонентов внутренних силовых факторов только нормальная сила не равна нулю, при этом поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации (согласно гипотезе плоских сечений), перемещаются вдоль оси стержня. Из этого следует, что все волокна элемента длиной l удлиняются на одну и ту же величину Δl — абсолютного удлинения, следовательно, относительное удлинение это же одинаково.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = const$$

Согласно закону Гука



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{или} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

где E — модуль упругости при растяжении является физической константой материала, то есть $E = const$, тогда $\sigma = const$



$$\sigma = \frac{N}{S}$$

При расчете стержней, работающих на растяжение или сжатие, условие прочности следует записывать для опасного сечения, которое характеризуется максимальным значением N_{max} на эпюре нормальных сил.



$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{S} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение или допускаемое напряжение на сжатие (сжатие от растяжения отличается только направлением силы или знаком).

При растяжении — знак «+», при сжатии — знак «-». Допускаемое напряжение зависит от физико-механических свойств материала, от ответственности детали и характеризует безопасность работы детали. В некоторых случаях стержни рассчитывают исходя из условия жесткости:



$$\Delta l_{\text{max}} = \frac{N \cdot l}{E \cdot S} \leq [\Delta l]$$

где Δl – изменение размеров стержня, а $[\Delta l]$ – допускаемая величина изменения размеров.

Расчет из условия жесткости всегда должен быть дополнен расчетом на прочность, который является обязательным.

Если в элементах конструкции внутренние усилия не могут быть определены из уравнений статики, то система называется статически неопределимой, при расчете которой необходимо, кроме уравнений статики составлять дополнительные уравнения, учитывающие деформации элементов конструкции. Решение статически неопределимых задач выполняется в следующей последовательности (по определенной методике).

2.1. Расчеты на прочность и жесткость при действии сосредоточенных сил

Задача №7

Для стержня, изображенного на рисунке, построить эпюру нормальной силы и определить удлинение стержня, если

$$F_1 = 100 \text{ кН}, F_2 = 50 \text{ кН}, q = 40 \text{ кН/м}, a = 1 \text{ м}, b = 2 \text{ м}, c = 1,5 \text{ м}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, S = 0,2 \text{ м}^2.$$

Решение

- 1) Разбиваем брус на участки АВ, ВС, CD;
- 2) Определяем значение нормальной силы на каждом участке;

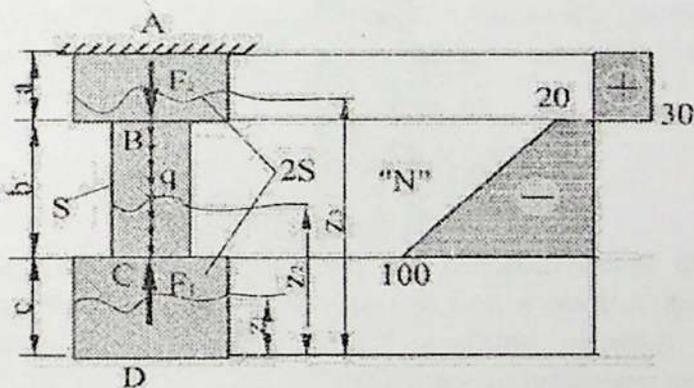


Рис. к задаче 7

$$\underline{CD} \quad 0 \leq z_1 \leq 1,5 \quad \underline{CB} \quad 1,5 \leq z_2 \leq 3,5$$

$$N_1 = \sum_{n.n.} Z = 0 \quad N_2 = \sum_{n.n.} Z = -F_1 + q(z_2 - 1,5)$$

при $z_2 = 1,5 \quad N_2 = -100 \quad z_2 = 3,5 \quad N_2 = -20$

$$\underline{BA} \quad 3,5 \leq z_3 \leq 4,5$$

$$N_3 = \sum_{n.n.} Z = -F_1 + 2 \cdot q + F_2 = 30$$

1) Строим эпюру нормальной силы;

2) Определяем удлинение стержня;

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}$$

$$\begin{aligned} \Delta l &= -\frac{F_1 l_{AB}}{ES_{AB}} + \frac{q \cdot l_{BC} l_{AB}}{ES_{AB}} + \frac{F_2 l_{AB}}{ES_{AB}} = -\frac{F_1 a}{E2S} + \frac{q \cdot b \cdot a}{E2S} + \frac{F_2 a}{E2S} = \\ &= -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0,2} = 3,75 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\Delta l_{BC} = -\frac{F_1 l_{BC}}{ES_{BC}} + \frac{q \cdot l_{BC}^2}{2ES_{BC}} = -\frac{F_1 \cdot b}{ES} + \frac{q \cdot b^2}{2ES} = -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2} = 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta l = 3,75 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-6} = -2,625 \cdot 10^{-6}$$

Задача № 8

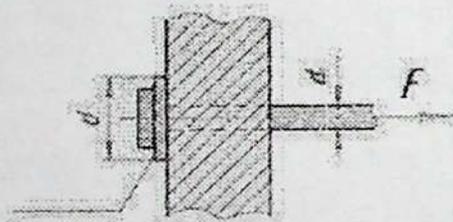


Рис. к задаче 8

Стяжка диаметром 25 мм растянута усилием F (см. рисунок), вызывающим в ней напряжение 100 МПа. Чему должен равняться диаметр шайбы d , чтобы давление, передаваемое ею на стену, не превышало 1,4 МПа?

Ответ: 213 мм

Задача № 9

Медная проволока диаметром $1,2$ мм удлиняется на $0,25$ мм под нагрузкой 90 Н. Определить длину проволоки.

Ответ: 314 мм.

Задача № 10

Стержень из малоуглеродистой стали шириной $0,3$ м и толщиной $0,015$ м ослаблен заклепочным отверстием диаметром $0,023$ м, расположенным на оси стержня. Какое растягивающее усилие этот стержень может выдержать, если допускаемое напряжение равно 90 МПа?

Ответ: 374 кН.

Задача № 11

Определить напряжения во всех участках изображенного на рисунке стального стержня и полную его деформацию, если поперечное сечение равно $1 \cdot 10^{-3}$ м².

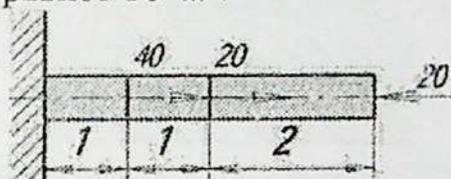


Рис. к задаче 11

Ответ: на левом участке $\sigma = 40$ МПа; на среднем $\sigma = 20$ МПа; на правом $\sigma = -20$ МПа; $\Delta l = 0$.

Задача № 12

Стальная полоса (см. рисунок) растянута продольными силами. Она ослаблена круглыми заклепочными отверстиями, как показано на рисунке. Определить среднюю величину напряжений в опасном сечении.

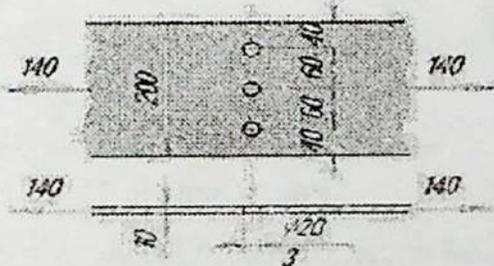


Рис. к задаче 12

Ответ: 100 МПа.

Задача № 13

К нижнему концу троса, закрепленного верхним концом, подвешен груз $F = 75 \text{ кН}$. Трос составлен из проволок диаметром $d = 2 \text{ мм}$. Допускаемое напряжение для материала троса равно $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$. Из какого количества проволок должен быть составлен трос?

Ответ: 80 проволок.

Задача № 14

Определить допускаемую нагрузку для стального листа толщиной $t = 10 \text{ мм}$, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ (см.рис.), размеры в миллиметрах.

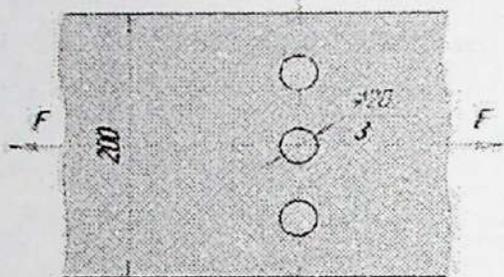


Рис. к задаче 14

Ответ: Допускаемая нагрузка $[F] = 140 \text{ кН}$.

Задача № 15

Определить напряжения в обеих частях изображенного на рисунке стержня, а также полное его удлинение. Материал стержня – сталь, сечение круглое.

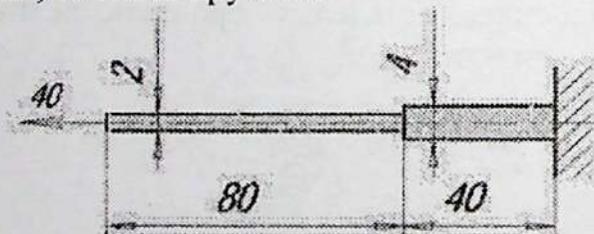


Рис. к задаче 15

Ответ: в левой части $\sigma = 127,6 \text{ МПа}$;
в правой $\sigma = 31,9 \text{ МПа}$; $\Delta l = 0,575 \text{ мм}$.

Задача № 16

Жесткий стержень AB (см. рисунок) нагружен силой F и поддерживается стальной тягой DC круглого поперечного сечения диаметром 20 мм. Определить наибольшую допустимую нагрузку F и опускание точки B . Допускаемое напряжение для материала стержня CD равно 160 МПа.

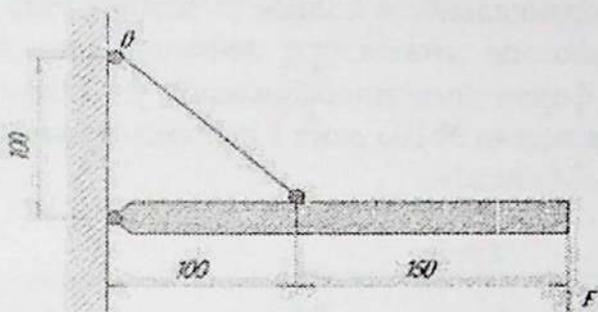


Рис. к задаче 16

Ответ: $F = 12$ кН, $\delta_B = 4,17$ мм

Задача № 17

Вычислить внутренние усилия и напряжения в стержнях кронштейна (см. рис.), если нагрузка $F = 35$ кН. Стальная верхняя тяга круглого сечения диаметром $d = 25$ мм, нижний стержень — из дерева, квадратного сечения 70×70 мм. Стороны кронштейна: $a = 1000$ мм, $b = 557$ мм.

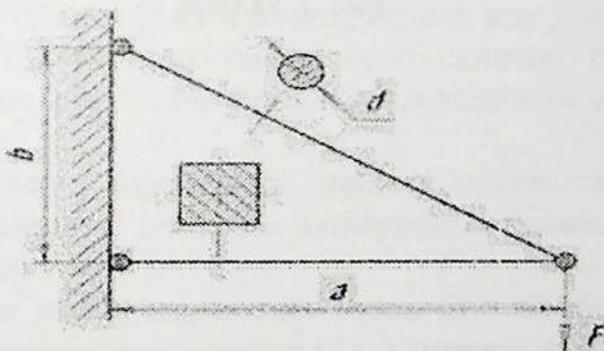


Рис. к задаче 17

Ответ: $N_1 = 72$ кН, $N_2 = 62,4$ кН,
 $\sigma_1 = 146,8$ МПа, $\sigma_2 = -12,7$ МПа.

Задача № 18

В изображенном на рис. 8.11 кронштейне стержень AC стальной, а стержень BC деревянный. Допускаемое напряжение для стали $[\sigma]_c = 160$ МПа, для дерева $[\sigma]_д = 4$ МПа. Подобрать диаметр d круглого сечения стального стержня и сторону a квадратного сечения деревянного стержня и определить горизонтальное, вертикальное и полное смещение узла C.

Формально мы можем при решении данной задачи воспользоваться формулами, положив в них угол $\beta = 0$.

Решение задачи №10а дано с использованием математического пакета «Mathcad»

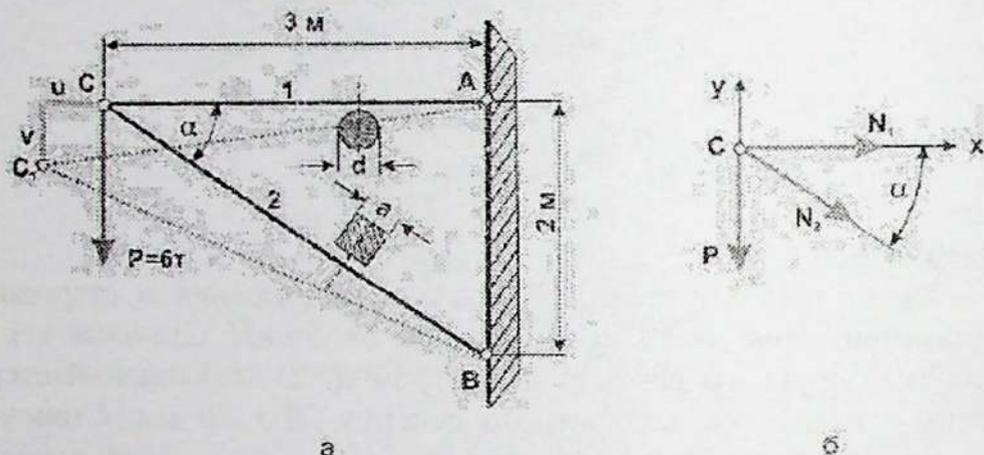


Рис. к задаче 18

$$\text{Дано: } P = 6 \cdot 10^4 \quad L_{st} = 3 \quad h_{st} = 2 \quad \alpha_{st} = \arctan\left(\frac{h}{L_1}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = 33.69$$

$$E_{st} = 2 \cdot 10^{11} \quad E_{dr} = 1 \cdot 10^{10} \quad \sigma_{dc} = 160 \cdot 10^6 \quad \sigma_{dd} = 4 \cdot 10^6$$

$$L_{dr} = \sqrt{h^2 + L_1^2} = 3.606$$

Решение

$$N_{st} = \frac{P \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 9 \times 10^4 \quad N_{dr} = \frac{-P}{\sin(\alpha)} = -1.081 \times 10^5$$

$$F_{st} = \frac{N_1}{\sigma_{dc}} = 5.625 \times 10^{-4} \quad d = \sqrt{\frac{4 F_1}{\pi}} = 0.027$$

$$F_{dr} = \frac{|N_2|}{\sigma_{dd}} = 0.027 \quad a = \sqrt{F_2} = 0.164$$

диаметра стального стержня - 27 мм, а сторона квадратного сечения деревянного стержня - 164 мм

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{E_1 F_1} = 2.4 \times 10^{-3} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{E_2 F_2} = -1.442 \times 10^{-3}$$

$$u = \Delta L_1 = 2.4 \times 10^{-3} \quad X = \frac{\Delta L_1 \cos(\alpha) + |\Delta L_2|}{\sin(\alpha)} = 6.2 \times 10^{-3}$$

$$\Delta L_{\Sigma} = \sqrt{u^2 + v^2} = 6.643 \times 10^{-3} \quad \alpha_{\Sigma} = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = 68.838$$

Полное смещение узла С составило 6.643 мм

Задача №19

Сила $P=10\text{кН}$ нагружает конструкцию, как указано на рис.а. Все стержни одинакового поперечного сечения, состоящего из двух равнобоких уголков $80 \times 80 \times 8$. Определить напряжения в стержнях.

По сортаменту пркатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-56 определяем площадь поперечного сечения стержней $2 \cdot 12,3 = 24,6 \text{ см}^2$.

Используя метод вырезания узлов В и С простой фермы (рис. б и в), определяем нормальные усилия в каждом из стержней фермы и затем определяем напряжения.

Решение задачи дано с использованием математического пакета «Mathcad»

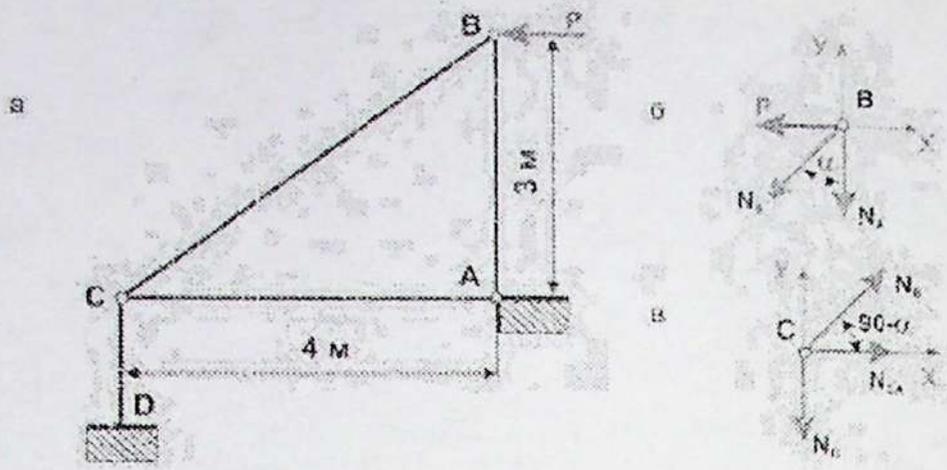


Рис к задаче 19

Дано $P = 10^4$, $h = 3$, $L = 4$, $E = 2 \cdot 10^3$

Решение $\alpha = \arctan\left(\frac{L}{h}\right) = \frac{\alpha}{\text{deg}} = 53.13$

Узел B $N_A = 1$, $N_B = 1$

Given $-P - N_B \sin(\alpha) = 0$, $-N_B \cos(\alpha) - N_A = 0$

$R = \text{Find}(N_A, N_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 7500 \\ -12500 \end{pmatrix}$

$N_{A1} = R_1 = 7.5 \times 10^3$, $N_{B1} = R_2 = -1.25 \times 10^4$

Узел C $N_{CA} = 1$, $N_D = 1$

Given $N_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + N_{CA} = 0$, $N_B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - N_D = 0$

$R1 = \text{Find}(N_D, N_{CA}) \rightarrow \begin{pmatrix} -7500 \\ 10000 \end{pmatrix}$

$N_{D1} = R1_1 = -7.5 \times 10^3$, $N_{CA1} = R1_2 = 1 \times 10^4$

$\sigma_{AB} = \frac{N_A}{F} = 304.878$, $\sigma_{AC} = \frac{N_{CA}}{F} = 406.504$

$\sigma_{AB} = \frac{N_B}{F} = -508.13$, $\sigma_{CD} = \frac{N_D}{F} = -304.878$

Задача № 20

Пусть для кронштейна, изображенного на рис.: $F_1 = 2 \text{ см}^2$, $F_2 = 4 \text{ см}^2$, $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (сталь), $E_2 = 0.84 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (медь):
 $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $L_1 = 2 \text{ м}$, $L_2 = 2 \text{ м}$, $P = 40 \text{ кН}$.

Требуется определить величину вектора Δr и его направление (угол γ).

Решение задачи дано с использованием математического пакета «Mathcad»

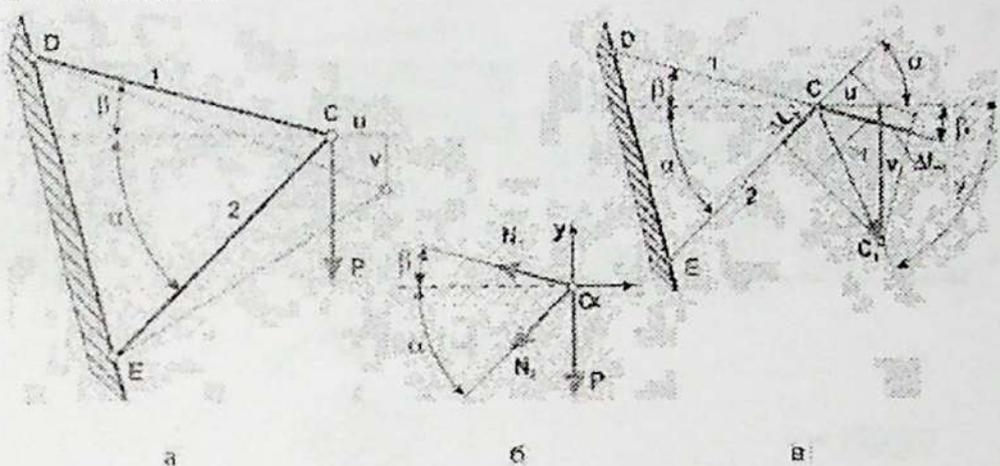


Рис. к задаче 20

Дано $L_1 = 2$ $L_2 = 2$ $F_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ $F_2 = 4 \cdot 10^{-4}$ $P = 4 \cdot 10^4$
 $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ $E_2 = 0.84 \cdot 10^{11}$ $\alpha = 45\text{-deg}$ $\beta = 15\text{-deg}$

Решение

$$N_1 = \frac{P \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} = 3.266 \times 10^4 \quad N_2 = \frac{P \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -4.461 \times 10^4$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot F_1} = 1.633 \times 10^{-3} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot F_2} = -2.656 \times 10^{-3}$$

$$u = \frac{\Delta L_1 \cdot \sin(\alpha) - \Delta L_2 \cdot \sin(\beta) \cdot (-1)}{\sin(\alpha + \beta)} = 5.397 \times 10^{-4}$$

$$v = \frac{\Delta L_1 \cdot \cos(\alpha) + \Delta L_2 \cdot \cos(\beta) \cdot (-1)}{\sin(\alpha + \beta)} = 4.295 \times 10^{-3}$$

$$\Delta r = \sqrt{u^2 + v^2} = 4.329 \times 10^{-3} \quad \gamma = \frac{\text{atan}\left(\frac{v}{u}\right)}{\text{deg}} = 82.839$$

Задача № 21

Под воздействием приложенной нагрузки представленный на рис. стержень удлинился на 0,2 мм. Определить величину нагрузки P . На рисунке 8.9 все геометрические размеры приведены в мм. Модуль упругости алюминия принят равным $0,75 \cdot 10^{11}$ МПа, а бронзы – $1,1 \cdot 10^{11}$ МПа.

Решение задачи дано с использованием математического пакета «Mathcad»

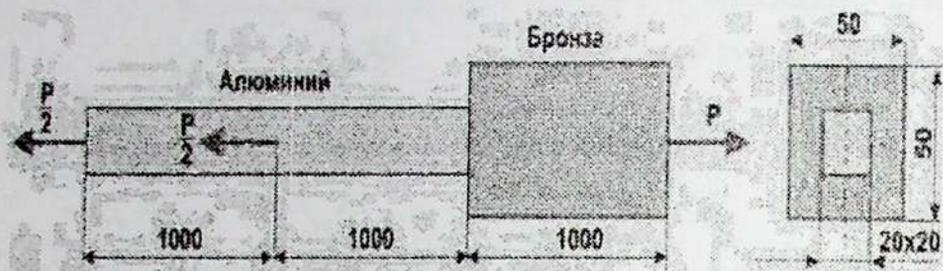


Рис. к задаче 21

ORIGIN := 1

Дано $E_A = 0,75 \cdot 10^{11}$ $E_B = 1,1 \cdot 10^{11}$ $\Delta = 0,2 \cdot 10^{-3}$

$A_A = 4 \cdot 10^{-4}$ $A_B = 25 \cdot 10^{-4}$

$$\underline{L} := \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} \quad \underline{A} := \begin{pmatrix} A_A \\ A_A \\ A_B \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} E_A \\ E_A \\ E_B \end{pmatrix} \quad \underline{N}(P) := \begin{pmatrix} 0,5 \cdot P \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

Решение

$$\Delta L(P) := \sum_{i=1}^3 \frac{N(P)_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i} \quad \underline{K}(P) := \Delta L(P) - \Delta$$

$\underline{L} := 1$ $\underline{P} := \text{root}(K(P), P)$ $P = 3,729 \times 10^4$

Итак величина нагрузки $P = 37,29$ кН

Задача № 22

Определить напряжение в шатуне автомобильного двигателя, поперечное сечение $I-I$ которого (см. рис.) имеет форму двутавра, и проверить прочность при допуске напряжении $[\sigma] = 140$ МПа. Найти число шпилек n для крепления головки цилиндра, если внутренний диаметр резьбы $d_B = 8$ мм, $[\sigma] = 80$ МПа. Диаметр цилиндра $D = 80$ мм, давление газов $p = 3,6$ МПа.

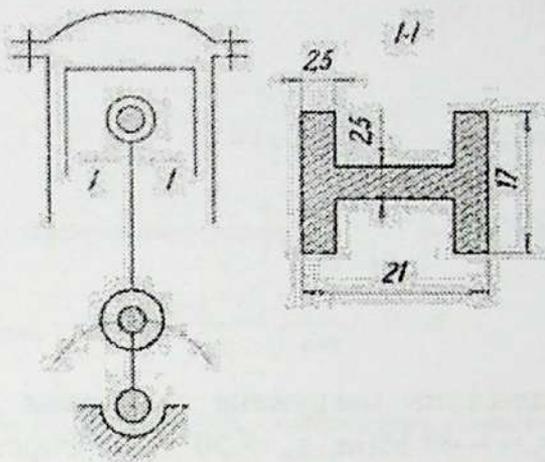


Рис к задаче 22

Ответ: Напряжение $\sigma_{ш} = 144$ МПа, $\Delta\sigma = 2,85\%$, что допустимо, число шпилек $n = 5$.

Задача № 23

При прохождении поезда через мост в одной из точек стальной балки при помощи тензометров были измерены удлинения в горизонтальном и вертикальном направлениях. В горизонтальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной $+8$ мм при его базе 20 мм и увеличении $1/k = 1000$; в вертикальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной -12 мм при его базе 100 мм и том же увеличении.

Определить нормальные напряжения в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Решение задачи выполняется в программном продукте «Mathcad»

Дано

$$E := 2 \cdot 10^4 \quad \mu := 0.3 \quad k := 10^{-3} \quad \Delta_{\Gamma} := 5 \quad L_{\Gamma} := 20 \quad \Delta_B := -12 \quad L_B := 100$$

Решение

$$\varepsilon_x := \frac{\Delta_{\Gamma}}{L_{\Gamma}} \cdot k = 4 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_y := \frac{\Delta_B}{L_B} \cdot k = -1.2 \times 10^{-4} \quad \dots$$

$$\sigma_x := 1 \quad \sigma_y := 1 \quad \text{Given}$$

$$\frac{1}{E} (\sigma_x - \sigma_y \mu) = \varepsilon_x \quad \frac{1}{E} (\sigma_y - \sigma_x \mu) = \varepsilon_y$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} := \text{Find}(\sigma_x, \sigma_y) = \begin{pmatrix} 80 \\ -1.4 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Задача № 24

Стальная пластина нагружена по краям напряжениями $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = -40$ МПа, $\tau_{xy} = 50$ МПа. Определить, под каким углом α к напряжению σ_x надо установить тензометр А, чтобы он давал наибольшие показания при нагружении. Найти наибольшее относительное удлинение ε , при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\mu = 0,25$ и соответствующее ему приращение показаний тензометра, имеющего базу $L = 10$ мм и увеличение $1/k = 1000$.

Решение задачи выполняется в программном продукте «Mathcad»

Дано

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \quad \mu_s = 0,25 \quad \lambda = 10^{-3} \quad L_0 = 10$$

$$\sigma_x = 100 \quad \sigma_y = -40 \quad \tau_{xy} = 30$$

Решение Главные напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_1$ $\sigma_{\min} = \sigma_2$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 116,023$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -56,023$$

Направление главного напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_1$

$$\alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = \frac{1}{\text{deg}} = 17,769$$

Наибольшая удлинения будет в направлении главного σ_{\max}

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{E} (\sigma_{\max} - \mu \cdot \sigma_{\min}) = 6,301 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = \frac{\epsilon_{\max} \cdot L_0}{k} = 6,301$$

Задача № 25

Жесткая балка OC поддерживается в горизонтальном положении стальным стержнем BD длиной 2 м. Определить диаметр стержня и при найденном размере опускание конца балки C , если $F = 60$ кН, $[\sigma] = 140$ МПа.

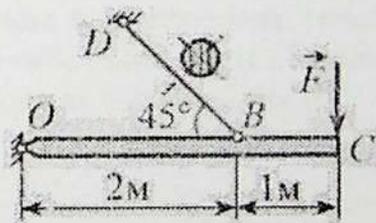


Рис к задаче 25

Ответ: $d = 34$ мм, $\delta = 3$ мм.

Задача № 26

Жесткий брус AB подвешен на двух круглых тросах: троса 1 диаметром 25 мм – медная, а троса 2 диаметром 20 мм – стальная. На каком расстоянии a необходимо приложить силу $F=30\text{кН}$, чтобы в процессе деформации груз оставался горизонтальным? Какие в этом случае возникают напряжения?

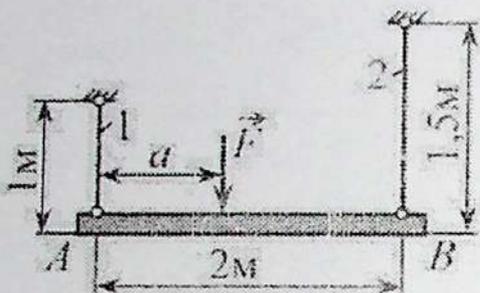


Рис. к задаче 26

Ответ: $a = 0,92\text{ м}$, $\sigma_1 = 33\text{ МПа}$, $\sigma_2 = 44\text{ МПа}$.

Задача № 27

Чугунная колонна высотой 3 м имеет кольцевое поперечное сечение с наружным диаметром 25 см и внутренним диаметром 20 см (рис. 8.2). Она нагружена сжимающим усилием 50т ($5 \cdot 10^5\text{Н}$).

Найти напряжения в поперечном сечении, абсолютное и относительное укорочения колонны.

Все вычисления выполним в системе MathCAD, используя международную систему единиц измерения СИ: единицы длины – метр; единицы силы – ньютон.

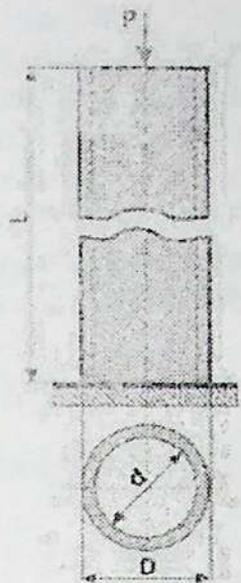


Рис. к задаче 27

$$D_{\text{вн}} = 0,25 \quad L = 3 \quad d = 0,2 \quad D = 0,25 \quad P = 3 \cdot 10^5 \quad E = 12 \cdot 10^{11}$$

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\pi D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = 0,018$$

Решение

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{P}{F} = 2,829 \times 10^7 \quad \Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot F} = 7,074 \times 10^{-4} \quad \epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta L}{L} = 2,358 \times 10^{-4}$$

Итак, напряжения в поперечных сечениях колонны равны 28,29 МПа, абсолютное укорочение колонны – 0,707 мм, а относительное укорочение колонны – $2,36 \cdot 10^{-4}$.

Задача № 28

Для бруса, изображенного на рис. а, построить эпюры N , σ_x , u .

В соответствии с общим правилом построения эпюр:

- выбираем систему координат (ось z помещаем в левом крайнем сечении бруса, а ось x направляем вдоль его оси);
- изображаем расчетную схему бруса;
- разбиваем брус вдоль его оси на участки, в пределах которых одновременно должны оставаться постоянными следующие величины:

1. выражения для внутренних усилий N , если хотят построить только эпюру N ;

2. выражения для внутренних усилий N и площади F , если хотят построить эпюру σ_x ;

3. выражения для внутренних усилий N , площади F , модуля Юнга E , если хотят построить эпюру перемещений u .

А. Определение опорных реакций

В рассматриваемой задаче опорные реакции можно было бы и не определять, если рассматривать не левые, а правые отсеченные части бруса (рис. б).

$$\sum X = 0: -X_A + P_1 - P_2 + P_3 = 0;$$

$$\sum Y = 0: Z_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: M_A = 0$$

Отсюда

$$X_A = P_1 - P_2 + P_3 = 20 \text{ кН};$$

$$Z_A = 0;$$

$$M_A = 0$$

Итак,

$$X_A = 20 \text{ кН}; Z_A = 0 \text{ кН}; M_A = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Б. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях бруса Учитывая только характер приложенной к брусу нагрузки, разбиваем его на три участка: 1, 2 и 3 (рис. б). В пределах каждого участка мысленно рассекаем брус на две части, отбрасываем правую часть, а для левой записываем уравнение равновесия системы сил, приложенных к отсеченной части бруса (рис. в, г, д).

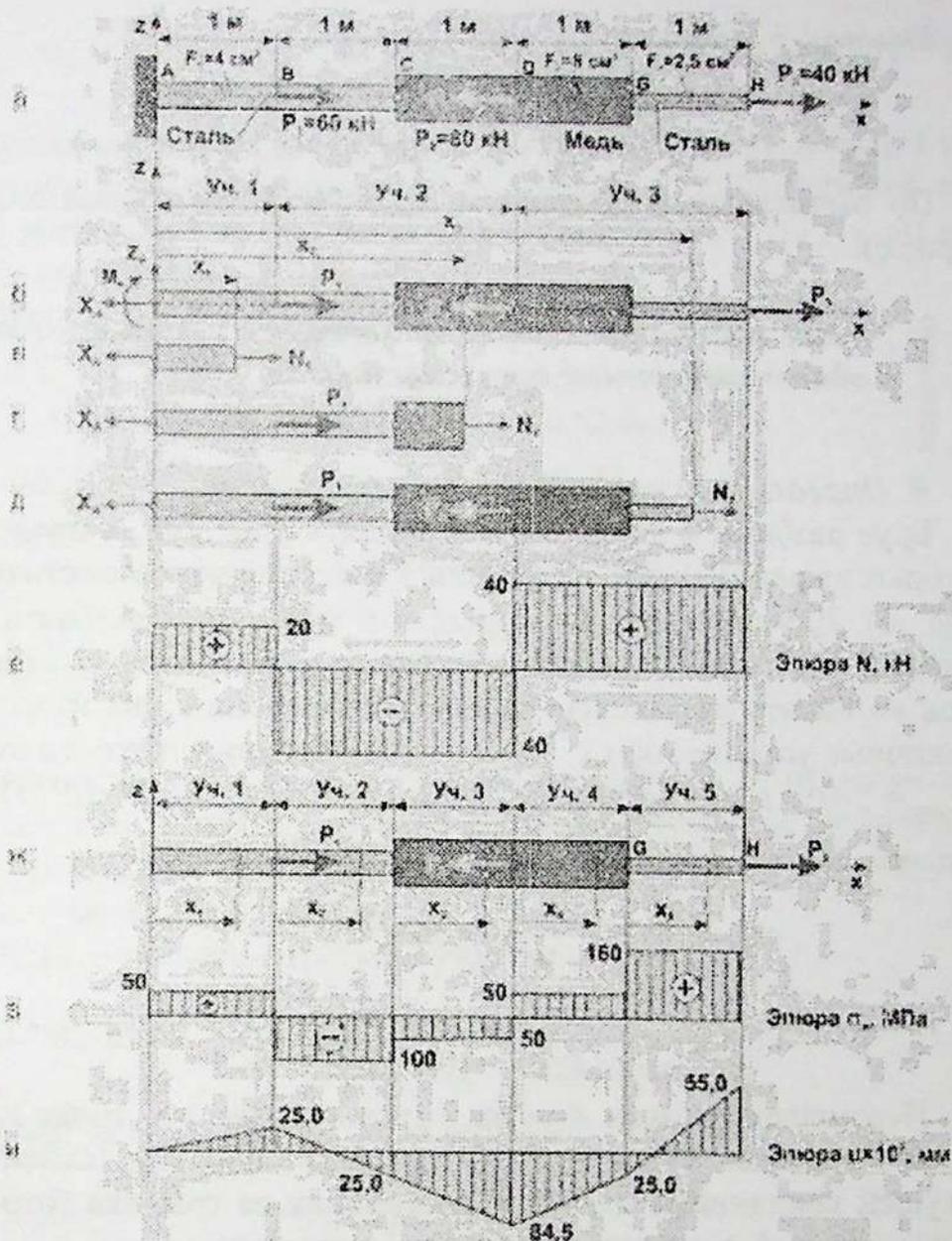


Рис. к задаче 28

Участок $1 \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$

$$\sum X = 0; -X_A + N_1 = 0$$

$$N_1 = X_A = 20 \text{ кН};$$

Участок $2 \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$

$$\sum X = 0; -X_A + P_1 + N_2 = 0$$

$$N_2 = X_A - P_1 = 20 - 60 = -40 \text{ кН};$$

Участок 3 $0 \leq x_3 \leq 3\text{ м}$.

$$\sum X = 0; -X_A + P_1 - P_2 + N_3 = 0$$

$$N_3 = X_A - P_1 + P_2 = 20 - 60 + 80 = 40\text{ кН};$$

По вычисленным значениям N_i ($i = 1, 2, 3$) строим эпюру N (рис. е).



Все ординаты эпюры на чертеже изображаются в одном, выбранном вами, масштабе!

В. Определение напряжений и перемещений.

Брус разбиваем вдоль его оси на пять участков, в пределах которых выражения для напряжений и перемещений постоянны (рис. ж). Для построения эпюр σ_x и u будем использовать локальные системы координат x_{0i} . Построение эпюры u целесообразно начать от заделки, т. к. в этом сечении нам известны граничные условия (при $x_l = 0$ и $u = 0$). Модуль упругости стали $-E_{ст} = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²; модуль упругости меди $-E_{м} = 0,84 \cdot 10^{11}$ Н/м².

Участок 1 $0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}$; $F_1 = 4\text{ см}^2$; $N_1 = 20\text{ кН}$.

$$\sigma_{x,1} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 50\text{ МПа};$$

$$u_1(x_1) = u_A + \frac{N_1 x_1}{E_{ст} F_1} = 0 + \frac{20 \cdot 10^3 x_1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-3} x_1.$$

Перемещение точки A бруса u_A равно нулю, т.к. точка находится в заделке. Функция $u_1(x_1)$ линейным образом зависит от текущей координаты x_1 , и для построения ее графика (отрезка прямой линии) достаточно знать две ее ординаты.

Обычно выбирают точки в начале ($x_1 = 0$ м) и в конце участка ($x_1 = 1$ м) бруса.

Итак, в пределах первого участка

$$\sigma_{x,1} = 50\text{ МПа}; \quad u_A = 0\text{ мм}; \quad u_B = 0,25\text{ мм};$$

Участок 2 $0 \leq x_2 \leq 1\text{ м}$; $F_2 = 4\text{ см}^2$; $N_2 = -40\text{ кН}$.

$$\sigma_{x,2} = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -100\text{ МПа};$$

$$u_2(x_2) = u_B + \frac{N_2 x_2}{E_{\text{ст}} F_2} = -0,25 \cdot 10^{-3} - \frac{40 \cdot 10^3 x_2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -0,25 \cdot 10^{-3} - 0,50 \cdot 10^{-3} x_2$$

Функция $u_2(x_2)$ линейным образом зависит от текущей координаты x_2 , и для построения ее графика (отрезка прямой линии) достаточно знать две ее ординаты в начале ($x_2 = 0$ м) и в конце участка ($x_2 = 1$ м) бруса.

Итак, в пределах второго участка

$$\sigma_{x,2} = -100 \text{ МПа}; \quad u_2(0) = u_B = 0,25 \text{ мм};$$

$$u_2(1) = u_C = -0,25 \text{ мм};$$

Участок 3 $0 \leq x_3 \leq 1$ м; $F_3 = 8 \text{ см}^2$; $N_3 = -40 \text{ кН}$.

$$\sigma_{x,3} = \frac{N_3}{F_3} = -\frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ МПа};$$

$$u_3(x_3) = u_C + \frac{N_3 x_3}{E_M F_3} = -0,25 \cdot 10^{-3} - \frac{40 \cdot 10^3 x_3}{0,84 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -0,25 \cdot 10^{-3} - 0,595 \cdot 10^{-3} x_3$$

Функция $u_3(x_3)$ линейным образом зависит от текущей координаты x_3 , и для построения ее графика (отрезка прямой линии) достаточно знать две ее ординаты в начале ($x_3 = 0$ м) и в конце участка ($x_3 = 1$ м) бруса.

Итак, в пределах третьего участка

$$\sigma_{x,3} = -50 \text{ МПа}; \quad u_3(0) = u_C = 0,25 \text{ мм};$$

$$u_3(1) = u_D = -0,845 \text{ мм};$$

Участок 4 $0 \leq x_4 \leq 1$ м; $F_4 = 8 \text{ см}^2$; $N_4 = 40 \text{ кН}$.

$$\sigma_{x,4} = \frac{N_4}{F_4} = \frac{40 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 50 \text{ МПа};$$

$$u_4(x_4) = u_D + \frac{N_4 x_4}{E_M F_4} = -0,845 \cdot 10^{-3} + \frac{40 \cdot 10^3 x_4}{0,84 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -0,845 \cdot 10^{-3} + 0,595 \cdot 10^{-3} x_4$$

Функция $u_4(x_4)$ линейным образом зависит от текущей координаты x_4 , и для построения ее графика (отрезка прямой линии) достаточно знать две ее ординаты в начале ($x_4 = 0$ м) и в конце участка ($x_4 = 1$ м) бруса.

Итак, в пределах четвертого участка

$$\sigma_{x,4} = 50 \text{ МПа}; \quad u_4(0) = u_D = -0,845 \text{ мм};$$

$$u_4(1) = u_G = -0,25 \text{ мм};$$

Участок 5 $0 \leq x_5 \leq 1 \text{ м}; F_5 = 2,5 \text{ см}^2; N_5 = 40 \text{ кН}.$

$$\sigma_{x,5} = \frac{N_5}{F_5} = \frac{40 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа};$$

$$u_5(x_5) = u_G + \frac{N_5 x_5}{E_{ст} F_5} = -0,25 \cdot 10^{-3} + \frac{40 \cdot 10^3 x_5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = -0,25 \cdot 10^{-3} + 0,80 \cdot 10^{-3} x_5$$

Функция $u_5(x_5)$ линейным образом зависит от текущей координаты x_5 , и для построения ее графика (отрезка прямой линии) достаточно знать две ее ординаты в начале ($x_5 = 0 \text{ м}$) и в конце участка ($x_5 = 1 \text{ м}$) бруса.

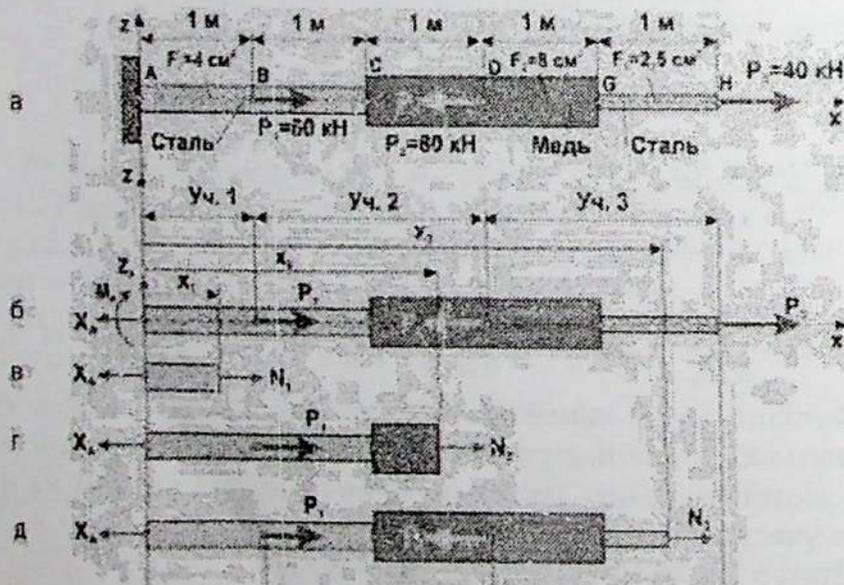
Итак, в пределах четвертого участка

$$\sigma_{x,5} = 160 \text{ МПа}; \quad u_5(0) = u_G = -0,25 \text{ мм};$$

$$u_5(1) = u_H = 0,55 \text{ мм};$$

По результатам расчета строим эпюры нормальных напряжений σ_x и перемещений поперечных сечений бруса u (рис. 3 и 4).

Решим эту же задачу в MathCAD. При записи значений физических и геометрических величин будем использовать систему СИ.



Дано $L_1 = 1$ $L_2 = 2$ $L_3 = 3$ $L_4 = 4$ $L_5 = 5$

$L_{12} = L_1 + L_2$ $L_{23} = L_{12} + L_3$ $L_{34} = L_{23} + L_4$ $L_{45} = 5$

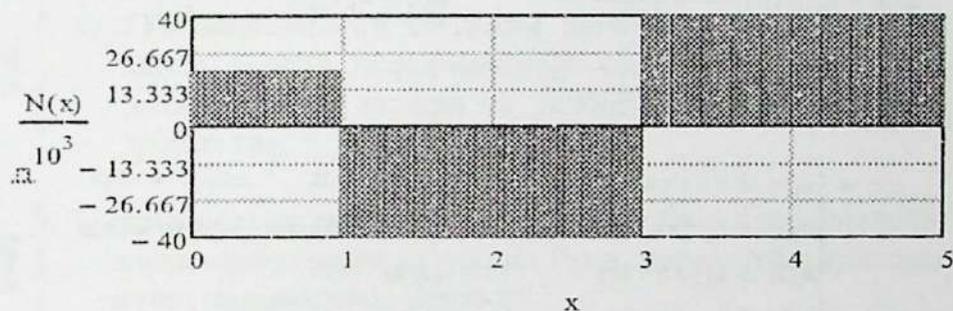
$F_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ $F_2 = F_1$ $F_3 = 8 \cdot 10^{-3}$ $F_4 = F_3$ $F_5 = 26.6 \cdot 10^{-3}$

$X_A = 2 \cdot 10^3$ $P_1 = 6 \cdot 10^3$ $P_2 = 8 \cdot 10^3$ $P_3 = 4 \cdot 10^3$

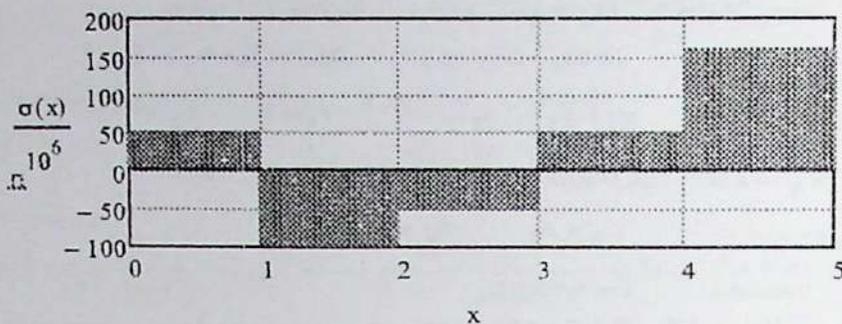
$E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ $E_2 = E_1$ $E_3 = 0.84 \cdot 10^{11}$ $E_4 = E_3$ $E_5 = E_1$

Решение $x = 0,005 \cdot L$

$$N(x) := \begin{cases} X_A & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ X_A - P_1 & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ X_A - P_1 & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ X_A - P_1 + P_2 & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ X_A - P_1 + P_2 & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$



$$N(x) := \begin{cases} \frac{X_A}{F_1} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \frac{X_A - P_1}{F_2} & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ \frac{X_A - P_1}{F_3} & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ \frac{X_A - P_1 + P_2}{F_4} & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ \frac{X_A - P_1 + P_2}{F_5} & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$



$$u_1(x) = \frac{N(0.95L_1)x}{F_1 E_1}$$

$$u_2(x) = u_1(L_1) + \frac{N(0.95L_{12})(x-L_1)}{F_2 E_2}$$

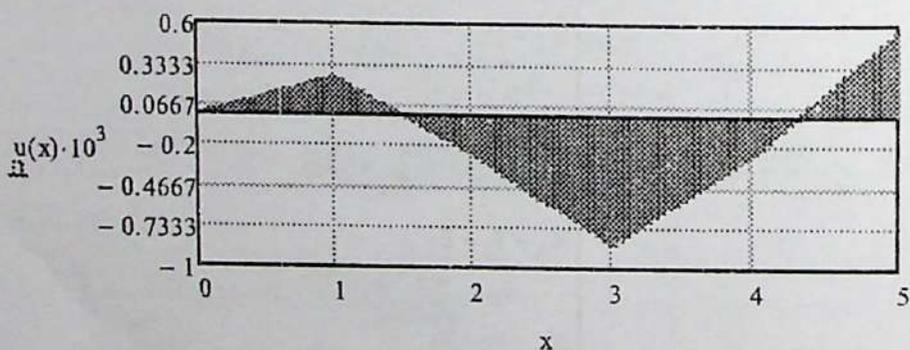
$$u_3(x) = u_2(L_{12}) + \frac{N(0.95L_{12})(x-L_{12})}{F_3 E_3}$$

$$u_4(x) = u_3(L_{13}) + \frac{N(0.95L_{14})(x-L_{13})}{F_4 E_4}$$

$$u_5(x) = u_4(L_{14}) + \frac{N(0.95L)(x-L_{14})}{F_5 E_5}$$

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ u_2(x) & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ u_3(x) & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ u_4(x) & \text{if } L_{13} \leq x < L_{14} \\ u_5(x) & \text{if } L_{14} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(1) \cdot 10^3 &= 0.25 & u(2) \cdot 10^3 &= -0.25 \\ u(3) \cdot 10^3 &= -0.845 & u(4) \cdot 10^3 &= -0.25 \\ u(5) \cdot 10^3 &= 0.55 \end{aligned}$$



2.2. Расчет статически неопределимых систем

1) *Определение степени статической неопределимости.*

$$S = m - n,$$

где m – число неизвестных усилий,

n – число возможных уравнений статики для данной системы.

2) *Статическая сторона задачи* – рассматривает все возможные уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции содержащие неизвестные усилия

3) *Геометрическая сторона задачи* – устанавливает связь между деформациями отдельных элементов между собой, исходя из условий совместности деформации.

4) *Физическая сторона задачи* – выражает деформации элементов, согласно закона Гука, через действующие в них неизвестные усилия.

5) *Синтез* – совместным решением всех полученных уравнений раскрывает статическую неопределимость, то есть определяет все неизвестные усилия.

Задача № 29

Для схемы, изображенной на рисунке необходимо определить площадь поперечного сечения стержней при действии силы F и подобрать угловую равнополочную или неравнополочную сталь, при условии, что поперечное сечение одного из стержней в два раза больше, чем другого, если:

$$F = 100 \text{ кН}, a = 1,2 \text{ м}, b = 0,8 \text{ м}, \Delta = 0,2 \text{ мм}, \Delta t = 20 \text{ С},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \alpha = 125 \cdot 10^{-7} 1/^\circ\text{C}, [\sigma] = 100 \text{ МПа}.$$

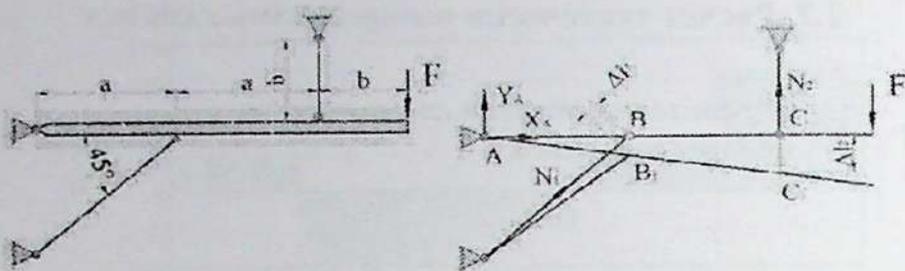


Рис. к задаче 29

Решение.

Для определения необходимой по условию прочности площади поперечного сечения стержней представим деформированное состояние системы.

- 1) Находим степень статической неопределенности.

$$S = m - n = 4 - 3 = 1$$

- 2) Статическая сторона задачи

$$\sum X = 0; \quad N_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ + Y_A + N_2 - F = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0;$$

- 3) Геометрическая сторона задачи

$$\Delta ABB_1 \approx \Delta ACC_1 \Rightarrow \frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC};$$

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ}; \quad CC_1 = \Delta l_2; \quad AB = a; \quad AC = 2a$$

$$\frac{\Delta l_1}{a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{2a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} = \frac{\Delta l_2}{2}$$

- 4) Физическая сторона задачи

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot S_1} = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot S \cdot \cos 45^\circ}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot S_2} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2S}$$

- 5) Синтез

Подставим выражения, полученные в физической стороне задачи, в выражения из геометрической стороны задачи и приведем подобные.

$$\frac{N_1 \cdot a}{(\cos 45^\circ)^2 ES} = \frac{N_2 \cdot b}{4 \cdot ES}$$

$$8N_1 a = N_2 \cdot b$$

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot b}{8a}$$

Решим совместно систему уравнений, составленную из полученного выражения для N и уравнения моментов из статической стороны задачи.

$$\begin{cases} N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0 \\ N_1 = \frac{N_2 b}{8a} \end{cases}$$

$$\frac{N_2 \cdot b}{8a} \sin 45^\circ \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot (2a + b) = 0$$

$$2,471 N_2 = 320$$

$$N_2 = 129,5 \text{ кН}$$

$$N_1 = \frac{129,5 \cdot 0,8}{8 \cdot 1,2} = 10,8 \text{ кН}$$

5.1) Определяем площадь поперечного сечения стержней. Определим какой из стержней нагружен сильнее.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S} = \frac{10,8}{S}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2S} = \frac{129,5}{2S} = \frac{64,8}{S};$$

Второй стержень является более нагруженным, так как $\sigma_2 > \sigma_1$, поэтому запишем для него условие прочности и определим площадь поперечного сечения.

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2S} \leq [\sigma] \Rightarrow S \geq \frac{N_2}{2[\sigma]} = \frac{129,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 6,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 6,48 \text{ см}^2$$

Подбираем по справочнику угловую равнополочную сталь № 70x5 ГОСТ8509 – 86 ($S_T = 6,86 \text{ см}^2$).

Задача № 30

Стержень, жестко заземленный двумя концами (см. рисунок), имеет площадь поперечного сечения верхней части 10 см^2 и нижней части 40 см^2 . Определить напряжения в каждой части стержня.

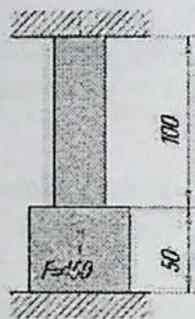


Рис. к задаче 30

Ответ: $\sigma_B = 50 \text{ МПа}$, $\sigma_H = -100 \text{ МПа}$.

Задача № 31

Жесткая балка поддерживается двумя подвесками, как показано на рисунке. Первая подвеска должна иметь площадь поперечного сечения, в два раза большую, чем вторая; материал подвесок – сталь с допустимым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Подобрать безопасные размеры сечения подвесок.

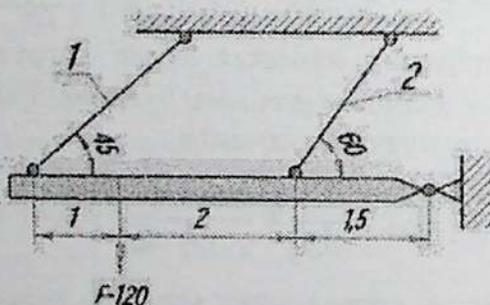


Рис. к задаче 31

Ответ: $F_1 = 7,5 \text{ см}^2$, $F_2 = 3,75 \text{ см}^2$.

Задача № 32

Жесткий брус (см. рисунок), кроме шарнирной опоры, поддерживается еще двумя стальными тягами одинакового поперечного сечения площадью 40 см^2 . После установки тяг их температура повысилась на $\Delta t = +20^\circ$. Определить напряжения в тягах.

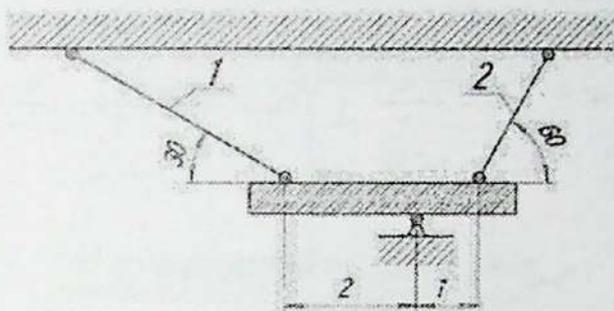


Рис. к задаче 32

Ответ: $\sigma_1 = -47 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = -54,2 \text{ МПа}$.

Задача № 33

Стальной болт пропущен сквозь медную трубку, как показано на рисунке. Шаг нарезки болта равен 3 мм . Какие напряжения возникают в болте и трубке при завинчивании гайки на $1/4$ оборота?

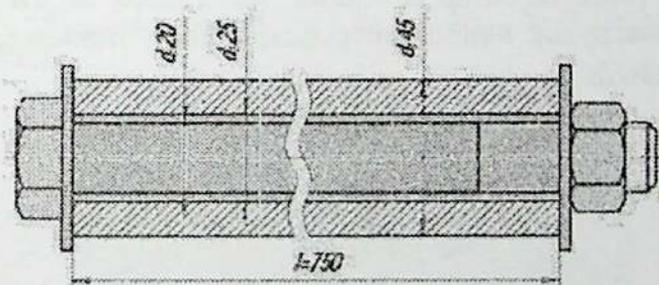
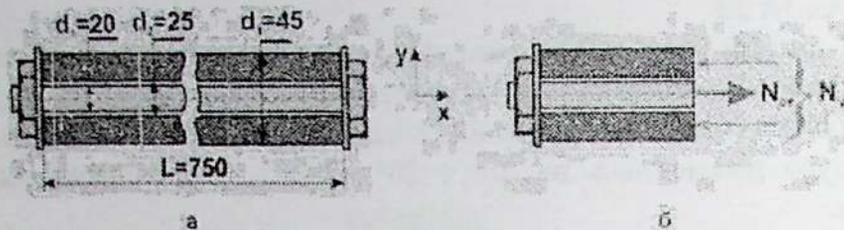


Рис. к задаче 33

Ответ: $\sigma_c = 127,4 \text{ МПа}$; $\sigma_M = -36,4 \text{ МПа}$.

Решение задачи с использованием математического пакета «Mathcad»



$$\nu = 3 \cdot 10^{-3} \quad d_c = 3 \cdot 10^{-2} \quad d_{m1} = 2.5 \cdot 10^{-2} \quad \lambda_c = 0.75$$

$$d_{m2} = 4.5 \cdot 10^{-2} \quad F_c = \frac{\pi \cdot d_c^3}{4} \quad F_m = \frac{\pi \cdot d_{m2}^3}{4} \left[1 - \left(\frac{d_{m1}}{d_{m2}} \right)^3 \right]$$

$$E_c = 2 \cdot 10^{11} \quad E_m = 1 \cdot 10^{11} \quad \Delta = \frac{1}{4}$$

Решение

$$N_c = 1 \quad N_m = 1 \quad \text{Given } N_c = N_m = 0 \quad \frac{N_c \cdot L}{E_c \cdot F_c} = \frac{N_m \cdot L}{E_m \cdot F_m} = \Delta$$

$$\begin{pmatrix} N_c \\ N_m \end{pmatrix} = \text{Find}(N_c, N_m) \quad \sigma_c = \frac{N_c}{F_c} \quad \sigma_c = 1.275 \times 10^8$$

$$\sigma_m = \frac{N_m}{F_m} = 3.635 \times 10^7$$

Задача № 34

Стержень с площадью поперечного сечения $S=100 \text{ см}^2$ зашцеилен верхним концом и нагружен, как показано на рисунке. Между нижним его концом и неподатливой плоскостью до нагружения имеется зазор $\Delta = 0,02 \text{ мм}$. Найти по способу допущаемых нагрузок наибольшее безопасное значение силы F при $[\sigma]=100 \text{ МПа}$.

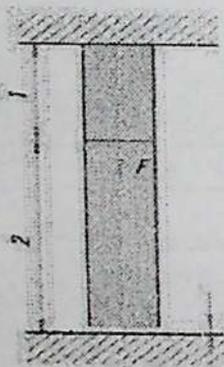


Рис. к задаче 34

Ответ: 2000 кН.

Задача № 35

Жесткая балка (см. рисунок) подвешена на двух стержнях. Площадь сечения первого стержня 10 см^2 , второго стержня 15 см^2 , пределы текучести материалов стержней соответственно равны $\sigma_{T1} = 260 \text{ МПа}$, и $\sigma_{T2} = 150 \text{ МПа}$. Определить по способу допускаемых нагрузок величину безопасной нагрузки F , если коэффициент запаса равен 2.

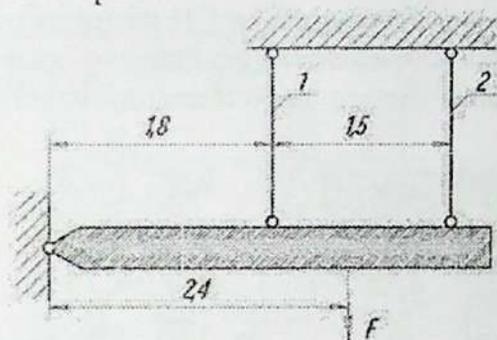


Рис. к задаче 35

Ответ: 252 кН.

Задача № 36

Определить допускаемую нагрузку $[F]$ для стального стержня, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ как для растяжения, так и для сжатия. Найти перемещение сечения I-I, если $l_1 = l_3 = 2l_2$, а $l_2 = 0,4 \text{ м}$, $S_1 = S_3 = 1,5S_2$, $S_2 = 10 \text{ см}^2$ (см. рис.).

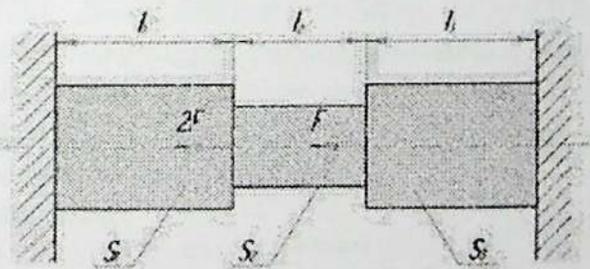


Рис. к задаче 36

Ответ: Нагрузка $[P] = 110 \text{ кН}$, $\Delta_{I-I} = 0,44 \text{ мм}$.

Задача № 37

Два жестких бруса соединены, как показано на рис. тремя стержнями. Крайние стержни стальные, с площадью сечения верхней части, равной 16 см^2 , и нижней части -- 10 см^2 ; средний стержень медный, с площадью сечения, равной 20 см^2 . Между верхним концом среднего стержня и верхним брусом поставлена без натяга пружина с коэффициентом податливости $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}$ (осадка пружины на 1 Н нагрузки). При заданной нагрузке определить напряжения в соединительных стержнях.

Решение задача дано с использованием математического пакета «Mathcad».

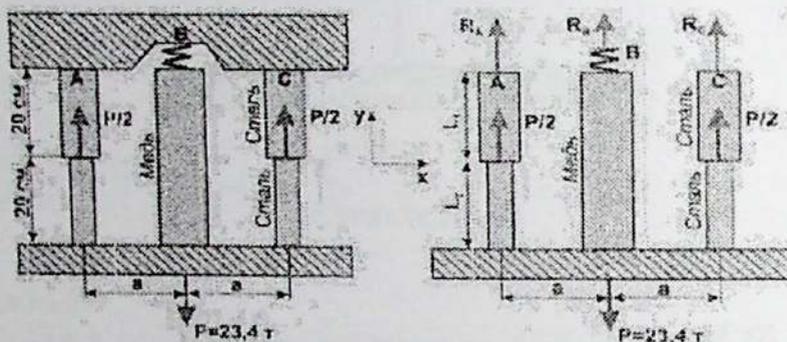


Рис. к задаче 37

Дано

$$E_c = 2 \cdot 10^{11} \quad E_m = 1 \cdot 10^{11} \quad F_{c1} = 16 \cdot 10^{-4} \quad F_{c2} = 10 \cdot 10^{-4} \quad F_m = 20 \cdot 10^{-4}$$

$$L_1 = 20 \cdot 10^{-2} \quad L_2 = 20 \cdot 10^{-2} \quad \alpha = 1,25 \cdot 10^{-9} \quad P = 23,4 \cdot 10^4$$

Решение

$$R_A = 1 \quad R_B = 1 \quad R_C = 1 \quad \text{Given}$$

$$R_A + R_B + R_C = 0 \quad R_A = R_C \quad \left[\frac{R_A \cdot L_1}{E_c \cdot F_{c1}} + \frac{\left(R_A + \frac{P}{2}\right) \cdot L_2}{E_c \cdot F_{c2}} \right] = \frac{R_B \cdot (L_1 + L_2)}{E_m \cdot F_m} + \alpha \cdot R_B$$

$$R_A = \text{find}(R_A, R_B, R_C) \rightarrow \begin{pmatrix} -14400.0 \\ 28800.0 \\ -14400.0 \end{pmatrix} \quad R_{A1} = R_1 \quad R_{B1} = R_2$$

$$\sigma_{c1} = \frac{R_A}{F_{c1}} = 1,8 \times 10^8 \quad \sigma_{c2} = \frac{R_A + \frac{P}{2}}{F_{c2}} = 1,458 \times 10^8 \quad \sigma_m = \frac{R_B}{F_m} = 7,2 \times 10^8$$

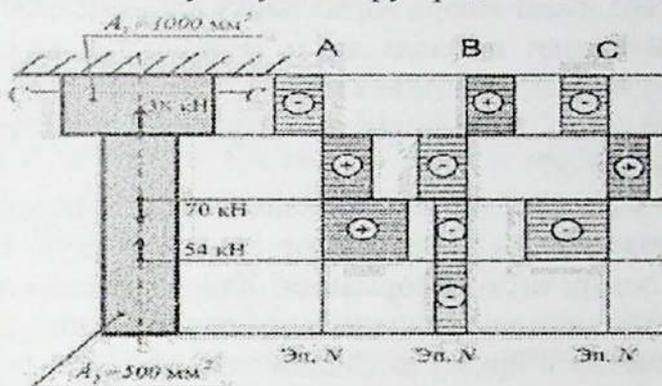


Тесты для самопроверки

На прочность при растяжении и сжатии

Вариант 1

1. Выбрать соответствующую эпюру продольных сил для бруса.



Варианты ответов:

- 1) А, 2) В, 3) С, 4) соответствующей эпюры не представлено
2. Для бруса из вопроса 1 определить наибольшую продольную силу, возникшую в поперечном сечении.

Варианты ответов:

- 1) -16 кН, 2) -38 кН, 3) 70 кН, 4) -54 кН.
3. Найти нормальное напряжение в сечении С-С бруса из вопроса 1.

Варианты ответов:

- 1) -38 МПа, 2) -22 МПа, 3) 16 МПа, 4) 21 МПа.
4. Чему равен коэффициент запаса прочности в сечении С-С бруса? Механические характеристики материала $\sigma_y = 220$ МПа, $\sigma_{и} = 400$ МПа. Использовать результаты, полученные при ответе на вопрос 3.

Варианты ответов:

- 1) 18, 2) 10, 3) 4,2, 4) 7,4.
5. Определить удлинение стержня АВ. Стальной стержень длиной 3 м нагружен силой 240 кН, поперечное сечение стержня – швеллер №10, модуль упругости материала $2 \cdot 10^5$ МПа

Варианты ответов:

- 1) 3,5 мм, 2) 3,3 мм, 3) $12 \cdot 10^{-4}$ мм, 4) $12 \cdot 10^{-3}$ мм.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Напишите формулу напряжения в сечении при растяжении стержня.
- ✓ Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений?
- ✓ Как вычисляют нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках?
- ✓ Что называют коэффициентом Пуассона и какие он имеет значения?
- ✓ Что называют абсолютной продольной и поперечной деформациями? Как определяют относительную продольную и поперечную деформации? Какова их размерность?
- ✓ Изложите методику определения перемещения какого-либо сечения в брусе, имеющем несколько ступеней (участков).
- ✓ Как вычисляют перемещение узлового сечения в шарнирно-стержневой системе?
- ✓ Какие системы называют статически неопределимыми? Каков порядок их расчета?
- ✓ Как записывают условие жесткости при растяжении?
- ✓ Как вычисляют потенциальную энергию деформации при растяжении бруса?
- ✓ Что такое удельная потенциальная энергия деформации?
- ✓ Чему равны напряжения в сечениях стержня, растягиваемого собственным весом?
- ✓ Чему равно удлинение стержня, растягиваемого собственным весом?
- ✓ Запишите условие прочности растянутого стержня по методу допускаемых напряжений.
- ✓ Укажите различия между методом допускаемых напряжений и методом допускаемых нагрузок/

Глава 3. Сдвиг

Деформация сдвига возникает в том случае, если в поперечном сечении стержня действует только одна поперечная сила Q_y (или Q_x), а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Примером сдвига является резка полосы ножницами. На сдвиг работают жесткие соединения конструкций – сварные, заклепочные и так далее. Связь касательных напряжений с внутренней силой Q выражается, согласно их равномерного распределения по сечению



$$\tau = \frac{Q}{S}$$

а условие прочности записывается по минимальной площади среза S_{min} , отражающей минимальное число соединяющих элементов (заклепок, болтов, штифтов и т.д.) или минимальную длину сварного шва.



$$\tau_{max} = \frac{Q}{S_{min}} \leq [\tau]$$

При расчете болтовых или заклепочных соединений учитывается смятие контактирующих поверхностей, то есть пластическую деформацию, возникающую на поверхности контакта.



$$\sigma_{CM} = \frac{F}{S_{CM}} \leq [\sigma_{CM}]$$

где S_{CM} – площадь проекции поверхности контакта на диаметральной плоскости.

При выполнении проектного расчета, то есть при определении необходимого диаметра заклепки, болта или при определении их количества необходимо учитывать условие прочности на срез и на смятие, из двух значений следует взять большее число, округлив его до ближайшего целого в меньшую сторону.

Примечания:

1. Так как болты и заклепки ослабляют соединяемые листы, последние проверяют на разрыв в ослабленных сечениях

$$\sigma = \frac{F}{S_{\text{min}}} \leq [\sigma_p]$$

2. При расчетах сварных швов наплывы не учитывают, а считают, что в разрезе угловой шов имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника и разрушение шва происходит по его минимальному сечению, высота которого:

$$m = \delta \cdot \cos 45^\circ \approx 0,7 \delta$$

где δ – минимальная толщина соединяемых листов.

Задача № 38

Определить необходимое количество заклепок диаметром 20 мм для соединения внахлестку двух листов толщиной 8 мм и 10 мм. Сила F , растягивающая соединение, равна 200 кН. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 140$ МПа, на смятие $[\sigma_c] = 320$ МПа.

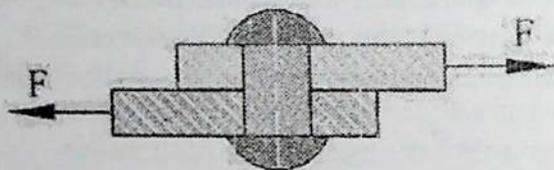


Рис. к задаче 38

Решение. Из условия прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot [\tau]} = \frac{2 \cdot 10^5}{3,14 \cdot \frac{0,02^2}{4} \cdot 140 \cdot 10^6} = 4,53 \approx 5$$

Из условия прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{F}{\delta \cdot d \cdot [\sigma_c]} = \frac{2 \cdot 10^5}{38 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 \cdot 320 \cdot 10^6} = 3,9 \approx 4$$

Ответ: 5 заклепок.

Задача № 39

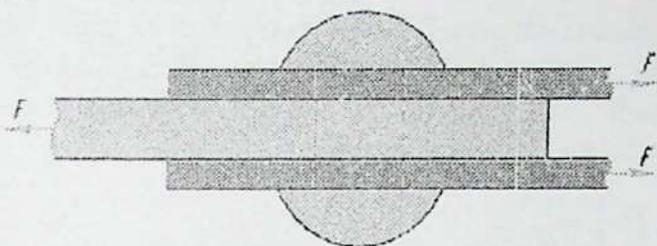


Рис. к задаче 39

Определить необходимое число заклепок диаметром 20 мм для присоединения двух листов толщиной по 5 мм к третьему листу толщиной 12 мм (см. рисунок). Сила F , растягивающая соединение, равна 180 кН. Допускаемые напряжения: $[\tau]=100\text{ МПа}$; $[\sigma_c]=280\text{ МПа}$.

Ответ: Четыре заклепки.

Задача № 40

Консоль выполнена из уголка $150 \times 150 \times 12$, приклепанного пятью заклепками диаметром 20 мм к швеллеру № 24а, являющемуся частью колонны (см. рис). Определить касательные и сминающие напряжения в заклепочном соединении, если $F=120\text{ кН}$.

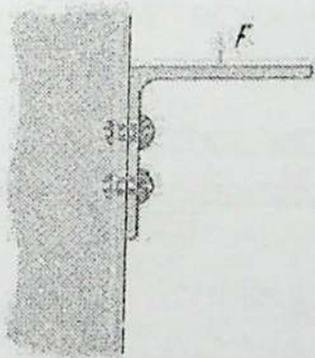


Рис. к задаче 40

Ответ: $\tau=76,3\text{ МПа}$; $\sigma_c=150\text{ МПа}$.

Задача № 41

Шпилька диаметром 22 мм прикрепляет к стенке стальной лист сечением 100x8 мм (см. рисунок). Чему равны растягивающие и сминающие напряжения в листе, и касательные напряжения в шпильке при $F=40\text{кН}$

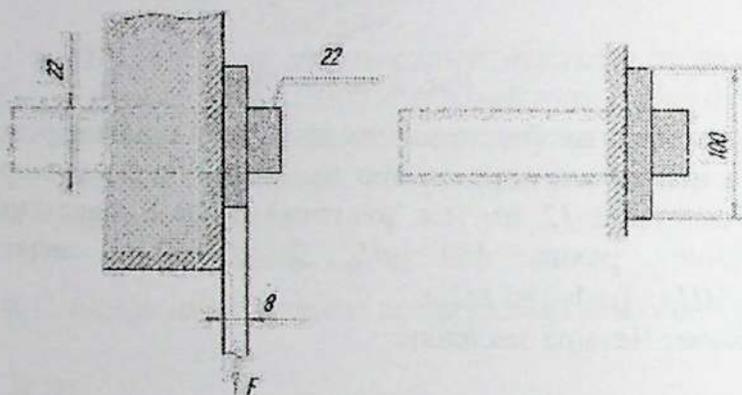


Рис. к задаче 41

Ответ: $\sigma = 64,2 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 227 \text{ МПа}$, $\tau = 105 \text{ МПа}$.

Задача № 42

Определить диаметр болта в соединении, изображенном на рисунке. Растягивающая сила $F=200 \text{ кН}$, толщина $t=2 \text{ см}$. Допускаемые напряжения для материала болта: на срез 80 МПа, на смятие 200 МПа.

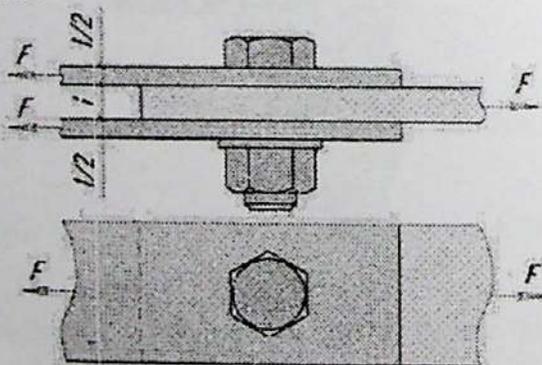


Рис. к задаче 42

Ответ: 5 см.

Задача № 43

Сминающее напряжение под заплечиком болта, изображенного на рисунке, равно 40 МПа , а сжимающее напряжение в болте диаметром 10 см равно 100 МПа . Чему равен диаметр d_1 заплечика? Определить касательное напряжение в заплечике, если толщина его $t = 5 \text{ см}$.

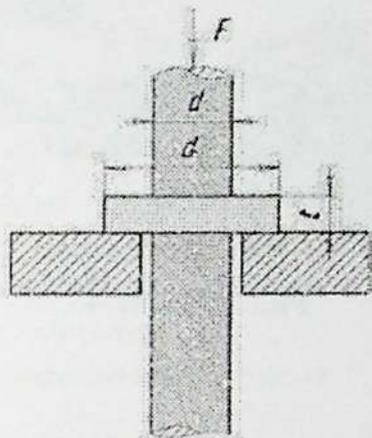


Рис. к задаче 43

Ответ: $d_1 = 18,7 \text{ см}; \quad \tau = 50 \text{ МПа}$.

Задача № 44

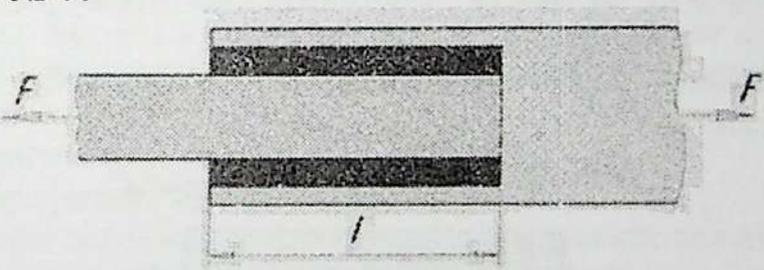


Рис. к задаче 44

Определить необходимую длину l фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины (см. рисунок). Усилие, испытываемое соединением, $F = 150 \text{ кН}$. Допускаемое напряжение на срез для сварки равно 110 МПа . Толщина узкого листа 10 мм , а широкого 8 мм .

Ответ: $l \approx 100 \text{ мм}$.

Задача № 45

Определить минимальную длину x , необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рисунке, если растягивающее напряжение в листе равно 140 МПа , а допускаемое напряжение на срез для сварки $[\tau_s] = 80 \text{ МПа}$.

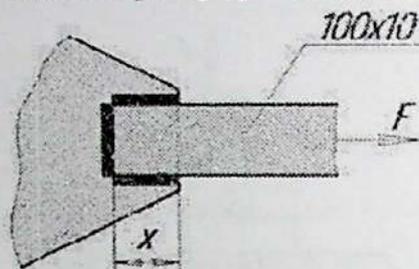


Рис. к задаче 45

Ответ: 7,5 см.

Задача № 46

Два листа толщиной $t = 10 \text{ мм}$ соединены внахлестку шестью заклёпками диаметром $d = 20 \text{ мм}$ (рис. 9.8). Определить величину допускаемых растягивающих усилий P и необходимую ширину листа b при допускаемых напряжениях: на растяжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, на срез $[\tau_p] = 120 \text{ МПа}$ и на смятие $[\sigma_{см}] = 320 \text{ МПа}$.

Решение задачи выполним в программном пакете «Mathcad»

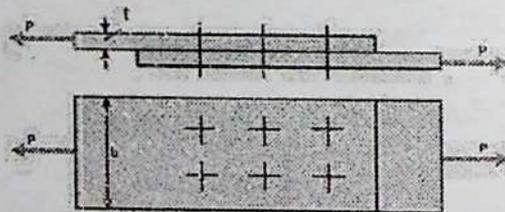


Рис. к задаче 46

Дано

$$\sigma_{d_p} := 160 \cdot 10^6 \quad \tau_{d_{cp}} := 120 \cdot 10^6 \quad \sigma_{d_{cm}} := 320 \cdot 10^6 \quad d_{mm} := 0.02 \quad \frac{L}{d} := 0.01 \quad n := 6$$

решение

Площадь среза $F_{cp} := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n = 1.885 \times 10^{-3}$

Площадь смятия $F_{cm} := d \cdot t \cdot n = 1.2 \times 10^{-3}$

Площадь опасного сечения листа $F_p(b) := b \cdot t - 2 \cdot t \cdot d$

Определение допускаемого усилия P из условия прочности на срез

$$P_{cp} := F_{cp} \cdot \tau_{d_{cp}} = 2.262 \times 10^5$$

Определение допускаемого усилия P из условия прочности на смятие

$$P_{cm} := F_{cm} \cdot \sigma_{d_{cm}} = 3.84 \times 10^5$$

Из двух найденных допускаемых усилий выбираем наименьшее

$$P_{min} := P_{cp}$$

определение ширины листа из условия прочности на растяжение

$$b := 1$$

Given

$$F_p(b) \cdot \sigma_{d_p} = P \quad b := \text{Find}(b) \quad b = 0.181$$

Задача № 47

Определить необходимую длину фланговых швов для соединения внахлестку двух полос сечением 10×80 мм и 10×100 мм, растягиваемых продольными силами P . Допускаемые напряжения принять:

на растяжение полос $[\sigma] = 160$ МПа;

на срез швов $[\tau_{ш}] = 90$ МПа.

Учесть возможный непровар в начале и конце каждого шва по 5 мм ($L = L_p + 2 \cdot 5$ мм).

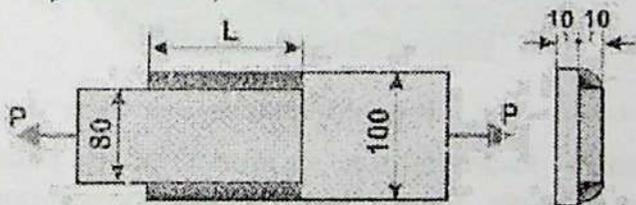


Рис. к задаче 47

Дано $t := 0.01$ $b1 := 0.08$ $b2 := 0.1$

$\sigma d_p := 160 \cdot 10^6$ $\tau d_{cp} := 90 \cdot 10^6$

Решение

Площадь опасного сечения при расчете соединения на растяжение полос

$$F_p := b1 \cdot t = 8 \times 10^{-4}$$

Определение допускаемой нагрузки из условия прочности на растяжение

$$P := F_p \cdot \sigma d_p = 1.28 \times 10^5$$

Площадь срезаемых швов

$$F_{cp}(L) := 0.5 \cdot t \cdot L \cdot 2$$

Определение длины швов из условия прочности на срез

$$L := 1$$

Given

$$F_{cp}(L) \cdot \tau d_{cp} = P$$

$$L := \text{Find}(L) \quad L = 0.102$$

$$\text{Принимаем} \quad L := L + 2 \cdot 0.005 \quad L = 0.112$$

Необходимая длина швов составляет 112 мм

Задача № 48

Цилиндрический котел диаметром 150 см испытывает внутреннее давление 4 ат. Продольный шов осуществлен внахлестку с одним рядом заклепок. Толщина листов 10 мм, диаметр заклепок 20 мм, шаг заклепок 75 мм.

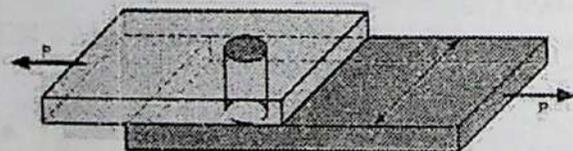


Рис. к задаче 48

Определить касательные, сминающие и растягивающие напряжения в стыке. Определить также предельное допускаемое давление в котле, если допускаемые напряжения: $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$, $[\tau] = 72 \text{ МПа}$, $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$

Задача № 49

Из условия прочности стали на срез и смятие определить величину допускаемой нагрузки P , которую можно приложить к тяге болтового соединения, изображённого на рис. 9.6, при допускаемых напряжениях: на срез $[\tau]=80$ МПа и на смятие $[\sigma_{см}]=240$ МПа. Размеры элементов соединения:

$$d = 50 \text{ мм}, t = 20 \text{ мм}, t_1 = 12 \text{ мм}.$$

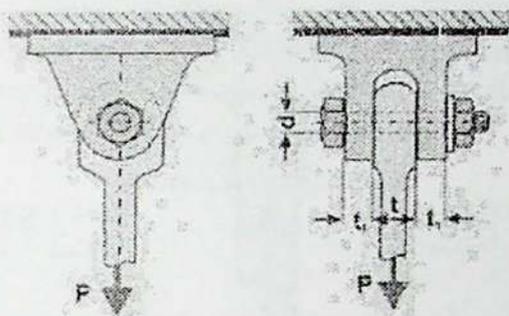


Рис. к задаче 49

Все вычисления выполним в MathCAD.

Дано $\tau d = 80 \cdot 10^6$ $\sigma d = 240 \cdot 10^6$ $d = 0.05$ $t = 0.02$ $t_1 = 0.012$

Решение

Площадь среза $F_{ср} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1.963 \times 10^{-3}$

Площадь смятия $F_{см} = d \cdot t = 1 \times 10^{-3}$

Величина усилия P из условия прочности на срез $F_{см} = 2 \cdot F_{ср} \cdot d = 3.142 \times 10^5$

Величина усилия P из условия прочности на смятие $F_{см} = F_{см} \cdot d = 2.4 \times 10^5$

Из двух определенных усилий выбираем минимальное $P = 2.4 \cdot 10^5$

Задача № 50

Болт диаметром $d=100$ мм, работающий на растяжение, опирается головкой на лист (рис. 9.7). Определить диаметр головки D и её высоту t , если растягивающие напряжения в сечении болта $\sigma_T = 100$ МПа, напряжения смятия по площади опирания головки $\sigma_{см} = 40$ МПа и напряжения среза головки $\tau = 50$ МПа.

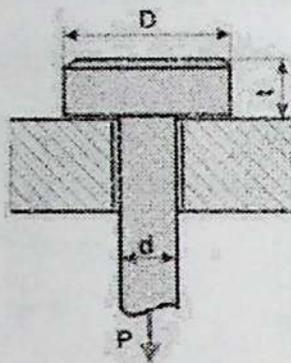


Рис. к задаче 50

$$\sigma_T := 100 \cdot 10^6 \quad \tau_{cp} := 50 \cdot 10^6 \quad \sigma_{см} := 40 \cdot 10^6 \quad d := 0.1$$

$$P := \sigma_T \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 7.854 \times 10^5$$

$$F_{cp}(t) := \pi \cdot d \cdot t \quad F_{см}(D) := \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$

$$D := 1 \quad t := 1$$

Given

$$F_{cp}(t) \cdot \tau_{cp} = P$$

$$F_{см}(D) \cdot \sigma_{см} = P$$

$$\begin{pmatrix} D \\ t \end{pmatrix} := \text{Find}(D, t) = \begin{pmatrix} 0.187 \\ 0.65 \end{pmatrix}$$

+

Диаметр головки болта $D=187$ мм, высота головки $t=50$ мм.

Задача № 51

Стойка фермы, состоящая из двух швеллеров №12, прикрепляется к фанонке с помощью фланговых швов (рис.).

Определить необходимую рабочую и проектную длину швов, если катет шва принять $t = 10$ мм, допустимое напряжение на срез шва $[\tau_{sv}] = 100$ МПа, а нормальное напряжение в стойке $\sigma = 158$ МПа;

Выяснить, какая потребуется расчетная длина фланговых швов, если стенка каждого швеллера будет дополнительно приварена прорезным швом длиной 85 и шириной 10 мм.

Все вычисления выполним в MathCAD.

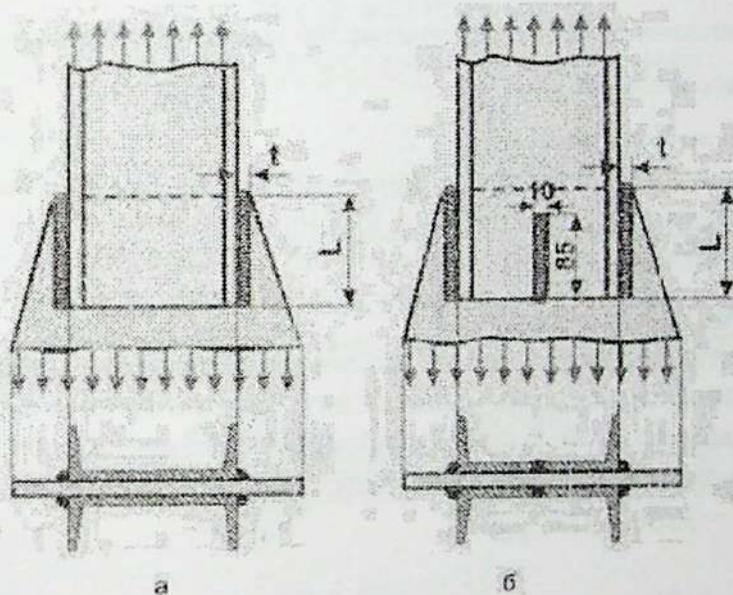


Рис. к задаче 51

Дано

$$\tau d := 100 \cdot 10^6 \quad \sigma d_{cp} := 156 \cdot 10^6 \quad t := 0.01 \quad l_{ш} := 0.065 \text{ Швеллер 12}$$

$$F_{sv} := 13.3 \cdot 10^{-4}$$

Решение

Усилие передаваемое одним швеллером №12 $P_{sv} := F \cdot \sigma d_{cp} = 2.101 \times 10^5$

1. Площадь среза швов

Определение расчетной длины шва $F(L) := 0.7 \cdot L \cdot T \cdot 2$

$$f(L) := \tau d \cdot F(L) - P \quad L_{sv} := 1 \quad L_p := \text{root}(f(L), L) \quad L_p = 0.1501$$

округляем расчетную длину шва до 150 мм $L_p := 0.15$

С учетом непровара в начале и конца шва $L_{sv} := L_p + 2 \cdot 0.005 \quad L = 0.16$

И так расчетная длина шва составляет 150 мм, проектная длина 160 мм

2. площадь среза шва $F(L) := 0.7 \cdot L \cdot T \cdot 2 + 0 \cdot l_{ш}$

Определение расчетно длины шва

$$f(L) := \tau d \cdot F(L) - P \quad L_{sv} := 1 \quad L_p := \text{root}(f(L), L) \quad L_p = 0.089$$

расчетная длина фланговых швов с прорезанным швом 89 мм

Задача № 52

Определить необходимое количество заклепок диаметром 20 мм для соединения внахлестку двух листов толщиной 8 мм и 10 мм (см. рисунок). Сила P, растягивающая соединение, равна 200 Н. Допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 140 \text{ МПа}$, на смятие $[\sigma_{см}] = 3200 \text{ МПа}$.

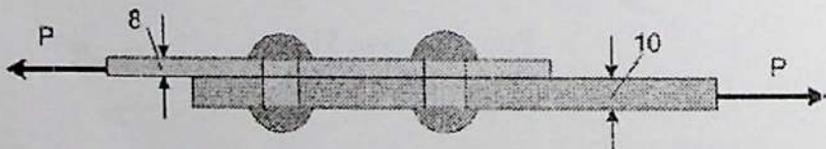


Рис. к задаче 52

Задача № 53

Два листа соединены при помощи одной накладки, как показано на рисунке. Толщина листов и накладки по 10 мм. Определить необходимое количество заклепок диаметром 17 мм, если допускаемые напряжения: на срез $[\tau] = 140 \text{ МПа}$, на смятие $[\sigma_c] = 320 \text{ МПа}$. Сила P , растягивающая соединение, равна 240 Н.

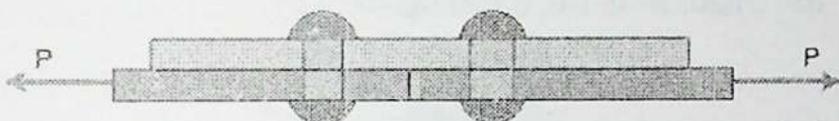


Рис. к задаче 53

Ответ: Восемь заклепок с каждой стороны стыка.

Задача № 54

Два листа толщиной по 10 мм соединены с тремя листами толщиной по 8 мм при помощи заклепок диаметром 20 мм по схеме, изображенной на рисунке. Соединение растягивается силой $P=2800 \text{ Н}$. Определить необходимое число заклепок, если допускаемые напряжения: $[\tau]=100 \text{ МПа}$, $[\tau_c]=280 \text{ МПа}$.

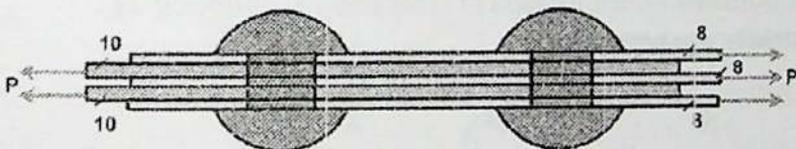


Рис. к задаче 55

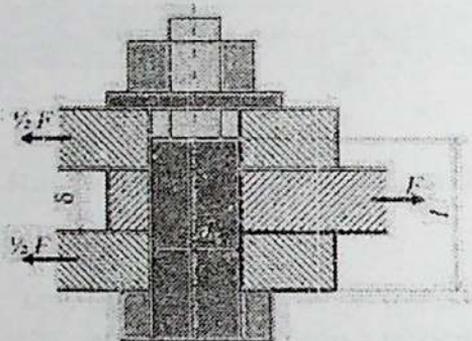
Ответ: Три заклепки.

Тесты для самопроверки

Практические расчёты на срез и смятие

Вариант 1

1. Листы соединены болтом, поставленным без зазора. Соединение нагружено растягивающей силой $F=50,4$ кН, определить величину одной площадки среза болта, если:
 $d_c=21$ мм; $l=45$ мм, $\delta=20$ мм.



Варианты ответов:

- 1) 629 мм², 2) 346 мм², 3) 66 мм², 4) 420 мм².
2. Выбрать формулу для определения напряжения сдвига в поперечном сечении болта (рисунок к вопросу 1).

Варианты ответов:

$$1) \sigma = \frac{N}{A}, 2) \tau = \frac{Q}{A}, 3) \tau = \frac{T}{W_p}, 4) \sigma = \frac{Q}{A}$$

3. Найти площадь смятия внутреннего листа соединения (рисунок к вопросу 1), нагруженного растягивающей силой.

Варианты ответов:

- 1) 346 мм², 2) 420 мм², 3) 525 мм², 4) 840 мм².
4. Проверить прочность внутреннего листа соединения (рисунок к вопросу 1) на смятие, если допускаемое напряжение смятия материала листа 120 МПа. Остальные данные для расчёта – в задании 1.

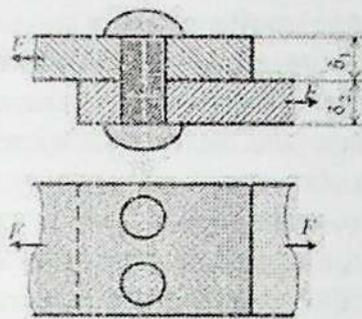
Варианты ответов:

- 1) $\sigma_{см} < \sigma_{adm, см}$, 2) $\sigma_{см} > \sigma_{adm, см}$, 3) $\sigma_{см} = \sigma_{adm, см}$,
4) для ответа данных недостаточно.

5. Из условия прочности заклёпок на срез определить допускаемую нагрузку на соединение, если:

$$d = 16 \text{ мм}, \delta_1 = 18 \text{ мм}, \delta_2 = 20 \text{ мм},$$

$$\tau_{adm, ср} = 100 \text{ МПа}, \sigma_{adm, см} = 240 \text{ МПа}.$$



Варианты ответов:

- 1) 20,1 кН; 2) 40,2 кН; 3) 28,8 кН; 4) 61,1 кН.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Запишите закон Гука при сдвиге.
- ✓ Как вычисляют крутящий момент в сечении, если известны внешние скручивающие моменты?
- ✓ Запишите формулу крутящего момента, если известны мощность, передаваемая валом при вращательном движении, и число оборотов в минуту.
- ✓ Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении и как они направлены?
- ✓ Какие гипотезы (допущения) используют для получения линейного закона распределения касательных напряжений в круглом поперечном сечении?
- ✓ Запишите формулу для определения напряжений в произвольной точке круглого поперечного сечения при кручении.
- ✓ Покажите вид напряженного состояния в опасной точке вала.
- ✓ В чем состоит условие прочности?
- ✓ Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
- ✓ Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения вала?
- ✓ Чем объясняется, что стержень кольцевого сечения при кручении более экономичен, чем сплошной?
- ✓ Как разрушаются при кручении пластичные (стальные) и хрупкие (чугунные) стержни? Чем объяснить характер их разрушения?
- ✓ Запишите формулу для определения угла закручивания круглого стержня.
- ✓ Как связаны между собой модули упругости первого и второго рода?
- ✓ Как определить диаметр сечения вала, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости?

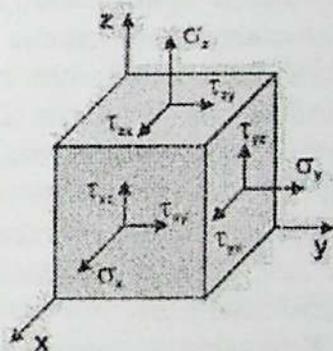
Глава 4. Анализ напряженного состояния

Если в рассматриваемом теле через произвольную точку проведем три плоскости, параллельные координатным и, пересекая их тремя плоскостями, достаточно близкими к точке (x, y, z) , вырежем элементарный параллелепипед, то действующие по его граням полные напряжения, представляющие взаимодействие этого параллелепипеда с остальным телом, будут обозначаться p_x, p_y, p_z . Разложим полные напряжения на составляющие, параллельные координатным осям. Эти составляющие получают такие обозначения (рис. 3.1):

от p_x — составляющие $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$;

от p_y — составляющие $\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}$;

от p_z — составляющие $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$.



Во всяких двух взаимно-перпендикулярных площадках проекции касательного напряжения на нормаль к их общему ребру всегда равны. Если одно из них направлено к этому ребру, то и другое направлено к нему. Поэтому напряжения в трех взаимно-перпендикулярных площадках, перпендикулярных осям Ox, Oy и Oz , вполне характеризуются тремя нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и тремя касательными напряжениями $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела, называется **напряженным состоянием в данной точке**, а квадратная матрица

$$T_{\sigma} = \begin{cases} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{cases}$$

в первой строке которой записаны компоненты напряжений по площадке с нормалью x , во второй строке — компоненты напряжений по площадке с нормалью y , а в третьей строке — компоненты напряжений по площадке с нормалью z , называется **тензором напряжений**.

Нормальные напряжения положительны, если они растягивающие. За положительные направления касательных напряжений принимают направления осей координат, если растягивающие напряжения по той же площадке имеют направление, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси. Если же растягивающие напряжения имеют направления, противоположные положительному направлению оси, то положительные касательные напряжения направлены обратно направлениям осей. На рис. 3.1 показаны положительные направления напряжений при различных ориентациях координатных осей.

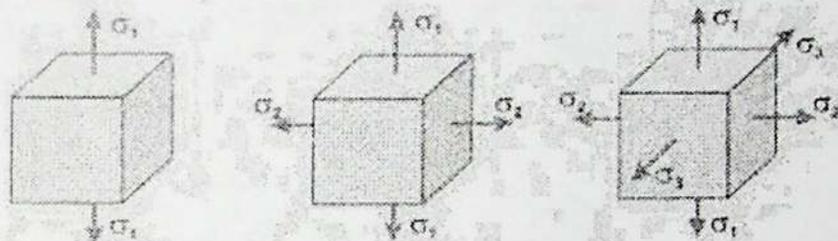
Компоненты полного вектора напряжений на внешней поверхности считаются положительными, если их направления совпадают с положительными направлениями координатных осей.

При изменении направления площадки, проходящей через данную точку, меняются величина и направление напряжения p_n ; если все эти напряжения откладывать от данной точки в виде векторов, то концы этих векторов окажутся лежащими на некотором эллипсоиде, носящем название **эллипсоида напряжений**.

Направления, совпадающие с главными осями эллипсоида напряжений, называются **главными направлениями**. Напряжения, соответствующие главным направлениям (полуоси эллипсоида), называются **главными напряжениями**, а площадки, по которым они действуют, — **главными площадками**.

По главным площадкам касательные напряжения отсутствуют.

Главные напряжения обозначаются σ_1 , σ_2 , σ_3 , причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Различные виды напряженного состояния классифицируются обычно в зависимости от числа не равных нулю напряжений.



Напряженное состояние, в котором только одно из главных напряжений не равно нулю, называется **одноосным**, или **линейным**. Если равно нулю одно из главных напряжений, то напряженное состояние называется **двухосным**, или **плоским**. Если отличны от нуля все три главных напряжения, то напряженное состояние называется **трехосным**, или **объемным**.

При решении многих задач, встречающихся в инженерной практике, представляется возможным рассматривать явление деформации тела происходящим как бы в одной плоскости, формально отбросив одну из координатных осей.

Задачи этой категории относятся к так называемым «**плоским задачам**» теории упругости.

Задача № 56

На стальной стержень действуют две осевые силы F и $2F$ (см. рис. *a*), причем $F=200\text{кН}$. Определить характер напряженного состояния в сечениях I и II. Найти напряжения в сечении, наклоненном на угол $\sigma = 20^\circ$ к поперечному, а также σ_{\max} и τ_{\max} , если поперечное сечение – круглое, диаметром $d=40\text{ мм}$.

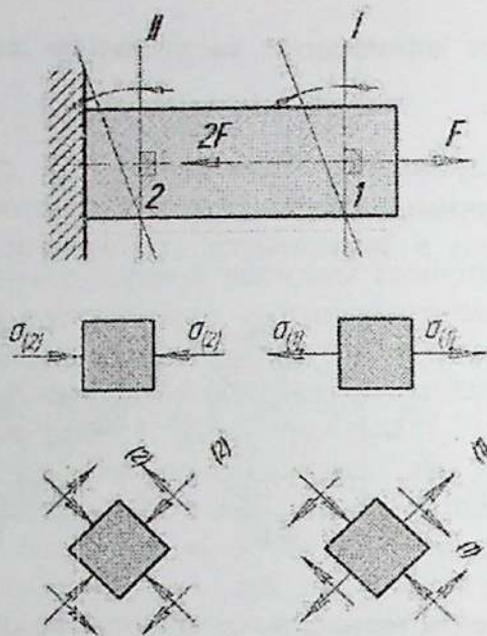


Рис. к задаче 56

Решение.

Разобьем стержень на два участка и найдем внутренние силы $N_1 = F = 200 \text{ кН}$, а $N_2 = -F = -200 \text{ кН}$. Нормальные напряжения в поперечных сечениях

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{S} = 159,2 \text{ МПа}, \text{ а } \sigma_{(2)} = \frac{N_2}{S} = -159,2 \text{ МПа}$$

(рис. б). Напряженное состояние линейное, для первого элемента – растяжение, для второго – сжатие. Напряжения в I наклонном сечении:

нормальное:

$$\sigma_{(1)\alpha} = \sigma_{(1)} \cos^2 \alpha = 159,2 \cdot \cos^2 20^\circ = 140,6 \text{ МПа}$$

касательное:

$$\tau_{(1)\alpha} = -\frac{\sigma_{(1)}}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\frac{159,2}{2} \cdot \sin 40^\circ = -51,2 \text{ МПа}$$

Во II наклонном сечении

$$\sigma_{(2)\alpha} = -140,6 \text{ МПа}, \tau_{(2)\alpha} = 51,2 \text{ МПа}$$

(см. рис., в). Максимальные (в алгебраическом смысле) напряжения в I сечении

$$\sigma_{(1)\max} = 159,2 \text{ МПа},$$

во II сечении

$$\sigma_{(2)\max} = 0.$$

Максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{(1)\max} = \frac{\sigma_{(1)\max}}{2} = 79,6 \text{ МПа}$$

$$(\alpha = -45^\circ); \quad \tau_{(2)\max} = 79,6 \text{ МПа} \quad (\alpha = 45^\circ).$$

Задача № 57

Сжатый стержень состоит из двух частей, склеенных по плоскости AB (см. рис.). При каком значении угла α (в пределах от 0 до 60°) он может выдержать наибольшую нагрузку, если для клея допускаемые напряжения $[\tau] = 0,6[\sigma]$. Принять, что прочность клеевого слоя определяется независимо по σ и τ

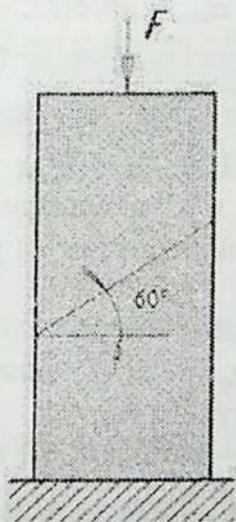


Рис. к задаче 57

Ответ: Угол $\alpha = 31^\circ$.

Задача № 50

Бетонный кубик при сжатии разрушился по сечению, наклоненному на угол 45° к поперечному. Причем касательное напряжение в этом сечении оказалось 10 МПа .

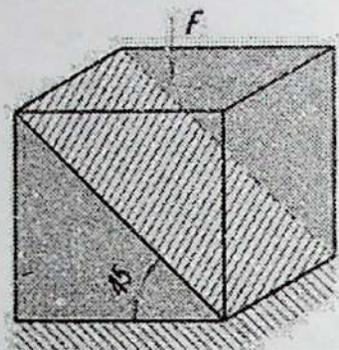


Рис. к задаче 57

Определить сжимающее напряжение и разрушающее усилие, если размеры кубика $50 \times 50 \times 50 \text{ мм}$ (см. рис.).

Ответ: Напряжение $\sigma_{\max} = 20 \text{ МПа}$, усилие $F = 50 \text{ кН}$.

Задача № 58

Элемент, вырезанный (мысленно) из детали, испытывает по граням напряжения $\sigma_z = 120 \text{ МПа}$ и $\sigma_y = 60 \text{ МПа}$ (см. рис., а). Определить нормальные и касательные напряжения по граням элемента, вырезанного в повернутом на угол $\alpha = 20^\circ$ положении.

Решение.

Напряженное состояние – плоское, так как $\sigma_z = 0$. Используем зависимости для σ_α и $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ учитываем, что в исходных площадках $\tau = 0$. Поэтому:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha = 120 \times \cos^2 20^\circ + 60 \sin^2 20^\circ = 112,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha = \frac{60 - 120}{2} \sin 40^\circ = -19,3 \text{ МПа}.$$

Для определения $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ применяем свойство суммы нормальных напряжений $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const}$.

Отсюда $\sigma_{\alpha+90^\circ} = 120 + 60 - 112,9 = 67,1 \text{ МПа}$, касательные напряжения в соответствии с законом парности

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_\alpha = 19,3 \text{ МПа} \text{ (см. рис., б).}$$

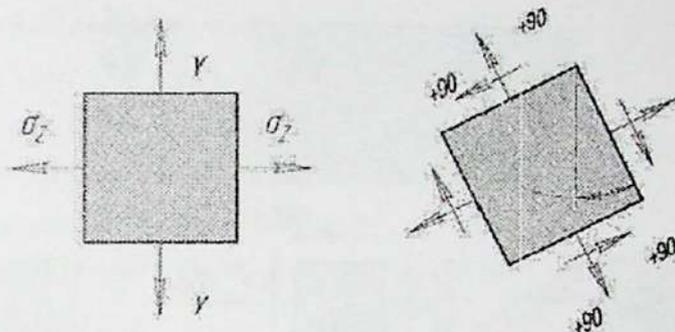


Рис. к задаче 58

Задача № 59

В оболочке тонкостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением, вырезан прямоугольный элемент (см. рис.). Напряжения по граням: $\sigma_x = 50 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 100 \text{ МПа}$. Вычислить нормальное напряжение в сечении, где касательное напряжение $\tau_{\alpha} = 14,3 \text{ МПа}$. Найти угол α , соответствующий этому сечению. Определить максимальное касательное напряжение.

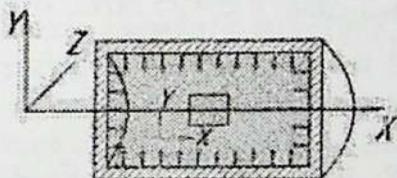


Рис. к задаче 59

Ответ: Угол $\alpha = 17,5^\circ$, нормальное напряжение $\sigma_n = 54,6 \text{ МПа}$, максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = 25 \text{ МПа}$.

Задача № 60

Напряженное состояние в точках 1, 2, 3 поперечного сечения двутавровой балки (см. рис., а) при изгибе в вертикальной плоскости показано на рис., б. Определить характер напряженного состояния, главные напряжения и положение главных площадок для указанных точек. Напряжения в поперечном сечении:

$$\sigma_z^{(1)} = 160 \text{ МПа}, \tau_{yz}^{(1)} = 0, \sigma_z^{(2)} = 80 \text{ МПа}, \tau_{yz}^{(2)} = 20 \text{ МПа}, \sigma_z^{(3)} = 0, \\ \tau_{yz}^{(3)} = 25 \text{ МПа}.$$

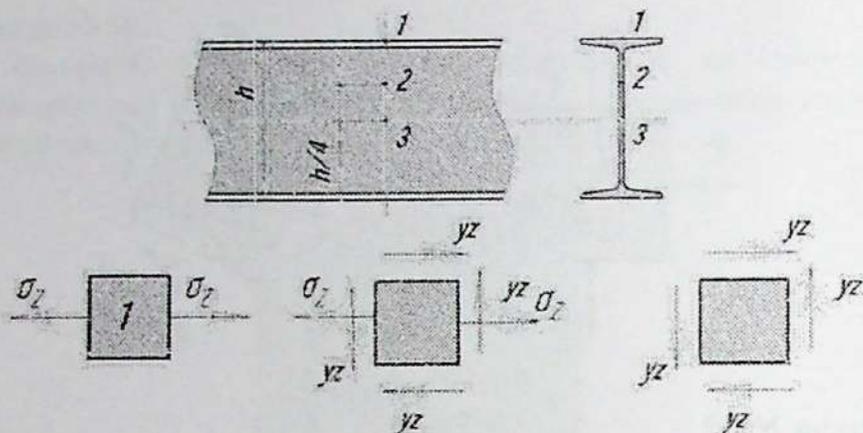


Рис. к задаче 60

Ответ:

- 1 – линейное: $\sigma_1 = 160 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = 0$; $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$;
 2 – плоское: ($\sigma_1 = 84,7 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -4,7 \text{ МПа}$; $\alpha_1 = 13^\circ 17'$,
 $\alpha_3 = 103^\circ 17'$;
 3 – плоское (чистый сдвиг): $\sigma_1 = 25 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -2 \text{ МПа}$; $\alpha_1 = 45^\circ$;
 $\alpha_3 = 135^\circ$.

Задача № 61

По заданным σ_1 и σ_2 (рис. а) или σ_1 и σ_3 (рис. б), определить графически σ_α и τ_α и полное напряжение ρ_α в сечении под углом α к сечению, на которое действует σ_1 . Кроме того, определить наибольшие касательные напряжения в материале.

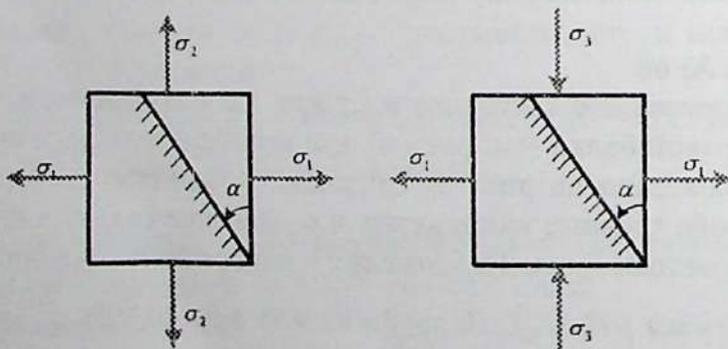


Рис. к задаче 61

- а) $\sigma_1 = 8 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -5 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 60^\circ$
 б) $\sigma_1 = 7,5 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -7,5 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 60^\circ$
 в) $\sigma_1 = 1,5 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_2 = 1,5 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 60^\circ$
 г) $\sigma_1 = 1,5 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_2 = 1,5 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = \text{любому углу}$
 д) $\sigma_1 = 1,5 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -1,5 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 45^\circ$
 е) $\sigma_1 = 10 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -6 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 60^\circ$
 ж) $\sigma_1 = 1,4 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -1,4 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 30^\circ$
 з) $\sigma_1 = 6 \text{ кН/см}^2$, $\sigma_3 = -3 \text{ кН/см}^2$, $\alpha = 60^\circ$

Ответ: В ответах указаны σ_α .

- а) $-1,75 \text{ кН/см}^2$, б) $-3,75 \text{ кН/см}^2$, в) $1,5 \text{ кН/см}^2$, г) $1,5 \text{ кН/см}^2$,
 д) 0 , е) -2 кН/см^2 , ж) $0,7 \text{ кН/см}^2$, з) $-0,75 \text{ кН/см}^2$

Задача № 62

Полное напряжение по одному из сечений, проведенному через выбранную точку элемента конструкции, равно 6 кН , и оно наклонено к этому сечению под углом 60° . По второму сечению, перпендикулярному к первому, нормальное напряжение равно нулю. Определить наибольшее нормальное напряжение по сечению, проходящему через эту точку.

Решение. Все вычисления выполним в программном продукте MathCAD.

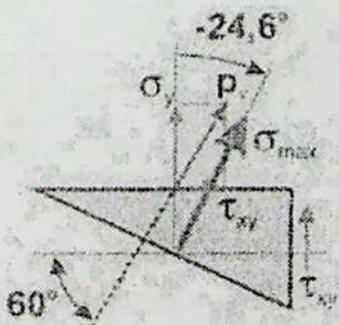


Рис. к задаче 62

Дано $P_V := 6000$ $\alpha := 60 \text{ deg}$ $\sigma_x := 0$

Решение

$$\tau_{xy} := P_V \cdot \cos(\alpha) = 3 \times 10^3 \quad \sigma_y := P_V \cdot \sin(\alpha) = 5.196 \times 10^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 6.567 \times 10^3$$

$$\alpha_{\text{пл}} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad \frac{\alpha_{\text{пл}}}{\text{deg}} = -24.553$$

Задача № 63

Определить нормальное σ_y и касательное τ_{xy} напряжения по наклонному сечению в элементе, нормаль к которому составляет угол $\alpha = -30^\circ$ с осью x . По граням элемента известны нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_x = 30 \text{ Н/мм}^2; \quad \sigma_y = -50 \text{ Н/мм}^2; \quad \tau_{xy} = 20 \text{ Н/мм}^2.$$

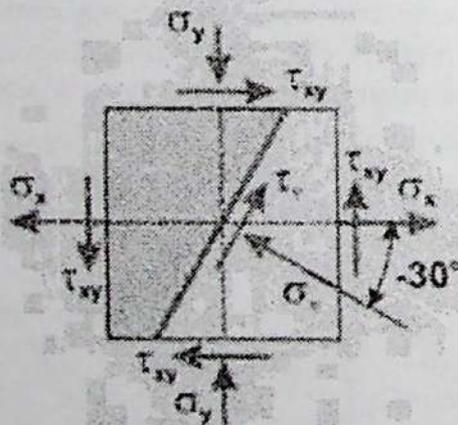


Рис. к задаче 63

Решение задачи выполним в программном продукте MathCAD.

Дано $\alpha = -30 \text{ deg}$ $\sigma_x = 30$ $\sigma_y = -50$ $\tau_{xy} = 20$

Решение

$$\sigma_{\nu} = \sigma_x \cos(\alpha)^2 + \sigma_y \sin(\alpha)^2 + \tau_{xy} \sin(2\alpha)$$

$$\tau_{\nu} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{xy} \cos(2\alpha)$$

$$\sigma_{\nu} = -7.521 \quad \tau_{\nu} = 44.641$$

Задача № 64

Элемент находится в плоском напряженном состоянии (рис.). Его относительные деформации равны:

$$\varepsilon_x = 5,32 \cdot 10^{-4}, \quad \varepsilon_y = -1,82 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = -1,24 \cdot 10^{-3}.$$

Определить величину и направление главных деформаций.

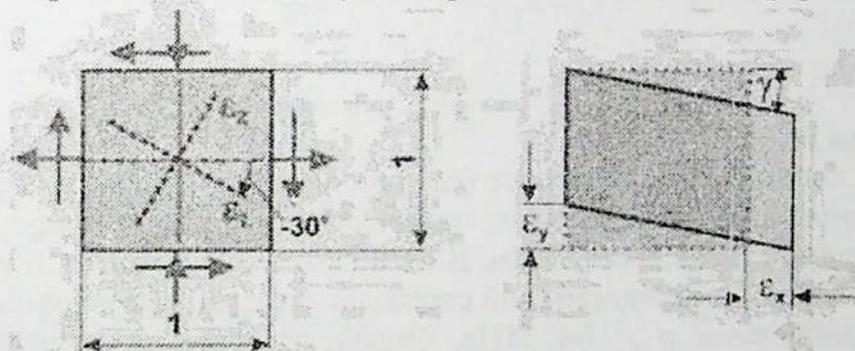


Рис. к задаче 64

Все вычисления выполним в MathCAD.

Дано

$$\epsilon_x := 5.32 \cdot 10^{-4} \quad \epsilon_y := -1.82 \cdot 10^{-4} \quad \gamma_{xy} := -1.24 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{\max} := \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 8.904 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{\min} := \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = -5.404 \times 10^{-4}$$

$$\alpha_{\max} := \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = -30.033$$

Задача № 65

В толстой стальной плите (см. рис.), деформацией, которой пренебрегаем, высверлено на некоторую глубину цилиндрическое гнездо диаметром 20 мм. В него плотно, без зазоров вставлен стальной цилиндрический стержень, сжатый, как указано на рис, давлением $p = 64$ МПа. Определить все три главных напряжения в стержне, а также относительное изменение объема стержня.

На торцы стержня действует сжимающее напряжение $\sigma_3 = p$, боковые перемещения поверхности цилиндра отсутствуют, т.е. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. Все вычисления выполним в программном продукте MathCAD.

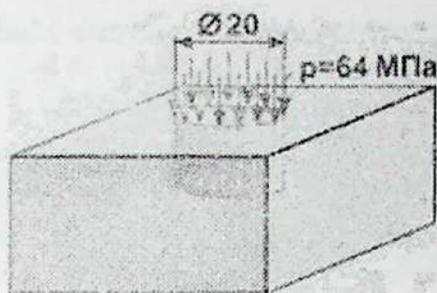


Рис. к задаче 65

Дано

$$E = 2 \cdot 10^4 \quad \mu = 0.3 \quad d = 20 \quad p = 64$$

Решите

$$\sigma_3 = p = -64$$

Определите главных напряжений σ_1 и σ_2 и главную деформацию ϵ_3 .

$$\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = 1 \quad \epsilon_3 = 1$$

Given

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] = 0 \quad \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)] = \epsilon_3$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)] = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \text{Find}(\sigma_1, \sigma_2, \epsilon_3)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27.419 \\ -27.419 \\ -3.377 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Определение относительного изменения объема θ

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -3.377 \times 10^{-4}$$

Задача № 66

Элемент, вырезанный из стальной детали, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 5.5). Определить изменение длины диагонали.

Решение задачи выполним в системе MathCAD.

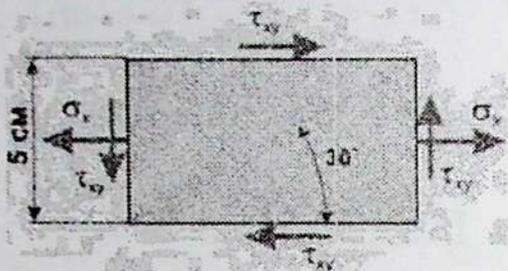


Рис. к задаче 66

дано

$$\sigma_{xx} := 60 \quad \sigma_{yy} := 0 \quad \tau_{xy} := 15 \quad E := 2 \cdot 10^5 \quad \mu := 0.3$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = 7.692 \times 10^4$$

$$\alpha := 30 \text{ deg} \quad \beta := \alpha + 90 \text{ deg} \quad h := 50 \quad L := \frac{h}{\sin(\alpha)} = 100$$

Решение

$$\epsilon_{xx} := \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad \epsilon_{yy} := \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \quad \gamma_{xy} := \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_v := \epsilon_x \cdot \cos(\alpha)^2 + \epsilon_y \cdot \sin(\alpha)^2 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \quad \Delta L := \epsilon_v \cdot L = 0.029$$

Задача № 67

Сравнить удельные потенциальные энергии деформаций для резины при напряжении $\sigma_1 = 4,0$ МПа и для стали при напряжении $\sigma_2 = 160,0$ МПа ($E_{рез} = 8$ МПа, $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа). Используя зависимость $u = \sigma^2 x / 2E$, вычислим удельные потенциальные энергии резины и стали

Решение задачи выполним в системе MathCAD.

Дано

$$\sigma_{\text{рез}} := 4 \cdot 10^6 \quad \sigma_{\text{ст}} := 160 \cdot 10^6 \quad E_{\text{рез}} := 8 \cdot 10^6 \quad E_{\text{ст}} := 2.1 \cdot 10^{11}$$

Решение

$$u_{\text{рез}} := \frac{\sigma_{\text{рез}}^2}{2 \cdot E_{\text{рез}}} = 1 \times 10^6 \quad u_{\text{ст}} := \frac{\sigma_{\text{ст}}^2}{2 \cdot E_{\text{ст}}} = 6.095 \times 10^4$$
$$\frac{u_{\text{рез}}}{u_{\text{ст}}} = 16.406$$

Задача № 68

При прохождении поезда через мост в одной из точек стальной балки при помощи тензометров были измерены удлинения в горизонтальном и вертикальном направлениях. В горизонтальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной +8 мм при его базе 20 мм и увеличении $1/k = 1000$; в вертикальном направлении разность отсчетов тензометра оказалась равной -12 мм при его базе 100 мм и том же увеличении.

Определить нормальные напряжения в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Решение задачи выполним в системе MathCAD.

Дано

$$E := 2 \cdot 10^5 \quad \mu := 0.3 \quad k := 10^{-3} \quad \Delta_{\Gamma} := 8 \quad L_{\Gamma} := 20 \quad \Delta_B := -12 \quad L_B := 100$$

Решение

$$\varepsilon_x := \frac{\Delta_{\Gamma}}{L_{\Gamma}} \cdot k = 4 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_y := \frac{\Delta_B}{L_B} \cdot k = -1.2 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_x := 1 \quad \sigma_y := 1 \quad \text{Given}$$

$$\frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \sigma_y \cdot \mu) = \varepsilon_x \quad \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \sigma_x \cdot \mu) = \varepsilon_y \quad +$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} := \text{Find}(\sigma_x, \sigma_y) = \begin{pmatrix} 80 \\ -1.4 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

В горизонтальном направлении $\sigma_x=80$ МПа, в вертикальном направлении $\sigma_y=0$ МПа

Задача № 69

Стальная пластина о краям напряжениями $\sigma_x=100$ МПа, $\sigma_y=-40$ МПа, $\tau_{xy}=50$ МПа. Определить под углом σ к направлению σ_x надо установить тензометр А, чтобы он давал наибольшие показания при нагружении. Найти наибольшее относительное удлинение ε/l при $E=2 \cdot 10^5$ МПа и $\mu=0,5$ и соответствующее ему приращение показаний тензометра, имеющего базу $L=10$ мм и увеличение $1/k=1000$.

Решение задачи выполним в системе MathCAD.

Дано

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \quad \mu_s = 0,25 \quad k_s = 10^{-3} \quad L_0 = 10$$

$$\sigma_x = 100 \quad \sigma_y = -40 \quad \tau_{xy} = 50$$

Решение Главные напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_1$ $\sigma_{\min} = \sigma_2$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 116,023$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -56,023$$

Направление главного напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_1$

$$\alpha_{\max} = \arctan\left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) \cdot \frac{1}{\text{deg}} = 17,769$$

Наибольшее удлинение будет в направлении главного σ_{\max}

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E} (\sigma_{\max} - \mu \cdot \sigma_{\min}) = 6,501 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_{\max} \cdot L_0}{k} = 6,501$$

Задача № 70

Наибольшее нормальное напряжение в растянутом вдоль оси стержне равно 40 МПа, а по одному из наклонных сечений касательные напряжения равны (-17,3) МПа.

Определить угол наклонного сечения по отношению к поперечному и значение действующего по нему нормального сечения.

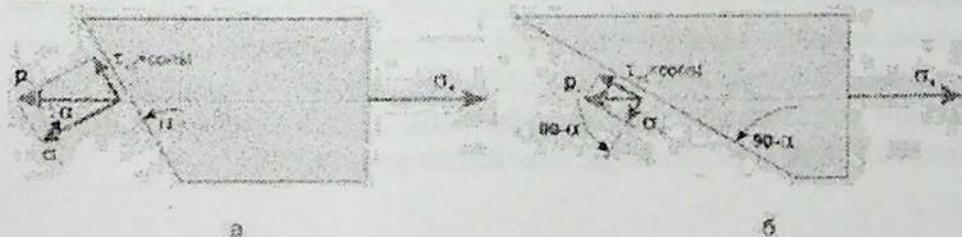


Рис. к задаче 70

Задачу решим в системе MathCAD.

Угол α можно найти непосредственно из формулы для касательных напряжений по наклонной площадке:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(-\frac{\tau_{V\xi}}{\sigma_X} \right)$$

или воспользоваться вычислительным блоком Given – Find.

В системе MathCAD угол α вычислим тем и другим способом.

Дано $\sigma_X := 40$ $\tau_{V\xi} := -17.3205$

Решение

Вариант 1 $\alpha_1 := \frac{\operatorname{asin} \left(\frac{-2 \cdot \tau_{V\xi}}{\sigma_X} \right)}{2} \quad \frac{\alpha_1}{\operatorname{deg}} = 30$

$$\sigma_{V1} := \sigma_X \cdot (\cos(\alpha_1))^2 = 30 \quad \tau_{V1\xi} := \frac{\sigma_X}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_1) = 17.32$$

Вариант 2

$$\alpha_2 := 1 \quad \text{Given} \quad \tau_{V\xi} = \frac{-\sigma_X}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_2) \quad \alpha_2 := \operatorname{Find}(\alpha_2) \quad \frac{\alpha_2}{\operatorname{deg}} = 60$$

$$\sigma_{V2} := \sigma_X \cdot (\cos(\alpha_2))^2 = 10 \quad \tau_{V2\xi} := \frac{\sigma_X}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_2) = 17.32$$

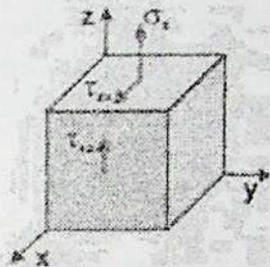
Из приведенного решения следует, что в одном случае мы получили угол $\alpha = 30^\circ$ и действующее в этой площадке нормальное напряжение $\sigma_y = 30$ МПа, а в другом (по ортогональной площадке) – дополнительный угол $(90^\circ - \alpha) = 60^\circ$ и нормальное напряжение $\sigma_y = 10$ МПа. Такая ситуация связана с тем, что для вычисления угла α использовались разные численные процедуры: в первом случае определялся аргумент обратной тригонометрической функции, а во втором – использовался алгоритм решения нелинейного уравнения.

Тесты для самопроверки

Виды напряжённого состояния

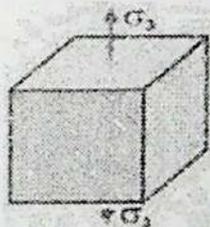
Вариант 1

1. Напряженное состояние элементарного объёма.



Варианты ответов:

- 1) плоское; 2) объёмное; 3) линейное (одноосное растяжение); 4) линейное (одноосное сжатие).
2. На рисунке представлено...



Варианты ответов:

- 1) плоское напряженное состояние; 2) объёмное напряжённое состояние; 3) линейное напряженное состояние; 4) состояние чистого сдвига.
3. Напряжённое состояние называется плоским, если...

Варианты ответов:

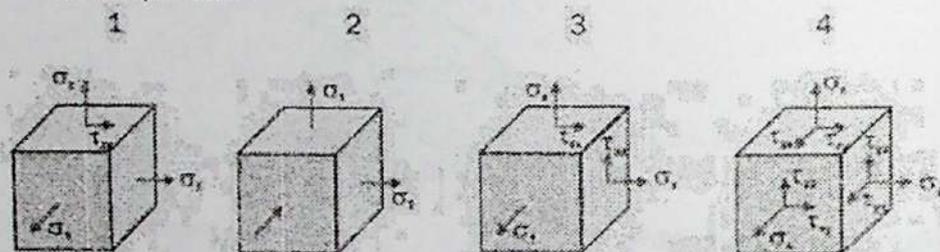
- 1) одно из главных напряжений равно нулю; 2) все три главных напряжения отличны от нуля; 3) какие-либо два главных напряжения равны; 4) на двух из трех площадок отсутствуют нормальные напряжения.

4. Главные площадки – это...

Варианты ответов:

- 1) три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через данную точку деформируемого тела, на которых отсутствуют нормальные напряжения;
- 2) три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через данную точку деформируемого тела, на которых нормальные и касательные компоненты напряжений экстремальны;
- 3) три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через данную точку деформируемого тела, на которых отсутствуют касательные напряжения;
- 4) три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через данную точку деформируемого тела, на которых касательные напряжения экстремальны.

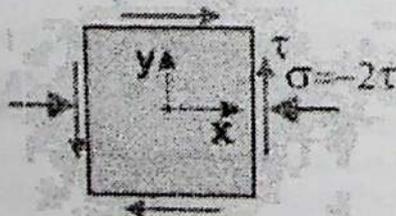
5. Укажите элемент, все грани которого являются главными площадками...



Варианты ответов:

- 1) ; 2) ; 3) ; 4) ;

6. Угол между осью x и нормалью к одной из главных площадок равен...



Варианты ответов:

- 1) $30^{\circ}30'$; 2) 60° ; 3) $-22^{\circ}30'$ 4) -45°



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Что называется напряженным состоянием в точке? Назовите типы напряженных состояний.
- ✓ Какие площадки называются главными?
- ✓ Какие напряжения называются главными напряжениями?
- ✓ Как определяется положение главных площадок в случае плоского напряженного состояния?
- ✓ Как определяются величины главных напряжений в случае плоского напряженного состояния?
- ✓ Как определяются величины экстремальных касательных напряжений τ_{max} , τ_{min} ?
- ✓ Как ориентированы эти площадки относительно главных?
- ✓ Сформулируйте «Закон парности касательных напряжений».
- ✓ Как определяются нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния?
- ✓ В чем состоит смысл обобщенного закона Гука? Запишите соотношения, характеризующие этот закон.
- ✓ Как определяется коэффициент Пуассона?
- ✓ Перечислите виды напряженного состояния.
- ✓ В чем заключается закон парности касательных напряжений?
- ✓ На каких площадках возникают наибольшее и наименьшее нормальные напряжения?
- ✓ Запишите формулу для вычисления главных напряжений при плоском напряженном состоянии.
- ✓ Чему равно наибольшее касательное напряжение в случае плоского напряженного состояния?
- ✓ Запишите формулу максимального касательного напряжения для объемного напряженного состояния.
- ✓ Запишите формулу обобщенного закона Гука.
- ✓ Запишите формулу полной удельной потенциальной энергии упругой деформации.
- ✓ Запишите формулу удельной энергии изменения объема.

Глава 5. Кручение

Кручение характеризуется наличием в стержне единственного внутреннего силового фактора — крутящего момента $M_z = T_{кр}$, то есть момента действующего в плоскости поперечного сечения стержня (остальные внутренние силовые факторы равны нулю).

Стержень, работающий на кручение, называется валом.

Экспериментально установлено, что при кручении вала длиной l , сечения поворачиваются относительно друг друга на угол φ , а длина вала остается неизменной — следовательно, $\varphi = f(T_{кр})$. Условие жесткости вала:

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где G — модуль сдвига,

J_p — полярный момент инерции сечения,

GJ_p — жесткость сечения вала

Касательные напряжения в любой точке поперечного сечения вала

$$\tau = \frac{T_{кр}}{J_p} \cdot \rho,$$

где ρ — расстояние от центра сечения (полюса) до рассматриваемой точки. Самая удаленная точка сечения лежит на расстоянии ρ_{\max} но

$$\frac{J_p}{\rho_{\max}} = W_p \text{ — полярный момент сопротивления.}$$

Тогда условие прочности вала:



$$\tau_{\max} = \frac{T_{\text{кр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

Для вала круглого сечения



$$J_{\rho} = 0,1d^4$$

$$W_{\rho} = 0,2d^3$$

Для вала кольцевого (трубчатого) сечения



$$J_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4) \approx 0,1 \cdot d^4 (1 - c^4)$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{16} \cdot (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot d^3 (1 - c^4) \quad c = \frac{d_0}{d}$$

4.1. Расчеты на прочность и жесткость валов и винтовых цилиндрических пружин

Задача №71

Пружина изготовлена из стальной проволоки диаметром $d=16$ мм (см. рис.), наружный диаметр витка $D_H=136$ мм. Проверить прочность при допускаемом напряжении $[\tau]=300$ МПа. Вычислить необходимое число витков, чтобы обеспечить осадку $\lambda=60$ мм, и накопленную при этом энергию деформации, если $F=4$ кН.

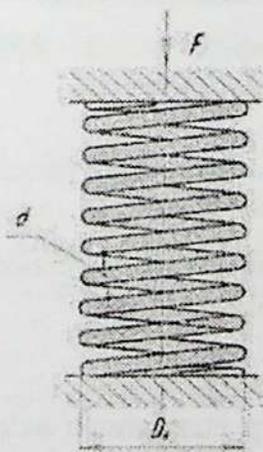


Рис. к задаче 71

Решение. Определяем максимальное действующее напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12}{3,14 \cdot 1,6^3 \cdot 10^{-6}} = 298 \text{ МПа}$$

т. е. меньше допускаемого на 0,67%. Здесь

$$D = D_H - d = 0,12 \text{ м} \text{ — средний диаметр.}$$

Рабочее число витков

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8 P D^3} = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 1,6^4 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12^3} = 5,69,$$

принимаем $n=6$, при этом $\lambda = 63,4 \text{ мм}$. Полное число витков для пружины сжатия

$$n_{\text{пол.}} = n + 2 = 8.$$

Потенциальная энергия пружины при сжатии

$$U = \frac{1}{2} P \cdot \lambda = \frac{4}{6} \cdot 6,34 \cdot 10^{-2} \cong 0,127 \text{ кДж.}$$

Задача № 72

Пружина, свитая из проволоки диаметром $d = 20 \text{ мм}$ и имеющая количество рабочих витков $n = 8$, сжимается силой $P = 8 \text{ кН}$. Средний диаметр пружины $D = 12 \text{ мм}$. Определить осадку пружины X и максимальные касательные напряжения τ_{\max} . Модуль сдвига материала пружины $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Решение задачи выполним в MathCad

$$\text{Дано: } D = 0,012 \text{ м} \quad d = 0,02 \text{ м} \quad P = 8 \cdot 10^3 \text{ Н} \quad G = 8,5 \cdot 10^{10} \text{ Па} \\ n = 8$$

$$\text{Решение: } \tau = \frac{8 P D}{\pi d^3} = 3056 \times 10^6 \text{ Па} \quad \lambda = \frac{8 P D^3 n}{G d^4} = 0,065 \text{ м}$$

Максимальные касательные напряжения в проволоке пружины — 305,6 МПа, осадка — 6,5 см.

Задача № 73

Определить диаметр сплошного вала, передающего крутящий момент $1,5 \text{ кНм}$, если допускаемое напряжение $[\tau] = 70 \text{ МПа}$?

Ответ: 103 мм.

Задача № 74

Определить диаметр сплошного вала, передающего 450 л.с. при 300 об/мин. Угол закручивания не должен превышать 1° на 200 см длины вала, а наибольшее касательное напряжение 40 МПа. $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: 11,2 см.

Задача № 75

Сплошной вал диаметром 0,1 м и длиной 6 м закручен на угол 4° . Чему равно наибольшее касательное напряжение, если

Ответ: 46,6 МПа.

Задача № 76

Определить наибольшие касательные напряжения в сечениях AA и BB вала (см. рисунок) при следующих данных: $T_1=13$ т·см; $T_2=30$ т·см. Диаметр вала в сечении AA—5 см, а в сечении BB—7,5 см.

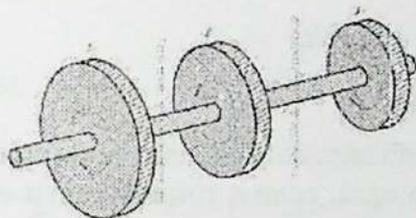


Рис. к задаче 76

Ответ: $\tau_A=53$ МПа; $\tau=20,5$ МПа.

Задача № 77

Полый вал, соединяющий турбину и генератор в гидротехнической установке, имеет наружный диаметр 40 см и внутренний диаметр 22,5 см. Скорость вращения 120 об/мин. Чему равны наибольшие касательные напряжения при передаче валом 10000 л. с.?

Ответ: 53 МПа.

Задача № 78

Карданный вал автомобиля изготовлен из стальной трубы с размерами $d_H = 0,074$ м, $d_B = 70$ мм и передает момент $T = 1,3$ кНм. Определить T_{max} и угол закручивания ρ на длине $l = 1,2$ м. Рассчитать диаметр равнопрочного сплошного вала и сравнить их веса

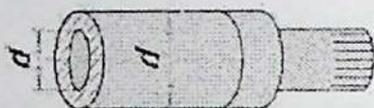


Рис. к задаче 78

Ответ: Максимальное напряжение $T_{max} = 84$ МПа, угол закручивания $\rho = 1,96^\circ$; $d_{спл} = 0,043$ м, $Q_m:Q_{спл} = 0,32$.

Задача № 79

Сплошной стальной вал диаметром 10 см и длиной 6 м закручен на угол $0,12$ рад. Чему равно наибольшее касательное напряжение?

Ответ: $\tau_{max} = 80$ МПа.

Задача № 80

Чему равно наибольшее касательное напряжение в толстой части ступенчатого вала, если в тонкой части оно 135 МПа?

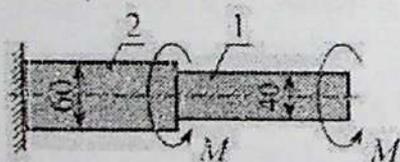


Рис. к задаче 80

Ответ: $\tau_{max} = 80$ МПа.

Задача № 81

Определить грузоподъемность $[M_{кр}]$ стального стержня круглого сечения диаметром $d = 20$ мм при допускаемом напряжении $[\tau] = 100$ МПа. Чему равна величина угла закручивания участка стержня длиной 100 см?

Решение задачи выполним в MathCAD.

Дано

$$d := 0.02 \quad L := 2 \text{ м} \quad \tau d := 100 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad G := 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

Решение

$$W_p := \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad J_p := \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad M d_{кр} := \tau d \cdot W_p = 157.08 \text{ Нм}$$
$$\varphi := \frac{M d_{кр} \cdot L}{G \cdot J_p} = 0.125 \text{ рад}$$

Задача № 82

Стержень из мягкой стали диаметром 25 мм удлиняется на 0,122 мм на длине 20 см при растяжении силой 6 т. Этот же стержень закручивается на угол 0,75° на длине 20 см при нагружении крутящим моментом 2 т·см. Определить величины E , G и μ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулами

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot F}; \quad \varphi = \frac{M_{кр} L}{E \cdot J_p}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Решение задачи выполним в MathCAD.

$$\text{Дано } d := 0.025 \text{ м} \quad L := 0.2 \text{ м} \quad E := 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad G := 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$P := 6 \cdot 10^4 \text{ Н} \quad M_{кр} := 200 \text{ Нм} \quad \varphi := 0.75 \cdot \text{deg} \text{ рад} \quad \Delta L := 0.122 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Решение

$$F := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad J_p := \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$E := 1 \quad G := 1 \quad \mu := 1$$

Given

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot F} \quad \varphi = \frac{M_{кр} \cdot L}{G \cdot J_p} \quad \mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

$$\begin{pmatrix} E \\ G \\ \mu \end{pmatrix} := \text{Find}(E, G, \mu) = \begin{pmatrix} E \\ G \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.004 \times 10^{11} \\ 7.968 \times 10^{10} \\ 0.257 \end{pmatrix}$$

Итак, модуль упругости $E = 2,004 \cdot 10^5 \approx 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G = 7,968 \cdot 10^4 \approx 8 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,257$.

Задача № 83

К стальному валу приложены крутящие пары сил:

$M_1 = 1142$ Н·м, $M_2 = 2716$ Н·м, $M_3 = 5000$ Н·м (рис. 9.21). Диаметр крайних участков вала – 40 мм; диаметр вала на среднем участке – 60 мм. Построить эпюру крутящих моментов и график нарастания угла закручивания, отсчитываемого от левого торцевого сечения вала (сечения 1). Подсчитать, чему равны касательные напряжения у поверхности вала на каждом его участке и угол закручивания вала между сечениями 2 и 4?

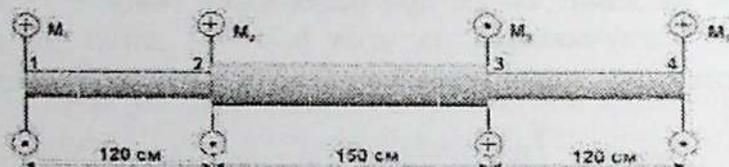


Рис. к задаче 83

Решение задачи выполним в MathCAD.

Дано

$$M_1 := 1142 \text{ Нм} \quad M_2 := 2716 \quad M_3 := 5000 \quad G := 8 \cdot 10^{10} \quad d_1 := 0.04 \quad d_2 := 0.06$$

$$L_1 := 1.2 \quad L_2 := 1.5 \quad L_3 := L_{12} := L_1 + L_2 + L_3 = 3L_{12} := L_1 + L_2 = 2.7$$

Решение: $W_1 = \frac{\pi d_1^3}{16}$ $W_2 = \frac{\pi d_2^3}{16}$ $J_{\rho 1} = \frac{\pi d_1^4}{32}$ $J_{\rho 2} = \frac{\pi d_2^4}{32}$

$$W_3 = W_1 \quad J_{\rho 3} = J_{\rho 1}$$

Определение внутренних усилий на трех участках вала:

$$M_{вр,1} = M_1 \quad M_{вр,2} = M_1 + M_2$$

$$M_{вр,3} = M_1 + M_2 - M_3$$

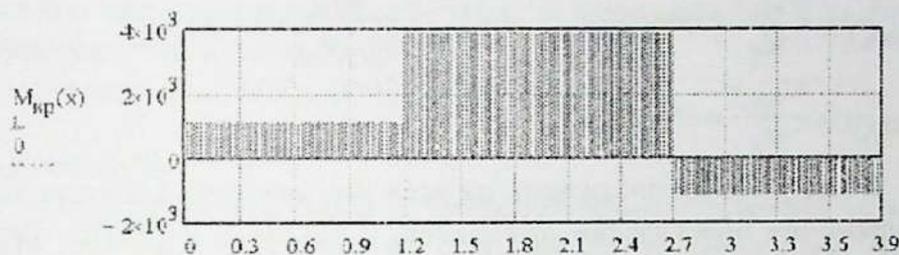
Определение функции крутящих моментов в поперечных сечениях вала:

$$M_{вр}(x) = \begin{cases} M_{вр,1} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ M_{вр,2} & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ M_{вр,3} & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x = 0, 0.02 \cdot L$$

$$M_{\text{кр}}\left(\frac{L_1}{2}\right) = 1142 \times 10^3 \quad M_{\text{кр}}\left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right) = 3858 \times 10^3 \quad M_{\text{кр}}(L) = -1142 \times 10^3$$

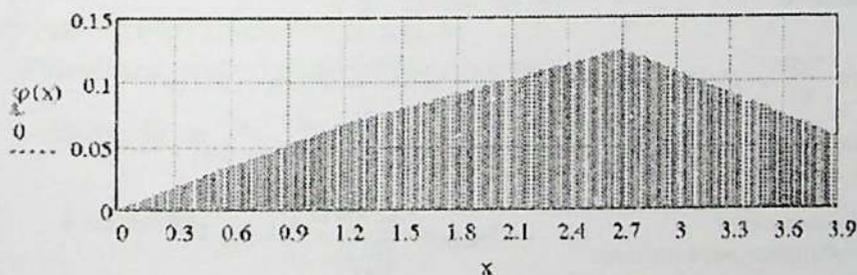
Эпюра крутящих моментов в поперечных сечениях вала:



Определение функции углов поворота в поперечных сечениях вала:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{M_{\text{кр}_1} x}{GJ_{\rho 1}} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \frac{M_{\text{кр}_1} L_1}{GJ_{\rho 1}} + \frac{M_{\text{кр}_2} (x - L_1)}{GJ_{\rho 2}} & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ \frac{M_{\text{кр}_1} L_1}{GJ_{\rho 1}} + \frac{M_{\text{кр}_2} L_2}{GJ_{\rho 2}} + \frac{M_{\text{кр}_3} (x - L_{12})}{GJ_{\rho 3}} & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

Эпюра углов закручивания поперечных сечений вала.



Определение угла закручивания вала между сечениями 2 и 4

$$\varphi_{24} = \varphi(L) - \varphi(L_1) = -0,0113 \quad \text{ра}$$

Определение максимальных касательных напряжений на каждом из участков вала

$$\tau_{\max_1} = \frac{M_{\text{кр}_1}}{W_1} = 9,088 \times 10^7 \quad \tau_{\max_2} = \frac{M_{\text{кр}_2}}{W_2} = 9,097 \times 10^7$$
$$\tau_{\max_3} = \frac{M_{\text{кр}_3}}{W_3} = -9,088 \times 10^7$$

Итак, у поверхности вала на всех его участках касательные напряжения практически одинаковы и равны ≈ 91 МПа. Угол закручивания вала между сечениями 2 и 4 составляет 0,0113 рад.

Задача № 84

При определении мощности турбины был измерен угол закручивания вращаемого ею стального вала, который на длине 6 м оказался равным $1,2^\circ$. Наружный и внутренний диаметры вала равны 25 см и 17 см. Скорость вращения вала – 250 об./мин. Вал выполнен из стали. Определить мощность, передаваемую валом, и возникающие в нём наибольшие касательные напряжения.

Все вычисления выполним в MathCAD.

Дано $D := 0,25 \text{ м}$ $d := 0,17 \text{ м}$ $L := 6 \text{ м}$ $\varphi := 1,2 \text{-deg}$ рад
 $G := 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ $n := 250 \text{ об./мин}$

Решение: $\alpha := \frac{d}{D}$ $J_p := \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4)$ $W_p := \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4)$

$\omega := \frac{\pi \cdot n}{30} = 26,18 \text{ рад/с}$ $M_{\text{кр}} := \frac{\varphi \cdot G \cdot J_p}{L} = 3419 \times 10^4$

Мощность: $N_{\text{эл}} := M_{\text{кр}} \cdot \omega = 2204 \times 10^6$

Максимальные касательные напряжения: $\tau_{\max} := \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = 3,491 \times 10^7$

Максимальные касательные напряжения составили 34,91 МПа, а мощность, передаваемая на вал, 2204 кВт.

Задача № 85

Сплошной вал диаметром 90 мм при скорости вращения 150 об/мин передает 50 л.с. Длина вала между шкивами 4 м. Модуль $G=8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$. Определить наибольшее касательное напряжение в вале и угол, на который один шкив повернется относительно другого.

Ответ: 16,7 МПа, $1^\circ 4'$

Задача № 86

Определить наибольший крутящий момент, который может быть приложен к стальному стержню диаметром 10 мм, если допускаемое напряжение не должно превосходить 150 МПа. Какова наименьшая длина стержня, если угол закручивания равен 90° ; $G=8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$

Ответ: 2,95 кН/см², 418 см.

Задача № 87

Вал диаметром 90 мм передает 90 л.с. Определить предельное число оборотов, если допускаемое касательное напряжение равно 6 кН/см².

Ответ: $n=75$ об/мин.

Задача № 88

Определить из условия прочности при допускаемом напряжении $[\tau] = 400 \text{ МПа}$ диаметр проволоки цилиндрической пружины, имеющей средний диаметр витка $D=8 \text{ см}$. Максимальная нагрузка на пружину $P=20 \text{ кН}$.

Решение задачи выполним в Mathcad

$$\text{Дано } \underset{\text{мм}}{D} := 0.08 \quad \underset{\text{мм}}{P} := 2 \cdot 10^4 \quad \underset{\text{МПа}}{\tau_d} := 400 \cdot 10^6$$

$$\text{Решение } \underset{\text{мм}}{d} := \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot \tau_d}} = 0.022$$

+

Выбираем диаметр проволоки 22 мм.

Задача № 89

Пружина, свитая из проволоки диаметром $d = 20$ мм и имеющая количество рабочих витков $n = 8$, сжимается силой $P = 8$ кН. Средний диаметр пружины $D = 12$ мм. Определить осадку пружины λ и максимальные касательные напряжения τ_{\max} . Модуль сдвига материала пружины $G = 8,5 \cdot 10^4$ МПа.

Решение задачи выполним в Mathcad

Дано

$$D := 0.12 \quad P := 8 \cdot 10^3 \quad d := 0.02 \quad G := 8.5 \cdot 10^4 \quad n := 8$$

Решение

$$\tau := \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} = 3.056 \times 10^8 \quad \lambda := \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = 0.065$$

Максимальные касательные напряжения в проволоке пружины – $\tau = 305,6$ МПа, осадка $\lambda = 6,5$ см.

Задача № 90

Стальной брус прямоугольного сечения размером 60×20 мм и длиной $0,8$ м нагружен крутящим моментом $M_{кр} = 0,4$ кН·м. Вычислить наибольшие касательные напряжения в брус по длинной и по короткой сторонам его поперечного сечения, определить угол закручивания бруса при модуле сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Наибольшие касательные напряжения по кромкам поперечного сечения бруса вычисляются по формулам: (9.56) и (9.58):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \quad \tau_{\max 2} = \gamma \tau_{\max 1}$$

где $W_{кр} = ab^2h$, $b = 20$ мм, $h = 60$ мм, следовательно, $h/b = 3$ и из табл. 9.1 находим $a = 0,267$, $p = 0,263$, $\gamma = 0,753$.

Угол закручивания бруса определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_{кр} L}{GJ_{кр}}$$

Все дальнейшие вычисления выполним в MathCAD.

$$\text{Дано } \underline{L} := 0.8 \quad \underline{G} := 3 \cdot 10^{10} \quad \alpha := 0.267 \quad \beta := 0.263 \quad \gamma := 0.753 \quad \underline{M}_{кр} := 400 \\ \underline{b} := 0.02 \quad \underline{h} := 0.06$$

$$\text{Решение } \underline{W} := \alpha \cdot b^2 \cdot h \quad \underline{J} := \beta \cdot b^3 \cdot h$$

$$\tau_{max1} := \frac{M_{кр}}{W} = 6.242 \times 10^7 \quad \tau_{max2} := \gamma \cdot \tau_{max1} = 4.7 \times 10^7$$

$$\varphi := \frac{M_{кр} \cdot L}{G \cdot J} = 0.032 \quad \frac{\varphi}{deg} = 1.815 \text{ град}$$

Задача № 91

Двутавровая балка длиной $L = 1,5$ м заделана в стену одним концом, а на другом конце нагружена закручивающим моментом $M_{кр}$. Размеры поперечного сечения балки: $a = 12$ см, $b = 28$ см, $c = 2$ см, $d = 1$ см. Определить наибольший момент $M_{кр}$, который может выдержать балка при допуске напряжении $[\tau] = 60$ МПа, и угол закручивания бруса. Стеснением продольных перемещений в балке у заделки пренебречь.

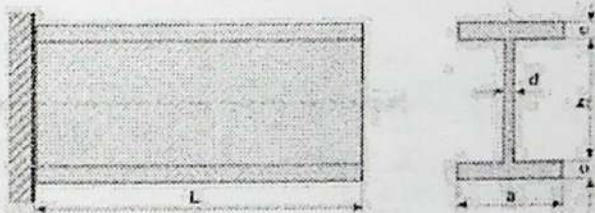


Рис. к задаче 91

Решение. Вычисляем момент инерции при кручении тонкостенных профилей по формуле:

$$J_{кр} = \frac{\sum \delta_i^3 h_i}{3}$$

момент инерции поперечного сечения тонкостенного бруса при кручении, в которой

$$\delta_1 = c, \delta_2 = d, \delta_3 = c, h_1 = a, h_2 = b + \frac{c+c}{2}, h_3 = a.$$

Максимальные касательные напряжения вычисляем по формуле (9.65), а наибольший крутящий момент находим из условия прочности.

Угол закручивания бруса определяем по формуле:

$$\varphi = \frac{M_{кр} L}{G J_{кр}}$$

Вычисления требуемых по условию задачи величин выполним в MathCAD.

Дано $L := 1.5$ $G := 8 \cdot 10^{10}$ $a := 0.12$ $b := 0.28$ $c := 0.02$ $d := 0.01$
 $\tau d := 50 \cdot 10^6$

Решение

$$\delta 1 := c \quad \delta 2 := d \quad \delta 3 := c \quad h 1 := a \quad h 2 := b + \frac{c}{2} \quad h 3 := a$$

Given

$$J_K := \frac{\sum_{i=1}^3 [(\delta_i)^3 \cdot h_i]}{3} \quad J_K := 7.4 \cdot 10^{-7}$$

$$M_{кр} := 1 \quad \frac{M_{кр}}{J_K} \cdot \delta 1 = \tau d \quad M_{кр} := \text{Find}(M_{кр}) = 2.22 \times 10^3$$

Определяем угол закручивания бруса

$$\varphi := \frac{M_{кр}}{G \cdot J_K} \cdot L \quad \frac{\varphi}{\text{deg}} = 3.223$$

5.2. Расчет статически неопределимых валов

Задача № 92

По заданной эпюре угла закручивания установить нагрузку, действующую на вал, и определить наибольшие касательные напряжения, если $a = 0,5$ м; $d = 10$ см, жесткость поперечного сечения вала $G I_P = 1$ МН·м².

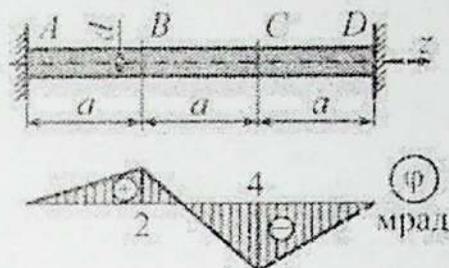


Рис. к задаче 92

Ответ: $M_B = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (против часовой стрелки);

$M_C = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (по часовой стрелке при взгляде с конца оси z);

$\tau_{\max} = 60 \text{ МПа}$.

Задача № 93

Определить наибольшие касательные напряжения в вале диаметром $d = 100 \text{ мм}$ при нагружении его моментом $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$, полагая $a = 0,5 \text{ м}$; $GI_p = 1 \text{ МН}\cdot\text{м}^2$. На сколько следует предварительно закрутить этот вал, чтобы после закрепления его концов и нагружения заданным моментом вал обладал наибольшим запасом прочности? Чему будут равны в этом случае наибольшие касательные напряжения?

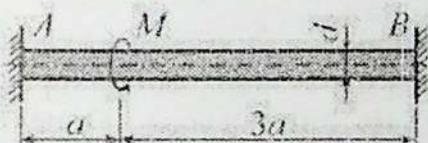


Рис. к задаче 93

Ответ: $\tau_{\max} = 75 \text{ МПа}$; $\varphi_{\text{в.о.}} = -10 \text{ мрад}$; $\tau_{\max} = 50 \text{ МПа}$

Задача № 94

Концы круглого стержня жестко заземлены, как показано на рисунке. В промежуточном сечении стержня приложена пара сил с моментом $l_2 = \text{кН}\cdot\text{м}$. Определить наибольшие касательные напряжения, если диаметр вала $\delta \text{ см}$.

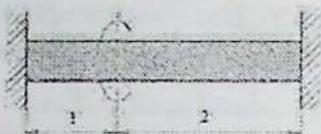


Рис. к задаче 94

Ответ: 79,5 МПа.

Задача № 95

Круглый стержень с жестко зашечленными концами подвергается действию двух равных и одинаково направленных пар сил с моментами по 8 кНм (см. рисунок). Определить угол поворота среднего сечения 1-1, если диаметр вала равен 10 см. Расстояния: $a=60$ см; $b=80$ см.

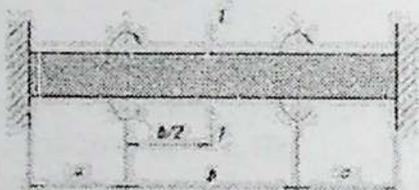


Рис. к задаче 95

Ответ: 21°.

Задача № 96

К круглому стержню с жестко зашечленными концами приложены две равные и противоположно направленные пары сил с моментами по 10 кНм (см. рисунок). Определить диаметр вала, если допустимое касательное напряжение равно 60 МПа.

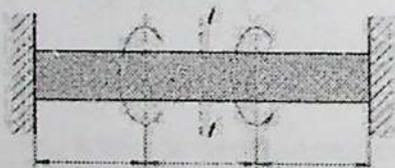


Рис. к задаче 96

Ответ: 8,25 см.

Задача № 97

Ступенчатый вал жестко закреплен по концам и нагружен скручивающим моментом T (см. рис.). Показание тензометра, установленного под углом $\alpha=45^\circ$, $\varepsilon=5,5 \cdot 10^{-4}$. Определить скру-

чивающий момент, если $D=0,04\text{м}$, $a=0,8$, $d=0,03\text{м}$, $l_1=l_3=2l_2$; материал – сталь, $\mu = 0,3$.

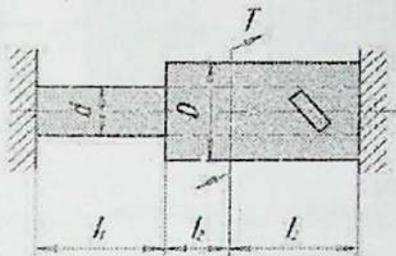


Рис. к задаче 97

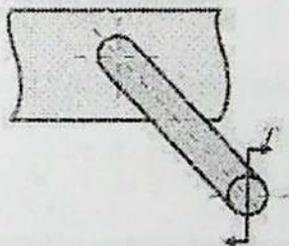
Ответ. Скручивающий момент $T=0,91\text{ МНм}$.

Тесты для самопроверки

Кручение 1

Вариант 1

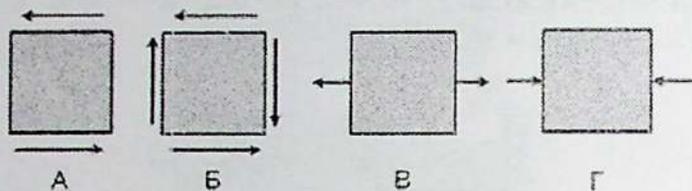
1. Как выглядит образец после испытания на кручение?



Варианты ответов:

1) искривлен и разрушен, 2) растянут и разрушен, 3) перерезан перпендикулярно продольной оси, 4) разрушен под углом 45° к оси.

2. Какое из напряжённых состояний называют «чистым сдвигом»?



Варианты ответов:

1) А, 2) Б, 3) В, 4) Г.

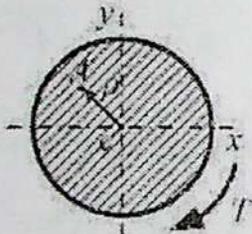
3. Как называется указанная величина в законе Гука?

$$\tau = G\gamma$$

Варианты ответов:

1) угол закручивания, 2) смещение, 3) сжатие, 4) угол сдвига.

4. Выбрать формулу для определения напряжения в указанной точке поперечного сечения.



Варианты ответов:

1) $\tau = \frac{T}{W_p}$, 2) $\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$, 3) $\tau = G\gamma$, 4) $\tau = \frac{Q}{A}$

5. Определить максимальное напряжение в сечении бруса. Диаметр бруса 50 мм, крутящий момент в сечении 200 Н·м.

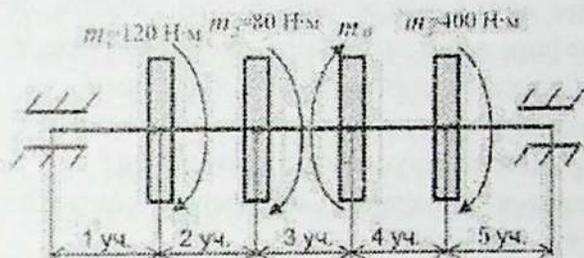
Варианты ответов:

1) 8,15 МПа, 2) 16 МПа, 3) 24 МПа, 4) 32 МПа.

Кручение 2

Вариант 1

1. Какой из участков вала постоянного сечения наиболее опасен по прочности?



Варианты ответов:

- 1) 1 участок, 2) 2 участок, 3) 3 участок, 4) 4 участок.
 2. В каком порядке следует расположить шкивы (см. схему к вопросу 1), чтобы получить минимальную нагрузку на вал?

Варианты ответов:

- 1) m_1, m_2, m_3, m_4 ; 2) m_3, m_1, m_4, m_2 ; 3) m_1, m_2, m_3, m_4 ;
 4) m_3, m_2, m_4, m_1
 3. Выбрать формулу для определения угла закручивания вала.

Варианты ответов:

$$1) \theta = \frac{9}{l} T, 2) \theta = \frac{T}{GI_p} l, 3) \gamma = \frac{\tau}{G}, 4) \theta = 9l.$$

4. Найти диаметр вала из расчёта на прочность, если подаваемая мощность 15 кВт, скорость вращения 50 рад/с, допустимое напряжение 25 МПа.

Варианты ответов:

- 1) 31 мм, 2) 44 мм, 3) 54 мм, 4) 39 мм.
 5. От каких факторов зависит выделенная величина?

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$

Варианты ответов:

- 1) от материала, 2) от нагрузки, 3) от длины вала, 4) от диаметра.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Как определяется величина крутящего момента в любом сечении бруса? Каков порядок построения эпюр крутящих моментов?
- ✓ Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при деформации кручения и как они определяются?
- ✓ Запишите условие прочности при кручении.
- ✓ Каков порядок подбора размеров поперечного сечения бруса при кручении по условию прочности?
- ✓ Что называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения?
- ✓ Какие задачи кручения брусьев решаются с использованием условия прочности?
- ✓ Что называется жесткостью сечения при кручении?
- ✓ Как определяется относительный угол закручивания?
- ✓ Поясните порядок подбора сечений при кручении из условий жесткости.
- ✓ Каков порядок решения статически неопределимых задач при кручении?
- ✓ Запишите условие прочности при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения.
- ✓ Что называют кручением?
- ✓ Запишите закон Гука при сдвиге.
- ✓ Как вычисляют крутящий момент в сечении, если известны внешние скручивающие моменты?
- ✓ Запишите формулу крутящего момента, если известны мощность, передаваемая валом при вращательном движении, и число оборотов в минуту.
- ✓ Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении и как они направлены?
- ✓ Какие гипотезы (допущения) используют для получения линейного закона распределения касательных напряжений в круглом поперечном сечении?

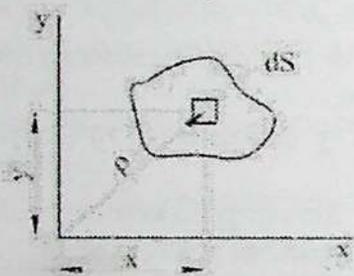
- ✓ Запишите формулу для определения напряжений в произвольной точке круглого поперечного сечения при кручении.
- ✓ Покажите вид напряженного состояния в опасной точке вала.
- ✓ В чем состоит условие прочности?
- ✓ Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
- ✓ Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения вала?
- ✓ Чем объясняется, что стержень кольцевого сечения при кручении более экономичен, чем сплошной?
- ✓ Как разрушаются при кручении пластичные (стальные) и хрупкие (чугунные) стержни? Чем объяснить характер их разрушения?
- ✓ Запишите формулу для определения угла закручивания круглого стержня.
- ✓ Как связаны между собой модули упругости первого и второго рода?
- ✓ Как определить диаметр сечения вала, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости?

Глава 6. Геометрические характеристики сечения

Сопротивление стержня различным видам деформации зависит не только от его материала и размеров, но также от формы поперечного сечения и его расположения по отношению к действующей нагрузке. Рассматривая сечение в плоской системе координат, имеем основные его геометрические характеристики:

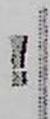
S – площадь поперечного сечения;

$$S = \int dS;$$



S_x и S_y – статические моменты;

$$S_x = \int dS \cdot y, \quad S_y = \int dS \cdot x;$$



Статический момент сечения относительно оси равен его площади, умноженной на расстояние от центра тяжести сечения до этой оси



J_x и J_y – осевые моменты инерции;

$$J_x = \int dS \cdot y^2, \quad J_y = \int dS \cdot x^2;$$



J_p – полярный момент инерции;

$$J_p = \int dS \cdot \rho^2;$$



J_{xy} – центробежный момент инерции;

$$J_{xy} = \int dS \cdot x \cdot y;$$



W_x и W_y — осевые моменты сопротивления;

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}};$$



W_p — полярный момент сопротивления;

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}};$$



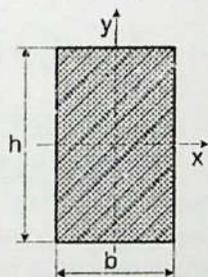
i_x и i_y — радиусы инерции;

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{S}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}}.$$

Геометрические характеристики некоторых плоских сечений



Прямоугольное сечение

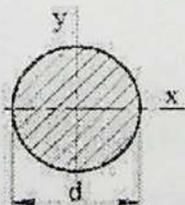


$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6};$$



Круглое сечение



$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4;$$

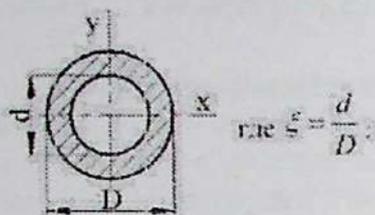
$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

$$J_p = 0,1d^4,$$

$$W_p = 0,2d^3.$$



Кольцевое сечение



$$J_x = J_y = 0,05(D^4 - d^4) = 0,05D^4(1 - \xi^4),$$

$$W_x = W_y = 0,1D^3(1 - \xi^4),$$

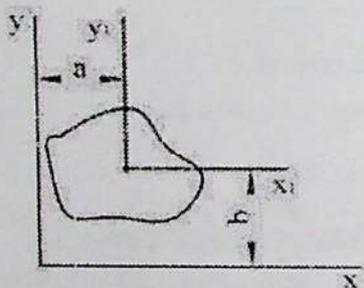
$$J_p = 0,1D^4(1 - \xi^4),$$

$$W_p = 0,2D^3(1 - \xi^4).$$

Геометрические характеристики сортамента прокатной стали даны в ГОСТах.

Чтобы определить моменты инерции сложных сечений необходимо знать две основных теоремы:

1. Определение моментов инерции относительно осей параллельных исходным центральным осям со смещением оси x на расстояние a и смещение оси y на расстояние b :

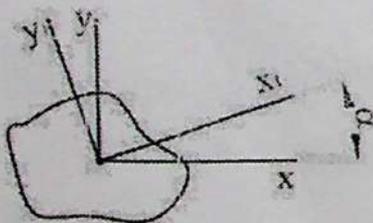


$$J_x = J_{x_1} + S b^2;$$

$$J_y = J_{y_1} + S a^2;$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + S \cdot a \cdot b.$$

2. Определение моментов инерции при повороте координатных осей на угол α .



$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$J_{y_1} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

На практике довольно часто приходится находить положение главных центральных осей (α_0), относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции являются экстремальными и являются главными моментами.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

$$J_{\text{глав}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}, \text{ если } J_x > J_y.$$

Примечания:

! 1. Если угол $\alpha > 0$, то оси поворачивают против часовой стрелки.

! 2. Ось симметрии всегда одна из главных осей инерции

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние разбивают на простые части, моменты инерции которых известны, так как момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей.

6.1. Определение моментов инерции сложных сечений, имеющих две оси симметрии

Задача № 98

Для фигуры, показанной на рисунке определить главные моменты инерции и положение главных осей инерции.

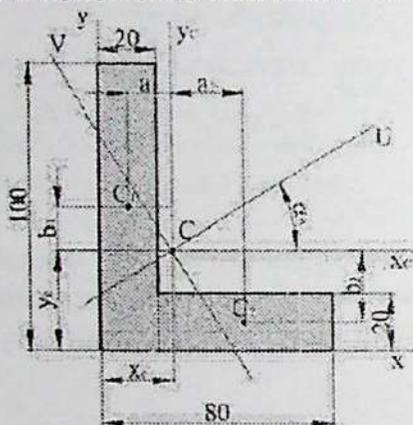


Рис. к задаче 98

1. Разбиваем сложное сечение на простейшие геометрические фигуры $S_1 = 2000 \text{ мм}^2$, $S_2 = 1200 \text{ мм}^2$, $S = 3200 \text{ мм}^2$.
2. Выбираем произвольные оси XOY.
3. Определяем положение центра тяжести сечения

Определяем статические моменты площади:

$$S_x = \sum S_i y_i = S_1 y_1 + S_2 y_2 = 2000 \cdot 50 + 1200 \cdot 10 = 11,2 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

$$S_y = \sum S_i x_i = S_1 x_1 + S_2 x_2 = 2000 \cdot 10 + 1200 \cdot 50 = 8 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$$

Находим координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{S_y}{S} = \frac{8 \cdot 10^4}{3200} = 25 \text{ мм} \quad y_c = \frac{S_x}{S} = \frac{11,2 \cdot 10^4}{3200} = 22 \text{ мм}$$

4 Проводим центральные оси $X_c O Y_c$

$$J_{xc} = J_{xc}^1 + J_{xc}^2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + S_1 \cdot b_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + S_2 \cdot b_2^2 = \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 2000 \cdot 15^2 + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 1200 \cdot (-15)^2 = 290,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

$$J_{yc} = J_{yc}^1 + J_{yc}^2 = \frac{b_1^3 h_1}{12} + S_1 \cdot a_1^2 + \frac{b_2^3 h_2}{12} + S_2 \cdot a_2^2 = \frac{20^3 \cdot 100}{12} + 2000 \cdot (-15)^2 + \frac{60^3 \cdot 20}{12} + 1200 \cdot (25)^2 = 162,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

5. Вычисляем центробежный момент инерции $J_{x_c y_c}$

$$J_{x_c y_c} = J_{x_c y_c}^1 + J_{x_c y_c}^2 = J_{x_1 y_2} + S_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2} + S_2 a_2 b_2 = 2000 \cdot (-15) \cdot 25 + 1200 \cdot 25 \cdot (-25) = -120 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

Определяем положение главных осей инерции

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{2(-120 \cdot 10^4)}{290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4} = 1,87 \quad 2\alpha_0 = 61^\circ \Rightarrow \alpha_0 = 30,5^\circ$$

Если $I_x > I_y$, и $\alpha_0 > 0$, то угол α_0 откладывается от оси X_c против часовой стрелки.

6. Вычисляем главные моменты инерции I_{\max} , I_{\min}

$$I_{\max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = \frac{290,4 \cdot 10^4 + 162,6 \cdot 10^4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4)^2 + 4(-120 \cdot 10^4)^2} = 362,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

$$I_{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = \frac{290,4 \cdot 10^4 + 162,6 \cdot 10^4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(290,4 \cdot 10^4 - 162,6 \cdot 10^4)^2 + 4(-120 \cdot 10^4)^2} = 90,6 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$$

Задача № 99

Как изменятся площадь и момент инерции J_y сечения трубчатой балки, изображенной на рис. а), если заменить одно отверстие диаметром 200 мм – двумя, диаметром каждое по 100мм, расположенными, как показано на рис. б)?

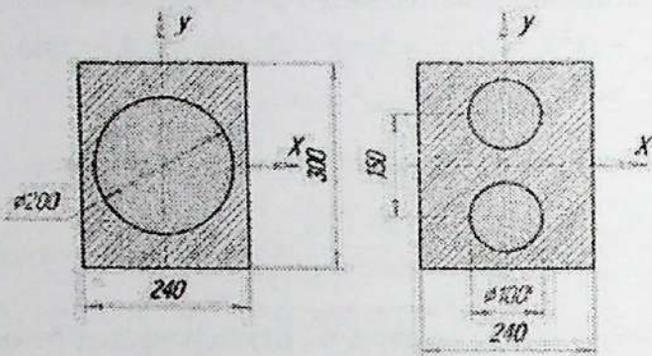


Рис. к задаче 99

Ответ: Площадь увеличится на 38,6 %, а момент инерции уменьшится на 2%.

Задача № 100

Определить момент инерции относительно центральной оси «у», сечения, изображенного на рисунке. Размеры показаны в мм.

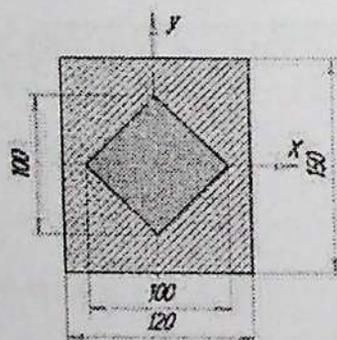


Рис. к задаче 100

Ответ: $J_x = 3167 \text{ см}^4$.

Задача № 101

Сечение балки состоит из двух швеллеров №33b, усиленных двумя листами 14x300 мм, приклепанных к полкам. Определить момент инерции сечения относительно центральной оси y с учетом ослабления его заклепочными отверстиями $d=23$ мм (см. рисунок) и оценить ослабление сечения (в процентах к моменту инерции неослабленного сечения).

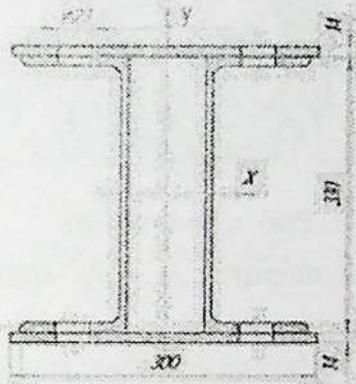


Рис. к задаче 101

Ответ: $J_x=35200 \text{ см}^4$; $\Delta J=16,5\%$.

Задача № 102

Поперечное сечение раскоса навесного плуга изготовлено из двух равнополочных уголков размером 63 x 63 x 5 (см. рис.). Определить моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c .

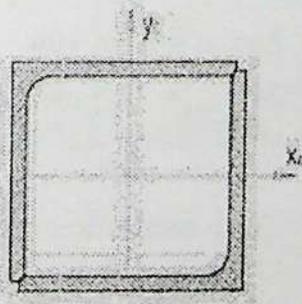


Рис. к задаче 102

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_c} = J_{y_c} = 70,5 \text{ см}^4$.

Задача № 103

Определить осевые и полярный моменты инерции полого сечения рамы картофелеуборочной машины (см. рис.), если $D = 96 \text{ мм}$, $d = 69,5 \text{ мм}$.

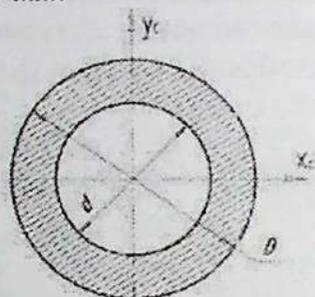


Рис. к задаче 103

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_c} = J_{y_c} = 108 \text{ см}^4$; $J_p = 216 \text{ см}^4$.

Задача № 104

Для прямоугольника со сторонами $b = 2 \text{ см}$, $h = 3 \text{ см}$ определить положение главных осей, проходящих через точку O , и вычислить главные моменты инерции.

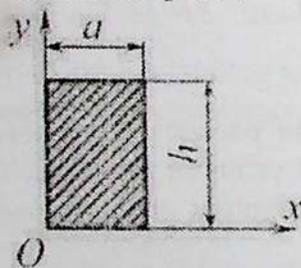


Рис. к задаче 104

Ответ: $\alpha_{\max} = -30^\circ 28'$ $I_{\max} = 23,3 \text{ см}^4$; $I_{\min} = 2,7 \text{ см}^4$.

6.2. Определение центра тяжести и моментов инерции сложных сечений, имеющих одну ось симметрии

Задача № 105

Найти моменты инерции полукруга относительно главных центральных осей инерции (см. рисунок).

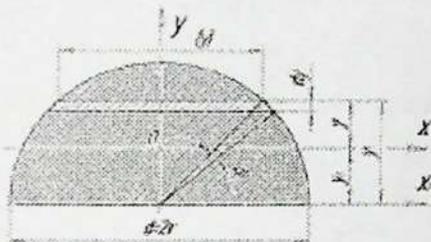


Рис. к задаче 105

Ответ:

$$y_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}; \quad J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{8} \left(1 - \frac{64}{9 \cdot \pi^2} \right) \approx 0,11 \cdot r^2; \quad J_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}.$$

Задача № 106

Определить координату y_c центра тяжести несимметричного двугавра (см. рис.).

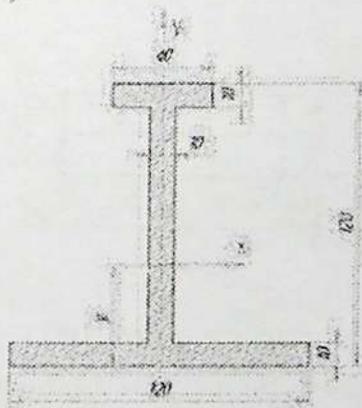


Рис. к задаче 106

Ответ. Координата $y_c = 43,1$ мм.

Задача № 107

Поперечное сечение стержня (см. рис.) состоит из двутавра №55 (ГОСТ 8239–72), швеллера №18 (ГОСТ 8240–72). Определить расстояние x_c от центра тяжести двутавра c_1 до центра тяжести c всего сечения.

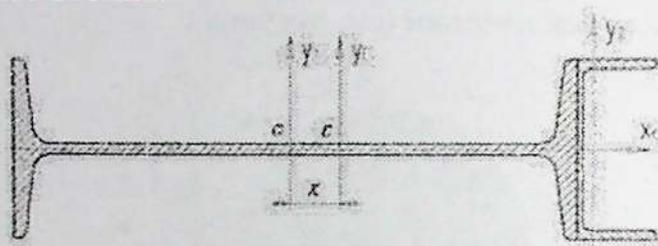


Рис. к задаче 107

Ответ. Искомое расстояние $x_c = 44$ мм.

Задача № 108

На рис. показано сечение поперечины прицепного устройства пропашного трактора. Определить моменты инерции сечения относительно центральных осей x_c и y_c .

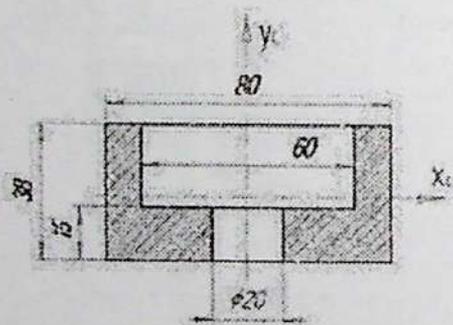


Рис. к задаче 108

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_c} = 14,7$ см⁴; $J_{y_c} = 119,6$ см⁴.

Задача № 109

Определить моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c сечения кронштейна растяжек пропашного трактора (см. рис.).

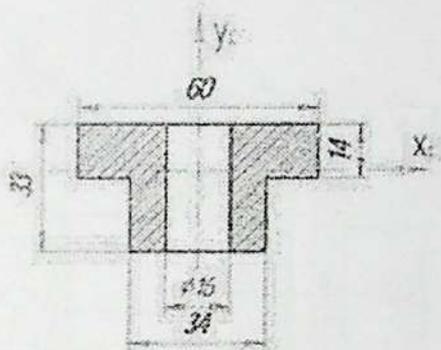


Рис. к задаче 109

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_c} = 8,0 \text{ см}^4$; $J_{y_c} = 30,3 \text{ см}^4$.

Задача № 110

Определить моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c сечения передней оси автомобиля, которое показано на рис.

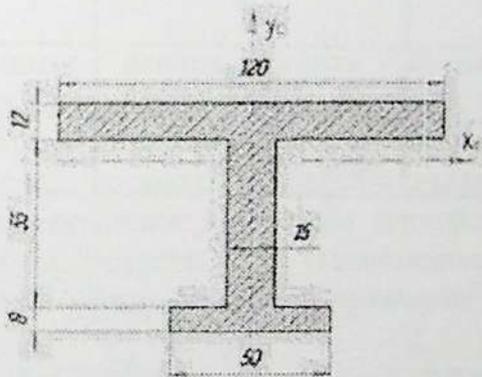


Рис. к задаче 110

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_c} = 198 \text{ см}^4$; $J_{y_c} = 183 \text{ см}^4$.

Задача № 111

Определить моменты инерции относительно центральных осей x_c и y_c двух различных сечений рамы трактора, показанных на рис. а, б.

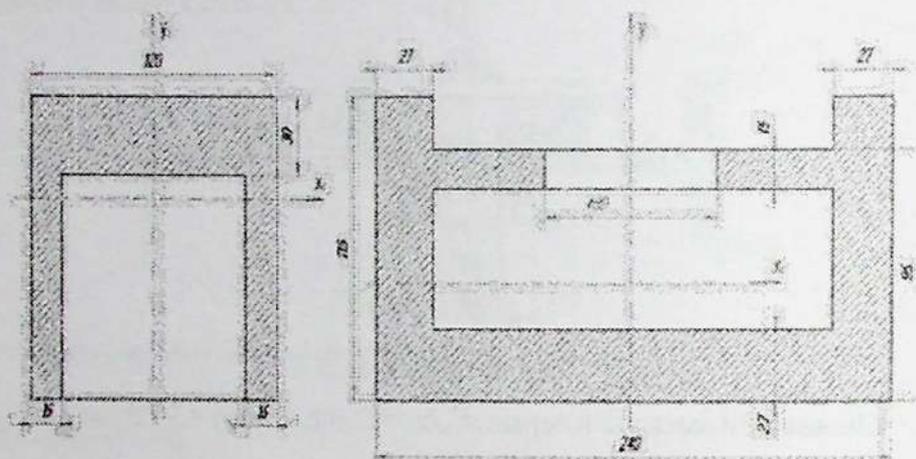


Рис. к задаче 111

Ответ.. Моменты инерции (в табл.).

Сечение	а	б
$J_{x_c}, \text{см}^4$	324	1604
$J_{y_c}, \text{см}^4$	932	9271

Задача № 112

Определить моменты инерции относительно центральных осей x_C и y_C сечения опорной поперечины рамы тракторного прицепа (см. рис.).

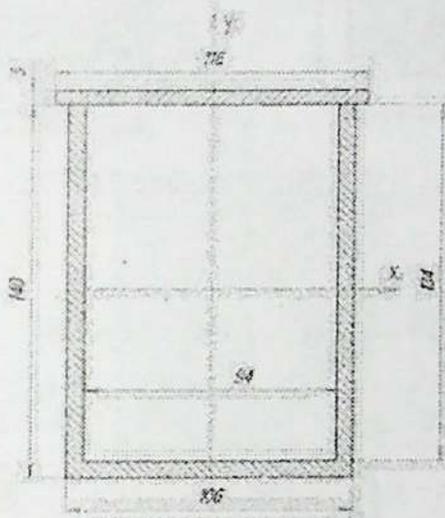


Рис. к задаче 112

Ответ. Моменты инерции: $J_{x_C} = 830 \text{ см}^4$; $J_{y_C} = 527 \text{ см}^4$.

Задача № 113

Найти координаты центра тяжести однородной пластинки (рис. 2.4). $a = 40 \text{ см}$; $b = 15 \text{ см}$; $c = 7 \text{ см}$; $d = 23 \text{ см}$; $e = 8 \text{ см}$; $f = 30 \text{ см}$.

Выберем систему координат yoz так, чтобы вся фигура располагалась в первой четверти. Разобьём заданную фигуру на простые – прямоугольники, вычислим площади этих фигур и координаты центров тяжести. Для вычисления координат центра тяжести заданной фигуры воспользуемся формулами:

$$y_{ц.т} = \frac{S_z}{F} = \frac{F \cdot y}{F \cdot E}; \quad z_{ц.т} = \frac{S_y}{F} = \frac{F \cdot z}{F \cdot E}$$

Все вычисления проведём в системе MathCAD.

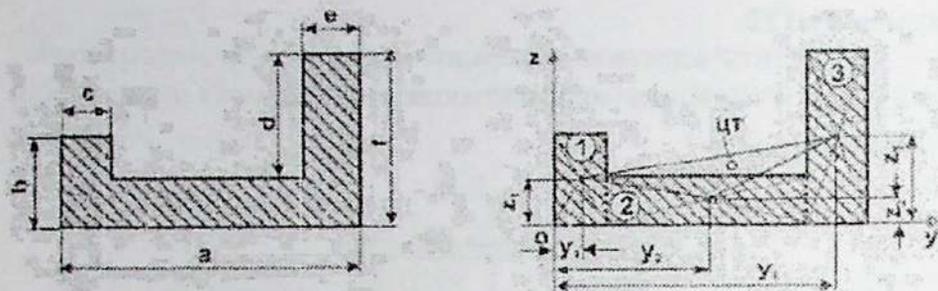


Рис. к задаче 113

Дано

$$a := 40 \quad b := 15 \quad c := 7 \quad d := 23 \quad e := 8 \quad f := 30$$

Решение

$$F := \begin{bmatrix} b \cdot c \\ (f - d) \cdot (a - c - e) \\ f \cdot e \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} \\ a - \frac{e}{2} \end{bmatrix} \quad z := \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{f - d}{2} \\ \frac{f}{2} \end{bmatrix} \quad E := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_{\text{ЦТ}} := \frac{F \cdot y}{F \cdot E} = 24.055$$

$$z_{\text{ЦТ}} := \frac{F \cdot z}{F \cdot E} = 9.615$$

Задача № 114

Определить главные моменты и главные радиусы инерции для сечения, представленного на рис. 2.16, $m = 20$ см. Решение. Сечение имеет вертикальную ось симметрии и состоит из двух простых фигур: прямоугольника, с осями симметрии которого совместим глобальную систему координат (y_1, z_1) , и круга радиуса $a/2$. Оси y_1, z_1 являются главными центральными осями инерции первой фигуры, оси y_2, z_2 являются главными центральными осями инерции второй фигуры. Ось симметрии сечения совпадает с главной центральной осью z_0 сечения. Вторая главная центральная ось y_0 перпендикулярна оси z_0 и должна проходить через центр тяжести сечения.

Координату z_c центра тяжести сечения найдем, воспользовавшись формулой

$$y_{цт} = \frac{S_z}{F} = \frac{F \cdot y}{F \cdot E}, \quad z_{цт} = \frac{S_x}{F} = \frac{F \cdot z}{F \cdot E}$$

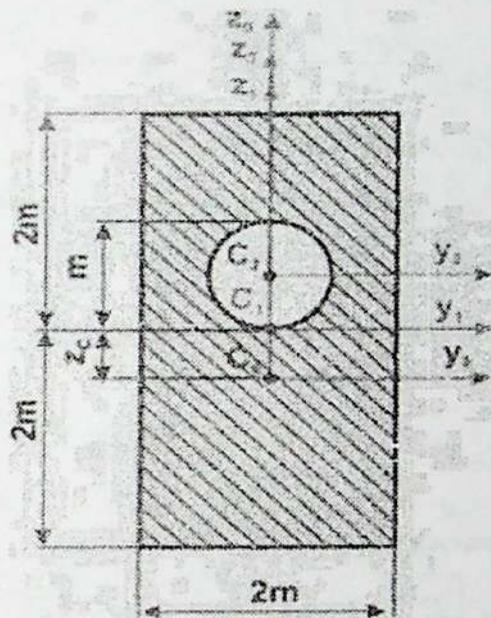


Рис. к задаче 114

Все вычисления будем проводить в системе MathCAD.

$$m := 20 \quad B := 2 \cdot m \quad H := 4 \cdot m \quad r := 0.5 \cdot m$$

$$z_1 := 0 \quad F_1 := B \cdot H \quad z_2 := 0.5 \cdot m \quad F_2 := -\pi \cdot r^2 \quad F_0 := F_1 + F_2$$

$$J_{y_1} := \frac{B \cdot H^3}{12} \quad J_{z_1} := \frac{B^3 \cdot H}{12} \quad J_{y_2} := \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad J_{z_2} := J_{y_2}$$

$$\text{Центр тяжести} \quad z_c := \frac{z_1 \cdot F_1 + z_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2} \quad z_c = -1.089$$

$$\text{Расстояние между осями} \quad b_1 := 0 \quad b_2 := 0$$

$$a_1 := z_1 - z_c \quad a_1 = 1.089 \quad a_2 := z_2 - z_c \quad a_2 = 11.089$$

Главные моменты инерции

$$J_{y_0} := \sum_{i=1}^2 \left[J_{y_i} + (a_i)^2 \cdot F_i \right] \quad J_{z_0} := \sum_{i=1}^2 \left[J_{z_i} + (b_i)^2 \cdot F_i \right]$$

$$J_{y_0} = 1.654 \times 10^6$$

$$J_{z_0} = 14.188 \times 10^5$$

Главные радиусы инерции

$$i_{y_0} := \sqrt{\frac{J_{y_0}}{F_0}} \quad i_{y_0} = 24.015 \quad i_{z_0} := \sqrt{\frac{J_{z_0}}{F_0}} \quad i_{z_0} = 12.047$$

Задача № 115

Для составного несимметричного сечения из прокатных профилей:

- найти координаты центра тяжести фигуры;
- определить положение главных центральных осей инерции;
- определить величину главных моментов и главных радиусов инерции.

Форма сечения представлена на рис. Размеры сечений взять из сортамента прокатной стали.

Пусть швеллер №20 будет первой фигурой, уголок 100x100x10 мм – второй, а лист 200x10 мм будет третьей простой фигурой; $s = 10$ мм. Так как размеры простых сечений 1 и 2 будем брать из сортамента прокатной стали, то в расчетах единицами измерения геометрических величин будут см.

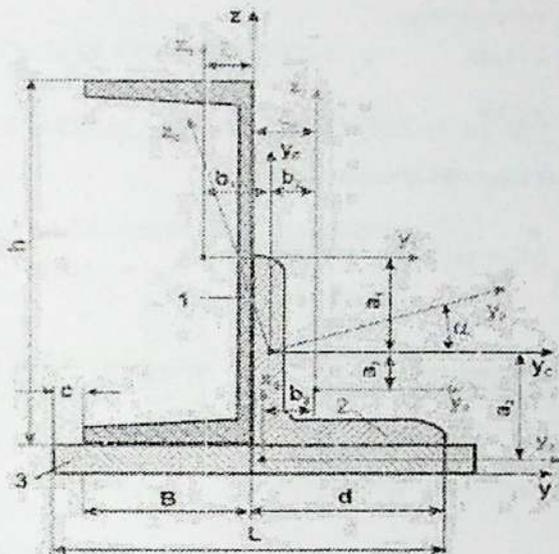


Рис. к задаче 115

Исходные данные

$$t := 1 \quad n := \text{rows}(F) \quad i := 1..n$$

Швеллер

$$b := 20 \quad B_0 := 7.6 \quad z_{0_1} := 2.07 \quad y_1 := -z_{0_1} = -2.07$$

$$z_1 := \frac{h}{2} + t = 11 \quad F_1 := 23.4 \quad J_{y_1} := 1520 \quad I_{z_1} := 113 \quad J_{yz_1} := 0$$

Уголок

$$d = 10 \quad z_{0_2} := 2.83 \quad y_2 := z_{0_2} \quad z_2 := z_{0_2} + t$$

$$F_2 := 19.2 \quad J_{y_2} := 179 \quad I_{z_2} := 179 \quad J_{yz_{max}} := 284 \quad J_{yz_{min}} := 74.1$$

$$J_{yz_2} := \frac{J_{yz_{max}} - J_{yz_{min}}}{2} \cdot \sin(-2.45 \cdot \text{deg}) \quad J_{yz_2} = -104.95$$

$$s_x := 1 \quad t := 1$$

$$\text{Лист} \quad L_1 := 20 \quad s_y := 1 \quad J_{y_3} := \frac{L \cdot t^3}{12} = 1.667 \quad I_{z_3} := \frac{L^3 \cdot t}{12} = 668.667$$

$$J_{yz_3} := 0 \quad F_3 := L \cdot t = 20 \quad y_3 := \frac{L}{2} - (B + c) = 1.4 \quad z_3 := \frac{t}{2} = 0.5$$

Центр тяжести сечения

$$S_x := F_1 + F_2 + F_3 = 62.6$$

$$y_c := \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{S} = 0.542 \quad z_c := \frac{z_1 \cdot F_1 + z_2 \cdot F_2 + z_3 \cdot F_3}{S} = 5.446$$

Расстояние между осями

$$b_1 = y_1 - y_c = 2.612 \quad b_2 = y_2 - y_c = 2.288 \quad b_3 = y_3 - y_c = 0.858$$
$$a_1 = z_1 - z_c = 5.554 \quad a_2 = z_2 - z_c = -1.616 \quad a_3 = z_3 - z_c = -4.946$$

Центральные моменты инерции сечения

$$J_{yC} = \sum_{i=1}^3 \left[J_{y_i} + (a_i)^2 \cdot F_i \right] = 2.962 \cdot 10^3 \quad J_{yC} = 2.962 \cdot 10^3$$

$$J_{zC} = \sum_{i=1}^3 \left[J_{z_i} + (b_i)^2 \cdot F_i \right] = 1.254 \times 10^3 \quad J_{zC} = 1.254 \cdot 10^3$$

$$J_{yzC} = \sum_{i=1}^3 \left[J_{yz_i} + (a_i \cdot b_i) \cdot F_i \right] = -500.279 \quad J_{yzC} = -500.279$$

Ориентация главных осей

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot J_{yzC}}{J_{zC} - J_{yC}} \right) \cdot \frac{rad}{deg} = 17.393 \quad \alpha = 17.393$$

Ориентация главных осей

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \cdot J_{yzC}}{J_{zC} - J_{yC}} \right) \cdot \frac{rad}{deg} = 17.393 \quad \alpha = 17.393$$

Главные центральные моменты инерции сечения:

$$J_{\max} = \frac{J_{yC} + J_{zC}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{yC} - J_{zC}}{2} \right)^2 + (J_{yzC})^2} = 3.15 \times 10^3$$

$$J_{\min} = \frac{J_{yC} + J_{zC}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{yC} - J_{zC}}{2} \right)^2 + (J_{yzC})^2} = 1.046 \times 10^3$$

Проверка

$$(J_{\max} + J_{\min}) - (J_{yC} + J_{zC}) = 0$$

Главные радиусы инерции:

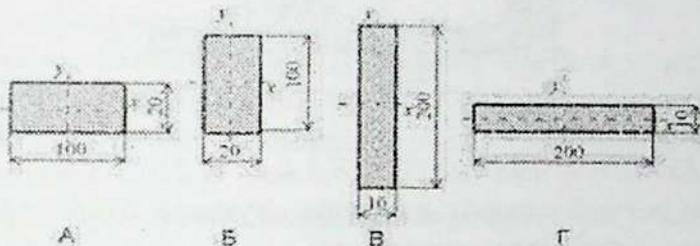
$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{S}} = 7.094 \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} = 4.087$$

Тесты для самопроверки

Геометрические характеристики плоских сечений

Вариант 1

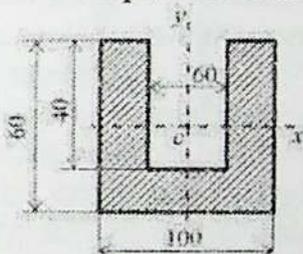
1. В каком случае значение I_x минимально?



Варианты ответов:

1) А, 2) Б, 3) В, 4) Г.

2. Вычислить I_y – момент инерции сечения относительно оси y .

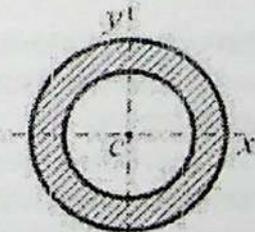


Варианты ответов:

1) $428 \cdot 104 \text{ мм}^4$, 2) $572 \cdot 104 \text{ мм}^4$,

3) $214 \cdot 104 \text{ мм}^4$, 4) $286 \cdot 104 \text{ мм}^4$.

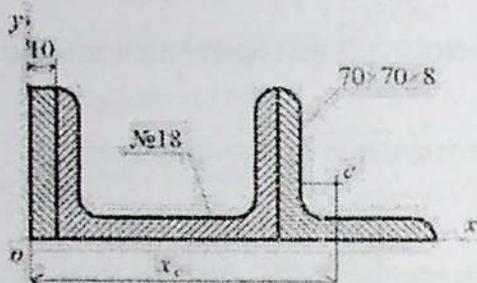
3. Определить полярный момент инерции кольца, если осевой момент инерции равен $I_x = 6 \text{ см}^4$.



Варианты ответов:

1) 3 см^4 , 2) 6 см^4 , 3) 12 см^4 , 4) 18 см^4 .

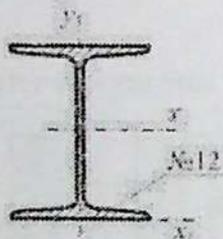
4. Определить координату x_c центра тяжести равнополочного уголка.



Варианты ответов:

1) 260 мм; 2) 198 мм; 3) 158,2 мм; 4) 210,2 мм.

5. Найти осевой момент инерции двутавра относительно оси, проходящей через основание.



Варианты ответов:

1) 350 см^4 ; 2) $879,2 \text{ см}^4$; 3) $438,2 \text{ см}^4$; 4) $1317,2 \text{ см}^4$.



Вопросы для самоконтроля

- Что называют статическим моментом сечения относительно оси?
- Какова размерность статического момента?
- Чему равен статический момент площади сечения относительно центральной оси?
- Запишите формулы, по которым определяют координаты центра тяжести сложного сечения.
- Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции сечения?
- Какова размерность моментов инерции?

- Какая существует связь между осевыми и полярным моментами инерции?
- Назовите моменты инерции, которые всегда положительные.
- Относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю?
- Запишите формулы моментов инерции прямоугольника, равнобедренного треугольника относительно главных центральных осей.
- Чему равны осевые моменты инерции круга и кольца относительно центральной оси?
- Какие оси называют главными, а какие - главными центральными?
- В каком случае осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения?
- Запишите формулы, связывающие геометрические характеристики для параллельных осей.
- Как определяют положение главных осей?
- Запишите формулы для осевого и центробежного моментов инерции при повороте осей.
- По каким формулам определяются моменты инерции площадей при параллельном переносе осей?
- По каким формулам определяются осевые и центробежный моменты инерции сечения сложной формы?
- Как определяются величины главных центральных моментов инерции для сечений, не имеющих оси симметрии?
- Что называется статическим моментом площади относительно оси?
- Относительно каких осей статический момент площади равен нулю?
- Как определяется статический момент площади сложной формы относительно оси?
- Напишите формулы для определения координат центра тяжести сечения сложной формы.
- Что называется осевым, центробежным и полярным моментами инерции сечения?
- Относительно каких осей центробежный момент инерции сечения равен нулю?

Глава 7. Изгиб

Если из шести внутренних усилий только один $M_x \neq 0$, то изгиб называется чистым.

Брус, работающий на изгиб, называется балкой.

При изгибе часть волокон балки испытывает растяжение, а другая часть – сжатие, но деформация балки по высоте сечения непрерывна, следовательно, есть слой, разделяющий зону растянутых от зоны сжатых волокон, то есть недеформируемый слой. Он называется нейтральным. Это подтверждается формулой

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y,$$

где y – расстояние от нейтральной линии до точки, в которой определяется напряжение.

При $U = \max$ получим условие прочности балки по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{J_x} \leq [\sigma]$$

1. Следует помнить, что $M_{x_{\max}}$ – это максимальный изгибающий момент, который берется с эпюры изгибающих моментов по одну сторону от нулевой линии независимо от знака!

Условие прочности балки по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^*}{J_x b} \leq [\tau]$$

При проверке балки на прочность по главным напряжениям используют третью или четвертую теории прочности, условия прочности по главным напряжениям выглядят следующим образом:



$$\sigma_{\max}^M = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\max}^F = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Определение перемещений при изгибе.

Основой расчета балки на жесткость является дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}, \text{ согласно которой}$$



$$\frac{dy}{dz} = \varphi = \frac{1}{EJ_x} \int M_x dz + C,$$

$$y = \frac{1}{EJ_x} \int dz \int M_x dz + Cz + D,$$

где φ – угол поворота сечения,

y – прогиб балки,

C и D – постоянные интегрирования, определяемые из условия закрепления балки.

Однако, определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии связано с трудностями определения постоянных интегрирования.

Метод начальных параметров

Метод начальных параметров позволяет определять перемещения при изгибе в балках с прямолинейной осью и постоянной жесткостью сечения.

$$EJ\varphi_K = EJ\varphi_0 + \sum M(z_K - l_M) + \sum F \frac{(z_K - l_F)^2}{2} + \sum q \frac{(z_K - l_q)^3}{6}.$$



$$EJy_K = EJy_0 + EJy_0 z_K + \sum M \frac{(z_K - l_M)^2}{2} + \sum F \frac{(z_K - l_F)^3}{6} + \sum q \frac{(z_K - l_q)^4}{24}.$$

Здесь $EJ\varphi_0$ и EJy_0 начальные параметры – угол поворота сечения – φ_0 и прогиб – y_0 – в начале отчета, увеличенные в EJ раз. z_K – расстояние от начала отсчета до точки K

l_M , l_F , l_q – расстояние от начала отсчета до точки приложения силового фактора.

Примечания:

1. Начало отсчета координаты Z необходимо брать только на левом конце балки.

2. Если распределенная нагрузка не доходит до точки K , то ее нужно догрузить и добавить столько же с обратным знаком.

3. В уравнение входят все силовые факторы от начала отсчета до точки K , с учетом правила знаков для изгибающего момента.

Чтобы определить перемещения методом начальных параметров надо:

4. Определить опорные реакции.

5. Выбрать начало отсчета

6. Определить начальные параметры из условий закрепления.

7. Подсчитать перемещения линейные или угловые, пользуясь формулами методов начальных параметров.

Метод Мора

Метод Мора является наиболее общим (универсальным) методом определения любых перемещений в любых случаях нагружения и в любых стержнях, а также в стержнях с криволинейной осью.

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int M_F \cdot \bar{M} dz$$

M_F – уравнение изгибающего момента от нагрузки.

\bar{M} – уравнение изгибающего момента от единичной нагрузки.

Чтобы определить перемещения по методу Мора надо:

1. Составить уравнения изгибающего момента от нагрузки на каждом участке.

2. В исследуемой точке K приложить единичную нагрузку: $F=1$ или $M=1$.

3. Составить уравнения изгибающего момента только от единичной нагрузки.

4. Составить интеграл Мора и определить прогиб в точке K или угол поворота.

Примечания:

1. Интегрирование проводить в пределах участка.

2. Знак «+», полученный при расчетах означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки и наоборот.

Вычисление интеграла Мора по способу Верещагина.

$$\delta = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}$$

где ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов от нагрузки;

M_{Ci} – ордината единичной эпюры, взятая под центром тяжести площади эпюры изгибающих моментов.

Чтобы определить перемещения по способу Верещагина надо:

1. Построить эпюру изгибающих моментов от нагрузки (грузовую эпюру);

2. В исследуемой точке приложить единичную нагрузку $F = 1$ или $M = 1$;

3. Построить эпюру изгибающих моментов только от единичной нагрузки (единичную эпюру);

4. Перемножить эпюры по участкам.

Примечания:

1. Ордината M_{Ci} всегда берется с линейной эпюры;

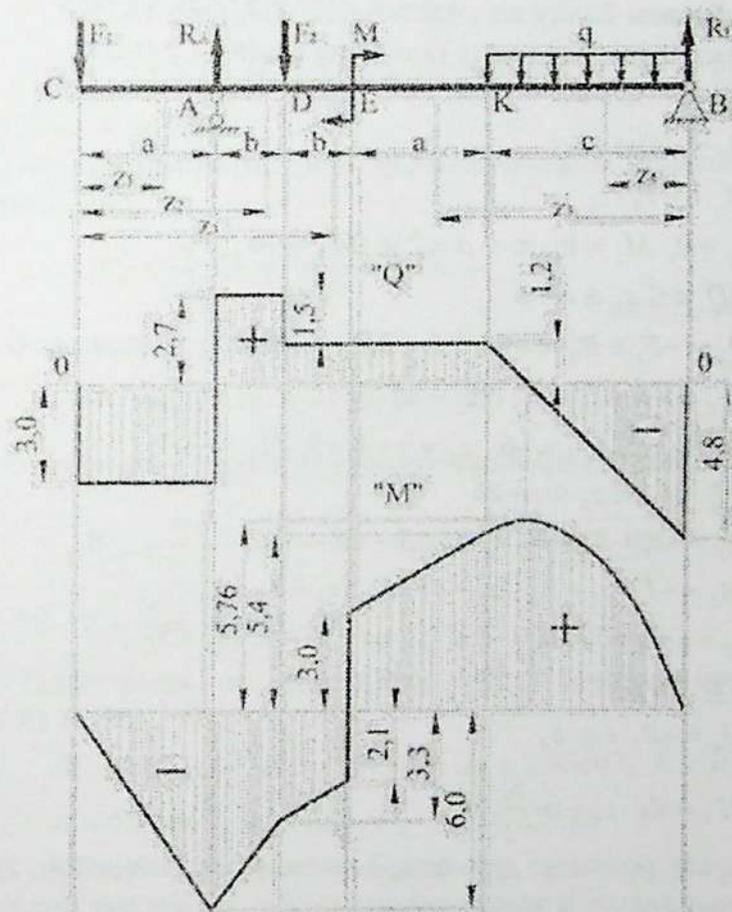
2. Если обе эпюры линейные, то перемножение можно вести в обратном порядке.

3. Знак «+» означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки.

7.1. Построение эюр Q и M , определение опасного сечения балки

Задача № 116

Построить эюры поперечной силы Q и изгибающего момента M для балки, показанной на рисунке, а также определить размеры круглого, прямоугольного ($h/b = 2$) и двутаврового сечения. Проверить прочность двутавра по главным напряжениям, если: $F_1 = 3 \text{ кН}$, $F_2 = 1,5 \text{ кН}$, $M = 5,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 1 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$, $[c] = 150 \text{ МПа} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $[m] = 100 \text{ МПа}$.



1) Определяем опорные реакции

$$\sum M_A = 0; -F_1 \cdot a + F_2 \cdot b + M - q \cdot c(2b + a + c/2) - R_B(2b + a + c) = 0$$

$$R_B = \frac{-F_1 \cdot a + F_2 \cdot b + M - q \cdot c(2b + a + c/2)}{2b + a + c} = \frac{-3 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 + 5,1 - 2 \cdot 3(2 + 2 + 1,5)}{2 + 2 + 3} = 4,8 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; -F_1 \cdot (2a + 2b + c) - F_2 \cdot (a + b + c) + M - q \cdot c \cdot c/2 + R_A(2b + a + c) = 0$$

$$R_A = \frac{-F_1 \cdot (2a + 2b + c) + F_2 \cdot (a + b + c) - M - q \cdot c^2/2}{2b + a + c} = \frac{3 \cdot (4 + 2 + 3) + 1,5 \cdot (2 + 1 + 3) + 5,1 - 2 \cdot 3^2/2}{2 + 2 + 3} = 5,7 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum Y = 0; -F_1 - F_2 - q \cdot c + R_A + R_B = 0$

$$-3 - 1,5 - 2 \cdot 3 + 5,7 + 4,8 = 0 \text{ — реакции найдены верно.}$$

1. Разбиваем балку на участки *CA*, *AD*, *DE*, *EK*, *K5*.

2. Определяем значения *Q* и *M* на каждом участке.

CA $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q_1 = -F_1 = -3;$$

$$M_1 = -F_1 \cdot z_1$$

$$z_1 = 0, M_1 = 0; \quad z_1 = a = 2 \text{ м}, M_1 = -6;$$

AD $a \leq z_2 \leq a + b$

$$Q_2 = -F_1 + R_A = -3 + 5,7 = 2,7;$$

$$M_2 = -F_1 \cdot z_2 + R_A \cdot (z_2 - a)$$

$$z_2 = a = 2, M_2 = -6; \quad z_2 = a + b = 3, M_2 = -3,3;$$

DE $a + b \leq z_2 \leq a + 2b$

$$Q_3 = -F_1 + R_A - F_2 = -3 + 5,7 - 4,8 = -2,1;$$

$$M_3 = -F_1 \cdot z_3 + R_A \cdot (z_3 - a) - F_2 \cdot (z_3 - a - b)$$

$$z_3 = a + b = 3, M_3 = -3,3; \quad z_3 = a + 2b = 4, M_3 = 5,4;$$

KB $0 \leq z_4 \leq c$

$$Q_4 = -R_B + q \cdot z_4$$

$$M_4 = R_B \cdot z_4 - q \cdot \frac{z_4^2}{2}$$

$$z_4 = 0, Q_4 = -4,3; \quad M_4 = 0; \quad z_4 = c = 3 \text{ м}, Q_4 = 1,2, M_4 = 5,4;$$

Найдем максимум изгибающего момента на участке *KB*.

Приравняем уравнение *Q* на этом участке к нулю и выразим координату z_{\max} , при которой $Q = 0$, а момент имеет макси-

мальное значение. Далее подставим z_{max} в уравнение момента на этом участке и найдем M_{max} .

$$-R_B + q \cdot z_{max} = 0 \Rightarrow z_{max} = \frac{R_B}{q} = \frac{4,8}{2} = 2,4 \text{ м}$$

$$M_{max} = R_B \cdot z_{max} - q \cdot \frac{z_{max}^2}{2} = 4,8 \cdot 2,4 - 2 \cdot \frac{2,4^2}{2} = 5,76 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\underline{EK} \quad c \leq z_4 \leq c + a$$

$$Q_5 = -R_B + q \cdot c = 4,8 - 2 \cdot 3 = 1,2;$$

$$M_5 = R_B \cdot z_{54} - q \cdot c \left(z_5 - \frac{c}{2} \right)$$

$$z_5 = c = 3, \quad M_5 = 5,4; \quad z_5 = c + a = 5 \text{ м}, \quad M_5 = 3 \text{ — У}$$

4. Строим эпюры

5. Определяем из условия прочности необходимый момент сопротивления

$$W_y = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{6 \cdot 100}{15} = 40 \text{ см}^3$$

6) Определяем размеры круглого сечения

$$W_{y1} = 0,1d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{10 \cdot W_y} = \sqrt[3]{10 \cdot 40} = 7,4 \text{ см}$$

7) Определяем размеры прямоугольного сечения

$$W_{x2} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12} \Rightarrow h = \sqrt[3]{12 \cdot W_y} = \sqrt[3]{12 \cdot 40} = 7,8 \text{ см}$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{7,8}{2} = 3,9 \text{ см}$$

8) Подбираем по сортаменту двутавровую балку №10 (ГОСТ 8239-89)

$$W_y = 39,7 \text{ см}^3, \quad S_y = 23 \text{ см}^3, \quad J_y = 198 \text{ см}^4, \quad h = 100 \text{ мм},$$

$$b = 55 \text{ мм}, \quad d = 4,5 \text{ мм}, \quad t = 7,2 \text{ мм}$$

Для проверки прочности балки по главным напряжениям, необходимо построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении. Так как величина главных напряжений зависит и от нормальных и от касательных напряжений, то проверку прочности следует произвести в том сечении балки, где M и

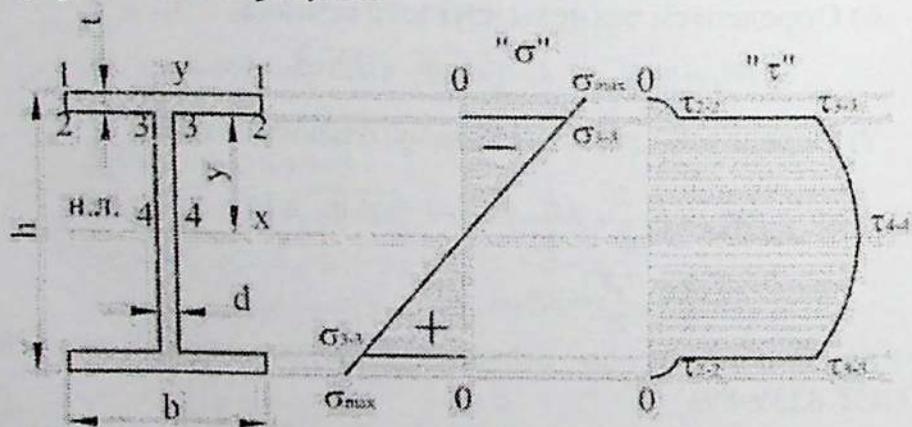
Q достаточно велики. На опоре B поперечная сила Q имеет максимальное значение, однако здесь $M = 0$. Поэтому считаем опасным сечение на опоре A , где изгибающий момент максимален и поперечная сила имеет сравнительно большое значение.

Нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, подчиняются линейному закону: $\sigma = \frac{M}{J_y} \cdot y$,

где y – координата точки сечения (рис. 24). при $y = 0$, $\sigma = 0$;
при

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_y} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_y} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{W_y} = \frac{6 \cdot 100}{39,7} = 151,1 \text{ МПа}$$

Закон изменения касательных напряжений определяются законом изменением статического момента S_y *площади, который, в свою очередь изменяется по высоте сечения по параболическому закону. Вычислив значение для характерных точек сечения, построим эпюру касательных напряжений. При вычислении значений τ воспользуемся обозначениями размеров сечения, принятыми на рисунке.



$$\tau_{(2-2)} = \frac{Q_{\max} S_{y(2-2)}^*}{J_y \cdot b} ;$$

$$S_{y(2-2)}^* = S_{y(3-3)}^* = \frac{b \cdot t}{2} \cdot (h - t) = \frac{5,5 \cdot 0,72}{2} \cdot (10 - 0,72) = 18,4 \text{ см}^3$$

$$\tau_{(2-2)} = \frac{Q_{\max} S_{y(2-2)}^*}{J_y \cdot b} = \frac{3 \cdot 18,4}{198 \cdot 5,5} = 0,05 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{(3-3)} = \frac{Q_{\max} S_{y(3-3)}^*}{J_y \cdot b} = \frac{3 \cdot 18,4}{198 \cdot 0,45} = 0,62 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{(4-4)} = \frac{Q_{\max} S_{y \max}^*}{J_y \cdot d} \quad S_{y \max} = 23 \text{ см}^3$$

$$\tau_{(4-4)} = \frac{Q_{\max} S_{y \max}^*}{J_y \cdot d} = \frac{3 \cdot 23}{198 \cdot 0,45} = 0,77 \text{ кН/см}^2$$

Как видно из эпюр, опасным в сечении является слой 3–3, где нормальные и касательные напряжения имеют значения близкие к максимальным, в то время как в слое 1–1, где $\sigma = \sigma_{\max}$, $\tau = 0$, а в слое 4–4, где $\tau = \tau_{\max}$, $\sigma = 0$.

$$\sigma_{(3-3)} = \frac{M_{\max}}{J_y} y_{(3-3)} = \frac{M_{\max}}{J_y} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{6 \cdot 100}{198} \left(\frac{10}{2} - 0,72 \right) = 13 \text{ кН/см}^2$$

Определяем главные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{гла}}^{\text{III}} = \sqrt{13^2 + 4 \cdot 0,62^2} = 13,1 \text{ кН/см}^2$$

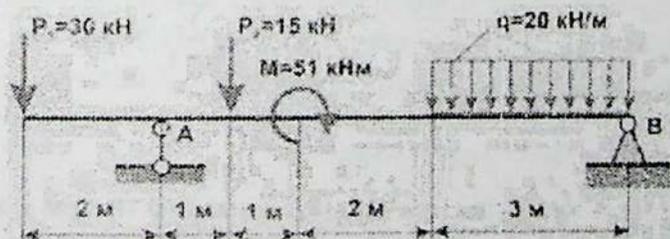
$$\sigma_{\text{гла}}^{\text{III}} < [\sigma]$$

– условие прочности для слоя 3–3 выполняется.

Задача № 117

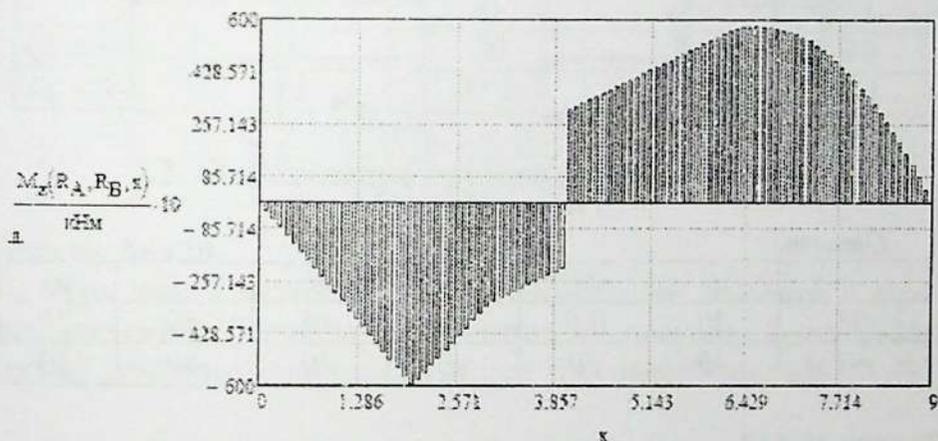
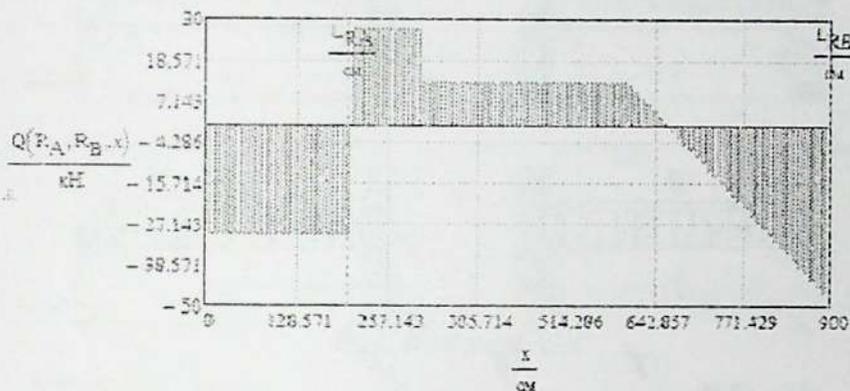
Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M для балки, показанной на рисунке, если:

$$F_1 = 3 \text{ кН}, F_2 = 1,5 \text{ кН}, M = 5,1 \text{ кН}\cdot\text{м}, q = 2 \text{ кН/м},$$



Определение реакций опор и построение эпюр в «Mathcad»

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A = 57 \text{ кН} \quad R_B = 48 \text{ кН}$$



Задача № 118

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, заземленных одним концом и нагруженных, как показано на рисунке. Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины поперечных сил и изгибающих моментов, если $F=20 \text{ кН}$, $q=20 \text{ кН/м}$, $M_0 = 40 \text{ кН/м}$ и $l = 2 \text{ м}$.

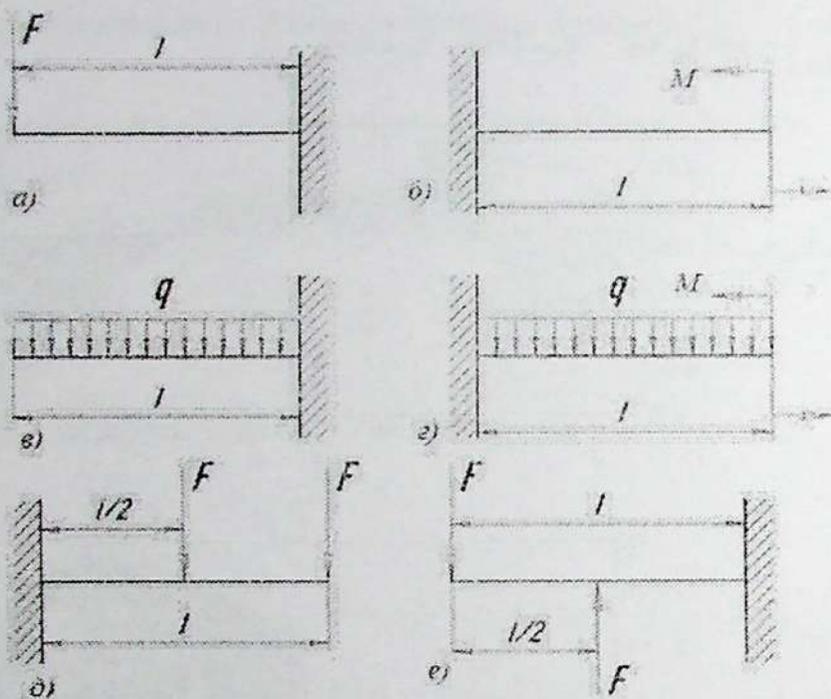


Рис. к задаче 118

Ответ:

	а)	б)	в)	г)	д)	е)
$Q, \text{кН}$	20	0,0	40	40	40	20
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	40	40	40	20	60	20

Задача № 119

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок на двух опорах, загруженных, как показано на рисунке. Найти $\max Q$ и $\max M$ при следующих данных: $F=60 \text{ кН}$, $q=20 \text{ кН/м}$, $M_0=60 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $l=3 \text{ м}$.

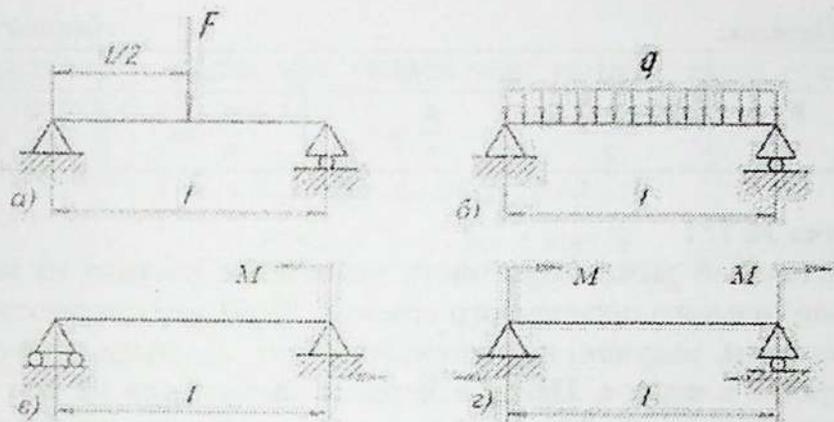


Рис. к задаче 119

Ответ:

	а)	б)	в)	г)
$Q, \text{кН}$	30	30	20	40
$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	45	22,5	60	60

7.2. Определение грузоподъемности балки

Задача № 120

При каком значении силы F изгибающие моменты в опорных сечениях балок, изображенных на рисунке, будут равны нулю? Построить эпюры Q и M при этих значениях сил.

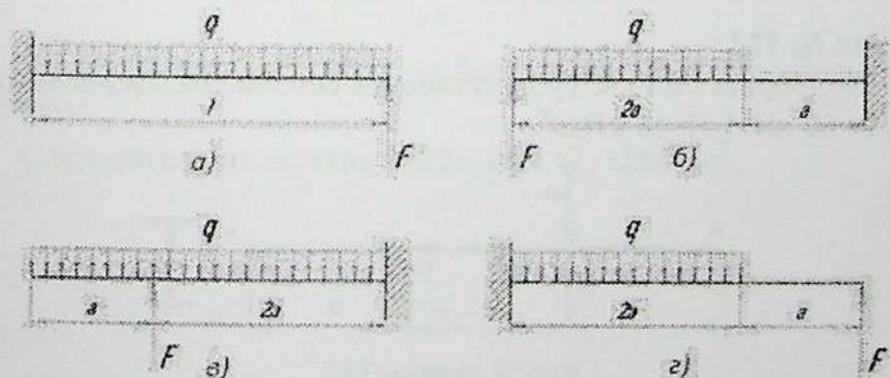


Рис. к задаче 120

Ответ:

	a)	б)	в)	г)
F	$\frac{q \cdot \ell}{2}$	$\frac{4}{3} \cdot qa$	$\frac{4}{9} \cdot qa$	$\frac{2}{3} \cdot qa$

Задача № 121

Стальной рычаг тормозного устройства состоит из штанги прямоугольного поперечного сечения 20×60 мм, опирающейся в точке B (см. рисунок) на шарнирный болт, пропущенный сквозь отверстие в штанге. Центр отверстия расположен на оси штанги; диаметр его $d = 30$ мм. Найти, какие силы можно безопасно приложить к концам рычага при допускаемом напряжении $[\sigma] = 140$ МПа, и при учете ослабления сечения болтовым отверстием.

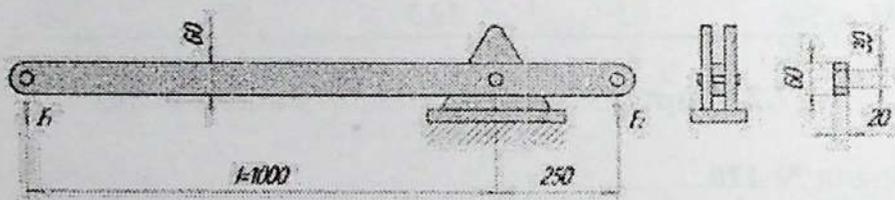


Рис. к задаче 121

Ответ: $F_1 = 1470$ Н; $F_2 = 5880$ Н.

7.3. Подбор безопасных размеров сечения

Задача № 122

Подобрать по ГОСТу двутавровое сечение балки пролетом 6 м, $P = 60$ кН, $[\sigma] = 16$ кН/м².

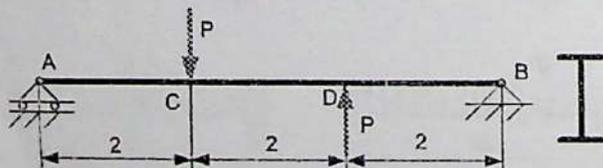


Рис. к задаче 122

Решение:

Составляем уравнение равновесия, момент силы относительно точки А и точки В:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Rightarrow -R_B \cdot 6 + P \cdot 2 - P \cdot 4 = 0; \\ R_B &= \frac{-P \cdot 4 + P \cdot 2}{6} = \frac{-60 \cdot 4 + 60 \cdot 2}{6} = -20 \text{ кН} \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow R_A \cdot 6 + P \cdot 2 - P \cdot 4 = 0; \\ R_A &= \frac{P \cdot 4 - P \cdot 2}{6} = \frac{60 \cdot 4 - 60 \cdot 2}{6} = 20 \text{ кН}\end{aligned}$$

Построение эпюр:

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$,

2 участок $2 \leq x_2 \leq 4$

3 участок $0 \leq x_3 \leq 2$

$$\begin{aligned}Q_1 &= R_A & Q_2 &= R_A - P & Q_3 &= R_B \\ M_1 &= R_A \cdot x_1 & M_2 &= R_A \cdot x_2 - P \cdot (x_2 - 2) & M_3 &= R_B \cdot x_3\end{aligned}$$

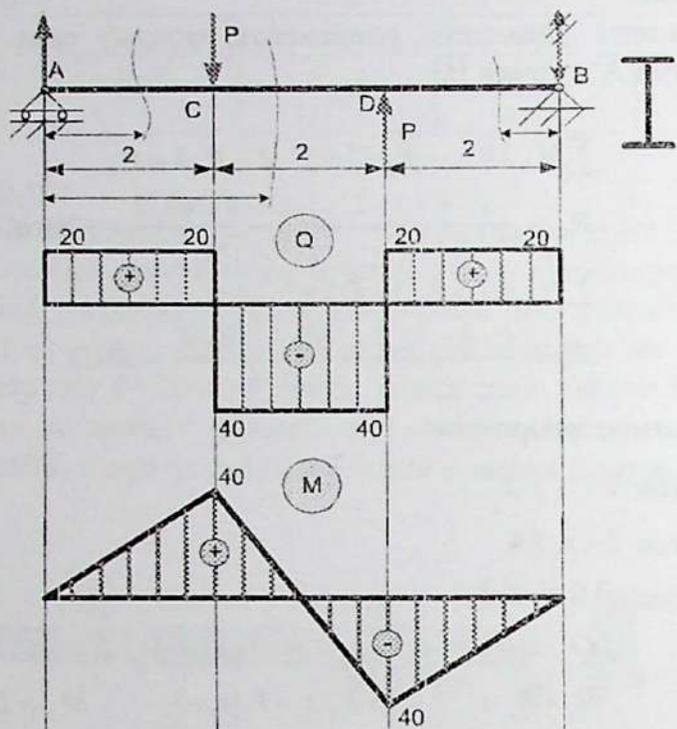
Подбор сечения:

Условие прочности при изгибе:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M}{W_y} \leq [\sigma] \\ W_y &\geq \frac{M}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 100}{16} = 250 \text{ см}^3\end{aligned}$$

Из сортамента двутавровых балок гост 8239-72 подбираем сечение.

Следовательно двутавр №22а, при $W_y = 254 \text{ см}^3$.



Ответ: двутавр №22а.

Задача № 123

Для двухопорных балок, изображенных на рисунке, построить эпюры поперечных, сил и изгибающих моментов и подобрать сечения их. Допускаемые напряжения принять: для прокатных профилей $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, для квадратных и круглых (сосна) $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$. Длины участков балок показаны в метрах.

№	Схемы балок и нагрузок	Ответ:		
		Q кН	M кН·м	Разме- ры се- чений
а)		80	100	№30б

б)		30	70	№27a
в)		30	30	№24a
г)		40	80	№27b
д)		20	50	№22b
е)		23,3	33,3	$\alpha=16\text{см}$
ж)		60	90	№24a
з)		40	20	$d=22\text{см}$
и)		40	20	8x24
к)		25	31,2	№18

Рис. к задаче 123

Задача № 124

Подобрать сечение балки двутаврового профиля и произвести полную проверку прочности при следующих данных (см. рисунок):

$$F = 200 \text{ кН}; a = 0,3 \text{ м}; l = 3,0 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 140 \text{ МПа}; [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

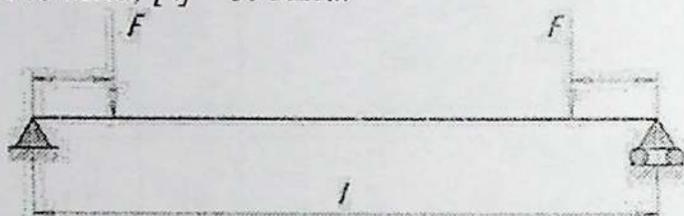


Рис. к задаче 124

Ответ: 27 б.

Задача № 125

Балка пролетом $l = 6 \text{ м}$, свободно лежащая на двух опорах, нагружена четырьмя одинаковыми симметрично расположенными силами $F = 140 \text{ кН}$ (см. рисунок).

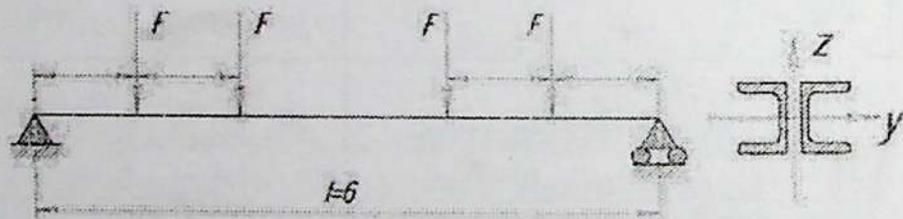


Рис. к задаче 125

Подобрать сечение балки из двух швеллеров, удовлетворяющее условиям прочности по нормальным касательным и главным напряжениям, если расстояние между силами $a = 0,5 \text{ м}$, а допускаемые напряжения приняты $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Воспользоваться 3-й теорией прочности.

Ответ: 2 № 36а.

7.4. Определение нормальных напряжений при плоском изгибе прямого стержня

Задача № 126

При работе строгального станка на резец передается нагрузка $F=2,75 \text{ кН}$, вылет резца $h=70 \text{ мм}$, поперечное сечение прямоугольное $20 \times 15 \text{ мм}$ (см. рис.).

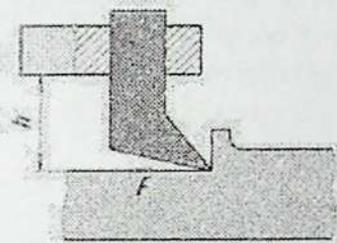


Рис. к задаче 126

Проверить прочность стержня резца, если предел текучести $\sigma_m = 600 \text{ МПа}$, а коэффициент запаса прочности $n=3$.

Ответ: Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = 191,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Задача № 127

Гаечный ключ нагружен усилием рабочего $F=0,25 \text{ кН}$. Проверить прочность в опасном сечении I-I (прямоугольное с размерами $18 \times 5 \text{ мм}$), если $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ (см. рис.).

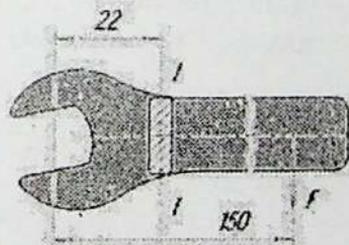


Рис. к задаче 127

Ответ: Напряжение $\sigma_{\max} = 118,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 120 \text{ МПа}$.

Задача № 128

Определить максимальные напряжения в рессоре автомобиля при торможении (см. рис., а), если реакция колеса $G_k = 10 \text{ кН}$, тормозное усилие $T_k = 8 \text{ кН}$, расстояние до точки крепления пальца рессоры $h = 580 \text{ мм}$. Размеры рессоры: длина $l_1 = l_2 = 550 \text{ мм}$, число листов 13, поперечное сечение всех листов одинаково $65 \times 6 \text{ мм}$, ширина накладки $c = 120 \text{ мм}$. Расчетная схема приведена на рис., б. Момент сопротивления сечения рессоры принимают равным сумме моментов сопротивления листов. Опасное сечение I-I по концу накладки.

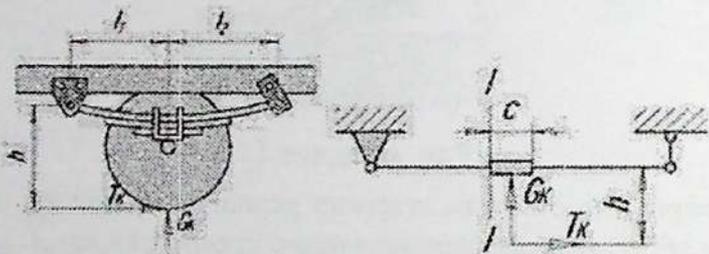


Рис. к задаче 128

Ответ: Максимальное напряжение $\sigma_{\max} = 891 \text{ МПа}$.

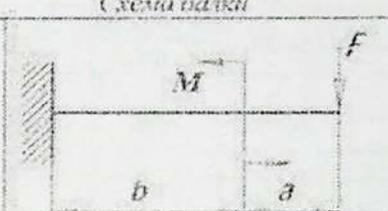
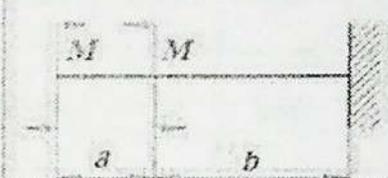
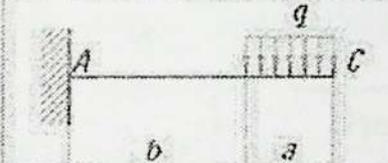
7.5. Определение перемещений при изгибе

Задача № 129

Балка постоянного сечения ABC зашкреплена одним концом и нагружена, как указано ниже на схемах. Определить прогибы и углы поворота в сечениях B и C . методом начальных параметров если:

$$F = 20 \text{ кН}; M_0 = 40 \text{ кНм}; q = 20 \text{ кН/м}; b = 3 \text{ м}; a = 2 \text{ м};$$

$$E = 210^5 \text{ МПа}; J = 4800^4; l = a + b = 5 .$$

	Схема балки	Отвст:
a		$\varphi_B = -0.00096$ $\varphi_C = -0.00163$ $\gamma_B = -1.85c$ $\gamma_C = -5.3$
b		$\varphi_B = 0$ $\varphi_C = -0.0083$ $\gamma_B = 0$ $\gamma_C = -0.83$
в		$\varphi_B = -0.03125$ $\varphi_C = -0.034$ $\gamma_B = -5.6c$ $\gamma_C = -12.3$

Задача № 130

Определить прогибы в точках обозначенных буквой А, а также угол поворота сечений, обозначенных буквой В, если $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

	Схема балки	J в $см^2$	Ответ:	
			y_1 в $см$	ϕ_k
а		1600	-1,6	-0,0107
б		4000	-1,237	-0,00769
в		2000	-0,5	+0,00333
г		2500	-0,96	+0,0096
д		3000	+1,611	+0,0164
е		3500	0,667	-0,0076
ж		2500	-0,333	-0,00133
з		2500	+0,5	-0,04

Задача № 131

Определить угол поворота конца левой консоли балки AB , находящейся под действием нагрузки, показанной на рисунке; применить способ Верещаги на; $E = 2 \cdot 10$ МПа; $J_x = 2000$ $см^4$.

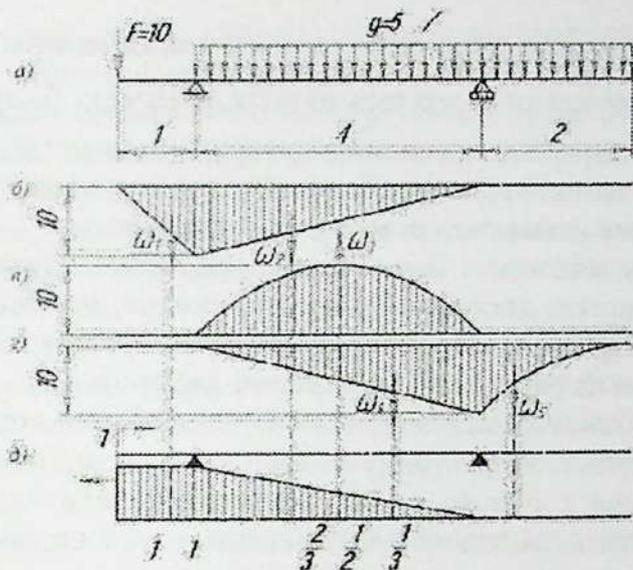


Рис. к задаче 131

Решение.

Применим принцип независимости действия сил, для чего построим отдельно эпюры: от силы F (эюра б), от нагрузки q в пределах пролета (в), от нагрузки q на консоли (г).

Подсчитаем площади этих эпюр:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 = 5 \text{ кНм}^2; & \omega_2 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ кНм}^2; \\ \omega_3 &= \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 4 = \frac{80}{3} \text{ кНм}^2; & \omega_4 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 \text{ кНм}^2; \\ \omega_5 &= \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2 = \frac{20}{3} \text{ кНм}^2; \end{aligned}$$

Приложим к балке момент $M = 1$ на конце левой консоли и построим эпюру M от этой нагрузки (схема д). Вычислим и отметим на этой эпюре значения ординат M_C , находящихся против центров тяжести вычисленных выше грузовых площадей. Произведем подсчеты:

$$\begin{aligned} EJ\varphi_A &= -5 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{2}{3} + \frac{80}{3} \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{3} - \frac{70}{6} \\ \varphi_A &= -\frac{70}{6EJ} = -\frac{70 \cdot 10^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -\frac{7 \cdot 10^{-4}}{24 \cdot 10^6} = -\frac{7}{2400} \text{ рад.} \end{aligned}$$

7.6. Статически неопределимые задачи при изгибе

Расчет статически неопределимых балок

Балки, внутренние усилия в которых не могут быть найдены из одних только уравнений равновесия (уравнения статики), **называются статически неопределимыми**.

Для расчета таких балок кроме уравнений статики необходимо составлять дополнительные уравнения, **называемые уравнениями перемещений (или уравнениями деформаций)**. Они получаются из рассмотрения условий деформации.

Балка является статически определимой, если она оперта на две шарнирные опоры (одну подвижную и одну неподвижную) или заделана с одного конца, т.е. если на нее наложены три внешние связи. Исключение составляют многопролетные шарнирные балки (состоящие из нескольких отдельных балок, соединенных между собой промежуточными шарнирами), которые могут быть статически определимыми и при числе внешних связей, больше трех.

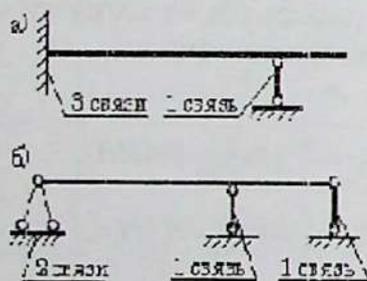


Рис 1

На рис.1 (а, б) изображены две статически неопределимые балки; на каждую из них наложены четыре внешние связи, и следовательно, эти балки по одному разу статически неопределены. Степень статической неопределенности балки равна избыточному (лишнему) числу внешних связей.

Для определения реакций опор таких балок составляются дополнительные уравнения — уравнения деформаций (перемещения). Их получают из условия совместности деформаций. Каждая лишняя неизвестная реакция требует одного дополнительного уравнения.

При решении задачи статически неопределенную балку мысленно превращают в статически определенную балку, убирая добавочную опору и заменяя ее действия неизвестной реакцией.

Полученная, таким образом, статически определимая балка называется основной системой. Основная система, нагруженная заданными силами и искомой реакцией (реакциями) отброшенной связи, должна быть полностью эквивалентной заданной системе, поэтому ее иногда называют эквивалентной системой.

Для того, чтобы основная система совпала с заданной балкой накладывают ограничение перемещения точки приложения «лишней реакции».

Это условие, выраженное математически, дает дополнительное уравнение. Существует несколько способов раскрытия статической неопределенности балок. В данной работе применено раскрытие статически неопределенности балки при помощи универсального уравнения:

а) универсальное уравнение для определения углов поворота сечений:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[\sum M(x-a) + \sum P \frac{(x-b)^2}{2} + \sum q \frac{(x-c)^3}{6} - \sum q \frac{(x-d)^3}{6} \right]$$

б) универсальное уравнение для определения прогибов балки:

$$Z = Z_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EJ} \left[\sum M \frac{(x-a)^2}{2} + \sum P \frac{(x-b)^3}{6} + \sum q \frac{(x-c)^4}{24} - \sum q \frac{(x-d)^4}{24} \right]$$

План решения статически неопределимых задач

1. Выявляем на балке возникающие реакции, составляем уравнения равновесия и определяем из них возможные реакции.

2. Из оставшихся реакций выбираем лишнее неизвестное и изображаем основную систему, загрузив ее заданной нагрузкой и лишней неизвестной реакцией.

3. Составляем добавочные условия, ограничивающие деформации основной системы, т.е. получаем дополнительное уравнение.

4. Раскрываем дополнительное уравнение с применением универсального уравнения, интеграла Мора и или другими способами.

5. Решаем совместно уравнения статики с дополнительным уравнением и находим неизвестные опорные реакции и строим эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Задача №132

Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры M и Q для статически неопределимой балки $P=10 \text{ кН}$, $q=10 \text{ кН/м}$, $M=10 \text{ кН}\cdot\text{м}$. (Рис.). Подобрать круглое сечение.

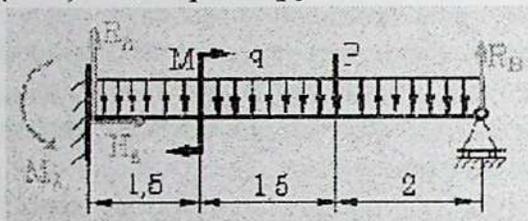


Рис. к задаче 132

I. Неизвестные реакции R_A , R_B , M_A , H_A . Видно, что задача один раз статически неопределима. Составляем уравнение статики:

$$1. \sum z=0 H_A = 0 \quad (1)$$

$$2. \sum y=0 R_A + R_B - P - q \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 60 = 0 \quad (2)$$

$$3. \sum M_B = 0 R_A \cdot 5 - M_A + M - q \cdot 5 \cdot 2,5 - P \cdot 2 = 0$$

$$5R_A - M_A - 135 = 0 \quad (3)$$

II. За лишнюю, неизвестную реакцию принимаем, R_B . Основную систему изображаем в виде балки с защемленным концом. Записываем граничные условия на опорах.

$$\text{На опоре } A \quad x=0, \theta_0 = 0, Z_A = 0,$$

$$\text{на опоре } B \quad x=5, Z_B = 0.$$

Дополнительное уравнение $Z_B = 0$ (4) разворачиваем, используя универсальное уравнение:

$$Z_x = Z_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EJ_y} \cdot \left[M_A \frac{x^2}{2} + R_A \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-1,5)^2}{2} - P \frac{(x-3)^3}{6} - q \frac{x^4}{24} \right]$$

$$x=5 \text{ м}, Z_B = 0,$$

$$Z_B = Z_0 + \theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{EJ_y} \left[R_A \frac{5^3}{6} - M_A \frac{5^2}{2} + M \frac{3,5^2}{2} - q \frac{5^4}{24} - P \frac{2^3}{6} \right] = 0$$

Из граничных условий $\theta_0 = 0, Z_B = 0$, получаем следующее уравнение (4)

$$20,8R_A - 12,5M_A - 212,4 = 0 \quad (4)$$

Решаем совместно уравнения (3) и (4)

$$5R_A - M_A - 135 = 0 \cdot (-12,5)$$

$$20,8R_A - 12,5M_A - 240 = 0$$

$$-41,7R_A + 1475,1 = 0$$

Следовательно $R_A = 35,4 \text{ кН}$

Из уравнения (3) находим M_A

$$35,4 \cdot 5 - M_A - 135 = 0 \quad M_A = 42 \text{ кН}$$

подставляем в уравнение (2) находим R_B

$$35,4 + R_B - 60 = 0 \Rightarrow R_B = 24,6 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum M_A = 0 - M_A + M + q \cdot 5 \cdot 2,5 + P \cdot 3 - R_B \cdot 5 = 0$$

$$-42 + 10 + 125 + 30 + 123 = 0$$

$$-165 + 165 = 0$$

Построение эпюр изгибающих моментов M_u и поперечных сил Q

1 участок $0 \leq x_1 \leq 1,5$

$$Q_1 = R_A - q \cdot x_1$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2} - M_A$$

при $x_1 = 0, Q_1 = 35,4 \text{ кН}, M_1 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м}$

при $x_1 = 1,5 \text{ м}, Q_1 = 20,4 \text{ кН}, M_1 = -0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

2 участок $1,5 \leq x_2 \leq 3$

$$Q_2 = R_A - q \cdot x_2$$

$$M_2 = R_A \cdot x_2 - q \frac{x_2^2}{2} - M_A + M$$

при $x_2 = 1,5$, $Q_2 = 20,4 \text{ кН}$, $M_2 = 9,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$

при $x_2 = 3 \text{ м}$, $Q_2 = 5,4 \text{ кН}$, $M_2 = 29,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$

3 участок $0 \leq x_3 \leq 2$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot x_3 \quad M_3 = R_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2}$$

при $x_3 = 0$, $Q_3 = -24,6 \text{ кН}$, $M_3 = 0$

при $x_3 = 2 \text{ м}$, $Q_3 = -4,6 \text{ кН}$, $M_3 = 29,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$

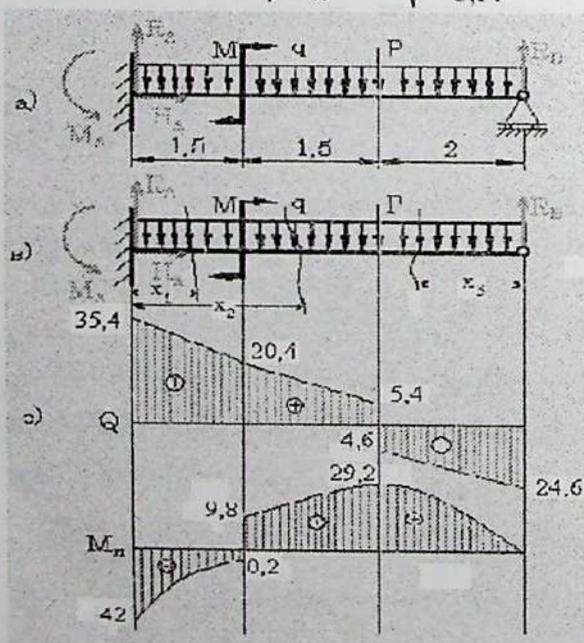
Эпюры M_u и Q показаны на рис. 2.

Подбор круглого сечения. Из эпюры M_u видно, что опасным сечением является сечение заделки, где $M_{y, \max} = 42 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Из условия прочности при изгибе определяем момент сопротивления W_y , тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma] \quad W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{42 \cdot 100}{1} = 4200 \text{ см}^3$$

Момент сопротивления для круглого сечения $W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, от-

сюда находим d то есть, $d = \sqrt[3]{\frac{W_y \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4200 \cdot 32}{3,14}} = 35 \text{ см}$



Задача №133

Эту же задачу решим при помощи математической программа Mathcad.

Основные данные вводим в программу и получаем все необходимые расчеты и готовые эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Рис.3. Остается только подобрать сечение.

Расчет статически неопределимых балок на изгиб

$$\begin{aligned}
 \text{м} &:= \text{m} & \text{см} &:= 0.01 \cdot \text{m} & \text{мм} &:= 0.001 \cdot \text{m} & \text{Н} &:= \text{N} & \text{МПа} &:= 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\
 \text{град} &:= \text{deg} & \text{Нм} &:= \text{N} \cdot \text{m} & \text{кН} &:= 1000 \cdot \text{N} & \langle \text{Нм} \rangle &:= 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \\
 F &:= \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} & L_F &:= \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & q &:= \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} & L_{q1} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{м} & L_{q2} &:= \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{см} \\
 M &:= \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{кНм} & L_M &:= \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & L &:= 5 \cdot \text{м} & \alpha &:= 0.1 \cdot \frac{L}{100} & E &:= 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}
 \end{aligned}$$

положение опор на балке

$$L_{RA} := 0 \cdot \text{см}$$

$$L_{RB} := 500 \cdot \text{см}$$

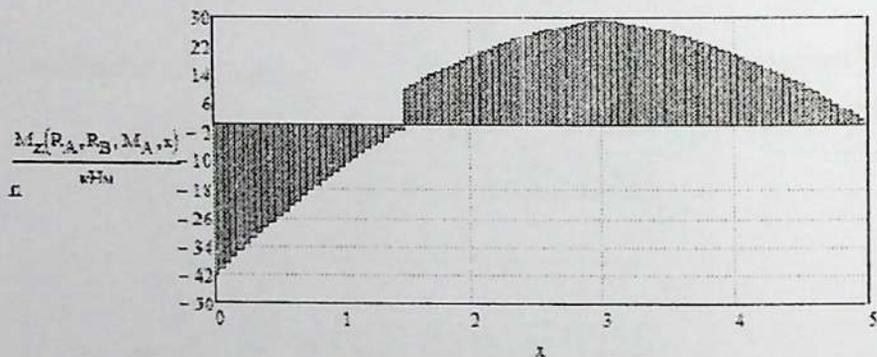
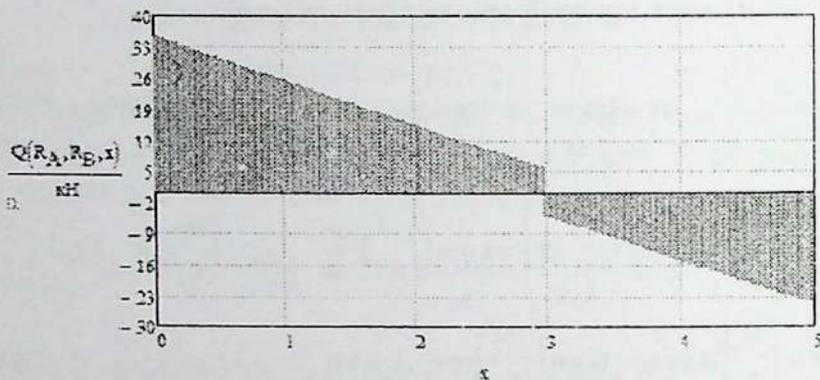
$$L_{MA} = 0 \cdot \text{см}$$

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \\ M_A \end{pmatrix} = \text{Find}(R_A, R_B, M_A)$$

$$R_A = 3.54 \times 10^4 \text{ N}$$

$$R_B = 2.46 \times 10^4 \text{ N}$$

$$M_A = 4.2 \times 10^4 \text{ J}$$



Подбор круглого сечения. Из условия прочности при изгибе определяем момент сопротивления W ,

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_y} \leq [\sigma] \quad W_y = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{42 \cdot 100}{1} = 4200 \text{ см}^3$$

Момент сопротивления для круглого сечения $W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, от-

сюда находим d , то есть $d = \sqrt[3]{\frac{W_y \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4200 \cdot 32}{3.14}} = 35 \text{ см}$

Задача № 134

Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры M и Q для статически неопределимой балки. (Рис. 6 а).

Подобрать двутавровое сечение. $P=10\text{ кН}$, $q=5\text{ кН/м}$,
 $M=20\text{ кН}\cdot\text{м}$.

I. Неизвестные реакции R_A , R_B , R_C , H_C . Видно, что задача один раз статически неопределима. Составляем уравнение статики:

$$1. \sum z=0 \quad H_C = 0 \quad (1)$$

$$2. \sum y=0 \quad R_A + R_B - P - q \cdot 6 + R_C = 0 \Rightarrow R_A + R_B + R_C - 40 = 0 \quad (2)$$

$$3. \sum M_B = 0 \quad R_A \cdot 6 + M - q \cdot 6 \cdot 3 - P \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0$$
$$6R_A + 4R_B - 90 = 0 \quad (3)$$

II. За лишнюю, неизвестную реакцию принимаем, R_C . Основную систему изображаем в виде двухопорной балки. Записываем граничные условия на опорах.

$$Z_x = Z_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EJ_y} \cdot \left[R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + R_B \frac{(x-2)^3}{6} + M \frac{(x-2)^2}{2} - P \frac{(x-4)^3}{6} \right]$$

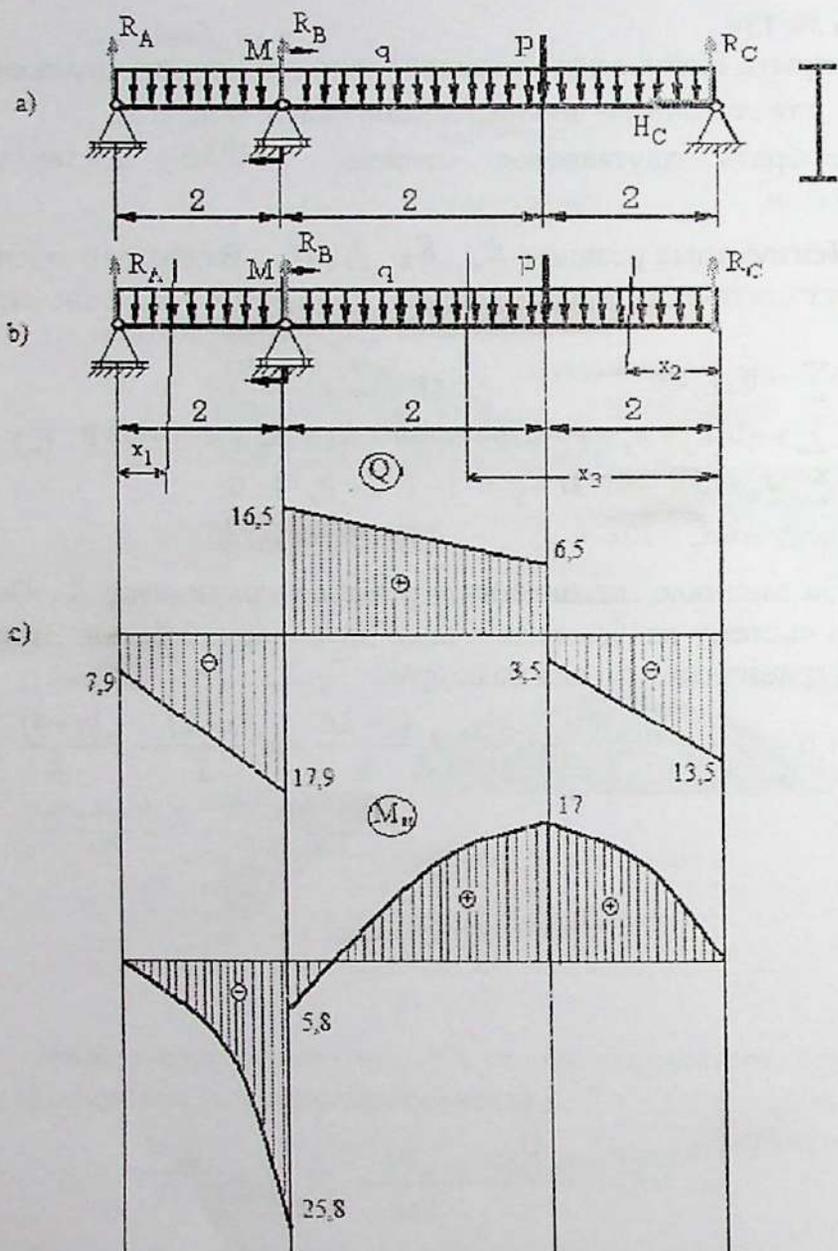


Рис. к задаче 134

На опоре A $x=0, \theta_0 \neq 0, Z_0 = 0$, (4)

на опоре B $x=2, Z_B = 0$, (5)

на опоре C $x=6, Z_C = 0$, (6)

Для определения θ_0 используем $x=2, Z_B = 0$, решая универсальное уравнение:

$$Z_B = Z_0 + \theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ_y} \cdot \left[R_A \frac{2^3}{6} - q \frac{2^4}{24} \right] = 0$$

$$\theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ_y} \cdot [1,3R_B - 3,3] = 0, \quad \theta_0 = -\frac{1,65 - 0,65R_A}{EJ_y}$$

Дополнительное уравнение $Z_C = 0$ (6) разворачиваем, используя универсальное уравнение. $x=6$ м, $Z_C = 0$

$$Z_C = Z_0 + \theta_0 \cdot 6 + \frac{1}{EJ_y} \left[R_A \frac{6^3}{6} - q \frac{6^4}{24} + R_B \frac{4^3}{6} + M \frac{4^2}{2} - P \frac{2^3}{6} \right] = 0$$

$$9,9 - 3,9R_A + 36R_B - 270 + 10,7R_B + 160 - 13,3 = 0$$

$$32,1R_A + 10,7R_B - 113,4 = 0 \quad (6)$$

Решаем совместно уравнения (3) и (6)

$$\begin{cases} 32,1R_A + 10,7R_B - 113,4 = 0 \\ 6R_A + 4R_B - 90 = 0 \end{cases} \cdot (-5,35)$$

$$\hline -10,7R_B + 368,1 = 0$$

Следовательно $R_B = 34,4$ кН

Из уравнения (3) находим R_A

$$6R_A + 4R_B - 90 = 0 \quad R_A = -7,9$$
 кН

подставляем в уравнение (2) находим R_C

$$R_A + R_B + R_C - 40 = 0 \Rightarrow R_C = 13,5$$
 кН

Проверка:

$$\sum M_A = 0 + M + q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 4 - R_B \cdot 2 - R_C \cdot 6 = 0$$

$$90 + 20 + 40 - 69 - 81 = 0$$

$$-150 + 150 = 0$$

Построение эпюр изгибающих моментов M_u и поперечных сил Q

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = -R_A - q \cdot x_1$$

$$M_1 = -R_A \cdot x_1 - q \frac{x_1^2}{2}$$

при $x_1 = 0$, $Q_1 = -7,9 \text{ кН}$, $M_1 = 0$

при $x_1 = 2 \text{ м}$, $Q_1 = -17,9 \text{ кН}$, $M_1 = -25,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

2 участок $0 \leq x_2 \leq 2$

$$Q_2 = -R_C + q \cdot x_2$$

$$M_2 = R_C \cdot x_2 - q \frac{x_2^2}{2}$$

при $x_2 = 0$ $Q_2 = -13,5 \text{ кН}$, $M_2 = 0$

при $x_2 = 3 \text{ м}$, $Q_2 = -3,5 \text{ кН}$, $M_2 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$

3 участок $2 \leq x_3 \leq 4$

$$Q_3 = -R_C + qx_3 + P$$

$$M_3 = R_C \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} - P(x_3 - 2)$$

при $x_3 = 2 \text{ м}$, $Q_3 = 6,5 \text{ кН}$, $M_3 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$

при $x_3 = 4 \text{ м}$, $Q_3 = 16,5 \text{ кН}$, $M_3 = -5,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Эпюры M_u и Q показаны на рис. 6 в, с.

Подбор двутаврового сечения. Из эпюры M_u видно, что опасным сечением является сечение заделки, где $M_{u \max} = 25,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Из условия прочности при изгибе определяем момент сопротивления W_y ,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

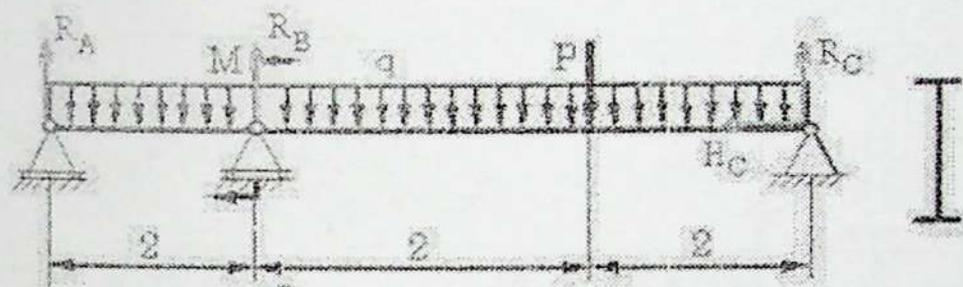
$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25,8 \cdot 100}{16} = 161 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента прокатной стали (ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр №18а, при $W_y = 159 \text{ см}^3$.

Задача № 135

Эту же задачу решим при помощи математической программа *Mathcad*.

Основные данные вводим в программу и получаем все необходимые расчеты и готовые эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Рис. Остается только подобрать сечение.



ORIGIN = 1

$$\begin{aligned} \underline{m} &:= m & \underline{cm} &:= 0.01 \cdot m & \underline{mm} &:= 0.001 \cdot m & \underline{H} &:= N & \underline{MPa} &:= 10^6 \cdot \frac{H}{m^2} \\ \underline{град} &:= \text{deg} & \underline{Nm} &:= N \cdot m & \underline{kH} &:= 1000 \cdot N & \underline{кНм} &:= 1000 \cdot N \cdot m \end{aligned}$$

$$\underline{F_x} := \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{кН} \quad \underline{F_y} := \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{см} \quad \underline{q_x} := \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad \underline{L_{qx}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{см} \quad \underline{L_{qy}} := \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \end{pmatrix} \text{см}$$

$$\underline{M_x} := \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \text{кНм} \quad \underline{L_{Mx}} := \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix} \text{см} \quad \underline{L_x} := 600 \text{ см} \quad \underline{x} := 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \cdot L \quad \underline{E_x} := 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

положение опор на балке

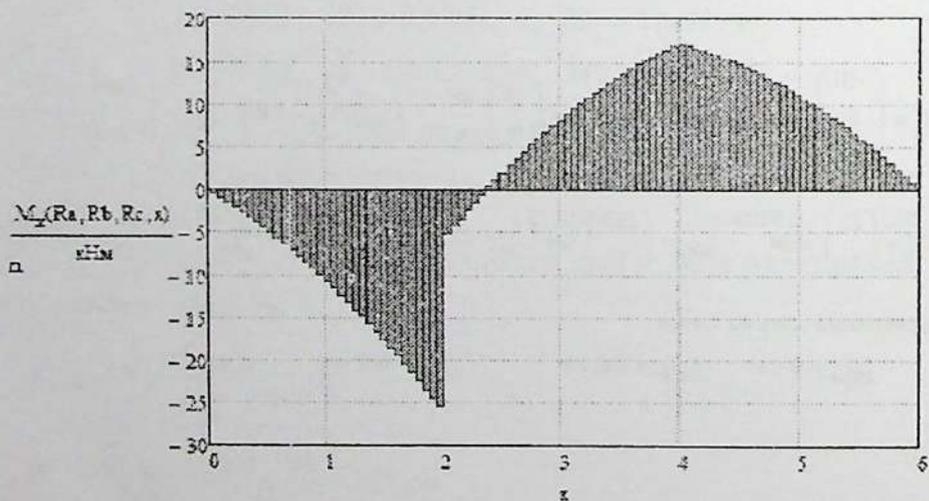
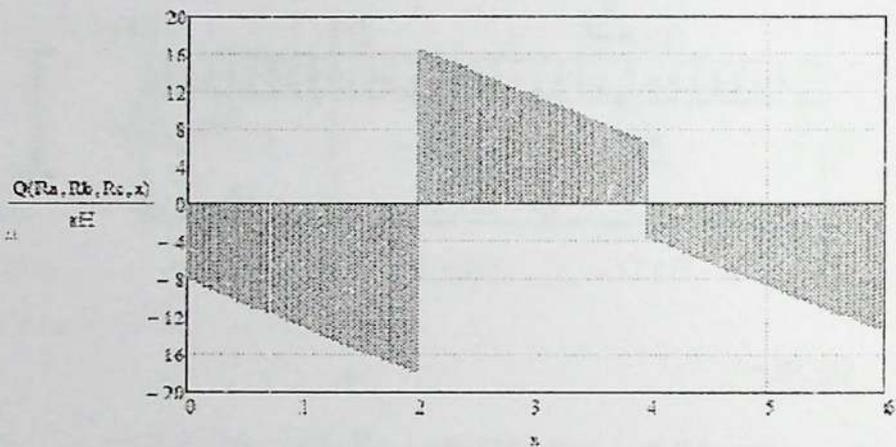
$$\underline{L_{Ra}} := 0 \text{ см} \quad \underline{L_{Rb}} := 200 \text{ см} \quad \underline{L_{Rc}} := 600 \text{ см}$$

$$\begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \\ EJo\theta \end{pmatrix} = \text{Find}(R_a, R_b, R_c, EJo\theta)$$

$$R_a = -7.917 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_b = 3.438 \times 10^4 \text{ N}$$

$$R_c = 1.354 \times 10^4 \text{ N}$$



Подбор двутаврового сечения. Из эпюры M_u видно, что опасным сечением является сечение заделки, где $M_{u \max} = 25,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Из условия прочности при изгибе определяем момент сопротивления W_y ,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25,8 \cdot 100}{16} = 161 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента прокатной стали (ГОСТ 8239-89) выбираем двутавр №18а, при $W_y = 159 \text{ см}^3$.

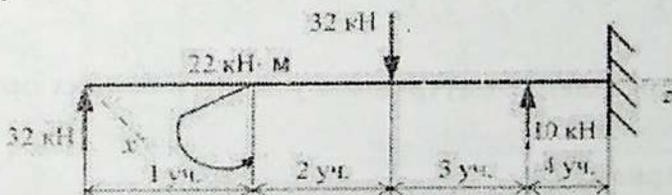


Тесты для самопроверки

Определение внутренних усилий в балках при изгибе от сосредоточенных нагрузок

Вариант 1

1. Выбрать участок чистого изгиба



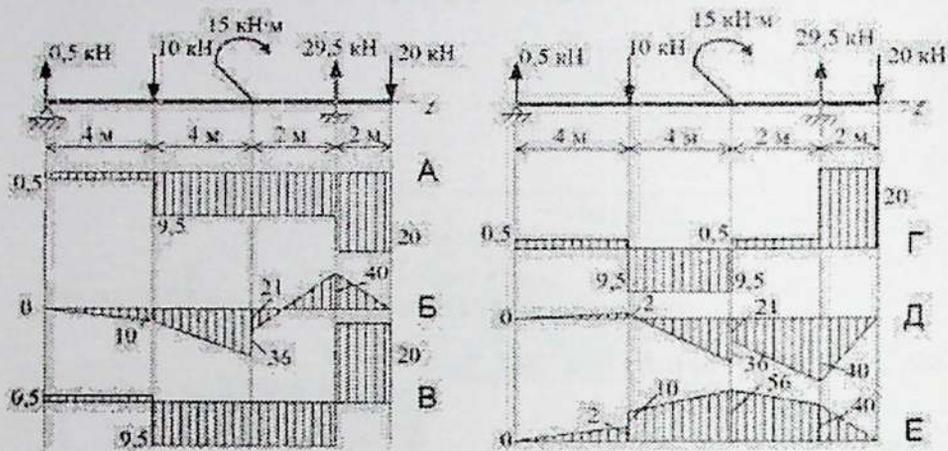
Варианты ответов:

- 1) $F_1 z_1 - M_1 + F_2(z_2 - 3) - F_3$, 2) $-F_1 z_1 - M_1 - F_2(z_2 - 3) - F_3(z_2 - 6)$,
3) $F_1 z_1 + M_1 + F_2(z_2 - 3) - F_3$, 4) $-F_1 z_1 - M_1 + F_2(z_2 - 3) - F_3(z_2 - 6)$.
2. Определить величину изгибающего момента в сечении Г слева (схема к вопросу 2), если $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $F_3 = 28 \text{ кН}$, $M_1 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_3 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Варианты ответов:

- 1) $54 \text{ кН}\cdot\text{м}$, 2) $98 \text{ кН}\cdot\text{м}$, 3) $62 \text{ кН}\cdot\text{м}$, 4) $90 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

3. Из представленных на схеме эпюр выбрать эпюру поперечной силы для изображённой балки.



Варианты ответов:

1) А, 2) Б, 3) В, 4) Г.

4. Из представленных в вопросе 4 эпюр выбрать эпюру изгибающих моментов для балки.

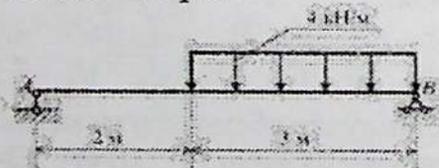
Варианты ответов:

1) Б, 2) В, 3) Д, 4) Е.

Определение внутренних усилия в балках при изгибе от нагрузок

Вариант 1

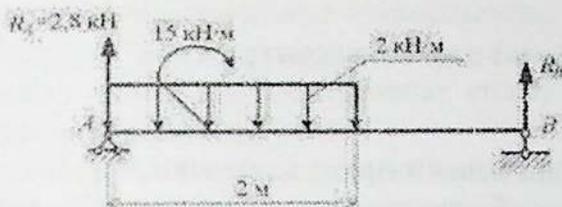
1. Определить реакцию в опоре В.



Варианты ответов:

1) 3,6 кН; 2) 8,4 кН; 3) 6 кН; 4) 12 кН.

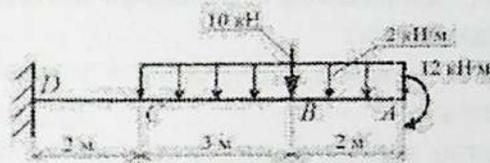
2. Определить поперечную силу в точке с координатой 2 м.



Варианты ответов:

- 1) -4 кН, 2) $-1,2$ кН, 3) 11 кН, 4) $-13,8$ кН.

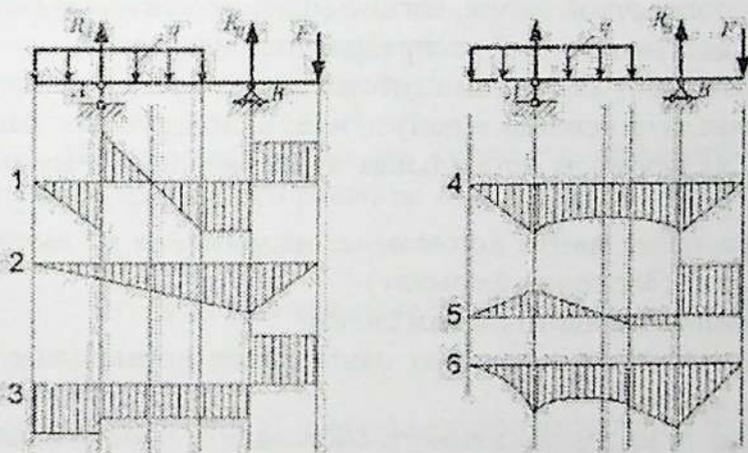
3. Определить изгибающий момент в точке С.



Варианты ответов:

- 1) -42 кН·м, 2) -67 кН·м, 3) -55 кН·м, 4) -76 кН·м.

4. Из представленных на схеме эпюр выбрать эпюру поперечной силы для балки.



Варианты ответов:

- 1) 1, 2) 2, 3) 3, 4) 5.

5. Из представленных в вопросе 4 эпюр выбрать эпюру изгибающих моментов для балки.

Варианты ответов:

- 1) 1, 2) 2, 3) 4, 4) 6.



Вопросы для самоконтроля

- Какой изгиб называют прямым, плоским?
- Какой вид изгиба называют чистым, а какой – поперечным?
- Относительно каких осей следует определять моменты инерции и моменты сопротивления сечения при изгибе?
- Как находят значение изгибающего момента в каком-либо сечении балки?
- Что называют эпюрой внутреннего усилия и для чего она строится?
- Какое правило знаков принято для изгибающего момента и поперечной силы?
- Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?
- Какие дифференциальные зависимости существуют между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней распределенной нагрузки?
- Что называют осевым моментом сопротивления сечения?
- Перечислите основные допущения, используемые для вывода формулы нормальных напряжений в сечении балки при чистом изгибе.
- Как распределяются нормальные напряжения по высоте балки? (Запишите формулу).
- Что называют нейтральным слоем?
- В каких точках возникают наибольшие нормальные напряжения?
- Покажите вид напряженного состояния в произвольной точке поперечного сечения при чистом изгибе.
- Покажите вид напряженного состояния в произвольной точке поперечного сечения при поперечном изгибе.
- Какие типы задач решают из условия прочности при изгибе?
- Какая форма сечения балки является рациональной?
- Какие перемещения имеют место при изгибе?
- Как связаны функции прогибов и углов поворота сечений?

- Запишите дифференциальные зависимости, связывающие следующие параметры: прогибы, углы поворота, изгибающие моменты, поперечные силы, интенсивность распределенной нагрузки.
- Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
- Как находят постоянные интегрирования?
- Напишите общий вид универсального уравнения изогнутой оси балки.
- В чем заключаются преимущества метода начальных параметров?

Глава 8. Рамы

! Система стержней, жестко соединенных между собой, называется рамой.

Внутренние силы в плоских рамах: N , Q и M .
Условие прочности рамы

$$\sigma = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

! При расчете рамы на жесткость применяется интеграл Мора или его решение по способу Верещагина.

8.1. Построение эпюр Q и M

Задача № 136

Построить эпюры Q и M при изгибе отсека коленчатого вала силой давления газов F , если $a = 70$ мм, давление газов $p_g = 3$ МПа, диаметр цилиндра $D = 100$ мм (см. рис., а). Определить максимальный изгибающий момент.

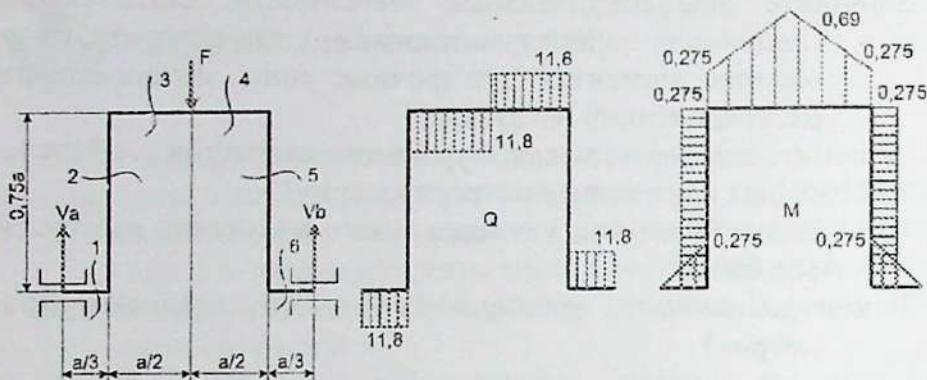


Рис. к задаче 136

Решение. Определяем реакции опор, которые вследствие симметрии конструкции и нагрузки будут одинаковы

$$V_A = V_B = \frac{F}{2}$$

Здесь сила давления газов определяется с учетом площади днища поршня:

$$F = \frac{\pi D^2}{4}, \quad F = 0,0236 \text{ МН} = 23,6 \text{ кН}$$

Поэтому $V_A = V_B = 11,8$ кН. Разбивая раму на участки, учитываем места излома оси, поэтому получаем шесть участков, которые нумеруем слева направо. Начала координат выбираем для первых трех участков – в левых концах, для остальных – в правых. Положительные значения Q и M_x будем откладывать вверх и снаружи, а отрицательные – вниз и внутрь отсека (вала). Выражения поперечной силы: $Q_1 = V_A = 11,8$; $Q_2 = 0$; $Q_3 = V_A = 11,8$. Выражения изгибающего момента:

$$M_{x1} = V_A z_1 = 11,8 z_1;$$

$$M_{x2} = V_A \frac{a}{3} = 0,275;$$

$$M_{x3} = V_A \left(\frac{a}{3} + z_3 \right) = 11,8(0,0233 + z_3);$$

остальные три выражения – симметричны.

Задача № 137

Построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для стержня с ломаной осью (рис).

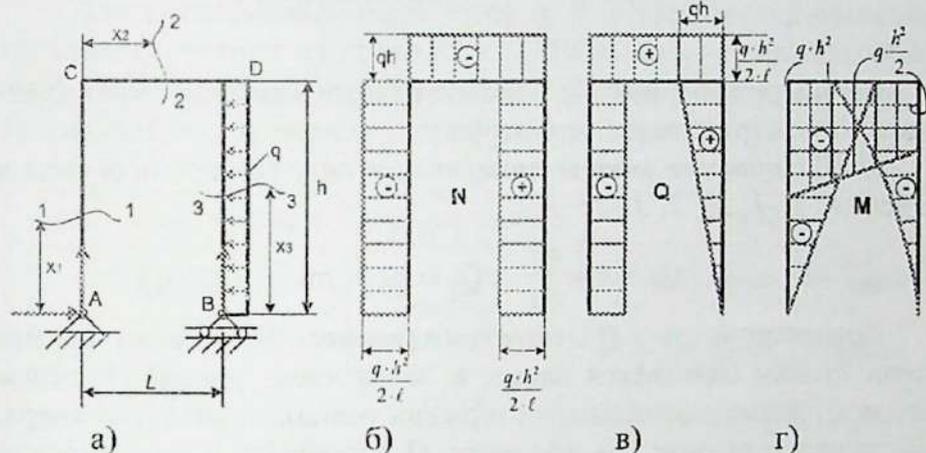


Рис. к задаче 137

Решение. Опорные реакции находим из уравнений:

$$\sum X = 0; H_A - q \cdot h = 0; \text{откуда } H_A = q \cdot h$$

$$\sum Y = 0; A - B = 0; \text{или } A = B$$

$$\sum M_B = 0; A \cdot l - \frac{qh^2}{2} = 0; \text{откуда } A = \frac{qh^2}{2l} = B$$

а) Построение эпюры продольных сил. «Продольной (или нормальной) силой называется сумма проекций на ось стержня внешних сил» приложенных к отсеченной его части.

Для сечения 1-1, рассматривая нижнюю часть стойки AC, имеем

$$N_1 = -A = -\frac{qh^2}{2l}.$$

Знак минус взят потому, что сила A вызывает сжатие стойки; величина N_1 остается постоянной по всей длине стойки.

Для сечения 2-2, рассматривая левую отсеченную часть стержня, получим

$$N_2 = -H_A = -qh \text{ (сжатие)}.$$

Наконец, в сечении 3-3 правой стойки (рассматриваем нижнюю отсеченную часть)

$$N_2 = B = \frac{qh^2}{2l} \text{ (растяжение).}$$

На эпюре (рисунок 5)) положительные значения N отложены внутрь, отрицательные – наружу.

б) Построение эпюры поперечных сил. Поперечная сила в сечениях 1-1, 2-2, 3-3:

$$Q_1 = -H_A = -qh; \quad Q_2 = A = \frac{qh^2}{2l}; \quad Q_3 = qx_3; \quad \max Q_3 = qh.$$

Поперечную силу Q считаем *положительной*, если нижняя часть стойки сдвигается влево, а левая часть ригеля (Ригелем называется горизонтальный стержень рамы), сдвигается вверх. На эпюре (рисунок б)) значения Q отложены в направлении сдвига нижней части стоек и левой части ригеля.

в) Построение эпюры изгибающих моментов. Уравнения моментов:

$$M_1 = -H_A x_1 = -qh x_1; \quad M_2 = Ax_2 - H_A h = \frac{qh^2}{2l} x_2 - qh^2;$$

$$M_3 = -\frac{qx_3^2}{2}.$$

Наибольшие по абсолютному значению величины получают моменты в углах C или D :

$$M_C = -qh^2; \quad M_D = -\frac{qh^2}{2}.$$

Эпюра M построена на рисунке, причем все ординаты отложены на стороне сжатых волокон, как это принято для балок в курсе.

8.2. Определение перемещений

Задача № 138

Для приведенных ниже схем *а, б, в* загрузки рамы постоянного сечения из стали ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$) определить величину вертикального перемещения y , горизонтального перемещения Δ и угла поворота φ свободного конца.

	Схема рамы	Числовые условия	Ответ:
<i>а</i>		$F = 20 \text{ кН}$ $M_0 = 10 \text{ кН/м}$ $a = 2 \text{ м}$ $h = 4 \text{ м}$ $J = 10^4 \text{ см}^4$	$y = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{a}{2} + M_0 ch + \frac{Fah^2}{2} \right] = 2,1$ $\Delta = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{h^2}{2} + \frac{Fah^3}{3} \right] = 2,53 \text{ см}$ $\varphi = \frac{1}{EI} \left[M_0(a+h) + \frac{Fah}{2} \right] = 0,0113$
<i>б</i>		$F = 20 \text{ кН}$ $q = 1 \text{ кН/м}$ $a = 1 \text{ м}$ $h = 4 \text{ м}$ $J = 8000 \text{ см}^4$	$y = \frac{1}{EI} \left[\frac{Fah^3}{3} + Fch + \frac{qah^3}{3} \right] = 1,21$ $\Delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{Fah^2}{2} + \frac{qh^3}{8} \right] = 3 \text{ см}$ $\varphi = \frac{1}{EI} \left[\frac{Fah^2}{2} + Fch + \frac{qh^3}{6} \right] = 0,0123$
<i>в</i>		$F = 20 \text{ кН}$ $q = 1 \text{ кН/м}$ $a = 1 \text{ м}$ $h = 3 \text{ м}$ $J = 4000 \text{ см}^4$	$\Delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{qa^3}{4} + \frac{Fh^3}{3} \right] = 2,53 \text{ см}$ $\varphi = \frac{1}{EI} \left[\frac{qa^2}{3} + \frac{qa^2h}{2} + \frac{Fh^2}{2} \right] = 0,0133 \text{ рад}$



Вопросы для самопроверки

- Какой изгиб называют прямым, плоским?
- Какой вид изгиба называют чистым, а какой поперечным?
- Относительно каких осей следует определять моменты инерции и моменты сопротивления сечения при изгибе?
- Как находят значение изгибающего момента в каком-либо сечении балки?
- Что называют эпюрой внутреннего усилия и для чего она строится?
- Какое правило знаков принято для изгибающего момента и поперечной силы?
- Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?
- Какие дифференциальные зависимости существуют между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней распределенной нагрузки?
- Что называют осевым моментом сопротивления сечения?
- Перечислите основные допущения, используемые для вывода формулы нормальных напряжений в сечении балки при чистом изгибе.
- Как распределяются нормальные напряжения по высоте балки? (Запишите формулу).
- Что называют нейтральным слоем?
- В каких точках возникают наибольшие нормальные напряжения?
- Покажите вид напряженного состояния в произвольной точке поперечного сечения при чистом изгибе.
- Покажите вид напряженного состояния в произвольной точке поперечного сечения при поперечном изгибе.
- Какие типы задач решают из условия прочности при изгибе?
- Какая форма сечения балки является рациональной?
- Какие перемещения имеют место при изгибе?
- Как связаны функции прогибов и углов поворота сечений?

- Запишите дифференциальные зависимости, связывающие следующие параметры: прогибы, углы поворота, изгибающие моменты, поперечные силы, интенсивность распределенной нагрузки.
- Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
- Как находят постоянные интегрирования?
- Напишите общий вид универсального уравнения изогнутой оси балки.
- В чем заключаются преимущества метода начальных параметров?

Глава 9. Сложное сопротивление



Если в поперечном сечении бруса возникает два и более внутренних силовых фактора, то такой вид деформации называется сложным сопротивлением, которое рассматривается как сумма простых деформаций, согласно принципу суперпозиции, применяемого при малых деформациях и при действии закона Гука для материала. Задачи на сложное сопротивление решаются следующим образом. Определяются напряжения и деформации при действии простейших видов деформации, составляющих сложное сопротивление, а затем полученные результаты суммируют, используя при необходимости теории прочности.

9.1. Косой изгиб

Задача № 139

К двутавровой балке, шарнирно опертой по концам, посредине пролета $l = 4\text{ м}$ приложена вертикально направленная сила $P = 10\text{ кН}$. Плоскость стенки двутавра составляет угол $\varphi = 20^\circ$ с вертикальной плоскостью (см. рисунок). Подобрать сечение балки по сортаменту при допуске напряжении $[\sigma] = 16\text{ кН/см}^2$.

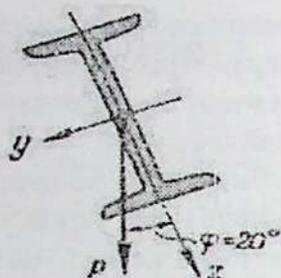


Рис. к задаче 139

Решение. Условие прочности в данном случае (сечение с выступающими углами) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left(\frac{\cos \varphi}{W_y} + \frac{\sin \varphi}{W_z} \right) = \frac{Pl}{4W_y} \left(\cos \varphi + \frac{W_y}{W_z} \sin \varphi \right) \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_y \geq \frac{Pl}{4[\sigma]} \left(\cos \varphi + \frac{W_y}{W_z} \sin \varphi \right) = \\ = \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 1600} \left(0,940 + \frac{W_y}{W_z} 0,342 \right) = 58,75 + 21,38 \frac{W_y}{W_z}.$$

Сечение подбираем путем последовательных проб. Отношение

$$\frac{W_y}{W_z}$$

Для всех номеров двутавровых балок, имеющих в сортаменте, меняется примерно от 6 (для самых малых номеров) до 15 (для

самых больших номеров. Если принять $\frac{W_y}{W_z} = 6$, то

$$W_y \geq 58,75 + 21,38 \cdot 6 = 185 \text{ см}^3;$$

Если же

$$\frac{W_y}{W_z} = 15,$$

то

$$W_y \geq 58,75 + 21,38 \cdot 15 = 380 \text{ см}^3.$$

Для двутавра №27 момент сопротивления $W_y = 371 \text{ см}^3$, для двутавра №20 $W = 184 \text{ см}^3$. Таким образом, искомый номер дву-

тавра предположительно должен заключаться между номерами 27 и 20. Испробуем двутавр № 24, для которого $W_y = 289 \text{ см}^3$,
 $W_z = 34,5 \text{ см}^3$

$$\frac{W_y}{W_z} = \frac{289}{34,5} = 8,38.$$

Вычисляем наибольшее нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{4W_y} \left(\cos \varphi + \frac{W_y}{W_z} \sin \varphi \right) =$$

$$= \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 289} (0,940 + 8,38 \cdot 0,342) = 1317 \text{ кг/см}^2.$$

Наибольшее напряжение получается значительно ниже допустимого. Следует взять двутавр с меньшим номером. Испробуем двутавр № 22, для которого

$$W_y = 232 \text{ см}^3, W_z = 28,6 \text{ см}^3 \text{ и } \frac{W_y}{W_z} = \frac{232}{28,6} = 8,11.$$

Наибольшее нормальное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = \frac{1000 \cdot 400}{4 \cdot 232} (0,940 + 8,11 \cdot 0,342) = 1601 \text{ кг/см}^2 \approx [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Останавливаем свой выбор на двутавре № 22.

Задача № 140

Деревянная балка длиной 2 м, имеющая прямоугольное поперечное сечение 12х20 см, закреплена одним концом и нагружена сосредоточенной силой $F = 2,4 \text{ кН}$ на другом конце. Нагрузка лежит в плоскости поперечного сечения балки и проходит через его центр тяжести (см. рисунок). Построить эпюры нормальных напряжений по сторонам закрепленного сечения и определить полный прогиб свободного конца балки.

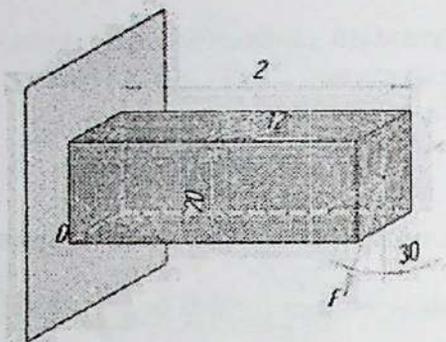


Рис. к задаче 140

Ответ: $\sigma_A = +0,2 \text{ МПа}$; $\sigma = +10,2 \text{ МПа}$; $\sigma = -0,2 \text{ МПа}$;
 $\sigma = -10,2 \text{ МПа}$; $f = 13,1 \text{ мм}$

Задача № 141

Защемленная одним концом двутавровая балка №24а длиной 1,4 м, нагруженная на свободном конце сосредоточенной силой P_y прогнулась под силой на 3 мм. Направление прогиба совпало с биссектрисой угла между главными осями инерции поперечного сечения балки. Определить величину и направление силы P , а также наибольшее растягивающее напряжение в балке.

Ответ: $P = 1765 \text{ кг}$; $\alpha = 3^\circ 54' 50''$, $\sigma = 1184 \text{ кг/см}^2$.

Задача № 142

Защемленная одним концом балка длиной 2 м несет равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q = 500 \text{ кг/м}$. Поперечное сечение балки – швеллер № 16. Стенка швеллера наклонена к плоскости действия нагрузки, проходящей через линию центров изгиба, под углом $\varphi = 3^\circ$ (см. рисунок).

Определить нормальные напряжения в точках A , B , C и D опасного сечения балки.

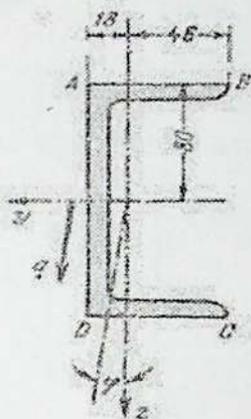


Рис. к задаче 142

Решение. Нормальные напряжения в любой точке опасного сечения балки определяем по формуле

$$\sigma = -M_{\max} \left(\frac{y \sin \varphi}{J_z} + \frac{z \cos \varphi}{J_y} \right).$$

Знак минус перед M_{\max} поставлен потому, что в квадранте с положительными значениями координат y и z нормальные напряжения являются сжимающими, т.е. отрицательными.

Так как

$$M_{\max} = \frac{1}{2} q l^2 = \frac{5 \cdot 200^2}{2} = 10\,000 \text{ кгсм}, \quad \sin \varphi = \sin 3^\circ = 0,05234,$$

$\cos \varphi = \cos 3^\circ = 0,9986$ и для швеллера № 16 $J_y = 747 \text{ см}^4$, а $J_z = 63,3 \text{ см}^4$, то

$$\sigma = -10\,000 \left(\frac{0,05234}{63,3} y + \frac{0,9986}{747} z \right) = -82,7 y - 133,7 z.$$

В точке A с координатами $y_A = +1,8 \text{ см}$ и $z_A = -8 \text{ см}$

$$\sigma_A = -82,7 \cdot 1,8 + 133,7 \cdot 8 = 921 \text{ кг/см}^2.$$

Аналогично этому,

$$\sigma_B = 82,7 \cdot 4,6 + 133,7 \cdot 8 = 1450 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_C = 82,7 \cdot 4,6 - 133,7 \cdot 8 = 689 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_D = -82,7 \cdot 1,8 - 133,7 \cdot 8 = -1218 \text{ кг/см}^2.$$

Задача № 146

Какое положение займет нейтральный слой в балке прямоугольного поперечного сечения, если плоскость действия нагрузки будет совпадать с одной из диагональных плоскостей (см. рисунок)?

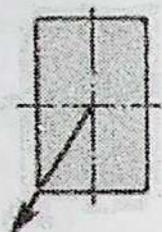


Рис. к задаче 143

Ответ: Совпадет с другой диагональной плоскостью.



Вопросы для самопроверки

- ✓ Какой вид сопротивления называют косым изгибом?
- ✓ В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?
- ✓ Как находят положение нейтральной линии при косом изгибе?
- ✓ Какое положение примет нейтральная линия, если силовая плоскость изгибающего момента совпадает с одной диагональю прямоугольного сечения?
- ✓ Может ли балка круглого поперечного сечения находиться в условиях косоугольного изгиба?

9.2. Внецентренное растяжение-сжатие

Задача № 144

Проверить прочность нижней части бетонного столба, имеющей прямоугольное поперечное сечение 18×20 см (см. рисунок). Допускаемое напряжение на растяжение равно $0,6$ МПа, на сжатие – 7 МПа

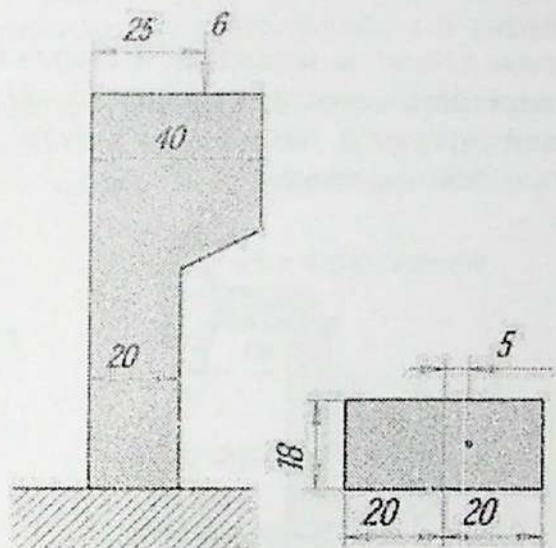


Рис. к задаче 144

Ответ: $\sigma_p = 0,58 \text{ МПа} < 0,6 \text{ МПа}$; $\sigma_{сж} = 0,92 \text{ МПа} < 7 \text{ МПа}$.

Задача № 145

Нормальное напряжение в точке *A* сжатого бруса (см. рис.) равно 2 МПа. (растяжение), в точке *B* оно равно нулю. Чему равно напряжение в точке *C*?

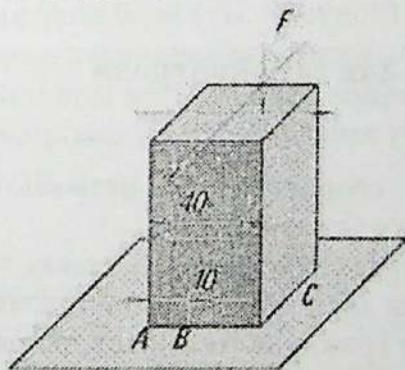


Рис. к задаче 145

Ответ: 6 МПа.

Задача № 146

При сверлении детали на шпиндель A сверлильного станка (см. рисунок) передается осевое давление 15 кН . Определить диаметр круглой чугунной колонны B , если допускаемое напряжение на растяжение равно 35 МПа .

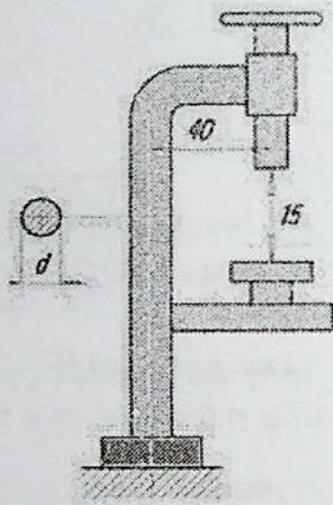


Рис. к задаче 146

Ответ: 122 мм.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Какое сложное сопротивление называют внецентренным растяжением (сжатием)?
- ✓ Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном растяжении (сжатии)?
- ✓ Какой вид имеет график нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при изгибе с растяжением?
- ✓ Что называют ядром сечения?
- ✓ Какое положение занимает нейтральная линия, если продольная сила при внецентренном сжатии приложена к вершине ядра сечения?

- ✓ Чему равно нормальное напряжение в центре тяжести сечения при изгибе с растяжением и внецентренным сжатии?
- ✓ Как изменяется вид эпюры нормальных напряжений при удалении полюса (точки приложения сжимающей силы) от центра тяжести сечения?

9.3. Изгиб с кручением

Задача № 147

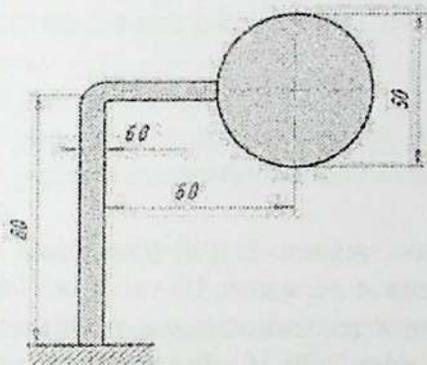


Рис. к задаче 147

Круглый дорожный знак укреплен на полый круглой стойке с наружным диаметром 6 см (см. рисунок). Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить толщину стенки стойки при допуске напряжении $[\sigma]=60\text{МПа}$, если наибольшая ветровая нагрузка на знак равна 20МПа .

Ответ: 0,265 см.

Задача № 148

Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить наибольшую допускаемую величину груза F , который можно поднять при помощи ворота (см. рисунок). Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром 30 мм. Допускаемое напряжение для материала вала равно 80МПа .

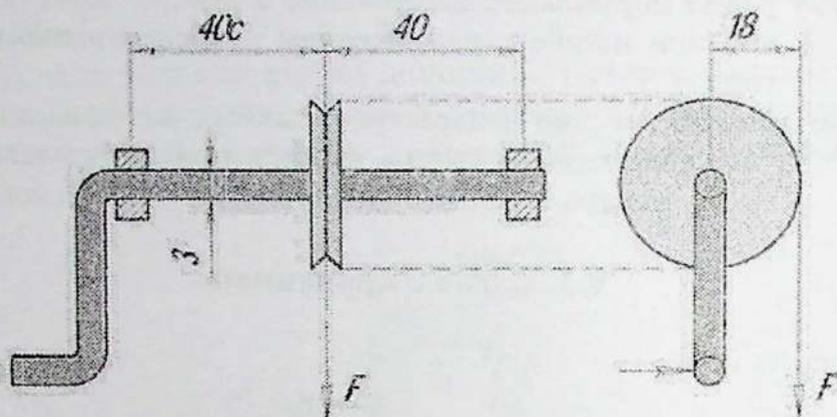


Рис. к задаче 148

Ответ: 790 Н.

Задача № 149

Два одинаковых шкива A и B насажены на вал (см. рисунок). Ведущий шкив A передает 10 л.с. при 100 об/мин. Обе ветви ремня на шкиве A горизонтальны, на шкиве B — вертикальны. Натяжение ремня $F_2 = 1500$ Н. Диаметры шкивов равны 60 см. Весами шкивов можно пренебречь. Исходя из условия прочности по теории касательных напряжений, определить необходимый диаметр вала при допуске напряжения $[\sigma] = 80$ МПа.

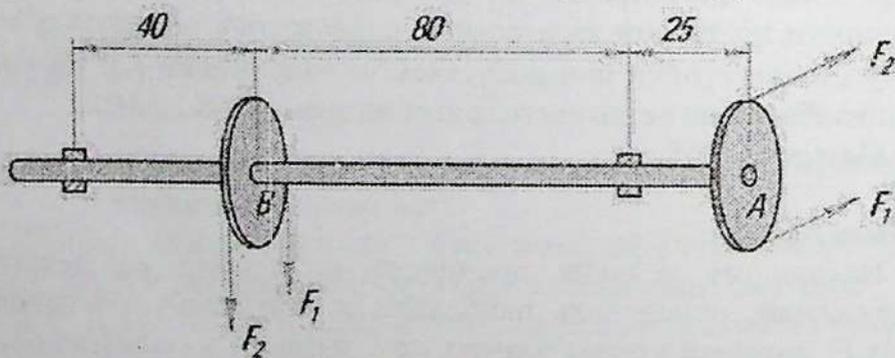


Рис. к задаче 149

Ответ: 59,6 мм ~ 60 мм.

Тесты для самопроверки

Совместное действие изгиба и кручения

Вариант 1

1. Какие напряжения возникают в точке поперечного сечения бруса при действии изгиба с кручением?

Варианты ответов:

1) σ , 2) τ , 3) σ и τ , 4) однозначного ответа нет.

2. Какое напряжение называют расчётным (приведенным)?

Варианты ответов:

1) напряжение, равное действующему;

2) напряжение равноопасного состояния;

3) напряжение, равное геометрической сумме действующих напряжений;

4) напряжение, равное алгебраической сумме действующих напряжений.

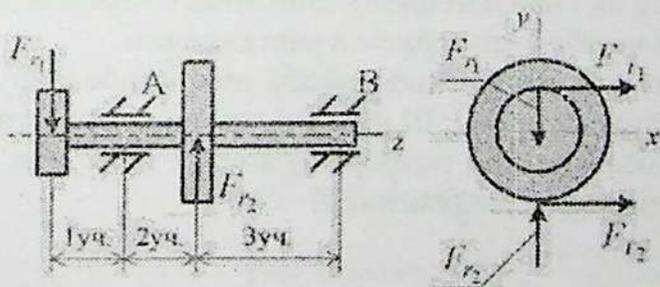
3. Выбрать формулу для определения расчётного момента по гипотезе максимальных касательных напряжений.

Варианты ответов:

1) $M_{\text{рас}} + T$, 2) $\sqrt{M_{\text{рас}}^2 + T^2}$, 3) $\sqrt{M_{\text{рас}}^2 + 0,75T^2}$,

4) верный ответ не приведен.

4. Выбрать участок вала, где действуют только изгибающий момент и поперечная сила.



Варианты ответов:

1) участок 1, 2) участок 2, 3) участок 3. 4) такого участка нет.

5. В опасном сечении стального бруса круглого поперечного сечения действуют изгибающий момент 500 кН·м и крутящий момент 200 кН·м.

Проверить прочность бруса, если его диаметр 60 мм, а допускаемое напряжение 160 МПа. Расчёт выполнить по IV гипотезе прочности.

Варианты ответов:

- 1) $\sigma_{red IV} = \sigma_{adm}$, 2) $\sigma_{red IV} < \sigma_{adm}$, 3) $\sigma_{red IV} > \sigma_{adm}$,
4) данных недостаточно.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
- ✓ Как находят опасные сечения вала при изгибе с кручением? Какая точка в этом сечении будет опасной?
- ✓ Покажите вид напряженного состояния в опасной точке вала при изгибе с кручением.
- ✓ Запишите условия прочности вала при изгибе с кручением по I, III и IV гипотезам прочности.
- ✓ При одинаковых значениях изгибающего и крутящего моментов по какой теории, III или IV, расчетное значение диаметра будет больше?
- ✓ Покажите вид напряженного состояния в опасной точке вала при изгибе с кручением и растяжением.
- ✓ Запишите условия прочности вала при изгибе с кручением и растяжением по I, III и IV гипотезам прочности.
- ✓ Какова особенность подбора диаметра вала при изгибе с кручением и растяжением?

Глава 10. Кривые стержни



Кривые стержни – это грузоподъемные крюки, звенья цепей, обода шкивов и колес, арки и так далее.

Оси этих стержней являются плоскими кривыми, в поперечных сечениях которых возникают три внутренних силовых фактора – N , Q , M .

Условие прочности.

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M}{S_{III}} \left(1 - \frac{r_{\text{вн}}}{r_{\text{вн}}} \right) \leq [\sigma]$$

Для определения перемещений в кривых стержнях используется метод Мора.

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int M_F \cdot \bar{M}_G dS$$

dS – длина дуги рассматриваемого участка. $dS = p \cdot dy$.

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int M_F \cdot \bar{M}_G r d\varphi$$

10.1. Определение напряжений

Задача № 150

Для стержня, изображенного на рисунке, построить эпюры внутренних сил и определить опасное сечение.

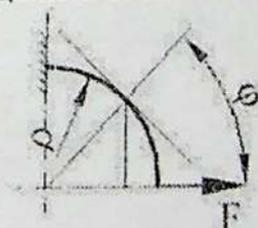


Рис. к задаче 150

Решение.

Составляем уравнения нормальной, поперечной сил и изгибающего момента.

$$N = F \cdot \sin \phi$$

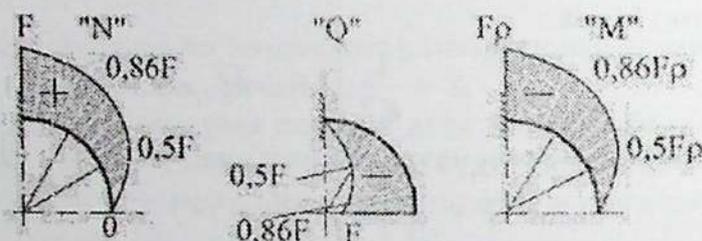
$$Q = -F \cdot \cos \phi$$

$$M = -F \cdot \rho(1 - \sin \phi)$$

Подставляем в уравнения внутренних сил центральный угол ϕ с шагом 30° , и по результатам расчетов составляем таблицу.

ϕ	N	Q	M
0	0	$-F$	0
30	$0,5F$	$-0,86F$	$-0,5F\rho$
60	$0,86F$	$-0,5F$	$-0,86F\rho$
90	F	0	$-F\rho$

Строим эпюры.



Ответ: опасное сечение находится в заделке.

Задача № 151

Для кривого стержня, показанного на рисунке, определить горизонтальное и вертикальное перемещение точки K .

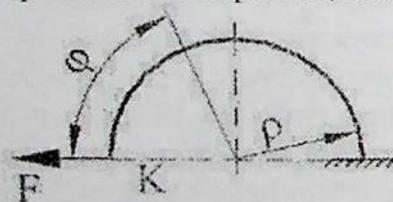


Рис. к задаче 151

- 1) Составляем уравнение изгибающего момента от внешних сил $M_F = -F \cdot \rho \cdot \sin \phi$
- 2) Прикладываем единичную силу в горизонтальном направлении



- 3) Составляем уравнение изгибающего момента от единичной силы

$$\bar{M} = -1 \cdot \rho \cdot \sin \phi$$

- 4) Определяем горизонтальное перемещение точки K

$$\begin{aligned} \delta_K^{\text{гор}} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (-F\rho \cdot \sin \phi - 1 \cdot \rho \cdot \sin \phi) \rho d\phi = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1,57 F \cdot \rho^3}{EI} \end{aligned}$$

- 5) Прикладываем единичную силу в вертикальном направлении



- 6) Составляем уравнение изгибающего момента от единичной силы

$$\bar{M} = -1 \cdot \rho (1 - \cos \phi)$$

- 7) Определяем вертикальное перемещение точки K

$$\begin{aligned} \delta_K^{\text{вер}} &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi} (-F\rho \cdot \sin \phi - 1 \cdot \rho (1 - \cos \phi)) \rho d\phi = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \int_0^{\pi} \sin \phi (1 - \cos \phi) d\phi = \\ &= \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \int_0^{\pi} (\sin \phi - \sin \phi \cdot \cos \phi) d\phi = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \left[\int_0^{\pi} \sin \phi d\phi - \int_0^{\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi \right] = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \left[-\cos \phi \Big|_0^{\pi} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \cos 2\phi \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{F \cdot \rho^3}{EI} \left(1 + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2F \cdot \rho^3}{EI} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \delta_K^{\text{гор}} = \frac{1,57 F \cdot \rho^3}{EI}, \quad \delta_K^{\text{вер}} = \frac{2F \cdot \rho^3}{EI}$$

Задача № 152

Кольцо, изображенное на рисунке, сделано из стержня круглого поперечного сечения диаметром 8 см. Внутренний диаметр кольца 12 см. Кольцо сжато силой $F=20\text{кН}$. Найти напряжения в точках A и B.

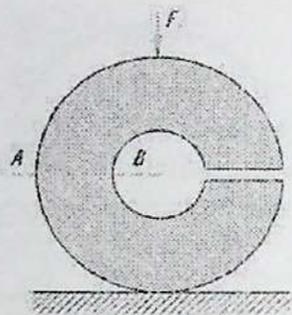


Рис. к задаче 152

Ответ: 26 МПа, - 60,7 МПа.

Задача № 153

Вилочный захват электропогрузчика (см. рис.) воспринимает нагрузку $F = 4,2 \text{ кН}$. Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасном сечении. Размеры захвата на рис. даны в миллиметрах.

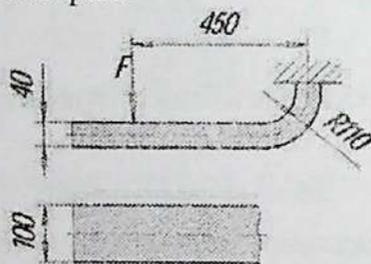


Рис. к задаче 153

Ответ: Наибольшие напряжения:

$$\sigma_{\max P} = 101 \text{ МПа}; \sigma_{\max сж} = - 75 \text{ МПа}$$

10.2. Определение допускаемой нагрузки

Задача № 154

На рисунке показана расчетная схема грядиля корпуса навесного плуга. Размеры грядиля: $l = 200 \text{ мм}$; $R_0 = 200 \text{ мм}$; $b = 30 \text{ мм}$; $h = 70 \text{ мм}$.

Определить допускаемую нагрузку $[F]$ из условия прочности по нормальным напряжениям. Материал грядиля – сталь 45,

допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа. Радиус кривизны нейтрального слоя для

$$r_n = \frac{h}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

прямоугольного сечения

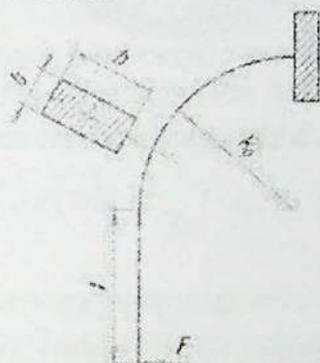


Рис. к задаче 157

Ответ: Допускаемая нагрузка $[F] = 8,36$ кН.

Глава 11. Устойчивость

При расчете упругих систем на устойчивость необходимо уметь определять величину критической силы, что касается длинного тонкого стержня при его сжатии.

$$F_{кр}^3 = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu l)^2}$$

Критическое напряжение определяется

$$\sigma_{кр}^3 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

где

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad \text{гибкость стержня,}$$

μ - коэффициент приведения длины, учитывающий условия закрепления стержня.

Однако расчеты на устойчивость по формулам Эйлера возможны, если гибкость стержня больше предельной гибкости

$$\lambda > \lambda_{пред}$$

$$\frac{\mu l}{i_{min}} > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пре}}}$$

Для центрально сжатых стержней с малой гибкостью $\lambda < \lambda_{пред}$ расчет выполняется при помощи коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения при сжатии - φ .

$$\sigma_{кр} = \frac{F}{S} \leq \varphi [\sigma]_{ж}$$

Где

$$\varphi = f(E; \lambda)$$

и определяется по таблицам продольного изгиба.

Следовательно, чтобы выполнить расчет на устойчивость необходимо:

1. Найти предельную гибкость;
2. Найти гибкость стержня;
3. Выбрать метод расчета.

$$\lambda > \lambda_{пред} - \text{по Эйлеру,}$$

$$\lambda < \lambda_{пред} - \text{по коэффициенту } \varphi.$$

11.1. Определение критической силы и критических напряжений

Задача № 155

На рис. показано колесо сеялки. Диаметр обода колеса $D=1,22$ м; диаметр ступицы $D_1=60$ мм; диаметр спицы круглого сечения $d=12$ мм. Материал – сталь Ст 3. Концы спиц заземлены. Определить критическую силу и напряжение.

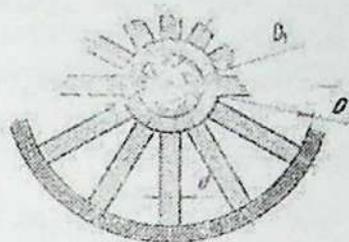


Рис. к задаче 155

Ответ: Критическая сила $F_{кр} = 22,6 \text{ кН}$; критическое напряжение $\sigma_{кр} = 200 \text{ МПа}$.

Задача № 156

Определить величину критического усилия и критического напряжения – для стойки прямоугольного поперечного сечения $12 \times 20 \text{ см}^2$ длиной 7 м из дерева с модулем упругости $E = 0,9 \times 10^4 \text{ МПа}$. В плоскости наименьшей жесткости оба конца стойки защемлены, а в перпендикулярной – оба конца стойки шарнирно оперты (см. рисунок).

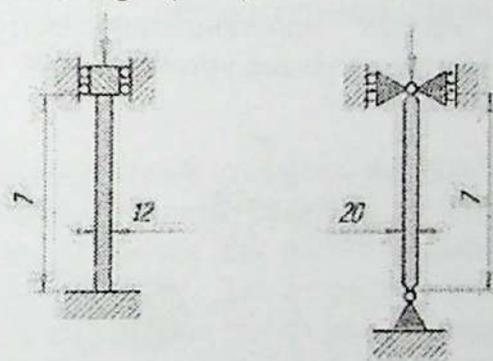


Рис. к задаче 156

Ответ: 145 кН ; $6,04 \text{ МПа}$.

Задача № 157

Пользуясь таблицей значений коэффициента снижения допускаемого напряжения, определить наибольшую допускаемую величину сжимающей нагрузки на стойку двутаврового поперечного сечения (двутавр №24а) из Ст. 3 при основном допус-

каемом напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Длина стойки 2,5 м; оба конца ее шарнирно оперты.

Решение. Двутавр № 24а по сортаменту имеет $S = 47,7 \text{ см}^2$ и $i_{\min} = 2,42 \text{ см}$.

Приведенная гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 250}{2,42} = 103,3$$

Из таблицы значений φ – коэффициента снижения допускаемого напряжения при продольном изгибе – путем линейной интерполяции находим: $\varphi = 0,574$. Допускаемое усилие равно $[F] = \varphi \cdot [\sigma] \cdot S = 0,574 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 47,7 \cdot 10^{-4} = 438 \text{ кН}$

11.2. Расчет коэффициента запаса устойчивости

Задача № 158

Стержень круглого поперечного сечения (см. рис.) длиной $l = 1 \text{ м}$ сжимается осевой силой $F = 50 \text{ кН}$. Диаметр стержня $d = 40 \text{ мм}$. Материал – дюралюмин; модуль продольной упругости $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; предел пропорциональности $\sigma_{\text{пр}} = 170 \text{ МПа}$. Определить коэффициент запаса устойчивости.

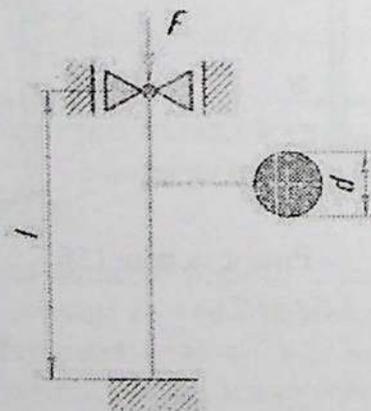


Рис. к задаче 158

Ответ: Фактический коэффициент запаса устойчивости $n_y = 3,54$.

Задача № 159

Проверить устойчивость полой стальной штанги механизма газораспределения двигателя (см. рис.) длиной $l = 450$ мм, если наружный диаметр $d_H = 10$ мм, внутренний — $d_B = 7$ мм. Нагрузка на штангу $F = 1,4$ кН. Рекомендуемый коэффициент запаса устойчивости $[n_y] = 2,5$.

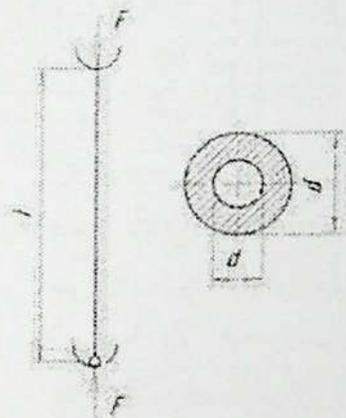


Рис. к задаче 159

Ответ: Устойчивость штанги гарантирована, поскольку $n_y = 2,59 > [n_y]$.

Задача № 160

Прямолинейный стальной стержень нагружен осевой силой P . Дать определение гибкости стержня, понятие предельной гибкости. Привести формулы для расчета критической силы в зависимости от его гибкости. Для стержня составного сечения подобрать размер s из условия равно устойчивости стержня относительно главных центральных осей. Из расчета на устойчивость по коэффициенту продольного изгиба $\varphi(\lambda)$ определить допускаемое значение внешней силы P . Принять $[\sigma] = 160$ МПа.

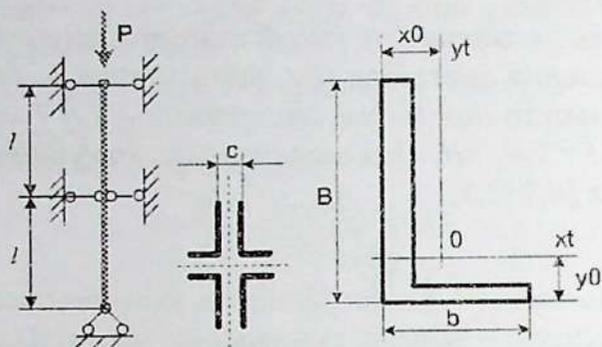


Рис. к задаче 160

Решение задачи выполним в системе Mathcad.

$$p_1 = 3.14159 \quad l_0 = 2.0 \text{ м} \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad \sigma_{dp} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$B = 0.08 \quad b = 0.05 \quad x_0 = 0.0115 \quad y_0 = 0.026$$

$$A_x = 6.36 \cdot 10^{-4} \quad J_{xx} = 41.64 \cdot 10^{-8} \quad J_{yt} = 12.69 \cdot 10^{-8}$$

$$J_x = (2 \cdot J_{xt} + y_0^2 \cdot A) \quad J_y = 2 \left[J_{yt} + \left(\frac{c}{2} + x_0 \right)^2 \cdot A \right]$$

$$\text{root} \\ x = 0.1$$

$$x = \text{root} \left[2 \cdot (J_{xt} + y_0^2 \cdot A) - 2 \left[J_{yt} + \left(\frac{x}{2} + x_0 \right)^2 \cdot A \right], x \right] = 0.045$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{xx}}{A}} = 0.013$$

$$\mu = 0.5 \quad \lambda = \frac{\mu \cdot (2 \cdot l)}{i} = 156.327$$

$$\varphi = 0.73$$

$$F_{dp} = 4 \cdot \varphi \cdot \sigma_{dp} \cdot A = 3.053 \times 10^5$$

Тесты для самопроверки

Устойчивость сжатых стержней

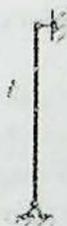
Вариант 1

1. Что такое «критическая сила»?

Варианты ответов:

- 1) максимальная сжимающая сила, при которой стержень сохраняет свою прочность; 2) максимальная сжимающая сила, при которой стержень теряет упругость; 3) сила, при которой стержень сохраняет свою устойчивость; 4) максимальная сила, при которой в стержне появляются пластические деформации.

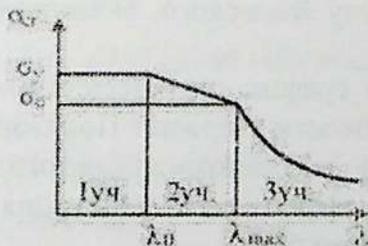
2. Определить приведенную длину стержня для расчёта на устойчивость, если $l = 3$ м.



Варианты ответов:

- 1) 1,5 м; 2) 2,1 м; 3) 3 м; 4) 6 м.

3. От каких параметров сжатого стержня (смотри приведенный график) зависит величина λ_{\max} ?



Варианты ответов:

- 1) от материала, 2) от длины стержня, 3) от поперечного сечения, 4) от способа закрепления.

4. Как изменится $F_{сж}$ при замене двутавра №16 двутавром №20 (при прочих равных условиях)? Применима формула Эйлера.

Варианты ответов:

- 1) уменьшится в 2 раза, 2) уменьшится в 4 раза,
3) увеличится в 2 раза, 4) увеличится в 8 раз
5. Определить $F_{сж}$ для стержня в вопросе 2. Сечение – двутавр №20, материал сталь $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Варианты ответов:

- 1) 61 кН, 2) 252 кН, 3) 496 кН, 4) 992 кН.



Вопросы для самоконтроля

- ✓ В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
- ✓ Какую силу называют критической?
- ✓ Запишите формулу Эйлера.
- ✓ При каких условиях применима формула Эйлера?
- ✓ Как влияют условия закрепления стержня на критическую силу, вычисляемую по формуле Эйлера?
- ✓ Что называют гибкостью стержня? От каких параметров она зависит?
- ✓ Что называют предельной гибкостью?
- ✓ Как вычисляют критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?
- ✓ Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима?
- ✓ Какой вид имеет график критических напряжений в зависимости от гибкости стержня? Покажите его.
- ✓ Запишите условие устойчивости сжатого стержня.
- ✓ Что называют коэффициентом снижения основных допускаемых напряжений ρ_x ?
- ✓ Как производят расчет сжатых стержней на устойчивость при помощи коэффициента ρ_x ?
- ✓ Что называют проверочным и проектировочным расчетом на устойчивость?

Глава 12. Динамические нагрузки

К расчетам на прочность при динамических нагрузках следует отнести расчеты при действии сил инерции, ударных нагрузок, вибраций (упругие колебания), знакопеременных нагрузок.

12.1. Учет сил инерции

Задача № 161

Маховик с радиусом инерции массы $i = 600$ мм и массой $m = 200$ кг (см. рис.) вращается с угловой скоростью $\omega = 75,4$ рад/с. При торможении с равномерным замедлением маховик останавливается через 20 оборотов. Определить максимальное касательное напряжение в вале диаметром $d = 50$ мм, на котором посажен маховик

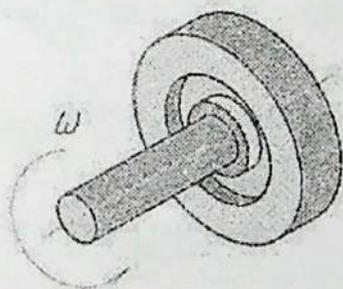


Рис. к задаче 161

Решение. При равнозамедленном движении угловое ускорение (замедление) маховика

$$\varepsilon = \omega^2 / 2\varphi = 75,4^2 / 2 \cdot 40 \cdot 3,14 = 22,6 \text{ рад/с}^2.$$

Крутящий момент —

$$M_K = m i \varepsilon = 2000 \cdot 0,6 \cdot 22,6 = 27160 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_K = 27,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Касательное напряжение —

$$\tau = M_K / W_p = \frac{27,16 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^{-6}} = 1090 \text{ МПа}. \quad \text{Здесь } W_p = 0,2 \cdot 5^3 = 25 \text{ см}^3.$$

Задача № 162

Стальной диск диаметром $D=250$ мм и толщиной $h=50$ мм установлен на валу диаметром $d=50$ мм и длиной $l=1000$ мм (см. рис.) и вращается с частотой

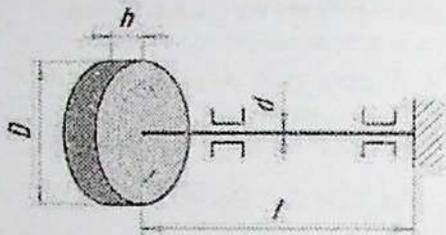


Рис. к задаче 162

$n = 600$ мин⁻¹. Определить наибольшие напряжения в валу при внезапном торможении правого его конца.

Решение. Масса диска (маховика)

$$m = \frac{\pi D^2}{4} h \rho = \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cdot 0,05 \cdot \frac{78,5}{9,8} \times 10^3 = 19,26 \text{ кг},$$

момент инерции массы

$$I = \frac{mD^2}{8} = \frac{19,26 \cdot 0,25^2}{8} = 0,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Динамический момент

$$M_d = \omega \sqrt{GI_p I},$$

касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\omega}{W_p} \sqrt{GI_p I},$$

полярный момент инерции

$$J_p = 0,1d^4 = 0,1 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8} = 62,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{62,5 \cdot 10^{-8}}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подставляя значения получим

$$\tau_{\max} = \frac{\pi 600}{30 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{0,15 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}}{1}} = 217,5 \text{ МПа}.$$

12.1. Расчеты на удар

Задача № 163

Стальной стержень диаметром $d = 20$ мм и длиной $l = 1$ м растягивается падающим с высоты $H = 200$ мм грузом массой $m = 12,5$ кг (см. рис.). Определить динамическое напряжение и деформацию. Как изменятся их значения при замене материала стержня на дюралюмин, модуль упругости которого $E_d = 7,0 \cdot 10^4$ МПа?

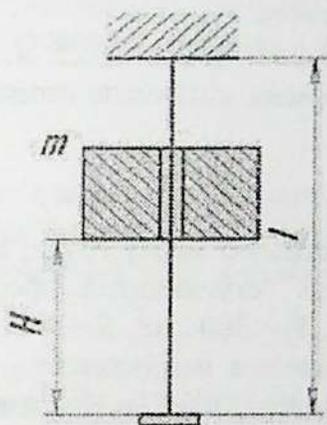


Рис. к задаче 163

Решение. Динамическое напряжение

$$\sigma_d = k_d \sigma_c,$$

где статическое напряжение

$$\sigma_c = F/S.$$

Вес груза

$$F = mg \approx 125 \text{ Н.}$$

статическое напряжение

$$\sigma_c = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 0,398 \text{ МПа}$$

Коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_c}}$$

(без учета собственной массы стержня), где статическая деформация

$$\Delta_c = \Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{125 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}} = 1,99 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,99 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$$

Коэффициент динамичности

$$\epsilon_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 200}{1,92 \cdot 10^{-3}}} = 449$$

Для жесткого стержня единицами в формуле к можно было бы пренебречь. Динамическое напряжение

$$\sigma_d = 449 \cdot 0,398 = 179 \text{ МПа}$$

Для дюралюминиевого стержня

$$\Delta_c = 5,68 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \sigma_d = 265 \cdot 0,398 = 105,5 \text{ МПа}$$

Таким образом, замена материала позволяет снизить напряжения в 1,69 раза.

Задача № 164

Определить допустимую массу груза, падающего с высоты $H=0,1 \text{ м}$ на стержень ступенчатой формы с размерами: $l_1=600 \text{ мм}$, $l_2=400 \text{ мм}$; $S_1=300 \text{ мм}^2$, $S_2=500 \text{ мм}^2$ (см. рис.). Материал - дерево, допустимое напряжение $[a]=12 \text{ МПа}$, модуль продольной упругости $E=10^4 \text{ МПа}$. Как изменится напряжение, если стержень изготовить постоянного сечения $S_2=500 \text{ мм}^2$?

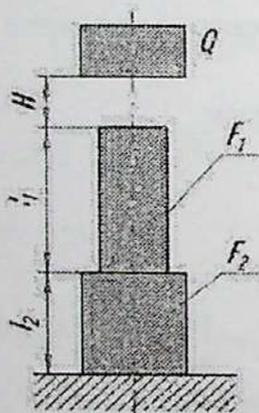


Рис. к задаче 164

Ответ: Масса груза $m = 1,83 \text{ кг}$, $\sigma_{d(2)} = 7,17 \text{ МПа}$.

Задача № 165

Стальной стержень диаметром 25 мм и длиной 1,5 м растянут внезапно приложенной постоянной силой 25 кН. Определить наибольшее напряжение и деформацию.

Ответ: 102 МПа; 0,765 мм.

Задача № 166

Вертикальный стержень, статически сжатый силой F , укорачивается на 2 мм. Определить наибольшее укорочение стержня, если этот же груз сожмет его, падая с высоты 1 м.

Ответ: 4,83 мм.

Задача № 167

Груз 45 кг падает с высоты 10 см на балку, которая от этого удара прогибается на 2,5 см. Какая статическая нагрузка, приложенная в том же сечении балки, вызовет тот же прогиб?

Ответ: 450 кг.

12.3. Свободные и вынужденные колебания упругих систем

Задача № 168

Двигатель весом 12 кН укреплен посередине пролета $l = 3$ м двух двутавровых балок №30а, каждая из которых шарнирно оперта по концам (см. рисунок). Определить коэффициент нарастания колебаний, динамический коэффициент и величину наибольшего нормального напряжения в балках, если двигатель делает 2000 об/мин, а центробежная сила инерции, возникающая вследствие неполной уравновешенности вращающихся частей двигателя, равна $H = 2$ кН. Учесть собственный вес балок. Силами сопротивления пренебречь.

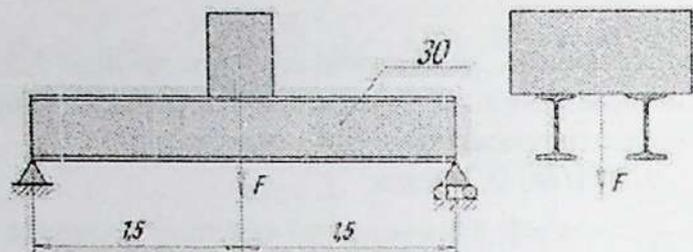


Рис. к задаче 168

Решение. Частота собственных колебаний груза определяется по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}} = \sqrt{\frac{48EJ_{x^2}g}{\left(\frac{1}{2}F + \frac{17}{35}Ql\right)l^3}} = 215,9 \text{ 1/сек}$$

Частота изменения возмущающей силы равна

$$\omega = \frac{\pi}{30} \frac{3,14 \cdot 2000}{30} = 209,4 \text{ 1/сек}$$

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{209,4}{215,9}\right)^2} = 17,04$$

Динамический коэффициент

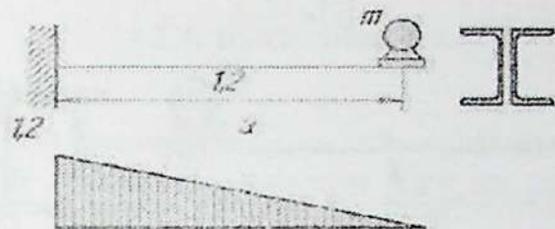
$$K_d = 1 + \frac{f_H}{f_F} \beta = 1 + \frac{H}{F} \beta = 1 + \frac{2000}{12000} 17,04 = 3,84$$

Наибольшее нормальное напряжение в балках равно

$$\max \sigma_d = \max \sigma_{ст} k_d = \frac{Fl}{2 \cdot 4 \cdot W} k_d = \frac{12000 \cdot 300}{2 \cdot 4 \cdot 597} \cdot 3,84 = 28,9 \text{ МПа}$$

Задача № 169

На консоли из двух швеллеров №27 (см. рис., а б) установлен двигатель с массой $m=2300$ кг и частотой вращения $n=720 \text{ мин}^{-1}$. Определить круговую частоту собственных колебаний и проверить систему на резонанс.



Решение.

Используем выражение частоты

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta_{11}}},$$

где δ_{11} - перемещение от единичной силы, приложенной в месте установки двигателя,

$$\delta_{11} = \frac{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2}{3EI} = \frac{0,57}{EI} \text{ Н} \cdot \text{м}^3, \text{ здесь } EI = 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \times 4160 \cdot 10^{-8} = 16,64 \text{ МН} \cdot \text{м}^2.$$

Перемещение от единичной силы

$$\delta_{11} = \frac{0,57 \cdot 10^{-6}}{16,64} = 3,42 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

круговая частота собственных колебаний

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2300 \cdot 3,42 \cdot 10^{-8}}} = 112,8 \text{ с}^{-1},$$

Частота вынужденных колебаний

$$\omega_n = \frac{\pi 720}{30} = 75,4 \text{ с}^{-1};$$

относительная разница частот

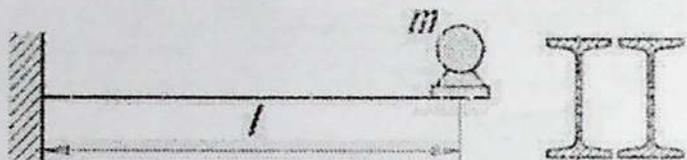
$$\Delta\omega = \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n} 100\% = \frac{112,8 - 75,4}{75,4} = 49,6\%,$$

что более 30%, т. е. опасности резонанса нет.

Задача № 170

Электродвигатель массой $m = 1500 \text{ кг}$ установлен на консоли из двух двутавров № 18а длиной $l = 1 \text{ м}$ (см. рис.). Неуровновешенная масса ротора вызывает центробежную силу $F = 1 \text{ кН}$. Частота вращения ротора электродвигателя $n = 720 \text{ мин}^{-1}$. Проверить систему на резонанс, а также прочность и жесткость балки, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$, допускаемый прогиб

$$[f] = \frac{1}{500} l.$$



Решение. Статический прогиб на конце балки

$$\Delta_c = \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} = 0,875 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

здесь $Q = mg = 15 \text{ кН}$ – вес двигателя. Круговая частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_c}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,875 \cdot 10^{-3}}} = 106 \text{ с}^{-1}.$$

Частота возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi \cdot 720}{30} = 75,4 \text{ с}^{-1}, \text{ поэтому } \Delta\omega = \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \cdot 100 = \frac{106 - 75,4}{75,4} \cdot 100 = 40,6\%,$$

что более 30%, поэтому резонанс не опасен. Статическое напряжение

$$\sigma_c = \frac{M_c}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} = 47,2 \text{ МПа},$$

Коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = 1 + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{75,4}{106}\right)^2} = 1,13,$$

динамическое напряжение

$$\sigma_d = \sigma_c k_d = 53,3 \text{ МПа} < [\sigma],$$

т. е. прочность обеспечена. Динамический прогиб

$$\Delta_d = \Delta_c k_d = 0,875 \cdot 10^{-3} \cdot 1,13 = 0,988 \cdot 10^{-3} \text{ м} < [f] = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

поэтому жесткость тоже обеспечена.

12.4. Выносливость

Задача № 171

Круглый вал диаметром 60 мм, имеющий в месте перехода к диаметру 70 мм галтель радиусом 5 мм (см. рисунок), изготовлен из углеродистой стали, для которой:

$$\sigma_{II} = 80 \text{ МПа}, \quad \sigma_{II}^H = 55 \text{ МПа}, \quad \sigma_{II}^K = 35 \text{ МПа};$$

$$\tau_{II}^K = 28 \text{ МПа} \text{ и } \tau_{II}^K = 20 \text{ МПа}.$$

Вал изгибается моментом, меняющимся от

$$-M_{II}^{\max} \text{ до } +M_{II}^{\max} = 600$$

Нм, и скручивается моментом, меняющимся от нуля до $T_{KP} = 1800$ Нм; при этом наибольших и наименьших своих значений изгибающий и крутящий моменты достигают одновременно. Коэффициент динамичности нагрузки для переменной составляющей цикла нормальных и касательных напряжений равен 2; коэффициент запаса прочности 1,8. Проверить прочность вала.

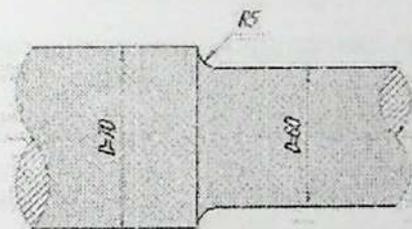


Рис. к задаче 171

Решение. Условие прочности вала, подвергающегося одновременно изгибу и кручению, может быть написано так:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{II}}{[\sigma_{II}^H]}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{II}^K}{[\tau_{II}^K]}\right)^2} \geq 1$$

Здесь

$$[\sigma_{II}^H] \text{ и } [\tau_{II}^K]$$

допускаемые напряжения при изгибе и кручении, определяемые для детали в зависимости от степени асимметрии цикла нормальных и касательных напряжений.

Определим

$$[\sigma_{rH}^{HI}] \text{ и } [\tau_{rK}^{KI}]$$

Характеристика цикла при изгибе

$$r_H = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{M_{\min}}{M_{\max}} = \frac{-M_{\max}}{M_{\max}} = -1$$

Величину допускаемого напряжения при изгибе (симметричный цикл) определим по формуле

$$[\sigma_{rH}^{HI}] = [\sigma_{\pm}^{HI}] = \frac{\sigma_{\pm}^H}{k \cdot K_A \cdot \alpha_{KT} \cdot \alpha_M}$$

Величину теоретического коэффициента концентрации напряжений при изгибе вала с галтелью находим по таблице. Для отношения

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{60} = 0,0833,$$

применяя линейную интерполяцию между значениями

$$\alpha_{KT} = 1,75 \text{ при } \frac{r}{d} = 0,0625 \text{ и } \alpha_{KT} = 1,50 \text{ при } \frac{r}{d} = 0,125, \text{ имеем } \alpha_{KT} = 1,67.$$

Величину коэффициента чувствительности определяем по графику фиг. 626 курса; при $\sigma_{KT} = 1,67$ и $\sigma_B = 80 \text{ МПа}$ имеем $q = 0,67$.

Таким образом,

$$\alpha_{KT} = 1 + q(\alpha_{KT} - 1) = 1 + 0,67(1,67 - 1) = 1,45$$

Величину масштабного коэффициента определяем по кривой 2 фиг. 629 курса; при $d = 60 \text{ мм}$ имеем $a_M = 1,46$. Так как $k = 1,8$ и $K_D = 2$, то

$$[\sigma_{\pm}^{HI}] = \frac{3500}{1,8 \cdot 2 \cdot 1,45 \cdot 1,46} = 459 \text{ МПа}$$

Характеристика цикла при кручении

$$r_K = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{M_{K \min}}{M_{K \max}} = 0$$

Величину допускаемого напряжения для симметричного цикла при кручении определяем по формуле

$$[\tau_{\text{кр}}] = \frac{\tau^k}{k \cdot K_d \cdot a_{KT} \cdot a_M}$$

Величину теоретического коэффициента концентрации напряжений при кручении вала с галтелью находим по таблице. Интерполируя между значениями

$$\alpha_{KT} = 1,2 \text{ при } \frac{r}{d} = 0,1, \alpha_{KT} = 1,8 \text{ при } \frac{r}{d} = 0,02, \text{ для отношения } \frac{r}{d} = 0,0833$$

находим $a_{KT} \sim 1,3$. Величина коэффициента чувствительности при $a_{KT} = 1,3$ и $\sigma_B = 80 \text{ МПа}$, равна $q = 0,55$.

Поэтому

$$\alpha_{KT} = 1 + 0,55(1,3 - 1) = 1,17$$

Величина масштабного коэффициента та же, что и при изгибе: $a_M = 1,46$. Таким образом, допускаемое напряжение для симметричного цикла при

кручении равно

$$[\tau_{\text{кр}}] = \frac{2000}{1,8 \cdot 2 \cdot 1,17 \cdot 1,46} = 325 \text{ МПа}$$

Допускаемое напряжение для постоянного цикла при кручении равно

$$[\tau_{\text{кр}}] = \frac{\tau_{KT}}{k} = \frac{\tau^k}{k} = \frac{2800}{1,8} = 1555 \text{ МПа}$$

Величину допускаемого напряжения при кручении детали для цикла с характеристикой $r = 0$ определяем по формуле

$$[\tau_{\text{кр}}] = [\tau_{\text{кр}}^0] = \frac{2[\tau_{\text{кр}}^0] [\tau_{\text{кр}}^1]}{(1+r)[\tau_{\text{кр}}^0] + (1-r)[\tau_{\text{кр}}^1]} = \frac{2 \cdot 1555 \cdot 325}{(1+0)325 + (1-0)1555} = 536 \text{ МПа}$$

Наибольшие действительные значения напряжений σ_H и τ_K при изгибе и кручении вала равны:

$$\sigma_H = \frac{M_H}{W_H} = \frac{32 M_H}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 60000}{3,14} = 283 \text{ МПа},$$

$$\text{и } \tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{16 M_K}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 18000}{3,14 \cdot 6^3} = 424 \text{ МПа}$$

Подставив в условие прочности значения σ_H и τ_K , а также найденные

$$\sqrt{\left(\frac{283}{459}\right)^2 + \left(\frac{424}{536}\right)^2} = 1,003 \approx 1$$

Прочность вала обеспечена.

Задача № 172

Стальной вал диаметром 30 мм испытывает симметричный изгиб под действием момента $M_x = \pm 0,2 \text{ кНм}$ (см. рис.). В средней части вал имеет утолщение, причем $D/d = 1,25$, радиус галтели $r = 0,1d$. Обработка токарная, чистовая, материал - сталь 60 с характеристиками: временное сопротивление $\sigma_b = 800 \text{ МПа}$, предел выносливости $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$. Проверить циклическую прочность вала, если коэффициент запаса $[n] = 2$.

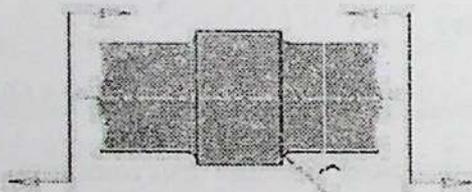


Рис. к задаче 172

Решение. Условие прочности при изгибе симметричной нагрузкой

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma_{-1}]$$

Для условий задачи

$$M_{x\max} = 0,2 \text{ кНм},$$

$$W_s = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 30^3 \cdot 10^{-9} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \quad \sigma_{\max} = 74 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1L}}{n_F}, \quad \text{где } \sigma_{-1L} = \sigma_{-1} \frac{k_a k_F}{k_D}$$

предел выносливости детали.

Из приложений находим: коэффициент качества поверхности $k_F = 0,9$ (чистовая обточка, $\sigma_B < 1000 \text{ МПа}$, приложение 9), масштабный фактор $k_a = 0,85$ (сталь углеродистая, $\sigma_B = 500 \dots 800 \text{ МПа}$, диаметр 30 мм, приложение 10). Эффективный коэффициент концентрации напряжений $k_D = 1,54$ (сталь $\sigma_B = 800 \text{ МПа}$, $D/d = 1,25$, $r/d = 0,1$, приложение 11). Вычисляем. Таким образом, $\sigma_{\max} < [\sigma_{-1}]$, т. е. циклическая прочность обеспечена.

Задача № 173

Определить минимальный радиус галтели для ступенчатого вала с диаметром $d = 35 \text{ мм}$,

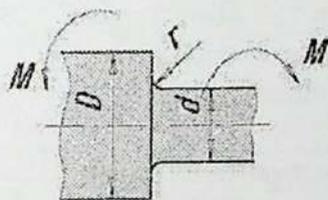


Рис. к задаче 173

$D = 52 \text{ мм}$ (см. рис.) при действии крутящего момента M_K , изменяющегося по симметричному циклу с частотой $n = 720 \text{ мин}^{-1}$, приложенная мощность $N = 24 \text{ кВт}$. Вал изготовлен чистовой шлифовкой из углеродистой стали Ст5 ($\sigma_B = 600 \text{ МПа}$, $\tau_L = 140 \text{ МПа}$), нормативный коэффициент запаса циклической прочности $[n] = 1,8$.

Ответ: Минимальный радиус закругления $r = 1,75 \text{ мм}$.

ГЛОССАРИЙ

№	Термины на русском языке	Термины на английском языке	Термины на узбекском языке	Значение терминов
1	Сила	Force	Kuch	это величина являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел.
2	Система сил	System of forces	Kuchlar sistemasi	это совокупность нескольких сил, действующих на какое-нибудь твердое тело.
3	Сила реакций связи	Force of responses of connection	Bog'lanish reaksiya kuchi	это сила, в которой данная связь действует на тело.
4	Проекция силы на ось	Projection of force to an axis	Kuchning o'qqa proeksiyasi	это скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора силы
5	Момент силы относительно точки	The moment of force concerning a point	Kuchning nuqtaga nisbatan momenti	это величина, равная взятой с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча
6	Пара сил	Force couple	Juft kuch	это система двух равных по модулю,

				параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на разные точки твердого тела
7	Момент пары сил	The force couple moment	Juft kuch momenti	это величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на её плечо.
8	Главный вектор	Principal vector	Bosh vektor	это величина, равная геометрической сумме всех сил системы.
9	Главный момент	The principal moment	Bosh moment	это величина, равная алгебраической сумме (при плоской системе сил) или геометрической сумме (при пространственной системе сил) моментов всех сил системы относительно центра приведения.
10	Балка	Beam	Balka	брус, нагруженный внешними силами, перпендикулярными его оси, и работающий главным образом на изгиб
11	Брус	Bar	Brus	тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим.

12	Вал	Shaft	Val	брус, нагруженный парами сил, лежащими в плоскости поперечного сечения, и работающий на кручение.
13	Внецентренное растяжение-сжатие	Vnetsentreppoe stretching-compression	Markazdan tashqari cho'zilish-siqilish	растяжение или сжатие стержня, при котором равнодействующая внутренних сил направлена по нормали к поперечному сечению, но не проходит через его центр тяжести.
14	Внешние силы	Exterior forces	Tashqi kuchlar	силы, действующие со стороны какого-либо тела или системы на рассматриваемое тело или систему. К внешним силам относятся не только активные силы (нагрузка), но и реакции связей или опор.
15	Внутренние силы	Internal forces	Ichki kuchlar	силы взаимодействия между мысленно рассеченными частями материального тела. Иначе: силы упругости, силы сопротивления, усилия.
16	Главные моменты	The principal mo-	Inertsiya xolidagi	Моменты инерции относительно глав-

	инерции сечения	ments of inertia of section	kesishuv	ных осей инерции сечения
17	Главные напряжения	The principal voltages	Bosh kuchlanish	нормальные напряжения, действующие по главным площадкам
18	Главные оси поперечного сечения	Cross-section principal axes	Asosiy o'qdagi ko'ndalang kesishuv	Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль.
19	Главные площадки	Principal platforms	Asosiy maydonchalar	три взаимно перпендикулярные площадки в окрестности исследуемой точки, на которых касательные напряжения равны нулю
20	Деформация	Strain	Deformatsiya	изменение твердым телом своей первоначальной формы и размеров под действием приложенных к нему сил или температуры
21	Жесткость	Ruggedness	Qattqlik	способность материала элементов конструкций сопротивляться образованию упругих деформаций, возникающих под действием внешних сил
22	Изгиб плоский	Curving flat	Tekis egilish	изгиб, при котором все силы, изгибающие балку, лежат в

				одной из плоскостей симметрии балки (в одной из главных плоскостей).
23	Изгиб поперечный	Curving cross-section	Ko'ndalang egilish	такой вид нагружения бруса, при котором из шести внутренних силовых факторов в сечении бруса отличным от нуля является изгибающий момент и поперечная сила.
24	Изгиб чистый	Curving pure	Toza egilish	такой вид нагружения бруса, при котором из шести внутренних силовых факторов в сечении бруса отличным от нуля является только один изгибающий момент
25	Изгибающий момент	The bending moment	Eguluschi moment	пара внутренних сил, перпендикулярная к плоскости поперечного сечения. Изгибающие моменты равны сумме моментов внешних сил относительно осей y и x соответственно:
26	Консоль	The extension housing	Konsol	балка с одним заземленным и другим свободным концом или часть балки, продолжающаяся за опору

27	Кручение	Twist	buralish	дид нагружения бруса, при котором из шести составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил от нуля отличается только крутящий момент.
28	Линия балки упругая	Line of a girder the elastic	Balka chizig'idagi elastik	Проекция нейтрального слоя на плоскость изгиба
29	Напряжения	Voltages	Kuchlanishlar	мера интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, то есть усилия, приходящиеся на единицу площади сечения.
30	Напряжения касательные	Voltages tangents	Teginuvchi kuchlanishlar	составляющие полного вектора напряжений, лежащие в плоскости рассматриваемого сечения.
31	Напряжения нормальные	Voltages normal	Me'yoriy kuchlanishlar	составляющие полного вектора напряжений, направленные по нормали к рассматриваемому сечению.
32	Оболочка	Envelope	Qobiq	телo, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими.
33	Опасное сечение	Dangerous section	Xafli kesishuv	поперечное сечение стержня, где возникают наибольшие

				напряжения, растягивающие и сжимающие
34	Пластина	Plate	Plastina	элемент конструкции, у которого одно измерение (толщина) мало по сравнению с двумя другими. Пластина, криволинейная до нагружения, называется оболочкой.
35	Предел пропорциональности	Proportionality limit	Mutanosiblik chegarasi	называется наибольшее напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой, и деформацией.
36	Предел прочности	Tensile strength	Mustahkamlik chegarasi	отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец из данного материала, к начальной площади поперечного сечения образца
37	Предел текучести	Yield point	Oquvchilik chegarasi	называется наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.
38	Предел упругости	Elasticity breaking	Elastiklik chegarasi	называется максимальное на-

		point		пряжение, при котором в материале не обнаруживается признаков пластической (остаточной) деформации
39	Принципы начальных размеров	Principle of the initial sizes	Boshlang'ich o'ichovlar prinsipi	Упругие тела являются относительно жесткими, благодаря чему перемещения точек тела весьма малы по сравнению с размерами самого тела
40	Прогиб балки	Girder sag	Balkaning egilishi	поступательные перемещения сечений, равные перемещениям их центров тяжести.
41	Пролет	Span	Quloch	вся балка или ее часть, расположенная между двумя соседними опорами.
42	Прочность	Strength	Mustahkamlik	способность материала воспринимать нагрузки, не разрушаясь.
43	Растяжение (сжатие)	Tension (squeezing)	Cho'zilish (siqilish)	простой вид сопротивления, при котором стержень нагружен силами, параллельными продольной оси стержня и приложенными в центр тяжести его сечения.
44	Сдвиг чистый	Shear pure	Toza siljish	такой вид нагруже-

	стый			ния бруса, при котором в его поперечных сечениях из шести составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил, от нуля отличается только поперечная (перерезывающая) сила
45	Смятие	Crumbling	Parchalash	пластическая деформация местного характера, возникающая на поверхности контакта при действии сжимающих сил.
46	Срез	Cut	Qirqim	разрушение, происходящее от сдвига в плоскости максимальных касательных напряжений.
47	Статически определимые системы	Statically definable systems	Statik aniqlash tizimi	Задачи, в которых все реакции связей определяются из условий равновесия.
48	Статическая неопределимость	Static indefinability	Statik noaniqlik	Свойство расчетной схемы конструкции, при котором число неизвестных реакций связей превышает число уравнений равновесия.
49	Упругая линия	Elastic line	Elastic chiziq	изогнутая ось балки в пределах упругих деформаций матери-

				ала.
50	Условие прочности балки	Condition of strength of a girder	Balkaning mustahkamlik holati	требование, чтобы максимальные расчетные нормальные напряжения не превышали допускаемых напряжений для материала балки.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

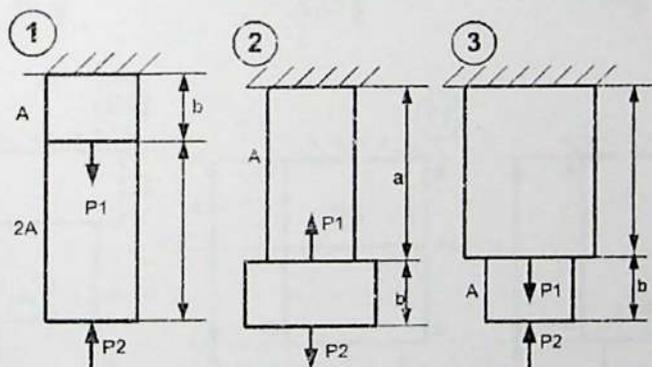
Расчетно-графическая работа №1

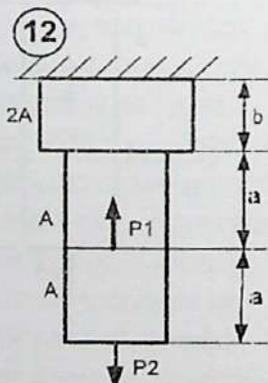
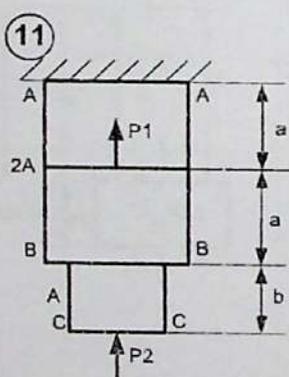
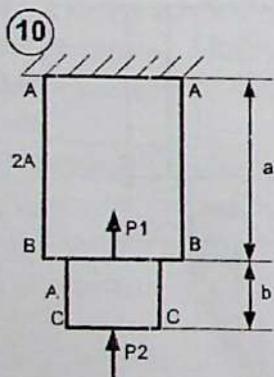
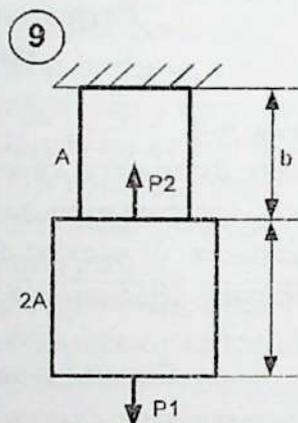
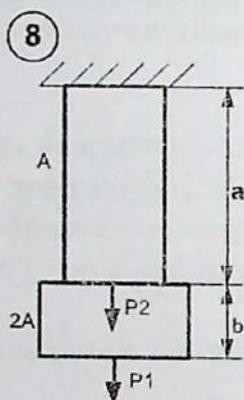
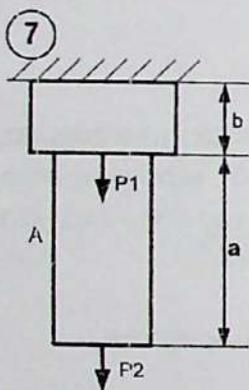
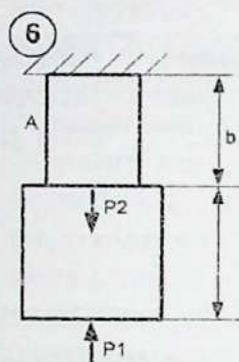
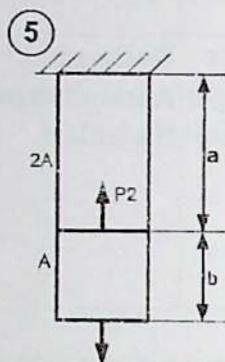
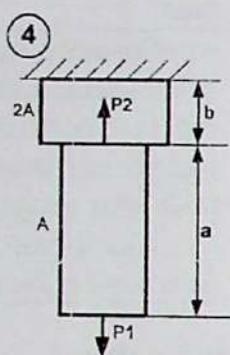
Растяжение-сжатие

Задача №1.

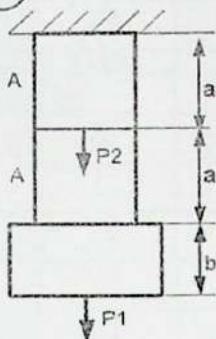
Для стального стержня определить во всех поперечных сечениях продольную силу N , напряжение σ и вертикальные перемещения δ всех поперечных сечений стержня. Результаты изобразить графически, построив эноры N , σ , δ .

Схемы к задаче №1 Растяжение-сжатие

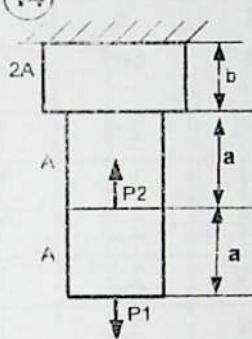




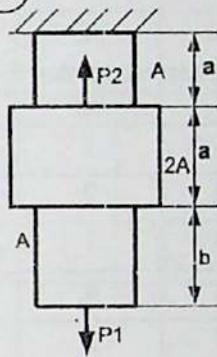
13



14



15



16

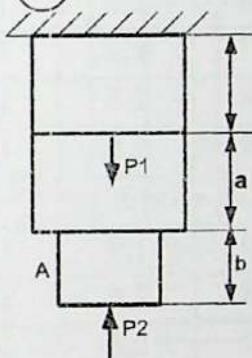


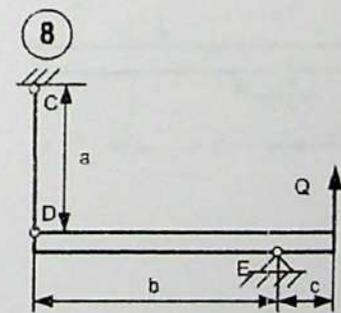
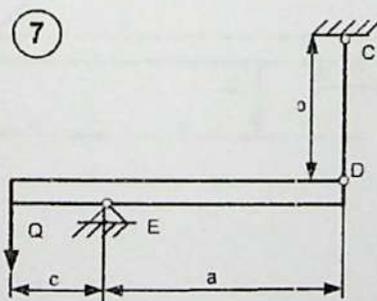
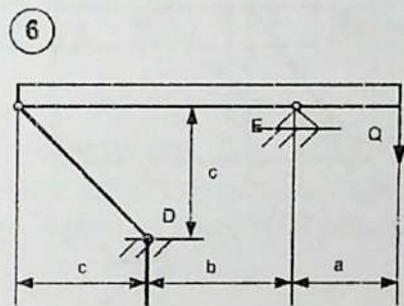
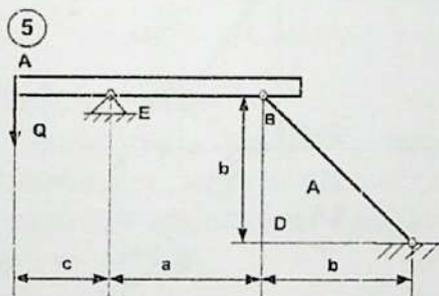
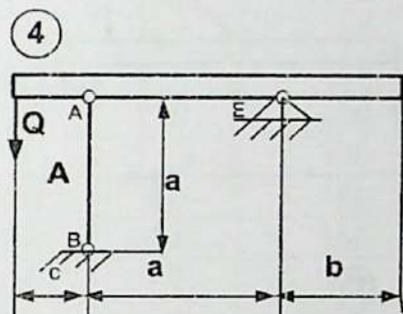
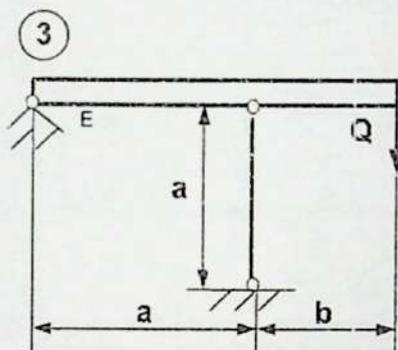
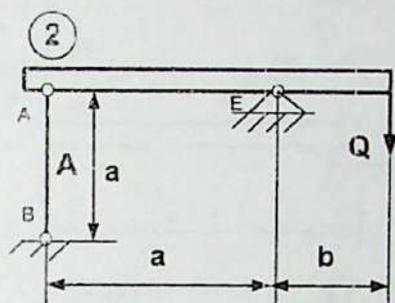
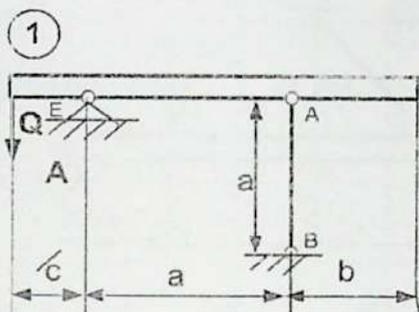
Таблица № 1 к задаче №1

№ строки	№ схемы	A (см^2)	a (м)	b (м)	P_1 (кН)	P_2 (кН)
1	1	1,0	2,0	1,0	10	30
2	2	1,1	2,1	1,1	11	31
3	3	1,2	2,2	1,2	12	32
4	4	1,3	2,3	1,3	13	33
5	5	1,4	2,4	1,4	14	34
6	6	1,5	2,5	1,5	15	35
7	7	1,6	2,6	1,6	16	36
8	8	1,7	2,7	1,7	17	37
9	9	1,8	2,8	1,8	18	38
10	10	1,9	2,9	1,9	19	40
11	11	2,0	3	2	20	40
12	12	1,9	1,9	1,9	19	29
13	13	1,8	2,6	1,6	14	24
14	14	1,7	2,5	1,5	15	25
15	15	1,6	2,4	1,2	16	26
16	16	1,4	2,2	1,0	14	24

Задача №2.

Жесткий брус АВ, деформацией которого можно пренебречь, горизонтально подвешен на тяге АВ (или же опирается одним концом на стальной стержень АВ) и опирается в точке на неподвижную шарнирную опору. Найти нормальное напряжение в стержне, перемещение в точке С и подобрать диаметр сечения (d).

Схемы к задаче №2 Растяжение-сжатие



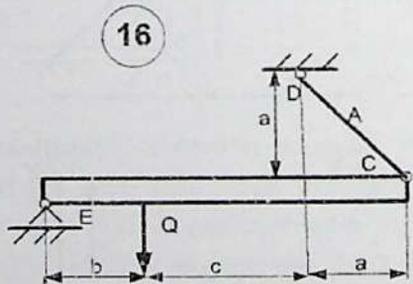
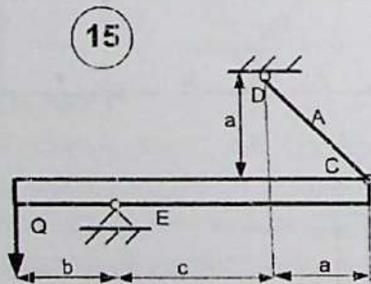
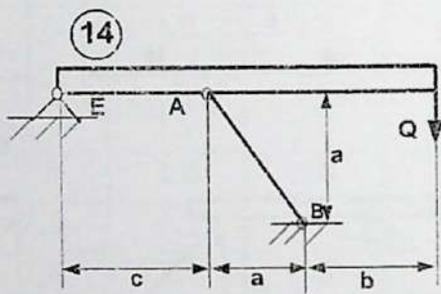
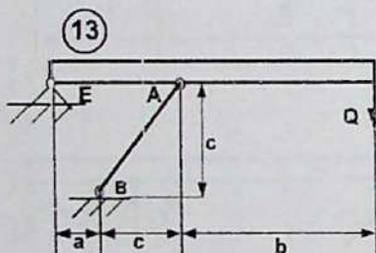
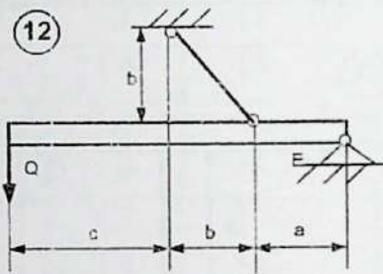
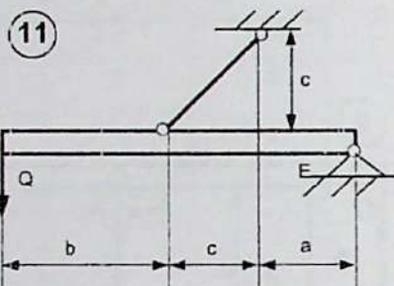
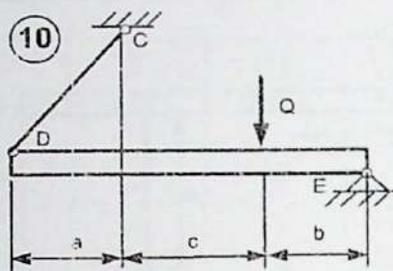
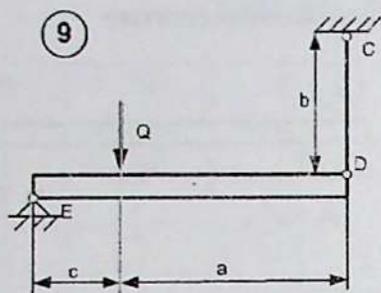


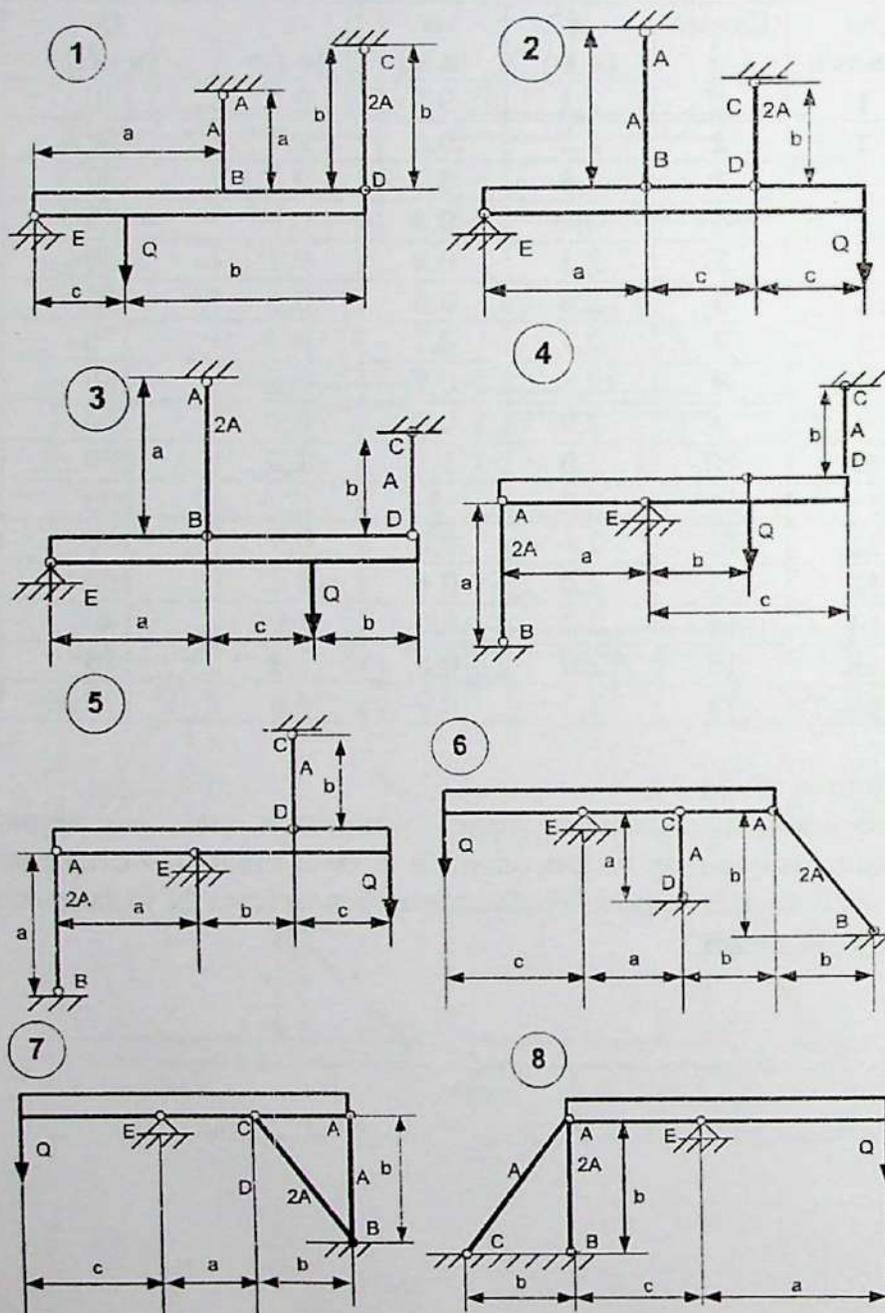
Таблица № 2 к задаче №2

№ строки	Схема	а (в м)	в (в м)	с (в м)	Q (в кН)
1	1	2,1	0,5	0,6	110
2	2	2,2	0,6	0,7	120
3	3	2,3	0,7	0,8	130
4	4	2,4	0,8	0,9	140
5	5	2,5	0,9	0,5	150
6	6	2,6	0,6	0,6	160
7	7	2,7	0,7	0,7	170
8	8	2,8	0,8	0,8	180
9	9	2,9	0,9	0,9	190
10	10	3,0	1,0	2,0	200
11	11	2,8	1	2	190
12	12	2,6	0,8	0,9	180
13	13	2,4	0,6	0,8	160
14	14	2,2	0,6	1,0	140
15	15	2,0	0,8	1,0	120
16	16	2,1	0,9	0,6	110

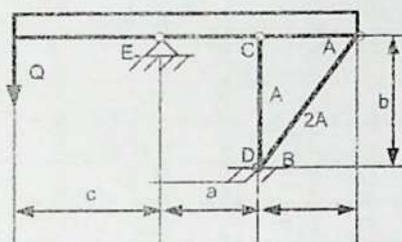
Задача № 3.

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и присоединен к двум стальным стержням при помощи шарниров. Требуется найти усилия N и напряжения σ в стержнях.

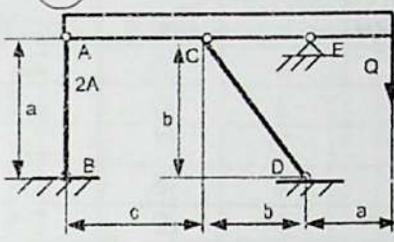
Схемы к задаче №3 Растяжение-сжатие



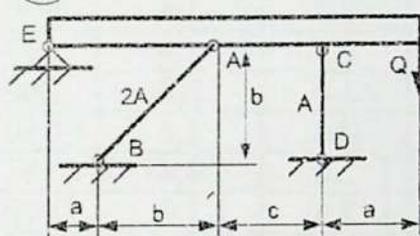
9



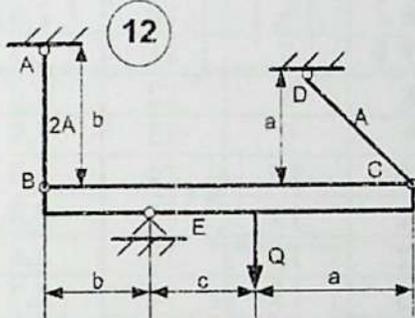
10



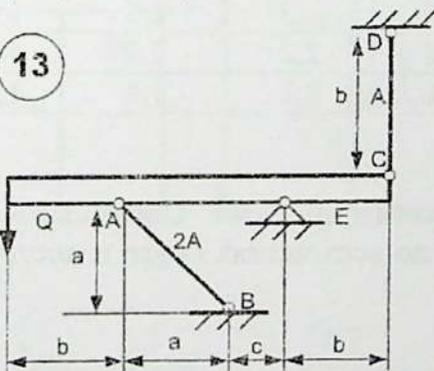
11



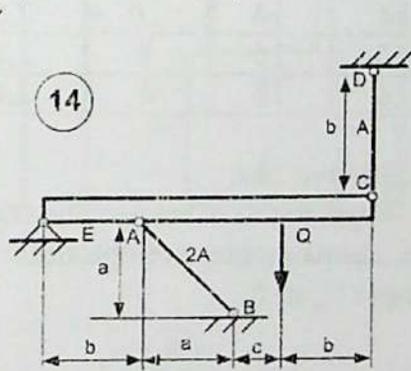
12



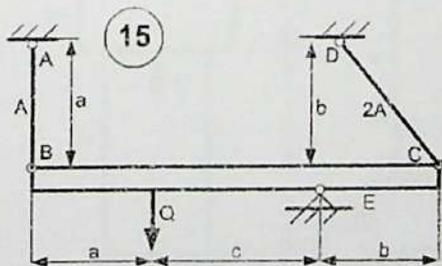
13



14



15



16

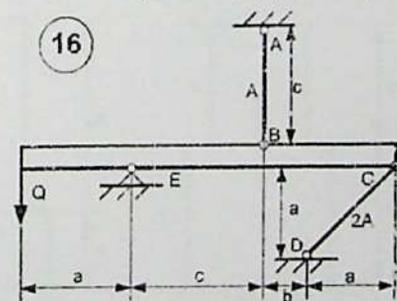


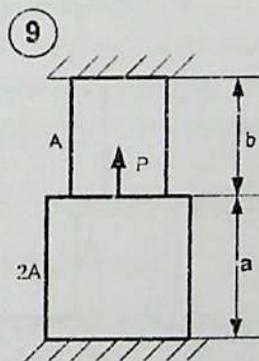
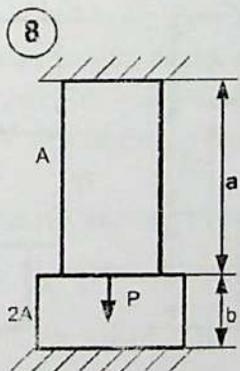
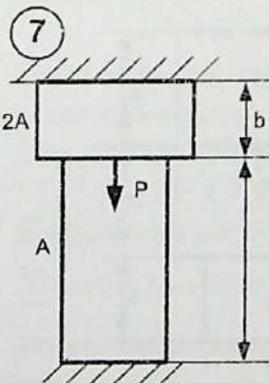
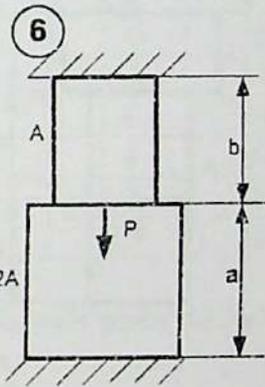
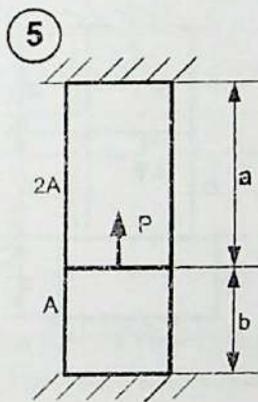
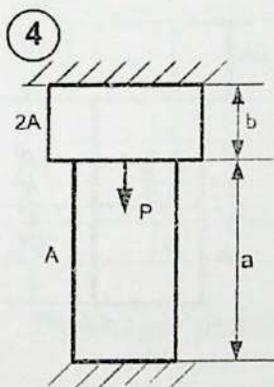
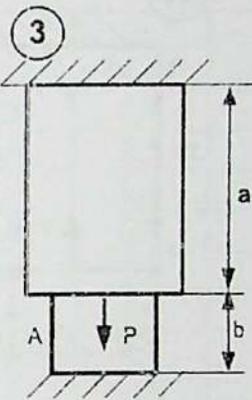
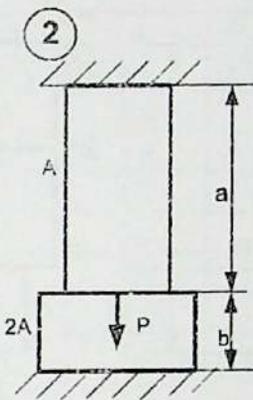
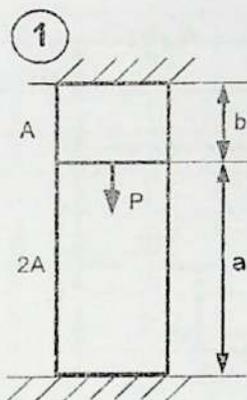
Таблица № 3 к задаче №3 Растяжение-сжатие

№ строки	Схема	A (см ²)	a (в м)	b (в м)	c (в м)	Q (в кН)
1	1	5	2,1	2,1	1,1	110
2	2	6	2,2	2,2	1,2	120
3	3	7	2,3	2,3	1,3	130
4	4	8	2,4	2,4	1,4	140
5	5	9	2,5	2,5	1,5	150
6	6	10	2,6	2,6	1,6	160
7	7	11	2,7	2,7	1,7	170
8	8	12	2,8	2,8	1,8	180
9	9	13	2,9	2,9	1,9	190
10	10	14	3,0	3,0	2,0	200
11	11	13	2,8	2,8	1,6	160
12	12	12	2,6	2,6	1,4	180
13	13	11	2,7	2,3	1,7	170
14	14	10	2,5	2,3	1,5	150
15	15	9	2,2	2,2	2,0	140
16	16	8	2,1	2,1	1,8	120

Задача №4.

Брус жестко закреплен обоими концами. Определить усилия, напряжение, деформацию во всех частях бруса и построить эпюры N , σ , δ .

Схемы к задаче №4 Растяжение-сжатие



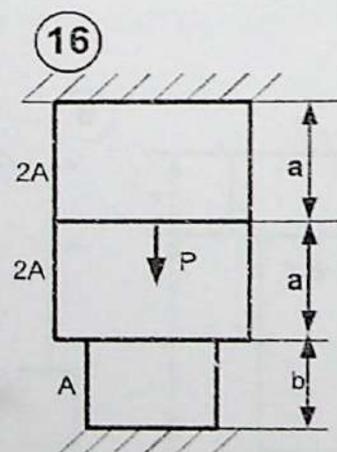
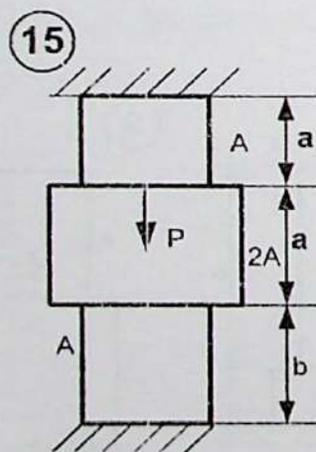
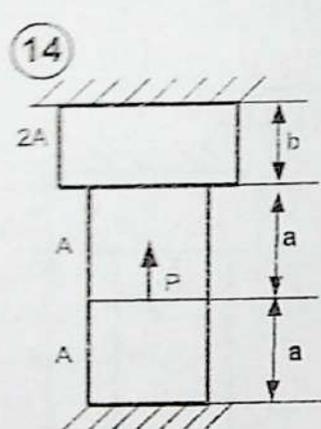
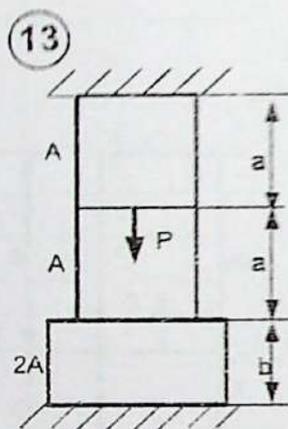
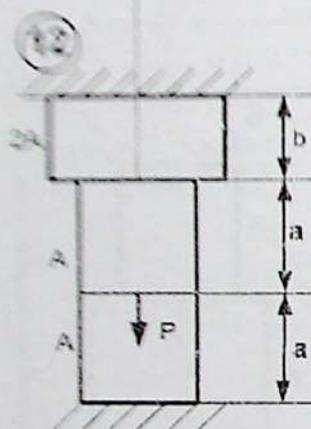
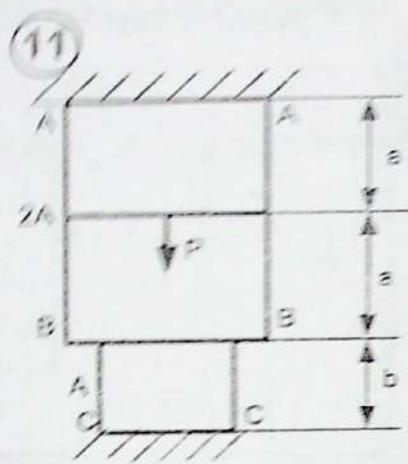
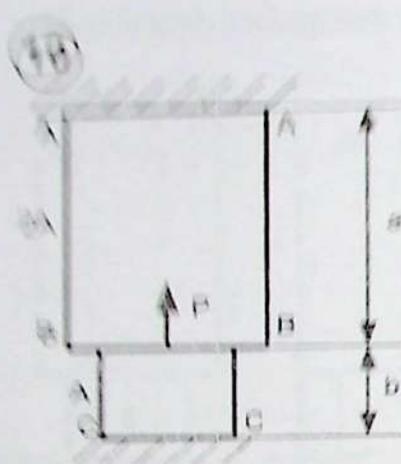


Таблица № 4 к задаче №4 Растяжение-сжатие

№ строки	Схема	A (см ²)	a (в.м)	b (в.м)	c (в.м)	P (кН)
1	1	11	1,0	0,5	0,4	220
2	2	12	1,1	0,6	0,5	240
3	3	13	1,2	0,7	0,6	260
4	4	14	1,3	0,8	0,8	280
5	5	15	1,4	0,9	1,0	300
6	6	16	1,5	1,0	1,2	320
7	7	17	1,6	1,2	1,4	340
8	8	18	1,7	1,3	1,6	360
9	9	19	1,8	1,4	1,8	380
10	10	20	2,0	1,6	2,0	400
11	11	19	1,6	1,2	1,6	380
12	12	18	1,8	1,4	1,8	360
13	13	16	1,6	1,2	1,6	340
14	14	15	1,4	0,9	1,4	300
15	15	14	1,2	0,8	1,2	280
16	16	12	1,2	0,6	1,2	260

Примеры решения расчетно-графической работы №1.
Растяжение-сжатие.

Задача № 1

Дано: $d_1=1,5\text{см}=10\text{мм}$, $d_2=2\text{см}=20\text{мм}$, $l_1=100\text{см}$, $l_2=150\text{см}$,
 $l_3=250\text{см}$, $P_1=10\text{кН}$, $P_2=-20\text{кН}$, $P_3=30\text{кН}$.

Определить: Продольную силу – N , нормальное напряжение – σ перемещение сечений – δ и построить их эпюры -?

Для определения N мысленно рассекаем брус по сечению I-I, 2-2 и 3-3 (рис.)

Из условия равновесия части стержня сечения I-I получим:

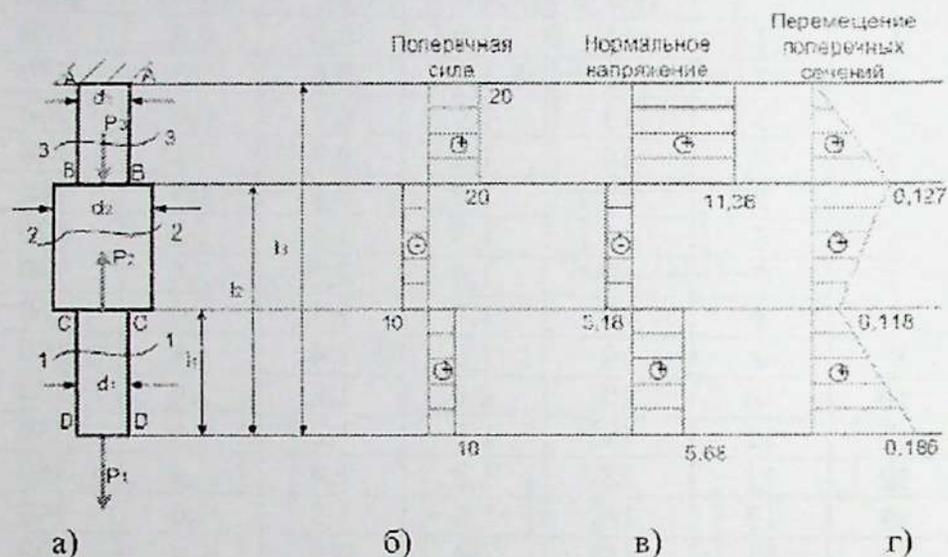
$$\sum x = 0, N_1 - P_1 = 0, N_1 = P_1 = 10\text{кН} \text{ (растяжение)}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 2-2 получим:

$$\sum x = 0, N_2 + P_2 - P_1 = 0, \text{ откуда } N_2 = -10\text{кН}, \text{ (сжатие).}$$

Из условия равновесия части стержня ниже сечения 3-3 получим:

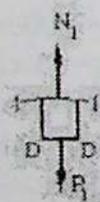
$$\sum x=0, \quad N_3 + P_2 - P_1 - P_3 = 0, \quad \text{откуда } N_3 = 20 \text{ кН, (растяжение).}$$



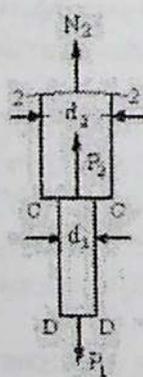
Сечение I-I

Сечение 2-2

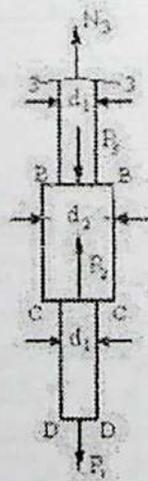
Сечение 3-3



д)



е)



ж)

Рис. к задаче 1

Выбрав масштаб, строим эпюры продольных сил, (рис. б).
 Определим площадь поперечного сечения A_1 и A_2 :

$$A_1 = A_3 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{4} = 1,76 \text{ см}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$$

Напряжения равны:

в сечении нижней части:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10}{1,76} = 5,68 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{растяжение}),$$

в сечении средней части стержня:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10}{3,14} = -3,18 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{сжатие}).$$

в сечении верхней части стержня:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{20}{1,76} = 11,36 \text{ кН/см}^2 \quad (\text{растяжение}).$$

В определенном масштабе строим эпюру напряжений (рис. в)

Для построения эпюры определяем перемещения характерных сечений В-В, С-С и D-D (перемещение сечения А-А равно нулю ($\delta_A = 0$)). Сечение В-В будет перемещаться вниз, поскольку верхняя часть стержня растягивается:

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_3 = 0 + \frac{N_3 \cdot (l_3 - l_2)}{E \cdot A_3} = 0 + \frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,785} = 0,127 \text{ см} \quad (\text{растяжение})$$

Перемещение сечения вниз считаем положительным, вверх — отрицательным. Перемещение сечения С-С является алгебраической суммой, перемещения сечения В-В (δ_B) и абсолютной деформации второго участка:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = 0,127 + \frac{N_2 \cdot (l_2 - l_1)}{E \cdot A_2} = 0,127 + \frac{-10 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 3,14} = 0,118 \text{ см},$$

Перемещение сечения D-D является алгебраической суммой, перемещения сечения С-С (δ_C) и абсолютной деформации первого участка:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = 0,118 + \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = 0,118 + \frac{10 \cdot 100}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,785} = 0,186 \text{ см.}$$

В определенном масштабе откладываем на эюре значения δ_C , δ_B , δ_D , соединяем полученные точки прямыми линиями, и получаем эюру перемещений.

Эту же задачу можно решить с применением математической программы «Mathcad».

Задача № 2.

Дано: Для стержня показанного на рисунке 2 необходимо.

Определить: Продольную силу - N , нормальное напряжение - σ перемещение сечений - δ и построить их эюры, если:

$d_1=1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$, $d_2=2 \text{ см} = 20 \text{ мм}$, $l_1=100 \text{ см}$, $l_2=150 \text{ см}$,
 $l_3=250 \text{ см}$, $P_1=10 \text{ кН}$, $P_2=-20 \text{ кН}$, $P_3=30 \text{ кН}$.

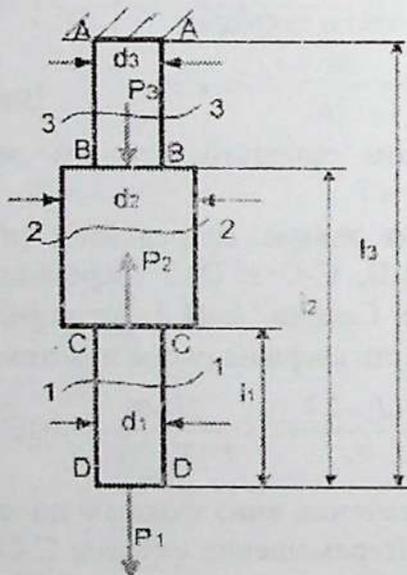


Рис. к задаче 2

Решение:

$$m = m \quad \text{cm} = 0.01 \text{ m} \quad kF = 1000 \text{ N} \quad \text{МПа} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad d_1 = 1.0 \text{ cm} \quad d_2 = 2.0 \text{ cm}$$

$$F = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ кН} \quad L_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \text{ см} \quad L = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ см}$$

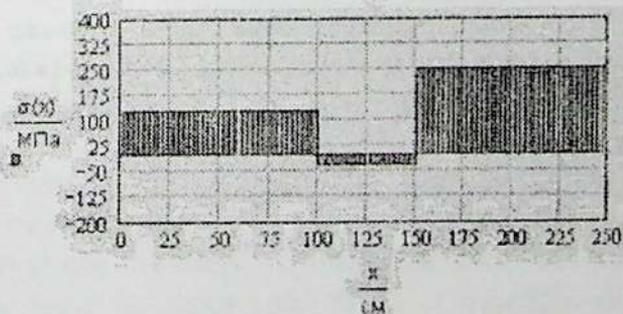
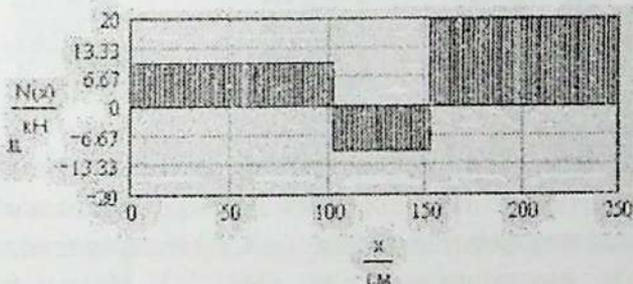
$$n = 3 \quad N(x) = \left[\sum_{i=1}^n F_i \cdot \chi(x > L_{Fi}) \right]$$

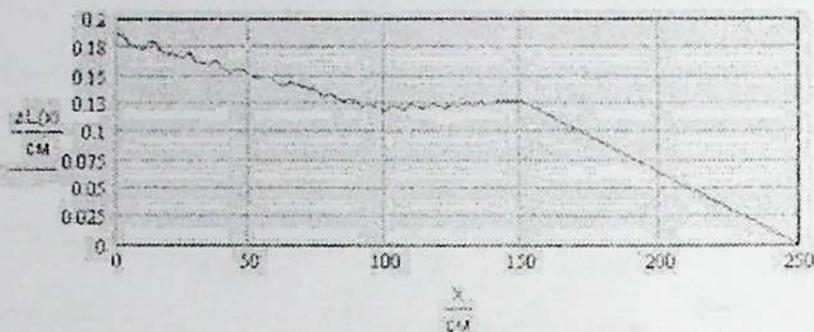
$$A(x) = \begin{cases} \left(\pi \frac{d_1^2}{4} \right) & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \left(\pi \frac{d_2^2}{4} \right) & \text{if } L_1 < x < L_2 \\ \left(\pi \frac{d_1^2}{4} \right) & \text{if } L_2 < x \leq L_3 \end{cases}$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\Delta L(x) = \int_x^{L_3} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx$$

$$x = 0 \text{ cm}, \frac{L_3}{100} \cdot L_3$$





$$x = 0.01 \text{ см}, \frac{L_3}{13} = L_3$$

$x =$	$N(x) =$	$\sigma(x) =$	$\Delta L(x) =$
$1.10 \cdot 10^{-4} \text{ м}$	10	137.324	0.186
0.25	10	137.324	0.165
0.5	10	137.324	0.154
0.75	10	137.324	0.135
1	-10	137.324	0.118
1.25	-10	-31.631	0.124
1.5	-10	-11.831	0.127
1.749	20	254.648	0.093
1.999	20	264.648	0.064
2.249	20	264.648	0.032
2.498	20	254.648	$1.145 \cdot 10^{-4}$

Задача № 2.

Жесткий брус АВ, деформацией которого можно пренебречь, горизонтально подвешен на тяге СД (или же опирается одним концом на стальной стержень СД) и опирается в точке на неподвижную шарнирную опору (рис 2.). Найти нормальное напряжение в стержне, перемещения бруса в точке В и подобрать сечение (d). $a = 1 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $Q = 150 \text{ кН}$, $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$

Определить: Продольные силы N , подобрать сечение d , перемещение сечений ΔL

Решение:

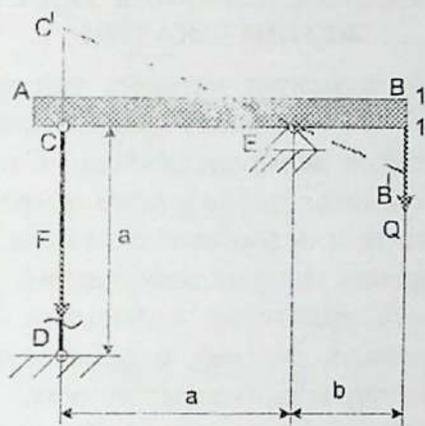


Рис. 3

Для определения продольной силы составим условие равновесия статики:

$$\sum \dots -N \cdot a + Q \cdot b = 0,$$

откуда :

$$N = \frac{Q \cdot b}{a} = \dots = 450 \text{ кН}$$

Для подбора сечения используем условие прочности при

растяжении сжатии: $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq \frac{N}{[\sigma]} \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{N \cdot 4}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{450 \cdot 4}{3,14 \cdot 16}} = 5,9 \text{ см}$$

Принимаем $d = 6 \text{ см} = 60 \text{ мм}$

Определяем нормальное напряжение (проверочный расчет) σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{450}{28} = 16,07 \text{ кН/см}^2$$

Теперь определим абсолютное удлинение стержня CD

$$\Delta l_c = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{450 \cdot 3 \cdot 100}{2 \cdot 10^8 \cdot 28} = 0,24 \text{ см}$$

Для определения перемещения точки В (δ_B) рассмотрим деформацию системы (рис. ...)

Перемещение сечения (δ_B) определяется из подобия треугольников $\triangle ECC' \sim \triangle EBB'$ где $EB = b$, $EC = a$, $CC' = \Delta l_c$,

СТАТИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ СЖАТИИ

Конструкции, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений равновесия, такие системы называются статически неопределимыми. Статически неопределимые задачи решаются добавлением к уравнениям статики абсолютно твердого тела недостающего числа уравнений, получаемых из рассмотрения упругих деформаций.

Чтобы составить уравнение совместности деформаций, необходимо представить систему в деформированном виде и непосредственно из чертежа (геометрически) установить зависимость между деформациями различных стержней (частей) системы.

ПЛАН РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

1. Выявляем неизвестные величины и устанавливаем степень статически неопределимости.
2. Выбираем основную систему.
3. Составляем уравнения равновесия (уравнения статики).
4. Составляем уравнения деформаций.
5. Совместным решением уравнений статики и деформации определяют неизвестные величины.

Дальнейший ход решения статически неопределимой системы такой же, как статически определимой.

Задача № 4

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирную неподвижную опору и присоединен к двум стальным стержням при помощи шарниров (рис 4). Требуется найти усилия N и напряжения σ в стержнях. $Q=120 \text{ кН}$, $F=6,0 \text{ см}^2$, $a=2,0 \text{ м}$, $b=3,0 \text{ м}$, $c=1,0 \text{ м}$.

Решение: Выбираем данные и схему:

1. Обозначим неизвестные усилия в стержнях АЕ и СД соответственно N_1 и N_2 и укажем их направление на чертеже.

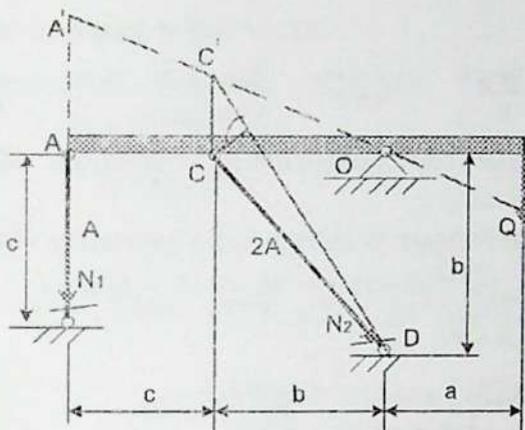


Рис. к задаче 4

2. Составим уравнения равновесия статики для данной задачи

$$\sum M_o(P_i) = 0 - N_1 \cdot (b+c) - N_2 \cdot b \cdot \sin 45^\circ + Q \cdot a = 0 \quad (1)$$

3. Составим геометрическую зависимость между деформациями отдельных элементов конструкций.

Вследствие деформаций стержней, жесткий брус АВ занимает новое положение A_1 и B_1 . При этом перемещение точки А и С, как отметили выше, происходит по направлению перпендикулярным к старому положению жесткого бруса АВ. Жесткий брус АВ вращается вокруг неподвижной опорной точки «О». Следовательно, из подобия треугольников A_1AO и C_1CO можно составить следующие зависимости:

$$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{c+c}{c} \quad (2)$$

4. Выразим уравнение деформации 2 при помощи закона Гука через неизвестные усилия:

$$\Delta l_{AE} = AA_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A}$$

$$CC_1 = \frac{CK}{\sin 45^\circ} = \frac{\Delta l_{CE}}{\sin 45^\circ} = \frac{N_2 \cdot \sqrt{b^2 + b^2}}{E \cdot 2A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{N_2 \cdot \sqrt{2} \cdot b}{\sqrt{2} \cdot E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A}$$

Полученные значения для AA_1 поставим в (2)

$$\frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A} : \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A} = \frac{b+c}{b}$$

откуда

$$\frac{N_1 \cdot a}{N_2 \cdot b} = \frac{4}{3} \quad \text{или!} \quad \frac{N_1}{N_2} = 2 \quad (3)$$

5. Решаем совместно полученные уравнения. Из уравнения (3) получаем: $N_1 = 2N_2$

Полученное значение подставим в уравнение (1):

$$-2N_2(b+c) - N_2 \cdot b \cdot \sin 45^\circ + Q \cdot a = 0$$

откуда $N_2 = 24 \text{ кН}$

Из уравнения (3) находим $N_1 = 48 \text{ кН}$

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{48}{6} = 8 \text{ кН/см}^2; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{24}{2 \cdot 6} = 2 \text{ кН/см}^2$$

Задачу такого типа можно решить с применением математической программы «Mathcad» (рис.5).

Задача № 5.

Дана шарнирно-стержневая система (рис.).

Требуется: Определить усилия и перемещения в стержнях.

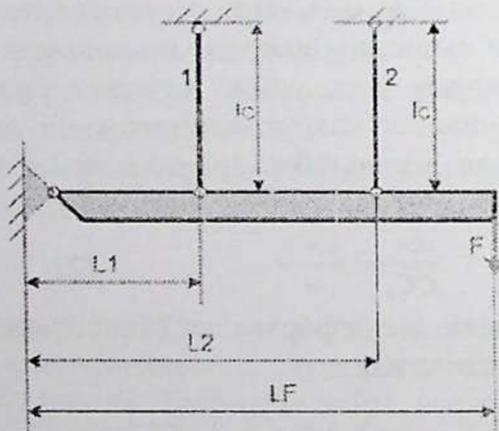


Рис. к задаче 5

Исходные данные к расчету:

$$\text{град} = \text{deg} \quad \text{мм} = 0.001 \text{ м} \quad \text{см} = 0.01 \text{ м} \quad \text{кН} = 1000 \text{ Н} \quad \text{МПа} = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad \sigma_{\text{доп}} = 100 \text{ МПа}$$

$$F = 10 \text{ кН}$$

$$L_F = 100 \text{ см}$$

Решение:

$$l = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix} \text{ см} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \end{pmatrix} \text{ град} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \text{см}^2 \quad L_{\text{ст}} = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \end{pmatrix} \text{ см} \quad k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta L(N, i) = \frac{N L_{\text{ст}i}}{E A_i} \quad \Delta(N, i) = \frac{\Delta L(N, i)}{\sin(\varphi_i)} \quad m = \text{rows}(A) \quad i = 1:m$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ кН} \quad \text{Given} \quad F \cdot L_F - \sum_{i=1}^m k_i N_i L_i \sin(\varphi_i) = 0 \quad \frac{\Delta(N_1, 1) k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2, 2) k_2}{L_2}$$

$$N = \text{Find}(N_1, N_2) \quad N = \begin{pmatrix} 3.659 \times 10^3 \\ 9.756 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ Н} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 3.659 \times 10^7 \\ 4.878 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ Па}$$

$$\Delta L(N, i) = \begin{pmatrix} 0.055 \\ 0.073 \end{pmatrix} \text{ мм}$$

Задача № 6.

Дана шарнирно-стержневая система (рис.).

Требуется: Определить усилия и перемещения в стержнях

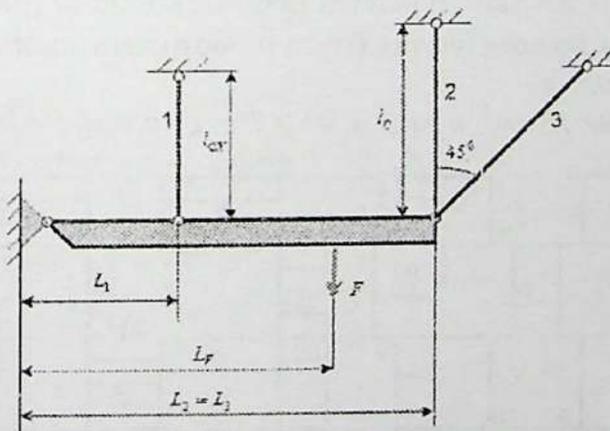


Рис. к задаче 6

Исходные данные к расчету:

$$\begin{aligned} \text{град} &= \text{deg} & \text{мм} &= 0.001 \text{ м} & \text{см} &= 0.01 \text{ м} & \text{кН} &= 1000 \text{ Н} & \text{МПа} &= 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\ E &= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} & \sigma_{\text{доп}} &= 160 \text{ МПа} \\ F &= 20 \text{ кН} & L_F &= 100 \text{ см} \end{aligned}$$

Решение:

$$L = \begin{pmatrix} 50 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix} \text{ см} \quad \phi = \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ град} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ см}^2 \quad L_{\text{ст}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ \frac{40}{\sin(\phi_3)} \end{pmatrix} \text{ см} \quad k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta L(N_i) = \frac{N_i L_{\text{ст}i}}{E A_i} \quad \Delta(N_i) = \frac{\Delta L(N_i)}{\sin(\phi_i)} \quad m = \text{rows}(A) \quad i = 1, m$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ кН} \quad \text{Given } F L_F - \sum_{i=1}^m k_i N_i L_i \sin(\phi_i) = 0 \quad \frac{\Delta(N_1, 1) k_1}{L_1} = \frac{\Delta(N_2, 2) k_2}{L_2}$$

$$\frac{\Delta(N_2, 2) k_2}{L_2} = \frac{\Delta(N_3, 3) k_3}{L_3}$$

$$N = \text{Find}(N_1, N_2, N_3) \quad N = \begin{pmatrix} 3929 \times 10^3 \\ 7257 \times 10^3 \\ 5293 \times 10^3 \end{pmatrix} \text{ Н} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 3929 \times 10^7 \\ 7257 \times 10^7 \\ 5293 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ Па}$$

$$\Delta L(N_i) = \begin{pmatrix} 0.079 \\ 0.236 \\ 0.167 \end{pmatrix} \text{ мм}$$

Задача № 7

Брус АВ жестко закреплен обоими концами (рис.). Определить усилия во всех частях бруса и построить эпюры N , σ и δ .

Решение:

Дано: $A=13 \text{ см}^2$, $a=1,2 \text{ м}$, $b=0,7 \text{ м}$, $c=0,6 \text{ м}$, $P=260 \text{ кН}$.

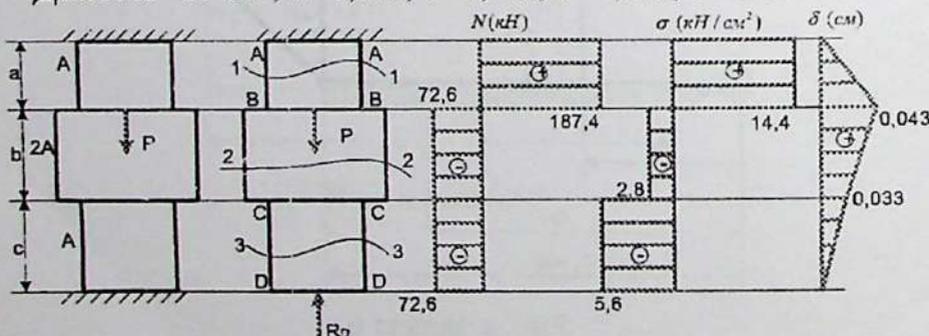


Рис. к задаче 7

Нагрузка P воспринимается частично верхним и частично нижним закреплением концов стержня. Две реакции, возникающие в заделках, нельзя определить из единственного уравнения равновесия: равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось. Для составления уравнения деформаций поступим следующим образом: отбросим одну заделку, например нижнюю, заменив, ее действие на стержень неизвестной реакцией D . В полученной, таким образом, системе (обычно ее называют основной системой) приравняем нулю перемещения нижнего сечения, т.к. в заданной системе это сечение заделка и перемещаться не будет.

Для определения продольной силы N применим метод сечения и составим уравнения равновесия:

сечение 1-1: $N_1 + R_D = 0$;

$$N_1 = -R_D \quad (1)$$

сечение 2-2: $N_2 + R_D = 0$;

$$N_2 = -R_D \quad (2)$$

сечение 3-3: $N_3 + R_D - P = 0$;

$$N_3 = P - R_D \quad (3)$$

Дополнительное уравнение:

$$\delta_D = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad (4)$$

Для определения деформации используем закон Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A} \quad (5)$$

Подставляем в уравнение (4) уравнения (5), получаем

$$\frac{N_1 a}{EA} + \frac{N_2 b}{E2A} + \frac{N_3 c}{EA} = 0,$$

приведем к общему знаменателю и получим:

$$2N_1 a + N_2 b + 2N_3 c = 0 \quad (6)$$

В уравнение (6) подставляем (1,2,3), получаем

$$-2,4R_D - 0,7R_D + 312 - 1,2R_D = 0$$

$$312 = 4,3R_D \quad R_D = 72,6 \text{ kH}$$

Следовательно $N_1 = -72,6 \text{ kH}$, $N_2 = -72,6 \text{ kH}$, $N_3 = 187,4 \text{ kH}$.

Определяем напряжение: $\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-72,6}{13} = -5,6 \text{ kH/cm}^2$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{-72,6}{13 \cdot 2} = -2,8 \text{ kH/cm}^2 \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{187,4}{13} = 14,4 \text{ kH/cm}^2$$

Строим эпюры продольной силы N и нормального напряжения σ .

Для построения эпюры δ определяем перемещения характерных сечений В-В, С-С и D-D (перемещение сечения А-А равно нулю ($\delta_A = 0$)). Сечение В-В будет перемещаться вниз, поскольку верхняя часть стержня растягивается:

$$\delta_B = \delta_A - \Delta l_3 = 0 + \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A_3} = 0 + \frac{187,4 \cdot 60}{2 \cdot 10^4 \cdot 13} = 0,043 \text{ см},$$

Перемещение сечения вниз считаем положительным, вверх – отрицательным. Перемещение сечения С-С является алгебраической суммой, перемещения сечения В-В (δ_B) и укорочение стержня:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = 0,043 + \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A_2} = 0,043 - \frac{72,6 \cdot 70}{2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 13} = 0,033 \text{ см},$$

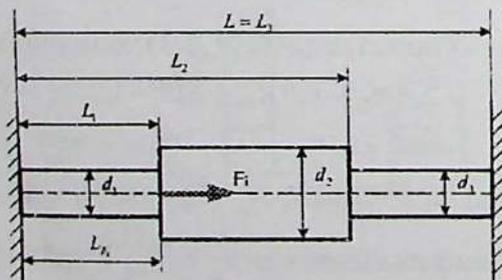
Перемещение сечения D-D является алгебраической суммой, перемещения сечения С-С (δ_C) и удлинения стержня:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = 0,033 + \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1} = 0,033 - \frac{72,6 \cdot 120}{2 \cdot 10^4 \cdot 13} = 0$$

В определенном масштабе откладываем на эпюре значения δ_C , δ_B , δ_D и соединяем полученные точки прямыми линиями, т.к. перемещения линейные и зависят от абсцисс сечений перемещений.

Задача № 8

Эту же задачу можно решить с применением математической программы «Mathcad».



GRIGN > 1 $\mu = m \text{ см} = 0.01 \text{ м}$ $\lambda H = 1000 \text{ Н МПа} \times 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

Условная схема нагружения стержня

Исходные данные к расчету

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ $d_1 = 4 \text{ см}$ $d_2 = 6 \text{ см}$ $LL = 13600 \text{ см}$

$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -360 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ кН}$ $HL_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$ $L = \begin{pmatrix} 60 \\ 130 \\ 250 \end{pmatrix} \text{ см}$ $A(x) = \begin{cases} \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ \pi \frac{d_2^2}{4} & \text{if } L_1 \leq x < L_2 \\ \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{if } L_2 \leq x \leq L_3 \end{cases}$

Продольные усилия в стержне

$n = \text{row}(F)$

$N(x, F) = R + \sum_{i=1}^n P_i(x > L_{F_i})$

Напряжения

$\sigma(x, F) = \frac{N(x, F)}{A(x)}$

Удлинение стержня

$\Delta L(x, F) = \int_0^x \frac{N(x, F)}{E \cdot A(x)} dx$

$x = 0 \text{ см}, \frac{L_2}{100} - L_3$

решение уравнения неразрывности деформаций $\Delta(L, F) = 0$

$R = 10 \text{ кН}$

$R = 1001 \left[\Delta L(L_3, R), R \right]$

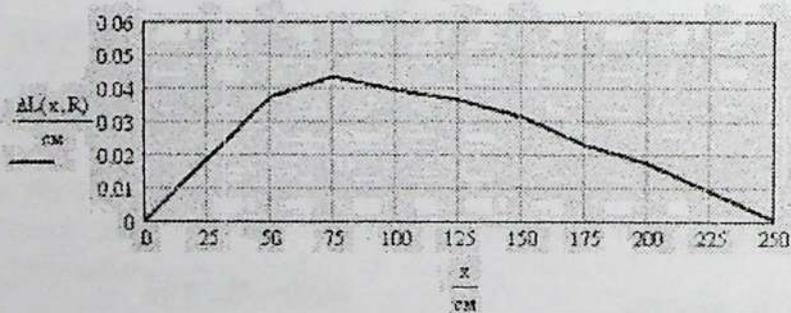
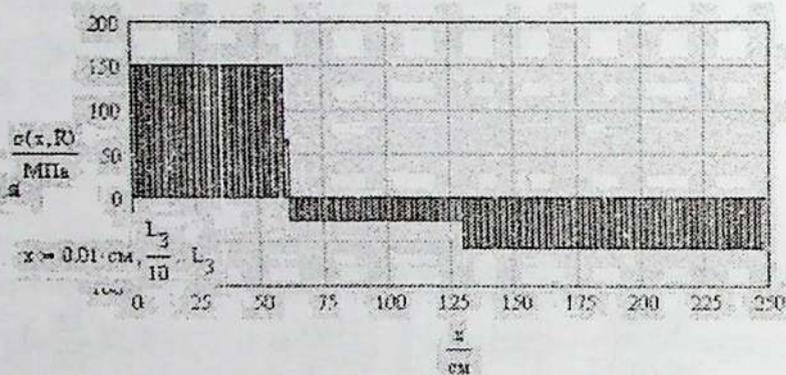
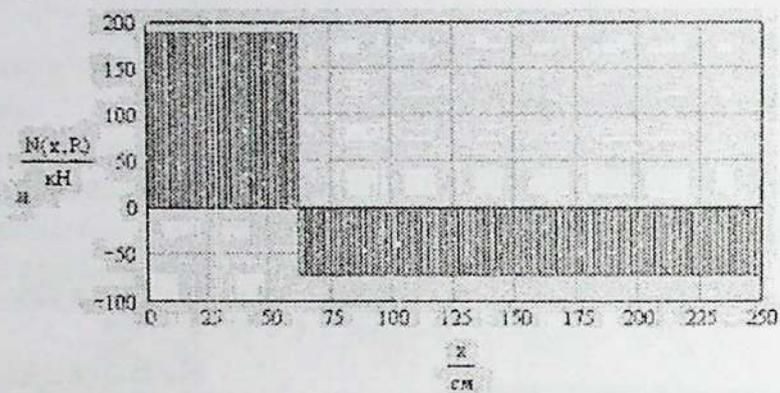
$R = 188.143 \text{ кН}$

$x=0 \text{ и } x=LL$

$\Delta L(L_3, R) = 0 \text{ см}$

$\Delta L(0 \text{ см}, R) = 0 \text{ см}$

Результаты расчета



$$x = 0.01 \cdot \text{см}, \frac{L_3}{10} - L_3$$

$x =$	$N(x, R) =$	$\sigma(x, R) =$	$\Delta L(x, R) =$
	см	кН	МПа
0.01	188.1	150	0
25	188.1	150	0.02
49.99	188.1	150	0.04
74.98	-71.9	-25	0.04
99.97	-71.9	-25	0.04
124.96	-71.9	-25	0.04
149.95	-71.9	-57	0.03
174.94	-71.9	-57	0.02
199.93	-71.9	-57	0.02
224.92	-71.9	-57	0.01
249.91	-71.9	-57	0

Задание №2.

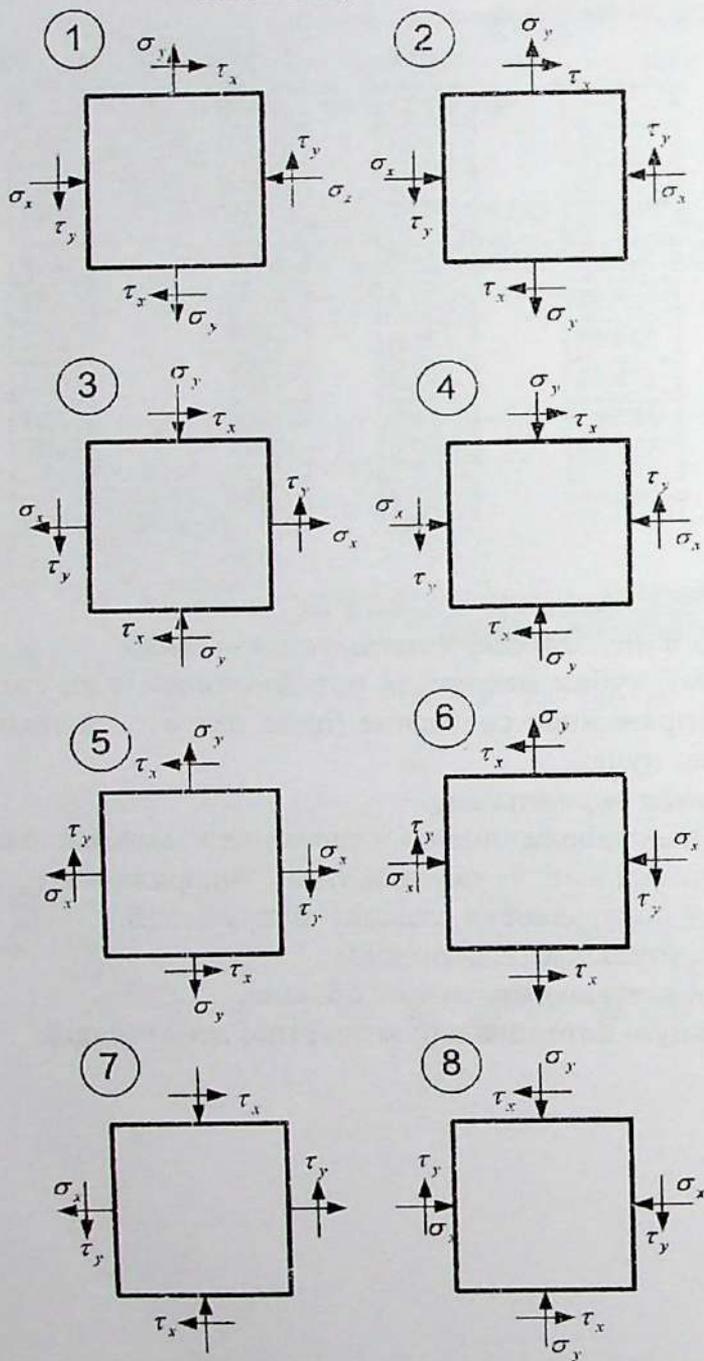
Анализ плоского напряженного состояния

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю).

Требуется определить:

1. Главные напряжения и направление главных площадок,
2. Максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений.
3. Относительные деформации
4. Относительное изменение объема
5. удельную потенциальную энергию деформаций.

Схемы задания № 2



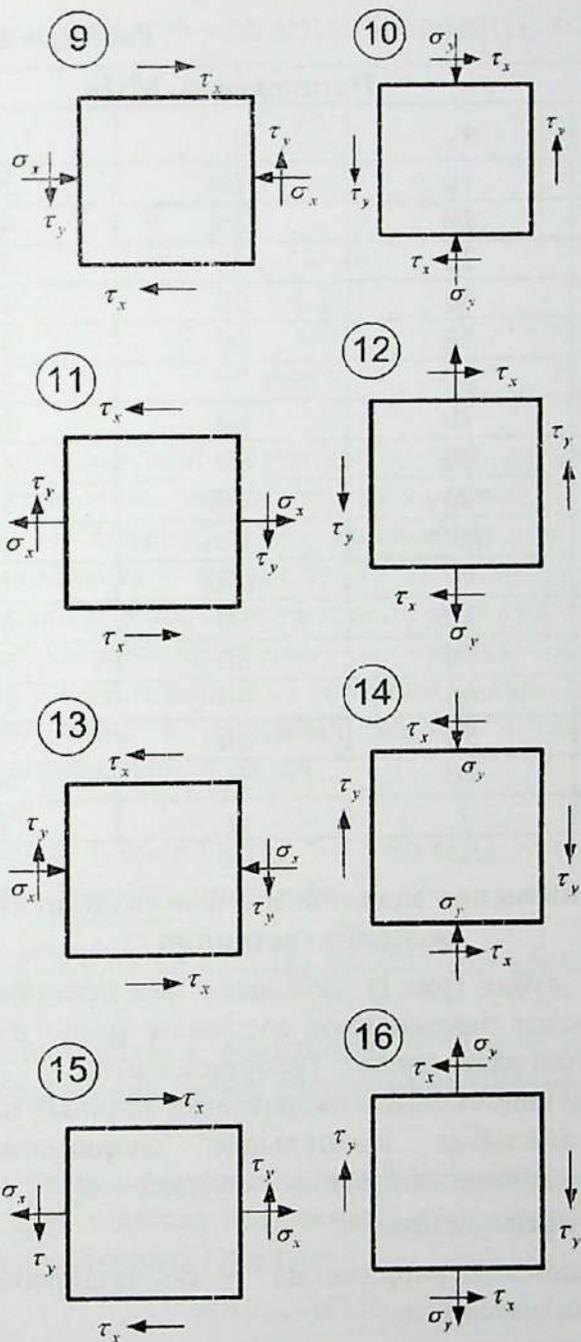


Таблица 2-го задания

№	Напряженне, МПа		
	σ_x	σ_y	$\tau_x = \tau_y$
1	10	20	30
2	20	30	40
3	30	40	50
4	40	50	40
5	50	60	30
6	60	70	20
7	70	80	10
8	80	90	20
9	90	100	30
10	100	90	40
11	90	100	40
12	80	90	20
13	70	80	10
14	60	70	20
15	50	60	30
16	40	50	40
	г	д	е

Пример выполнения задания № 2 Анализ плоского напряженного состояния

Стальной кубик (рис.1) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
- 3) главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
- 4) эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}$ по четвертой (энергетической) теории прочности;
- 5) относительное изменение объема;
- 6) удельную потенциальную энергию деформации.

Исходные данные: $\sigma_x = 90$ МПа, $\sigma_y = 80$ МПа, $\tau_x = 50$ МПа.

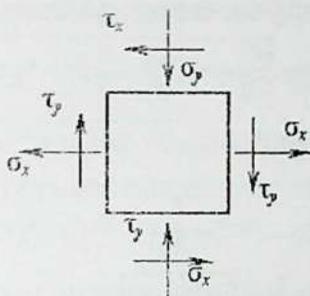


Рис.1

Решение.

При выполнении этой задачи необходимо руководствоваться следующим правилом знаков для нормальных и касательных напряжений: растягивающее нормальное напряжение положительно, а сжимающее – отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если изображающий его вектор стремится вращать призму по часовой стрелке относительно любой точки, лежащей на внутренней нормали этой грани.

Расставим знаки в исходных данных в соответствии с направлением напряжений на рис.1.

Получим:

$$\sigma_x = 90 \text{ МПа}, \sigma_y = -80 \text{ МПа}, \tau_x = -50 \text{ МПа}, \tau_y = 50 \text{ МПа}.$$

1. Найдем главные напряжения

$$\sigma_{\text{глав}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \frac{90 - 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{90 + 80}{2}\right)^2 + 50^2} = 5 \pm 98,62 \text{ МПа} \quad (1)$$

Главные напряжения обозначают σ_1, σ_2 и σ_3 ; при этом индексы расставляют так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (2)$$

В задаче рассматривается плоское напряженное состояние, т.е. одно из трех главных напряжений равно нулю, поэтому из формулы (1) и правила (2) следует:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{max}} = 103,62 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{\text{min}} = -93,62 \text{ МПа}.$$

Направление главных площадок относительно площадок, показанных на рис. 1, определяется по следующей формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 50}{90 + 80} = -\frac{100}{170} = -0,588$$

$$2\alpha_0 = -30^{\circ}30', \quad \alpha_0 = -15^{\circ}15'$$

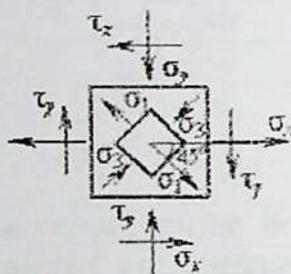


Рис.2

Отрицательный угол α_0 откладывается по часовой стрелке от площадки с большим нормальным напряжением (в данном случае σ_x) (рис.2). Можно также пользоваться правилом: для определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} необходимо площадку с большим (в алгебраическом смысле) нормальным напряжением повернуть на угол α_0 в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

2. Найдем максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{103,62 + 93,62}{2} = \pm 98,62 \text{ МПа.}$$

3. Найдем главные деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 из обобщенного закона Гука;

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [103,62 - 0,3(0 - 93,62)] = 65,8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,3(-93,62 + 103,62)] = -1,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-93,62 - 0,3(103,62 + 0)] = -62,3 \cdot 10^{-5}$$

4. Найдем эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}^IV$

$$\sigma_{\text{экв}}^IV = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2]} = \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3} = \\ = \sqrt{103,62^2 + 93,62^2 + 103,62 \cdot 93,62} = 99 \text{ МПа}$$

5. Найдем относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 65,8 \cdot 10^{-5} - 1,5 \cdot 10^{-5} - 62,3 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-5}$$

6. Найдем удельную потенциальную энергию деформации

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

В данной задаче $\sigma_2 = 0$.

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3) = \frac{1}{4 \cdot 10^5} (103,62^2 + 93,62^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 103,62 \cdot 93,62) = \\ = 6330,6 \cdot 10^{-5} = 0,063 \text{ МДж/м}^3$$

Задание 3

КРУЧЕНИЕ

К стальному валу приложены три известных момента M_1 , M_2 , M_3 . Требуется определить:

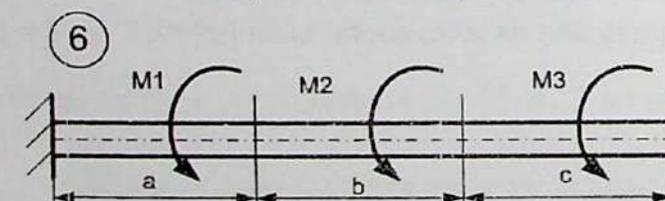
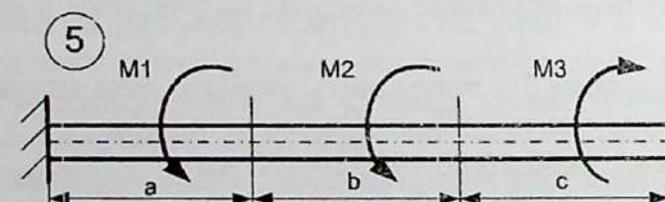
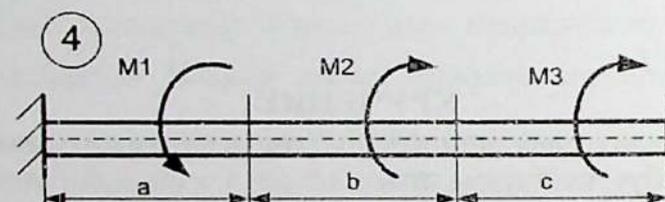
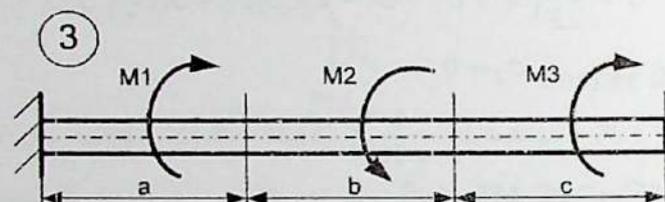
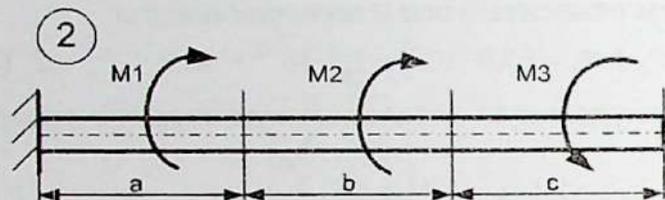
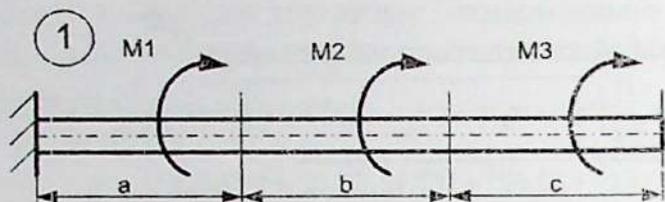
1. Определить крутящие моменты по участкам и построить их эпюры

2. При заданном $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить до ближайшего стандарта

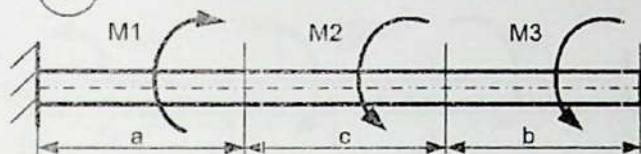
(30,35,40,45,50,60,70,80,100,110,120 мм)

3. Построить эпюру углов закручивания

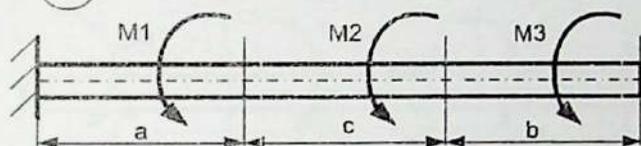
4. Проверить вал на жесткость, если $[\varphi] = 0,5^\circ$ на $l = 1$ м



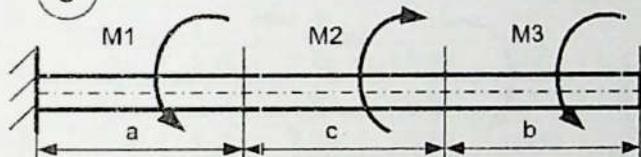
7



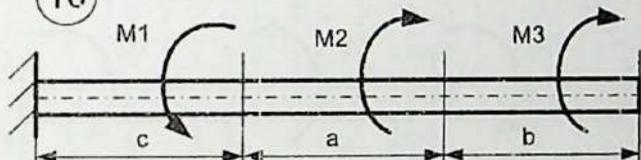
8



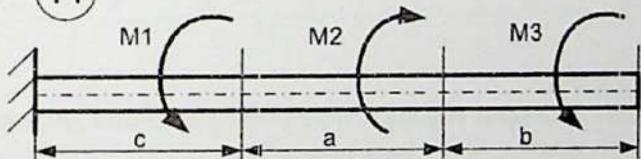
9



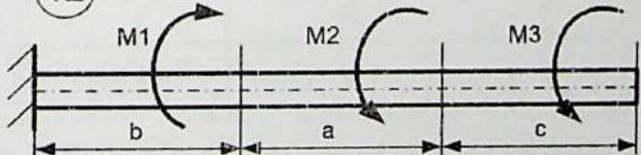
10

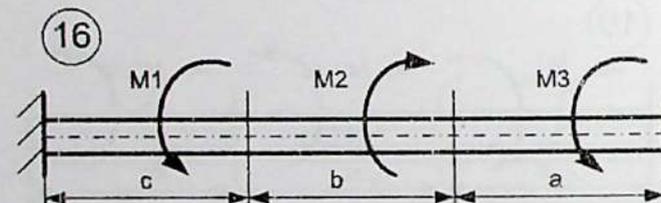
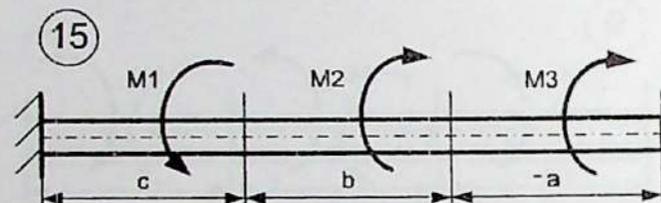
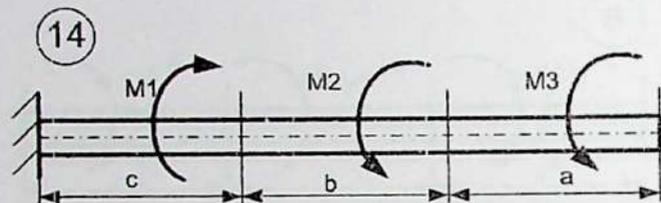
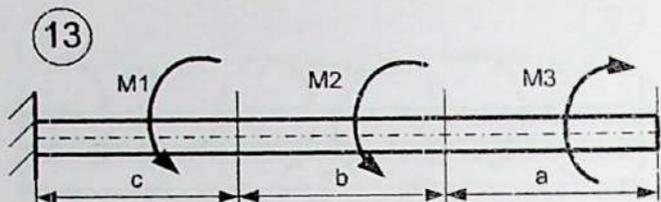


11



12

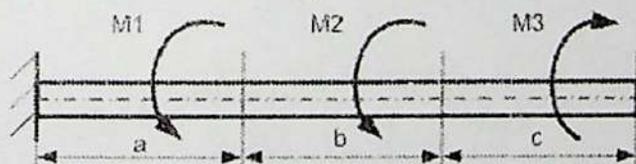




**Таблица к заданию
(Кручение)**

№ строки	№ схемы	Расстояние, м			Моменты, Н·м			[τ] МПа
		a	b	c	M ₁	M ₂	M ₃	
1	1	1,1	1,2	1,3	1100	1000	1200	80
2	2	1,2	1,3	1,4	1200	1100	1300	75
3	3	1,3	1,4	1,5	1300	1200	1400	70
4	4	1,4	1,5	1,6	1400	1400	1500	65
5	5	1,5	1,6	1,7	1500	1500	1600	60
6	6	1,6	1,7	1,8	1600	600	1000	60
7	7	1,7	1,8	1,9	1700	700	1100	65
8	8	1,8	1,9	2,0	1800	800	1200	70
9	9	1,9	2,0	1,1	1900	900	1300	75
10	10	2,0	1,1	1,2	2000	1000	1100	80
11	11	1,2	1,3	1,4	1200	1100	1300	75
12	12	1,3	1,4	1,5	1300	1200	1400	70
13	13	1,4	1,5	1,6	1400	1400	1500	65
14	14	1,5	1,6	1,7	1500	1500	1600	60
15	15	1,6	1,7	1,8	1600	600	1000	60
16	16	1,7	1,8	1,9	1700	700	1100	65
	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>	<i>з</i>	<i>д</i>	<i>е</i>	<i>в</i>

**Пример выполнения расчетно-графического задания №3
Кручение**



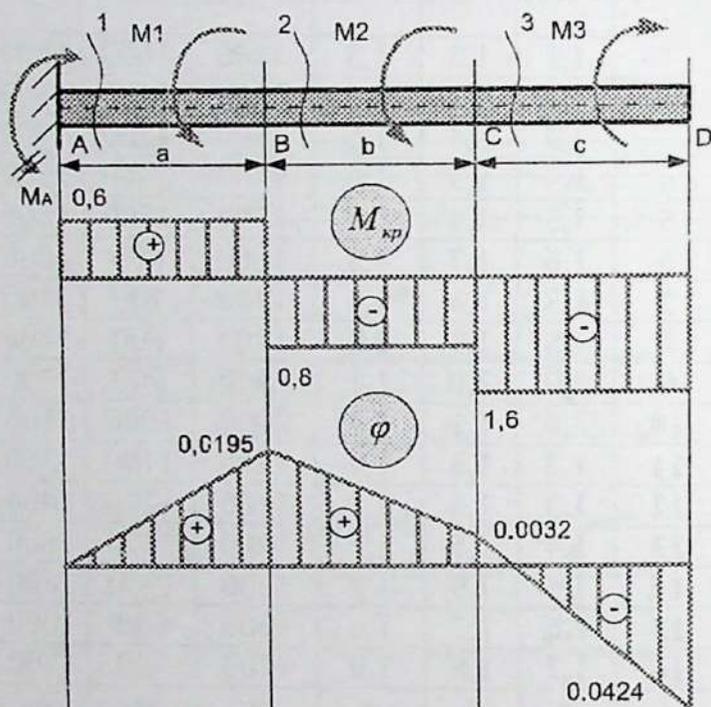
Составляем уравнение статики и определяем M_A .

$$\sum M_A = 0$$

$$M_1 + M_2 - M_3 + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 1,6 - 1,4 - 0,8 = -0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Строим эпюру крутящего момента

- 1 сечение $M_{K1} = M_A = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$
 2 сечение $M_{K2} = M_A - M_1 = 0,6 - 1,4 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$
 3 сечение $M_{K3} = M_A - M_1 - M_2 = 0,6 - 1,4 - 0,8 = -1,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$



Из условия прочности вала при кручении определяем d – диаметр вала

$$\tau_{\text{м}} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau] \quad \text{и} \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,6 \cdot 100}{3,14 \cdot 8}} = 4,8 \text{ см}$$

Принимаем диаметр $d=50 \text{ мм}$.

Определяем полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,3 \text{ см}^4$$

3. Построение эпюры углов закручивания $\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot J_\rho}$

$$\varphi_A = 0,$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_K^1 \cdot a}{G \cdot J_\rho} = \frac{0,6 \cdot 160 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 61,3} = 0,0195 \text{ рад}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = 0 + \frac{M_K^2 \cdot b}{G \cdot J_\rho} = 0,0195 - \frac{0,8 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 61,3} = 0,0032 \text{ рад}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = 0,0032 + \frac{M_K^3 \cdot c}{G \cdot J_\rho} = 0,0032 - \frac{1,6 \cdot 140 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 61,3} = -0,0424 \text{ рад}$$

Строим эпюру углов закручивания

4. Определяем наибольший угол закручивания и проверяем условия жесткости вала

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot 100}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\varphi]$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot 100}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1,6 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 61,3} \cdot \frac{180}{3,14} = 1,8^{\circ}$$

Условие жесткости вала не соблюдается, так как допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,5^{\circ}$ на 1 метр. Подбираем диаметр вала и принимаем $d = 70$ мм, естественно, полярный момент инерции

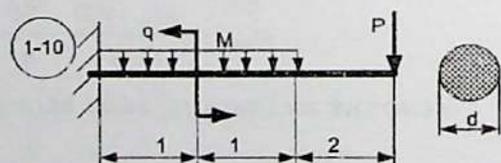
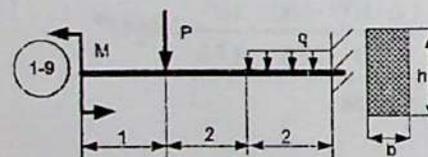
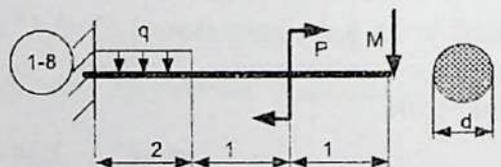
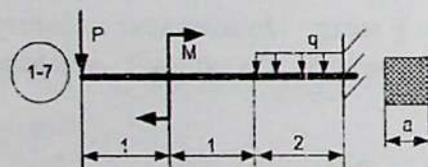
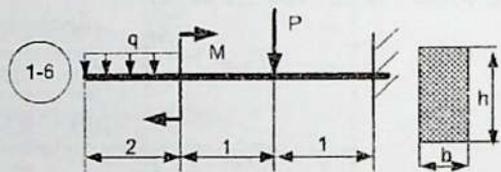
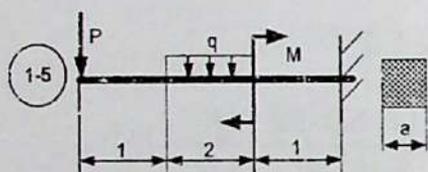
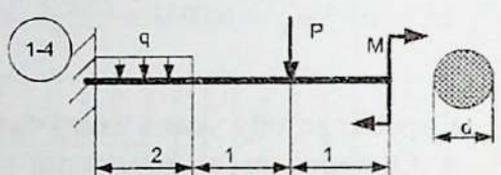
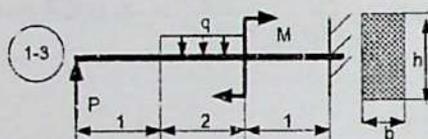
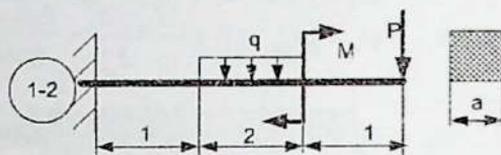
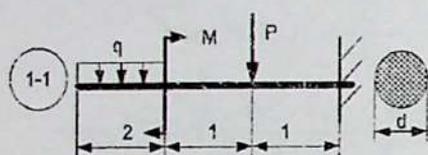
$$J_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 7^4}{32} = 236 \text{ см}^4$$

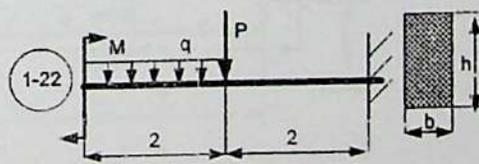
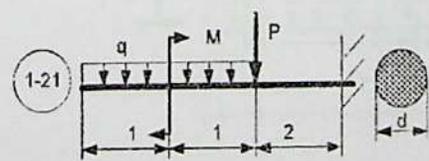
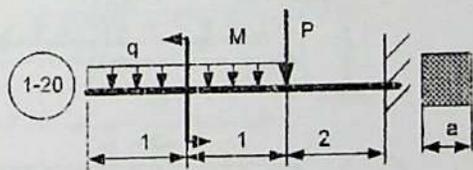
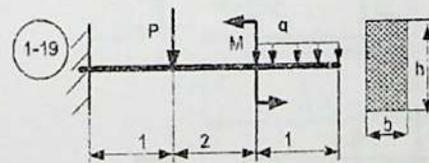
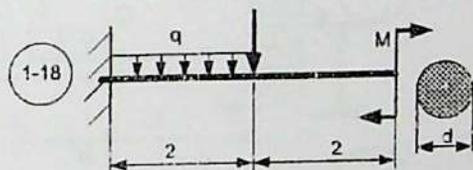
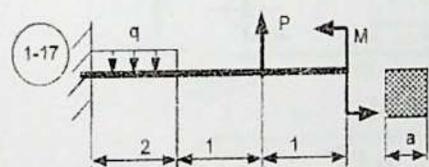
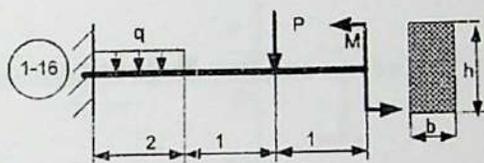
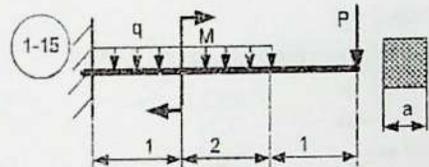
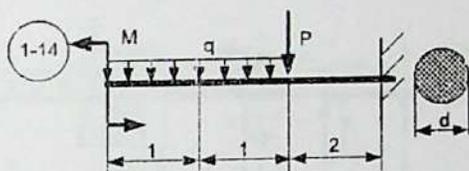
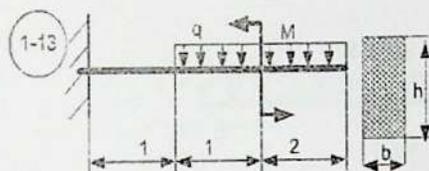
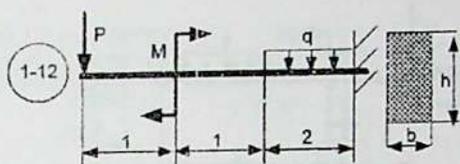
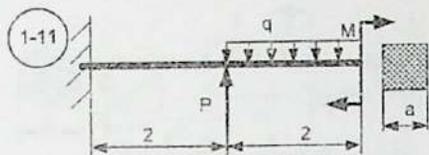
$$\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot 100}{G \cdot J_\rho} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1,6 \cdot 100 \cdot 100}{8 \cdot 10^3 \cdot 236} \cdot \frac{180}{3,14} = 0,45^{\circ}$$

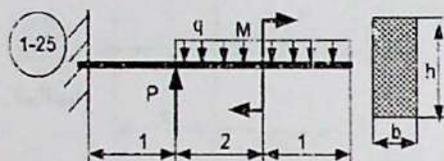
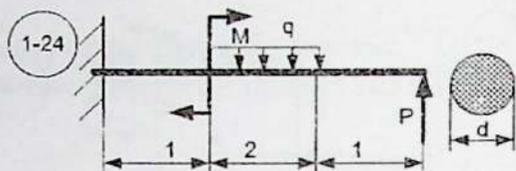
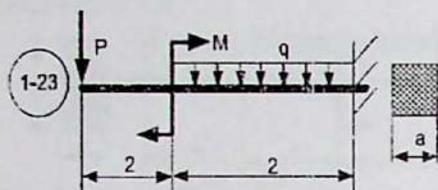
Условие жесткости вала выполняется

Задание 4,5

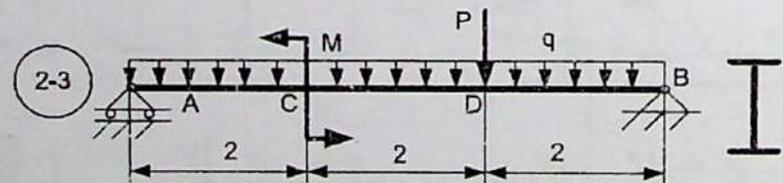
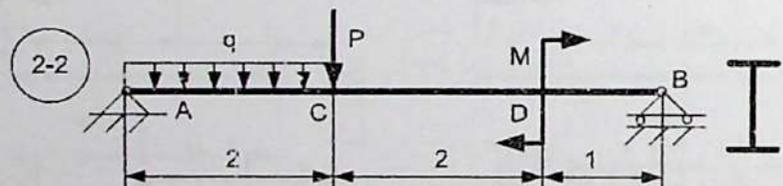
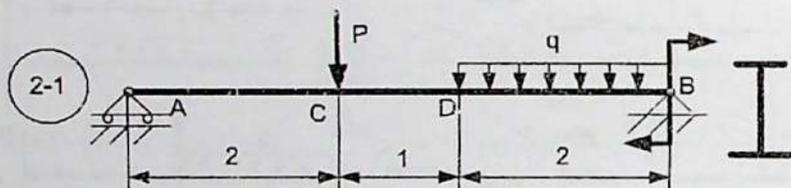
Изгиб. Определение деформации при изгибе Схемы задачи № 1, статически-определимые задачи

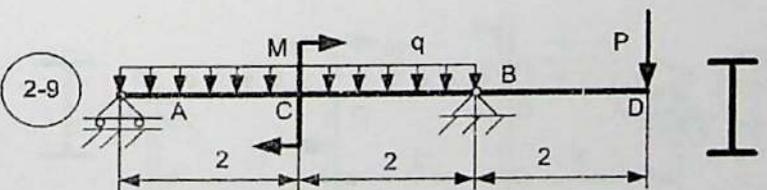
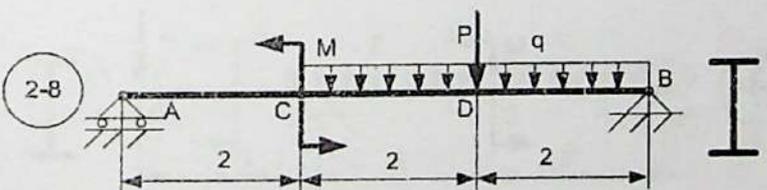
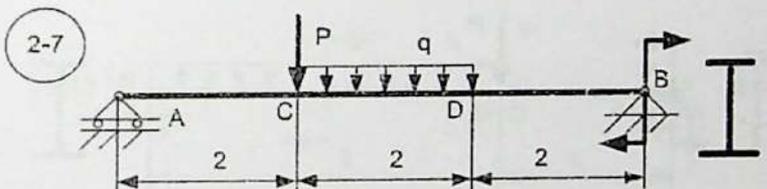
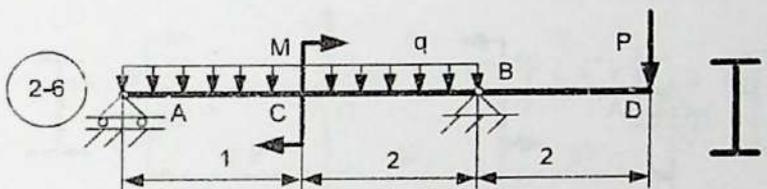
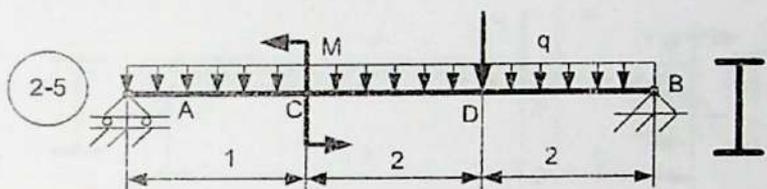
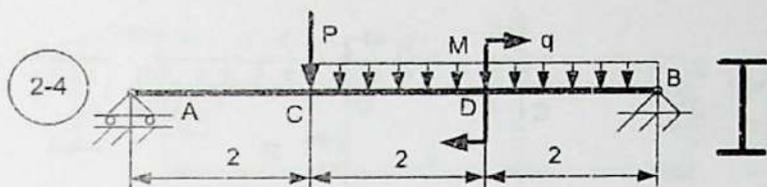


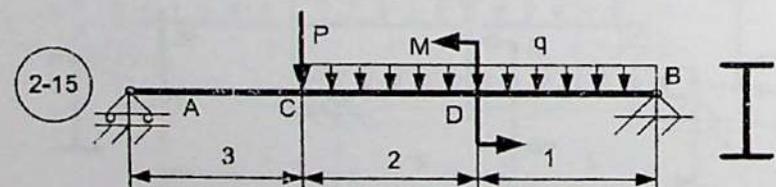
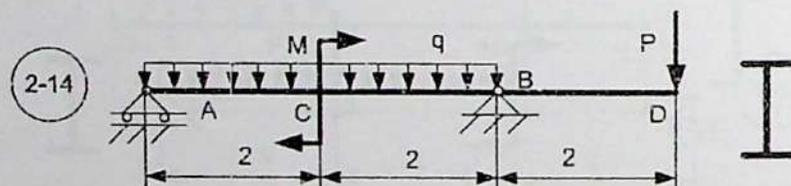
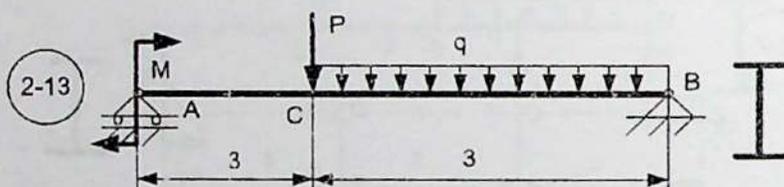
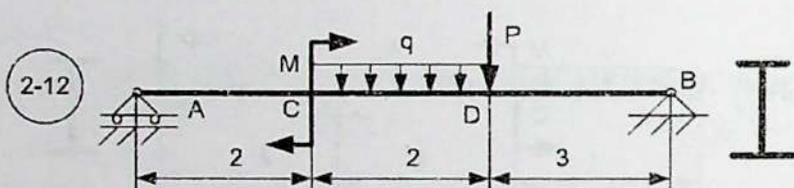
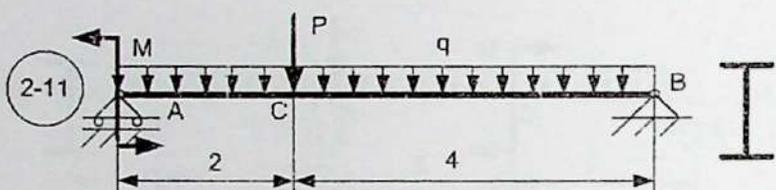
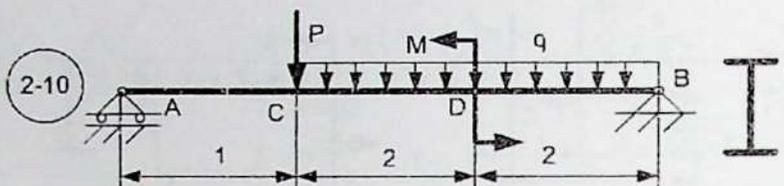


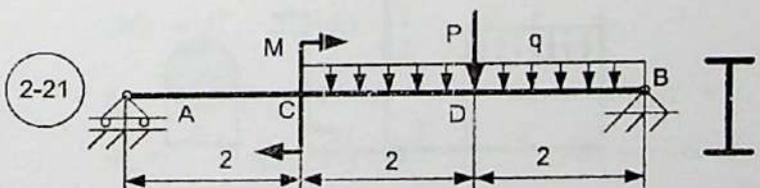
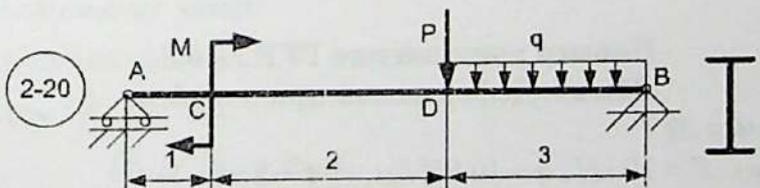
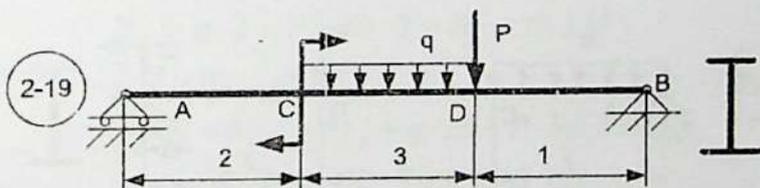
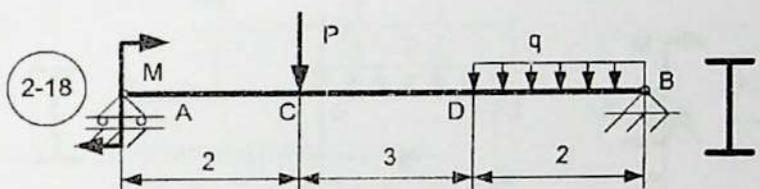
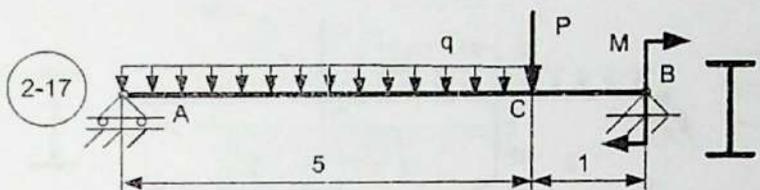
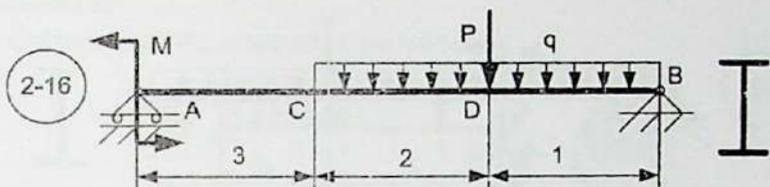


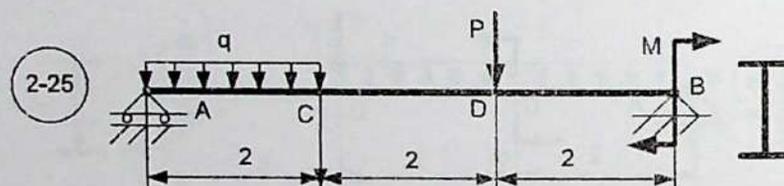
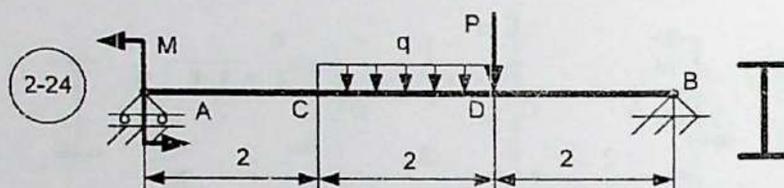
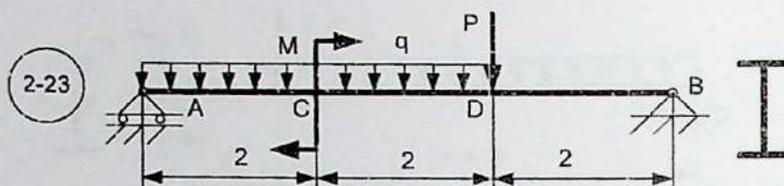
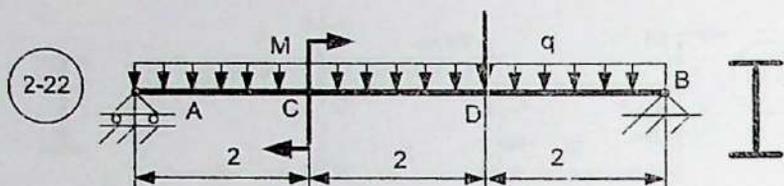
Схемы задачи № 2, статически-определимые задачи







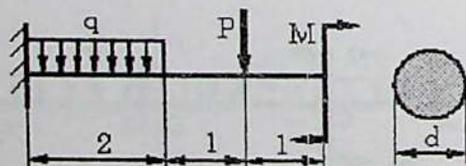




Пример выполнения РГР № 4,5.
«Изгиб. Деформация при изгибе»

Пример № 1

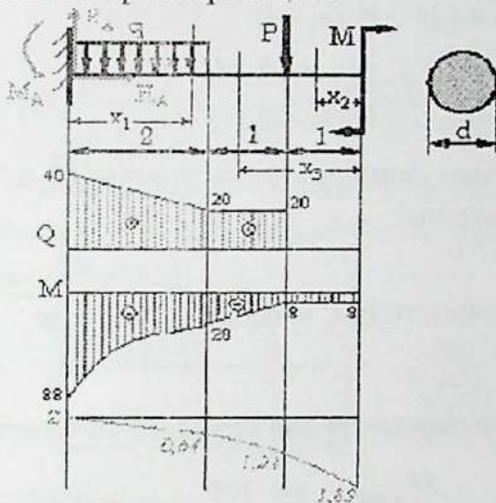
Дано: $P = 20 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$, $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$



Требуется определить: продольную силу Q , изгибающий момент M , и построить их эпюры, подобрать сечение и определить перемещение.

Решение:

1. Определение опорных реакций:



составляем уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot 2 - P = 0$$

$$R_A = q \cdot 2 + P = 10 \cdot 2 + 20 = 40 \text{ кН}$$

$$\sum Z = 0; \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 3 + M = 0;$$

$$M_A = 10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 8 = 88 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Построение эпюр:

2. Определение Q и M_u по участкам:

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = R_A - q \cdot x_1$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2} - M_A$$

при $x_1 = 0 \quad Q_1 = 40 \text{ кН} \quad M_1 = -88 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$x_1 = 2 \quad Q_1 = 20 \text{ кН} \quad M_1 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$

2 участок $0 \leq x_2 \leq 1$

$$Q_2 = 0 \quad M_2 = -M = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $1 \leq x_3 \leq 2$

$$Q_3 = P = 20 \text{ кН}$$

$$M_3 = -M - P \cdot (x_3 - 1)$$

При $x_3 = 1 \quad M_3 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$x_3 = 2 \quad M_3 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}$

По полученным данным строим эпюры Q и M .

3. Подбор сечения:

Условия прочности при изгибе:
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

Момент сопротивления для круглого сечения:
$$W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{88 \cdot 100}{1} = 8800 \text{ см}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_y \cdot 32}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8800 \cdot 32}{3,14}} = 45 \text{ см};$$

$$J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 201187 \text{ см}^4$$

4. Определение перемещений:

Для определения прогиба применяем универсальное уравнение:

а) для определения угла поворота:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EJ_y} \left[\sum M(x-a) + \frac{\sum P(x-b)^2}{2} + \frac{\sum q(x-c)^3}{6} - \frac{\sum q(x-d)^3}{6} \right]$$

б) для определения прогиба:

$$Z = Z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{\sum M(x-a)^2}{2} + \frac{\sum P(x-b)^3}{6} + \frac{\sum q(x-c)^4}{24} - \frac{\sum q(x-d)^4}{24} \right]$$

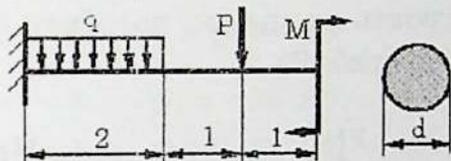
Распределенную нагрузку продолжаем до конца балки и одновременно добавляем нагрузку равную по величине обратного знака.

Составляем основное универсальное уравнение:

$$\theta_x = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[M_A(x-0) + R_A \frac{(x-0)^2}{2} - q \frac{(x-0)^3}{6} - P \frac{(x-3)^2}{3} + q \frac{(x-2)^3}{6} \right]$$

$$Z_x = Z_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EJ} \left[M_A \frac{(x-0)^2}{2} + R_A \frac{(x-0)^3}{6} - q \frac{(x-0)^4}{24} - P \frac{(x-3)^3}{6} + q \frac{(x-2)^4}{24} \right]$$

где: θ_0 и Z_0 – угол поворота сечения и прогиб балки в начале координат. Значения θ_0 и Z_0 определяют из условия опирания балки (граничных условий).



Граничные условия:

$$x = 0$$

$$\theta_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

Вычисление прогиба: $x = 2\text{ м}$

$$z_2 = z_0 + \theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{2^3}{6} - M_A \frac{2^2}{2} - q \frac{2^4}{24} \right] = 0 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ} [53,3 - 176 - 6,7] = -\frac{129,4 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^3 \cdot 201187} =$$

$$= -0,64 \text{ см}$$

$$x = 3\text{ м}$$

$$z_3 = z_0 + \theta_0 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{3^3}{6} - M_A \frac{3^2}{2} - q \frac{3^4}{24} + q \frac{1^4}{24} \right] = \frac{1}{EJ} [180 - 396 - 33,8 + 0,4] = -\frac{249,4 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^3 \cdot 201187} =$$

$$= -1,24 \text{ см}$$

$$x = 4\text{ м}$$

$$z_4 = z_0 + \theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{4^3}{6} - M_A \frac{4^2}{2} - q \frac{4^4}{24} \right] = 0 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ} [426,7 - 704 - 106,7 + 6,7 - 3,3] =$$

$$= -\frac{380,6 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^3 \cdot 201187} = -1,89 \text{ см}$$

Определяем угол поворота на свободном конце балки (консоль)

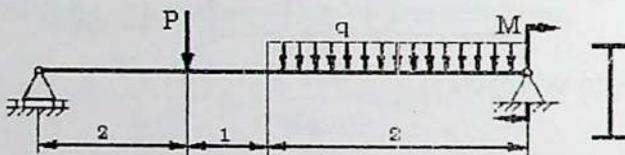
$$\theta_a = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{4^2}{2} - M_A 4 - q \frac{4^3}{6} + q \frac{l^3}{6} - P \frac{l^2}{2} \right] = \frac{1}{EJ} [320 - 353 - 106,7 + 13,3 - 10] =$$

$$= -\frac{136,3 \cdot 10^4}{1 \cdot 10^3 \cdot 201187} = -0,00677 \text{ рад}$$

Пример № 2

Дано: $P = 40 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 10 \text{ кН/м}$

Требуется определить: продольную силу Q , изгибающий момент M , и построить их эпюры, подобрать двутавровое сечение и определить прогиб (Z).



1. Определение опорных реакций:

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M - R_B \cdot 5 = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{5} = \frac{80 + 80 + 20}{5} = 36 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -P \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + M + R_A \cdot 5 = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 - M}{5} = \frac{120 + 20 - 20}{5} = 24 \text{ кН}$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - P - q \cdot 2 = 0$

$$24 + 36 - 40 - 20 = 0$$

$$60 - 60 = 0$$

2. Определение Q и M_u по участкам:

1 участок $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = R_A = 24 \text{ кН}$$

$$M_1 = R_A \cdot x_1$$

$$x_1 = 0; \quad M_1 = 0$$

$$x_1 = 2 \text{ м}; \quad M_1 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2 участок $2 \leq x_2 \leq 3$

$$Q_2 = R_A - P = -16 \text{ кН}$$

$$M_2 = R_A \cdot x_2 - P \cdot (x_2 - 2)$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_2 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$x_2 = 3 \text{ м}; \quad M_2 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3 участок $0 \leq x_3 \leq 2$

$$Q_3 = -R_B + q \cdot x_3$$

$$M_3 = R_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} - M$$

$$x_3 = 0; \quad Q_3 = -36 \text{ кН}; \quad M_3 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$x_3 = 2; \quad Q_3 = -16 \text{ кН}; \quad M_3 = 32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным строим эпюры Q и M .

3. Подбор двутаврового сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} \leq [\sigma]$$

Где: M_{\max} – Максимальный изгибающий момент, берется из эпюры моментов;

W_y – осевой момент сопротивления;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

$$W_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{48 \cdot 100}{16} = 300 \text{ см}^3$$

Из таблицы сортамента подбираем номер двутавра

№ двутавра 24а при $W_y = 317 \text{ см}^3$, $J_y = 3800 \text{ см}^4$

4. Определение перемещений:

Для определения прогиба применяем универсальное уравнение:

а) для определения угла поворота:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EJ_y} \left[\sum M(x-a) + \frac{\sum P(x-b)^2}{2} + \frac{\sum q(x-c)^3}{6} - \frac{\sum q(x-d)^3}{6} \right]$$

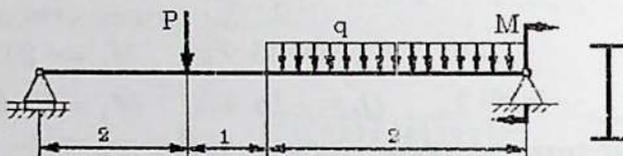
б) для определения прогиба:

$$Z = Z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_y} \left[\frac{\sum M(x-a)^2}{2} + \frac{\sum P(x-b)^3}{6} + \frac{\sum q(x-c)^4}{24} - \frac{\sum q(x-d)^4}{24} \right]$$

Составляем основное универсальное уравнение:

$$Z_x = Z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^3}{6} - P \frac{(x-2)^3}{6} - q \frac{(x-3)^4}{24} \right]$$

$$\theta_x = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{x^2}{2} - P \frac{(x-2)^2}{2} - q \frac{(x-3)^3}{6} \right]$$



Граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad x = 5 \\ \theta_0 \neq 0 & \quad \theta_B \neq 0 \\ z_0 = 0 & \quad z_B = 0 \end{aligned}$$

Вычисление прогиба: $x = 5 \text{ м}$

$$Z_B = Z_0 + \theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{5^3}{6} - P \frac{(5-2)^3}{6} - q \frac{(5-3)^4}{24} \right] = 0; \quad Z_0 = 0$$

$$\theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{EJ} \left[24 \frac{5^3}{6} - 40 \frac{3^3}{6} - 10 \frac{2^2}{24} \right] = 0$$

$$\theta_0 \cdot 5 + \frac{1}{EJ} [500 - 180 - 6.7] = 0 \Rightarrow \theta_0 = -\frac{65,3}{EJ}$$

Определение угла поворота в начале координат в точке А:

$$\theta_0 = -\frac{65,3}{EJ} = -\frac{65,3 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 3800} = -0,00859 \text{ рад}$$

Определение прогиба при изгибе:

$$x = 2 \text{ м}$$

$$Z_2 = Z_0 + \theta_0 \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{2^3}{6} \right] = -\frac{65,3 \cdot 2}{EJ} + \frac{32}{EJ} = -\frac{98,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 3800} = -1,29 \text{ см}$$

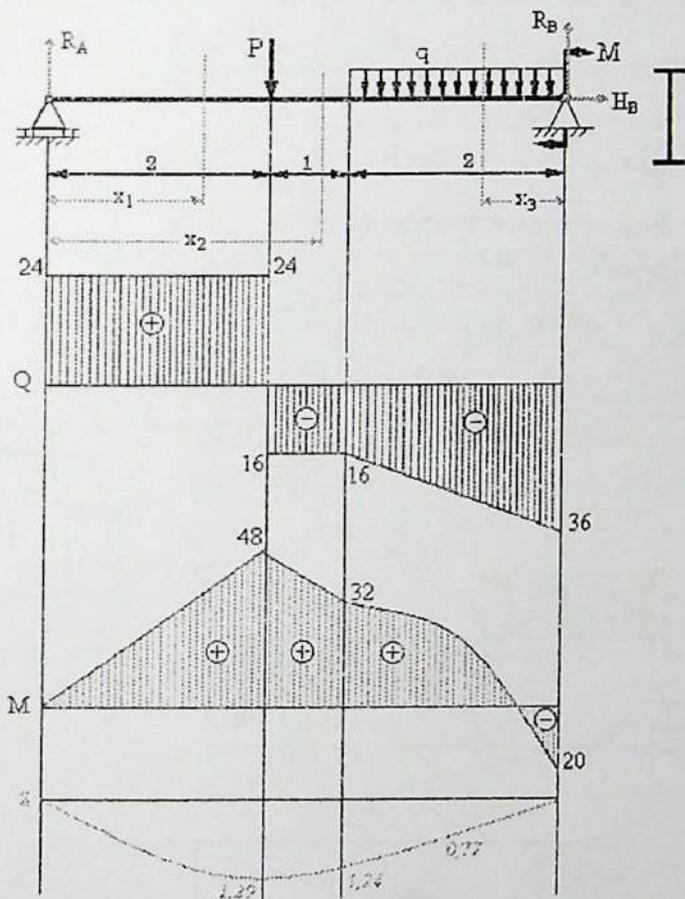
$$x = 3 \text{ м}$$

$$Z_3 = Z_0 + \theta_0 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{3^3}{6} - P \frac{(3-2)^3}{6} - q \frac{(3-3)^4}{24} \right] = \frac{65,3 \cdot 3}{EJ} + \frac{108}{EJ} \frac{6,7}{EJ} - \frac{94,6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 3800} = -1,24 \text{ см}$$

$$x = 4 \text{ м}$$

$$Z_4 = Z_0 + \theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \left[R_A \frac{4^3}{6} - P \frac{(4-2)^3}{6} - q \frac{(4-3)^4}{24} \right] = \frac{65,3 \cdot 4}{EJ} + \frac{256}{EJ} - \frac{53,3}{EJ} \frac{0,4}{EJ} =$$

$$= -\frac{58,9 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 3800} = -0,77 \text{ см}$$



Пример № 3

Этот же пример решим с применением математической программы «Mathcad»

Дано: $P = 40 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 10 \text{ кН/м}$

Вводим данные задачи :

Mathcad - [Math-метод]

Файл Правка Вид Вставить Формат Сервис Символика Отображение Панель

Normal Arial 10 B I U

Оформление

Калькулятор

sin	cos	tan	ln
log	ln	x	
Γ	°	e ^x	1/2
()	x ^y	π	
?	8	9	/
1/2	4	5	6
x	+	1	2
3	+	=	.
0	-	=	

Определение и построение элор внутренних силовых факторов в балках (Q и M_x)

$$GRCOIN = 1$$

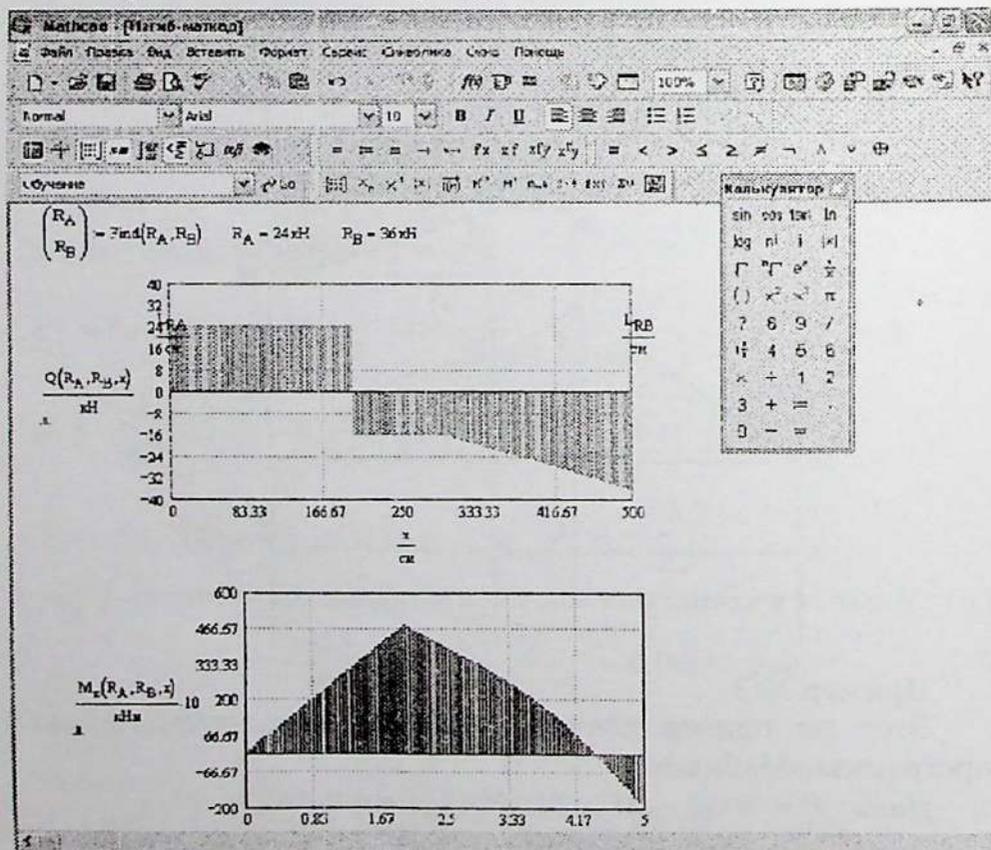
$$x = 0 \text{ м} \quad \text{см} = 0.01 \text{ м} \quad \text{мм} = 0.001 \text{ м} \quad \text{кН} = 1000 \text{ Н} \quad \text{кНм} = 1000 \text{ Нм} \quad \text{Нм} = \text{Нм}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} \text{ кН} \quad L_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \text{ м} \quad \text{или } q = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad L_{qF} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$$

$$M = \begin{pmatrix} 20000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Нм} \quad L_M = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см} \quad L = 5 \text{ м} \quad x = 0 \text{ м} \quad \frac{L}{100} = L$$

$$R_A = 0 \text{ кН} \quad R_B = 500 \text{ кН}$$

Получаем готовые эпюры Q и M :



Определение деформации при изгибе: Вводим все необходимые данные

Mathcad - [деформация при изгибе]

Определение деформации при изгибе

ORIGIN = 1

$\mu = 0.3$ $\text{см} = 0.01 \text{ м}$ $\text{мм} = 0.001 \text{ м}$ $N = \text{Н}$ $\text{МПа} = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ $I_z = 2000 \text{ см}^4$

град. = deg $N_{\text{с}} = 14 \text{ м}$ $xN = 1000 \text{ Н}$ $xN_{\text{с}} = 1000 \text{ Н м}$

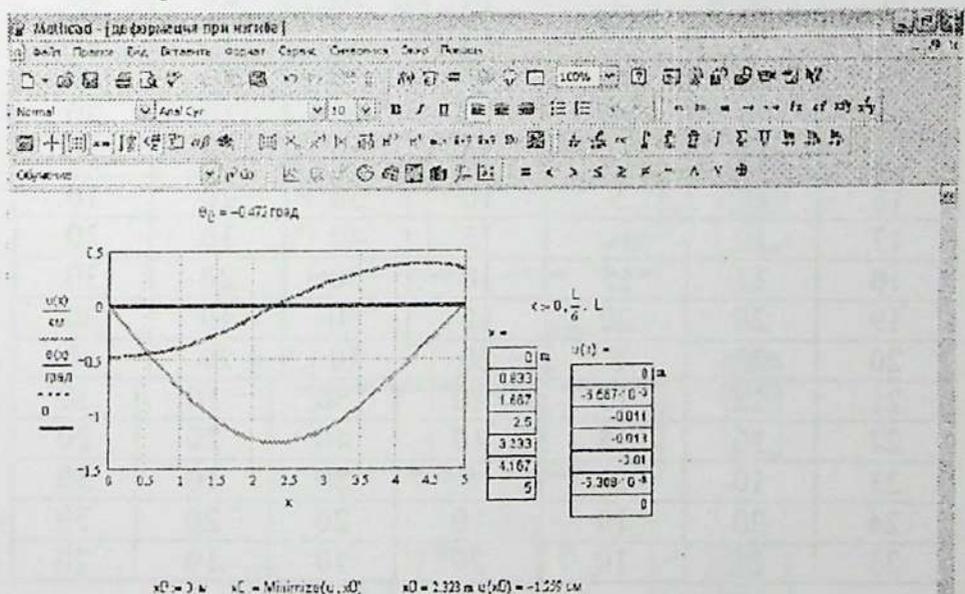
$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ кН}$ $L_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$ $q = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ $L_q = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$ $L_{qC} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$

$N = \begin{pmatrix} 20000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Н}$ $L_N = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ см}$ $L = 5 \text{ м}$ $r = 0.3 \cdot \frac{L}{100}$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Положение опор

$L_{RA} = 0 \text{ см}$ $L_{RB} = 500 \text{ см}$ изменить положения опор

и получаем:



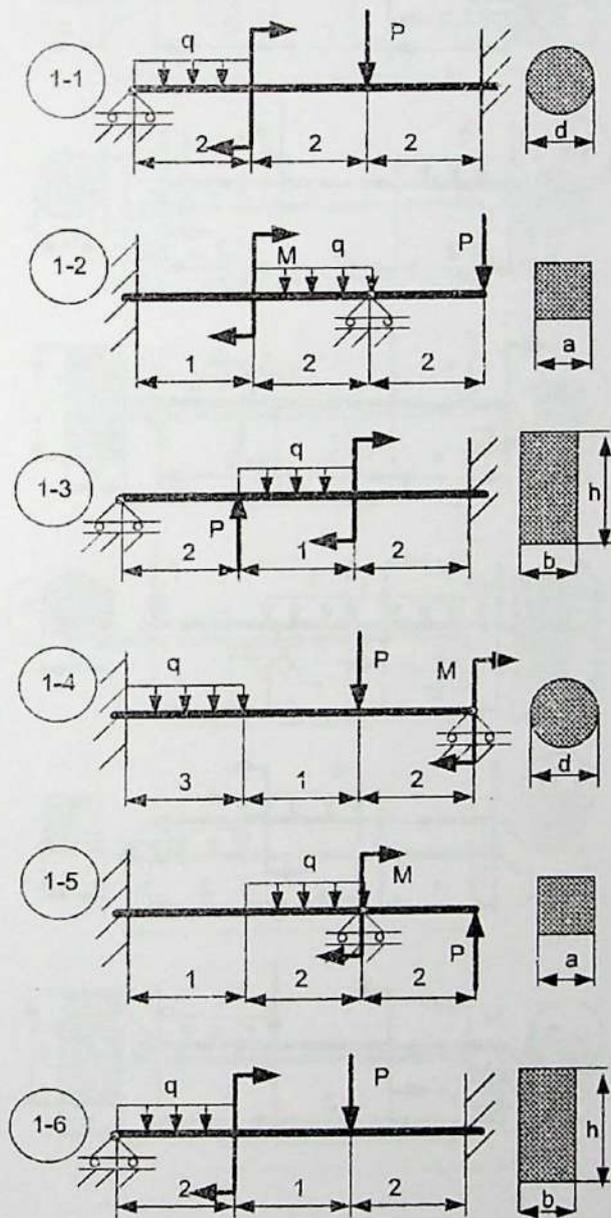
Схемы задачи № 2, статически-неопределимые задачи

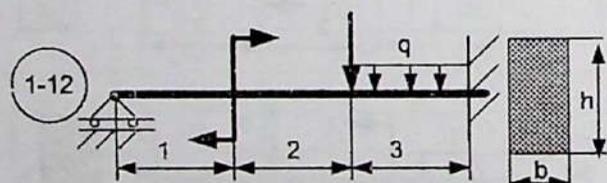
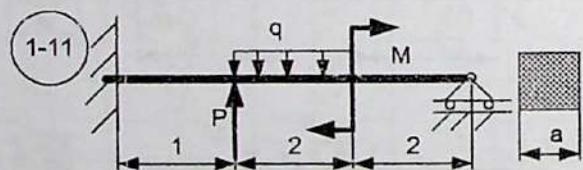
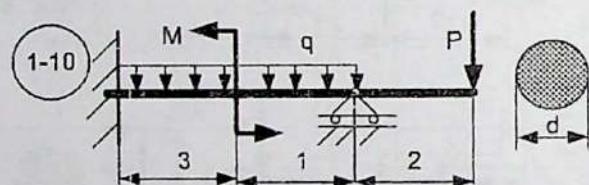
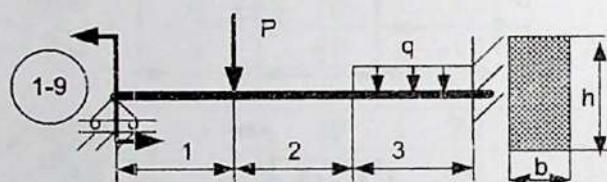
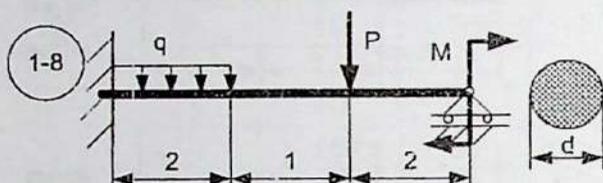
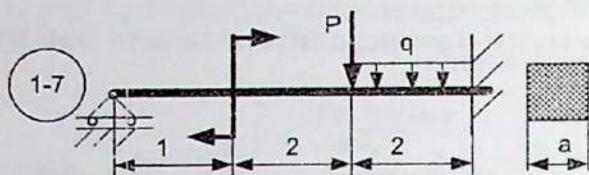
Таблица данных по изгибу

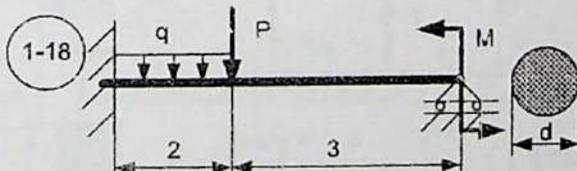
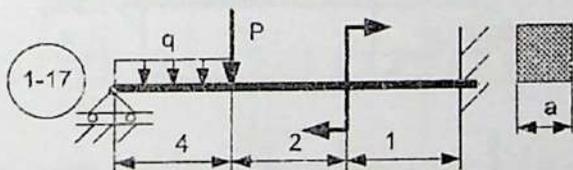
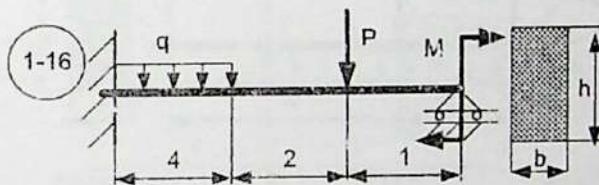
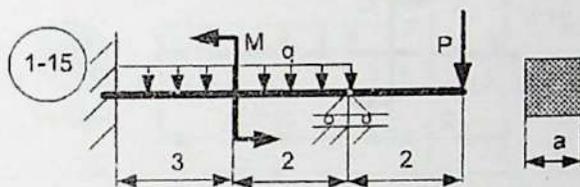
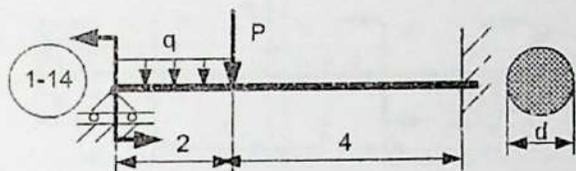
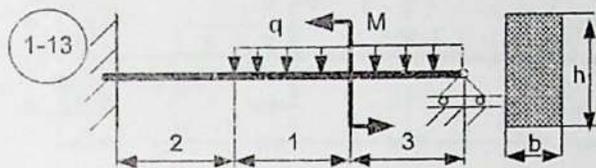
№ Варианта	Нагрузка					
	1 задача			2 задача		
	$P, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$P, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$
1	10	5	10	50	20	10
2	15	10	15	40	10	20
3	20	15	10	30	20	30
4	20	20	10	20	10	30
5	15	5	20	10	20	20
6	10	10	10	50	10	10
7	10	15	10	40	20	20
8	15	20	5	30	10	30
9	20	10	10	20	20	30
10	20	10	20	10	10	20
11	15	5	10	50	20	10
12	10	10	15	40	10	20
13	10	15	10	30	20	20
14	20	20	10	20	10	30
15	15	5	20	10	20	30
16	10	5	10	50	20	10
17	10	10	15	40	10	20
18	15	15	10	30	20	30
19	20	20	10	20	10	30
20	20	5	20	10	20	20
21	15	10	10	50	10	10
22	10	15	10	40	20	20
23	10	20	5	30	10	30
24	20	10	10	20	20	30
25	15	10	20	10	10	20

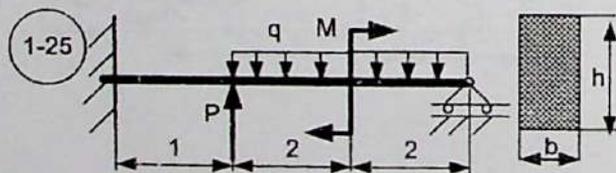
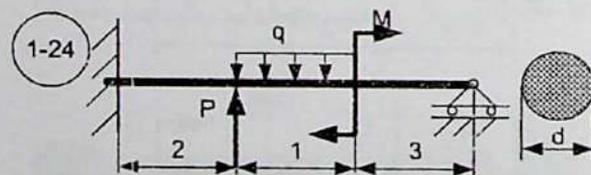
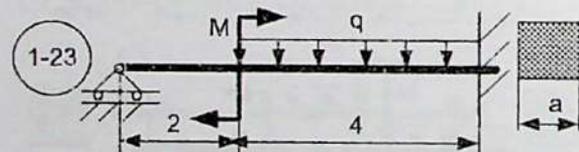
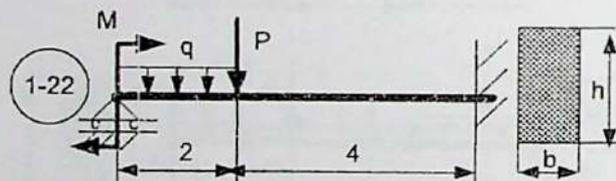
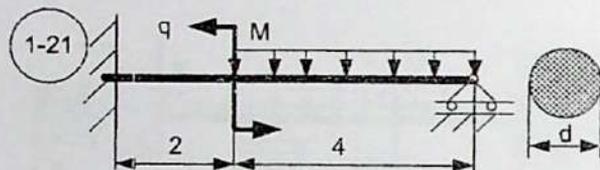
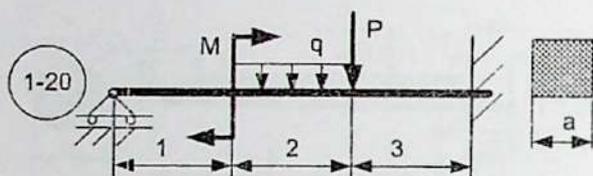
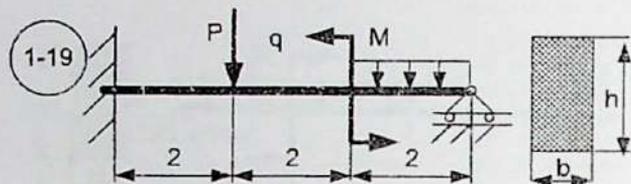
Задание № 6.

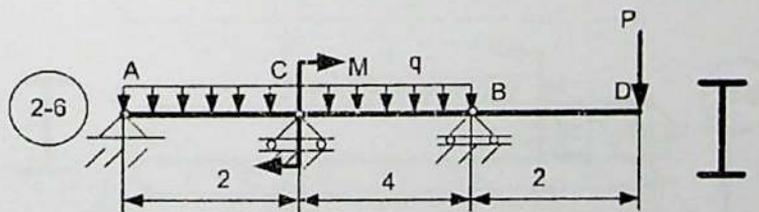
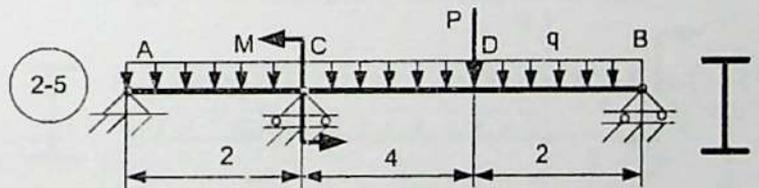
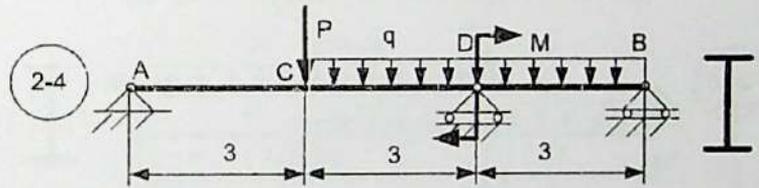
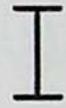
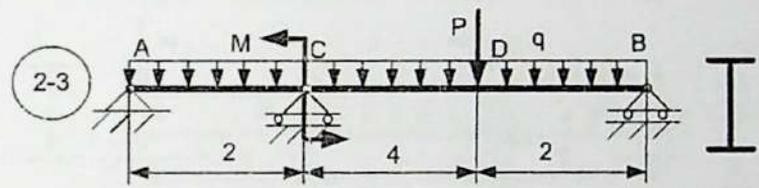
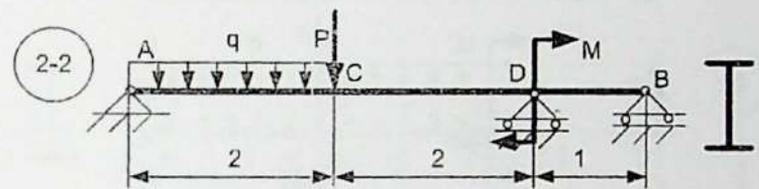
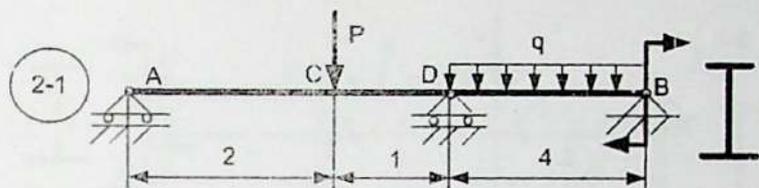
Статически неопределимые задачи при изгибе

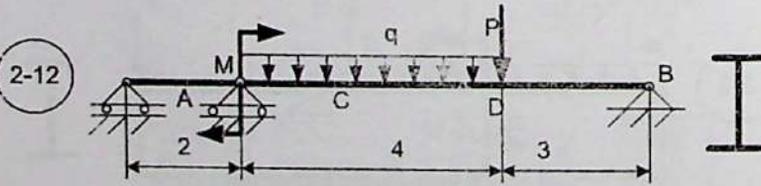
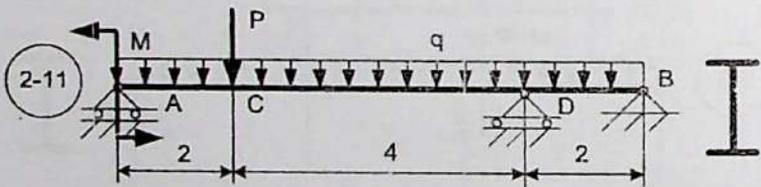
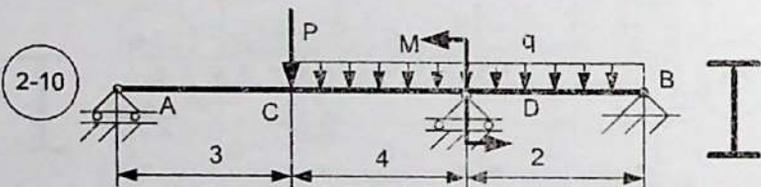
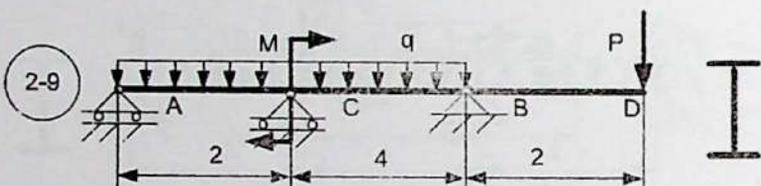
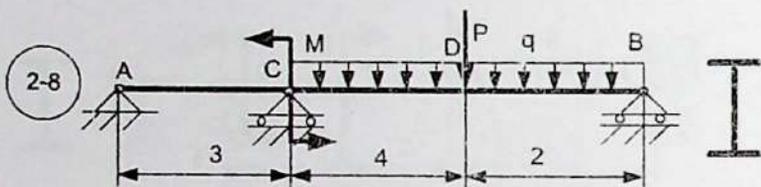
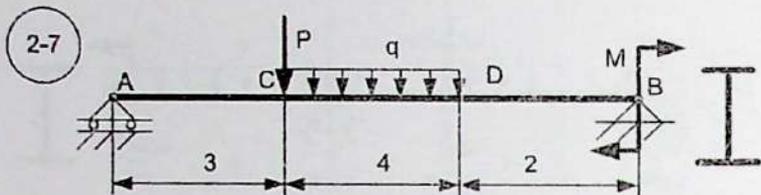


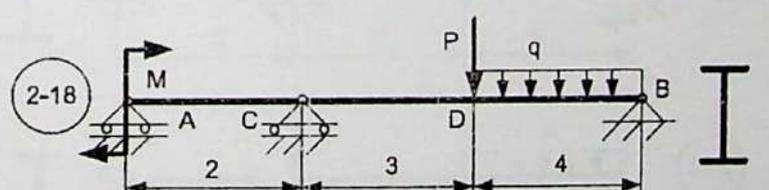
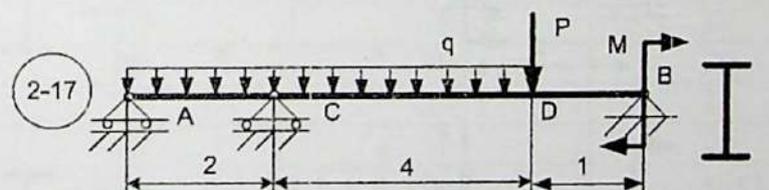
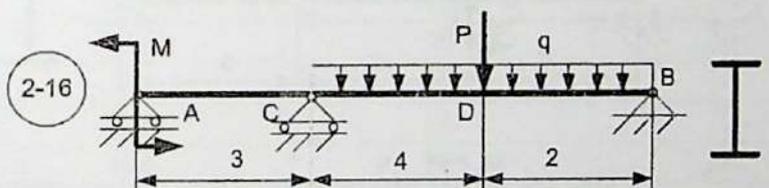
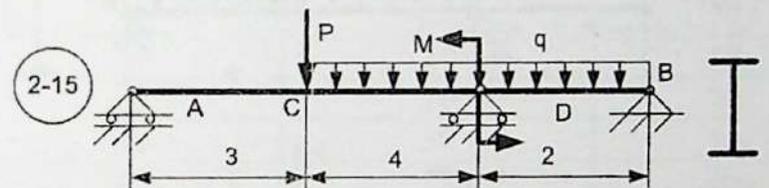
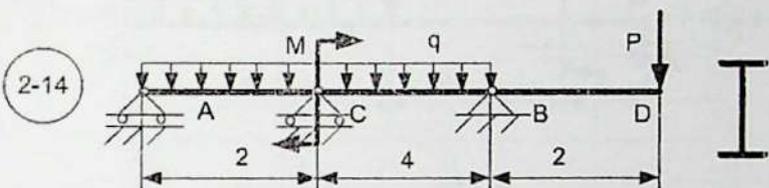
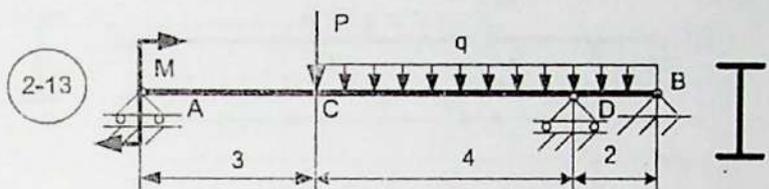












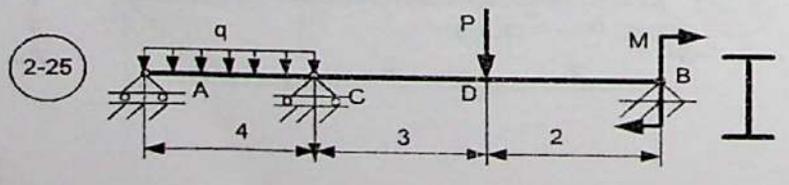
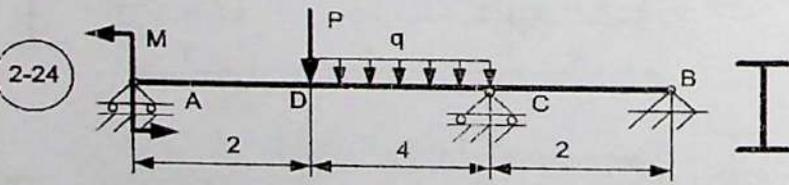
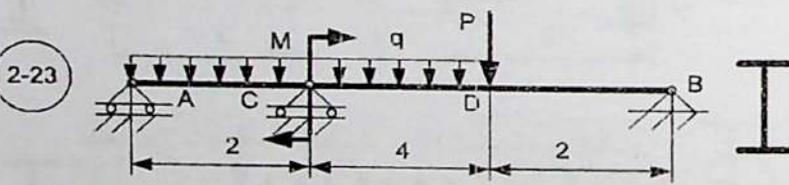
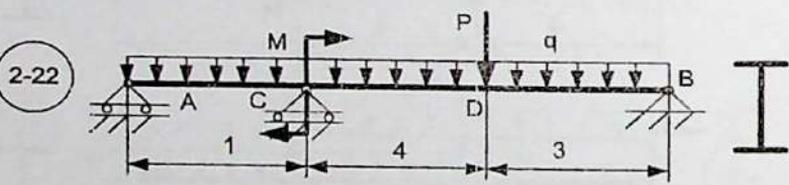
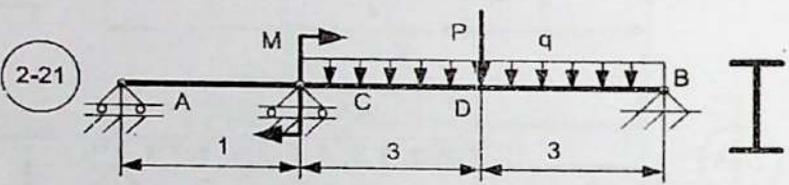
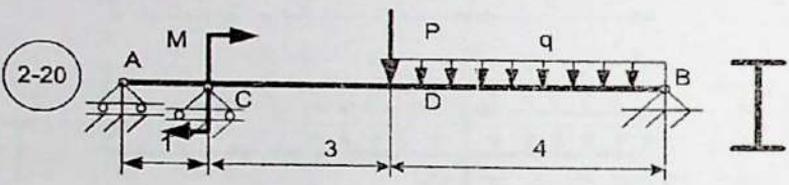
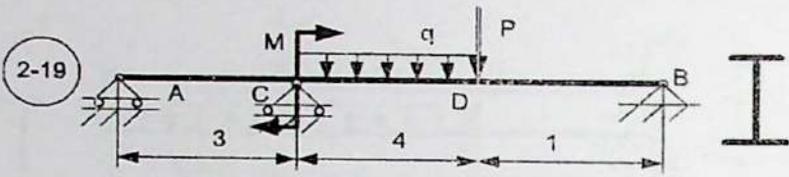


Таблица 2

№	P (кН)	M (кН·м)	q (кН/м)
1	10	30	10
2	20	20	20
3	30	10	10
4	40	30	20
5	50	20	10
6	10	10	20
7	20	30	10
8	30	20	20
9	40	10	10
10	50	30	20
11	10	20	10
12	20	10	20
13	30	30	10
14	40	20	20
15	50	10	10
16	10	30	20
17	20	20	10
18	30	10	20
19	40	30	10
20	50	20	20
21	10	10	10
22	20	30	20
23	30	20	10
24	40	10	20
25	50	20	10

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Физико - механические характеристики материалов

Материал	Модуль упругости E · 10 ⁵ , МПа	Модуль сдвига G · 10 ⁴ , МПа	Коэффициент поперечной деформации μ	Удельный вес γ , кН/м ³
Сталь:				
углеродистая	2,0...2,1	8,0...8,1	0,24...0,33	78,5
легированная	2,1...2,2	8,0...8,1	0,25...0,30	75...78,5
Серый чугун	0,78...1,5	4,4	0,23...0,27	68...76
Оловянная бронза	0,75...1,20	-	0,32...0,35	87,6...88,2
Прокатная медь	1,0...1,1	4,3	0,28...0,34	89,4
Сплавы:				
алюминиевые	0,69...0,71	2,7	0,33	26,4...28,0
магниевые	0,39...0,44	-	0,34	17,6...18,0
Бетон с пределом прочности 20 МПа	0,182...0,232	-	0,16...0,18	-
Дерево вдоль волокон	0,09...0,15	0,055	-	4,8...5,4 (сосна)
Текстолит	0,04...0,06	-	-	13...14,5
Винипласт	0,03...0,04	-	0,35...0,37	13,8...14,3
Капрон	0,014...0,020	0,045...0,048	0,35...0,38	11,0...11,4
Стекловолокнит	0,35	-	0,29	17,0...18,0
Полиэтилен ПД	0,005...0,008	-	0,39	9,2...9,7
Каучук	0,00008	-	0,47	-

Механические характеристики материалов

Материал	Временное сопротивление предела прочности σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Относительное удлинение δ_5 , %	Предел выносливости, МПа		
				σ_{-1p}	σ_{-1b}	T_{-1c}
<i>Углеродистые стали обыкновенного качества</i>						
Ст 2кп	350..420	200..220	30..35	120..160	170..220	80..130
Ст 2пс(сп)	340..440	210..230	29..32			
Ст 3кп	370..470	220..240	25..27	120..160	170..220	100..130
Ст 3пс(сп)	380..490	230..250	23..26			
Ст 4кп	410..520	240..260	22..25	-	190..250	-
Ст 4пс(сп)	420..540	250..270	21..24			
Ст 5пс(сп)	500..640	270..290	17..20	170..220	220..300	130..180
Ст 6пс(сп)	600	300..320	12..15	190..250	250..340	150..200
<i>Углеродистые качественные стали (борнированные)</i>						
10	340..420	210	31	120..150	160..220	80..120
20	420..500	250	25	120..160	170..220	100..130
30	500..600	300	21	170..210	200..270	110..140
40	580..700	340	19	180..240	230..320	140..190
45	610..750	360	16	190..250	250..340	150..200
50	640..800	380	14	200..260	270..350	160..210
60	690..900	410	12	220..280	310..380	180..220
<i>Легированные стали</i>						
20Х	720..850	400..650	12	-	310..380	170..220
40Х	730..1050	650..900	15,5	240..340	320..480	210..260
45Х	850..1060	700..950	9	-	400..500	-
40ХН	1000..1450	800..1300	-	310..420	460..600	-
30ХГСА	1160..1700	850..1500	7	-	480..700	280..400
60Г	710	420	11	250..320	-	-
<i>Серые и высокопрочные чугуны</i>						
СЧ18-36	Растяжение 180	-	-	35	90	-
	Изгиб 360	-	-			
СЧ24-44	Сжатие 700	-	-	65	120	100
	Растяжение 240	-	-			
СЧ21-40	Изгиб 440	-	-	-	100	30
	Сжатие 1000	-	-			
СЧ21-40	Растяжение 210	-	-	-	100	30
	Изгиб 400	-	-			
СЧ21-40	Сжатие 950	-	-	-	100	30
	Растяжение 210	-	-			

Приложение 2 (продолжение)

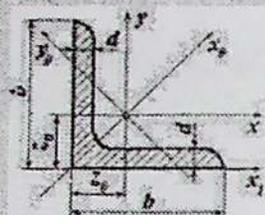
Материал	Временное сопротивление предел прочности $\sigma_{\text{в}}$, МПа	Предел текучести $\sigma_{\text{т}}$, МПа	Относительное удлинение δ , %	Предел выносливости, МПа		
				$\sigma_{-1\text{р}}$	$\sigma_{-1\text{в}}$	$\sigma_{-1\text{д}}$
ВТ150-2	Растяжение 500...600 Изгиб 900...1000 Сжатие 1700...1800	380	2	-	200...220	170...210
<i>Алюминиевые деформируемые сплавы</i>						
АМЦ	100	50	20	-	50	-
АД-31						
естественное старение	140	70	13	-	90	-
искусств. старение	200	150	8	-	-	-
АМг5	270	120	15	-	110	-
АМг6	320	160	15	-	130	-
Д16Т	400...430	280...300	10	-	115	-
<i>Медные сплавы</i>						
Латунь Д68						
мягкая	300...380	-	42	-	120	-
твердая	440...550	-	10	-	150	-
Бронзы:						
Бр.АМц 9-2	430...550	-	20...12	-	-	-
Бр.АжМц 10-3-1,5	60	-	12	-	-	-
<i>Неметаллические материалы</i>						
Дерево:						
сосна	Растяжение 93...115 Изгиб 74...88 Сжатие 45	-	-	-	-	-
дуб	Растяжение 130 Изгиб 95 Сжатие 52	-	-	-	-	-
Текстолит	Растяжение 90...100 Изгиб 140...150 Сжатие 230...250	70...80	-	-	-	-

Приложение 2 (продолжение)

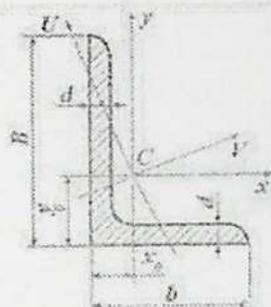
Материал	Временное сопротивление (предел прочности) σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Относительное удлинение δ , %	Предел выносливости, МПа		
				σ_{-1}	σ_{-2}	σ_{-3}
Капрон	Растяжение 50...60 Изгиб 90...100 Сжатие 85...100	-	25	-	-	-
Эпоксидные смолы	Растяжение 70...80 Изгиб 120...130 Сжатие 145...155	-	-	-	-	-
Фторопласт -3	Растяжение 30...37 Изгиб 60...80 Сжатие 50...60	-	50...70	-	-	-

ПРИЛОЖЕНИЕ I
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

УГОЛОК РАВНОПОЛОЧНЫЙ
ПО ГОСТ 8509-72 (ВЫБОРКА)

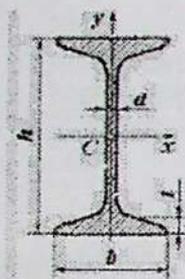


Профиль	Геометрические характеристики									Масса 1 п.м., (кг)
	A_x (см ²)	J_{x_1} (см ⁴)	l_{x_1} (см)	J_{x_2} (см ⁴)	l_{x_2} (см)	J_{y_1} (см ⁴)	l_{y_1} (см)	J_{y_2} (см ⁴)	z_0 (см)	
30×30×3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	12,38	1,33	2,32
50×50×4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	16,61	1,38	3,05
56×56×4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	23,28	1,52	3,44
56×56×5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	29,25	1,37	4,25
63×63×4	4,96	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,06	1,69	3,90
63×63×5	6,13	23,10	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
63×63×6	7,28	27,06	1,93	42,94	2,43	11,18	1,24	50,04	1,78	5,72
75×75×5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	69,62	2,02	5,80
75×75×6	8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	83,92	2,06	6,89
75×75×7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	98,29	2,10	7,96
80×80×6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	101,80	2,19	7,36
80×80×7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	119,20	2,23	8,51
80×80×8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	136,70	2,27	9,65
90×90×6	10,61	82,10	2,78	130,22	3,50	33,97	1,79	144,70	2,43	8,33
90×90×7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	169,40	2,47	9,64
90×90×8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	194,20	2,51	10,93
100×100×7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	231,30	2,71	10,79
100×100×8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	265,20	2,75	12,25
125×125×8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	516,40	3,36	15,46
125×125×9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,38	2,48	582,00	3,40	17,30
140×140×9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	818,20	3,78	19,41
140×140×10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	910,90	3,82	21,45
160×160×10	31,43	774,20	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	1356,0	4,30	24,67
160×160×11	34,42	844,20	4,95	1340,70	6,24	347,77	3,18	1494,0	4,35	27,02
180×180×11	38,80	1216,40	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	2128,0	4,85	30,47
180×180×12	42,19	1316,60	5,59	2092,80	7,04	540,45	3,58	2325,0	4,89	33,12
200×200×12	47,10	1822,80	6,22	2896,20	7,84	749,40	3,99	3182,0	5,37	36,97
200×200×14	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722,0	5,46	42,80
250×250×16	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,1	4,98	8286,0	6,75	61,55



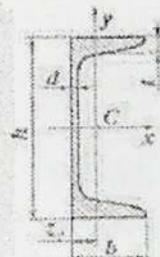
УГОЛОК НЕРАВНОПОЛОЧНЫЙ
ПО ГОСТ 8510-72 (ВЫБОРКА)

Профиль	Геометрические характеристики									Масса 1 м, (кг)
	A_c (см ²)	J_{cx} (см ⁴)	I_{cx} (см)	J_{cy} (см ⁴)	I_{cy} (см)	x_{c0} (см)	y_{c0} (см)	$J_{z_{мин}}$ (см ⁴)	$I_{z_{мин}}$ (см)	
50×32×3	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	0,72	1,60	1,18	0,70	1,90
50×32×4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	0,76	1,65	1,52	0,69	2,49
56×36×4	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	0,84	1,82	2,19	0,78	2,81
56×36×5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	0,88	1,87	2,65	0,78	3,46
63×40×4	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	0,91	2,03	3,07	0,87	3,17
63×40×5	4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	0,95	2,08	3,73	0,86	3,91
63×40×6	5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	0,99	2,12	4,36	0,86	4,63
75×50×5	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	1,17	2,39	7,24	1,09	4,79
75×50×6	7,25	40,92	2,38	14,6	1,42	1,21	2,44	8,48	1,08	5,69
75×50×8	9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	1,29	2,52	10,87	1,07	7,43
80×80×5	6,36	41,64	2,56	12,68	1,41	1,13	2,60	7,57	1,09	4,99
80×80×6	7,55	48,98	2,55	14,85	1,40	1,17	2,65	8,88	1,08	5,92
90×56×5,5	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	1,26	2,92	11,77	1,22	6,17
90×56×6	8,54	70,58	2,88	21,22	1,58	1,28	2,95	12,70	1,22	6,70
90×56×8	11,18	90,87	2,85	27,08	1,56	1,36	3,04	16,29	1,21	8,77
100×63×6	9,59	98,29	3,20	30,58	1,79	1,42	3,23	18,20	1,38	7,53
100×63×8	12,57	127,00	3,18	39,21	1,77	1,50	3,32	23,38	1,36	9,87
125×80×8	15,96	255,60	4,00	82,95	2,28	1,84	4,05	48,82	1,75	12,53
125×80×10	19,70	311,60	3,98	100,50	2,26	1,92	4,14	59,33	1,74	15,47
125×80×12	23,36	364,80	3,95	116,80	2,24	2,00	4,22	69,47	1,72	18,34
140×90×8	18,00	363,70	4,49	119,8	2,58	2,03	4,49	70,27	1,98	14,13
140×90×10	22,24	494,50	4,47	145,50	2,56	2,12	4,58	85,51	1,96	17,46
160×100×9	22,87	606,00	5,15	186,00	2,85	2,24	5,19	110,40	2,20	17,96
160×100×10	25,28	666,60	5,13	204,10	2,84	2,28	5,23	121,20	2,19	19,85
180×110×10	28,33	952,30	5,80	276,40	3,12	2,44	5,88	165,40	2,42	22,24
180×110×12	33,69	1122,60	5,77	324,10	3,10	2,52	5,97	194,30	2,40	26,44
200×125×12	37,96	1568,20	6,43	481,90	3,57	2,83	6,54	285,00	2,74	29,74
200×125×14	43,90	1800,80	6,41	550,80	3,54	2,91	6,62	326,50	2,73	34,43
250×160×12	48,39	3147,50	8,07	1032,3	4,62	3,53	7,97	604,10	3,54	37,92
250×160×16	63,70	4091,10	8,02	1332,6	4,58	3,69	8,14	780,60	3,50	49,91



ДВУТАВРОВЫЕ БАЛКИ ПО ГОСТ 8239-72
(ВЫБОРКА)

№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики								Масса 1 п.м. (кг)
	h	b	d	r	A_x (см^2)	J_x (см^4)	W_x (см^3)	i_x (см)	S_{x_0} (см^3)	J_y (см^4)	W_y (см^3)	i_y (см)	
10	100	56	4,5	7,2	12,2	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,20	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,30	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,30	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,50	282	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,50	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,70	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54	108,0

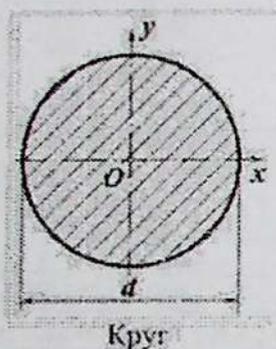


ШВЕЛЛЕРЫ ПО ГОСТ 8240-72
(ВЫБОРКА)

№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики									Масса 1 п.м., (кг)
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	J_{x_0} (см ⁴)	J_{y_0} (см ⁴)	W_{x_0} (см ³)	W_{y_0} (см ³)	S_{x_0} (см ²)	J_{x_0} (см ⁴)	W_{x_0} (см ³)	i_{x_0} (см)	z_0 (см)	
5	0	2	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,64
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,60	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,30	12,5	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,80	45,4	11,6	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,10	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,10	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,40	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,80	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,10	105,0	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,80	113,0	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,4	1670	167	8,15	95,90	139,0	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,90	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,8	61,5	15220	761	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75	48,3

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР



Площадь сечения: $A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2$

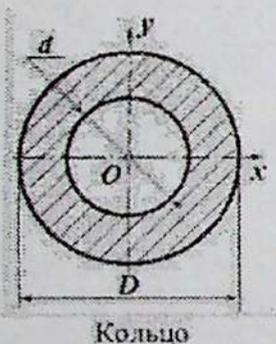
Осевые моменты инерции:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4$$

Моменты сопротивления:

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$$

Радиусы инерции: $i_x = i_y = \frac{d}{4}$

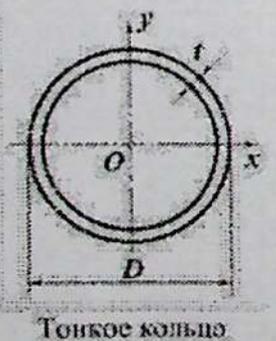


$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$, где $\alpha = d/D$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4)$$

$$i_x = i_y = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$$

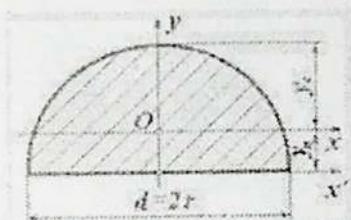


$t \ll D$
 $A = \pi D t$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^3 t}{8} \approx 0,3926 D^3 t$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0,7853 D^2 t$$

$$i_x = i_y \approx 0,353 D$$



Полукруг

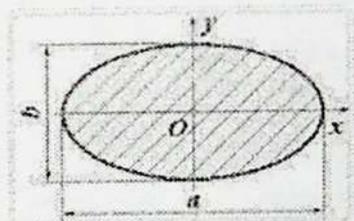
$$W_x = \frac{\pi r^3}{64} = \frac{\pi d^3}{8}; \quad W_{x_0} = 0,2587r^3; \quad W_{x_0} = 0,1908r^3,$$

$$A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,392d^2$$

$$y_c = \frac{4r}{3\pi} = 0,2122d; \quad y_c = 0,2878d$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi r^4}{128} = \frac{\pi d^4}{8}$$

$$J_x = 0,14 \frac{\pi r^4}{64} = 0,14 \frac{\pi d^4}{4}$$



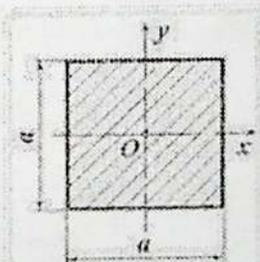
Эллипс

$$A = \frac{\pi}{4} ab$$

$$J_x = \frac{\pi b^3}{64}; \quad J_y = \frac{\pi a^3}{64}$$

$$W_x = \frac{\pi ab^3}{32}; \quad W_y = \frac{\pi a^3 b}{32}$$

$$i_x = b/4; \quad i_y = a/4$$



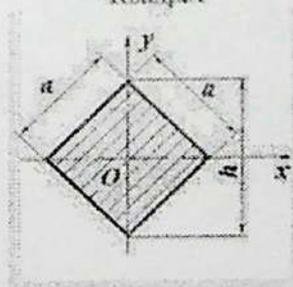
Квадрат

$$A = a^2$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$$

$$W_x = W_y = \frac{a^4}{6}$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a$$



Ромб

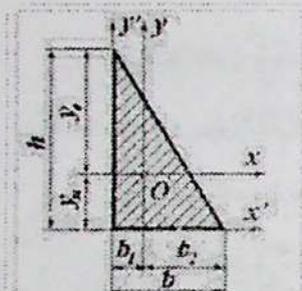
$$A = a^2, \quad h = a\sqrt{2}$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}$$

$$W_x = W_y = 0,118a^3$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a$$

$$A = bh/2$$



Прямоугольный
треугольник

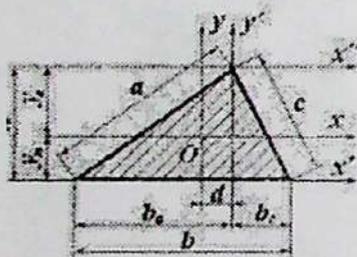
$$y_c = h/3; \quad y_o = 2h/3; \quad b_1 = b/3; \quad b_2 = 2b/3.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36}; \quad D_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$W_{ox} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{oy} = \frac{bh^2}{24}$$

$$i_x = 0,2357h; \quad A = bh/2$$



Треугольник

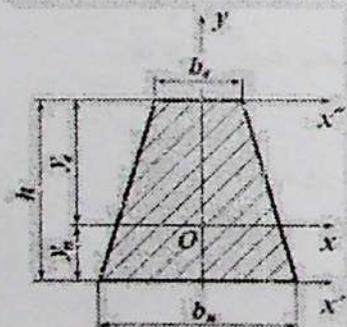
$$y_c = h/3; \quad y_o = 2h/3$$

$$d = (b_o - b_c)/3$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{xy} = \frac{bh^2}{4}$$

$$J_x = \frac{bh(b_o^2 - b_c^2)}{36}; \quad J_y = \frac{h(b_o^2 + b_c^2)}{12}$$

$$W_{ox} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{oy} = \frac{bh^2}{24}; \quad i_x = 0,2357h$$



Трапеция

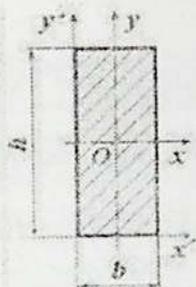
$$A = h(b_o + b_c)/2$$

$$y_c = \frac{b_o + 2b_c}{3(b_o + b_c)} h; \quad y_o = \frac{2b_o + b_c}{3(b_o + b_c)} h$$

$$J_x = \frac{h^3(b_o^2 + 4b_o b_c + b_c^2)}{36(b_o + b_c)}$$

$$J_y = \frac{h^3(b_c + 3b_o)}{12}; \quad J_{xy} = \frac{h^3(3b_o + b_c)}{12}$$

$$W_{ox} = \frac{J_x}{y_c}; \quad W_{oy} = \frac{J_y}{y_o}$$



Прямоугольник

$$\begin{aligned}
 A &= bh, \\
 J_x &= \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \\
 J_{x'} &= \frac{bh^3}{3}, \quad J_{y'} = \frac{b^3h}{3}, \quad D_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}, \\
 W_x &= \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \\
 i_x &= 0,289h, \quad i_y = 0,289b.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.М. Беляев. Сборник задач по сопротивлению материалов. - М.: ФМ, 1962. - 340 с.
2. А.В. Дарков, Г.С. Шапиро. Сопротивление материалов М. Высшая школа 1989 -415с
3. П.А. Степин Сопротивление материалов М.: – Лань 2012 - 321с
4. James M. Gere and Barry J. Goodno Mechanics of Materials, Eighth Edition ISBN-13: 978-1-111-57773-5 © 2013 Cengage Learning USA.
5. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов – 13-е изд., перераб и доп - М., изд-во МГТУ им Н.Э.Баумана 2013-592с.
6. Г.М. Ицкович Сопротивление материалов М., Высшая школа 1986г
7. В.Ф. Горбунов Изучай сопротивление материалов самостоятельно. Учебно-методическое пособие. Иркутск 2008-162с.
8. В.И. Водопьянов, А.Н. Савкин, О.В. Кондратьев. Курс сопротивление материалов с примерами и задачами. Учебное пособие. Волгоград. 2012. 139с.
9. М.С. Эшонов, Дремова Н.В. Сопротивление материалов (Растяжение сжатие) метод указания, контрольные задания ТИТЛП, 2008г.
10. М.С. Эшонов, Дремова Н.В., Сопротивление материалов «Построение эпюр внутренних усилий и определение деформации при изгибе с применением Mathcad» Метод пособие, ТИТЛП 2010г.
11. Дремова Н.В., Сопротивление материалов, Метод указания «Анализ напряженного состояния с применением Информационных технологий, ТИТЛП 2011г.
12. Дремова Н.В., Эшонов М.С. Сопротивление материалов. Расчет статически неопределимых балок при изгибе с применением математической программы «Mathcad» ТИТЛП, 2014г
13. Дремова Н.В. Сопротивление материалов. Методическое указание к решению тестовых задач. ТИТЛП 2018г.
14. Жилкин В. А. Сопротивление материалов Учебное пособие Челябинск : 2011. – 524 с.
15. Гафаров Р.Х. Сборник задач по сопротивлению материалов. Уфа, 2005. 389 с.
16. Дремова Н.В. Практикум по сопротивлению материалов. Методическое пособие к решению практических задач с применением программного продукта «Mathcad». Ташкент. ТИТЛП. 2019. 263с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Перечень основных обозначений величин	3
	Единицы механических величин	4
	Основные рекомендации	5
Глава 1	Основные положения, метод сечений, напряжение, построение эпюр внутренних усилий	7
	Тесты для самопроверки	27
	Вопросы для самоконтроля	29
Глава 2	Растяжение-сжатие	30
	Тесты для самопроверки	61
	Вопросы для самоконтроля	62
Глава 3	Сдвиг	63
	Тесты для самопроверки	76
	Вопросы для самоконтроля	78
Глава 4	Анализ напряженного состояния	79
	Тесты для самопроверки	97
	Вопросы для самоконтроля	99
Глава 5	Кручение	100
	Тесты для самопроверки	117
	Вопросы для самоконтроля	118
Глава 6	Геометрические характеристики плоских сечений	120
	Тесты для самопроверки	139
	Вопросы для самоконтроля	140
Глава 7	Изгиб	142
	Тесты для самопроверки	179
	Вопросы для самоконтроля	182
Глава 8	Рамы	183
	Вопросы для самоконтроля	188
Глава 9	Сложное сопротивление	189
	Косой изгиб	189
	Вопросы для самоконтроля	194
	Внецентренное растяжение-сжатие	194
	Вопросы для самоконтроля	196
	Изгиб с кручением	197
	Тесты для самопроверки	199
	Вопросы для самоконтроля	200
Глава 10	Кривые стержни	201
Глава 11	Устойчивость	205

	Тесты для самопроверки	211
	Вопросы для самоконтроля	212
Глава 12	Динамические нагрузки	213
	Глоссарий	226
	Расчетно-графические работы	235
	Приложение	302
	Литература	314

Для заметка

Для заметка

Дремова Надежда Васильевна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

в решениях задач с применением
программного продукта

«Mathcad»

Учебное пособие

Редактор:
А. Абдужалилов

Техник редактор:
Ю. Уринов

Корректор:
Д. Бекназарова

Лицензия редакции. № 0719, 12.02.2021 г.
Сдано в печать 28.12.2021 года. Формат: 60x84 ¹/₁₆
Офсетная печать. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. П.л. 20.0. Тираж 200 шт. Заказ № О-04.

Редакция «Yosh avlod matbaa», 100190, город Ташкент,
Алмазарский район, Бешкурган 2, 9-87.
E-mail: yosh.avlod@bk.ru

Отпечатано в типографии ООО «Tafakkur avlodi»,
г. Ташкент, Алмазарский р-н., улица Нодира, 1.
Телефон: +99890 000-33-93



ISBN 978-9943-7849-2-5



«Yosh avlod matbaa»

9 789943 784925