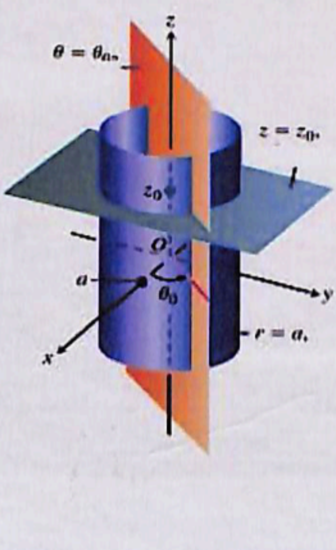
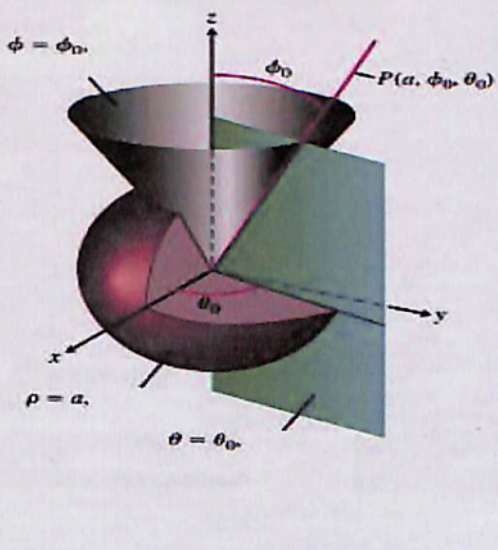
SH.R.XURRAMOV

OLIY MATEMATIKA

1





51(07)
X-92

SH.R. XURRAMOV

OLIY MATEMATIKA

Uch jildlik

1-jild

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi barcha texnika yo'nalishlari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT
«TAFAKKUR» nashriyoti
2018

UO'K:51(075.8)
KBK 22.1
X-92 ya 73

X-92 SH.R.Xurramov. Oliy matematika. Barcha texnika yo'nalishlari uchun darslik. 1-jild. –T.: «Tafakkur» nashriyoti, 2018, 448 bet.

ISBN 978-9943-24-150-3

Ushbu darslik oliy texnika o'quv yurtlarining oliy matematika fani dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat ta'lim standartlari talablariga mos keladi.

Darslik uch jilddan iborat. Birinchi jild oliy matematikaning chiziqli algebra elementlari, vektorli algebra elementlari, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o'zgaruvchi funksiyasining differensial hisobi, oliy algebra elementlari va bir o'zgaruvchi funksiyasining integral hisobi bo'limlariga oid materillarni o'z ichiga oladi. Darslikning har bir mavzusi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan.

Kitob oliy ta'lim muassasalarining talabalari va o'qituvchilari uchun mo'ljallangan.

UO'K:51(075.8)
KBK 22.1 ya 73

Mas'ul muharrir:

A. Quchqarov – fizika-matematika fanlari doktori

Taqrizchilar:

B. Shoimqulov – fizika-matematika fanlari doktori, QarDU professori
A. Narmanov – fizika-matematika fanlari doktori, O'zMU professori
Sh. Ismoilov – fizika-matematika fanlari nomzodi, TAQI dotsenti

ISBN 978-9943-24-150-3

Ахборот ресурс маркази
ИНВ № 538528
ТошДАУ ТашГАУ

© «SH. R. Xurramov» 2018
© «Tafakkur» nashriyoti, 2018

SO'Z BOSHI

Matematika barcha tabiiy bilimlar asosidir.
David Gilberd

Hozirgi jadal rivojlanish davrida aql-zakovatli, ijodiy fikrlovchi va mustaqil qaror qabul qiluvchi mutaxassislarni tayyorlashda matematik ta'lim asosiy o'rin egallaydi. Talabalarni matematik tayyorlash ularning kasbiy faoliyatida zarur bo'ladigan boshqa tabiiy-ilmiy, umumkasbiy va ixtisoslik fanlarini o'rganishlari uchun nazariy asoslarni ta'minlashi kerak. Bu esa o'z navbatida samarali o'qitishning muhim omillaridan biri bo'lgan zamon talablariga javob beruvchi darsliklar va o'quv qo'llanmalarni yaratishni taqozo etmoqda.

Ushbu darslik oliy texnika o'quv yurtlarining oliy matematika fani dasturi asosida yozilgan va bakalavrlar Davlat ta'lim standartlari talablariga mos keladi.

Darslik uch jilddan iborat. Darslikning birinchi jildi ettita bobdan iborat bo'lib, u oliy matematikaning chiziqli algebra elementlari, vektorli algebra elementlari, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o'zgaruvchi funksiyasining differensial hisobi, oliy algebra elementlari va bir o'zgaruvchi funksiyasining integral hisobi bo'limlariga bag'ishlangan. Bu bo'limlar zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yaratilgangan bo'lib, har bir mavzuni yozishda bir qancha xorijiy adabiyotlardan foydalanilgan, mavzular to'liq yoritilgan, tegishli bilimlar talabalar tomonidan mustaqil o'zlashtirilishiga, ularda ko'nikma va malakalarning shakllantirilishiga hamda ijodiy qobiliyatlarni rivojlantirishga yo'naltirigan.

Darslik lotin alifbosida yozilgan. Darslikda talaba asosiy tushunchalarni, ta'riflarni, teoremalarni va tipik masalalarni yechish usullarini ko'rsatuvchi misollarni topadi. Bunda biror tasdiqning isboti keltirilmagan bo'lsa, natijalarning ifodasi uning ma'nosini tushuntiradigan misollar bilan to'ldirilgan.

Darslikning har bir mavzusi ko'p sondagi misol va masalalar yechimlarida tushuntirilgan, ularni o'zlashtirishni mustahkamlashga yo'naltirilgan masqlar bilan to'ldirilgan. Ayrim misol va masalalarni matematik paketlar yordamida yechish usullari keltirilgan.

Muallif darslik qo'lyozmasini o'qib, uning sifatini oshirish borasida bildirgan fikr va mulohazalari uchun Qarshi Davlat universitetining professori B.A.Shoimqulovga, Uzbekiston Milliy universitetining o'qituvchilari – professor A.Narmanovga, dotsentlar N.Jabborov va J.Tishaboyevlarga o'z minnatdorchiligini izhor qiladi.

Ayniqsa, darslikning ushbu jildini tuzishda va mazmunini yaxshilashda fizika matematika fanlari doktori A. Quchqarovning beminnat yordamini muallif e'tirof etishni o'zining burchi deb biladi.

Darslik haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan barcha kitobxonlarga muallif oldindan o'z tashakkurini bildiradi.

Matritsalar matematika, texnika va iqtisodiyotning turli sohalarida keng qo'llaniladi. Masalan, ulardan matematikada algebraik va differensial tenglamalar sistemasini yechishda, kvant nazariyasida fizik kattaliklarni oldindan aytishda, aviatsiyada zamonaviy samolyotlarni yaratishda foydalaniladi.

1.1.1. Matritsa va uning turlari

Matritsalar sonlar, algebraik belgilar va matematik funksiyalarning katta massivlarini yagona obyekt sifatida qarash va bunday massivlarni o'z ichiga olgan masalalarni qisqa ko'rinishda yozish va yechish imkonini beradi.

Matritsa – bu elementlar (sonlar, algebraik belgilar, matematik funksiyalar) massivining satr hamda ustunlarda berilgan va kichik qavslarga olingan to'g'ri burchakli jadvalidir.

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi.

Matritsa lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi.

Masalan,

3×2 *o'lchamli matritsa*	2×3 *o'lchamli matritsa*	2×2 *o'lchamli matritsa*
$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

A matritsaning i-satr va j-ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A=(a_{ij})$, $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ yoki $A=\| a_{ij} \|$, $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A=\| a_{ij} \|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

$1\times n$ o'lchamli $A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ matritsaga *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$m\times 1$ o'lchamli $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ matritsaga *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n\times n$ o'lchamli maritsaga n*- tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o'ng quyi burchagiga yo'nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o'nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo'nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A'=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsaga *yuqoridan uchburchak* (*quyidan uchburchak*) *matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga *diagonal matritsa* deyiladi.

Barcha elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsaga *birlik matritsa* deyiladi va I (yoki E) harfi bilan belgilanadi.

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan ixtiyoriy o'lchamdagi matritsaga *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsaga A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T=(a_{ji})$

Agar $A=A^T$ bo'lsa, A matritsaga *simmetrik matritsa* deyiladi.

1.1.2. Matritsalar ustida arifmetik amallar

Maritsalarning tengligi

Bir xil o'lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya'ni $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, bu matritsalarga *teng matritsalar* deyiladi va $A=B$ deb yoziladi.

$$\boxed{A=B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=b_{ij} \quad \text{barcha } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \text{ uchun}}$$

Matritsani songa ko'paytirish

1-ta'rif. $A=(a_{ij})$ *matritsaning* λ *songa ko'paytmasi* deb, elementlari $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=\lambda A$ matritsaga aytiladi.

$$\boxed{C=\lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=\lambda a_{ij}.}$$

1-misol. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$ bo'lsin. $3A$ ni toping.

Yechish.

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 9 & 12 & -3\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shish va ayirish

Matritsalarni qo'shish va ayirish amallari *bir xil o'lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig'indi matrisa qo'shiluvchi matritsalar bilan bir xil o'lchamga ega bo'ladi.

2-ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning yig'indisi* deb, elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=A+B$ matritsaga aytiladi.

$$\boxed{C=A+B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.}$$

2-misol. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ bo'lsin. $A+B$ ni toping.

Yechish.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -1+3 & 4+2\\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$-A=(-1)\cdot A$ matritsa A *matritsaga qarama-qarshi matritsa* deb ataladi.

3-ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.}$$

3-misol. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ bo'lsin. $A-B$ ni toping.

Yechish.

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & -3-3 & 2-2\\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega.

A,B,C,O matritsalar $m\times n$ o'lchsamli va λ,μ- skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

1°. $A+B=B+A$;	2°. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3°. $A+O=A$;	4°. $A+(-A)=O$;
5°. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;	6°. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
7°. $\mu(\lambda A)=\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;	8°. $1\cdot A=A$;
9°. $(A+B)^T=A^T+B^T$;	10°. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

11°. $A+C=B$ bo'lsa, $C=B-A$ bo'ladi;
12°. $\lambda A=O$ bo'lsa, $\lambda=0$ yoki $A=O$ bo'ladi;
13°. $\lambda A=\lambda B$ va $\lambda\neq 0$ bo'lsa, $A=B$ bo'ladi.

Xossalardan ayrimlarini isbotlaymiz.
Birinchi to'rtta xossaning isboti bevosita 2-ta'rifdan kelib chiqadi.
5-xossani qaraymiz.
A va B bir xil o'lchamli matritsalar bo'lsin. U holda

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

yoki

$$\lambda(A+B)=\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda(a_{ij})+\lambda(b_{ij})$$

va ikkinchidan

$$\lambda(a_{ij})+\lambda(b_{ij})=\lambda A+\lambda B.$$

bo‘ladi. Bu ikkita tenglikdan $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Matritsalarni ko‘paytirish

Bir xil sondagi elementlarga ega bo‘lgan A satr martitsa va B ustun matritsa berilgan bo‘lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{12}\\ \dots\\ b_{1n}\end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\dots+a_{1n}b_{1n},$$

ya’ni ko‘paytma berilgan matritsalar mos elementlari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Matritsalarni ko‘paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko‘paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

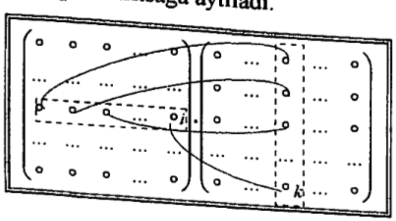
Ikki matritsani ko‘paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi.

A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

4-ta’rif. $m\times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p\times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga ko‘paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i-satrini B matritsaning j-ustuniga satrni ustunga ko‘paytirish qoidasi bilan, ya’ni

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\; i=1,\dots,m,\; k=1,\dots,n$$

(qo‘shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



4-misol. Berilgan matritsalarni ko‘paytiring.

1. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix}2&1\\-3&4\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&0&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot3\\ -3\cdot3+4\cdot(-1) & -3\cdot2+4\cdot0 & -3\cdot4+4\cdot3\\ 0\cdot3+2\cdot(-1) & 0\cdot2+2\cdot0 & 0\cdot4+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&11\\-13&-6&0\\-2&0&6\end{pmatrix}.$$

Agar A matritsaning satrlari $A_1,A_2,\dots,A_m$ bilan va B matritsaning ustulari $B_1,B_2,\dots,B_n$ bilan belgilansa, u holda matritsalarni ko‘paytirish qoidasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$C=AB=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \dots\\A_m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & \dots & B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \dots & A_1B_n\\ A_2B_1 & A_2B_2 & \dots & A_2B_n\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ A_mB_1 & A_mB_2 & \dots & A_mB_n\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirishda A^2 yozuv ikkita bir xil matritsani ko‘paytmasini bildiradi:

$$A^2=A\cdot A.$$

Shu kabi

$$A^3=A\cdot A\cdot A,\ \dots,\ A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ \text{marta}}.$$

5-misol. $f(x)=2x-x^2+5$ va $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$ bo‘lsin. $f(A)$ ni toping.

Yechish. Matritsa ko‘rinishdagi $f(A)$ funksiyaga o‘tishda λ sonli qo‘shiluvchi λI ko‘paytma bilan almashtiriladi, bu yerda I - birlik matritsa.

$$f(A)=2A-A^2+5I=2\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\0&5\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali ushbu xossalarga bo'ysunadi.

1°. A matritsa $m\times n$ o'lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo'ladi;

2°. A,B,C matritsalar mos ravishda $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ o'lchamli bo'lsa, $A(BC)=(AB)C$ bo'ladi;

3°. A,B,I,O moslashtirilgan matritsalar va λ,μ skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

1) $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)(AB)$; 2) $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$;
3) $AI=IA=A$; 4) $AO=OA=O$;
5) $(AB)^T=B^TA^T$.

4°. $A,I,O-n-$ tartibli kvadrat matritsalar va p,q manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lsa, u holda:

1) $A^pA^q=A^{p+q}$; 2) $(A^p)^q=(A)^{pq}$;
3) $A^1=A$; 4) $A^0=I$.

Xossalardan ayrimlarini ta'riflar yordamida isbotlaymiz va ayrimlarining to'g'riligiga misollarni yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

1-xossani qaraylik.

$A=(a_{ij})$ matritsa $m\times n$ o'lchamli va $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsin.

U holda 2 va 3-ta'riflarga ko'ra istalgan i,j da birinchidan

$$B+C=(b_{ij}+c_{ij})$$

yoki

$$A(B+C)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$$

va ikkinchidan

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}=AC+BC$$

bo'ladi. Oxirgi ikkita tenglikdan $A(B+C)=AB+AC$ bo'lishi kelib chiqadi.

3- xossaning 5-bandini qaraylik.

$A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ bo'lsin. Bundan $A^T=(a'_{ij})$ va $B^T=(b'_{ij})$ bo'ladi, bu yerda $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$. U holda 3-ta'rifga ko'ra istalgan i,j da birinchidan

$$AB=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \text{ yoki } (AB)^T=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

va ikkinchidan

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=B^TA^T$$

bo'ladi. Bundan $(AB)^T=B^TA^T$ bo'lishi kelib chiqadi.

2-xossani to'g'riligiga misol yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

$$A=(1\quad 2),\quad B=\begin{pmatrix}3&-1\\0&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&4&1\\5&0&2\end{pmatrix} \text{ bo'lsin.}$$

U holda

$$BC=\begin{pmatrix}3&-1\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4&1\\5&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&12&1\\20&0&8\end{pmatrix},$$

$$A(BC)=(1\quad 2)\cdot\begin{pmatrix}-11&12&1\\20&0&8\end{pmatrix}=(29\quad 12\quad 17),$$

$$AB=(1\quad 2)\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\0&4\end{pmatrix}=(3\quad 7),$$

$$(AB)C=(3\quad 7)\cdot\begin{pmatrix}-2&4&1\\5&0&2\end{pmatrix}=(29\quad 12\quad 17).$$

Demak, $A(BC)=(AB)C$.

Umuman olganda matritsalarni ko'paytirish nokommutativ, ya'ni $AB\neq BA$. Masalan, $1\times n$ o'lchamli A matritsaning $n\times 1$ o'lchamli B matritsaga AB ko'paytmasi sondan, ya'ni 1×1 o'lchamli matritsadan iborat bo'lsa, BA ko'paytmasi n- tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA$ bo'lsa, A va B matritsalarga *kommutativ matritsalar*, $AB-BA$ ayirmaga *kommutator* deyiladi.

1.1.3. Mashqlar

1. A kvadrat matritsa bo'lsin. $A+A^T$ simmetrik matritsa bo'lishini ko'rsating.

2. $A=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ matritsani $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ va $Z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalang.

3. $a\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$ bo'lsa, a va b ni toping.

4. Matritsa 30 ta elementga ega bo'lsa, u qanday tartiblarda berilishi mumkin?

5 - 8 masqlarda A, B matritsalar va λ, μ sonlar berilgan. $\lambda A + \mu B$ matritsani toping:

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\lambda=-1,\ \mu=2$.

6. $A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$, $\lambda=2,\ \mu=-3$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\lambda=-3,\ \mu=-2$.

8. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=I,\ \lambda=1,\ \mu=-1$.

9. A va B moslashtirilgan matritsalar bo'lsin. Quyidagilarni ko'rsating:
(a) agar A matritsa satr matritsa bo'lsa, u holda AB satr matritsa bo'ladi;
(b) agar B matritsa ustun matritsa bo'lsa, u holda AB ustun matritsa bo'ladi.

10. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 9 & 0\end{pmatrix}$ bo'lsa, x va y ni toping.

11. Agar A matritsa 3×3 o'lchamli va C esa 5×5 o'lchamli bo'lsa ABC ko'paytma ma'noga ega bo'lishi uchun B matritsa qanday o'lchamda bo'lishi kerak?

12. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matritsa berilgan. AB ko'paytmani nol matritsaga aylantiruvchi B matritsani toping.

13 - 16 mashqlarda A va B matritsalar berilgan. AB matritsani toping:

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$, $C=B-3I$ bo'lsa, $(AB)C$ matritsani toping.

18. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ bo'lsa, $A(BC)$ matritsani toping.

19. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $AB,\ B^TB,\ A^2$ matritsalarni toping.

20. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ va $f(x)=3x^2+5x-4$ bo'lsin. $f(A)$ ni toping.

21. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ bo'lsa, A^{20} ni toping.

22. Agar $A^2=I$ va A matritsa 2×2 o'lchamli bo'lsa, A ni toping.

1.2. DETERMINANTLAR

Determinant tushunchasidan dastlab chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda foydalanilgan bo'lib, keyinchalik determinantlar matematikaning bir qancha masalalarini yechishga, jumladan xos sonlarni topishga, differensial tenglamalarni yechishga, vektor hisobiga, keng tatbiq etildi.

Biz avval ikkinchi va uchinchi tartibli determinanlar tushunchalari bilan tanishamiz. Bu tushunchalar keyinchalik yuqori tartibli determinantlarni hisoblash uchun asos bo'ladi.

1.2.1. Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar

Ikkinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

Bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lar determinantning elementlari deb ataladi. a_{ij} determinantning i-satr va j-ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.

a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonalga determinantning bosh diagonali, a_{21}, a_{12} elementlar joylashgan diagonalga determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko‘paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko‘paytmasini ayrilganiga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1-misol. Berilgan determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 4\cdot(-2) = 15 + 8 = 23;$

2. $\begin{vmatrix} tg\alpha & 2\sin\alpha \\ \sin\alpha & ctg\alpha \end{vmatrix} = tg\alpha\cdot ctg\alpha - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$

Matritsaning muhim tavsiflaridan biri determinant hisoblanadi. Determinant faqat kvadrat matritsalar uchun kiritiladi.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ kvadrat matrisaning determinanti $\det A$ bilan belgilanadi va $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ kabi aniqlanadi.

Bunda matritsani uning determinanti bilan adashtirmaslik kerak: A – bu sonlar massivi; $\det A$ – bu bitta son (yoki ifoda).

Uchinchi tartibli determinant

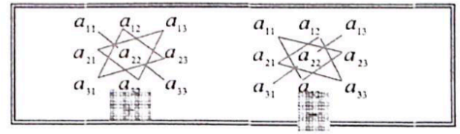
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

Uchinchi tartibli determinant uchun satr, ustun, bosh diagonal, yordamchi diagonal tushunchalari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi kiritiladi.

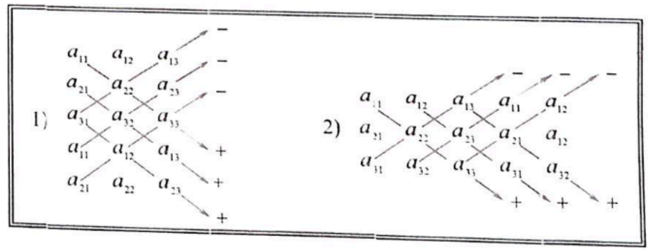
Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda o‘ng tomonidagi birhadlarni topishning yodda saqlash uchun oson bo‘lgan qoidalaridan foydalaniladi.

«*Uchburchak qoidasi*» ushbu sxema bilan tasvirlanadi:



Bunda diagonallardagi yoki asoslari diagonallarga parallel bo‘lgan uchburchaklar uchlaridagi elementlar uchta elementning ko‘paytmasini hosil qiladi. Agar uchburchaklarning asoslari bosh diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar uchburchaklarning asoslari yordamchi diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

«*Sarryus qoidalari*» quyidagi sxemalar bilan ifodalanadi:



1-qoidada avval determinant tagiga uning birinchi ikkita satri yoziladi, 2-qoidada esa determinantning o‘ng tomoniga uning birinchi ikkita ustuni yoziladi. Bunda diagonallardagi yoki diagonallarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlardagi elementlar uchta ko‘paytuvchini hosil qiladi. Agar to‘g‘ri chiziqlar bosh diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar to‘g‘ri chiziqlar yordamchi diagonalga parallel bo‘lsa, u holda elementlarning ko‘paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

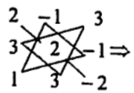
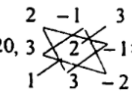
2-misol. 1. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ determinantni uchburchak qoidasi bilan hisoblang.

Ахборот ресурс маркази
ИНВ № 538528

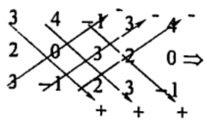
2. $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantni Sarryusning 1-qoidasi bilan hisoblang.

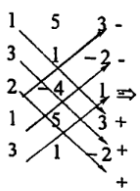
3. $\det C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni Sarryusning 2-qoidasi bilan hisoblang.

Yechish.

1.  $\Rightarrow -8+1+27=20,$  $\Rightarrow 6-6+6=6,$

$\det A = 20-6=14.$

2.  $\Rightarrow \det B = 0+36+2-0+9-16=31.$

3.  $\Rightarrow \det C = 1-36-20-6-8-15=-84.$

1.2.2. n - tartibli determinant tushunchasi

n-tartibli determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi va ma'lum qoida asosida hisoblanadi.

n-tartibli determinant har bir satr va har bir ustundan faqat

bittadan olingan n ta elementning ko'paytmasidan tuzilgan $n!$ ta qo'shiluvchilar yig'indisidan iborat bo'ladi, bunda ko'paytmalar bir-biridan elementlarining tarkibi bilan farq qiladi va har bir ko'paytma oldiga inversiya tushunchasi asosida plyus yoki minus ishora qo'yiladi.

n-tartibli determinantni bu qoida asosida ifodalash ancha noqulay. Shu sababli yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda bir nechta ekvivalent qoidalardan foydalaniladi. Bunday qoidalardan biri yuqori tartibli determinantlarni quyi tartibli determinantlar asosida hisoblash usuli hisoblanadi. Bu usulda determinant biror satr (yoki ustun) bo'yicha yoyiladi. Bunda quyi (ikkinchi va uchunchi) tartibli determinantlar yuqorida keltirilgan ta'riflar asosida topiladi.

n-tartibli determinantlarni yoyishda minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalaridan foydalaniladi.

n-tartibli determinant a_{ij} *elementining minori* deb, shu element joylashgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)$-tartibli determinantga aytiladi va M_{ij} bilan belgilanadi.

Determinant a_{ij} *elementining A_{ij} algebraik to'ldiruvchisi* deb,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

songa aytiladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ determinantning $a_{21}=2$ elementining minori va algebraik to'ldiruvchisi quyidagicha topiladi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 10.$$

1.2.3. Determinantning xossalari

Determinantning xossalarini uchinchi tartibli determinant uchun keltiramiz. Bu xossalar ixtiyoriy n-tartibli determinant uchun ham o'rinli bo'ladi.

1-xossa. Transponirlash (barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish) natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A^T.$$

6-xossa. Agar determinantning ikki satri (ustuni) proporsional bo‘lsa, u nolga teng bo‘ladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Isboti. 4-xossaga ko‘ra determinant ikkinchi satrining λ ko‘paytuvchisini determinant belgisidan chiqarish mumkin. Natijada ikkita bir xil satrli determinant qoladi va u 3-xossaga ko‘ra nolga teng bo‘ladi.

7-xossa. Agar determinant biror satrining (ustunining) har bir elementi ikki qo‘shiluvchining yig‘indisidan iborat bo‘lsa, bu determinant ikki determinant yig‘indisiga teng bo‘lib, ulardan birinchisining tegishli satri (ustuni) elementlari birinchi qo‘shiluvchilardan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) elementlari ikkinchi qo‘shiluvchilardan tashkil topadi.

Isboti. Determinant birinchi satrining har bir elementi ikkita qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat bo‘lsin.

U holda

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a'_{11}+a''_{11})a_{22}a_{33} + (a'_{12}+a''_{12})a_{23}a_{31} +$$

$$+(a'_{13}+a''_{13})a_{21}a_{32} - (a'_{13}+a''_{13})a_{22}a_{31} - (a'_{12}+a''_{12})a_{21}a_{33} - (a'_{11}+a''_{11})a_{23}a_{32} =$$

$$= a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{13}a_{21}a_{32} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{11}a_{23}a_{32} + (a''_{11}a_{22}a_{33} + a''_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a''_{13}a_{21}a_{32} - a''_{13}a_{22}a_{31} - a''_{12}a_{21}a_{33} - a''_{11}a_{23}a_{32}) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8-xossa. Agar determinantning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satrining (ustunining) mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isboti. $\det A$ determinantning ikkinchi satri elementlariga λ ga ko‘paytirilgan birinchi satrning mos elementlari qo‘shilgan bo‘lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Qo‘shiluvchilardan birinchisi $\det A$ ga va ikkinchisi esa 3-xossaga ko‘ra nolga teng. Demak, yig‘indi $\det A$ ga teng.

9-xossa. Determinantning qiymati uning biror satri (ustuni) elementlari bilan shu elementlarga mos algebraik to‘ldiruvchilar ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Masalan, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Isboti. Tenglikning o‘ng tomonida almashtirishlar bajaramiz:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

10-xossa. Determinant biror satri (ustuni) elementlari bilan boshqa satri (ustuni) mos elementlari algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Masalan, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$.

Isboti. Determinantni 9-xossani qo‘llab, topamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bunda a_{11}, a_{12}, a_{13} mos ravishda a_{21}, a_{22}, a_{23} bilan bilan almashtirilsa, 3-xossaga ko‘ra determinant nolga teng bo‘ladi.

1-izoh. Determinantning xossalari asosida quyidagi teorema isbotlangan.

1-teorema. Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar ko‘paytmasining determinanti bu matritsalar determinantlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

1.2.4. n-tartibli determinantlarni hisoblash

n-tartibli determinantni xossalar yordamida soddalashtirib, keyin tartibini pasaytirish yoki uchburchak ko‘rinishga keltirish usullaridan biri bilan hisoblash mumkin.

Tartibini pasaytirish usuli

n-tartibli determinant 9-xossaga asosan biror satr yoki ustun bo‘yicha yoyiysa, yoyilmada $(n-1)$-tartibli algebraik to‘ldiruvchilar hosil bo‘ladi, ya’ni n-tartibli determinantni hisoblash tartibi bittaga past bo‘lgan determinantlarni hisoblashga keltiriladi.

Umuman olganda quyidagi teoremalar o‘rinli bo‘ladi.

2-teorema. i satrining nomeri qanday bo‘lishidan qat’iy nazar n-tartibli determinant uchun bu determinantni i-satr bo‘yicha yoyilmasi deb ataluvchi

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n}$$

formula o‘rinli.

3-teorema. j ustunining nomeri qanday bo‘lishidan qat’iy nazar n-tartibli determinant uchun bu determinantni j-ustun bo‘yicha yoyilmasi deb ataluvchi

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}$$

formula o‘rinli.

Determinantni biror satr yoki ustun bo‘yicha yoyishga *Laplas yoyilmalari usuli* deyiladi.

Laplas yoyilmalari usulida determinantning qaysi bir satrida (ustunida) nollar ko‘p bo‘lsa, u holda yoyishni shu satr (ustun) bo‘yicha bajarish qulay bo‘ladi. Bundan tashqari 8-xossani qo‘llab, determinantning biror satrida (ustunida) bitta elementdan boshqa elementlarni nollarga keltirish mumkin. Bunda determinantning qiymati shu satrdagi (ustundagi) noldan farqli element bilan uning algebraik to‘ldiruvchisining ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. Shunday qilib, n-tartibli determinant bitta $(n-1)$-tartibli determinantga keltirib, hisoblanadi.

3-misol.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

Yechish. Bunda: 1) Ikkita elementi nolga teng bo‘lgan uchinchi ustunni tanlaymiz va uning ikkinchi satrida joylashgan elementidan boshqa barcha elementlarini nolga aylantiramiz. Buning uchun ikkinchi satr elementlarini 3 ga ko‘paytirib, uchunchi satrning mos elementlariga qo‘shamiz va hosil bo‘lgan determinantni uchinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 10 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

2) Hosil qilingan uchinchi tartibli determinantda birinchi ustunning uchinchi satri elementidan yuqorida joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz. Buning uchun avval uchinchi satrni (-2) ga ko‘paytirib, birinchi satrga qo‘shamiz, keyin uchinchi satrni (-10) ga ko‘paytirib, ikkinchi satrga qo‘shamiz, hosil bo‘lgan determinantni birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz va hosil bo‘lgan ikkin-chi tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 25 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 25 \end{vmatrix} = -75 + 32 = -43.$$

Uchburchak ko‘rinishga keltirish usuli

Bu usulda determinant xossalar yordamida soddalashtiriladi va uchburchak ko‘rinishga keltiriladi, ya’ni diagonalidan pastda (yuqorida) joylashgan barcha elementlari nolga aylantiriladi.

Bunda

$$\det A = (-1)^k \det U$$

bo‘ladi, bu yerda k – satrlarda va ustunlarda bajarilgan barcha o‘rin almashtirishlar soni; $\det U$ – berilgan determinantning uchburchak ko‘rininshi va uning qiymati quyidagi xossa asosida hisoblanadi.

Xossa. Uchburchak ko‘rinishidagi determinant bosh diagonalda joylashgan elementlarining ko‘paytmasiga teng.

4-misol.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantni ushburshak ko‘rinishga keltirib, hisoblang.

Yechish. Determinant ustida quyidagi soddalashtirishlarni bajaramiz:

- birinchi ustunni o‘zidan o‘ngda joylashgan ustunlar bilan ketma-ket $k = 3$ ta o‘rin almashtirib, to‘rtinchi ustunga o‘tkazamiz;
- birinchi ustunning birinchi satridan pastda joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz;
- ikkinchi ustunning ikkinchi satridan pastda joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz;
- uchinchi ustunning to‘rtinchi satrida joylashgan elementini nolga aylantiramiz;
- $(-1)^4 = (-1)^3 = -1$ ko‘paytuvchi bilan hosil bo‘lgan uchburchak ko‘rinishgagi determinantning bosh diagonalda joylashgan elementlarini ko‘paytiramiz.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = -8.$$

1.2.5. Mashqlar

1. A matritsa $n \times n$ o‘lchamli bo‘lsin. $\det(\lambda A)$ da λ ni determinant belgisidan tashqariga chiqarish uchun formula keltirib chiqaring.

2. A kvadrat matritsa va $A^T A = I$ bo‘lsin. $\det A = \pm 1$ bo‘lishini ko‘rsating.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $\det(A+B) = \det A + \det B$ faqat $a + d = 0$ bo‘lganida bajarilishini ko‘rsating.

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ bo‘lishiga ishonch hosil qiling.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $\det A^{1000}$ ni toping.

6. A va B matritsalar 3×3 o‘lchamli, $\det A = -1$ va $\det B = 2$ bo‘lsin. Toping:
1) $\det AB$; 2) $\det 5A$; 3) $\det A^T A$; 4) $\det B^3$.

7. A va B matritsalar 4×4 o'lchamli, $\det A=4$ va $\det B=-3$ bo'lsin. Toping:

1) $\det AB$; 2) $\det B^5$; 3) $\det 2A$; 4) $\det IA$.

Ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

8. $\begin{vmatrix} y & x-y \\ x & -x \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ b+1 & a+b \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} tg\alpha+1 & ctg\alpha-1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Uchinchi tartibli determinantlarni uchburchak va Sarryus qoidalari bilan hisoblang:

12. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Uchinchi tartibli determinantlarni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

14. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 1 & x & -1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma \\ 0 & \sin\beta & \sin\gamma \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} tg\alpha & ctg\beta & 0 \\ tg\alpha & 0 & tg\beta \\ 0 & ctg\alpha & tg\beta \end{vmatrix}$.

Uchinchi tartibli determinantlarni xossalaridan foydalanib hisoblang:

18. $\begin{vmatrix} 1 & c & ab \\ 1 & b & ca \\ 1 & a & bc \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} x & x+y & x-y \\ x & x+z & x-2z \\ x & x & x \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (1+a)^2 \\ b & b^2+1 & (1+b)^2 \\ c & c^2+1 & (1+c)^2 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1 & 1+\sin\alpha \\ 1-\sin\alpha & 1 & 1-\cos\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

To'rtinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

24. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$. **27.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

1.3. MATRITSA USTIDA ALMASHTIRISHLAR

Matritsa ustida almashtirishlar chiziqli algebrada muhim ro'l o'ynaydi. Jumladan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topishda, teskari matritsani aniqlashda, matritsaning rangini hisoblashda matritsa ustidagi almashtirishlardan keng foydalaniladi.

Matritsa satri (ustuni) ustida elementar almashtirishlar uch tipda bo'ladi:

I. ikkita satrning (ustunning) o'rnini almashtirish;

II. satrni (ustunni) noldan farqli songa ko'paytirish;

III. satrga (ustunga) noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa satrni (ustunni) qo'shish.

Biri ikkinchisidan elementar almashtirishlar natijasida hosil qilingan A va B matritsalarga *ekvivalent matritsalar* deyiladi va $A\sim B$ ko'rinishda yoziladi.

1.3.1. Teskari matritsa

Asosiy ushunchalar

Matritsalarni qo'shish, ayirish va ko'paytirish sonlar ustida bajariladigan mos amallarga monand (hamohang) amallar hisoblanadi. Ushbu bandda matritsalar uchun sonlarni bo'lish amaliga monand amal bilan tanishamiz.

Ma'lumki, agar k soni nolga teng bo'lmasa, u holda har qanday m soni uchun $kx=m$ tenglama yagona $x=\frac{m}{k}=k^{-1}m$ yechimga ega bo'ladi, bu yerda k^{-1} soni k soniga teskari son deb ataladi.

Sonlar uchun keltirilgan bu tasdiq matritsali tenglamalarni sonli tenglamalarga monand yechishda muhim ro'l o'ynaydi. Xususan, sonli tenglamalar uchun $kk^{-1}=1$ va $k^{-1}k=1$ shartlarining bajarilishi hal qiluvchi hisoblansa, matritsali tenglamalar uchun $AA^{-1}=I$ va $A^{-1}A=I$ shartlarning bajarilishi muhim hisoblanadi, bu yerda A, I – bir xil o'lchamli kvadrat matritsalar.