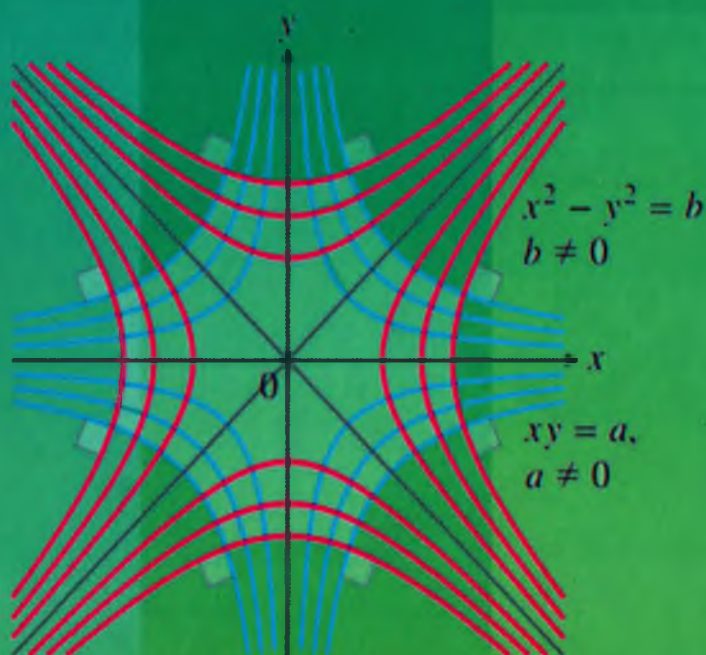


51
0.49

OLIY MATEMATIKA



3-QISM

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

**Gaziyev A., Soleyev A., Yaxshiboyev M.,
Arziqulov A.**

OLIY MATEMATIKA

3-QISM

**O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan 300 000- Ishlab-chiqarish texnik soha, 400000-Qishloq va
suv xo'jaligi, 200000-Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq hamda barcha
tabiiy va muhandis-texnik sohalarining bakalavriat ta'lim
yo'nalishlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan**

**EXCELLENT POLYGRAPHY
TOSHKENT – 2022**

UO'K 512(07)

KBK 22.11ya7

O - 49

Gaziyev A. va boshq.

Oliy matematika. 3-qism. [Matn] Universal darslik / Gaziyev A., Soleyev A., Yaxshiboyev M., Arziqulov A. – T., “EXCELLENT POLYGRAPHY” nashriyoti, 2022. – 464 b.

Taqrizchilar:

A.Xasanov – fizika-matematika fanlari doktori, prof.

A.Jalilov – fizika-matematika fanlari doktori, prof.

U.Narzullayev – fizika-matematika fanlari nomzodi, dots.

Ushbu darslik oliy o'quv yurtlarining tabiiy va muhandis-texnik sohalarining barcha ta'lim yo'nalishlarida oliy matematikani o'rganuvchi talabalar uchun mo'ljallab yozilgan. Darslikning uchinchi qismi differensial tenglamalar, operatsion hisob kursi elementlari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika hamda kompleks o'zgaruvchili funksiyalarining mavzularini o'z ichiga olgan.

Darslik sodda, ayni paytda matematik qat'iyat va izchillikda bayon qilingan bo'lib, amaliy mashg'ulot mavzulariga mos tipik misol va masalalar batafsil yechib ko'rsatilgan hamda mustaqil ishlash uchun yetarli miqdorda misol va masalalar javoblari bilan keltirilgan. Modul va kredit tizimida ta'lim olayotgan talabalarga auditoriyada va auditoriyadan tashqarida bajarishi zarur bo'lgan mustaqil ishlar hamda ularni bajarish bo'yicha tavsiyalar berilgan.

ISBN 978-9943-7822-0-4

© Gaziyev A. va boshq., 2022

© “Excellent Polygraphy” nashriyoti, 2022

MUNDARIJA

Soʻz boshi	10
17-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR	11
17.1-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar	11
17.1. Differensial tenglamalar toʻgʻrisida umumiy tushunchalar(11).17.2. Differensial tenglamaga keltiriladigan masalalar(12).17.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Yoʻnalishlar maydoni. Izoklina usuli (14).17.4. Oʻzgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar(19).17.5. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. Bir jinsliga keltiriladigan differensial tenglamalar(21).	
17.2-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar	24
17.6. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar(24).17.7. Bernulli tenglamasi (28).17.8. Toʻliq differensialli tenglamalar(30).17.9. Integrallovchi koʻpaytuvchi(34).17.10. Lagranj tenglamasi(36).17.11. Klero tenglamasi(38).	
17.3-§. Differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish	39
17.12. Yuqori tartibli differensial tenglamalar(39).17.13. $y^{(n)} = f(x)$ koʻrinishdagi tenglamalar(41). 17.14. $F(x, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ koʻrinishdagi tenglamalar(42). 17.15. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ koʻrinishdagi tenglamalar(43). 17.16. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ koʻrinishdagi differensial tenglamalar (44).	
17.4-§. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar	45
17.17. n -tartibli chiziqli differensial tenglamalar(45).17.18. Chiziqli differensial operator. Xususiy yechimlar haqida tushunchalar(46).17.19. Vronskiy determinanti va uning xossalari(48).17.20. Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar(52).17.21. Bir jinslimas differensial tenglamaning xususiy yechimini izlashning aniqmas koeffitsiyentlar usuli(56).	
17.5-§. Differensial tenglamalar sistemasi	59
17.22. Asosiy tushunchalar(59).17.23. Normal sistemasini yechish usullari (61).17.24. Oʻzgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi(64).	
17.6-§. Operatsion hisob kursi elementlari	68
17.25. Original va tasvir (68).17.26. Laplas almashtirishlarining xossalari (71).17.27. Baʼzi elementar funksiyalarning	

tasvirlari(74).17.28. Operatsion usullarini differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga tatbiq etish(74). 17-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar	77
17.1-amaliy mashg'ulot. O'zgaruvchilari ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamalar	78
17.2-amaliy mashg'ulot. Birinchi tartibli differensial tenglamalar	80
17.3-amaliy mashg'ulot. To'liq differensialli tenglama. Klero va Lagranj teglamalari	83
17.4-amaliy mashg'ulot. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar	85
17.5-amaliy mashg'ulot. Bir jinsli bo'lgan chiziqli differensial tenglamalar	87
17.6-amaliy mashg'ulot. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar	89
17.7-amaliy mashg'ulot. Differensial tenglamalar sistemasi	94
17.8-amaliy mashg'ulot. Operatsion hisob	97
17.9-amaliy mashg'ulot. Operatsion usullarini differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga tatbiq etish	102
17-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari	104
Adabiyotlar	107

V BO'LIM. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

18-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI	108
18.1-§. Tasodifiylik va qonuniyat. Hodisalar va ular ustida amallar	108
18.1. Ehtimollar nazariyasi fani(108). 18.2. Hodisalar (109).18.3. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar(111).18.4. Kombinatorika elementlari(113).	
18.2-§. Ehtimolning ta'riflari	116
18.5. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimollik(116).18.6. Hodisaning nisbiy chastotasi.Ehtimolning statistik ta'rifi(118).	
18.3-§. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari	120
18.7. Birgalikdamas hodisalar uchun ehtimollikni qo'shish teoremasi(120).18.8. Shartli ehtimol. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi(121).18.9. Birgalikda hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasi(125).	
18.4-§. To'la ehtimol va Bayes formulalari	126

	18.10. Hodisalarning to'la guruhi(126). 18.11. To'la ehtimollik formulasi(128).18.12. Beyes formulasi(129).	
18.5-§.	Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari	130
	18.13. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi(130). 18.14. Limit teoremlari va ularning amaliy ahamiyati(135).	
18.6-§.	Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uning berilish usullari.	138
	18.15. Tasodifiy miqdorning ta'rifi(138).18.16. Diskret tasodifiy miqdor ehtimolliklarining taqsimot qonuni(138). 18.17. Diskret tasodifiy miqdorlar ustida amallar(140).18.18. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari(141).	
18.7-§.	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari	145
	18.19. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari(145). 18.20. Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari(151).	
18.8-§.	Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdolar	153
	18.21. Binomial taqsimot(153). 18.22. Puasson taqsimoti(154). 18.23. Geometrik taqsimot qonuni(156).18.24. Tekis taqsimot(156). 18.25. Ko'rsatgichli taqsimot(157). 18.26. Normal taqsimot (Gauss taqsimoti) (159).	
18.9-§.	Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasi	162
	18.27. Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi(162).18.28. Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha(168).	
18.10-§.	Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning xossalari	170
	18.29. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni(170). 18.30. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari ehtimollarining shartli taqsimot qonunlari(172).18.31. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari(172).18.32. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari (173).18.33. Korrelyasiya momenti va korrelyasiya koeffitsiyenti(174).	
	18-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar	176
	18.1-amaliy mashg'ulot. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar	176
	18.2-amaliy mashg'ulot. Kombinatorika elementlari	179
	18.3-amaliy mashg'ulot. Ehtimolning klassik va geometrik ta'riflari.	185

18.4-amaliy mashg'ulot. Ehtimolning xossalariidan foydalanib murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblash. Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqligi.	195
18.5-amaliy mashg'ulot. To'la ehtimol formulasi. Beyes formulasi	211
18.6-amaliy mashg'ulot. Bog'liqmas sinovlar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Laplasning lokal va integral teoremlari	220
18.7-amaliy mashg'ulot. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Taqsimotning integral va zichlik funksiyalari va ularning xossalari	230
18.8-amaliy mashg'ulot. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar. Matematik kutilish va dispersiya. Boshlang'ich va markaziy momentlar	244
18.9-amaliy mashg'ulot. Uzlaksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalar	252
18.10-amaliy mashg'ulot. Binomial, Puasson, geometrik, tekis, ko'rsatgichli va normal taqsimlangan miqdorlar	254
18.11-amaliy mashg'ulot. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev teoremasi. Ya. Bernulli teoremasi	267
18.12-amaliy mashg'ulot. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimoti	271
18.13-amaliy mashg'ulot. Korrelyasiya momenti va korrelyasiya koeffitsiyenti	276
18-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari	283
19-BOB. MATEMATIK STATISTIKA	292
19.1-§. Matematik statistikaning vazifalari. Statistik taqsimot. Empirik taqsimot funksiyasi	292
19.1. Matematik statistikaning vazifalari(292).19.2.Empirik taqsimot funksiyasi(294).19.3. Poligon va gistogramma(295).	
19.2-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar	296
19.4. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar. Variatsion qatorning ba'zi xarakteristikalar.(296)	
19.3-§. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonchli intervallar	304
19.5. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonchli ehtimol va ishonchli interval. Normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun intervalli baholar(304).	
19.4-§. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar. Korrelyatsion jadval. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi	309

19.6. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar. Shartli o'rtacha. Korrelyatsion jadval. Regressiya tanlanma tenglamasi va tanlanma chizig'i. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi(309).	
19.5-§. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli	314
19.7. Chiziqli regressiya. Eng kichik kvadratlar usuli. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi parametrlarini topish. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi(314).	
19.6-§. Korrelyatsion bog'lanish zichligi. Tanlanma korrelyatsiya ko'effitsiyent va tanlanma korrelyatsion nisbat.	317
19.8. Korrelyatsion bog'lanish zichligi. Korrelyatsiya tanlanma ko'effitsiyenti va uning xossalari. Tanlanma korrelyatsion nisbat va uning xossalari(317).	
19.7-§. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya	324
19.9. Egri chiziqli korrelyatsiya. To'plamiy korrelyatsiya. Umumiy tanlanma korrelyatsiya ko'effitsiyenti. Xususiy tanlanma korrelyatsiya ko'effitsiyenti(324).	
19.8-§. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriya	328
19.10. Statistik gipotazalar. I va II tur xatoliklar. Statistik kriteriy(328).	
19-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar	3334
19.1-amaliy mashg'ulot. Tanlanmaning statistik taqsimoti.	334
Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma	
19.2-amaliy mashg'ulot. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar	346
19.3-amaliy mashg'ulot. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli.	348
19-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari	350
Adabiyotlar	370

VI BO'LIM. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

20-BOB. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI ELEMENTLARI	371
20.1-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiya. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi	371
20.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi(371). 20.2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti(372). 20.3.	

	Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning uzluksizligi (373).	
	20.4. Uzluksiz funktsiyalarning xossalari (374).	
20.2-§.	Kompleks o'zgaruvchili asosiy elementar funktsiyalar	375
	20.5. Ko'rsatkichli funktsiya(375). 20.6. Logarifmik funktsiya (376). 20.7. $w = z^n$ darajali funktsiya (377). 20.8. Trigonometrik funktsiyalar(378). 20.9. Giperbolik funktsiyalar (379). 20.10. Teskari trigonometrik va teskari giperbolik funktsiyalar (379).	
20.3-§.	Kompleks o'zgaruvchili funktsiyani differensiallash. Eyler – Dalamber sharti	380
	20.11. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyani differensiallash (380).	
20.4-§.	Analitik funktsiyalar. Differensial	385
	20.12. Analitik funktsiya (385). 20.13. Hosila argumentining va modulining geometrik ma'nosi (387). 20.14. Konform akslantirish (389).	
20.5-§.	Kompleks o'zgaruvchili funktsiyani integrallash	390
	20.15. Integralning ta'rifi (390). 20.16. Integralning asosiy xossalari(393).20.17. Koshi teoremasi. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral. Nyuton–Leybnits formulasi(395).	
20.6-§.	Koshi integrali. Koshining integral formulasi	399
	20.18. Koshi integrali (399).	
20.7-§.	Kompleks hadli qatorlar	401
	20.19. Sonli qatorlar(41401).20.20. Darajali qatorlar (404). 20.21. Teylor qatori (406).	
20.8-§.	Analitik funktsiyalarning nollari. Loran qatori	409
	20.22. Analitik funktsiyalarning nollari (409).20.23. Manfiy darajali qator (411).20.24. Loran qatori (412).	
20.9-§.	Maxsus nuqtalarning klassifikatsiyasi. funktsiyaning nollari bilan qutblari orasidagi bog'lanish	415
	20.25. Maxsus nuqtalarning klassifikatsiyasi (415). 20.26. Qutilib bo'ladigan maxsus nuqta. (415). 20.27. Qutb maxsus nuqta (416). 20.28. Muhim maxsus nuqta (417).	
20.10-§.	Funktsiyaning qoldig'i (chegirmasi)	419
	20.29. Funktsiyaning qoldig'i tushunchasi va qoldiqlar to'g'risidagi asosiy teorema(419).20.30. Qutbga nisbatan qoldiqni hisoblash(421).20.31. Funktsiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtaga nisbatan qoldig'i(423). 20.32.Qoldiqlar nazariyasi yordami bilan aniq integrallarni hisoblash(424).	
	20-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar	427
	20.1-amaliy mashg'ulot. Ketma-ketlikning limitini topish.	428
	20.2-amaliy mashg'ulot. Kompleks argumentli funktsiyaning limiti va uzluksizligi.	430

20.3-amaliy mashg'ulot. Darajali qatorlar. Koshi-Adamar formulasi.	434
20.4-amaliy mashg'ulot. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning hosilasi.	435
20.5-amaliy mashg'ulot. Haqiqiy yoki mavhum qismi bo'yicha analitik funktsiyani qurish.	438
20.6-amaliy mashg'ulot. Kompleks argumentli funksiyalarni integrallash.	441
20.7-amaliy mashg'ulot. Bir bog'lamli sohada Koshining integral formulasi.	444
20.8-Amaliy mashg'ulot. Yagonalik teoremasi.	445
20.9-Amaliy mashg'ulot. Maxsus nuqtalar. Loran qatori.	447
20.10-amaliy mashg'ulot. Qoldiqlar nazariyasi elementlari	453
20-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari	459
Adabiyotlar	463

SO‘Z BOSHI

Kitobxon e'tiboriga havola qilinayotgan mazkur darslik "Oliy matematika", 1- va 2-qismlarning davomi bo'lib, oliy matematikaning differensial tenglamalar, operatsion hisob kursi elementlari, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika hamda kompleks o'zgaruvchili funksiyalar bo'limlarini qamrab olgan.

Mazkur kitob, asosan tabiiy, muhandis-texnik fanlar sohasidagi bakalavriat talabalari uchun mo'ljallangan.

Darslikning har bir bobida mavzularning nazariy qismi, uni mustahkamlash uchun o'z-o'zini tekshirish savollari, amaliy mashg'ulotlar uchun misol va masalalar, mustaqil bajarish uchun yozma ishlar materiallari berilgan.

Ushbu darslikni yozishga mualliflarni undagan narsa, ularning ko'p yillar mobaynida Samarqand davlat universiteti va Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filialida olib borgan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarida oltirgan tajribasi natijasidir.

Hozirgi vaqtda amaliyotda bir necha yaxshi matematik dasturlar (Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab va h.k.) matematik masalalarni kompyuter imkoniyatlaridan foydalanib yechishda samarali natijalar bermoqda. Shu an'anadan chetda qolmaslik uchun, qo'llanmada ba'zi bo'limlar bo'yicha misol va masalalar yechishda «Maple» tizimining qo'llanilishi va uning qulayliklari namoyish etilgan.

Darslik haqidagi fikr mulohazalar, undagi mavjud kamchiliklar bo'yicha takliflarni mualliflar mamnuniyat bilan qabul qiladilar.

Mualliflar

IV BO'LIM

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA OPERATSION HISOB ELEMENTLARI

17-BOB.

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

17.1-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

17.1. Differensial tenglamalar to'g'risida umumiy tushunchalar.

Tabiyotda va texnikada yuz berayotgan jarayonlarni ifodalovchi erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va unig hosilalarini bir-biri bilan turlicha bog'lovchi tenglamalarni yechishga to'g'ri keladi. Odatda bunday tenglamalarni *differensial tenglamalar* deyiladi (differensial terminini birinchi bo'lib, 1676 yilda G.L.Leybnis ishlatgan).

17.1.1-ta'rif. Differensial tenglama deb, erkli o'zgaruvchisi x , izlanuvchi funksiya $y = f(x)$ va uning $y', y'', \dots, y^{(n)}$ hosilalarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar noma'lum funksiya bir argumentli bo'lsa, u holda tenglama *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

Agar noma'lum funksiya ikki va undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *xususiy hosilali differensial tenglama* deyilavdi.

n -tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi simvolik ravishda ushbu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ yoki } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (17.1.2)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda x - erkli o'zgaruvchi, y - noma'lum funksiya va $y', y'', \dots, y^{(n)}$ lar no'malum funksiyalarning mos ravishdagi hosilalari. Xususiy hollarda (17.1.2) tenglamalarda noma'lum funksiyaning o'zi yoki erkli o'zgaruvchi hamda n dan past tartibli hosilalar ishtirok etmasligi mumkin.

Differensial tenglama tarkibiga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibga, *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi. Masalan. (17.1.2) tenglamalar yuqori tartibli birinchisi hosilaga nisbatan yechilmagan va ikkinchisi esa yechilgan n - tartibli differensial tenglamalardir. $y' + 1 = \sqrt{x + y}$, $y' = \cos(y - x)$, $y'(x + y)^2 = 1$ -lar birinchi tartibli differensial tenglamalardir. $y'' + y' + 2 = 0$, $3y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$ -lar ikkinchi tartibli differensial tenglamalardir.

17.1.3-ta'rif. *Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali* deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan $y = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglamaning yechimining grafigi *integral chiziq* deb ham yuritiladi. Differensial tenglamani yechish jarayonida ko'pincha integrallash bilan bog'liq bo'lgani uchun, bu jarayonni differensial tenglamani integrallash ham deb yuritiladi.

17.1.4-misol. Ushbu $y(x) = Cx + \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}}$ funksiya $y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$

differensial tenglamaning yechimi ekanligini isbot qiling.

Yechilishi. Ravshanki, bu tenglama oddiy differensial tenglama. Berilgan $y(x) = Cx + \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}}$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz: $y'(x) = C$. $y(x), y'(x)$ larni berilgan differensial tenglamani qo'yamiz:

$$Cx + \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} - Cx = \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Bundan $C = C$. Bu ayniyat 17.1.3-ta'rifga ko'ra, berilgan funksiya berilgan tenglamaning yechimi ekanligini isbotlaydi.

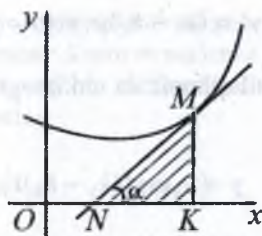
17.2. Differensial tenglamaga keltiriladigan masalalar. Dastlab differensial tenglamaga keltiriladigan masalalarni ko'rib chiqamiz.

17.2.1-masala. Shunday chiziqni topingki, uning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinma, urinish nuqtasi ordinatasi va absissalar o'qi hosil qilgan uchburchak yuzi o'zgarmas a^2 ga teng bo'lsin.

Yechilishi. Izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasini olaylik (17.1-chizmaga qarang). Ravshanki, chiziqqa $M(x, y)$ nuqtadan o'tkazilgan

urluma bilan OX o'qi orasidagi burchak α uchun $\operatorname{tg} \alpha = y'$ tenglik o'rinli. Biz quyidagilarga egamiz:

$$MK = y; \quad NK = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'};$$



17.1-chizma

$$S = \frac{1}{2} |MK| |NK| = \frac{1}{2} \frac{y^2}{|y'|}.$$

Ikkinchi tomondan $S = a^2$, demak, quyidagi differensial tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2} \frac{y^2}{y'} = \pm a^2.$$

Bu tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratib yechamiz:

$$\frac{dy}{y^2} = \pm \frac{1}{2a^2} dx; \quad \int \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{1}{2a^2} \int dx; \quad -\frac{1}{y} = \pm \frac{x}{2a^2} + C.$$

Shunday qilib, biz masalaning yechimini topdik, izlangan chiziqli tenglamasi $-\frac{1}{y} = \pm \frac{x}{2a^2} + C$ ko'rinishda bo'lar ekan.

17.2.2-masala. Bir hududda aholi soni $y(0) = y_0$ (boshlang'ich yoki ro'yxatga olish vaqtda) bo'lsin. Shu hududda tug'ilganlar va o'lganlar soni mos ravishda k_1 va k_2 ga teng bo'lsa, hudud aholisining o'zgarish funksiyasini toping.

Yechilishi. Aholi sonining Δt vaqt oraliq'ida o'zgarishi shu tug'ilganlar soni va o'lganlar soni orasidagi ayirmaga teng:

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y' \Delta t$$

bundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = (k_1 - k_2)y$$

tenglikni hosil qilamiz va unda $\Delta t \rightarrow 0$ limitga o'tish natijasida

$$y' = (k_1 - k_2)y, y(0) = y_0$$

Koshi masalasini hosil qilamiz va uni integrallab qo'yilgan masalaning yechimini hosil qilamiz:

$$y = y_0 \exp((k_1 - k_2)t).$$

17.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Yo'nalishlar maydoni. Izoklina usuli. Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy holda $F(x, y, y') = 0$ ko'rinishga ega.

Agar bu tenglamani y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni

$$y' = f(x, y) \quad (17.3.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda differensial tenglama *hosilga nisbatan yechilgan* deyiladi. Bunday tenglamalar uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi haqidagi ushbu teorema o'rinlidir.

17.3.2-teorema. Agar (17.3.1) tenglamada $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani o'z ichiga olgan biror D -yopiq sohada uzluksiz va uning y bo'yicha xususiy hosilasi $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ chegaralangan bo'lsa, u holda bu tenglamaning

$x = x_0$ da $y = y_0$ shartini qanoatlantiradigan birgina $y = \varphi(x)$ yechimi mavjuddir.

Teoremaning geometrik ma'nosi: D -sohaning har bir ichki nuqtasidan faqat bitta integral egri chiziq o'tadi. Boshqacha qilib aytganda, shunday $y = f(x)$ funksiya mavjudki, uning grafigi faqat $M_0(x_0, y_0) \in D$ nuqta orqali o'tadi. Teoremaning shartidan ko'rinadiki, (17.3.1) tenglama cheksiz sondagi har xil yechimga ega.

(17.3.1) tenglamaga keltiriladigan aniq masalalarni yechish jarayonida izlanayotgan funksiyaga qo'shimcha shart qo'yiladi. Bu shart x argumentning berilgan sonli qiymatiga mos keladigan y ning qiymatidir. Bu

shart masalaning *boshlang'ich sharti* deyiladi va quyidagicha yoziladi:
 $x = x_0$ da $y = y_0$ yoki

$$y(x_0) = y_0 \quad (17.3.3)$$

Boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan (17.3.1) differensial tenglamaning yechimini aniqlash *Koshi masalasini yechish* deyiladi.

17.3.4-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy integrali (yechimi) deb shunday

$$y = \varphi(x, C) \quad (17.3.5)$$

funksiyaga aytiladiki, bu funksiya: a) tenglamani har qanday C larda ayniyutga aylantirsin; b) bu yechimdan ixtiyoriy o'zgarmasni tanlash yo'li bilan istalgan $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini olish mumkin bo'lsin.

Bunda, $y = \varphi(x, C)$ funksiya Koshi teoremasining shartlarini bajaradi va bitta o'zgarmas C ga bog'liq bo'ladi.

17.3.6-ta'rif. Umumiy yechimdan olingan va undagi ixtiyoriy o'zgarmas C ga aniq $C = C_0$ qiymat berishdan hosil bo'lgan $\varphi(x, C_0)$ funksiyaga (17.3.1) differensial tenglamaning *xususiy yechimi* deyiladi. Bu holda $\varphi(x, y, C_0) = 0$ munosabat tenglamaning *xususiy integrali* deyiladi.

Radiaktiv yemirilish $\frac{dx}{dt} = -kx$ tenglamasining umumiy yechimi $x = Ce^{-kt}$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $t = t_0$ bo'lganda, $x = x_0$ bo'ladigan yechimni aniqlaymiz: $x_0 = Ce^{-kt_0}$. Bu ifodadan $C = e^{kt_0} x_0$ topamiz.

Demak, Koshi masalasining yechimi $x = x_0 e^{-k(t-t_0)}$ ko'rinishda bo'ladi.

17.3.7-ta'rif. Differensial tenglama yechimining barcha nuqtalarida Koshi masalasi yechimining yagonalik sharti buzilsa, bunday yechimga *maxsus yechim* deyiladi.

Bundan ko'rinadiki, maxsus yechim, differensial tenglamaning xususiy yechimi bo'la olmaydi va umumiy yechim formulasi tarkibiga ham kirmaydi.

$f(x, y)$ funksiya D sohaning har bir (x, y) nuqtasida tayin qiymatiga ega. Masalan, $M_0(x_0, y_0) \in D$ nuqtada $f(x, y)$ funksiyaning qiymati $f(x_0, y_0) = k_0$ bo'lsin. U holda $y'(x_0) = k_0$ bo'ladi.

Demak, $k_0 - y = \varphi(x)$ egri chiziqning $M_0(x_0, y_0) \in D$ nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

(17.3.1) differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya xOy tekslilikning D sohada aniqlangan bo'lsin. Bu differensial tenglama D sohadagi har bir nuqtadan o'tuvchi integral chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. Ma'lumki, urinma to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti to'g'ri chiziqning yo'nalishini ifodalaydi.

Agar har bir nuqtada burchak koeffitsiyentining yo'nalishini aniqlansa, u holda bu yo'nalishlar birgalikda *yo'nalishlar maydoni* deyiladi.

(17.3.1) differensial tenglamaning yechimini topish masalasi $y = \varphi(x)$ egri chiziqni topishga olib keladiki, uning har bir nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti (17.3.1) orqali ifodalanadi.

17.3.8-ta'rif. Ushbu

$$f(x, y) = k \quad (k = \text{const})$$

chiziqlar oilasi *izoklinalar* deyiladi.

Ularni integral chiziqlar kesganda Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakning tangenisi k ga teng bo'ladi. $k \rightarrow \infty$ bo'lsa, (17.3.1) differensial tenglama ma'nosini yo'qotadi. Bunday holda, ushbu

$$\frac{dx}{dy} = g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)} \quad (17.3.9)$$

ko'rinishdagi differensial tenglama qaraladi. (17.3.9) differensial tenglama $k \rightarrow \infty$ chiziqlar uchun ma'noga ega bo'ladi. Izoklinalarga ko'ra yo'nalishlar maydonini chizish mumkin. Yo'nalishlar maydoniga ko'ra esa, integral chiziqni hosil qilish mumkin.

Izoklinalar orasida 0 – izoklina (uning tenglamasi $f(x, y) = 0$) muhim o'rin tutadi. Bu izoklinada integral chiziqning maksimum va minimum nuqtalari joylashadi, demak, bu izoklina differensial tenglamalar berilish sohasini integral chiziqlarning o'sish va kamayish sohalariga ajratadi.

Integral chiziqlarni aniqroq chizish uchun yechimlar grafiklarining burilish nuqtalarini

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

tenglamadan topish kerak.

17.3.10-misol. Izoklinlar yordamida

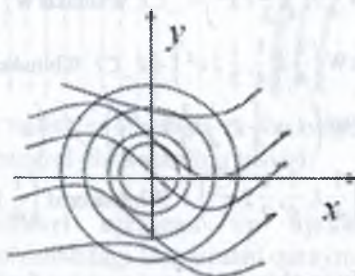
$$y' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1$$

tenglamaning integral chiziqlarini chizing.

Yechilishi. k -izoklina tenglamasi

$$k = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1 \text{ yoki } x^2 + y^2 = 2k + 2$$

($k \geq -1$) bo'ladi. Bu chiziqlar radiusi $\sqrt{2k+2}$ va markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat. k -izoklinaning ixtiyoriy nuqtasida yo'nalishlar maydoni va x o'qining musbat yo'nalishi orasidagi α burchak $\alpha = \arctg k$ formula yordamida aniqlanadi. k ga 1,0,-1 qiymatlar berib jadval tuzamiz (17.2-chizma):



17.2-chizma. Yo'nalishlar maydonida integral chiziqlar.

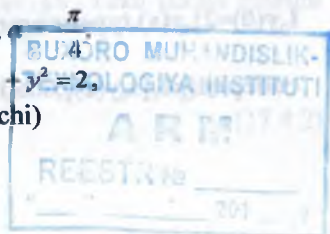
$$k=1, x^2 + y^2 = 4, \alpha = \frac{\pi}{4},$$

$$k=0, x^2 + y^2 = 2, \alpha = 0,$$

$$k=-1, x^2 + y^2 = 0, x=0, y=0,$$

Ekstremumlar chiziqlarining tenglamasi: $x^2 + y^2 = 2$,

$x^2 + y^2 < 2$ da $y' < 0$ (yechimlar kamayuvchi)



$x^2 + y^2 > 2$ da $y' > 0$ (yechimlar o'suvchi)

k ga ixtiyoriy $-1 < k < 0, k > 0$ qiymatlar berib izoklinalarni topish mumkin.

Tenglama yechimini **Maple** sistemasi yordamida tekshiramiz va integral chiziqlarini tasvirlaymiz (17.3-chizma, 17.4-chizma).

Umumiy yechimi:

>d1:=diff(y(x),x)=(1/2)*(x^2+y(x)^2)-1;

$$d2 := \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y(x)^2 - 1$$

>dsolve(d1,y(x));

$$\begin{aligned} y(x) = & - \left(-\text{WhittakerM} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) + I x^2 \text{WhittakerM} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \right. \\ & - I \text{WhittakerM} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) + I \text{WhittakerM} \left(1 + \frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \\ & + 3 \text{WhittakerM} \left(1 + \frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) - {}_0C1 \text{WhittakerW} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \\ & + I {}_0C1 x^2 \text{WhittakerW} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) - I {}_0C1 \text{WhittakerW} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \\ & \left. - 4 {}_0C1 \text{WhittakerW} \left(1 + \frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \right) / \left(x \right. \\ & \left. \left({}_0C1 \text{WhittakerW} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) + \text{WhittakerM} \left(\frac{1}{4} I, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} I x^2 \right) \right) \right) \end{aligned}$$

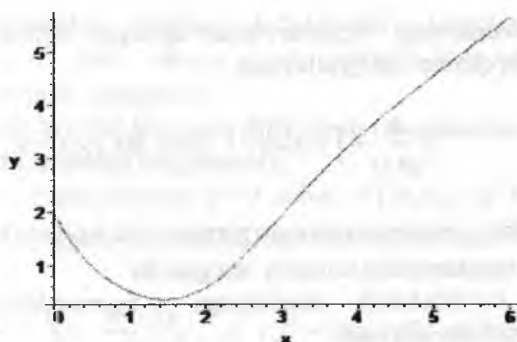
Tenglamani umumiy yechimini dastur maxsus funksiyalar orqali ifodalaydi (misolda bu funksiya Whittaker deb belgilangan).

$y(0) = 2$ boshlang'ich masalani integral chizig'ini tasviri:

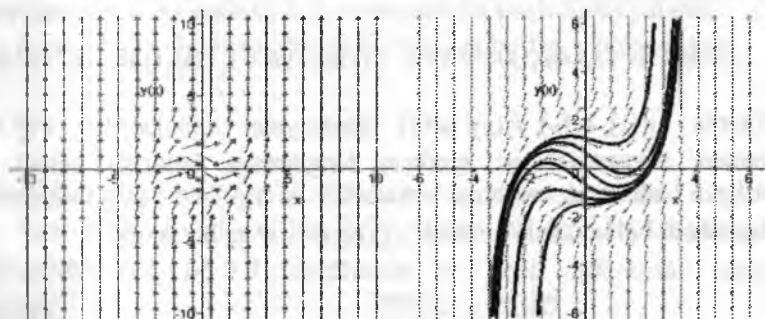
>p1 := dsolve({ diff(y(x),x) = (1/2)*(x^2-y(x)^2)-

1,y(0)=2},y(x),type=numeric);

>odeplot(p1,[x,y(x)],0..6,labels=[x,y]);



17.3-chizma. Boshlang'ich masalaning integral chizig'i.



17.4-chizma. Yo'nalishlar maydoni va shu maydonida integral chiziqlarning tasviri.

17.4. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differensial tenglamalar. Ushbu ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) . \quad (17.4.1)$$

Bu yerda $f(x)$ va $\varphi(y) \neq 0$ lar $[a, b]$ uzluksiz funksiyalardir. Tenglamaning ikkala qismini dx ga ko'paytiramiz: $dy = f(x)\varphi(y)dx$. Endi ikkala qismini $\varphi(y) \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \quad (17.4.2)$$

(17.4.2) tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. Ikkala qismini integrallaymiz:

$$\int \frac{dx}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C \text{ yoki } \varphi(x,y,c) = 0.$$

Bu ifoda yechim y , argument x va o'zgarmas C ni aniqlovchi munosabatdir, ya'ni (17.4.1) tenglamaning umumiy integralidir.

(17.4.1) ko'rinishdagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi.

O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama quyidagi ko'rinishda ham bo'lishi mumkin:

$$f_1(x)\varphi_1(y)y' + f_2(x)\varphi_2(y) = 0 \text{ yoki } f_1(x)\varphi_1(y)dy + f_2(x)\varphi_2(y)dx = 0. \quad (17.4.3)$$

Bu yerda $f_1(x)$, $\varphi_1(y)$, $f_2(x)$, $\varphi_2(y)$ funksiyalar uzluksizdir. (17.4.3) tenglamani o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish uchun dx qatnashgan hadni o'ng tomonga o'tkazamiz va $f_1(x) \neq 0$, $\varphi_2(y) \neq 0$ shartni hisobga olgan holda ikkala qismini $f_1(x)\varphi_2(y) \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi_2(y)} = -\frac{f_2(x)dx}{f_1(x)}. \quad (17.4.4)$$

ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajralgan tenglamani hosil qilamiz.

(17.4.4) tenglamaning umumiy integrali quyidagicha yoziladi:

$$\int \frac{\varphi_1(y)dy}{\varphi_2(y)} = -\int \frac{f_2(x)dx}{f_1(x)} + C. \quad (17.4.5)$$

17.4.6-misol. $(1+x)y + (1-y)xy' = 0$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = \frac{dy}{dx}$ munosabatdan foydalanib berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$. O'zgaruvchilarga ajratamiz:

$$\frac{(1-y)dy}{y} = -\frac{(1+x)dx}{x} \text{ yoki } \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = -\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx$$

Bu o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Integrallab topamiz: $\ln|y| - y = -(\ln|x| + x) + C$ yoki $\ln|xy| + x - y = C$. Oxirgi munosabat berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

17.5. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. Bir jinsliga keltiriladigan differensial tenglamalar.

17.5.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $k > 0$ uchun $F(kx, ky) = k^n F(x, y)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x, y)$ ga n -darajali bir jinsli funktsiya deyiladi. Masalan, ushbu

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^5 + xy^4}{x^4 + y^4}, x^2 + y^2 - 5xy, x^n + x^{n-1}y + y^n$$

funktsiyalar mos ravishda 0, 1, 2, n -darajali bir jinsli funksiyalardir.

Agar $f(x, y)$ 0-darajali bir jinsli funktsiya bo'lsa, u holda ushbu

$$y' = f(x, y) \quad (17.5.2)$$

differensial tenglama *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

Agar $M(x, y)$, $N(x, y)$ lar bir xil darajali bir jinsli funksiyalar bo'lsa, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tenglamalar *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

Xususiyl holda, $y' = f(y/x)$ differensial tenglama ham *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

(17.5.2) tenglamada $x \neq 0$, $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ funktsiya x va y ning barcha qarayotgan qiymatlarida uzluksizdir. Bu (17.5.2) tenglamaga

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u + xu' \quad (17.5.3)$$

larni o'rniga qo'yish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi:

$$u + xu' = \varphi(u) \text{ yoki } x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

Bundan quyidagi o'zgaruvchilari ajralgan tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

17.5.4-misol. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ tenglama yeching.

Yechilishi. (17.5.3) o'rniga qo'yishni bajarsak: $u + xu' = u + \sin u$ hosil bo'ladi. Bu yerdan $x \frac{du}{dx} = \sin u$, yoki $\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}$. Oxirgi munosabatni integrallab

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln C \text{ yoki } u = 2 \arctg Cx.$$

$u = \frac{y}{x}$ dan foydalanib tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz:

$$y = 2x \arctg Cx.$$

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad (17.5.5)$$

ko'rinishdagi tenglamalar *bir jinsliga keltiriladigan tenglamalar deyiladi*.

Agar $c_1 = c = 0$ bo'lsa, ravshanki (17.5.5) tenglama bir jinslidir. Endi c va c_1 yoki ulardan biri noldan farqli bo'lsin. O'zgaruvchini almashtiramiz:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + h \\ y &= y_1 + k \end{aligned} \right\}, \quad (17.5.6)$$

u holda $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ bo'lgani uchun (17.5.5) ushbu ko'rinishga keladi:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1h + b_1k + c_1} \quad (17.5.7)$$

h va k larni shunday tanlab olamizki, ushbu

$$\left. \begin{aligned} ah + bk + c &= 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.5.8)$$

tengliklar bajarilsin. Bu (17.5.8) shartda (17.5.7) tenglama bir jinsli bo'lib qoladi:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

Bu tenglamani yechib, (17.5.6) formulalardan x va y o'zgaruvchilarga o'tib, (17.5.5) tenglamaning yechimini olamiz.

Agar $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, ya'ni $ab_1 = a_1b$ bo'lsa, (17.5.8) sistema yechimga ega

emas. Biroq, bu holda $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, ya'ni $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ bo'ladi.

Demak, (17.5.5) tenglama ushbu ko'rinishga keltiriladi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \quad (17.5.9)$$

U holda

$$z = ax + by \quad (17.5.10)$$

o'rniga qo'yish bilan tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Haqiqatdan ham,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

yoki

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \quad (17.5.11)$$

Endi (17.5.10) va (17.5.11) ni (17.5.9) ga qo'yib, quyidagi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} = \frac{z + c}{z + c_1} - \frac{a}{b}.$$

17.5.10-misol. Tenglamaning umumiy yechimini toping

$$(y+2)dx + (2x+y-4)dy = 0.$$

Yechilishi. Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{array} \right\}$$

sistemani yechamiz. Demak, tenglamani birjinsli tenglamaga keltirish uchun $x = u + 3, y = v - 2$ almashtirish olamiz. U holda $dx = du, dy = dv$ bo'lib, natijada birjinsli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$vdu = (2u + v)dv.$$

Hosil bo'lgan tenglamani yechish uchun $v = uz, z = z(u)$ almashtirish olamiz, u holda

$$uzdu = (2u + uz)(udz + zdu),$$

$$u[zdu(2+z)(udz + zdu)] = 0,$$

$$u[-z(z+1)du - (2+z)udz] = 0.$$

Bu tenglamaning yechimini topib, eski o'zgaruvchilar x va y ga qaytish natijasida tenglamaning

$$(x+y-1) = c(y+2)^2, \quad y = -2,$$

ko'rinishdagi umumiy yechimni hosil qilamiz.

17.2-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

17.6. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

17.6.1-ta'rif. *Izlanayotgan funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan tenglamaga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.*

Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x),$$

bu yerda $A(x) \neq 0$ va $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ lar x ning (a, b) dagi qiymatlari uchun uzluksiz funksiyalardir. $A(x) \neq 0$ bo'lgani uchun birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (17.6.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ va $Q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}$ berilgan uzluksiz funksiyalardir.

Agar $Q(x) = 0$ bo'lsa, $y' + P(x)y = 0$ tenglamaga *chiziqli bir jinsli* differensial tenglama deyiladi.

(17.6.2) differensial tenglamani yechishning ikkita usuli taklif qilinadi.

Lagranj usuli (Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli). Dastavval $y' = -P(x)y$ tenglamani (chiziqli, bir jinsli) integrallaymiz. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir, ya'ni

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Oxirgi ifoda o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir. Uning umumiy yechimi

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C$$

yoki

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (17.6.3)$$

bo'ladi. Qaralayotgan (17.6.2) differensial tenglamaning yechimini ushbu

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (17.6.4)$$

ko'rinishda izlaymiz. (17.6.4) funksiyaning hosilani hisoblaymiz

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

y va y' ning ifodasini (17.6.2) differensial tenglamaga qo'ysak, ushbu

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. Bundan

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx.$$

Bu o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamani integrallaymiz:

$$\int dC(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C^* \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C^*.$$

Natijada $C(x)$ ning ushbu ifodasini (17.6.4) ga qo'ysak (17.6.2) differensial tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C^* \right]. \quad (17.6.5)$$

Demak, (17.6.2) bir jinslimas birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, unga mos bo'lgan bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimi $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ bilan o'zining bitta xususiy $y_1 = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ yechimning yig'indisidan iborat ekan.

1-misol. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topib olaylik

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + \ln C,$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C, \quad C > 0, \quad y = C \sin x.$$

Endi o'zgarmasni variatsiyalaymiz, ya'ni berilgan tenglamaning yechimini $y = C(x) \sin x$ ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $C(x)$ hozircha noma'lum funksiya.

$$y = C(x) \sin x, \quad y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$$

Ushbu funksiyalarni berilgan differensial tenglamaga qo'yib, quyidagini olamiz

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \cos x = 2x \sin x, \\ C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C, \quad y = (x^2 + C) \sin x.$$

Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = x^2 \sin x + C \sin x$ ko'rinishda ekan.

Bernulli usuli (O'rniga qo'yish usuli). (17.6.2) differensial tenglamaning yechimini ikkita funksiyaning ko'paytmasi ko'rinishda izlaymiz.

$$y = u(x)v(x) \quad (17.6.6)$$

Ikkala qismidan x bo'yicha hosila olamiz:

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (17.6.6')$$

(17.6.6) va (17.6.6') larning ifodasini (17.6.2) differensial tenglamaga qo'yamiz:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + P(x)u(x)v(x) - Q(x) = 0 \Rightarrow \\ v(x)[u'(x) + P(x)u(x)] + [u(x)v'(x) - Q(x)] = 0.$$

Oxirgi ifoda $u(x)$, $v(x)$ funksiyalarni shunday tanlab olamizki,

$$u'(x) + P(x)u(x) = 0$$

bo'lsin. U holda

$$\left. \begin{aligned} u' + Pu &= 0, \\ v'u - Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.6.7)$$

$u(x)$ va $v(x)$ ga nisbatan ikkita noma'lumli ikkita chiziqli differensial tenglamalar tizimi hosil bo'ladi. Birinchi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. U holda

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx$$

Bu tenglikni integrallab, differensial tenglamaning xususiy yechimini topamiz:

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} \quad (17.6.8)$$

Uning bu ifodasini (17.6.7) dagi ikkinchi tenglamaga qo'yib $v(x)$ ni izlaymiz:

$$v'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Oxirgi ifodani integrallab $v(x)$ ni topamiz:

$$v(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Endi $u(x)$ va $v(x)$ ning ifodalarini (17.6.6) ga qo'yib (17.6.2) differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

Lagranj usulida ishlangan 1-misolni Bernulli usulida (O'rniga qo'yish usuli) yeching.

17.7. Bernulli tenglamasi. Ushbu

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (17.7.1)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamaga *Bernulli tenglamasi* deyiladi.

Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ -berilgan uzluksiz funksiyalar, $n = \text{const.}$ $n = 0$ da bu tenglama chiziqli, $n = 1$ da o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga

aylanadi. Differensial tenglamani yechish uchun $n \neq 0, 1$ deb faraz qilamiz va ikkala qismini $y^n \neq 0$ ga bo'lamiz

$$y^{-n} y' = -P(x)y^{1-n} + Q(x) \quad (17.7.2)$$

Belgilash kiritamiz: $z = y^{1-n}$, $z' = (1-n)y^{-n}y'$. U holda

$$y^{-n} \cdot y' = \frac{1}{1-n} z'$$

z va z' ning ifodalarini (17.7.2) ga qo'ysak, z ga nisbatan chiziqli tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{1}{1-n} z' = -P(x)z + Q(x) \Rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Bu tenglamani xuddi chiziqli tenglamani yechgandek yechsak (17.7.1) Bernulli tenglamasining umumiy yechimi hosil bo'ladi;

$$y = \left\{ e^{(n-1) \int P(x) dx} \left[(1-n) \int Q(x) e^{(1-n) \int P(x) dx} + C \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}.$$

1-misol. $y' + 2y = y^2 e^x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning chap va o'ng tomonlarini y^2 ($y \neq 0$) bo'lamiz. Natijada quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x, n = 2.$$

Belgilash kiritamiz: $z = y^{1-2}$, $z' = (1-2)y^{-2}y'$. U holda $y^{-2}y' = -z$. z va z' ning ifodalarini berilgan tenglamaga qo'ysak, z ga nisbatan chiziqli tenglamani hosil qilamiz:

$$z' - 2z = e^x$$

Bu tenglamani xuddi chiziqli tenglamani yechgandek yechsak, quyidagi umumiy yechimga ega bo'lamiz: $z = (C + e^{-x})e^{2x}$. Bundan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi hosil bo'ladi

$$y = \frac{1}{(C + e^{-x})e^{2x}}, \quad y = 0.$$

Oxirgi $y = 0$ yechimni differensial tenglamaning har ikkala qismini y^2 ga bo'linganda yo'qotilgan, shuni qo'shib qo'ydik.

Eslatma. Umuman olganda Bernulli tenglamasi (17.7.1) ni yechish uchun uni chiziqli differensial tenglamaga keltirib ishlash shart emas. Bu tenglamani xuddi chiziqli differensial tenglamani yechgandek Lagranjning variatsiyalash yoki Bernulli usullari bilan ham integrallash mumkin. Bu eslatmaning isboti uchun bitta misol yozamiz:

17.8. To'liq differensialli tenglamalar.

17.8.1-ta'rif. Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (17.8.2)$$

tenglamaning chap tomoni birorta $u(x, y)$ -ikki o'zgaruvchili funksiyaning to'liq differensial bo'lsa, bu tenglamaga *to'liq differensialli* tenglama deyiladi.

(17.8.2) tenglamani $du(x, y) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi ifodani integrallab, umumiy integralni hosil qilamiz:

$$\int du(x, y) = C, \quad u(x, y) = C.$$

17.8.3-teorema. Ushbu $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ ifoda birorta $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensial bo'lishi uchun qaralayotgan sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (17.8.4)$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir. Bu yerda $M(x, y)$, $N(x, y)$ funksiyalar Oxy tekislikning (D) sohasida aniqlangan, uzluksiz va $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga egadir.

Isboti. Zaruriylik. Faraz qilaylik,

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

yoki

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

bo'lsin. Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Bu yerdan ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilani hisoblaylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Aralash xususiy hosilalarning tengligidan ushbu xulosaga kelamiz

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Bu yerda $u(x, y)$ -uzluksiz va uzluksiz ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega funksiyadir.

Yetarliligi. Buning uchun (17.8.4) shart bajarilgan deb faraz qilamiz va

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad (17.8.5)$$

munosabat o'rinli ekanligini isbot qilamiz. Bu yerda birinchi tenglamaning yechimini

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y) \quad (17.8.6)$$

ko'rinishda olamiz $P(x_0, y_0) \in D$. Integrallash y o'zgarmas degan shartda amalga oshiriladi. Shu sabab $\varphi(y)$ ixtiyoriy C o'zgarmasning o'rniga qabul

qilingan funksiyadir. Bundan ko'rinadiki (17.8.5) dagi ikkinchi tenglamani qanoatlantiradigan qilib $\phi(y)$ funksiyani tanlash kerak bo'ladi.

Buning uchun (17.8.6) ning ikkala qismini y bo'yicha differensiyalaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \phi'(y),$$

bu yerda (17.8.5) ga asosan,

$$N(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \phi'(y)$$

bo'ladi. (17.8.4) shartga ko'ra,

$$\phi'(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx.$$

Keyingi integral

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx = N(x, y) \Big|_{x_0}^x = N(x, y) - N(x_0, y)$$

ga teng. Shuning uchun $\phi'(y) = N(x, y) - [N(x, y) - N(x_0, y)] = N(x_0, y)$. Bu yerda

$$\phi'(y) = \frac{d\phi}{dy}$$

ekanligidan $d\phi = N(x_0, y)dy$ bo'ladi. Ikkala qismini integrallab:

$$\phi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C$$

ni hosil qilamiz. Bu ifodani (17.8.6) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C. \quad (17.8.7)$$

Teorema isbotlandi va ayni paytda $u(x, y)$ funksiyani topish formulasi ham keltirib chiqarildi.

1-misol. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechilishi. Bu misolda $M(x, y) = \frac{2x}{y^3}$, $N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$. Bundan ko'rinadiki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}.$$

$y \neq 0$ shartda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Demak, (17.8.4) shart bajarildi. Berilgan tenglamaning chap qismi qandaydir $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialini ifodalay ekan. Shu funksiyani aniqlaymiz. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ ifodadan:

$$u(x, y) = \int \frac{2x dx}{y^3} + \varphi(y), \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y).$$

Bu munosabatni y bo'yicha differensiyalaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y)$$

Endi $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ ni hisobga olganda:

$$\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) \Rightarrow \frac{y^2}{y^4} - \frac{3x^2}{y^4} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y)$$

dan $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$ hosil bo'ladi, yoki $\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{y^2}$, bundan $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$. U holda $u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C$. Tenglamani umumiy integrali $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C_1$.

17.9. Integrallovchi ko'paytuvchi. Agar (17.8.2) tenglama uchun (17.8.4) shart bajarilmagan bo'lsa, uning chap qismi biror funksiyaning to'liq differensial bo'la olmaydi. Bunday holatlarda ba'zan (17.8.2) tenglamani $\mu(x, y)$ funksiyaga ko'paytirish bilan uni to'la differensialli tenglamaga keltirish mumkin bo'ladi. Bunday holda $\mu(x, y)$ funksiyaga (17.8.2) tenglamani *integrallovchi ko'paytuvchisi* deyiladi. Integrallovchi ko'paytuvchini qanday aniqlashni ko'rsatamiz. Buning uchun (17.8.2) ni $\mu(x, y)$ ga ko'paytiramiz:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Bu tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Ya'ni

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \quad (17.9.1)$$

$\mu(x, y)$ ni topish uchun xususiy hosilali (17.9.1) differensial tenglamani integrallash kerak. Oxirgi tenglamani ikkala qismini μ ga bo'lamiz:

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (17.9.2)$$

Ravshanki, bu tenglamani qanoatlantiradigan funksiya $\mu(x, y)$ (17.8.2) tenglamani integrallovchi ko'paytuvchisi bo'ladi.

Umumiy holda (17.9.2) tenglamadan $\mu(x, y)$ ni topish oddiy differensial tenglamani integrallashdan qiyinroqdir. Shu sababli xususiy holni, ya'ni μ funksiya faqat x yoki y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan holini qaraymiz.

Musalan, (17.9.2) tenglama faqat y ga bog'liq integral ko'paytuvchiga ega bo'lsin. Bu holda (17.9.2) da $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ ekanligini hisobga olib,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$\ln \mu = \int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy + \ln C$$

yoki

$$\mu(y) = \exp \left[\int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy \right], \text{ bu yerda } C=1.$$

17.9.3-misol. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ tenglamani yeching.

Yechilishi. Bu yerda $M(x, y) = y + xy^2$, $N(x, y) = -x$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$.

Ko'rinib turibdiki $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Demak, tenglama to'la differensialli tenglama emas. Bu tenglama faqat y ga bog'liq integral ko'paytuvchiga egaligini ko'rsatamiz.

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}$$

bo'lgani uchun $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y}$ bo'ladi. Bundan

$$\ln \mu = -2 \ln y, \quad \mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Endi berilgan differensial tenglamaga topilgan integral ko'paytuvchi $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ni ko'paytirsak:

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

to'la differensialli tenglama hosil bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$, bu yerda

$$M(x, y) = \frac{1}{y} + x \quad N(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Oxirgi tenglamani yechib, uning umumiy integralini topamiz:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0 \text{ yoki } y = -\frac{2x}{x^2 + 2c}.$$

Yuqorida biz $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ifoda x ga bog'liq bo'lmagan holdagina y ga bog'liq $\mu(y)$ integrallovchi ko'paytuvchi topish usulini ko'rsatdik.

Agar $\mu(x)$ ifoda y ga bog'liq bo'lmagan, faqat x ning funksiyasidan iborat bo'lsa, u holda faqat x ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x) = \exp \left[\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx \right]$ bo'ladi.

17.10. Lagranj tenglamasi. Ushbu $y = x\varphi(y') + \phi(y')$ tenglamaga Lagranj tenglamasi deyiladi. Bu tenglamani x bo'yicha differensiallab, $y' = p$ desak,

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \phi'(p)\frac{dp}{dx} \quad (17.10.1)$$

yoki

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \phi'(p) \quad (17.10.2)$$

Bu chiziqli differensial tenglama qiyinchiliksiz integrallanadi (17.9-§ ga qarang). (17.10.2) ning integrali $\Phi(x, p, C) = 0$ va $y = x\varphi(p) + \phi(p)$ birgalikda Lagranj tenglamasini yechimini beradi:

$$\begin{aligned} \Phi(x, p, C) &= 0, \\ y &= x\varphi(p) + \phi(p). \end{aligned} \quad (17.10.3)$$

Faqat biz (17.10.1) dan (17.10.2) ga o'tayotganda tenglikni dp/dx ga bo'lish chog'ida $p = p_i$ o'zgarmas yechimlarni (agar ular mavjud bo'lsa) yo'qotayapmiz, $dp/dx \equiv 0$. p ni o'zgarmas desak, y (17.10.1) ni qanoatlantirishi uchun albatta $p - \varphi(p) = 0$ tenglamani qanoatlantirishi kerak, chunki $dp/dx \equiv 0$. Demak, agar $p - \varphi(p) = 0$ tenglamaning haqiqiy $p = p_i$ yechimlari mavjud bo'lsa, (17.10.3) ga uning to'liq bo'lishi uchun $y = x\varphi(p_i) + \phi(p_i)$ ni qo'shib qo'yish kerak. Shunday qilib, umuman integral chiziqlar

$$\begin{aligned}\Phi(x, p, C) &= 0, \\ y &= x\varphi(p) + \phi(p)\end{aligned}\tag{11}$$

yoki

$$y = x\varphi(p_1) + \phi(p_1)$$

dan iborat bo'ladi.

Misol. $y = 2xy' - 4y^3$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = p$, $y = 2xp - 4p^3$ deb, oxirgi tenglikni differensiallasak,

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - 12p^2 \frac{dp}{dx}$$

Ifodani olamiz va $\frac{dp}{dx}$ ga bo'lib, chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz:

$$p \frac{dx}{dp} + 2x = 12p^2.$$

Bu tenglamani integrallab, $x = 3p^2 + C/p^2$ ni olamiz. Demak, integral chiziqlar sinfi

$$\begin{aligned}x &= 3p^2 + C/p^2, \\ y &= 2xp - 4p^3 \text{ yoki } y = 2p^3 + 2C/p.\end{aligned}$$

$\frac{dp}{dx}$ ga bo'lganimizda $p - \phi(p) = 0$ tenglamaning ildizlari bo'lgan p_i lar uchun $p = p_i$ yechim yo'qotiladi. Demak, bular

$$x = 3p^2 + C/p^2, \quad y = 2p^3 + 2C/p, \quad y = 0$$

esa Lagranj tenglamasining yechimini beradi.

17.11. Klero tenglamasi. Ushbu

$$y = xy' + \phi(y')$$

tenglamaga *Klero tenglamasi* deyiladi. $y' = p$ deb olsak, $y = xp + \phi(p)$ ni olamiz. Oxirgi ifodani differensiallab, ushbu

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \phi'(p) \frac{dp}{dx}$$

yoki

$$(x + \phi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

tenglikni olamiz. Bundan $\frac{dp}{dx} = 0$ yoki $x + \phi'(p) = 0$ kelib chiqadi.

Birinci holda $p = C$ bo'lib, $y = xp + \phi(p)$ dan

$$y = Cx + \phi(C) \quad (17.11.1)$$

integral chiziqlar oilasini olamiz.

Ikkinchi holda yechim

$$y = xp + \phi(p) \quad \text{yoki} \quad x + \phi'(p) = 0 \quad (17.11.2)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

Qiyinchiliksiz shunga ishonch hosil qilish mumkinki, (17.11.2) tengliklar bilan aniqlanadigan integral chiziq (17.11.1) integral chiziqlar oilasining o'ramasi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, qandaydir $\Phi(x, p, C) = 0$ chiziqlar oilasining o'ramasi

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad \partial\Phi/\partial C = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanadi. Shuning uchun (17.11.1) chiziqlar oilasining o'ramasi

$$y = xC + \phi(C), \quad x + \phi'(C) = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanadi, bular (17.11.1) dan faqat parametri bilan farq qiladi, xolos.

Misol. $y = xy' - y'^2$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = p$ deb olsak, $(x - 2p) \frac{dp}{dx} = 0$ ni olamiz. Bundan esa $p = C$, $y = xp - p^2$ yoki $x - 2p = 0$, $y = xp - p^2$ ifodalarga kelamiz.

Demak, $y = xC - C^2$ va $y = x^2/4$ lar berilgan tenglamaning yechimlari bo'ladi.

17.3-§. Differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish

17.12. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. n - tartibli differensial tenglamani

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda yoki agar uni n - tartibli hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (17.12.1)$$

deb yozish mumkin.

Bu yerda ham birinchi tartibli tenglamalar uchun bo'lgani kabi, umumiy yechim ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq. Shu sababli umumiy yechimdan xususiy yechimni keltirib chiqarishga imkon beradigan ba'zi qo'shimcha shartlar berilgan bo'lishi kerak. Ma'lumki, birinchi tartibli tenglamada bunday shart bitta o'zgarmasga bog'liq bo'ladi va $x = x_0$ da $y = y_0$ yoki $y(x_0) = y_0$ ko'rinishda berilib boshlang'ich shart deb yuritilgan edi. Ikkinchi tartibli tenglama uchun bunday shart ikkita ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'ladi va h.k.

Tartibi n bo'lgan tenglama uchun boshlang'ich shartlar $x = x_0$ da n ta ya'ni

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ y''(x_0) &= y''_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned} \right\} \text{ yoki } \left. \begin{aligned} y|_{x=x_0} &= y_0 \\ y'|_{x=x_0} &= y'_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned} \right\} \quad (17.12.2)$$

ko'rinishida beriladi.

(17.12.1) differensial tenglamaning (17.12.2) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish *Koshi masalasi* deyiladi. Bunday tenglamalar uchun birinchi tartibli tenglamaning yechimi haqidagi teorema kabi yechimning mavjudligi va yagonaligini tasdiqlaydigan ushbu teorema o'rinalidir.

17.12.3-teorema. Agar $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya biror $(n + 1)$ o'lchamli D sohada uzluksiz va uning $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlar bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ xususiy hosilalari shu sohada chegaralangan bo'lsa, u holda har bir ichki $N_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \in D$ nuqtaga mos keluvchi hamda (17.12.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechim mavjud va u yagonadir.

Ikkinchi tartibli $y'' = f(x, y, y')$ tenglama uchun boshlang'ich shart quyidagicha bo'ladi:

$$\left. y \right|_{x=x_0} = y_0, \quad \left. y' \right|_{x=x_0} = y'_0. \quad (17.12.4)$$

Bu yerda x_0, y_0, y'_0 ma'lum o'zgarmas sonlardir. $N_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi birgina egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning OX o'qi bilan tashkil etgan burchagining tangensi: $y'_0 = \operatorname{tg} \alpha = k$. Bundan ko'rinadiki y'_0 turli qiymatlar qabul qilganda $N_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi og'maning burchaklari turlicha bo'lgan cheksiz ko'p integral egri chiziqlar to'plamini hosil qilamiz.

Endi n -tartibli tenglamaning umumiy yechimi haqida tushuncha kiritamiz.

17.12.5-ta'rif. n ta $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmas miqdorlarga bog'liq bo'lgan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

funksiyaga n -tartibli (17.12.1) tenglamaning umumiy yechimi deyiladi. Bunda bu funksiya: 1) $C_1, C_2, \dots, C_n$ larning ixtiyoriy qiymatlarida tenglamani qanoatlantiradi; 2) berilgan boshlang'ich shartda $C_1, C_2, \dots, C_n$ larni shunday tanlash mumkinki $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ funksiya bu boshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

17.12.5-ta'rif. Umumiy yechimdan $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarning aniq qiymatlarida hosil bo'ladigan $y = \varphi(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$ funksiya (17.12.1) tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Xususiy yechimning grafigiga berilgan differensial tenglamaning *integral egri chizig'i* deyiladi.

17.13. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar. Eng sodda n -tartibli tenglamani qaraymiz:

$$y^{(n)} = f(x). \quad (17.13.1)$$

Bu tenglamaning umumiy integralini topamiz. Ikkala qismini x bo'yicha integrallab va $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ekanligini hisobga olib,

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1$$

ifodani hosil qilamiz. Yana bir marta integrallasak:

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int_{x_0}^x f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2$$

Integrallashni shu tartibda davom ettirsak, n marta integrallashdan so'ng (17.13.1) differensial tenglamaning

$$y(x) = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n$$

umumiy yechimini hosil qilamiz.

17.13.2-misol. $y'' = \sin x - \cos x$ tenglamaning $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechilishi. Tenglamaning ikkala qismini x bo'yicha ketma-ket ikki marta integrallaymiz:

$$y' = \int (\sin x - \cos x) dx + C_1 = -\cos x - \sin x + C_1,$$

$$y = \int (-\cos x - \sin x + C_1) dx = -\sin x + \cos x + C_1 x + C_2.$$

C_1, C_2 larni boshlang'ich shartlardan topamiz:

$$0 = -\cos 0 - \sin 0 + C_1,$$

$$1 = -\sin 0 + \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2.$$

Bu yerdan quyidagilarga ega bo'lamiz: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning xususiy yechimi $y = -\sin x + \cos x + x$ ko'rinishda bo'ladi.

17.14. $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglamalar. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (17.14.1)$$

ko'rinishdagi n - tartibli differensial tenglamani qaraymiz. Unda izlanayotgan y funksiya va uning $(k-1)$ tartibgacha hosilalari ishtirok etmaydi. (17.14.1) tenglamani integrallash bilan shug'ullanamiz. $y^{(k)} = p(x)$ deb belgilasak, (17.14.1) tenglama k birlikka pasaytiriladi, ya'ni

$$F(x, p, p^{(1)}, \dots, p^{(n-k)}) = 0. \quad (17.14.2)$$

(17.14.2) tenglamani integrallab, yangi izlanayotgan funksiyani aniqlaymiz:

$$p = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

so'ngra $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ tenglamani k marta integrallab, (17.14.1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

17.14.3-eslatma. (17.14.1) tenglamani integrallash usuli quyidagi xususiy hollar uchun ham o'rinlidir:

$$F(y', y'') = 0, \quad F(x, y'') = 0, \quad F(y'') = 0.$$

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaning tartibini pasaytirish usuli bilan yechishni ikkita birinchi tartibli tenglamalar sistemasiga keltirib yechish usuli bilan almashtirish ham mumkin ya'ni,

$$\begin{cases} y' = p \\ F(x, p, p') = 0 \end{cases}$$

17.14.4-misol. Ushbu $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$ tenglamaning $y(1) = 0.5, y'(1) = 0.5, y''(1) = -1$ boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimning toping.

Yechilishi. $y'' = p, \quad y''' = p'$ deb belgilash kiritib, $x^4 p' + 2x^3 p = 1$ yoki $p' + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^4}$ tenglamani hosil qilamiz. Bu chiziqli tenglamadir. (17.6.2) va (17.6.5) munosabatlarga asosan:

$$p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}$$

umumiy yechimini topamiz. $y''(1) = p(1) = -1$ boshlang'ich shartdan foydalanib $C_1 = 0$ topamiz.

Demak, $y'' = -\frac{1}{x^3}$ bo'ladi. Bu yerdan $y' = \frac{1}{2x^2} + C_2$. $y'(1) = 0.5$ boshlang'ich shartdan foydalanib $C_2 = 0$ topamiz. $y' = \frac{1}{2x^2}$ tenglamani integrallaymiz, natijada $y = -\frac{1}{2x} + C_3$ yechimga ega bo'lamiz. Endi $y(1) = 0.5$ boshlang'ich shartdan foydalanib $C_3 = 1$ topamiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning izlanayotgan $y = 1 - \frac{1}{2x}$ xususiy yechimini topdik.

17.15. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglamalar. Yozilishda x argumentni oshkora o'z ichiga olmagan

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (17.15.1)$$

tenglamani qaraymiz. $y' = p(y)$ o'rniga qo'yish (17.15.1) tenglamaning tartibini bir birlikka pasaytirishga imkon beradi. Bunda erkli o'zgaruvchi sifatida y ni qabul qilamiz. Bu ko'rinishdagi tenglamalarni integrallash uchun belgilash kiritamiz:

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = pp',$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(pp') = \frac{d}{dy}(pp') \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dp'}{dy} p + p' \frac{dp}{dy} \right) p = p'' p^2 + (p')^2 p \text{ va h. k.}$$

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ larni (17.15.1) tenglamaga qo'yib, $(n-1)$ - tartibli tenglamaga ega bo'lamiz.

17.15.2-misol. $2yy'' + y'^2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = p(y)$, $y'' = pp'$ bo'lgani uchun $2ypp' = -p^2$ yoki $2yp' = -p$.

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2 \cdot y}$ Bundan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln|p| = -\frac{1}{2} \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Endi $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ tenglamadan $y = (C_1 x + C_2)^{2/3}$ umumiy yechimini topamiz.

17.16. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi differensial tenglamalar. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ funksiya $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ funksiyalarga nisbatan bir jinsli funksiya bo'lsa, ya'ni

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}), \quad t \neq 0. \quad (17.16.1)$$

U holda $y' = yz$ almashtirish (17.16.1) tenglamaning tartibini bir birlikka pasaytirishga imkon beradi.

17.4-§. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

17.17. n -tartibli chiziqli differensial tenglamalar. n -tartibli differensial tenglamalarning xususiy hollaridan biri, n -tartibli chiziqli differensial tenglamalarni qaraymiz.

17.17.1-ta'rif. Agar n -tartibli differensial tenglamalar noma'lum funksiya va uning $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan birinchi darajali bo'lsa, bunday tenglama n -tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi va ushbu

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (17.17.2)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda x -argument, y -izlanayotgan funksiya, $a_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) differensial tenglamaning koeffitsientlari, $f(x)$ - shu differensial tenglamaning o'ng tomonidir. $a_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) va $f(x)$ lar $x \in [a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar.

Agar (17.17.2) differensial tenglamada $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu differensial tenglama *bir jinslimas* (yoki o'ng tomonli) n -tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agar (17.17.2) tenglamada $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, ya'ni

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + p_n y = 0, \quad (17.17.3)$$

u holda bu differensial tenglama *bir jinsli* n -tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

17.17.4-ta'rif. Agar $y = \varphi(x)$ funksiya (17.17.2) differensial tenglamani ayniyatga aylantirsa, u holda bu funksiya uning *yechimi* deyiladi.

Endi (17.17.2) differensial tenglamaga qo'yilgan

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (17.17.5)$$

Koshi masalasini qaraymiz, bunda $x_0 \in [a, b]$, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ o'zgarmas sonlar.

17.17.6-teorema. Faraz qilaylik, $a_k(x)$ ($k=\overline{1,n}$) va $f(x)$ lar $x \in [a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar bo'lib, $x_0 \in [a,b]$ bo'lsin. U holda $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ o'zgarmas sonlarning ixtiyoriy qiymatlarida (17.17.2), (17.17.5) Koshi masalasining $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y = \varphi(x)$ ko'rinishidagi yechimi mavjud va yagonadir.

Umuman, (17.17.2) differensial tenglama n ta o'zgarmasga bog'liq bo'lgan

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (17.17.7)$$

ko'rinishdagi umumiy yechimiga egadir.

(17.17.7) umumiy yechimdan C_k ($k=\overline{1,n}$) o'zgarmas miqdorlarning tayin qiymatlarida C_k^0 hosil bo'ladigan har qanday

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) \quad (4.1.6)$$

funksiya (17.17.2) differensial tenglamaning *xususiy yechimi* deyiladi.

Xususiy yechimning grafigi berilgan differensial tenglamaning *integral egri chizig'i* deyiladi.

Boshlang'ich shart (17.17.5) dan foydalanib, (17.17.7) umumiy yechimdan ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y'_0 &= \varphi_x(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi_x^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Bu sistemani C_k ($k=\overline{1,n}$) larga nisbatan yechib, topilgan $C_k = C_k^0$ ($k=\overline{1,n}$) larni (17.17.7) formulaga qo'yib, Koshi masalasini yechimini hosil qilamiz.

17.18. Chiziqli differensial operator. Xususiy yechimlar haqida tushunchalar. Yozishlarni ixchamlash, hisoblash va isbotlarni soddalashtirish maqsadida L - operator tushunchasini kiritamiz va kelgusida bundan foydalanamiz:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x).$$

Bu operator orqali (17.17.2) va (17.17.3) differensial tenglamalarning chap tomoni quyidagicha

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki (17.17.2) va (17.17.3) differensial tenglamalar mos ravishda quyidagicha yoziladi:

$$L(y) = f(x)$$

va

$$L(y) = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (17.18.1)$$

L - operator quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Operatorning bir jinsligi: $L(Cy) = CL(y)$, $C = const$.

2⁰. Operatorning additivligi: $L(x + y) = L(x) + L(y)$.

Bir jinsli va additiv operatorlar *chiziqli operatorlar* deyiladi. Shunday qilib, *L* - operatorning ikkita chiziqli xossasi bor ekan.

Amaliyotda muhim ahamiyatga ega bo'lgan chiziqli bir jinsli tenglama xususiy yechimlarining xossalari to'g'risidagi teoremlarni qaraymiz.

17.18.2-teorema. Agar $y_1 = y_1(x)$ va $y_2 = y_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada (17.18.1) differensial tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda har qanday $C_1, C_2 \in R$ haqiqiy sonlar uchun $C_1 y_1 + C_2 y_2$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada (17.18.1) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra, $y_1 = y_1(x)$ va $y_2 = y_2(x)$ funksiyalar differensial tenglamani qanoatlantirgani uchun $L(y_1) \equiv 0$ va $L(y_2) \equiv 0$. Ikkinchi tomondan *L* - operatorning 1⁰ - , 2⁰ - xossalariga ko'ra,

$$L_1(C_1 y_1 + C_2 y_2) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) = C_1 0 + C_2 0 = 0.$$

17.18.3-teorema. Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada (17.18.1) bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimlari bo'lsa, u holda $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, $C_i = const, i = \overline{1, n}$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada (17.18.1) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra, $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar differensial tenglamani qanoatlantirgani uchun $L(y_1) = 0, L(y_2) = 0, \dots, L(y_n) = 0$ bo'ladi. U holda L -operatorning L -operatorning $1^0 - , 2^0 -$ xossalriga ko'ra,

$$\begin{aligned} L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) &= \\ &= C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) + \dots + C_n L(y_n) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

bo'ladi. Bundan ko'rinadiki $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada (17.18.1) differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

17.19. Vronskiy determinanti va uning xossalari. Ostrogradskiy – Liuvill formulasi. Ushbu $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada berilgan bo'lsin.

17.19.1-ta'rif. Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar uchun $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar mavjud bo'lsa, u holda y funksiya $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar orqali *chiziqli ifodalangan* yoki ularning *chiziqli kombinatsiyasidan* iborat deyiladi. Bunda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlarning ba'zilar (hatto hammasi) nolga teng bo'lishi mumkin.

17.19.2-ta'rif. Agar berilgan $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar uchun $[a, b]$ kesmada kamida bittasi noldan farqli shunday $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_i \in R, i = \overline{1, n}$) sonlar mavjud bo'lsaki, ushbu

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \quad (17.19.3)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada *chiziqli bog'langan* deyiladi.

17.19.4-ta'rif. Agar berilgan $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar uchun $[a, b]$ kesmada yuqorida aytilgan shartlarni qanoatlantiruvchi sonlar mavjud bo'lmasa, ya'ni (17.19.3) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ shartdagina bajarilsa, $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada *chiziqli bog'lanmagan (erkli)* deyiladi.

17.19.5-ta'rif. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $y_i^{(s-1)}(x), i = \overline{1, n}, s = \overline{1, n}$ funksiyalardan tuzilgan

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinantga *Vronskiy determinanti* deyiladi.

Bu determinant uchun ushbu teoremlar o'rinli.

17.19.6-teorema. Berilgan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarning biror (a, b) intervalda chiziqli bog'liq bo'lishi uchun, shu (a, b) intervalda Vronskiy determinant nolga teng, ya'ni $W(x) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

17.19.7-teorema. (17.18.1) bir jinsli differensial tenglamaning $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlari $[a, b]$ kesmada chiziqli bog'lanmagan bo'lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti, ya'ni $W(x) \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

17.19.8-ta'rif. (17.18.1) bir jinsli differensial tenglamaning ixtiyoriy n ta $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ chiziqli bog'lanmagan yechimlariga, (17.18.1) bir jinsli differensial tenglamaning *fundamental yechimlari sistemasi* deyiladi.

Endi (17.18.1) bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teoremani keltiramiz.

17.19.9-teorema. Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar $L[y] = 0$ tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi bo'lsa, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^n C_i y_i$$

formula bilan aniqlanadi.

17.19.10-misol. $y'' + \frac{y'}{x} = 0$ ($x > 0$) tenglama uchun ikkita bir juft yechimlar ma'lum bo'lsin:

$$y_1 = 3 + \ln \sqrt{x}, \quad y_2 = 5 + \ln \sqrt[3]{x},$$

$$\bar{y}_1 = \ln \sqrt{x}, \quad \bar{y}_2 = \ln \sqrt[3]{x}.$$

Bu juft yechimlarning chiziqli bog'liqligi aniqlansin.

Yechilishi. 1-holatda

$$y_1' = (3 + \ln \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}, \quad y_2' = (5 + \ln \sqrt[3]{x})' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x}.$$

Vronskiy determinantini tuzamiz

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 3 + \ln \sqrt{x} & 5 + \ln \sqrt[3]{x} \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \ln \sqrt{x} - \frac{5}{2x} - \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{2x} =$$

$$= -\frac{3}{2x} + \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{3} \ln x = -\frac{3}{2x} + \left(\frac{1}{6x} - \frac{1}{6x} \right) \ln x = -\frac{3}{2x} \neq 0.$$

Demak, 17.19.7-teoremaga asosan, y_1 va y_2 xususiy yechimlar o'zaro chiziqli bog'lanmagan.

2-holatda:

$$y_1' = (\ln \sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}, \quad y_2' = (\ln \sqrt[3]{x})' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x}.$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \ln \sqrt{x} & \ln \sqrt[3]{x} \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{3x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3x} \ln \sqrt{x} - \frac{1}{2x} \ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{6x} \ln x - \frac{1}{6x} \ln x = 0.$$

Demak, 17.19.6-teoremaga asosan, y_1 va y_2 xususiy yechimlar chiziqli bog'liqdir.

Ostrogradskiy – Liuvill formulasi

Ostrogradskiy-Liuvill formulasi chiziqli bir jinsli differensial tenglama yechimlari sistemasining Vronskiy determinanti bilan bu differensial tenglamaning ko'effitsiyentlarini bog'laydi. Bu formulani keltirib chiqarishni ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama uchun ko'rsatamiz. Ushbu

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (17.19.11)$$

ko'rinshdagi differensial tenglamani qaraymiz.

Agar y_1 va y_2 - fundamental yechimlar sistemasi bo'lsa, u holda

$$\begin{cases} y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0. \end{cases}$$

Birinchi tenglikning hadlarini y_2 ga, ikkinchi tenglikning hadlarini esa y_1 ga ko'paytirib va ikkinchisidan birinchisini ayirib, topamiz:

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \quad (17.19.12)$$

Bu yerda $y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x) - y_1$ va y_2 fundamental yechimlar sistemasining Vronskiy determinant. $y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = W'(x) -$ bu determinantning hosilasi. Demak, (17.19.12) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0. \quad (17.19.13)$$

(17.19.13) tenglamaning umumiy yechimini o'zgaruvchilarni ajratib topamiz:

$$\frac{dW(x)}{W(x)} + a_1(x)dx = 0, W(x) \neq 0,$$

chunki y_1 va y_2 yechimlar sistemasi fundamentaldir. Oxirgi differensial tenglamani integrallaymiz:

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}. \quad (17.19.14)$$

Endi (17.19.13) differensial tenglamaning $W(x_0) = W_0$ boshlang'ich shartini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz. Ularni (17.19.14) umumiy yechimga qo'yisak, u

$$W_0 = Ce^{-\int a_1(x)dx} \Big|_{x=x_0} \quad (17.19.15)$$

ko'rinishda bo'ladi. (17.19.14) va (17.19.15) dan

$$\frac{W(x)}{W_0} = \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{e^{-\int a_1(x)dx} \Big|_{x=x_0}}$$

yoki

$$W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1(x)dx} \quad (17.19.16)$$

ekanligi ravshan.

(17.19.16) formula *Ostrogradskiy-Liuvill formulasi deyiladi*, u ikkinchi tartibli tenglama uchun keltirib chiqarildi, biroq u istalgan tartibli tenglamalar uchun ham o'rinlidir.

(17.19.16) formula ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lganda, uning umumiy yechimini topishga imkon beradi. Xususan, agar (17.19.11) tenglama uchun y_1

xususiy yechim bo'lsa, bu yechim bilan chiziqli bog'lanmagan uning ikkinchi yechimini

$$y_2 = y_1 \int (y_1)^{-2} e^{-\int a(x) dx} dx \quad (17.19.17)$$

formula yordamida topish mumkin.

17.19.18-misol. Quyidagi

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0$$

differensial tenglamaning xususiy yechimi $y_1 = x$ bo'lsa, uning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. (17.19.17) formulaga ko'ra, y_2 xususiy yechimini topamiz:

$$y_2 = x \int x^{-2} e^{\int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx} dx = -\ln x.$$

Demak, differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C x - C_2 \ln x$$

ko'rinshda bo'ladi.

17.20. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar.
Ushbu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \text{ yoki } L(y) = 0 \quad (17.20.1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga n -tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ -haqiqiy o'zgarmas sonlardir.

Differensial tenglamani yechish uchun Eyler usulidan foydalanamiz, yana (17.20.1) differensial tenglamaning xususiy yechimini $y = e^{kx}$ ko'rinishda izlaymiz, bunda $k = \text{const}$. Bu $y = e^{kx}$ funksiyani ketma-ket n marta differensialab $y = e^{kx}$, $y' = k e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ hosilalarini topamiz. U holda (17.20.1) dan

$$L(e^{kx}) = e^{kx} p(k) = 0$$

ega bo'lamiz, bunda $p(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n$ n -darajali ko'phad bo'lib, (17.20.1) differensial tenglamaning *xarakteristik ko'phadi deyiladi*

Ushbu

$$p(k)=0 \text{ yoki } k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (17.20.2)$$

algebraik tenglamaga (17.20.1) differensial tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Yechimlarning fundamental sistemasi *xarakteristik tenglamaning* ildizlariga bog'liqdir. Bizga algebra kursidan ma'lumki, $p(k)=0$ *xarakteristik tenglamaning* n ta ildizi mavjud. Uchta hol qaraladi.

1) *Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va har xil.*

Algebraik (17.20.2) tenglamaning darajasiga asosan, uning n ta har xil $k_1, k_2, \dots, k_n$ ildizlari bo'ladi.

Demak, n ta xususiy yechimini topamiz:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}.$$

Bu xususiy yechimlar sistemasi fundamental bo'lishini isbotlaymiz. n -tartibli Vronskiy determinantini tuzamiz:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bu determinantni hisoblash uchun umumiy bir qonuniyat topish maqsadida uchinchi tartibli determinantni qaraymiz:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, y_3) &= e^{(k_1 + k_2 + k_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + k_3)x} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k_1 - k_3 & k_2 - k_3 & k_3 \\ k_1^2 - k_3^2 & k_2^2 - k_3^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = \\ &= e^{(k_1 + k_2 + k_3)x} \begin{vmatrix} k_1 - k_3 & k_2 - k_3 \\ k_1^2 - k_3^2 & k_2^2 - k_3^2 \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + k_3)x} (k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Umumiy holda shunga o'xshash ushbu formula o'rinli bo'ladi

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} (-1)^n (k_1 - k_2)(k_1 - k_3) \dots (k_1 - k_n) \\ (k_2 - k_3) \cdot (k_2 - k_4) \dots (k_{n-1} - k_n) \neq 0.$$

Demak, 17.19.9-teoremaga asosan, $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalarning

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \quad (17.20.3)$$

chiziqli kombinatsiyasi differensial tenglamaning umumiy yechimidir.

17.20.4-misol. Ushbu $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0, \quad k(k^2 - 5k + 6) = 0 \quad k = 0, \\ k^2 - 5k + 6 = 0 \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

Bu holda $y_1 = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ funksiyalar yechimining fundamental tizimini tashkil etadi.

Demak, (17.20.3) ga ko'ra, differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2) *Xarakteristik tenglamaning ildizlari karrali (ya'ni bir xil) bo'lgan hol.* Bu holda xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ bo'lib, $p(k) = 0$ xarakteristik tenglamaning haqiqiy va karrali ildizi bo'lsin, u holda unda

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = x e^{kx}, \dots, y_n = x^{n-1} e^{kx}$$

n ta chiziqli erkli xususiy yechimlar mos keladi va differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu

$$y = (C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1}) e^{kx} \quad (17.20.5)$$

ko'rinishda bo'ladi.

17.20.6-misol. $y'''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = 0, \quad (k+3)^3 = 0, \quad k_1 = k_2 = k_3 = -3.$$

Demak, xarakteristik tenglama $k = -3$ uch karrali ildizga ega. Shu sababli berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi (17.20.5) ga asosan,

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-3x}.$$

3) *Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lgan hol.* $p(k) = 0$ tenglama ildizlari n karrali $k = \alpha \pm i\beta$ qo'shma kompleks sonlardan iborat bo'lsa, $e^{(\alpha \pm i\beta)x}, xe^{(\alpha \pm i\beta)x}, x^2e^{(\alpha \pm i\beta)x}, \dots, x^{n-1}e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ kompleks yechimlar mos keladi. Bu yechimlarni yozamiz

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{n-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{n-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Shunday qilib, n karrali $k = \alpha \pm i\beta$ qo'shma kompleks ildizlarga $2n$ ta chiziqli erkli yechimlar mos keladi. Berilgan (17.20.1) differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = e^{\alpha x} [(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + x(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \dots + \\ + x^{n-1}(C_{n-1} \cos \beta x + C_n \sin \beta x)]$$

yoki

$$y = e^{\alpha x} [(C_1 + C_3x + C_5x^2 + \dots + C_{2n-1}x^{n-1}) \cos \beta x + \\ (C_2 + C_4x + C_6x^2 + \dots + C_{2n}x^{n-1}) \sin \beta x] \quad (17.20.7)$$

ko'rinishda bo'ladi.

17.20.8-misol. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechilishi. $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$ bikvadrat xarakteristik tenglamani yechish uchun $k^2 = t$ deb belgilash olamiz:

$$t^2 + 8t + 16 = 0, \quad (t+4)^2 = 0 \quad t = -4.$$

U holda

$$\begin{aligned} k^2 &= -4, \quad k_{1,2} = \pm 2i, \quad k_1 = -2i, \quad k_2 = 2i. \\ \alpha_1 &= 0, \quad \beta_1 = -2, \quad y_1 = C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x, \\ \alpha_2 &= 0, \quad \beta_2 = 2, \quad y_2 = C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x. \end{aligned}$$

Demak, $y = y_1 + y_2$ dan va (17.20.7) ga asosan, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos 2x + (-C_2 + C_4 x) \sin 2x.$$

17.21. Bir jinslimas differensial tenglamaning xususiy yechimini izlashning aniqmas koeffitsiyentlar usuli. Ushbu ko'rinishdagi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (17.21.1)$$

tenglamaga n -tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli *bir jinslimas tenglama* deyiladi.

17.21.1-teorema. (17.21.1) tenglamaning umumiy yechimi o'zining ixtiyoriy y^* bitta xususiy yechimi bilan, unga mos bir jinsli tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimining yig'indisiga teng, ya'ni

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Bir jinslimas (17.21.1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x] \quad (17.21.2)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu yerda α va β haqiqiy sonlar bo'lib, o'zaro $\alpha \pm \beta i$ kabi bog'langan. $P_m(x)$ va $Q_s(x)$ - mos ravishda m va s - darajali ko'phadlardir, ya'ni

$$\left. \begin{aligned} P_m(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad a_0 \neq 0, \quad m \geq 0, \\ Q_s(x) &= b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_{s-1} x + b_s, \quad b_0 \neq 0, \quad s \geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_s$ va $b_0, b_1, \dots, b_s$ lar $P_m(x)$ va $Q_s(x)$ ko'phadlarning koeffitsiyentlari bo'lib, oldindan berilgan haqiqiy sonlardir. Agar $m = s = 0$ bo'lsa, $P_m(x) = P_0(x) = a_0$, $Q_s(x) = Q_0(x) = b_0$ bo'ladi.

Tenglamaning o'ng tomoni (17.21.2) ko'rinishda berilsa, uning xususiy yechimini ushbu holatda izlanadi:

$$y^* = x^m e^{\alpha x} [F_l(x) \cos \beta x + E_l(x) \sin \beta x]. \quad (17.21.3)$$

Bu yerda α, β - haqiqiy sonlar, $F_l(x)$ va $E_l(x)$ lar noma'lum koeffitsiyentli l ($l = \max(m, s), l \geq 0$)-darajali ko'phadlardir, ya'ni

$$\begin{cases} F_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \dots + A_{l-1} x + A_l, \\ E_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \dots + B_{l-1} x + B_l \end{cases}$$

bu yerda $A_0, A_1, \dots, A_l$ va $B_0, B_1, \dots, B_l$ - noma'lum koeffitsiyentlarning sonli qiymatlarini aniqlash talab qilinadi.

Noma'lum koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (17.21.3) dagi y^* funksiyadan hosilalar olib, $y^*, y^{*'}, \dots, y^{*(n)}$ larning ifodalarini (17.21.1) bir jinslimas tenglamaga qo'yamiz. Hosil bo'lgan munosabat ayniyatdir. Uning ikkala qismidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish usuli bilan bu masala hal qilinadi.

Bu ayniyatdan y^* ning aniq ifodasini (17.21.3) ga asosan aniqlab, tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y = \bar{y} + y^*$.

Agar bir jinslimas tenglama (17.21.1) ning o'ng tomoni $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ ko'rinishdagi chekli sondagi funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda har bir qo'shiluvchini hisobga olgan holda

$$L(y) = f_1(x), L(y) = f_2(x), \dots, L(y) = f_n(x)$$

yozish mumkin. Tenglamalarning $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ xususiy yechimlarini (17.21.3) formulaga asosan topib, (17.21.1) ning, ya'ni $L(y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ differensial tenglamaning umumiy yechimini

$$y = \bar{y} + y = \bar{y} + \sum_{i=1}^n y_i$$

kabi aniqlaymiz.

Aniqmas koeffitsiyentlar usuli xususiy yechimning shaklini bilishga asoslangan. Xususiy yechimni berilgan differensial tenglamaning o'ng tomonining shakliga o'xshash shaklda izlash kerak. $P_m(x)$ yoki $Q_s(x)$ ko'phadlardan birining tartibi ikkinchisidan kichik bo'lsa ham, $F_l(x)$ va $E_l(x)$ ko'phadlar l ($l = \max(m, s), l \geq 0$)- tartibli qilib izlanadi. Xususiy yechimning ko'rinishlari jadvalini keltiramiz.

	$f(x)$ o'ng tomonining turi	Xarakteristik tenglama ildizlari	Xususiy yechimning turi
1	a)	0 soni xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$F_m(x)$
	b)	0 soni xarakteristik tenglamaning n karrali ildizi	$x^n F_m(x)$
2	a)	α soni xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$F_m(x)e^{\alpha x}$
	b)	α soni xarakteristik tenglamaning n karrali ildizi	$x^n F_m(x)e^{\alpha x}$
3	a)	$\pm \beta i$ sonlar xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$F_l(x) \cos \beta x + E_l(x) \sin \beta x$ $l = \max(m, s), l \geq 0$
	b)	$\pm \beta i$ sonlar xarakteristik tenglamaning n karrali ildizlari	$x^n [F_l(x) \cos \beta x + E_l(x) \sin \beta x]$ $l = \max(m, s), l \geq 0$
4	a)	$\alpha \pm \beta i$ sonlar xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$F_l(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + E_l(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ $l = \max(m, s), l \geq 0$
	b)	$\alpha \pm \beta i$ sonlar xarakteristik tenglamaning n karrali ildizlari	$x^n [F_l(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + E_l(x)e^{\alpha x} \sin \beta x]$ $l = \max(m, s), l \geq 0$

(17.22.1)

Normal tenglamalar sistemasi. Hosilaga nisbatan yechilgan

(17.22.2)

Ko'p hollarda yuqori tartibli differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y, z, t, x', y', z'), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = F_3(x, y, z, t, x', y', z'). \end{cases}$$

Ushbu $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$ almashtirish natijasida quyidagi

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

$$\frac{dy}{dt} = v,$$

$$\frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = F_1(x, y, z, t; u, v, w),$$

$$\frac{dv}{dt} = F_2(x, y, z, t; u, v, w),$$

$$\frac{dw}{dt} = F_3(x, y, z, t; u, v, w)$$

ko'rinishdagi normal sistemaga keltiriladi.

Uchunchi tartibli $y''' = f(x; y; y'; y'')$ differensial tenglama $y' = p, y'' = q$ almashtirish natijasida ushbu

$$\begin{cases} y' = p, \\ y'' = p' = q, \\ q' = f(x; y; p; q) \end{cases}$$

ko'rinishdagi normal sistemaga keltiriladi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan, normal sistemani yechish qanchalik muhim ahamiyatga ega ekanligi kelib chiqadi.

(17.22.2) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar sistemasi, bu sistemaning *yechimi* deyiladi. (17.22.2) sistemasi uchun boshlang'ich shart (Koshi masalasi) ushbu

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0 \quad (17.22.3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi .

(17.22.2) normal sistema uchun Koshi masalasi, ya'ni yechimining mavjudligi va uning yagonaligi to'g'risidagi Koshi teoremasini keltiramiz.

17.22. 4-teorema (Koshi). Agar (17.22.2) sistemadagi $f_i(x; y_1; y_2, \dots, y_n) \dots (i = \overline{1, n})$ funksiyalar o'zlarining xususiy hosilalari bilan birgalikda biror $n+1$ o'lchovli D yopiq sohada uzluksiz bo'lsa, u holda $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ nuqtada (17.22.3) shartlarni qanoatlantiruvchi yagona $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ yechim mavjud bo'ladi.

(17.22.2) normal sistemaning umumiy yechimi deb, n ta ixtiyoriy $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmaslarga bog'liq bo'lgan ushbu

[illegible]

sistemaga aytiladi. Bu sistema quyidagi shartlarni qanoatlantirishni kerak:

1) $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmlarining har qanday mumkin bo'lgan qiymatlarida (17.22.5) dagi funksiyalar (17.22.2) sistemani qanoatlantirish kerak;

2) Koshi teoremasi shartlari bajariladigan sohada (17.22.5) funksiyalar sistemasi Koshi masalasining yechimi bo'lad.

17.23. Normal sistemasini yechish usullari. Normal sistemani integrallash usullaridan biri uni bitta yuqori tartibli differensial tenglamaga keltirish usuli bo'lib hisoblanadi. Bu usul quyidagi mulohazalarga asoslanadi. (17.22.2) normal sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemadagi tenglamalarning istalgan birini, misol uchun birinchisini x bo'yicha differensiyalaymiz.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

Bu tenglikka $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ -larning (17.22.2) dagi qiymatlarini qo'yib topamiz:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n,$$

yoki qisqacha

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; \dots; y_n).$$

Bu tenglikni yana bir marta differensiallab hamda (17.22.2) dagi $\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ larning qiymatini qo'yish natijasida topamiz:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; \dots; y_n).$$

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu $\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; \dots; y_n)$ tenglikni hosil qilamiz. Hosil qilingan tenglamalarni yig'ib ushbu

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (17.23.1)$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning $(n-1)$ dagi $y_2, y_3, \dots, y_n$ funksiyalarini x ning y_1 va uning $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ hosilalari orqali ifodalab topamiz:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots \dots \dots \\ y_n = \psi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \quad (17.23.2)$$

$y_2, y_3, \dots, y_n$ larning topilgan qiymatlarini (17.23.1) sistemaning oxiridagisiga qo'yamiz. Natijada y_1 ga nisbatan n -darajali ushbu

$$\frac{d^n y_1}{dx} = \varphi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^n)$$

differentensial tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi $y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ bo'lsin. Buni $(n-1)$ marta differensiallab so'ngra $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ hosilalarning qiymatlarini (17.23.2) ga qo'yib, $y_2, y_3, \dots, y_n$ funksiyalarni topamiz:

$$y_2 = \varphi_2(x; c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, y_n = \varphi_n(x; c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Bu sistema (17.22.2) normal sistemaning izlanayotgan yechimini ifodalaydi.

17.23.3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechilishi. Bu sistemaning birinchisini x bo'yicha differensiallab topamiz: $y'' = 4y' - 3z'$. Bu tenglamadagi z' ni berilgan sistemadagi $z' = 2y - 3z$ ifodasi bilan almashtirib

$$y'' = 4y' - 3(2y - 3z), \quad y'' = 4y' - 6y + 9z, \quad y'' - 4y' + 6y = 9z$$

tenglamani hosil qilamiz. So'ngra, ushbu

$$\begin{cases} y' = 4y' - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z \end{cases}$$

sistemani tuzamiz. Bu sistemaning birinchisidan

$$z = \frac{4y - y'}{3} \quad (17.23.4)$$

z o'zgaruvchining bu qiymatini sistemaning ikkinchisiga qo'yamiz. Natijada ushbu

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3}, \quad y'' - 4y' - 6y = 0$$

chiziqli ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani hosil qilamiz va bu tenglamani yechamiz:

$$k^2 - k - 6 = 0, k_1 = -2, k_2 = 3, \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Endi y va y' larning qiymatlari (17.23.4) ga qo'yib z ni topamiz:

$$z = 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \frac{1}{3}.$$

Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad z = 2c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3}c_2 e^{3x}$$

topiladi.

17.24. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb, izlanayotgan funksiyalarning hosilalari va bu funksiyalarining o'zlari tenglamalar tarkibiga chiziqli bo'lib kirgan tenglamalarga aytiladi.

Biz, bu bandda (17.22.2) normal sistemasining xususiy holi, ya'ni o'zgarmas koeffitsiyentli chiziq li bir jinsli normal sistemani qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{aligned} \right\} \quad (17.24.1)$$

bu yerda $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ - hammasi o'zgaruvchi sonlar, $y_1, y_2, \dots, y_n$ -izlanuvchi funksiyalar, x -erkli o'zgaruvchi. Sodda uchun (17.24.1) sistemani uchta y_1, y_2, y_3 noma'lum uchta tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3,\end{aligned}\tag{17.24.2}$$

hunda $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ - o'zgaras sonlar. Bu sistemaning xususi yechimlarini

$$y_1 = \alpha e^{kx}, y_2 = \beta e^{kx}, y_3 = \gamma e^{kx} \quad (17.24.3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda α, β, γ - o'zgarmas sonlar (ularni shunday tanlash yoki topish kerakki, natijada (17.24.3) dagi funksiyalar (17.24.2) ni qanoatlantirsin. (17.24.3) sistemani (17.24.2) ga qo'yib $e^{\alpha} \neq 0$ ni e'tiborga olgan holda topamiz:

$$\begin{aligned} \alpha k &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + \dots + a_{13}\gamma, \\ \beta k &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + \dots + a_{23}\gamma, \\ \gamma k &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + \dots + a_{33}\gamma \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{cases} (a_{12} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases} \quad (17.24.4)$$

(17.24.4) sistemani uchta α, β, γ noma'lum uchta algebraik tenglamalar sistemasi sifatida qarasak, bu sistemaning noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun bu sistemaning ushbu detirmentining

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (17.24.5)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

(17.24.5) tenglama, (17.24.2) sistemaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

(17.24.5) determinantni hisoblasak, natijada k ga nisbatan uchunchi darajali algebraik tenglama hosil bo'ladi. Bunda quydagi hollar bo'lishi mumkin:

1-hol. Xarakteristik tenglamaning ildizlari k_1, k_2, k_3 haqiqiy va har xil bo'lsin. Har bir $k_i, (i=1,2,3)$ uchun (17.24.4) sistemani yozib, uning koeffisientlari $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ larni topamiz. Natijada, k_1 ildiz uchun (17.24.2) sistemasining xususiy yechimlari

$$y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x}, y_3^{(1)} = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

k_2 ildiz uchun

$$y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}, y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}, y_3^{(2)} = \gamma_2 e^{k_2 x},$$

k_3 ildiz uchun

$$y_1^{(3)} = \alpha_3 e^{k_3 x}, y_2^{(3)} = \beta_3 e^{k_3 x}, y_3^{(3)} = \gamma_3 e^{k_3 x}$$

ko'rinishlarda bo'ladi. Osonlik bilan ko'rsatish mumkinki, bu funksiyalar fundamental sistemani tashkil qiladi. U holda (17.24.2) sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + c_2 \alpha_2 e^{k_2 x} + c_3 \alpha_3 e^{k_3 x}, \\ y_2 &= c_1 \beta_1 e^{k_1 x} + c_2 \beta_2 e^{k_2 x} + c_3 \beta_3 e^{k_3 x}, \\ y_3 &= c_1 \gamma_1 e^{k_1 x} + c_2 \gamma_2 e^{k_2 x} + c_3 \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned} \quad (17.24.6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

17.24.7-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + y_2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechilishi. Berilgan sistema uchun (17.24.2) xarakteristik tenglamasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki } k^2 - 2k - 3 = 0, k_1 = -1, k_2 = 3.$$

Berilgan sistemaning xususiy yechimlari

$$y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x}, y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x} \text{ va } y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x}, y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}$$

ko'rinishda izlaymiz. Endi α_i, β_i ($i=1,2$) larni topamiz. $k_1 = -1$ bo'lganda (17.24.4) sistemaning ko'rinishi

$$\begin{cases} (1 - (-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + (1 - (-1))\beta_1 = 0, \end{cases} \text{ ya'ni } \begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Bu sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Agar $\alpha = 1$ desak, $\beta = 2$ bo'ladi. Bu holda, xususiy yechimlar: $y_1^{(1)} = e^{-x}$ va $y_2^{(1)} = 2e^{-x}$ bo'ladi.

$k_2 = 3$ bo'lganda, (17.24.4) sistemasining ko'rinishi:

$$\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0, \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

$\alpha_2 = 1$ desak, $\beta_2 = -2$ bo'ladi. Bu holda xususiy yechimlari $y_1^{(2)} = e^{3x}$ va $y_2^{(2)} = -2e^{3x}$. Berilgan sistemaning umumiy yechimi (17.24.6) ga asosan,

$$y_1^{(2)} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \text{ va } y_2^{(2)} = 2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{3x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-hol. Xarakteristik tenglamaning yechimlari har xil, lekin ularning orasida kompleks: $k_1 = \alpha + i\beta$ va $k_2 = \alpha - i\beta$ bo'lgan hol. Xususiy yechimlarning ko'rinishi 1- holdagidek aniqlanadi.

3-hol. Xarakteristik tenglamaning ildizlari karrali bo'lgan hol.

Xarakteristik tenglama m ($m=2,3$) karrali k ildizga ega bo'lsin. Bu holda berilgan sistemaning yechimlarini:

1) agar $m=2$ bo'lsa, u holda

$$y_1 = (A + Bx)e^{kx}, y_2 = (C + Dx)e^{kx}, y_3 = (E + Fx)e^{kx};$$

2) agar $m=3$ bo'lsa, u holda xususiy yechimlarni

$$y_1 = (A + Bx + Cx^2)e^{kx}, y_2 = (D + Ez + Fx^2)e^{kx}, y_3 = (G + Hx + Nx^2)e^{kx}$$

ko'rinishda izlaymiz.

Yechim m ta ixtiyoriy o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. Bu $A, B, C, \dots, N$ koeffitsiyentlar aniqmas koeffitsiyentlar usuli orqali topiladi.

17.6-§. Operatsion hisob kursi elementlari

Operatsion hisob hozirgi vaqtda matematik analizning muhim sohalaridan biridir. Fizika, mexanika, elektronika, zanjirlar nazariyasi va boshqa fanlarda turli masalalarni yechishda operatsion hisob usullaridan foydalaniladi. Operatsion hisob hozirgi zamon avtomatik, impuls texnika va telemexanikasida keng qo'llaniladi. Operatsion hisob yordamida differensial tenglamalarni yechish mumkin. Differensial va integral tenglamalarni yechish, xosmas integralni hisoblash, qatorlarning yig'indisini topishda

integral almashtirishlar keng qo'llaniladi. Masalan, Furiye, Mellina, Laplas va boshqa almashtirishlar. Biz operatsion hisobning asosiy tushunchasi Laplas almashtirish haqida asosiy ma'lumotlarni keltiramiz.

17.25. Original va tasvir

17.25.1-ta'rif. Haqiqiy o'zgaruvchili $f(t) = u(t) + iv(t)$ kompleks funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1°. $(-\infty, \infty)$ oraliqda $f(t)$ o'zining n - tartibli hosilasi bilan birlikda bir qiymatli uzluksiz yoki bo'lakli uzluksiz.

2°. $t < 0$ uchun $f(t) = 0$;

3°. Shunday $M > 0$ va $s > 0$ musbat sonlar topiladiki, barcha $t > 0$ uchun $|f(t)| \leq Me^{st}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(t)$ funksiya *original* deyiladi.

17.25.2-eslatma. s songa $f(t)$ funksiyaning o'sish ko'rsatgichi deyiladi, 1°-3° shartlarga bo'ysinuvchi funksiya $K(s)$ sinf deb belgilaymiz. Masalan,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (5t-3)e^{2t}, & t > 0 \end{cases}$$

original bo'lib, $\forall t$ lar uchun $|f(t)| \leq Me^{(2+\varepsilon)t}$ bo'ladi. Bunda $s = 2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$ o'sish ko'rsatgichi, $f(t) \in K(2+\varepsilon)$.

17.25.3-ta'rif. Ushbu

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (17.25.4)$$

Laplas integrali bilan aniqlanadigan kompleks o'zgaruvchili $F(p)$ funksiya, $f(t)$ original funksiyaning *tasviri* yoki (17.25.4) ga Laplas almashtirishi deyiladi, original funksiya $f(t)$ dan tasviriga o'tish quyidagicha $L(f(t)) = F(p)$ yoki $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$ simvollar bilan, tasvirdan original o'tish esa, $L^{-1}\{F(p)\} = f(t)$ yoki $F(p) = L\{f(t)\}$ simvollar bilan belgilanadi.

Ba'zi bir funksiylarning tasvirini topamiz:

17.25.5-ta'rif. Ushbu

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

original funksiyaga Xeyisaydning birlik funksiyasi deyiladi.

Xeyisayd funksiyasining L -tasvirini topamiz:

$$\begin{aligned} L\{\eta(t)\} &= F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pa} \right). \end{aligned}$$

Agar $\operatorname{Re} p > 0$ bo'lsa, $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-pa} = 0$.

Demak, $\frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$ yoki $\eta(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} = F(p)$.

17.25.6-misol. $f(t) = e^{\lambda t}$ funksiyaning tasviri $F(p)$ ni Laplas almashtirish formulasiga asosan topamiz:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\lambda t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{(\lambda-p)t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\lambda-p} e^{(\lambda-p)t} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda-p} (e^{(\lambda-p)a} - 1).$$

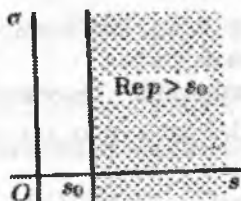
Agar $\operatorname{Re}(p-\lambda) > 0$ bo'lsa, $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-(p-\lambda)a} = 0$.

Shunday qilib,

$$e^{\lambda t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p-\lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda.$$

17.25.7-teorema (Tasvirning mavjudligi). $\operatorname{Re} p = s > s_0$ yarim tekislikda berilgan ixtiyoriy $f(t)$ asl funksiya uchun $F(p)$ tasvir funksiya mavjud va analitik bo'ladi.

Isbot. Teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz. $\operatorname{Re} p = s > s_0$ yarim tekislikdagi $p = s + i\delta$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin (17.1-chizma). Ushbu $|f(x)| \leq M e^{s_0 t}$ tengsizlikni e'tiborga olgan holda topamiz:



17.1-chizma.

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} |e^{-pt}| dy = M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \\
 &= M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \\
 s-s_0 > 0 \text{ va } e^{-pt} &= e^{-st} e^{-i\delta t} = e^{-pt} |\cos \delta t - i \sin \delta t| = e^{-pt}.
 \end{aligned}$$

Demak,

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s-s_0}.$$

Bundan (17.25.4) integralning absolyut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi, ya'ni $F(p)$ tasvir mavjud bo'ladi.

17.25.8-natija (Tasvir mavjudligining zaruriy sharti). Agar $F(p)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning tasviri bo'lsa, u holda $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

17.25.9-teorema (Yagonalik). Agar $F(p)$ funksiya ikkita $f_1(t)$ va $f_2(t)$ uzluksiz asl funksiyalar uchun tasvir funksiya bo'lsa, u holda asl funksiyalar aynan teng bo'ladi.

17.26. Laplas almashtirishlarning xossalari. Endi differensial tenglamalarni yechishda zarur bo'ladigan Laplas almashtirishlarning asosiy xossalari isbotsiz keltiramiz.

17.26. 1-teorema (chiziqlilik xossasi). $\{f_i(t)\}$ va $\{C_i\}$ lar n ta funksiya va n ta sonlar bo'lsin. Agar $f_i(t) = F_i(p)$, ($i=1,2,\dots,n$) bo'lsa, u holda

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p)$$

bo'ladi, ya'ni originallarning chiziqli kombinatsiyasiga tasvirlarning chiziqli kombinatsiyasi mos keladi va aksincha.

17.26.2-teorema (o'xshashlik teoremasi (original argumenti masshtabining o'zgarishi)). Agar $a > 0$ va $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ bo'lsa, u holda

$$f(at) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

bo'ladi.

17.26.3-teorema (Tasvirni saqlash xossasi). $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ bo'lsin. U holda istalgan p_0 uchun $e^{-p_0 t} f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p + p_0)$ o'rinli bo'ladi.

17.26.4-teorema (Originalning kechikish xossasi). Agar $t_0 > 0$ bo'lsa, u holda $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ dan $f(t - t_0) \stackrel{\cdot}{=} e^{-t_0 p} F(p)$ kelib chiqadi.

17.26.5-teorema (Originalning uzalashish xossasi). Agar $t_0 > 0$ bo'lsa, u holda $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ dan $f(t + t_0) \stackrel{\cdot}{=} e^{t_0 p} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right]$ kelib chiqadi.

17.26.6-teorema (Originalni differensiallash). $f(t)$ funksiya $[0, \infty)$ da uzluksiz differensiallanuvchi va $f'(t)$ hosila tasvir mavjudligining $1^0 - 3^0$ xossalari qanoatlantirsin. U holda:

a) agar $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ bo'lsa, u holda $f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0)$, xususan, agar $f(0) = 0$ bo'lsa, $f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p)$, ya'ni funksiyani differensiallashga tasvirni p ga ko'paytirish mos keldi.

b) agar $f^{(n)}(t)$ mavjud bo'lsa va $1^0 - 3^0$ xossalarga bo'ysunsa, u holda $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ dan $f^{(n)}(t) \stackrel{\cdot}{=} p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)]$ kelib chiqadi, xususan, agar $f(t)$ boshlang'ich nol shartlar $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ ni qanoatlantirsa, u holda $f^{(n)}(t) \stackrel{\cdot}{=} p^n F(p)$

17.26.7-teorema (Originalni integrallash). $f(t)$ funksiya $[0, \infty)$ da uzluksiz, tasvir mavjudligining $1^0 - 3^0$ shartlarni qanoatlantirsa va $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ bo'lsin. U holda

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p),$$

ya'ni funksiyani integrallash tasvirini p ga bo'lish mos keladi.

17.26.8-teorema (tasvirni differensiallash). $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$ bo'lsin, u holda:

$$\text{a) } -tf(t) \stackrel{*}{=} F'(p); \quad \text{b) } (-1)^n t^n f(t) \stackrel{*}{=} F^{(n)}(p).$$

17.26.9-teorema (tasvirni integrallash). $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$ va $\frac{f(t)}{t}$ kasr tasvir mavjudligining $1^0 - 3^0$ shartlarni qanoatlantirsin. U holda

$$\frac{f(t)}{t} \stackrel{*}{=} \int_p^\infty F(q) dq.$$

17.26.10-teorema (O'rama haqida teorema (tasvirlarni ko'paytirish teoremasi)). Bu teoremani bayon qilishdan avval o'rash amalini (yoki o'ramaning) ta'rifini keltirishga to'g'ri keladi. U $*$ simvoli bilan belgilanadi.

Biror $[\alpha, \beta]$ oralikda aniqlangan $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Ularning bu kesmadagi o'ramasi deb, ushbu

$$f(t) = \int_\alpha^\beta f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t)$$

tenglik bilan aniqlanadigan yangi $f(t)$ funksiyaga aytiladi. $[\alpha, \beta]$ kesma uchun $[0, t]$ kesmani olamiz.

Agar $f_1(t)$ va $f_2(t)$ lar $1^0 - 3^0$ shartlarni qanoatlantirsa, ular o'ramasining tasviri ko'paytuvchilar tasvirlarining ko'paytmasidan iborat bo'ladi, ya'ni $f_1(t) \stackrel{*}{=} F_1(p)$ va $f_2(t) \stackrel{*}{=} F_2(p)$ dan $f_1(t) * f_2(t) \stackrel{*}{=} F_1(p) F_2(p)$ kelib chiqadi.

17.26.11-teorema (Dyuamel teoremasi). Bu teorema oldingi teoremaning umumlashtirilgani sifatida qaralishi mumkin, u ikkita funksiya o'ramasi hosilasining tasviri uchun ifodasini beradi.

Agar $f_1(t)$, $f_2(t)$ funksiyalar $[0, \infty)$ da uzluksiz hosilalarga ega bo'lib va $f_1(t) \stackrel{*}{=} F_1(p)$, $f_2(t) \stackrel{*}{=} F_2(p)$ bo'lsa, u holda $\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] \stackrel{*}{=} p F_1(p) F_2(p)$.

17.27. Ba'zi elementar funktsiyalarning tasvirlari

№	Original	Tasvir
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5	$sh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6	$ch at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7	t	$\frac{1}{p^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

№	Original	Tasvir
9	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
11	$e^{-at} sh at$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 - \omega^2}$
12	$e^{-at} ch at$	$\frac{p+a}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
13	te^{-at}	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
14	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
15	$t \sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
16	$t \cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

17.28. Operatsion hisob usullarini differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga tatbiq etish

O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad (17.28.1)$$

bu tenglamaning

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (17.28.2)$$

boshlag'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish talab etiladi. Bunda $f(t)$ funksiya kabi izlanayotgan yechim ham Laplas bo'yicha tasvirning mavjudlik shartlariga bo'ysunadi deb faraz qilinadi. (17.28.1) tenglamaning ikkala qismiga Laplas almashtirishini tatbiq qilamiz.

$x(t)$ va $f(t)$ ning tasvirlarini mos ravishda $X(p)$ va $F(p)$ orqali belgilaymiz:

$$x(t) \doteq X(p), \quad f(t) \doteq F(p).$$

Originalni differensiallash qoidasini qo'llab quyidagini topamiz:

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0,$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - [px_0 + x_0'],$$

.....

$$x^{(n-1)}(t) \doteq p^{n-1} X(p) - [p^{n-2}x_0 + \dots + x^{(n-2)}],$$

$$x^{(n)}(t) \doteq p^n X(p) - [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \dots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}].$$

Laplas almashtirishining chiziqliligiga binoan chap tomonining tasvirini topish uchun hosil qilingan ifodalarni tegishli a_i koeffitsientlarga ko'paytirish va qo'shish kifoya, o'ng tomonining tasviri esa $F(p)$ ga teng. Shunday qilib, qo'yidagiga egamiz:

$$\varphi(p)X(p) - \psi(p) = F(p), \quad (17.28.3)$$

bu yerda

$$\varphi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

ifoda chiziqli tenglama uchun xarakteristik ko'phad, $\psi(p)$ esa

$$\begin{aligned} \psi(p) = & [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \dots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}] + \\ & + a_1[p^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{(n-2)}] + \dots + a_{n-2}[px_0 + x_0'] + a_{n-1}x_0 \end{aligned}$$

Nol boshlang'ich shartlarda $\psi(p) \equiv 0$ bo'lib, (17.28.3) tenglamaning chap tomonini $\varphi(p)X(p)$ ko'rinishni olishini qayd qilib o'tamiz, bunga (17.28.1) tenglamada differensiallash operatorini p ko'paytuvchi bilan almashtirib, $X(p)$ ni qavs tashqarisiga chiqarish orqali kelish mumkin. (17.28.3) tenglama boshlang'ich shartlar sistemasi (17.28.2) bo'lgan (17.28.1) tenglama uchun yordamchi tenglamadir. Uni yana tasvirllovchi (yoki operator) tenglama deb ham ataladi, (17.28.3) tenglamani $X(p)$ ga nisbatan yechib,

$$X(p) = \frac{F(p) + \psi(p)}{\phi(p)} \quad (17.28.4)$$

ko'rinishga ega bo'lgan tasvirlovchi yoki operator yechimini hosil qilamiz.

Originalga o'tish izlanayotgan $x(t)$ xususiy yechimni topishga imkon beradi. Bunda (17.28.4) operator yechimning o'ng tomoni odatda rasional kasr bo'lib chiqadi va tasvirlar jadvalidan foydalanishni yengillatish uchun o'ng tomonini elementar kasrlarga yoyish kerak.

17-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

17.1. Differensial tenglamalar to'g'risida umumiy tushunchalar. Differensial tenglama va uning yechimi tushunchasi ([1], 4-8 betlar, [2], 5-6 va 10-12 betlar; [3], 5-10 betlar).

17.2. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. ([1], 8-10 betlar; [2], 6-10 betlar).

17.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar ([2], 18-20 betlar; [3], 26-32 betlar).

17.4. O'zgaruvchilarga ajraladigan differensial tenglamalar. ([1], 10-11 betlar; [2], 19-21 betlar; [3], 32-40 betlar).

17.5. Birjinsli differensial tenglamalar ([1], 10-13 betlar; [2], 21-26 betlar; [3], 43-49 betlar).

17.6. Chiziqli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi ([1], 14-16 va 21-26 betlar; [2], 26-30 betlar; [3], 49-56 betlar).

17.7. To'liq differensialli differensial tenglamalar. Integrallovchi ko'paytuvchi

17.8. Lagranj va Klero tenglamalari ([1], 73-75 betlar; [3], 81-92 betlar)

17.9. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan tenglamalar [2], 103-121 betlar; [3], 110-116 betlar).

17.10. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar ([1], 88-91 betlar; [2], 134-155 betlar; [3], 133-138 betlar).

17.12. Ikkinchi tartibli chiziqli birjinsli differensial tenglamalar ([1], 122-125 betlar; [3], 156-157 betlar).

17.13. Ikkinchi tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalarni

Integrallash ([1], 125-131 betlar; [2], 161-166 betlar; [3], 156-162 betlar)

17.14. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning umumiy echimining ko'rinishi. O'zgarmasni variatsiyalash metodi ([1], 12-125 betlar; [2], 175-180 betlar; [3], 138-141 va 145-154 betlar)

17.15. Differensial tenglamalar sistemasi. Asosiy tushunchalar. Normal differensial tenglamalar sistemalarini integrallash ([1], 156-160 betlar; [2], 222-240 betlar; [3], 180-188 betlar)

17.16. Chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemalarini integrallash ([1], 156-170 betlar; [2], 283-293 betlar; [3], 203-209 betlar).

17.17. Original va tasvir ([4], 296-297 betlar).

17.26. Laplas almashtirishlarining xossalari ([4], 297-301 betlar).

17.27. Ba'zi elementar funksiyalarning tasvirlari ([4], 302-304 betlar).

17.28. Operatsion usullarini differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga tatbiq etish([4], 305-321 betlar).

17.1-amaliy mashg'ulot.

O'zgaruvchilari ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamalar

1-misol. Ushbu $y + xy' = 0$ differensial tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = \frac{dy}{dx}$ munosabatdan foydalanib berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $ydx + xdy = 0$. O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Integrallab topamiz: $\ln|x| + \ln|y| = \ln C$ yoki $y = \frac{C}{x}$. Oxirgi munosabat berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

2-misol. $y' = \frac{y}{x} - \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$ tenglama yeching.

Yechilishi. $u = \frac{y}{x}$ o'rniga qo'yishni bajarsak: $u + xu' = u - \operatorname{ctg} u$ hosil bo'ladi. Bu yerdan $x \frac{du}{dx} = -\operatorname{ctg} u$, $-\frac{du}{\operatorname{ctg} u} = \frac{dx}{x}$. Oxirgi munosabatni integrallab

$$\ln|\cos u| = \ln|x| + \ln C \text{ yoki } u = \arccos Cx$$

$u = \frac{y}{x}$ dan foydalanib tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz:

$$y = x \arccos Cx.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarni yeching.

1. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$.
2. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.
3. $xyy' = 1 - x^2$.
4. $e^y(1+y') = 1$.
5. $y'(1+y) = x \sin x$.
6. $y' - xy^2 = 0$.
7. $2\sqrt{y}dx - dy = 0, y(0) = 1$
8. $y' = 8\sqrt{y}, y(0) = 4$
9. $y' \sin x - y \ln y = 0, \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
10. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0, y(1) = 2$

11. Differensial tenglamani o'zgaruvchini almashtirish yo'li bilan yeching

- a) $y' = y \sin x^2$;
- b) $(2x-y)dx + (4x-2y+3)dy = 0$
- c) $y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$;
- g) $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(0) = 1$;
- d) $y' = 3x - 2y + 1$;
- e) $y' = \cos(y-x)$

Birinci tartibli bir jinsli differensial tenglamalarni yeching.

12. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.
14. $y = xy' - xe^x$.
15. $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$.
16. $y' = \frac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$.
17. $ss' - 2s + t = 0$.
18. $x^2 + y^2 = 2xyy'$.
19. $\sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y})dx + xdy = 0$.

20. Bir jinsliga keltiriladigan differensial tenglamalarni yeching.

- a) $y' = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$;
- b) $y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $(1-x)(1+y) = C$.
2. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.
3. $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.
4. $y + \ln|y| = \sin x - x \cos x + C$.
5. $y = \ln(1 + Ce^{-x})$.
6. $y = -\frac{2}{C+x^2}$.
7. $y = (x+1)^2$.
8. $y = (4x+2)^2$.
9. $y = 1$.
10. $\frac{x+y}{1-xy} = -3$.

$$11. a) y = Ce^{\int \sin x^2 dx} \quad b) 5x + 10y + C = 3 \ln |10x - 5y + 6|;$$

$$c) tg \frac{y}{2} = C \left(tg \frac{y}{2} + 1 \right) \left(1 - tg \frac{x}{2} \right); \quad g) y = 1, x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1;$$

$$d) 4y - 6x + 1 = Ce^{-2x}; \quad e) ctg \frac{y-x}{2} = x + C, y - x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$12. y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}. \quad 13. y^2 = 2x^2 \ln \frac{C}{x}. \quad 14. e^{\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0. \quad 15. y = xe^{Cx+1}.$$

$$16. y = x \ln^2 Cx. \quad 17. \frac{t}{s-t} = \ln C(s-t). \quad 18. x^2 - y^2 = Cx. \quad 19. y = x \ln^2 \frac{C}{x}.$$

$$20. a) x - y + C = \ln |3x - 4y + 1|; \quad b) (y-x)e^{\frac{2x-2}{y-x}} = C, y = x.$$

17.2-amaliy mashg'ulot.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.

Bernulli differensial tenglamasi

1-misol. $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topib olaylik

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \quad y = C_1 \sin x.$$

Endi o'zgarmasni variatsiyalaymiz, ya'ni berilgan tenglamaning yechimini $y = C_1(x)$ ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $C_1(x)$ hozircha noma'lum funksiya.

$$y = C_1(x) \sin x, y' = C_1'(x) \sin x + C_1(x) \cos x,$$

differensial tenglamani qo'yib quyidagini olamiz

$$C_1'(x) \sin x + C_1(x) \cos x - C_1(x) \cos x = \frac{1}{\sin x},$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad C_1(x) = x^2 + C_2, \quad y = (x^2 + C_2) \sin x,$$

$$y = (C_2 - \text{ctgx})\sin x, \quad C_1(x) = -\text{ctgx} + C_2$$

Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = C_2 \sin x - \cos x$ ko'rinishda ekan.

2-misol. $xy' = y - 3x^2y^2$ differensial tenglama o'zgarmasni variatsiyalash (Lagranj usuli) va Bernulli usullarida integrallang.

Yechilishi (Lagranj usuli). Bir jinsli differensial tenglamani qaraymiz $xy' = y$. Bu differensial tenglamaning umumiy yechimi $y = Cx$. Faraz qilaylik $y = C(x)x$, u holda $y' = C'(x) + xC''(x)$. Bularni berilgan tenglamaga qo'yib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$x[C'(x) + xC''(x)] = C(x)x - 3x^2C^2(x)x^2 \text{ yoki } C''(x) = -3x^2C^2(x).$$

Bu ifodani integrallab, topamiz

$$\int \frac{dC}{C^2} = -3 \int x^2 dx - C^*, \quad -\frac{1}{C(x)} = -x^3 - C^*, \quad C(x) = \frac{1}{x^3 + C^*}$$

Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = x \cdot C(x) = \frac{x}{x^3 + C^*}.$$

Bernulli usuli. $y = u(x)v(x)$, $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ larni differensial tenglamaga qo'yamiz:

$$x x[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] = u(x)v(x) - 3x^2u^2(x)v^2(x)$$

yoki

$$\begin{cases} xu' - u = 0 \\ v' = -3xuv^2 \end{cases}$$

Bu yerda $xu' = u$ differensial tenglamani integrallab $u = x$ xususiy yechimini tanlaymiz, so'ngra ikkinchi differensial tenglamani $v' = -3xuv^2$, $v' = -3x^2v^2$ ni integrallaymiz $\frac{dv}{v^2} = -3x^2 dx$. Bu yerdan $v(x) = \frac{1}{x^3 + C^*}$ ni

topamiz. U holda berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:
 $y = u \cdot v = \frac{x}{x^3 + C}$.

3-misol. Misolni Maple tizimidan foydalanib, yechish:

$$y' + y \cos x = \sin x \cos x.$$

> restart;

> de:=diff(y(x),x)+y(x)*cos(x)=sin(x)*cos(x);

$$de := \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$$

> dsolve(de,y(x));

$$y(x) = \sin(x) - 1 + e^{(-\sin(x))} _C1$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Birinci tartibli chiziqli va Bernulli differensial tenglamalarini yeching

1. $y' + 2y = 3e^x$.

2. $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

3. $2(x+y^4)y' - y = 0$.

4. $y^2 dx + (xy-1)dy = 0$.

5. $xy' + y = \frac{y^2}{2} \ln x$.

6. $y' + 2xy = 2xy^3$.

7. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{2} \ln x$.

8. $x \frac{dy}{dx} + y = 4x^3$.

9. $y'e^{x^2} - (xe^{x^2} - y^2)y' = 0$.

10. $x^3 y^2 y' + x^2 y^3 = 1$.

11. $y' x^3 \sin y - xy' + 2y = 0$.

12. $y' - y = \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x$.

13. $y' + \frac{x}{1-x^2}y = 2$.

14. $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

15. $xy' - y - x^3 = 0, y(2) = 4$.

16. $y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $y = Ce^{-2x} + e^x$. 2. $y = \frac{x^3 + C}{x^2 + 1}$. 3. $x = y^4 + Cy^2, y = 0$

4. $x = \frac{\ln y + C}{y}, y = 0$. 5. $y = \frac{2}{\ln x + Cx + 1}$. 6. $y = \frac{1}{\sqrt{Ce^{2x^2} + 1}}, y = 0$.

$$7. y = [xC_1 - 0,25x \ln^2 x]^{-1}. \quad 8. y = x^3 + \frac{C}{x}. \quad 9. y^2(2x + C) = e^{x^2}, y = 0.$$

$$10. y = \frac{\sqrt[3]{3x+C}}{x}. \quad 11. x^2 = \frac{y}{C - \cos y}, y = 0. \quad 12. y = e^x \left(C + \ln x + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$13. y = \sqrt{1-x^2} (2 \arcsin x + C). \quad 14. y = (x+C) e^{\frac{x}{2}}.$$

$$15. y = \frac{1}{2} x^3. \quad 16. y = 2 \sin x - \cos x.$$

17.3-amaliy mashg'ulot.

To'liq differensial tglama. Klero va Lagranj tglamalari

1-misol. Ushbu $2x \cos^2 y dx + (8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y) dy = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechilishi. Bu misolda $M(x, y) = 2x \cos^2 y$, $N(x, y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y$. Bundan ko'rinadiki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2x \cos^2 y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = 8\sqrt[3]{y} - x^2 \sin 2y,$$

$y \neq 0$ shartda

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(-2 \sin y \cos y) = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin 2y.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarildi. Berilgan tenglamaning chap qismi qandaydir $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialini ifodalaydi.

(x_0, y_0) nuqta sifatida koordinatalar boshini olib, (17.8.7) formulaga asosan, umumiy yechimni topamiz:

$$\int_0^x 2x \cos^2 y dx + \int_0^y 8\sqrt[3]{y} dy = C \quad \text{yoki} \quad x^2 \cos^2 y + 6y\sqrt[3]{y} = C.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

To'liq differensial tenglamani yeching

$$1. (3x - 5x^2 y^2) dx + \left(3y^2 - \frac{10}{3} x^3 y \right) dy = 0.$$

$$2. (x \cos 2y - 3) dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$$

$$3. (2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, y(0) = 1.$$

$$4. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0, y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

$$5. (x^2 + 2xy + 1)dx + (x^2 + y^2 - 1)dy = 0.$$

$$6. \sin(x + y)dx + x \cos(x + y)(dx + dy) = 0.$$

$$7. (3x^2 + 3x^2 \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y} \right) dy = 0.$$

$$8. 3x^2y + \sin x = (\cos y - x^3)y'.$$

$$9. (3x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, y(0) = 0$$

$$10. (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0, y(1) = -1.$$

$$11. \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Klero va Lagranj teglamalarini yeching .

$$12. y = \sqrt{1 - y'^2} + y'.$$

$$13. y' = \ln(xy' - y).$$

$$14. 2yy' - x(y'^2 + 4) = 0.$$

$$15. y = y'^2 e^{y'}.$$

$$16. y' + y - xy'^2 = 0.$$

$$17. y = xy' + y' + \sqrt{y}$$

$$18. xy' - y = \ln y'.$$

Tenglamani integrallovchi ko'paytuvchi usulidan foydalanib yeching

$$19. (3x + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

$$20. 4xydx + (y^3 + 4x^2)dy = 0.$$

$$21. (xy - 4)dx + x^2dy = 0.$$

$$22. \frac{6x + y^3}{x} dx - 3y^2 dy = 0.$$

$$23. 2ydx + (x + 7y^3)dy = 0.$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

$$1. \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3y^2 + y^3 = C. 2. \frac{x^2}{2}\cos 2y - 3x = C. 3. x^2 + y + e^{xy} = 2.$$

$$4. \sqrt{x^2 + y^2} + xy = 4. 5. x^3 + y^3 + 3x^2y + 3x - 3y = C.$$

$$6. x \sin(x + y) = C. 7. x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C. 8. x^3y - \cos x - \sin y = C.$$

$$9. x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1. 10. x^3 + 3x^2y - y^3 + 1 = 0. 11. \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctg \frac{x}{y} = C.$$

$$12. \begin{cases} x = \ln p - \arcsin \frac{p}{p^2} + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases} 13. y = Cx - e^C, y = x \ln x - x.$$

$$14. y = Cx^2 + \frac{1}{C}, y = \pm 2x. 15. \begin{cases} x = (p+1)e^p + C, \\ y = p^2 e^p, \end{cases} y = 0.$$

$$16. \begin{cases} y = xp^2 - p, \\ x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}. \end{cases} 17. y = Cx + C + \sqrt{C}, y = -\frac{1}{4(x+1)}.$$

$$18. y = Cx - \ln C, y = \ln x + 1. 19. \mu = 14/x^2; y^2 = x(3\ln|x| + C)$$

$$20. \mu = y; 10x^2y^2 + y^5 = C. 21. \mu = 1/x; xy - 4\ln|x| = C.$$

$$22. \mu = 1/x; 6\ln|x| - y^3/x = C. 23. \mu = 1/\sqrt{y}; x\sqrt{y} + y^3\sqrt{y} = C$$

17.4-amaliy mashg'ulot.

Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar

1-misol. Ushbu $xy'' = y' \sin \frac{y'}{x}$ tenglamaning umumiy yechimi toping.

Yechilishi. $y' = p$, $y'' = p'/\text{deb}$ belgilash kiritib, $xp' = p \ln \frac{p}{x}$ yoki $p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$ tenglamani hosil qilamiz. Bu bir jindli tenglamadir.

Bu tenglamani yechish uchun $p = ux$ almashtirib olamiz, natijada tenglama $xu' + u = u \ln u$ yoki $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u(\ln u - 1)}$ ko'rinishida bo'ladi. Bu tenglamani integrallaymiz: $u = e^{C_1 x + 1}$. Bundan $y' = x e^{C_1 x + 1}$. Birinchi tartibli differensial tenglamani bo'laklab integrallaymiz:

$$y = \int x e^{C_1 x + 1} dx = \frac{1}{C_1} x e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2.$$

2-misol. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$ tenglamani yeching.

Yechilishi. $y' = p(y)$, $y'' = pp'$ bo'lgani uchun $p \frac{dx}{dy} \operatorname{tg} y = 2p^2$ yoki $\frac{dp}{p} = 2 \frac{dy}{\operatorname{tg} y}$. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir

$$\ln|p| = 2 \ln|\sin y| + \ln C_1 \text{ yoki } p = C_1 \sin^2 y$$

p ni $\frac{dy}{dx}$ almashtirib, endi $\frac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 y$ yoki $\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$ tenglamadan $\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2$ umumiy yechimini topamiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi differensial tenglamalarni umumiy yechimini toping.

1. $y'' = \sin 4x + 2x - 3$.

2. $y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3$

3. $y'' = xe^{x^2} + 3^{-x}$.

4. $y'' = 4\cos^4 x + 2\sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{x+2}$

5. $y'' = (e^{2x} + \sin 3x)x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$y' = p$ almashtirish yordamida quyidagi differensial tenglamalarni umumiy yechimini toping.

6. $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$.

7. $(x+1)y'' = y' - 1$.

8. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

9. $y'' + y'(\operatorname{tg} x - \sin 2x) = 0$.

10. $xy'' - y' = x^2e^x$.

11. $xy'' \ln x = y'$.

12. $y'' \operatorname{tg} x - y' - 1 = 0$.

13. $xy'' + y' + x = 0$.

14. $(1+x^2)y'' + 2xy' - x^3 = 0$.

$y'' = p'p$ almashtirish yordamida quyidagi differensial tenglamalarni umumiy yechimini toping.

15. $y''y^3 = 1$.

16. $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

17. $1 + (y')^2 - 2yy'' = 0$.

18. $yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

19. $y'' = y'(1 + (y')^2)$.

20. $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $y = -\frac{1}{16}\sin 4x + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$.

2. $y = \frac{1}{25}e^{5x} - \cos x - \frac{1}{10}x^5 + C_1x + C_2$.

3. $y = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx + \frac{3^{-x}}{\ln^2 3} + C_1x + C_2$.

4. $y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{32} + \cos x + \frac{4}{15}\sqrt{(x+2)^5} + C_1x + C_2$

5. $y = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + \frac{5}{4}x + \frac{143}{108}$.

6. $y = \frac{x^5}{5} + C_1x^3 + C_2$.

7. $y = C_1(x+1)^2 + x + C_2$.

8. $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$.

$$9. y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2. \quad 10. y = (x-1)e^x + C_1 x^2 + C_2$$

$$11. C_1 x (\ln x - 1) + C_2. \quad 12. y = -C_1 \cos x + C_2.$$

$$13. y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2. \quad 14. y = \frac{C_1}{2} \left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{\frac{x+C_2}{C_1}} \right)$$

$$15. C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2. \quad 16. y = \frac{C_1}{2} \left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{\frac{x+C_2}{C_1}} \right)$$

$$17. (x - C_1)^2 = 4C_2(y - C_2) \quad 18. y \cos^2(x + C_1) = C_2$$

$$19. y = \pm \arcsin e^{x+C_1} + C_2 \text{ va } y = C. \quad 20. y = x$$

17.5-amaliy mashg'ulot.

Bir jinsli bo'lgan chiziqli differensial tenglamalar

1-misol. Ushbu $y'' - 5y' + 6y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Dastavval xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

$$k_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Xususiy yechimlar: $y_1 = e^{2x}$ va $y_2 = e^{3x}$ ko'rinishda bo'lib fundamental yechimlar sistemasini hosil qiladi. Haqiqatdan ham

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{2x} e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = e^{(2+3)x} (3-2) = e^{5x} \cdot 1 = e^{5x} \neq 0.$$

Demak, (17.20.3) ga asosan, qarayotgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ bo'ladi.

2-misol. Ushbu $y'' + y''' + 4y'' + 4y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^4 + k^3 + 4k^2 + 4k = 0 \text{ yoki } k(k+1)(k^2 + 4) = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari $k_1 = 0, k_2 = -1, k_{3,4} = \pm 2i$.

Demak, (17.20.3) ga asosan, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Funksiyalarni chiziqli bog'liq yoki erkli ekanligini tekshiring.

1. $\arcsin x$, $\arccos x$.

2. $\sin x$, $\sin 2x$.

3. e^x , e^{x^2} .

4. 1 , x .

5. $\sin x$, $\sin^2 x$.

6. $\sin x \cos x$, $\sin 2x$.

7. $1 - \cos 2x$, $\sin^2 x$.

8. $1 + \cos 2x$, $\cos^2 x$.

Quyidagi o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalarni umumiy yechimini toping.

9. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

10. $2y'' + 5y' - 7y = 0$.

11. $y'' + 4y' - 3y = 0$.

12. $3y'' + y' - 2y = 0$.

13. $y'' + 25y' = 0$.

14. $4y'' - 9y' = 0$.

15. $4y'' - 4y' + y = 0$.

16. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

17. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

18. $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

19. $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

20. $y'' + 4y = 0$.

21. $4y'' + 9y = 0$.

22. $y'' + y' + y = 0$.

23. $y'' - y' + 6y = 0$.

24. $2y'' - 3y' + 5y = 0$.

25. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

26. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

27. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

28. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

29. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

30. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

31. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

32. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

33. $9y'' + 6y' = 0$.

34. $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

35. $5y'' + y = 0$.

36. $5y'' + y' = 0$.

37. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

38. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

39. $y''' + 2y'' + y = 0$.

40. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

41. $y^{IV} - 16y = 0$.

42. $y^{IV} + y = 0$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. Chiziqli bog'lanmagan. 2. Chiziqli bog'lanmagan. 3. Chiziqli bog'lanmagan. 4. Chiziqli bog'lanmagan. 5. Chiziqli bog'lanmagan. 6. Chiziqli bog'lanmagan. 7. Chiziqli bog'liq. 8. Chiziqli bog'liq.

$$9. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. 10. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{7}{2}x}. 11. y = C_1 e^{(-2+\sqrt{7})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{7})x}.$$

$$12. y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}. 13. y = C_1 + C_2 e^{-25x}. 14. y = C_1 + C_2 e^{\frac{9}{4}x}.$$

$$16. y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}. 17. y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}.$$

$$18. y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2}x}. 19. y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{2}{3}x}. 20. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$$21. y = C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x. 22. y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) e^{\frac{x}{2}}.$$

$$23. y = \left(C_1 \cos \frac{5}{2}x + C_2 \sin \frac{5}{2}x \right) e^{\frac{x}{2}}. 24. y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{31}}{4}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{31}}{4}x \right) e^{\frac{3}{4}x}.$$

$$25. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. 26. y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

$$27. y = 9 - 2e^{-4x}. 28. y = 2xe^{3x}. 29. y = (2+x)e^{-\frac{1}{2}x}. 30. y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

$$31. y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. 32. y = (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) e^{-2x}. 33. y = C_1 + C_2 e^{\frac{2}{3}x}.$$

$$34. y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{3}{2}x}. 35. y = C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{5}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{5}}. 36. y = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{5}}.$$

$$37. y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}. 38. y = C_1 + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) e^{-2x}.$$

$$39. y = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^{-x}. 40. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x.$$

$$41. y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

$$42. y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right).$$

17.6-amaliy mashg'ulot.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar

1-misol. $y'' - 5y' + 6y = 2x + e^x$ tenglamaning ushbu boshlang'ich shartda

$$y(0) = \frac{16}{9}, \quad y'(0) = \frac{5}{6} \text{ xususiy yechimini toping.}$$

Yechilishi. 1) Berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamani umumiy yechimini topamiz. $y'' - 5y' + 6y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Bu tenglamani yechimi:

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

$$k_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

U holda

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2) Berilgan tenglamaning xususiy yechimini aniqlaymiz. Uning o'ng tomoni

$$f(x) = 2x + e^x$$

bo'lgani uchun $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = e^x$ deb olamiz va ikkita:

$$L(y) = 2x, \quad L(y) = e^x.$$

bir jinslimas tenglamalarni qaraymiz. Bu yerda $L(y) = y'' - 5y' + 6y$. Birinchi tenglama $L(y) = 2x$ uchun $\alpha = 0, \beta = 0; \alpha + i\beta = 0$ dan $n = 0, m = 1, s = 0, l = \max(m, s) = 1$ kelib chiqadi. U holda

$$y_1^* = x^0 \cdot e^{0x} [F_1(x) \cos 0 + E_1(x) \sin 0] = F_1(x) = Ax + B$$

Bundan hosilalar olib tenglamaga qo'ysak

$$0 - 5A + 6Ax + 6B = 2x,$$

$$\left. \begin{aligned} 6A &= 2 \\ -5A + 6B &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= 1/3 \\ 6B &= 5A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \\ B &= \frac{5}{18} \end{aligned} \right.$$

$$\text{Demak, } y_1^* = \frac{1}{3} \left(x + \frac{5}{6} \right).$$

Ikkinchi tenglama $L(y) = e^x$ uchun $\alpha = 1, \beta = 0; \alpha + i\beta = 1$ dan $n = 0, m = 0, s = 0, l = \max(m, s) = 0$ kelib chiqadi. U holda

$$y_2^* = x^0 e^x [F_0(x) \cos 0 + E_0(x) \sin 0] = e^x F_0(x) = A_0 e^x.$$

Hosilalari esa: $y_2^{*'} = A_0 e^x, \quad y_2^{*''} = A_0 e^x$. U holda $L(y) = e^x$ dan:

$$A_0 e^x - 5A_0 e^x + 6A_0 e^x = e^x \Rightarrow 2A_0 = 1, \quad A_0 = \frac{1}{2}.$$

Demak, $L(y) = e^x$ tenglamaning xususiy yechimi: $y_2^* = \frac{1}{2} e^x$.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} \left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} e^x.$$

ko'rinishida bo'ladi. Xususi yechimni $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax + B + A_0 e^x$ ko'rinishda izlab topsak ham bo'ladi.

3) Endi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususi yechimni aniqlaymiz. Umumiy yechimdan hosila olib

$$\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} \left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} e^x, \\ y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^x \end{cases}$$

Boshlang'ich shartdan foydalanamiz:

$$\begin{cases} \frac{16}{9} = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{5}{18} + \frac{1}{2} e^0 \\ \frac{5}{6} = 2C_1 e^0 + 3C_2 e^0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^0. \end{cases}$$

Bu yerdan

$$\left. \begin{aligned} \frac{16}{9} &= C_1 + C_2 + \frac{14}{18}, \\ \frac{5}{6} &= 2C_1 + 3C_2 + \frac{5}{6}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 2C_1 = -3C_2, \end{cases} \quad C_1 = -\frac{3}{2}C_2,$$

$$\left(1 - \frac{3}{2}\right)C_2 = 1, \quad -\frac{1}{2}C_2 = 1, \quad C_2 = -2.$$

$$C_1 = 1 - C_2 = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3.$$

Natijada, berilgan masalaning izlanayotgan xususi yechimi quyidagicha yoziladi:

$$y = 3e^{2x} - 2e^{3x} + \frac{1}{3} \left(x + \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} e^x.$$

2-misol. Misolni Maple tizimidan foydalanib, yechish:

$$y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}.$$

> restart;

$$> \text{deq} := \text{diff}(y(x), x\$2) - 2 * \text{diff}(y(x), x) + y(x)$$

$$= \sin(x) + \exp(-x);$$

$$\text{deq} := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) = \sin(x) + e^{-x}$$

> dsolve(deq, y(x));

$$y(x) = -C1 e^x + -C2 e^x x + \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{4} e^{-x}$$

3-misol. $y^{(4)} + y'' = 2 \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

> de := diff(y(x), x\$4) + diff(y(x), x\$2) = 2 * cos(x);

$$de := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) = 2 \cos(x)$$

> cond := y(0) = -2, D(y)(0) = 1, (D@@2)(y)(0) = 0,

(D@@3)(y)(0) = 0;

cond := y(0) = -2, D(y)(0) = 1, (D⁽²⁾)(y)(0) = 0, (D⁽³⁾)(y)(0) = 0

> dsolve({de, cond}, y(x));

$$y(x) = -2 \cos(x) - x \sin(x) + x$$

Mustaqil yechish uchun misollar

O'zgarmas ko'effisiyentli chiziqli bir jinslimas differensial tenglamalarni aniqlamas ko'effisiyentlar usulidan foydalanib umumiy yechimini toping

1. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

3. $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$.

4. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

5. $y'' + 4y' - 5y = 1$.

6. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

7. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

8. $2y'' + 5y' = 29 \cos x$.

9. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$.

10. $y'' - 2y' - 8y = -8 \cos 2x$.

11. $y'' + 4y' + 4y = (2x + 3) \sin x + \cos x$.

12. $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)e^x$.

O'zgarmas ko'effisiyentli chiziqli bir jinslimas differensial tenglamalarni boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

13. $y''+y=4x^x, y(0)=-2, y'(0)=0.$
14. $y''+y=4\sin x, y(0)=1, y'(0)=2.$
15. $y''-2y'-3y=e^{4x}, y(0)=\frac{26}{5}, y'(0)=\frac{39}{5}.$
16. $y''+2y'-3y=48x^2e^x, y(0)=1, y'(0)=-\frac{3}{2}.$
17. $y''+4y'+4y=32xe^{2x}, y(0)=-1, y'(0)=1.$
18. $y''-y=2e^x-x^2, y(0)=2, y'(0)=1.$
19. $y''+3y'+2y=2\sin 3x+6\cos 3x, y(0)=y'(0)=0.$
20. $y''+9y=6\cos 3x, y(0)=1, y'(0)=3.$
21. $y''-y'=\frac{1}{1+e^x}, y(0)=1, y'(0)=2.$
22. $4y''+y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, y(\pi)=3, y'(\pi)=\frac{1}{2}.$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{5}{3}e^{-x}.$ 2. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}.$
3. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}.$ 4. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+x+1.$
5. $y=C_1e^x+C_1e^{-5x}-\frac{1}{5}.$ 6. $y=C_1e^x+C_2e^{\frac{1}{2}x}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}.$
7. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5}{74}\sin x+\frac{7}{74}\cos x. y_x=A\sin x+B\cos x$
8. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+5\sin x-2\cos x. y_x=A\sin x+B\cos x$
9. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\left(\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos x\right)e^{2x}. y_x=e^{2x}(A\sin 2x+B\cos 2x)$
10. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}+\frac{3}{5}\cos 2x+\frac{1}{5}\sin 2x. y_x=A\cos 2x+B\sin 2x$

$$11. y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{6}{25}x - \frac{57}{125}\right)\sin x - \left(\frac{8}{25}x + \frac{1}{25}\right)\cos x.$$

$$12. y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + (x \sin x + \cos x)e^x. y_x = [(4x + D) \sin x + (Cx +$$

$$13. y = (2x - 2)e^x. 14. y = \cos x + 4 \sin x - 2x \cos x.$$

$$D) \cos x]e^x. 15. y = 2e^{-x} + 3e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}. 16. y = e^{-3x} + \left(4x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x\right)e^x.$$

$$17. y = xe^{-2x} + (2x - 1)e^{2x}. 18. y = xe^x + x^2 + 2.$$

$$19. y = \frac{6}{13}e^{-2x} + \frac{4}{13}\sin 3x - \frac{6}{13}\cos 3x. 20. y = \cos 3x + (x + 1)\sin 3x.$$

$$21. y = (1 + e^3)\ln(1 + e^x) + e^x(3 - \ln 2 - x) - (x + 2 + \ln 2).$$

$$22. y = 3\cos \frac{x}{2} + 3\sin \frac{x}{2} + 4\sin \frac{x}{2} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

17.7-amaliy mashg'ulot.

Differensial tenglamalar sistemasi

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

differensial tenglamalar sistemasining boshlang'ich sharti $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechilishi. Sistema birinchi tenglamasining ikkala qismini t bo'yicha differensiallaymiz.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

Bu yerda $\frac{dy}{dt}$ ning o'rniga sistemaning ikkinchi tenglamasidan qo'ysak:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + y + x - y$$

yoki

$$\frac{d^2 x}{dt} = 2x.$$

Bu tenglama uchun xarakteristik tenglama (17.20.2) ga ko'ra quyidagicha bo'ladi.

$$k^2 - 2 = 0; k^2 = 2, k_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad k_1 = -\sqrt{2}; k_2 = \sqrt{2};$$

U holda (17.20.3) ga asosan tenglamaning umumiy yechimi:

$$x(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t}$$

Sistemaning birinchi tenglamasidan $y = \frac{dx}{dt} - x$ bo'lgani uchun:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t})$$

U holda $y(t) = -C_1 e^{-\sqrt{2}t}(\sqrt{2} + 1) + C_2 e^{\sqrt{2}t}(\sqrt{2} - 1)$

Shunday qilib sistemaning umumiy yechimi

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t}, \\ y(t) &= -C_1 e^{-\sqrt{2}t}(\sqrt{2} + 1) + C_2 e^{\sqrt{2}t}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned} \right\}$$

Masalaning boshlang'ich shartlaridan foydalanib, C_1 va C_2 o'zgarmas koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Shu maqsadda ushbu

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^{-\sqrt{2} \cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2} \cdot 0}, \\ 0 = -C_1 e^{-\sqrt{2} \cdot 0} \cdot (\sqrt{2} + 1) + C_2 e^{\sqrt{2} \cdot 0} \cdot (\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ (\sqrt{2} + 1)C_1 - (\sqrt{2} - 1)C_2 = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ \sqrt{2}(C_1 - C_2) + (C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 - C_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

hadma-had qo'shsak: $2C_1 = 2 - \sqrt{2}$; $C_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,

hadma-had ayirsak: $2C_2 = 2 + \sqrt{2}$; $C_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. U holda, masalaning xususiy yechimi quyidagi

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\sqrt{2}t}, \\ y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-e^{-\sqrt{2}t} + e^{\sqrt{2}t}) \end{aligned} \right\}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-misol. Misolni Maple tizimidan foydalanib, yechish:

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

> sys:=diff(x(t),t)=-4*x(t)-2*y(t)+2/(exp(t)-1),

diff(y(t),t)=6*x(t)+3*y(t)-3/(exp(t)-1):

> dsolve({sys},{x(t),y(t)});

{x(t)=-3_C1+4C1_e^(-t)-2C2_+2C2_e^(-t)+2e^(-t)ln(e^t-1),

y(t)=6_C1-6_C1e^(-t)-3_C2e^(-t)+4_C2-3e^(-t)ln(e^t-1)}.

Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamalar sistemasini yeching:

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 3x + -2y \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2$

3. $\begin{cases} x' + 5x + y = e^t \\ y' - x - 3y = e^{2t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x, \\ x' = \cos t - y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y'' = 3x + z, \\ z' = 3x + y \end{cases}$

$$7. \begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = y \\ y' = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

$$1. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \frac{1}{2} e^t (2C_1 + C_2 + 2C_2 e^t), \\ y = e^t (C_1 + C_2 t); \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{e^t}{2} \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3} e^t \right), \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11} e^t + \frac{1}{6} e^t, \\ y = (-4 + \sqrt{15})C_1 e^{(-1-\sqrt{15})t} - (4 - \sqrt{15})C_2 e^{(1-\sqrt{15})t} - \frac{1}{11} e^t - \frac{7}{6} e^{2t}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^t + C_3 e^{-2t} \\ z = C_1 e^t - (C_2 + C_3) e^{-2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_{00} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y_{00} = C_1 e^t + 3C_2 e^{-3t} + \cos t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = -C_2 e^{2t} + \frac{2}{3} C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}, \\ z = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t} \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x = C_1 + 3C_2 e^{2t}, \\ y = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t (e^t - e^{-t}), \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) + \frac{t}{2} (e^t + e^{-t}). \end{cases}$$

17.8-amaliy mashg'ulot. Operatsion hisob

1-misol. Ushbu

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

funksiya original funksiya bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. $f(t)$ funksiya lokal integrallanuvchi, ya'ni har qanday (t_1, t_2) chekli oraliqda integral

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t} \sin 3t \, dt$$

mavjud. Misol shartidan kelib chiqib 2^0 - shart bajariladi, ya'ni $t < 0$ bo'lganda $f(t) = 0$. $\exists M$ va $\exists S_0 > 1$, $S_0 = 2$ mavjudki barcha haqiqiy t lar uchun

$$|e^{2t} \sin 3t| \leq e^{2t}$$

Demak, berilgan funksiya original ekan.

2. Quyidagi funksiyalar original funksiyalar bo'lishini ko'rsating:

$$1) f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t), \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

$$2) f(t) = e^{-t} \cos t \eta(t), \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

3-misol. Ta'rifdan foydalanib, Ushbu $f(t) = e^{2t}$ funksiyaning tasvirini toping.

Yechilishi. $f = e^{2t}$ funksiya uchun $S_0 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun $F(p)$ tasvir funksiya $\operatorname{Re} p > 2$ yarim tekislikda aniqlangan va analitik. Laplas almashtirishidan foydalanib, tasvir funksiyasini topamiz:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-pt} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t} \, dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-(p-2)t} \, dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{p-2} e^{-(p-2)t} \right|_0^a = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-p} (e^{-(p-2)a} - e^0) = \frac{1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p = s > 2) \end{aligned}$$

Demak, $F(p) = \frac{1}{p-2} = e^{2t} = f(t)$. Bu funksiya $p=2$ nuqtadan tashqari qolgan barcha $\operatorname{Re} p > 2$ tekislikda analitik.

4. Ta'rifdan foydalanib, quyidagi funksiyalarning tasvirlarini toping.

$$1) f(t) = te^t. \quad 2) \frac{3}{p^2 + 9}.$$

5-misol. O'xshashlik teoremasidan foydalanib, quyidagi $f(t) = \sin 4t$ funksiyaning tasvirini toping.

Yechilishi. Bizga ma'lumki, $\sin t$ funksiyaning tasviri

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2i} \frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} = F(p)$$

O'xshashlik teoremasidan foydalanib, quyidagilarni yozamiz:

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$f(4t) = \sin 4t = \frac{1}{4} F\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 1} = \frac{4}{p^2 + 16} = F_1(p)$$

6. O'xshashlik teoremasidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning tasvirini toping.

1) $f(t) = \cos at$. 2) $f(t) = \sin 3t$.

7-misol. Chiziqlilik va o'xshashlik teoremlaridan foydalanib quyidagi $f(t) = \cos^3 t$ funksiyalarni tasvirini toping.

Yechilishi. Bizga ma'lumki, $\cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$ ko'rinishda yozish mumkin. O'xshashlik teoremasidan foydalanib $\cos t$ va $\cos 3t$ funksiyalarning tasvirini topamiz:

$$\cos t = \frac{p}{p^2+1}, \quad \cos 3t = \frac{1}{3} \frac{\frac{p}{3}}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+9}.$$

Chiziqlilik teoremasiga asosan,

$$f(t) = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t = \frac{3}{4} \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+9} = F(p)$$

bo'lamiz.

8. Chiziqlilik va o'xshashlik teoremlaridan foydalanib quyidagi funksiyalarni tasvirini toping.

1) $f(t) = \sin mt \cos nt$.

2) $f(t) = 2 + t^3 + t \cos 2t$;

3) $f(t) = 3^t$; 4) $f(t) = \cos^2 t$.

9-misol. Original funksiyani differensiallash teoremasidan foydalanib $f(t) = \sin^2 t$ funksiyaning tasvirini toping.

Yechilishi. $f(t)=F(p)$ bo'lsin, u holda $f'(t)=pF(p)-f(0)$ bo'ladi, bunda $f(0)=0$, $f'(t)=2\sin t \cos t = \sin 2t = \frac{2}{p^2+4}$. Demak, $\frac{2}{p^2+4} = pF(p)$, bu yerdan $F(p)$ ni topamiz: $F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} = \sin^2 t$.

10. Original funksiyani differensiallash teoremasidan foydalanib quyidagi funksiyalarni tasvirlarini toping.

- 1) $f(t) = \sin^3 t$ 2) $f(t) = t \cos \pi t$
 3) $f(t) = t^2 \cos 2t$. 4) $f(t) = t^3 \sin t$. 5) $f(t) = t \sinh 3t$.
 6) $f(t) = t \cosh 2t$. 7) $f(t) = te^t \sin t$.

11-misol. Tasvirni differensiallash haqidagi teoreмага asosan $f(t) = t^2 e^t$ funksiyaning tasvirini toping.

Yechilishi. Ma'lumki, $e' = \frac{1}{p-1}$. Tasvirni differensiallash haqidagi teoreмага asosan, $\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -te'$ bo'ladi. Bundan $\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -te'$. Oxirgi tenglikning chap tomonidan yana hosila olamiz:

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' = t(te') \Rightarrow \frac{-2}{(p-1)^3} = -t^2 e' \Rightarrow \frac{2!}{(p-1)^3} = t^2 e'.$$

12. Tasvirni differensiallash haqidagi teoreмага asosan $f(t)$ funksiyaning tasvirini toping

1) $F(p) = \frac{7}{p^3}$; 2) $F(p) = \frac{4}{(p+1)^4} - \frac{3}{(p-1)^2}$; 3) $F(p) = \frac{4}{p^2 - 6p + 13}$.

13. Tasvirni differensiallash haqidagi teoreмага asosan, funksiyaning tasvirini toping.

1) $f(t) = t^2 \cos t$, 2) $f(t) = (1+t) \sin 2t$.

14-misol. $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ funksiya uchun originalni toping.

Yechilishi. $F(p)$ funksiyani sodda kasrlarga yoyamiz:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

A, B, C, D noma'lum koeffitsientlarni topamiz:

$$A = -1, B = \frac{1}{5}, C = \frac{4}{5}, D = -\frac{1}{5}.$$

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{4}{5} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+4} \quad (*)$$

(*) tenglikning chap tomonidagi har bir oddiy kasr uchun originalni topish oddiy. Chiziqlilik teoremasidan foydalanib, originalni topamiz:

$$f(t) = -1 + \frac{1}{5}e' + \frac{4}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

$$4. 1) \frac{1}{(p-1)^2}. \quad 2) \frac{3}{p^2+9}.$$

$$6. 1) F(p) = \frac{p}{p^2+a^2}. \quad 2) F(p) = \frac{3}{p^2-9}.$$

$$8. 1) F(p) = \frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2+4m^2n^2}. \quad 2) F(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^4} + \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}.$$

$$3) F(p) = \frac{1}{p-\ln 3}. \quad 4) F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{p}{2(p^2+4)}.$$

$$10. 1) F(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}. \quad 2) F(p) = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$3) F(p) = \frac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}. \quad 4) F(p) = \frac{24p(p^2-1)}{(p^2+1)^4}. \quad 5) F(p) = \frac{6p}{(p^2-9)^2}.$$

$$6) F(p) = \frac{p^2+4}{(p^2-4)^2}. \quad 7) F(p) = \frac{2p-2}{(p^2-2p+2)^2}$$

$$12. 1) f(t) = \frac{7}{2}t^2. \quad 2) f(t) = \frac{2}{3}e^{-t}t^3 - 3e^{-t}t. \quad 3) f(t) = 2e^{3t} \sin 2t.$$

$$13. 1) \frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}. \quad 2) \frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}.$$

17.9-amaliy mashg'ulot.

Operatsion usullarini differensial tenglamalar va ularning sistemalarini yechishga tatbiq etish

Mustaqil yechish uchun misollar

1-misol. Differensial tenglamani yeching

$$x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1$$

Yechilishi. $x(t) = X(p), \quad x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p)$

$$x''(t) = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \quad e^{3t} = \frac{p}{p^2+1}$$

$$p^2 X(p) + 1 = X(p) = \frac{2p}{p^2+1}$$

bu yerda $X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}$. $X(p)$ funksiya uchun originalni topamiz. $\frac{1}{p^2+1}$

tasvir funksiya uchun original $\sin t$ bo'ladi, ya'ni $\frac{1}{p^2+1} = \sin t$.

$\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ tasvir funksiya uchun original funksiyaning topishda tasvirni

differensiallash haqidagi 17.26.8-teoremdan foydalanamiz:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' t \sin t$$

Demak, $X(p) = t \sin t - \sin t = (t-1) \sin t$.

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning yechimi

$x(t) = (t-1) \sin t$ bo'ladi.

2. Quyidagi differensial tenglamalarni yeching:

1) $x'' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$; 2) $x'' + x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

3) $x'' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$.

3. Differensial tenglamalarni boshlang'ich shartini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

a) $x' - x = 1$, $x(0) = -1$; b) $x'' - 2x' + 2x = 2t - 2$, $x(0) = x'(0) = 0$;

v) $x''' - x'' = 4e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 4$.

4-misol. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ ni hisoblang.

Yechilishi. Ravshanki, $f(t) = \sin t = \frac{1}{p^2+1} = F(p)$. $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp$

formulaga asosan,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = \arctg p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

5. Quyidagi integrallarni hisoblang

1) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt, (a > 0, b > 0)$. 2) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin at}{t} dt, (\alpha > 0, a > 0)$.

Differensial tenglamalar sistemasini yeching.

6. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$

7. $\begin{cases} x' - 3x - 4y = 0, \\ y' - 4x + 3y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' + x - y = 2, \\ y' + x + y = 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = -1.$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

2. 1) $x(t) = e(1 - e^{-t}) + 1 - t$. 2) $x(t) = t$. 3) $x(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t)$.

3. a) $x(t) = -1$. b) $x(t) = t - \sin t \cdot e^t$. v) $x(t) = e^{2t}$.

5. 1) $\ln \frac{b}{a}$. Ko'rsatma: $f(t) = e^{at} - e^{bt} = \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} = F(p)$. 2) $\arctg \frac{a}{\alpha}$.

6. $x(t) = e^t, y(t) = -e^t$. 7. $x(t) = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t}$ $y(t) = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}$.

8. $x(t) = t, y(t) = t - 1$.

17-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari

1.1-misol. Differentsial tenglamaning umumiy yechimini toping.

17.1.1. $e^{x+3y} dy = x dx$.

17.1.2 $y' \sin x = y \ln y$.

17.1.3. $y' = (2x-1)ctgy$.

17.1.4. $\sec^2 x \cdot tgy dy + \sec^2 y \cdot tgd x = 0$.

17.1.5. $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$.

17.1.6. $(y^2+3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$.

17.1.7. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$.

17.1.8. $y' = (2x+1)tgx$.

17.1.9. $(\sin(x+y) + \sin(x-y))dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$.

17.1.10. $((1+e^x)yy)' = e^x$.

17.1.11. $\sin x \cdot tgy dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$.

17.1.12. $3e^x \sin y dx + (1-e^x) \cos y dy = 0$. **17.1.13.** $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

17.1.14. $3^{x^2+y} dy + x dx = 0$.

17.1.15. $(\cos(x-2y) + \cos(x+2y))y' = \sec x$.

17.1.16. $y' = e^{x^2} x(1+y^2)$.

17.1.17. $ctgx \cos^2 y dx + \sin^2 x tgy dy = 0$.

17.1.18. $\sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x$.

17.1.19. $1 + (1+y')e^y = 0$.

17.1.20. $y' ctgx + y = 2$.

17.1.21. $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$.

17.1.22. $e^x \sin y dx + tgy dy = 0$.

17.1.23. $(1+e^{3y})x dx = e^{3y} dy$.

17.1.24. $(\sin(2x+y) - \sin(2x-y))dx = \frac{dy}{\sin y}$.

17.1.25. $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2} dy + \cos y \sqrt{1+x^2} dy$. **17.1.26.** $y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$

17.1.27. $e^x tgy dx = (1-e^x) \sec^2 y dy$.

17.1.28. $y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$.

17.1.29. $\cos^3 y \cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$. **17.1.30.** $3^{y^2-x^2} = \frac{yy'}{x}$.

17.2-misol. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differentsial tenglamani umumiy yechimini toping

17.2.1. $(1+x^2)y'' = 2xy$.

17.2.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

17.2.3. $x^3 y'' + x^2 y' = y'^2 - 1$.

17.2.4. $y'' + y' tgx = \sin 2x$.

17.2.5. $y'' x \ln x = y'$.

17.2.6. $xy'' - y' = x^2 e^x$.

17.2.7. $y'' x \ln x = 2y'$.

17.2.8. $x^2 y'' + xy' = 1$.

17.2.9. $y'' = -\frac{x}{y}$.

17.2.10. $xy'' = y'$.

17.2.11. $y'' = y' + x$.

17.2.12. $xy'' = y' + x^2$.

$$17.2.13. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

$$17.2.15. y'' \lg x = y' + 1.$$

$$17.2.17. 2xy'y'' = y'^2 + 1.$$

$$17.2.19. y'' + y' \lg x = \sec x.$$

$$17.2.21. y'' + 4y' = 2x^2.$$

$$17.2.23. x(y'' + 1) + y' = 0.$$

$$17.2.25. y'' + y' = \sin x.$$

$$17.2.27. 2xy''y' = y'^2 - 4.$$

$$2.29. y' \lg x + y' = 2.$$

$$17.2.14. xy'' + y' = \ln x$$

$$17.2.16. y'' + 2xy'^2 = 0$$

$$17.2.18. y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$$

$$17.2.20. y'' - 2y' \lg x = \sin^3 x$$

$$17.2.22. xy'' - y' = 2x^2 e^x$$

$$17.2.24. y'' + 4y' = \cos 2x$$

$$17.2.26. x^2 y'' = y'^2$$

$$17.2.28. y'' x \ln x = y''$$

$$17.2.30. (1+x^2)y'' = 2xy'$$

1.3-misol. Differentsial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$17.3.1. a) y'' + 4y = 0; \quad b) y'' - 10y' + 25y = 0; \quad c) y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$17.3.2. a) y'' - y' - 2y = 0; \quad b) y'' + 9y = 0; \quad c) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$17.3.3. a) y'' - 4y' = 0; \quad b) y'' - 4y' + 13y = 0; \quad c) y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$17.3.4. a) y'' - 5y' + 6y = 0; \quad b) y'' + 3y' = 0; \quad c) y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$17.3.5. a) y'' - 2y' + 10y = 0; \quad b) y'' + y' - 2y = 0; \quad c) y'' - 2y' = 0$$

$$17.3.6. a) y'' - 4y = 0; \quad b) y'' + 2y' + 17y = 0; \quad c) y'' - y' - 12y = 0$$

$$17.3.7. a) y'' + y' - 6y = 0; \quad b) y'' + 9y' = 0; \quad c) y'' - 4y' + 20y = 0$$

$$17.3.8. a) y'' - 49y = 0; \quad b) y'' - 4y' + 5y = 0; \quad c) y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$17.3.9. a) y'' + 7y' = 0; \quad b) y'' - 5y' + 4y = 0; \quad c) y'' + 16y = 0$$

$$17.3.10. a) y'' - 6y' + 8y = 0; \quad b) y'' + 4y' + 5y = 0; \quad c) y'' + 5y' = 0$$

$$17.3.11. a) 4y'' - 8y' + 3y = 0; \quad b) y'' - 3y' = 0; \quad c) y'' + 2y' + 10y = 0$$

$$17.3.12. a) y'' + 4y' + 20y = 0; \quad b) y'' - 3y' - 10y = 0; \quad c) y'' - 16y = 0$$

$$17.3.13. a) 9y'' + 6y' + y = 0; \quad b) y'' - 4y' - 21y = 0; \quad c) y'' + y = 0$$

$$17.3.14. a) 2y'' + 3y' + y = 0; \quad b) y'' + 4y' + 8y = 0; \quad c) y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$17.3.15. a) y'' - 10y' + 21y = 0; \quad b) y'' - 2y' + 2y = 0; \quad c) y'' + 4y' = 0$$

$$17.3.16. a) y'' + 6y' = 0; \quad b) y'' + 10y' + 29y = 0; \quad c) y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$17.3.18. a) y'' - 3y' = 0; \quad b) y'' - 7y' - 8y = 0; \quad c) y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$17.3.19. a) y'' - 3y' - 4y = 0; \quad b) y'' + 6y' + 13y = 0; \quad c) y'' + 2y' = 0$$

$$17.3.20. a) y'' + 25y' = 0; \quad b) y'' - 10y' + 16y = 0; \quad c) y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$17.3.21. a) y'' - 3y' - 18y = 0; \quad b) y'' - 6y' = 0; \quad c) y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$17.3.22. a) y'' - 6y' + 13y = 0; \quad b) y'' - 2y' - 15y = 0; \quad c) y'' - 8y' = 0$$

$$17.3.23. a) y'' + 2y' + y = 0; \quad b) y'' + 6y' + 25y = 0; \quad c) y'' - 4y' = 0$$

- 17.3.24.** a) $y'' + 10y' = 0$; b) $y'' - 6y' + 8y = 0$; c) $4y'' + 4y' + y = 0$
17.3.25. a) $y'' + 5y = 0$; b) $9y'' - 6y' + y = 0$; c) $y'' + 6y' + 8y = 0$
17.3.26. a) $y'' + 6y' + 10y = 0$; b) $y'' - 4y' + 4y = 0$; c) $y'' - 5y' + 4y = 0$
17.3.27. a) $y'' - y = 0$; b) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; c) $y'' - 6y' + 10y = 0$
17.3.28. a) $y'' + 8y' + 25y = 0$; b) $y'' + 9y' = 0$; c) $9y'' + 3y' - 2y = 0$
17.3.29. a) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; b) $y'' + 16y = 0$; c) $4y'' - 4y' + y = 0$
17.3.30. a) $9y'' - 6y' + y = 0$; b) $y'' + 12y' + 37y = 0$; c) $y'' - 2y' = 0$

17.4-misol. Differentsial tenglamaning umumiy yechimini toping.

- 17.4.1.** $y'' + y' = 2x - 1$ **17.4.2.** $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x$
17.4.3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$. **17.4.4.** $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$
17.4.5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$. **17.4.6.** $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$
17.4.7. $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x$. **17.4.8.** $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$
17.4.9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x$. **17.4.10.** $y'' + 6y' + 9y = (48 + 8x)e^x$
17.4.11. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$ **17.4.12.** $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$
17.4.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$
17.4.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$. **17.4.15.** $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$
17.4.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$. **17.4.17.** $y'' + y' = -4 \cos x - 2 \sin x$
17.4.18. $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$. **17.4.19.** $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$
17.4.20. $y'' + 5y' = 39 \cos 3x - 105 \sin 3x$. **17.4.21.** $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$
17.4.22. $y'' - 4y' + 5y = (24 \sin x + 8 \cos x)e^{-2x}$. **17.4.23.** $y'' + 16y = 8 \cos 4x$.
17.4.24. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. **17.4.25.** $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$
17.4.26. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$. **17.4.27.** $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x$

Adabiyotlar

1. Hasanov A.B. Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. Darslik, Samarqand, 2019. 325 bet.
2. Салоҳиддинов М., Насриддинов Ф. Оддий дифференциал тенгламалар – Тошкент: «Ўқитувчи» 1982
3. Opporov Y. va boshq. “Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to‘plami”. T. : 2009 y.
4. Гутер Р.С., Яппольский А.Р. Дифференциал тенгламалар. -Т.: Ўқитувчи, 1978 й. 324 б.
5. Muxtarov Ya. Soleyev A. Differensial tenglamalar bo‘yicha misol va masalalar. Samarkand. “Zarafshon” DK. 2014. 160b.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Высшая школа, 1978 г. 319 с.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974 г., 331 с.
8. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1985 г., 128 с.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. -М.: Высшая школа, 1988 г., 64 с.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. -М.: Гиз. физ.-мат. литературы. 1953 г.
11. Мамагов М.Ш., Тожибоев А., Маматов А.З. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент. 2005 йил.
12. Muxtorov Ya., Soleyev A. Differensial tenglamalardan misol va masalalar. Samarqand. SamDU nashriyoti. 2020.

V BO'LIM. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

18-BOB.

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

18.1-§. Tasodifiylik va qonuniyat. Hodisalar va ular ustida amallar

18.1. Ehtimollar nazariyasi fani. Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasining elementlari XVII asr o'rtalaridan vujudga kela boshladi. Shu davrda qimor o'yinlari juda keng tarqalgan bo'lib, hatto matematiklarning ham e'tiborini o'ziga jalb qilgan edi. Bu o'yinlarda kuzatilayotgan hodisalar o'ziga xos qonuniyatlarga bo'ysunishini bilgan Guyugens, Paskal, Ferma, Yakov Bernulli kabi olimlar bu qonuniyatlarni har tomonlama o'rgandilar va ehtimollar nazariyasiga oid ehtimol, matematik kutilma va shunga o'xshash tushunchalarni kiritdilar. Ehtimollar nazariyasi taraqqiyotning keyingi bosqichi Muavr, Laplas, Gauss, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir. XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasining rivojlanishida rus matematiklari V.Ya.Bunyakovskiy, P.L.Chebishev, A.A.Markov, A.M. Lyapunov, V.I. Romanovskiy, o'zbek olimlaridan T.A.Sarimsoqov, S.H. Sirojiddinov, T.Azlarov, Sh.Q.Farmanovning xizmatlari kattadir.

Ehtimollar nazariyasi matematik statistikaning asosiy apparatigina bo'lib qolmay, bundan tashqari uning usullari ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida, ishonchlilik nazariyasida, nazariy fizikada, biologiyada, geografiyada, matematik lingvistikada, ishlab chiqarishni rejalashirish va optimal boshqarishda, texnologik prosessalarni analiz qilishda, mahsulotlarning sifatini nazorat qilishda va boshqa maqsadlarda qo'llaniladi.

«Ehtimol» so'zi tasodifiy, noaniq so'zlari bilan aloqadordir. Ehtimollar nazariyasi fani matematikaning rivojlanib borayotgan asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, tasodifiy hodisalarga oid qonuniyatlarni o'rganadigan fandir.

Tasodifiy hodisalar hech qanday qonuniyatga bo'ysunmaganday tuyuladi, aslini olganda kuzatishlarni istalgancha takrorlash mumkin bo'lgan tasodifiy biror qonuniyatga bo'ysunadi. Bu qonuniyatni birinchi bor Ya. Bernulli o'rgandi.

Ehtimollar nazariyasi biror hodisaning ro'y berish yoki bermasligining avvaldan aytib berishni o'z oldiga maqsad qilib qo'ymaydi. U bunday masalani hal etishga qodir emas. Agar bir xil shartlar to'plami S bajarilganda ko'p karra kuzatilishi mumkin bo'lgan, ya'ni ommaviy bir jinsli hodisalar qaraladigan bo'lsa, u holda ish boshqacha bo'ladi. Yetarlicha ko'p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar o'zlarining muayyan tabiatlaridan qat'iy nazar tayin qonuniyatlarga, chinonchi ehtimoliy qonuniyatlarga bo'ysinadi. Ehtimollar nazariyasi ana shu qonuniyatlarni aniqlash bilan shug'ullanadi.

18.2. Hodisalar. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari sinashlar va hodisalardir.

18.2.1-ta'rif. Ma'lum kompleks shartlarning bajarilishiga *sinash yoki tajriba deyiladi*.

18.2.2-ta'rif. *Hodisa* deb, tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan voqeaga aytiladi.

Hodisalarni lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilaymiz:

$A, B, C, \dots, X, Y, Z$.

Masalan: 1) bir turdagi asboblarning sifatini tekshirish sinash hisoblanadi. Tekshirilgan asbobning yaroqli yoki yaroqsiz bo'lishi hodisani tashkil qiladi; 2) zayomda yutuq chiqishini tekshirish - sinash, yutuq chiqishi yoki chiqmasligi esa, hodisa bo'ladi; 3) tangani tashlash - sinash, yozuvli tomon yoki gerb tomoni tushishi - hodisadir.

Hodisani sinash natijasi deb qaraymiz. Biz kuzatadigan voqea (hodisalar) 3 *turga* bo'linadi: 1) ishonchli (muqarrar); 2) ishonchsiz; 3) tasodifiy.

18.2.3- ta'rif. Har bir sinashda albatta ro'y beradigan, ya'ni ro'y berishi sinashlardan avval ma'lum bo'lgan voqeaga *ishonchli hodisa* deyiladi va U bilan belgilanadi.

Masalan: 1) yer yuzida bir sutka 24 soat cho'zilishi; 2) yuqoriga otilgan tosh yerga qaytib tushishi; 3) idishdagi suv normal atmosfera bosimida isitilib, uning harorati 100^0 ga yetganda bug'ga aylanishi ishonchli hodisalardir.

18.2.4-ta'rif. Har bir sinashda ro'y bermaydigan yoki ro'y bermasligi sinashlardan avval ma'lum bo'lgan voqeaga *ishonchsiz (mutlaqo ro'y bermaydigan) hodisa deyiladi* va *v* bilan belgilanadi.

Masalan: 1) oyning yerga tushishi; 2) bir sutkaning 25 soatga cho'zilishi kabi *voqealar* ishonchsiz yoki mutlaqo ro'y bermaydi hodisalaridir.

18.2.5-ta'rif. *Ro'y berishi* yoki bermasligi sinashlardan avval ma'lum bo'lmagan voqeaga, *tasodifiy hodisa deyiladi*.

Masalan: 1) tanga tashlaganda, uning gerbli yoki yozuvli tomoni bilan tushishi; 2) zayomda yutuq chiqishi yoki chiqmasligi. Bu hodisalar tasodifiydir. Har qanday tasodifiy hodisa, jumladan, tanganing gerbli tomoni tushishi juda ko'p tasodifiy sabablar ta'siri natijasidir (tangani otishga sarflangan kuch, tanganing shakli...v.h).

18.2.6-ta'rif. *Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb* birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

Masalan, 1) Detallar solingan yashikdan tavakkaliga bitta detal olinadi. Bunda standart detal chiqishi nostandart detal chiqishini yo'qqa chiqaradi. «Standart detal chiqdi» va «nostandart detal chiqdi» hodisalari birgalikda emas.

2) Tanga tashlandi. Gerbli tomon tushdi va yozuvli tomon tushdi hodisalari birgalikda emas.

Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisalar yagona mumkin bo'lgan deyiladi. Ko'rinib turibdiki yagona mumkin bo'lgan hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas.

Masalan, 2 ta pul-buyum loteriyasi sotib olingan. Quyidagi hodisalarning faqat bittasi albatta ro'y beradi: «Yutuq birinchi билетga chiqdi, ikkinchiga chiqmadi»; «Yutuq birinchi билетga chiqmadi, ikkinchiga chiqdi»; «Yutuq ikkalasiga chiqdi»;

«Yutuq ikkalasiga chiqmadi». Bular yagona mumkin bo'lgan hodisalar. Masalan, mergan nishonga qarata o'q uzdi. Quyidagi ikki hodisadan biri albatta ro'y beradi. «Nishonga o'q tegadi», «Nishonga o'q tegmaydi». Bular yagona mumkin bo'lgan hodisalar.

18.2.7- ta'rif. Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan imkoniyatliroq deyishga asos bo'lmasa, ular *teng imkoniyatli hodisalar deyiladi*.

Masalan, tanga tashlaganda gerbli tomon tushishi va yozuvli tomon tushishi teng imkoniyatli hodisalar.

O'tkazilayotgan tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisalar elementar hodisalar deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Elementar hodisalar to'plami U bilan belgilanadi.

Elementar hodisalar va ishonchli hodisalar bir xil ma'noda ishlatiladi.

Masalan, tangani bir marta tashlashdan iborat tajribaning har bir natijasi ikkita elementar hodisadan: ω_1 -tangani gerbli tomoni tushishi hodisasi (G) va ω_2 -tanganing raqamli tomoni tushishi hodisasining kamida biridan (R) iborat bo'ladi. Bu holda elementar hodisalar to'plami $U = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ bo'ladi.

Shuningdek tangni ikki marta tashlashdan iborat tajribani qaraganimizda natija quyidagicha bo'ladi: GG, RG, GR, RR -elementar hodisalar bo'lib ularning to'plami $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$ bo'ladi.

Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo'lgan hodisalar *murakkab hodisa* deb ataladi.

Ehtimolliklar nazariyasi yetarlicha, ko'p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash bilan shug'ullanadi.

Demak, ehtimolliklar nazariyasining predmeti ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganishdir.

18.3. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar.

18.3.1-ta'rif. Agar tajriba natijasida A hodisa ro'y berganida B hodisa muqarrar ro'y bersa, A hodisa B hodisani **ergashtiradi** deb ataladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, 1) dars jadvalida dushanba kuni oliy matematika darsi borligini A hodisa deb va B hodisa bilan esa dushanba kuni dars bo'lishini belgilasak, u holda A hodisa ro'y berishidan B hodisa ro'y berishi kelib chiqadi.

2) tajriba 36 qartali dastadan bitta qartani tortishdan iborat bo'lsin. A hodisa "g'isht" qarta, B hodisa esa qizil belgili qartaning chiqishidan iborat bo'lsin. U holda ravshanki $A \subset B$.

18.3.9-ta'rif. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa va o'z navbatida B hodisa A hodisani ergashtirsa, u holda A va B *ekvivalent* yoki *teng kuchli* hodisalar deb ataladi va $A=B$ kabi yoziladi.

Masalan, 1) 3 sonining toqligini A hodisa va B hodisani tub son desak, u holda $A \subset B$ kelib chiqadi va o'z navbatida $B \subset A$ kelib chiqadi.

2) tajriba qartalar dastasidan bitta qartani tortishdan iborat bo'lib, A hodisa "g'ishtin" yoki "toppon" qarta, B hodisa esa qizil belgili qartaning chiqishidan iborat bo'lsa, u holda $A=B$ bo'lishi ravshan.

18.3.10-ta’rif. Tajriba natijasida A va B hodisalardan kamida bittasining ro’y berishidan iborat hodisa ularning *yig’indisi* deb ataladi va $A + B$ bilan belgilanadi.

18.3.11-ta’rif. Tajriba natijasida A va B hodisalarning birgalikda ro’y berishidan iborat hodisa, ularning *ko’paytmasi* deb ataladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

18.3.12-ta’rif. Agar A va B hodisalar bir paytda ro’y berishi mumkin bo’lmagan hodisalar, ya’ni $A \cdot B = V$ bo’lsa, u holda A va B *birgalikda bo’lmagan* hodisalar deyiladi. Aks holda ular *birgalikda* hodisalar deyiladi.

Boshqacha aytganda tajribada birining ro’y berishi qolganlarining ro’y berishini yo’qqa chiqaradigan hodisalar *birgalikda bo’lmagan hodisalar* deb atalar yekan.

Masalan, 1) tashlash natijasida bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlar tushish hodisalari birgalikda bo’lmagan hodisalar;dir;

2) Lolani bir vaqtda 1- hamda 3- kursda o’qish hodisalarini birgalikda bo’lmagan hodisalar.

18.3.13-ta’rif. Agar A va B hodisalarning *yig’indisi* muqarrar hodisa, ko’paytmasi esa mumkin bo’lmagan hodisa, ya’ni $A + B = U$, $A \cdot B = V$ bo’lsa, u holda A va B hodisalar o’zaro *qarama-qarshi hodisalar* deyiladi. Odatda A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\bar{A}$ kabi belgilanadi.

Demak, $A + \bar{A} = U$, $A \cdot \bar{A} = V$.

Masalan, tangani bir marta tashlashdan iborat tajribada gerbli va raqamli tomonlarini tushishi hodisalari qarama-qarshi hodisalar. Shunga o’xshash nishonga qarata o’q uzishdan iborat tajribada o’qning nishonga tegish hodisasi va xato ketish hodisalari qarama-qarshi hodisalar.dir.

18.3.14-ta’rif. Tajriba natijasida A hodisaning ro’y berishdan B hodisaning ro’y bermasligidan iborat hodisa A va B hodisalar *ayirmasi* deb ataladi va $A - B$ kabi belgilanadi.

Masalan, tajriba to’liq qartalar dastasidan bitta qartani topishdan iborat bo’lib, A hodisa “g’ishtin” qartaning B hodisa esa istalgan “dama” qartaning chiqishdan iborat bo’lganda $A - B$ hodisaning ro’y berishi chiqqan qarta “dama”dan farqli “g’ishtin” qarta bo’lishini anglatadi.

Eslatma. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning *yig’idisi* va ko’paytmasi ham yuqoridagidek ta’riflanadi.

18.3.15-ta’rif. Agar $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$, ya’ni tajribada $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan hech bo’lmaganda bittasi muqarrar ro’y bersa, bu hodisalar *hodisalarning to’liq guruhini* tashkil yetadi deyiladi.

Agar $A_1 + A_2 + \dots + A_n = V$, $A_i A_j = V$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$) bo'lsa $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan *hodisalarning to'liq guruhini* tashkil yetadi deyiladi.

Agar bir necha $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro'y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq qulaylikka ega deyishga asos bo'lmasa, bunday hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Masalan o'yin soqqasining simmetrik va bir jinsliligidan 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochkolardan istalganining chiqishi teng imkoniyatlidir.

To'plam va hodisa orasidagi munosabatni quyidagi 1-jadvalda ifodalaymiz.

Xodisalar ustida bajariladigan yig'indi va ko'paytma amalini chekli yoki cheksiz hodisalar.

1-jadval.

Belgi	To'plam tilida	Xodisalar tilida
Ω	Fazo(universal to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, mukarrar hodisa.
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazo elementi	ω elementar hodisa
$A, A \in \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B$ $A + B$	A va B to'plam yig'indisi	A va B hodisalar yig'indisi.
$A \cap B$, $A \cdot B$,	A va B to'plam ko'paytmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi.
$A \setminus B$	A va B to'plam ayirmasi	A va B hodisalar ayirmasi.
$\emptyset = \bar{V}$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\bar{A}$	A to'plam to'ldirmasi (teskari to'plam)	A hodisaga teskari hodisa.
$A \cdot B = \emptyset$	A va B kesishmaydi.	A va B birgalikda emas.
$A \subseteq B$	A B ning to'plam osti	A B hodisani ergashtiradi.
$A = B$	A va B teng.	A va B teng kuchli.

18.4. Kombinatorika elementlari. Biror qoida bo'yicha chekli sondagi elementlardan tuzilgan mumkin bo'lgan barcha turli xil kombinatsiyalarni hisoblashga doir masalalar *kombinatorika masalalari* deyiladi. Matematikaning bunday masalarini yechish bilan shug'ullanadigan *bo'limi kombinatorika* deyiladi.

18.4.1. Kombinatorikaning umumiy qoidalari. Kombinatorika masalarini hal qilish asosida quyidagi ikkita qoida yotadi:

Qo'shish qoidasi. Agar biror A elementni k ta usul bilan, ikkinchi B elementni n ta usul bilan tanlash mumkin bo'lib, bu usullar bir-birini rad etadigan bo'lsa, u holda bu elementlardan birortasini (yo A ni, yoki B ni) $k+n$ ta usul bilan tanlash mumkin.

Ko'paytirish qoidasi. Agar A elementni k ta usul bilan va har bir bunday tanlashdan so'ng B elementni n ta usul bilan tanlash mumkin bo'lsa (A, B) elementlar juftini shu ko'rsatilgan tartibda $k \cdot n$ ta usul bilan tanlash mumkin.

18.4.4. O'rinashtirishlar.

18.4.5-ta'rif. n ta elementdan tuzilgan chekli to'plam berilgan bo'lsin. n ta turli elementdan k tadan o'rinashtirishlar deb, berilgan n ta elementdan olingan k ta elementni o'z ichiga olgan barcha mumkin bo'lgan shunday gruppalariga aytiladiki, ular bir-birlaridan yo elementlarining tarkibi, yoki tartibi bilan farq qiladi.

n ta elementdan k tadan tuzilgan o'rinashtirishlar soni A_n^k orqali belgilanadi. n ta turli elementdan k tadan takrorlamasdan o'rinashtirishlar soni

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1)$$

formula bo'yicha aniqlanadi. (4.1) formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Agar $k=n$ bo'lsa, quyidagi $A_n^n = P_n = n!$ formula hosil bo'ladi.

n ta turli elementdan k tadan takrorlanadigan o'rinashtirishlar soni $A = n^k$ formula bo'yicha topiladi.

18.4.4. O'rin almashtirish.

18.4.5-ta'rif. n ta turli elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar deb, n ta elementdan tuzilgan va bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan mumkin bo'lgan barcha gruppalariga aytiladi.

O'rin almashtirishlar soni P_n orqali belgilanadi. n ta turli elementdan takrorlamasdan o'rin almashtirishlar soni

$$P_n = n!$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

n ta turli elementdan takrorlash bilan, chunonchi birinchi tipdagi k_1 ta elementdan ikkinchi tipdagi k_2 ta elementdan,..., n - tipdagi k_n ta elementdan tuzilishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni

$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

formula bilan aniqlanadi.

18.4.6. Gruppashlar

18.4.7.-ta'rif. n ta turli elementdan k tadan tuzilgan **gruppash** deb, berilgan n ta elementdan olingan k ta elementni o'z ichiga olgan va bir - biridan kamida bitta elementi bilan farq qiladigan barcha mumkin bo'lgan birlashmalarga aytiladi.

n ta elementdan k tadan tuzilgan gruppashlar soni C_n^k orqali belgilanadi. Bu son quyidagi formula bo'yicha topiladi: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$, n ta turli elementdan k tadan takrorlashsiz gruppashlar soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

yoki

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

formula bilan aniqlanadi.

n ta turli elementdan k tadan takrorlashsiz gruppashlar soni shu n ta elementdan $n - k$ tadan tuzilgan gruppashlar soniga teng:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

n ta turli elementdan k tadan takrorlanadigan gruppashlar soni

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

formula bilan aniqlanadi.

18.2-§. Ehtimolning ta'riflari

18.5. Ehtimolning klassik ta'rif. Geometrik ehtimollik. Hozir ehtimollikning klassik ta'rifini beramiz. Misol ko'raylik. Yashikda 6 ta bir xil shar bo'lib, 2 tasi qizil shar, 3 tasi ko'k va bittasi oq bo'lsin. Ko'rinib turibdiki yashikda tavakkaliga rangli shar (ko'k, qizil) olinish imkoniyati, oq shar olinish imkoniyatidan ko'proq. Manna shu imkoniyatni son bilan xarakterlash bilan shug'ullanamiz. Shu son hodisaning ehtimoli deyiladi.

Shunday qilib, ehtimol hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi sonidir. Oldimizga tavakkaliga olingan sharning rangli bo'lish imkoniyatini miqdoriy baholash vazifasini qo'yaylik.

Rangli chiqishini A hodisa sifatida qaraymiz. Sinashda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning har birini elementar natija deb ataymiz. Bizning misolda 6 ta elementar natija bo'lishi mumkin. ω_1 - oq shar chiqdi, ω_2, ω_3 - qizil shar $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ - ko'k shar. Bu natijalar yagona mumkin bo'lgan teng imkoniyatli hodisalardir. Bizning misolda $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$, 5 ta natija. A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Demak olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{5}{6}.$$

18.5.1- ta'rif. Kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalari sonining, ro'y berishi mumkin bo'lgan va birgalikda bo'lmagan tajribalar yoki kuzatishlarning umumiy soniga nisbati, A hodisaning ehtimoli deb ataladi va $P(A) = \frac{m}{n}$ ko'rinishda belgilanadi.

Ehtimolning tarifidagi quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng.

Haqiqatan ham agar hodisa muqarrar bo'lsa, u holda sinashning har bir elementar natijaviy bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Bu holda $m = n$, va demak, $P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

2. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli 0 ga teng.

Agar hodisa ro'y bermaydigan bo'lsa u holda tajribalar hyech bir elementda natijasi bu tajribalar ro'y berishiga qulaylik tug'dirmaydi. Bu holda $m = 0$, va demak, $P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

3. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nisbatan son bo'lib, u nol va bir orasida bo'ladi.

Tasodifiy hodisalar ro'y berishiga sinashlar barcha elementar natijalarning bir qismigina qulaylik tug'diradi

$$0 < m < n \Rightarrow 0 < \frac{m}{n} < 1 \Rightarrow 0 < P(A) < 1 .$$

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli nol va bir orasida bo'ladi.

18.5.2-misol. 10 dan oshmaydigan natural sonlar tanlandi. Bu tanlangan sonlar tub sonlar bo'lish ehtimoli qanday bo'ladi?

Yechilishi. Tanlangan sonlar tub sonlar bo'lish xodisasini A - desak, u holda $n=10, m=4$ (tub sonlar 2,3,5,7).

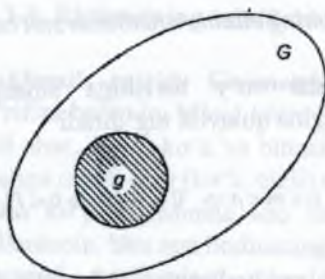
Demak, izlanayotgan ehtimol $P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$.

Ehtimollikning klassik ta'rifida elementar natijalar soni chekli deb faraz qilinadi. Amaliyotda esa ko'pincha mumkin bo'lgan natijalar soni cheksiz bo'lgan tajribalar uchraydi. Bunday hollarda klassik ta'rifni qo'llab bo'lmaydi. Biroq bunday hollarda ba'zan ehtimollikni hisoblashning boshqacha usulidan foydalanish mumkin bo'lib, bunda ham avvalgidek ba'zi hodisalarning teng imkoniyatlilik tushunchasi asosiy ahamiyatga ega bo'lib qolaveradi.

Ehtimollikning geometrik ta'rifi deb ataladigan usulda tasodifiy nuqtaning biror sohaning istalgan qismiga tushish ehtimolligi, bu sohaning o'lchovi (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, uning shakli va joylashishiga bog'liq bo'lmagan holda foydalanish mumkin.

Aniq maqsadda ikki o'lchovli hol cheklanamiz. Tekislikda yuzi S_G ga teng biror G soha berilgan bo'lib, unda yuzi S_g ga teng g soha joylashgan bo'lsin. G sohaga tavakkaliga nuqta tashlanadi. Bunda bu nuqtaning G sohaning istalgan qismiga tushish ehtimolligi bu sohaning yuziga to'g'ri proporsional va uning shakli, joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi. Bunday holda bu nuqtaning S_g sohaga tushish ehtimolligi (18.1-

chizma) $P = \frac{S_g}{S_G}$ bo'ladi.



18.1-chizma

18.6. Hodisaning nisbiy chastotasi. Ehtimolning statistik ta'rifi.

Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta'rifi cheklangan bo'lib, bu ta'rifni har qanday turdagi masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Jumladan, elementar hodisalar soni cheksiz yoki elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lmagan tajribalarda ehtimolni hisoblash uchun klassik ta'rifdan foydalanish mumkin emas, elementar hodisalarning teng imkoniyatlilikini asoslash esa amaliyotda anchagina qiyin masaladir. Odatda, teng imkoniyatli hodisalar ro'y beradigan tajribalarda simmetriya saqlangan deb faraz qilinadi. Masalan, o'yin kubigining shakli muntazam ko'pyoq bo'lib, u bir jinsli materialdan tayyorlangan bo'lishi talab qilinadi, tangada ham shu holatni kuzatish mumkin. Ammo amaliyotda simmetriya saqlangan holatlar kamdan-kam uchraydi.

Shu sababli, hodisaning ehtimolini hisoblashda ehtimolning klassik ta'rifi bilan bir qatorda boshqa ta'riflardan ham foydalaniladi, jumladan, statistik ta'rifdan. Ehtimolning statistik ta'rifini kiritishdan oldin nisbiy chastota tushunchasini kiritamiz, chunki bu tushuncha statistik ta'rif tushunchasini kiritishda muhim ahamiyatga egadir.

Nisbiy chastota tushunchasi ham ehtimol kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

18.7.1-ta'rif. Kuzatilayotgan A hodisa yuz bergan tajribalar sonining umumiy tajribalar soniga nisbati A hodisaning *nisbiy chastotasi* deb ataladi va

$$W(A) = \frac{k}{n}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda A hodisa yuz bergan tajribalar soni k , umumiy tajribalar soni n ga teng.

Hodisa ehtimoli va nisbiy chastotasi ta'riflarini taqqoslab quyidagi xulosani chiqarish mumkin: ehtimol tajribagacha, nisbiy chastota esa tajribadan so'ng hisoblangan qiymatdir.

Misollar.

1. Noyabr oyining 6, 7, 11, 12, 17, 21, 24-kunlarida yomg'ir yoqqan bo'lsa, noyabr oyi uchun yomg'ir yog'ish nisbiy chastotasi: $W(A) = \frac{7}{30}$.

2. Nishonga otilgan 18 ta o'qdan 15 tasi nishonga tekkan bo'lsa, o'qlarning nishonga tegish nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{5}{6}$.

Bir xil sharoitda o'tkazilgan ko'p miqdordagi tajribalar shuni ko'rsatadiki, nisbiy chastota turg'unlik xossasiga egadir. Bu xossaning ma'nosi quyidagicha: turli tajribalarda (bir xil sharoitda va bitta hodisa ustida) topilgan nisbiy chastotaning qiymatlarining bir-biridan farqi kam (tajriba soni qancha katta bo'lsa, farq shuncha kam) bo'ladi va bu o'zgarish bitta son atrofida tebranadi. Mana shu son hodisaning ro'y berish ehtimoli bo'ladi. Shunday qilib, nisbiy chastotani ehtimolning taqribiy qiymati sifatida qabul qilish mumkin. (Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi keyinchalik to'liq tushuntiriladi)

Misollar.

3. Bizning eramizdan 2000 yillar oldin Xitoyda o'g'il bola tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati deyarli 0,5 ga tengligi hisoblangan.

4. Fransuz olimi Laplas London, Peterburg va Fransiyada to'plangan statistik ma'lumotlarga asoslanib, o'g'il bola tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko'rsatgan. Bu son ko'p yillar mobaynida o'zgarmay qolishini tasdiqlagan.

5. Byuffon tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta "gerb", Pirson tangani 24000 marta tashlaganda 12012 martasida "gerb" tomoni tushgan.

Ehtimolning statistik ta'rifi: *ehtimolning statistik ta'rifi sifatida nisbiy chastota yoki unga yaqinroq sonni olinadi.*

Umuman, agar tajribalar soni yetarlicha ko'p bo'lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi $-W(A)$ biror o'zgarmas $p \in [0;1]$ son atrofida turg'un ravishda tebransa, shu p sonni A

hodisaning ro'y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning *statistik ehtimoli* deyiladi.

Klassik ta'rif uchun keltirilgan xossalar statistik ta'rifda ham saqlanib qolishini osongina tekshirib ko'rish mumkin, ya'ni $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$.

18.3-§. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

18.7. Birgalikdamos hodisalar uchun ehtimollikni qo'shish teoremasi

18.7.1-teorema. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $A + B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (18.7.2)$$

Isboti. n -tajribada mumkin bo'lgan barcha hodisalar soni. Bu n ta holdan m tasi A hodisaga, k tasi B hodisaga qulaylik tug'dirsın. U holda ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra, ushbu

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n} \quad (18.7.3)$$

bo'ladi. Yoki A hodisa, yoki B hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni $m + k$ ga teng bo'ladi. Bundan esa, ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra, ushbu

$$P(A + B) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} \quad (18.7.4)$$

munosabatni hosil qilamiz. Agar (18.7.3) e'tiborga olsak, u holda (18.7.4) dan (18.7.2) kelib chiqadi.

Ikki hodisa yig'indisining ro'y berish ehtimolini ko'p sondagi hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin.

18.7.5-natija. Juft-jufti birgalikda bo'lmagan chekli sondagi $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Bu natija ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosda qurishda qo'shish aksiomasi deb ataladi va

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (18.7.6)$$

ko'rinishda yoziladi. Agar $\{A_i\}$ hodisalar ketma-ketligi sanoqli (hodisalar soni cheksiz, ammo nomerlash mumkin) bo'lsa, (18.7.6) ifoda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

18.8. Shartli ehtimol. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasini bayon yetishdan avval bog'liqmas va bog'liq hodisalar haqidagi ushbu muhim tushunchani bayon etamiz.

18.8.1-ta'rif. Ikki A va B hodisalarning AB -ko'paytmasi (*kesishmasi*) deb, bu hodisalarning birgalikda (bir paytda) ro'y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

Masalan, mergan nishonga qarata ikkita o'q uzdi: A -birinchi o'qning nishonga tegishi, B -ikkinchi o'qning nishonga tegishi bo'lsa, AB -birinchi va ikkinchi o'qlarning nishonga tegishi bo'ladi.

18.8.2-ta'rif. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ - ko'paytmasi (*kesishmasi*) deb, bu hodisalarning birgalikda ro'y berishini bildiruvchi hodisaga aytiladi.

18.8.3-ta'rif. Agar A hodisaning ro'y berishi B hodisaning ro'y berish ehtimolini o'zgartirmasa va aksincha bo'lsa, A va B hodisalar erkli (bog'liqmas) hodisalar deyiladi

Masalan, ikkita mergan turli nishonga qarata bittadan o'q uzdi: A -birinchi merganning nishonga tekkizishi, B -ikkinchi merganning nishonga tekkizishi bo'lsa, A va B hodisalar erkli (bog'liqmas) hodisalar bo'ladi.

18.8.4-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro erkli bo'lsa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan erkli deyiladi.

Masalan, agar A va B , A va C , B va C hodisalar erkli bo'lsa, u holda A, B, C hodisalar juft-jufti bilan erkli bo'ladi.

18.8.5-ta'rif. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisa va boshqa hodisalarning mumkin bo'lgan ko'paytmalari erkli bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \dots, A_n$ -birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

Masalan, A, B, C hodisalar birgalikda erkli bo'lsa, u holda A va B , A va C , B va C ; A va BC , B va AC , C va AB hodisalar erkli bo'ladi.

Erkli hodisalar ko'paytmasining ro'y berish ehtimolini topish quyidagi teoremda ifodalanadi.

18.8.6-teorema (bog'liqmas hodisalarning ehtimolliklarini ko'paytirish teoremasi). Agar A va B erkli (bog'liqmas) hodisalar bo'lsa, u holda AB -ko'paytmaning ro'y berish ehtimoli hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Bu teoremdan quyidagi natijani olamiz.

18.8.7-natija. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ -birgalikda erkli hodisalar bo'lsa, u holda $A_1 A_2 \dots A_n$ ko'paytmaning ro'y berish ehtimoli hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \text{ yoki } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Tasodifiy hodisa tushunchasi u ma'lum bir S shartlar asosida ro'y beradi yoki ro'y bermaydi deb aniqlagan edi.

Agar hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblash uchun faqat S shartlarning bajarilishi yetarli bo'lsa, ya'ni qo'shimcha shartlar talab qilinmasa, u holda bu ehtimol *shartsiz ehtimol* deb ataladi.

Agar hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblash uchun faqat S shartlarning bajarilishi yetarli bo'lmasa, ya'ni qo'shimcha shartlar talab qilinsa, u holda bu ehtimol *shartli ehtimol* deb ataladi.

Masalan, ko'p hollarda B hodisaning ro'y berish ehtimoli A hodisa ro'y berdi qo'shimcha sharti asosida hisoblanadi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, shartsiz ehtimol tushunchasi nisbiy tushunchadir, chunki unda ham S shartning bajarilishi talab qilinadi.

18.8.8-ta'rif. B hodisaning A hodisa ($P(A) > 0$) ro'y berdi shartda hisoblangan ehtimoliga shartli ehtimol deb ataladi va $P_A(B)$ kabi belgilanadi.

18.8.9-misol. Qutida 4 ta oq, 3 ta qora shar bor. Qutidan qaytarilmasdan ikkita shar olindi. Agar birinchi olingan shar (A -hodisa) qora bo'lsa, ikkinchi olingan sharning (B -hodisa) oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Birinchi tajribadan so'ng qutida 6 ta shar qoladi. Shu sababli

$$P_A(B) = \frac{2}{3}.$$

Xuddi shu natijani

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (P(A) > 0) \quad (18.8.10)$$

formula yordamida ham olish mumkin. Haqiqatan ham, birinchi tajribada qora sharning chiqish ehtimoli $P(A) = \frac{3}{7}$. $P(AB)$ ni klassik ta'rifdan topamiz.

Hodisalarning umumiy soni-qutidagi ettita shardan ikkita sharning olinishi (rangi ahamiyatga ega emas) $A_2^2 = 7 \cdot 6 = 42$ o'rinlashtirish bilan aniqlanadi. AB -hodisaga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni $4 \cdot 3 = 12$ ga teng. Demak, $P(AB) = \frac{2}{7}$.

U holda (18.8.10) formuladan foydalanib $P_A(B) = \frac{2}{3}$ natijani olamiz.

Ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanib (18.8.10) formulaning to'g'riligini isbotlash mumkin.

B hodisaning A shart asosida ro'y berish ehtimoli

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (P(A) > 0)$$

formula bilan hisoblanadi.

18.8.11-teorema (bog'liq hodisalarning ehtimolliklarini ko'paytirish teoremasi). Ikkita A va B bog'liq hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi ulardan birining ehtimolligining shu hodisa ro'y berdi degan farazda hisoblangan ikkinchi hodisa shartli ehtimolligiga ko'paytmasiga teng, ya'ni ushbu

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \text{ yoki } P(AB) = P(B)P_B(A)$$

formula o'rinli.

Isboti. n -tajribaning A hodisa ro'y beradigan yoki ro'y bermaydigan jami hodisalar soni; $n_1 - A$ hodisa ro'y berishga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni ($n_1 \leq n$); m -tajribaning A hodisa ro'y berdi degan farazda B hodisa ro'y beradigan hodisalar soni, ya'ni bu hodisalar AB hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

A va B hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1}$$

$\frac{n_1}{n} = P(A)$ va $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$ ekanligi e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

$AB = BA$ bo'lganligi uchun teoremani BA hodisa uchun qo'llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$$

18.8.12-natija. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning har birining ro'y berish ehtimolini topishda undan oldingi barcha hodisalar ro'y berib bo'lgan deb hisoblansa, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning bir paytda (birgalikda) ro'y berish ehtimoli- $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$ uchun

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

formula o'rinli.

Shartli ehtimol tushunchasidan foydalanib, erkli hodisalarni boshqacha ta'riflash mumkin.

18.8.13-ta'rif. Agar A va B hodisalar uchun $P_A(B) = P(B)$ yoki $P_B(A) = P(A)$ bo'lsa, A va B erkli hodisalar deyiladi.

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi va $\bar{A}$ kabi belgilanadi. Qarama-qarshi A va $\bar{A}$ hodisalar uchun

$$A + \bar{A} = U = U,$$

$$A \cdot \bar{A} = \emptyset = V.$$

munosabat o'rinli ekanligini tushunish qiyin emas.

A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=p$, ro'y bermaslik ehtimoli $P(\bar{A})=q$ deb olinadi va $p+q=1$ tenglik har doim o'rinli bo'ladi.

18.9. Birgalikda hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasi. Birgalikdama hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasidan foydalanib, birgalikda hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasini isbotlaymiz.

18.9.1-teorema. Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayrilganiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (18.9.2)$$

Isboti. A va B hodisalarni quyidagicha birgalikdama hodisalar yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$A = A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}, \quad B = B(A + \bar{A}) = AB + \bar{A}B.$$

Ta'rifga ko'ra $A+B$ hodisa yoki $A\bar{B}$, yoki $\bar{A}B$, yoki AB hodisaning ro'y berishidan iborat, ya'ni $A+B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ va AB hodisalar birgalikda emas. Birgalikdama hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga ko'ra, ushbu

$$P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB) \quad (18.9.3)$$

bo'ladi. Birgalikdama hodisalar uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga ko'ra,

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB), \quad P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$$

munosabatlardan

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) \quad \text{va} \quad P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) \quad (18.9.4)$$

tengliklarni hosil qilamiz. (18.9.4) dagi tengliklarni (18.9.3) ifodaga qo'ysak, u holda (18.9.2) kelib chiqadi.

(18.9.2) formula $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalar uchun quyidagi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

ko'rinishda bo'ladi (Bul formulasi).

18.9.5-teorema. Birgalikda bog'liqmas bo'lgan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarining hech bo'lmaganda bittasining ro'y berishidan iborat A hodisaning ehtimolligi

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \text{ ga teng, bunda } q_i = P(\overline{A_i})$$

18.4-§. To'la ehtimol va Bayes formulalari

18.10. Hodisalar to'la guruhi. Shu paytgacha biror bir hodisaning ro'y berish ehtimolini hisoblashda bu hodisaning ro'y berishi uchun sharoit yaratib beruvchi faktorlarni e'tibordan chetda qoldirdik. Amaliyotda esa bunday holatning uchrashi deyarli mumkin emas. Shu sababli, A hodisa ro'y berishiga ta'sir etuvchi va ma'lum bir shartlarga bo'ysinuvchi faktorlarni e'tiborga olgan holda uning ro'y berish ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun to'la guruh tashkil etuvchi hodisalar to'plamining ba'zi bir xossalarni ko'rib chiqamiz.

Ma'lumki, to'la guruh tashkil etuvchi hodisalar quyidagicha ta'riflanadi.

18.10.1-ta'rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalar to'plamidan hech bo'lmaganda bittasi ro'y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, u holda bu hodisalar to'plami *to'la guruh* tashkil etadi deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar to'la guruh tashkil etsa, u holda

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = U, A_i \cdot A_j = \emptyset = V, i \neq j$$

munosabatlar o'rinalidir.

Masalan. Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1 -faqat bitta talabaning normativni topshirish; A_2 -ikkala talaba

ham normativni topshirishi; A_i -talabalarining ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo'lsa, bu hodisalar to'plami to'la guruh tashkil etadi.

To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalar uchun xos bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

18.10.2-teorema. To'la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, \dots, A_n$ -hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1)$$

Isboti. Ta'rifga asosan, to'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan hech bo'lmaganda birining ro'y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo'lgani uchun

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(U) = 1.$$

18.10.1-ta'rifga asosan, to'la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, **18.7.5-natijaga** ko'ra,

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

bo'ladi.

Hodisalar to'la guruh tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

18.10.3-ta'rif. Agar ikkita hodisa to'la guruh tashkil etsa, u holda bu hodisalar *qarama-qarshi hodisalar* deb ataladi.

Yuqoridagi **18.10.2-teoremaga** asosan, qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p orqali belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q orqali belgilanadi. Shunday qilib, $p + q = 1$.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\bar{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa, izlanayotgan ehtimolni quyidagi

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (3)$$

formula orqali topish qulay bo'ladi.

18.10.4-misol. Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechilishi. A -olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\bar{A}$ -olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

Bunda $P(\bar{A})$ ehtimolni topish osonroq.

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^5}{C_{20}^5}, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

18.11. To'la ehtimollik formulasi. Endi qo'shish va ko'paytirish teoremlarining natijalari sifatida to'la ehtimol va Beyes formulalarini keltiramiz.

A hodisaning ro'y berishida $H_1, \dots, H_n$ -hodisalardan qaysi birining amalga oshishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi sababi $H_1, \dots, H_n$ -hodisalar *gipotezalar* deb ataladi. Biror A hodisa birgalikdamos hodisalarning to'la guruhini hosil qiladigan $H_1, \dots, H_n$ hodisalarning biri bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin. Bu hodisaning har bir gipoteza bo'yicha ehtimolligi ma'lum, ya'ni $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ ($P(H_1) > 0, P(H_2) > 0, \dots, P(H_n) > 0$) berilgan. Bu gipotezalarning har biri amalga oshganda A hodisaning ro'y berishi shartli ehtimolliklari ham ma'lum, ya'ni

$$P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \dots, P_{H_n}(A)$$

ehtimolliklar ma'lum bo'lsin. U holda, A hodisaning ro'y berish ehtimoli qanday topiladi savoliga quyidagi teorema javob beradi.

8.11.1-teorema. Agar A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi, birgalikda bo'lmagan $H_1, \dots, H_n$ -hodisalardan bittasining amalga oshish sharti bilan ro'y bersa, u holda A hodisaning ro'y berish ehtimoli uchun ushbu

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A). \quad (18.11.2)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(18.11.2) formulaga to'la ehtimollik formulasi deyiladi.

Isboti. $H_1, \dots, H_n$ gipotezalar to'la guruhi bo'lganligi uchun, ushbu

$$A = AU = A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $H_1, \dots, H_n$ gipotezalar birgalikdamos, shuning uchun $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ hodisalar ham birgalikdamos. A hodisaning ro'y berish ehtimoli uchun dastlab 18.7.1-teoremani, keyin esa, 18.8.11-teoremani qo'llab, natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AU) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \\ &= P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A). \end{aligned}$$

18.12. Beyes formulasi. *Masalaning qo'yilishi.* Birgalikdamos $H_1, \dots, H_n$ gipotezalar to'la guruhi berilgan. Bu gipotezalarning har birining ehtimolligi $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ ma'lum. Tajriba o'tkaziladi va uning natijasida A hodisa ro'y beradi, bu hodisaning har bir gipoteza bo'yicha ehtimolligi, ya'ni $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ ma'lum. A hodisa ro'y berishi munosabati bilan gipotezalarning ehtimolliklarini qayta baholash, boshqacha aytganda, $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$ shartli ehtimolliklarni topish talab qilinadi.

Bu qo'yilgan masalaga ushbu gipotezalar teoremasi javob beradi.

18.12.1- teorema (gipotezalar teoremasi). $H_1, \dots, H_n$ lar hodisalarining to'la guruhini tashkil qilib, $P(H_1) > 0, P(H_2) > 0, \dots, P(H_n) > 0$ va $P(A) > 0$ bo'lsa, u holda A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng H_k ($i = 1, 2, \dots, n$) ($k = 1, 2, \dots$) gipotezalarning ehtimollarini uchun

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18.12.1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(18.12.1) formulalar Beyes formulalari deb ataladi (Tom Beyes (1702-1761)-ingliz matematigi).

Isboti. 18.8.11-teoremaga asosan, quyidagi

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i / A) \text{ va } P(AH_i) = P(H_i)P(A / H_i)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu formulalarni taqqoslab, ushbu

$$P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A / H_i)$$

tenglikni hosil qilamiz, bundan

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{P(A)}$$

$P(A)$ ni (18.11.2) to'la ehtimollik formulasi yordamida ifodalab, (18.12.1) formulani hosil qilamiz.

Xususan tajriba o'tkazilishidan oldin barcha gipotezalar teng ehtimollik, ya'ni $P(H_1) = P(H_2) = \dots = P(H_n)$ bo'lsa, u holda (18.12.1) formula ushbu ko'rinishini oladi:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^n P(A / H_k)}$$

18.5-§. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari

18.13. Erkli sinovlar ketma-ketligi. Bernulli formulasi. Ma'lumki, hodisani kuzatish uchun o'tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribada ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lishi yoki bog'liq bo'lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor. Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo'lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin: a) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinadi; b) har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmaydi. Har birini alohida ko'rib chiqamiz.

a) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng yana qaytarib qutiga solinsa, har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{m}{n+m}.$$

b) Agar har bir tajribada olingan shar tajribadan so'ng qaytarib qutiga solinmasa, har bir tajribada $P(A)$ ehtimolning qiymatini hisoblash uchun oldingi tajriba natijasini ehtiborga olishga majburiy. Haqiqatan ham, birinchi tajribada $P(A) = \frac{m}{n+m}$ bo'ladi, ikkinchi tajribada $P(A) = \frac{m-1}{n+m-1}$

(birinchi tajriba natijasi A hodisa bo'lsa) yoki $P(A) = \frac{m}{n+m-1}$ (birinchi tajriba natijasi $\bar{A}$ hodisa bo'lsa) va hakoza, ya'ni ikkinchi tajribadan boshlab har bir tajribaning natijasi oldingi tajribalar natijasiga bog'liq.

Bu misolning a) holatdagi tajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

18.13.1-ta'rif. Agar o'tkazilayotgan tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi (ikkinchi tajribadan boshlab) oldingi tajribalar natijasiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu tajribalar ketma-ketligi *erkli sinovlar ketma-ketligi* deb ataladi.

Masalan, o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi boshqa tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog'liqmasligi ravshan, binobarin biz bu yerda bog'liqmas sinovlar ketma – ketligiga yegamiz.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo'lgan *murakkab hodisa* tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligining har bir tajribasida A hodisaning ro'y berish ehtimoli yo har xil, yoki bir xil bo'lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikining har bir tajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisa ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunki p ga teng deb hisoblaymiz, u holda ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$. Masalan, o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog'liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3

ochkoning chiqishini qarasak, bu erda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz va $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}$.

18.13.2-teorema. Agar bir xil sharoitda o'tkaziladigan n ta bog'liqmas sinovning har biri A hodisa $P(A)=p$ ehtimollik bilan ro'y bersa, ro'y bermaslik ehtimoli esa $P(\bar{A})=q=1-p$ bo'lsa, u holda n ta sinovda rosa k marta ro'y berish ehtimolligi ushbu

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (18.13.3)$$

formulasi orqali topiladi.

(18.13.3)- formulaga Bernulli (binomial) formulasi (sxemasi) deb ataladi.

Isboti. n ta sinashda A hodisaning k marta ro'y berish, yoki $n-k$ marta ro'y bermaslik $P_n(k)$ -ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o'tkazilgan n ta tajribani bitta murakkab tajriba deb qarasak, bu tajribaning natijasi $A_1, A_2, \dots, A_n$ ko'rinishda bo'lib, uning har bir A_i ($i = \overline{1, n}$) hadi yoki A , yoki $\bar{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^n ta bo'ladi. Haqiqatan ham, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisaning $A_i = A$ ($i = \overline{1, n}$) shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisaning $\underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{n \text{ ta}}$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta;

k) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisaning $\underbrace{AA \dots AA}_k \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k}$ ko'rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta;

n) $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisaning $A_i = \bar{A}$ ($i = \overline{1, n}$) shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda gruppalash xossasiga asosan, $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ bo'ladi.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro'y berishini B hodisa deb qarasak,

$$B = \underbrace{AA \dots AA}_k \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k} + \underbrace{AA \dots AA}_{k-1} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k} A + \dots + \underbrace{AA \dots AA}_{n-k} \underbrace{\bar{A} \bar{A} \dots \bar{A}}_k \quad (18.13.4)$$

bo'lib, u C_n^k ta haddan iborat bo'ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo'lganligi sababli, **18.8.6-teoremasiga** asosan, (18.13.4) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$ bilan aniqlanadi, u holda (18.13.4) ifodada yig'indidagi har bir had birgalikmasligini e'tiborga olsak, ushbu

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\underbrace{AA \dots AA}_{k} \underbrace{AA \dots A}_{n-k} + \underbrace{AA \dots AA}_{k-1} \underbrace{AA \dots A}_{n-k} + \dots + \underbrace{AA \dots AA}_{n-k} \underbrace{A}_{k}) = \\ &= \underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \dots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ ta had}} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n \quad (18.13.5) \end{aligned}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(18.13.3) binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n = C_n^0 p^n q^0 + C_n^1 p^{n-1} q^1 + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalaydi.

Xususiyl holda,

$$P_n(n) = p^n \text{ va } P_n(0) = q^n,$$

bularni bog'liqmas hodisalarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra, ham bevosita hosil qilish mumkin.

n marta sinashda hodisaning: 1) kamida k_1 marta; 2) ko'pi bilan k_1 gacha ro'y berish; 3) k_1 bilan k_2 oralig'ida ro'y berish ehtimollari mos holda quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$1) P_n(k \geq k_1) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(n);$$

$$2) P_n(k < k_1) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k_1 - 1);$$

$$3) P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2).$$

18.13.6-ta'rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro'y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo'lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo'lsa, ya'ni $P_n(k_0) = \max_{0 \leq k \leq n} \{P_n(k)\}$ bo'lsa, u holda k_0 soni- eng ehtimolli son deb ataladi. Bu son

$$k_0 = [np + p]$$

formula bo'yicha topiladi. $[x]$ simvol orqali x sonning butun qismi belgilanadi.

18.13.7-misol. Har bir detalning standart bo'lish ehtimoli $p = 0,8$ bo'lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Misolning shartiga ko'ra, $n = 5$, $m = 2$, $p = 0,8$ va $q = 0,2$. (18.13.3) Bernulli formulasiga asosan, izlanayotgan ehtimolini topamiz:

$$P_2(2) = C_5^2 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3!2!} 0,00512 = 0,0512.$$

18.13.8-eslatma. Binomial sxemasini keltirib chiqarishda erkli sinovlar ketma-ketligining har bir sinashida A hodisaning ehtimoli bir xil, p ga teng deb hisoblangan edi. Endi esa bu ehtimollarni turlicha bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $P(A_i) = p_i$, $P(\bar{A}_i) = q_i$, u holda (18.13.5) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$P_n(k) = p_1 p_2 \dots p_k q_{k+1} \dots q_n + p_1 q_2 p_3 \dots p_{k+1} q_{k+2} \dots q_n + q_1 q_2 \dots q_{n-k} p_{n-k+1} \dots p_n. \quad (18.13.9)$$

(18.13.9) formulaning o'ng tomonini hosil qilish uchun

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z)$$

ko'paytmani qarab z^k ning koeffitsientlarini olish kifoya, bu yerda z ixtiyoriy parametr bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $P_n(k)$ ehtimollarni hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

18.13.10-eslatma. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo'lgan polinomial sxemani ko'rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa A va $\bar{A}$ qaralgan bo'lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to'la gruppasi hosil qiluvchi k ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo'ladiki, n ta erkli sinov o'tkaziladi va ularning har birida to'la gruppasi hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, \dots, A_k$ hodisaning faqat bittasi ro'y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma'lum:

$$p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), \dots, p_k = P(A_k).$$

n tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta, ..., A_k hodisa m_k marta ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$) ro'y berish ehtimoli

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}.$$

Xususiyl holda, $k = 2$ bo'lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

18.14. Limit teoremlari va ularning amaliy ahamiyati. n erkli sinovda A hodisaning k marta ro'y berish ehtimolini hisoblashga imkon beruvchi Bernulli formulasini keltirib chiqarish uchun har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimolini o'zgarmas deb faraz qilganmiz. Agar n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak juda katta sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishimizga to'g'ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsin. Tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo'lish ehtimolini topilsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lgan 500 ta erkli tajriba o'tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{500}(25) = C_{500}^{25} (0,25)^{25} \cdot (0,75)^{475},$$

bu erda

$$C_{500}^{25} = \frac{476 \cdot 477 \cdot \dots \cdot 499 \cdot 500}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 25}.$$

Bu misoldan ko'rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $P_n(k)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug'iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida *limit teoremlari* deb ataluvchu teoremlarda keltiriladi.

18.14.1-teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) o'zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun, k ning $\frac{|k - np|}{\sqrt{npq}} < C, (C = \text{const})$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, tekis ravishda,

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \quad (1)$$

tenglik bajariladi, bu erda $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Bu teoremani Muavr 1730 yilda $p = \frac{1}{2}$ uchun, so'ngra Laplas 1783 yilda $p \in (0,1)$ uchun isbotlagan.

Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. Chunki, $\varphi(x)$ funksiya juft, ya'ni $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \quad (18.14.2)$$

n ning katta qiymatlarida (18.14.2) ning aniqligi oshib boradi.

18.14.3-teorema (Muavr- Laplasning integral teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) o'zgarmas bo'lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P_n(k_1, k_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

munosabat k_1 va k_2 ($-\infty \leq x' \leq x'' \leq \infty$) ga nisbatan tekis bajariladi, bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \quad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ integralning

qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0 \leq x \leq 5$ kesmaga mos bo'lgan qiymatlari berilgan, chunki $x > 5$ lar uchun $\Phi(x) = 0,5$

deb olish tavsiya etiladi. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya'ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, bo'lgani uchun jadvalda $x < 0$ uchun funksiya qiymatlari berilmagan.

18.14.4-teorema (Puassonning limit teoremasi). Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro'y berishida, k fiksirlangan, n va p esa o'zgaruvchan bo'lib, n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intilsaki, $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo'lib qolaversa: $\lambda = np = \text{const}$, ya'ni turli sondagi tajribalar ketma-ketligida (n turlicha bo'lganda ham) ham A hodisa ro'y berishining o'rtacha soni np o'zgarmay qolaversa, $P_n(k)$ ehtimollik uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Tasodifiy vaqtda ro'y beradigan hodisalar ketma-ketligi *hodisalar oqimi* deyiladi. Masalan, tez yordam chaqirig'i, aeroportga samolyotning kelishi, firmaga mijozning kelishi va boshqalar.

Har qanday vaqt oralig'ida k hodisaning ro'y berish ehtimoli faqat k songa va vaqt oralig'iga bog'liq bo'lishi *statsionarlik (o'zgarmaslik) xossasini* xarakterlaydi.

Agar hodisalar oqimi statsionarlik xossasiga ega bo'lsa, u holda t vaqt oralig'ida k hodisaning ro'y berish ehtimoli faqat k va t bog'liq funksiya bo'ladi.

Agar cheksiz kichik vaqt oralig'ida ko'pi bilan bitta hodisa ro'y berishi mumkin bo'lsa, u holda hodisalar oqimi *ordinarlik* xossasiga ega deyiladi.

Agar hodisalar oqimi ordinarlik, statsionar xossalariga ega bo'lib, davomiy bo'lmasa uni *oddiy (puasson) oqim* deb ataymiz.

Oddiy oqimning t vaqt oralig'ida k marta ro'y berish ehtimoli Puasson formulasi

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

bilan aniqlanadi, bu erda λ *oqimning intensivligi* deb atalib vaqt birligida ro'y beradigan hodisalarining o'rtacha sonini bildiradi.

18.6-§. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berilish usullari

18.15. Tasodifiy miqdorning ta'rif. Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollik nazariyasining markaziy tushunchalaridan biridir.

18.15.1-ta'rif. *Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo'lgan, oldindan noma'lum va tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayib ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.*

Tasodifiy miqdorlar odatda lotin alfavitining bosh harflari $X, Y, \dots$ bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlari esa, tegishla kichik harflari $x, y, \dots$ bilan belgilanadi.

Amaliyotda duch keladigan tasodifiy miqdorlardan ushbu ikki xilini ajratish mumkin: *diskret tasodifiy miqdorlar va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.*

18.15.2- ta'rif. *Diskret tasodifiy miqdor deb mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki cheksiz sonli ketma – ketligidan iborat miqdorga aytiladi.*

Diskret tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1) X tasodifiy miqdor – 100 ta buyumdan iborat guruhdagi nuqsonli buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari bunday bo'ladi: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{101} = 100$; 2) Y tasodifiy miqdor nishonga birinchi marta tekkizishgacha bo'lgan o'q uzishlar soni. Bu yerda mumkin bo'lgan qiymatlar cheksiz sonli ketma – ketlik hosil qiladi: $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3, \dots$

18.15.3- ta'rif. *Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari son o'qining biror (chekli yoki cheksiz) oralig'ining butunlay to'ldiradigan miqdorga aytiladi.*

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1) X tasodifiy miqdor – biror fizik kattalikni o'lchash natijasi; 2) T tasodifiy miqdor – asbobning buzilmasdan ishlash vaqti.

18.16. Diskret tasodifiy miqdor ehtimolliklarining taqsimot qonuni. Diskret tasodifiy miqdorni tasvirlash uchun yeng avvalo uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Biroq X diskret tasodifiy muqdor uchun uning faqat mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots$ nigina emas, balki $X = x_1, X = x_2, \dots$ hodisalarning ehtimolliklarini ham, ya'ni $P_i = P(X = x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ ni ko'rsatish lozim.

18.16.1- ta'rif. Tasodifiy miqdorning qiymatlari bilan ularning ehtimolliklari orasidagi bog'lanishini *tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.*

Tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo'lishi mumkinligini aytib o'tamiz.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo'lib, bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yozilgan va ularga mos ehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$X = \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}.$$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymatlari odatda ortib borish tartibida yoziladi. Bunday jadval tasodifiy miqdorning taqsimot qatori nomi bilan yuritiladi. Jadvalning yuqori satrida X miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yozilganligi va $X = x_i (i=1, 2, \dots, n, \dots)$ hodisalarning har ikkitasi birgalikdamosligi sababli $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Absissalar o'qida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qida esa ularga mos ehtimolliklarni qo'yiladi. $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ nuqtalarni kesmalar bilan tushuntiriladi. Bunda hosil bo'lgan shakl **taqsimot ko'p burchagi** deb aytiladi.

18.16.2-misol. Idishda 10 ta shar bor, ulardan 3 tasi oq. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor olinagan oq sharlar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$ $P = \frac{C_m^m C_{N-m}^{n-m}}{C_N^n}$ formulaga asosan,

$X=0, X=1, X=2$ va $X=3$ hodisalarning ehtimolliklarini topamiz:

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}, \quad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120};$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{120}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}.$$

Endi X miqdorning taqsimot qatorini yozishimiz mumkin:

$$X = \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 35 & 63 & 21 & 1 \\ \hline 20|120 & 120 & 120 & 120 \end{array}$$

Tekshirish: $\frac{35}{120} + \frac{63}{120} + \frac{21}{120} + \frac{1}{120} = 1$.

18.16.3-ta'rif. X tasodifiy miqdorning yeng katta ehtimollik qiymati uning *modasi deb ataladi*.

18.17. Diskret tasodifiy miqdorlar ustida amallar.

18.17.1. Tasodifiy miqdorning funksiyasi. X taqsimot qonuni ma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor bo'lsin:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array} \right. \quad (18.17.2)$$

$y = f(x)$ yesa bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yotadigan sohada aniqlangan monoton funksiya bo'lsin. U holda $y = f(x)$, ya'ni diskret miqdor bo'ladi, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $f(x_1), f(x_2), \dots$ bo'lib, shu bilan birga Y tasodifiy miqdorning $f(x_i)$ qiymatini qabul qiladigan ehtimolligi X tasodifiy miqdorning x_i qiymatni qabul qiladigan ehtimolligiga teng. Shunday qilib, $Y = f(x)$ tasodifiy miqtorning taqsimot qonuni bunday bo'ladi:

$$Y = f(X) = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array} \right.$$

18.17.3- misol. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,15 & 0,25 \end{array} \right.$$

bo'lsa, $Y = 4X$ tasodifiy miqtorning taqsimot qonunini yozing.

Yechish. (18.17.2) formulaga asosan quyidagiga yegamiz:

$$Y = 4X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} -4 & 0 & 4 & 12 & 20 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,15 & 0,25 \end{array} \right.$$

Agar $f(x)$ nomonoton funksiya bo'lsa, u holda u X ning turli qiymatlarda bir xil qiymatlar qabul qilishi mumkin. Bu holda oldin (18.17.2)

ko'rinishdagi yordamchi jadval tuzib olinadi, keyin yesa Y tasodifiy miqdorning bir xil qiymatlari ustunlari birlashtiriladi, bunda mos ehtimolliklar qo'shiladi.

18.17.4-misol. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c} -3 & -2 & 1 \\ \hline 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0,3 \end{array} \right.$$

bo'lsa, $Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Yechish. $Y = X^2$ uchun yordamchi jadval bunday bo'ladi:

$$Y = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 9 & 4 & 1 \\ \hline 0,2 & 0,1 & 0,4 \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c} 9 \\ 0,3 \end{array} \right|. \text{ Demak, } Y = X^2 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 9 \\ \hline 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{array} \right\}.$$

18.17.5. Ikkita tasodifiy miqdorning yig'indisi va ko'paytmasi. Ushbu ikkita tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\} \text{ va } Y = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \hline q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array} \right\}.$$

18.17.6- ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning yig'indisi deb, $z_{ij} = x_i + y_j$ ko'rinishdagi qiymatlarni $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ ehtimollik bilan qabul qiladigan Z tasodifiy miqdorga aytiladi.

Agar barcha mumkin bo'lgan qiymatlar turlicha bo'lsa, u holda $Z = X + Y$ tasodifiy miqdor ushbu ko'rinishdagi taqsimotga ega bo'ladi:

$$Z = X + Y = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & x_1 + y_3 \\ \hline p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22} & p_{13} \end{array} \right\}$$

18.17.7-ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning ko'paytmasi deb, $z_{ij} = x_i y_j$ ko'rinishdagi qiymatlarni $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ ehtimollik bilan qabul qiladigan Z tasodifiy miqdorga aytiladi.

18.18. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot va zichlik funksiyalari. Ma'lumki diskret tasodifiy miqdorlarning berilish usullaridan biri taqsimot qonunini, ya'ni u qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxati va bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari ko'rsatilgan jadvalni tuzishdan iborat

edi. Diskret tasodifiy miqdorlarning bu ko'rinishdagi berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar ro'yxatini tuzish mumkin emas. Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta'riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

18.18.1-ta'rif. X tasodifiy miqdorning *taqsimot funksiyasi* deb, uning x (x -ixtiyoriy haqiqiy son) dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi $F(x) = P(X < x)$ funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)$ - funksiyani integral taqsimot funksiyasi (qonuni) deb ham ataladi.

Endi bu taqsimot funksiyasidan foydalanib uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini berish mumkin.

18.18.2-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$ -taqsimot funksiyasi uzluksiz va differentsiallanuvchi bo'lsa, bu tasodifiy miqdor *uzluksiz tasodifiy miqdor* deyiladi.

18.18.3-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)$ -taqsimot funksiyasi chekli yoki sanoqli sondagi birinchi tur uzulishlarga ega bo'lsa, bu tasodifiy miqdor *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari quyidagi xossalarga ega.

1^o. Taqsimot funksiyaning qiymatlari $[0; 1]$ kesmaga tegishli:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Isboti. Bu xossaning isboti taqsimot funksiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan, ya'ni $F(x) = P(X < x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2^o. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

Isboti. Faraz qilamiz $x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $(X < x_2)$ oraliqni quyidagicha yozib olish mumkin $(X < x_2) = (X < x_1) + (x_1 \leq X < x_2)$. $(X < x_1), (x_1 \leq X < x_2)$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2) \quad (18.18.4)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ehtimolning nomanfiyligidan kerakli natijani olamiz 2^0 -xossadan quyidagi natijalarni keltirib chiqarish mumkin.

18.18.5-natija. X tasodifiy miqdorning $[a; b]$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi.

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Buning isboti (18.18.4) formulada $x_1 = a, x_2 = b$ almashtirishdan kelib chiqadi

18.18.6-natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning faqat bitta aniq qiymatni qabul qilishi ehtimoli nolga teng, ya'ni $P(X = x_0) = 0$.

Buning isboti (18.18.4) formulada $x_1 = x_0, x_2 = x_0 + \Delta x$ almashtirish so'ngra $\Delta x \rightarrow 0$ limitni hisoblashdan kelib chiqadi.

Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta qiymatni qabul qilish ehtimolini hisoblashning ahamiyati yo'q va shunga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

3⁰. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari $(a; b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = 1.$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

18.18.7-natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Yuqoridagi xossalardan foydalanib tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasining grafagini sxematik chizish mumkin.

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Ammo tasodifiy miqdorlarni faqat taqsimot

funksiyalari yordamida emas, balki boshqa funksiyalar bilan ham aniqlash mumkin. Buning uchun zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo'ladi.

18.18.8-ta'rif. Tasodifiy miqdorning *zichlik (differensial) funksiyasi* deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x) = F'(x). \quad (18.18.9)$$

(18.18.9) formuladan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

kelib chiqadi. $P(x \leq X \leq x + \Delta x)$ surat X tasodifiy miqdor $[x, x + \Delta x]$ oraliqda yotgan qiymatni qabul qilish ehtimolligi «massasini» bildiradi.

Demak, $\frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$ ehtimollikning $[x, x + \Delta x]$ oraligida o'rtacha zichligini, $f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$ esa, X tasodifiy miqdorning x nuqtadagi ehtimollik zichligini bildiradi.

Uzlüksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo'lib, bu funksiya yordamida uzluksiz tasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu erda ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

18.18.10-teorema. X uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollarining $(a; b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Isboti. Ma'lumki, 18.18.5-natijaga asosan,

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

Agar bu yerda N'yuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifi (18.18.9) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasini ma'lum bo'lsa uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ integraldan foydalaniladi.

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1⁰. $f(x)$ -differensial funksiya nomanfiy funksiyadir, ya'ni $f(x) \geq 0$.

Isboti. Bu xossa $f(x)$ differensial funksiya kamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2⁰. Agar tasodifiy miqdor butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lsa quyidagi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta'rifiga asosan, ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$$

bo'ladi.

18.18.11-eslatama. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) oraliqdan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

ko'rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardan Ox o'q, $f(x)$ funksiya, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

18.18.12-eslatama. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mavjud.

18.18.13-eslatama. X uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ushbu $P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$ bo'ladi.

18.7-§. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

18.19. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari. Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonun X

miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Ammo ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug'diradi va biz kam ma'lumot bilan chegaralanishimizga to'g'ri keladi. Ba'zida esa tasodifiy miqdorni umumlashtiruvchi sonlarni qo'llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalarini deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashidir.

Tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalaridan biri *matematik kutilma* deb ataladi. Matematik kutilma tasodifiy miqdorning o'rta qiymatiga taxminan tengdir. Juda ko'p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. *Masalan*, viloyatlarni taqqoslovchi ko'rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o'rtachasi, ya'ni matematik kutilmasidir.

18.19.1-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\}$$

berilgan bo'lsin. U holda uning $M(X)$ -matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheskiz, ya'ni X tasodifiy miqdor

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array} \right\}$$

taqsimotga ega bo'lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (18.19.2)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda (18.19.2) qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo'lmaydi.

18.19.3-misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p bo'lsa, bitta tajribada A hodisa ro'y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechilishi. Bitta tajribada A hodisaning ro'y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1=1$ (A hodisa ro'y berdi), bunda $P(X=x_1)=p$; $x_2=0$ (A hodisa ro'y bermadi), bunda $P(X=x_2)=q$. U holda: $M(X)=p$.

X tasodifiy miqdor ustida n marta sinov o'tkazilib, uning natijalari quyidagicha bo'lsin:

$$\begin{array}{l} X: x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k \\ n: n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k \end{array}$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya'ni x_i ($i=\overline{1,k}$) qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\bar{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n},$$

yoki

$$\bar{X} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \frac{n_k}{n} = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \dots + x_k W_k$$

Bu yerda $W_1, W_2, \dots, W_k$ - mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\bar{X} = M(X)$, ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1^o. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o'zgarmasning o'ziga teng: $M(C) = C$.

Isbot. C o'zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M(C) = C \cdot 1 = C$.

18.19.4-eslatma. X diskret tasodifiy miqdorning o'zgarmas C kattalikka ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz: $X: x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow CX: Cx_1, Cx_2, \dots, Cx_n$.

2⁰. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin: $M(CX) = CM(X)$.

Isbot. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\}$$

ko'rinishda bo'lsin. Uholda **18.19.4-eslatmaga** asosan,

$$CX = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \right\}.$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(CX) = Cx_1 p_1 + Cx_2 p_2 + \dots + Cx_n p_n = CM(X).$$

3⁰. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

4⁰. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarning ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) M(X_2) \dots M(X_n).$$

3⁰-xossadan va **18.19.3-misoldan** foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin

18.19.5-teorema. n ta bog'liqmas tajribalarda A hodisa ro'y berishining matematik kutilmasi: $M(X) = np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Masalan,

$$X: -0,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad Y: -50 \quad 0 \quad 50$$

$$p: \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,3 \quad p: \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,3$$

tasodifiy miqdorlarda $M(X) = M(Y) = 0$, ammo ularning mumkin bo'lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika-dispersiya tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

18.19.6-ta'rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning *chetlanishi* deb ataymiz va $X - M(X)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko'rsatuvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

18.19.7-teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtachasi atrofida joylashish tarqoqligini baholash tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi 2-teoremadan ko'rinib turibdi.

18.19.8-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $D(X)$ -dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishni oladi:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

18.19.9-ta'rif. X tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$ -o'rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Dispersiyaning o'lchamligi tasodifiy miqdor o'chligining kvadratiga tengdir. O'rta kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o'lchami bilan bir xil bo'ladi.

Agar X biror bir qimmat baho qag'ozning daramodliligi bo'lsa, $M(X)$ uning o'rta daromadliligi, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

18.19.10-misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish sonining matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rta kvadratik chetlanishini toping.

Yechilishi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$X: 0 \ 1$$

$$p: q \ p$$

U holda,

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \quad D(X) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p = qp^2 + pq^2(p + q) = qp;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

Dispersiyaning hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish tavsiya etiladi:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega.

1^o. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

Isboti. C o'zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M(C) = C \text{ va } D(C) = (C - C)^2 \cdot 1 = 0.$$

2^o. O'zgarmas ko'paytuvchi dispersiya belgisidan kvadrati bilan chiqariladi:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3⁰. Chekli sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

18.19.10-natija. Bog'liqmas ikkita tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng.

18.20.Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari. Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari katta ahamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

18.20.1-ta'rif. Mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervalga tegishli bo'lgan x uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb, ushbu

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad (18.20.2)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar x uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar Ox o'qqaga tegishli bo'lsa, u holda matematik kutilma formulasi (18.20.2) quyidagi ko'rinishni oladi

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (18.20.3)$$

Bu holatda (18.20.3) xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

18.20.4-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning *dispersiyasi* deb uning matematik kutilmadan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi.

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) intervalga tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx \quad (18.20.5)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari Ox o'qqa tegishli bo'lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \quad (18.20.6)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (18.20.5) va (18.20.6) formuladan foydalanish noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (18.20.5) formulaning qulay ko'rinishini keltirib chiqaramiz.

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - 2 \int_a^b x M(X) f(x) dx + \int_a^b M^2(X) f(x) dx = \\ &= M(X^2) - 2M(X) \int_a^b x f(x) dx + M^2(X) \int_a^b f(x) dx = M(X^2) - M^2(X). \end{aligned}$$

(18.20.6) formulaga ham bu ko'rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko'p hollarda dispersiyani hisoblash uchun

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

formuladan foydalaniladi.

Ushbu

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

formula bilan aniqlanuvchi kattalik uzluksiz tasodifiy miqdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deyiladi.

18.20.7-eslatma. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalarining xossalari o'rinli bo'ladi.

18.8-§. Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdolar

18.21. Binomial taqsimot. n ta erkli tajriba o'tkazilyotgan bo'lsin. Agar X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$X = \left\{ \frac{0}{q^n} \mid \frac{1}{npq^{n-1}} \mid \dots \mid \frac{k}{C_n^k p^k q^{n-k}} \mid \dots \mid \frac{n}{p^n} \right\}$$

ko'rinishda bo'lsa, X binomial qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi. $q^n + npq^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + p^n = (p+q)^n = 1$ bo'lishini aytib o'tamiz.

Bernulli sxemasida X tasodifiy miqdor har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi bir xil va p ga teng bo'lgan n ta bog'liqmas sinovda A hodisaning ro'y berishlar sonini ifodalasin. Bu holda, ilgari ko'rsatilgandek, $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, ya'ni X miqdor binomial taqsimotga ega.

18.21.1-misol. Nishonga qarata uchta o'q uzildi. Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolligi $p=0,4$. X tasodifiy miqdor – nishonga tegishlar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. X tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega va uning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2 va 3. Shuning uchun

$$P(X=k) = \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot (0,4)^k \cdot (0,6)^{3-k}.$$

Bundan

$$P(X=0) = 0,216; P(X=1) = 0,432; P(X=2) = 0,288; P(X=3) = 0,064.$$

X tasodifiy miqdorning taqsimoti ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$X = \left\{ \frac{0}{0,216} \mid \frac{1}{0,432} \mid \frac{2}{0,288} \mid \frac{3}{0,064} \right\}.$$

Asosiy sonli xarakteristikalar. Binomial taqsimlangan X tasodifiy miqdorni har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p ga teng bo'lgan n ta bog'liqmas sinovda ro'y berishlar soni deb qarash mumkin bo'lganligi

uchun uni bog'liqmas taslidiy miqdorlar yig'indisi ko'rinishda bunday ifodalaymiz:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

bu yerda X_i – shu A hodisaning i –sinovda ro'y berish soni ($i=1,2,\dots,n$).
 Ilgari biz $M(X_i) = p, D(X_i) = pq$ bo'lishini ko'rsatgan edik. Shu sababli

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots +$$

$$+ M(X_n) = p + p + \dots + p = np,$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots +$$

$$+ D(X_n) = pq + pq + \dots + pq = npq,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

18.22. Puasson taqsimoti. 1. n ta erkli tajriba o'tkazilyotgan bo'lsin.
 Agar X tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ qiymatlarini

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (\lambda > 0)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, ya'ni uning taqsimoti

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \hline e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \dots \\ \hline \end{array}$$

ko'rinishda bo'lsa, u Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan deb ataladi.

Ehtimolliklar yig'indisi 1 ga tengligini tekshirish qiyin emas:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \dots &= e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} + \dots \right) = \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Quyidagi isbotlash mumkin: agar Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarlicha katta, p ehtimollik esa, kichik ($p \leq 0,1$) bo'lsa, u holda ushbu taqribiy formula o'rinli:

$$P(X=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ bunda } \lambda = np. \quad (18.22.1)$$

Shunday qilib, binomial taqsimot sinovlar soni katta bo'lganda Puasson taqsimotiga yaqinlashadi.

18.22.2-misol. 800 ta urchuqning har biriga τ vaqt ichida ipning uzilish ehtimolligi 0,005 ga teng. Ko'rsatilgan vaqt ichida rosa 4 ta ip uzilish ehtimolligini toping.

Yechilishi. Bu masalani yechishda (18.22.1) formulani qo'llash mumkin: chunki $n=800$ sonini katta, $p=0,005$ ehtimolligini esa kichik deb hisoblash mumkin. Bu formuladan foydalanib topamiz, $\lambda = np = 800 \times 0,005 = 4$;

$$P_{800}(4) \approx \frac{4^4}{4!} e^{-4} = \frac{256}{24} \cdot 0,0183 = 0,1952.$$

Aniq formula bo'yicha hisoblash 0,1959 ni beradi, demak, Puasson formulasini qo'llanishdagi xatolik 0,0007 bo'ladi. Laplasning lokal formulasi bo'yicha hisoblash bilan esa, 0,2000 ni hosil qilamiz, demak xatolik 0,0051 bo'ladi, ya'ni Puasson formulasidan foydalanilganidan ko'ra 6 marta ortiq bo'ladi.

2. Asosiy sonli xarakteristikalari.

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \\ M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1) + 1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \end{aligned}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k - 1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k - 1}{(k-1)!} \right) = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k - 2}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Shunday qilib, $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Puasson taqsimotida tasodifiy miqdorning dispersiyasi uning matematik kutilishiga teng.

18.23. Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to'xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro'y berishigacha bo'lgan tajribalar soni bo'lsin. Agar $(k-1)$ -tajribagacha A hodisa ro'y bermasdan k -tajribada ro'y bersa, bu murakkab hodisaning ehtimoli

$$P(X = k) = q^{k-1}p \quad (18.23.1)$$

formula bilan aniqlanadi. (18.23.1) formulada $k=1,2,\dots$ deb qarab, ushbu

$$\begin{array}{ccccccc} X: & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p: & p & qp & q^2p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{array}$$

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi va (18.23.1) formula uning analitik ko'rinishi bo'ladi.

18.23.2-eslatma. Geometrik taqsimot qonunida $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n p_i = 1$.

18.24. Tekis taqsimot.

18.24.1-ta'rif. Tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdor deb zichligi biror $[a,b]$ kesmada o'zgarmas va $1/(b-a)$ ga teng, bu kesmadan tashqari esa nolga teng, ya'ni

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ bo'lganda,} \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > b \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

bo'lgan tasodifiy miqdorga aytiladi.

Ushbu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ekanligini tekshirish oson.

Haqiqattan ham,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1.$$

Tekis taqsimot uchun $F(x)$ taqsimot funksiyasini topamiz. Agar

$$a \leq x \leq b \text{ bo'lsa, u holda } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Ravshanki, $x < a$ da $F(x) = 0$, $x > b$ da $F(x) = 1$. Shunday qilib,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > b \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

2. Asosiy sonli xarakteristiklari:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2(b-a)} x^2 \Big|_a^b = \frac{a+b}{2},$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} x^3 \Big|_a^b = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12},$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

18.25. Ko'rsatgichli taqsimot

18.25.1-ta'rif. Taqsimot zichligi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lgan X tasodifiy miqdor *ko'rsatgichli taqsimotga* ega deyiladi, bu yerda λ – biror tayin musbat son.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ shartning bajarilishini tekshiramiz. Haqiqatan ham,

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1.$$

Ko'rsatgichli taqsimotning integral funksiyasi quyidagi ko'rinishda ekanligini tekshirish oson:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalari: a) matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Bo'laklab integrallash usulini tadbqiq etib va $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$ deb olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$M(X) = x(-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Shunday qilib, $M(X) = 1/\lambda$.

b) Dispersiyani va o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - M^2(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - M^2(X) = -xe^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ 2 \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx - M^2(X) = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$D(X) = 1/\lambda^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1/\lambda.$$

18.26. Normal taqsimot (Gauss taqsimoti)

18.26.1-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} (\sigma > 0) \quad (18.26.1)$$

ko'rinishda bo'lsa, u *normal qonun bo'yicha taqsimlangan deb ataladi* (18.2-chizma).

$f(x)$ funksiyaning musbatligi ravshan. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ shartning bajarilishini, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

tenglikning to'g'riligini tekshiramiz. Bu integralda o'zgaruvchi $t = \frac{x-a}{\sigma}$ deb o'zgartiramiz. U holda $x = \sigma t + a$, $dx = \sigma dt$ va

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning taqsimot zichligi ikkita parametr - a va σ ga bog'liqligi (18.26.1) formuladan ko'rinish turibdi.

$f(x)$ funksiyani $a=0$ bo'lganda qaraymiz:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

va uning asosiy xossalari aniqlaymiz

1⁰. Bu funksiya butun son o'qida aniqlangan, uzluksiz va musbat.

2⁰. Bu funksiya juft va, demak, Oy o'qiga nisbatan simmetrik.

3⁰. 0 dan $+\infty$ gacha kamayuvchi, $-\infty$ dan 0 gacha o'suvchi.

4⁰. $x \rightarrow \pm\infty$ da grafigi Ox o'qqa asimtotik yaqinlashadi.

5⁰. $x=0$ nuqtada funksiya $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ ga teng bo'lgan yagona maksimumga ega. σ ning ortishi bilan maksimumning qiymati kamayada, bu funksiya grafigi va absissalar o'qi bilan chegaralangan yuza 1 ga teng bo'lganligi σ

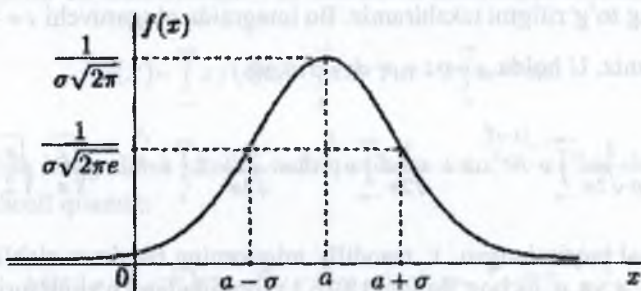
ortishi bilan zichlik egri chizig'i yassilanib boradi, u asta – sekin Ox o'qqa yaqinlashadi, σ kamayishi bilan esa zichlik egri chizig'i Ox o'qining kichik qismida o'qining maksimumi atrofida yuqoriga cho'ziladi, keyin esa unga (Ox o'qqa) tez tortiladi.

Funksiya grafikdan, agar $a > 0$ bo'lsa a qadar o'ngga, agar $a < 0$ bo'lsa, $|a|$ qadar chapga surish bilan hosil qilinadi. $a = 0$ va $\sigma = 1$ parametrlari normal taqsimot normalangan normal taqsimot deb ataladi. Uning zichligi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ga teng. Bu funksiyaning qiymatlari jadvali tuzilgan.

$f(x)$ taqsimot zichligi va $F(x)$ taqsimot funksiyasi orasidagi bog'lanishdan quyidagiga egamiz:



18.2-chizma.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt$$

Normalangan normal taqsimot uchun $F(x)$ funksiya ushbu ko'rinishga ega:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = 0,5 + \Phi(x)$$

Ushbu

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad (18.26.2)$$

funksiya Laplas funksiyasi deb ataladi.

Quyidagi xossalarni ko'rsatgish oson:

1) $\Phi(x)$ funksiya butun son o'qida aniqlangan va uzluksiz;
 2) $\Phi(x)$ funksiya toq, demak, uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik;

3) $\Phi(x)$ funksiya butun son o'qida o'suvchi;

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -0,5$$

$\Phi(x)$ funksiya qiymatlari jadvali tuzilgan.

3. Asosiy sonli xarakteristikalari.

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \left| (x-a)/\sigma = t, x\sigma t + a, dx = \sigma dt \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a) e^{-t^2/2} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma \cdot 0 + a\sqrt{2\pi}) = a \end{aligned}$$

Shunday qilib, $M(X) = a$. So'ngra

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = \sigma^2$$

Biz bu yerda $D(X)$ ni hisoblashni keltirmasdan, uni mustaqil mashq sifatida qoldirdik.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ bo'lganligi uchun $\sigma(X) = \sigma$, ya'ni X normal tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi σ parametrga teng.

4. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdoraning $[\alpha, \beta]$ integraldagi qiymatini qabul qilish ehtimolligini hisoblamiz:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \leq X \leq \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \left| \frac{x-a}{\sigma} = t, x = \sigma t + a, dx = \sigma dt \right| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2} \sigma dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-t^2/2} dt + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt.
 \end{aligned}$$

Bundan quyidagiga egamiz:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

bu yerda $\Phi(x)$ – (18.26.2) formula bilan aniqlanadigan Laplas funksiyasi.

18.9-§. Katta sonlar qonuni. Markaziy limit teoremasi

18.27. Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi. Ma'lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarning qaysi birini qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi, chunki bu juda ko'p tasodifiy faktorlarga bog'liq, bu faktorlarning esa hammasini hisobga olib bo'lmaydi. Ammo bir tamondan shuni ham ta'kidlash keraki, keng qamrovli shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisi deyarli tasodifiylik xarakterini yo'qotar ekan.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi «Katta sonlar qonuni» deb ataluvchi teoremlarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremlari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

18.27.1-ta'rif. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi *katta sonlar qonuniga bo'ysinadigan* deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremlarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ yoki } P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Praktika uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

18.27.2-teorema.(Chebishev teoremasi) Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ juft-jufti bilan erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni $D(X_i) \leq C, i=1, 2, \dots$) bo'lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da'vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isboti. Chebishev tengsizligini

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz:

$$P\left(\left|\bar{X} - M(\bar{X})\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}. \quad (18.27.3)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossaligidan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i),$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (18.27.3) tengsizlikka qo'yib:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^n D(X_i)}{n^2 \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olib,

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \leq P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \leq 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan $n \rightarrow \infty$ da teorema tasdig'i kelib chiqadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Chebisev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari har xil deb faraz qilgan edik. Amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko'pincha bir xil $a = M(X_i)$ matematik kutilmaga va $D(X_i) = \sigma^2$ dispersiyaga ega bo'ladi. U holda:

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = \frac{1}{n} na = a.$$

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

18.27.4-teorema. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar juft-jufti bilan erkli bo'lib, bir xil a matematik kutilmaga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun ham

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Faraz qilamiz, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsin. U holda hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi qanday bo'lishini oldindan ko'ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

18.27.5-teorema. (Bernulli teoremasi) Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo'lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Isboti. A hodisa ro'y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Bunda X_i - A hodisaning i -sinashdagi ro'y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$\begin{array}{l} X_1: 0 \ 1 \quad X_2: 0 \ 1, \dots, \quad X_n: 0 \ 1 \\ p: \quad q \ p \ p: \quad q \ p, \dots, \quad p: \quad q \ p \end{array}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_n) = p, \quad D(X_i) = pq \leq \frac{1}{4}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n) = M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n) = np$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi.

Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

18.27.6-eslatma. Bernulli teoremasidan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = p$ xulosani chiqarish mumkin emas. Teorema yetarlicha ko'p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tajribada hodisa ro'y berishining o'zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo'yicha yaqinlashishi haqidadir. $\frac{k}{n}$ ning p ga ehtimol bo'yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdan farq qiladi. Bu farqni to'g'ri tushunish uchun ehtimol bo'yicha yaqinlashish ta'rifini beramiz.

18.27.7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n \rightarrow \infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o'z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati katta

ehtimollik bilan tayin o'zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n} \sum M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo'lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o'rtacha qiymatlarining tarqoqligi kam bo'ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlaridan qaysi birini qabul qilishini aniq ayta olmasak ham ularning arifmetik o'rtachasi qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko'ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko'ra, yetarlicha ko'p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan) tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymatlari tasodifiylik xarakterini yo'qotadi. Bu esa quyidagicha izohlanadi: har bir miqdorning o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin, ammo arifmetik o'rtachada ular o'zaro yo'qolib ketadi.

Chebisev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda, biror fizik kattalikni o'lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o'rtacha qiymati izlanayotgan o'lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to'g'ri deb hisoblash mumkin?-degan savolga Chebisev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o'lchash natijalarini $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebisev teoremasini qo'llamoqchi bo'lsak, quyidagilar bajarilishi kerak:

- 1) ular juft-jufti bilan erkli;
- 2) bir xil matematik kutilmaga ega;
- 3) dispersiyalari tekis chegaralangan.

Agar har bir o'lchashning natijasi qolganlariga bog'liq bo'lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o'lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo'lib, u haqiqiy o'lchamga teng bo'ladi.

Agar o'lchash asbobi aniqlikni ta'minlay olsa, uchinchi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o'lchashlarning natijalari har xil bo'lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo'ladi.

Agar yuqorida ko'rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo'lsa, u holda o'lchash natijalariga Chebisev teoremasini qo'llashga haqlimiz. Bunda

yetarlicha ko'p sonda o'lchashlar o'tkazilsa, u holda ularning arifmetik o'rta qiyamati o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi.

Statistikada qo'llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo'lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob'ektlar to'plami to'g'risida mulohaza qilinadi.

18.27.8-misol. X - diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

$$\begin{array}{lll} X: & 0,1 & 0,4 & 0,6 \\ p: & 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{array}$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P(|X - M(X)| < \sqrt{0,4})$ ehtimolni baholang.

Yechilishi. X - diskret tasodifiy miqdorning xarakteriskalarini topamiz

$$M(X) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,44,$$

$$D(X) = 0,1^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,3 + 0,6^2 \cdot 0,5 - 0,44^2 = 0,364.$$

$$\text{Demak, } P(|X - 0,44| < \sqrt{0,4}) \geq 1 - \frac{0,364}{0,4} = 0,909.$$

18.27.9-teorema (Puasson teoremasi). Bog'liqmas sinovlar o'tkazilayotgan bo'lsin va A hodisaning i -sinovda ehtimolligi p_i ga teng bo'lsin. U holda sinovlar soni cheksiz ortganida A hodisaning nisbiy chastotasi $p_1, p_2, \dots, p_n$ ehtimolliklarning o'rta arifmetigiga ehtimollik bo'yicha yaqinlashadi, ya'ni ushbu tenglik o'rinli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|p^* - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

18.28. Markaziy limit teoremasi haqida tushuncha. Ma'lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M.Lyapunovning quyidagi teoremasi javob beradi.

18.28.1-teorema. (Markaziy limit teoremasi) Agar X tasodifiy miqdor juda ko'p sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlarning

yig'indisidan iborat bo'lib, har bir hadning yig'indiga ta'siri e'tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo'lsa, u holda x ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Masalan, tajriba qandaydir fizik kattalikni o'lchashdan iborat bo'lsin. Har qanday o'lchash bu kattalikning taxminiy qiymatini beradi, o'lchash natijasiga ta'sir etuvchi tasodifiy faktorlar esa juda ko'p. Har bir faktor o'lchash natijasiga e'tiborga olinmaydigan darajada bo'lsa ham juda kam ta'sir ko'rsatadi va xatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko'p bo'lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig'indisi sezilarli darajada xatolikni hosil qiladi.

Bu xatoliklar yig'indisini juda katta sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisi deb qarab, bu yig'indining taqsimoti normal taqsimotga yaqin ekanligi haqida xulosa qilishimiz mumkin.

Faraz qilamiz $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, ularning matematik kutilmalari $M(X_i) = a_i$ va dispersiyalari $D(X_i) = b_i^2$ chekli bo'lsin.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Normalangan yig'indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right).$$

Agar normalangan yig'indining taqsimot funksiyasi x ning har qanday qiymatida va $n \rightarrow \infty$ da normal taqsimotga intilsa, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz. \quad (18.28.2)$$

bo'lsa, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ketma-ketlikka markaziy limit teoremasini qo'llash mumkin.

(18.28.2) katta sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti normal taqsimotga yaqinlashish sharti hisoblanadi.

18.10-§. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning xossalari

18.29. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari (x, y) sonlar jufti bo'lgan (X, Y) tasodifiy miqdorga aytiladi. Bir vaqtda qaralayotgan X va Y ni tashkil etuvchilar ikki tasodifiy miqdor sistemasini tashkil etadi.

Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi.

Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimoti qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Ikki o'lchovli tasodifiy (X, Y) miqdorlarni qaraymiz. Faraz qilaylik x va y haqiqiy sonlar jufti bo'lsin.

18.29.1-ta'rif. X tasodifiy miqdorni x haqiqiy son dan kichik qiymat qabul qilganda Y tasodifiy miqdorni ham y haqiqiy son dan kichik qiymat qabul qilishdan iborat hodisa ehtimoliga, (X, Y) ning *taqsimot funksiyasi* deyiladi, ya'ni

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

1^o. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimoti funksiyasi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2^o. $F(x, y)$ ikkala argument bo'yicha ham kamaymovchi funksiyadir, ya'ni

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa,}$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ agar } y_1 < y_2 \text{ bo'lsa.}$$

3^o. $F(x, y)$ uchun quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

$$1. F(-\infty, y) = 0, \quad 2. F(x, -\infty) = 0,$$

$$3. F(-\infty, -\infty) = 0, \quad 4. F(\infty, \infty) = 1.$$

Ko'rinib turibdiki, agar $F(x, y)$ funksiyaning argumentlaridan birortasi $-\infty$ bo'lsa, funksiya qiymati nolga teng bo'ladi.

Demak, X va Y tashkil etuvchilari $-\infty$ dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli nolga teng.

Agar $x = \infty; y = \infty$ bo'lsa, (X, Y) ni butun tekislikdagi qiymatlarini qabul qilish ehtimoli 1 ga teng.

4^o. Agar $F(x, y)$ funksiyaning argumentlaridan birortasi ∞ ga teng bo'lsa, u birinchi argumentni funksiyasiga aylanadi:

$$F(x, \infty) = F_1(x), \quad F(\infty, y) = F_2(y).$$

Tasodifiy tashlangan nuqtani to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Faraz qilaylik, $F(x, y)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi hamma joyda uzluksiz bo'lib, 2-tartibli aralash xususiy hosilaga ega bo'lsin.

18.29.2-ta'rif. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (X, Y) ni taqsimot funksiyasidan olingan 2-tartibli aralash xususiy hosilaga, shu tasodifiy miqdorni taqsimot *zichligi funksiyasi* deyiladi

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

1^o. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasi manfiy emas:

$$f(x, y) \geq 0.$$

2^o. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasidan olingan chegaralari cheksiz ikki karrali xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Agar $f(x,y)$ ma'lum bo'lsa, $F(x,y)$ ni topishda quyidagi formuladan foydalaniladi: $F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy$.

18.30. Ikki o'ldhovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari ehtimollarining shartli taqsimot qonunlari. X va Y tashkil etuvchilar diskret va ularning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_m$ bo'lsin.

X tashkil etuvchining $Y = y_j$ bo'lgandagi shartli taqsimoti deb, ushbu shartli ehtimollar to'plamiga aytiladi:

$$p(x_1 | y_j), p(x_2 | y_j), \dots, p(x_n | y_j).$$

Y tashkil etuvchining shartli taqsimoti shunga o'xshash aniqlanadi. Tashkil etuvchilarning shartli ehtimollari mos ravishda quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

18.31. Ikki o'ldhovli diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari. Sistemani tashkil etuvchi X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij}.$$

Agar X va Y diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlaridan $M(X)$ va $M(Y)$ larni quyidagi formulalar orqali topish mumkin:

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^m y_i p_i.$$

X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X))^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - M(Y))^2 p_{ij}.$$

Dispersiyalarni hisoblashda quyidagi

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2$$

formulalardan ham foydalanish mumkin.

X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanish quyidagi

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

18.32. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari. Ikki o'lchovli X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilma quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy,$$

bu yerda $f(x, y)$ zichlik funksiya.

Sistemani tashkil etuvchi X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [y - M(Y)]^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2,$$

bu yerda $f(x, y)$ zichlik funksiya. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari quyidagi formulalar bo'yicha ham hisoblash mumkin:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - [M(X)]^2, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y) dy - [M(Y)]^2.$$

X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanish quyidagi

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

18.33. Korrelyasiya momenti va korrelyasiya koeffitsiyenti. X va Y tasodifiy miqdorlar sistemasini tavsiflash uchun tashkil etuvchilarning matematik kutilma va dispersiyalaridan tashqari boshqa xarakteristikalaridan ham foydalaniladi. Bular jumlasiga *korrelyasiya momenti* va *korrelyasiya koeffitsiyentlar* kiradi.

X va Y tasodifiy miqdorlarning *korrelyasiya momenti* (yoki *kovariatsiyasi*) deb, ushbu

$$K_{XY} = M((X - m_x)(Y - m_y))$$

songa aytiladi.

X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning *korrelyasiya momenti* quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p(x_i, y_j).$$

Ikki o'ldovli X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlarning *korrelyasiya momenti* quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))f(x, y)dx dy$$

bu yerda $f(x, y)$ zichlik funksiya.

Korrelyasiya momentini yana ushbu

$$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$$

formula bo'yicha hisoblash qulay, bu yerda diskret tasodifiy miqdorlar

$$M(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij},$$

uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun esa

$$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy.$$

o'rinli bo'ladi.

18.32.1-teorema. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar uchun *korrelyasiya momenti nolga teng, ya'ni* $K_{XY} = 0$.

X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyasiya momentining shu tasodifiy miqdorlar o'rtacha kvadratik chetlanishlari ko'paytmasiga nisbati tasodifiy miqdorlarni *korrelyasiya koeffitsiyenti* deb ataladi va u r_{XY} bilan belgilanadi

Ta'rifga ko'ra,

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Korrelyasiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorlarning o'lchov birliklarining tanlanishiga bog'liq emas. Korrelyasiya koeffitsiyentining korrelyasiya momentidan ustunligi ham ana shundadir.

Korrelyasiya koeffitsiyenti quyidagi xossalarga ega.

1^o. Korrelyasiya koeffitsiyenti absolyut qiymati bo'yicha birdan ortiq bo'lmaydi, ya'ni $-1 \leq r_{XY} \leq 1$ o'rinli bo'ladi.

2^o. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, korrelyasiya koeffitsiyenti nolga teng, ya'ni $r_{XY} = 0$.

3^o. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar $Y = AX + B$ ($A \neq 0$) ko'rinishda chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda agar $A > 0$ bo'lganda korrelyasiya koeffitsiyenti $r_{XY} = 1$, agarda $A < 0$ bo'lganda esa, korrelyasiya koeffitsiyenti $r_{XY} = -1$ teng bo'ladi.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar korrelyasiya momenti (yoki korrelyasiya koeffitsiyenti) noldan farqli bo'lsa, ular *korrelyasiyalangan* deyiladi.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar korrelyasiya momenti (yoki korrelyasiya koeffitsiyenti) nolga teng bo'lsa, ular *korrelyasiyalanmagan miqdorlar* deyiladi.

Ikki korrelyasiyalangan tasodifiy miqdor *bog'liq miqdorlardir*.

18-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

18.1. Tasodifiylik va qonuniyat. Hodisalar va ular ustida amallar ([3], 17-18 betlar; [5], [9], [12]).

18.2. Ehtimolning ta'riflari ([3], 18-19 va 24-28 betlar; [5], [9], [12]).

18.3. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari ([3], 31-48 betlar; [5], [9], [12]).

18.4. To'la ehtimol va Bayes formulalari([3], 50-53 betlar; [5], [9], [12]).

18.5. Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari ([3], 55-59 betlar; [5], [9], [12]).

18.6. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berilish usullari ([3], 64-65 betlar; [5], [9], [12]).

18.7. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari([3], 75-95 betlar; [5], [9], [12]).

8.8. Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdolar([3], 65-73 betlar; [5], [9], [12]).

18.9. Katta sonlar qonuni. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyati. Markaziy limit teoremasi([3], 101-110 betlar; [5], [9], [12]).

18.10. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning xossalari([3], 155-168 betlar; [5], [9], [12]).

18.1-amaliy mashg'ulot.

Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

1-misol. Uchta talaba bir-biri bilan bog'lamagan holda bitta masalani echmoqdalar. Faraz qilamiz, A_1 hodisa – birinchi talaba masalani yechdi, A_2 – ikkinchi talaba masalani yechdi, A_3 – uchinchi talaba masalani yechdi. $A_i (i=1,2,3)$ hodisalar orqali, quyidagi hodisalarni ifodalang:

- 1) A - barcha talabalar masalani yechdi;
- 2) B - masalani faqat birinchi talaba yechdi;
- 3) C - hech bo'lmaganda bitta talaba masalani yechdi;
- 4) D - masalani faqat bitta talaba yechdi.

Yechilishi. 1) A hodisaning ro'y berishi, bu A_1, A_2, A_3 hodisalarni bir vaqtda ro'y berganini bildiradi, ya'ni hodisalarning ko'paytmasini ifodalaydi : $A = A_1 A_2 A_3$.

2) Bu holda A_1 hodisa ro'y berdi, A_2 va A_3 hodisalar ro'y bermadi, ya'ni $\overline{A_2}$ va $\overline{A_3}$ hodisalar ro'y berdi. Shunday qilib, $B = A \overline{A_2} \overline{A_3}$.

3) C hodisa shuni bildiradiki, yo A_1 hodisa yo A_2 hodisa, yo A_3 hodisa, yoki ulardan ixtiyoriy ikkitasi, yoki uchala hodisa birgalikda ro'y bergan, ya'ni ularning yig'indisini ifodalaydi $C = A_1 + A_2 + A_3$.

4) Masalani faqat birinchi talaba yechgan ($A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$), yoki faqat ikkinchi talaba ($\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}$), yoki faqat uchinchi talaba ($\overline{A_1} \overline{A_2} A_3$), ya'ni bu hodisalarning yig'indisini tashkil etadi

$$D = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3.$$

2-misol. $A + A \cdot B$ ifodani soddalashtiring.

Yechilishi.

$$A + AB = A \cdot \Omega + AB = A \cdot (\Omega + B) = A(B + \Omega) = A\Omega = A.$$

Shunday qilib $A + AB = A$. Isbotlashda biz quyidagi xossalardan foydalandik:

$$A + \Omega = \Omega, A \cdot \Omega = A,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A + B = B + A, AB = BA,$$

bunda Ω elementar hodisalar fazosi

3-misol. Faraz qilamiz A, B va C tasodifiy hodisalar bo'lsin. Quyidagi tenglikni $A(B - C) + AB - AC$ isbotlang.

Isboti. Tajribaning ixtiyoriy natijasi (elementar hodisa). Faraz qilaylik $\omega \in A \subset B - C$ unda uning $\omega \in A$ va $\omega \in B - C$, ya'ni $\omega \in A, \omega \in B$, lekin $\omega \notin C$. Shunday qilib $\omega \in AB$ va $\omega \in AC$. Bundan $\omega \in AB - AC$, ya'ni $A(B - C)$ hodisaning natijasi bo'ladi: $A(B - C) \subseteq AB - AC$. Shunga o'xshash $AB - AC \subseteq A(B - C)$ munosabat isbotlanadi.

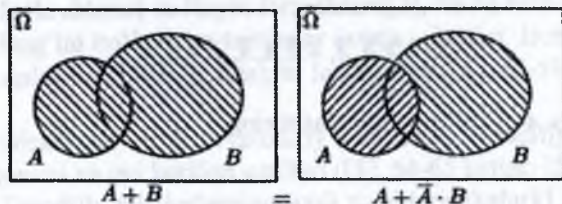
Bulardan $A(B - C) = AB - AC$ kelib chiqadi.

4-misol. $A + B = A + \overline{A}B$ isbotlang, bunda A va B tasodifiy hodisalar. Hodisalarni geometrik shaklda keltiring.

Yechilishi. Hodisalar ustida amallarning xossalari asosan

$$\begin{aligned}
 A+B &= A\Omega + B\Omega = A\Omega + B(A+\bar{A}) = A\Omega + B\bar{A} = \\
 &= A(\Omega+B) + \bar{A}B = A\Omega + \bar{A}B = A + \bar{A}B
 \end{aligned}$$

Ω fazoni to'g'ri to'rtburchak orqali chizib, elementar hodisalarni (natijalarini) – shu to'g'ri to'rtburchakning nuqtalari deb, hodisani – uning qism to'plami (to'plamlarni bunday tasvirlash Eyler-Venn diagrammasi deyiladi), quyidagi chizmani hosil qilamiz:



1-chizma.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Savatdagi qizil, sariq va oq atir gullardan bitta atir gul olinadi. Faraz qilamiz: A – qizil atir gul tanlandi, B – sariq atirgul tanlandi, C – oq atir gul tanlandi.

Quyidagi hodisalar nimalarni bildiradi:

1) $\bar{A}$; 2) $A+B$; 3) AC ;

4) $\overline{A+B}$; 5) $\bar{A} + \bar{B}$; 6) $AB+C$.

2. $(A+B) \cdot (A+\bar{B}) \cdot (\bar{A}+B)$ ifodani soddalashtiring

3. Hodisalar $A, \bar{A}B, \overline{A+B}$ to'la guruhni tashkil etishni isbotlang.

4. Quyidagi ifodalarni soddalashtiring:

1) $A(B-AB)$; 2) $\overline{AB} + AC + C + B$; 3) $A + \bar{A}B + \overline{A+B}$.

5. Agar $A \subseteq B$ ma'lum bo'lsa, $AB, A+B, A+B+C$ ifodalarni soddalashtiring.

6. Quyidagi ifodalardan qaysilari to'g'ri:

1) $\bar{A} + \bar{B} = \overline{A+B}$ 2) $\overline{A+B+C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

3) $(A+B) - C = A + (B-C)$.

18.2-amaliy mashg'ulot. Kombinatorika elementlari

1-misol. 1) 20 ta elementdan 3 tadan tuzilgan;

2) $n+6$ ta elementdan $n=4$ tadan tuzilgan o'rinlashtirishlar sonini toping.

Yechilishi. $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ formulaga ko'ra topamiz:

1) $A_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$;

2) $A_{n+6}^{n-4} = (n+6)(n+5) \dots 12 \cdot 11$.

2-masala. 10 ta sinf xonasini 10 ta o'quv kabinetiga necha xil usul bilan taqsimlash mumkin.

Yechilishi. $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ formulaga asosan topamiz:
 $A_{10}^{10} = 10!$

3-misol. Hisoblang:

1) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2$; 2) $\frac{A_5^4 + A_6^3}{A_6^2}$; 3) $A_4^2 \cdot A_3^2$.

Yechilishi. $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ formula bo'yicha hisoblaymiz:

1) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2 = 6 \cdot (6-1) + 5 \cdot (5-1) + 4 \cdot (4-1) =$
 $= 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 30 + 20 + 12 = 62$.

2) $\frac{A_5^4 + A_6^3}{A_6^2} = \frac{5 \cdot (5-1)(5-2)(5-3) + 6 \cdot (6-1)(6-2)}{6 \cdot (6-1)} =$
 $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5} = 8$.

3) $A_4^2 \cdot A_3^2 = 4 \cdot (4-1) \cdot 3 \cdot (3-1) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.

4-misol. Agar: 1) $B = \{1\}$; 2) $B = \{3,4\}$; $B = \{a,b,c\}$ bo'lsa, berilgan to'plamlarning elementlaridan tuzilgan mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlarni yozing.

Yechilishi. $P_n = n!$ formulaga ko'ra topamiz:

1) (1) ; $P_1 = 1$; 2) $(3,4)$; $(4,3)$; $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$;

4) (a,b,c) ; (a,c,b) ; (b,a,c) ; (b,c,a) ; (c,a,b) ; (c,b,a) ; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

5-misol. Hisoblang: 1) C_{21}^6 ; 2) $C_8^6 + C_4^0$.

Yechilishi. Ushbu $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formula bo'yicha topamiz:

$$1) C_{21}^6 = \frac{21!}{6!(21-6)!} = \frac{21!}{6!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 21}{1 \cdot 2 \cdots 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 5} =$$

$$= \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 54264;$$

$$2) C_8^6 + C_4^0 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} + 1 = 29.$$

6-masala. n ta elementdan 3 tadan tuzilgan gruppalar soni $n+2$ ta elementdan 4 ta dan tuzilgan gruppalar sonidan 5 marta kichik. n ni toping.

Yechilishi. Masalaning shartiga ko'ra, $5C_n^3 = C_{n+2}^4$ munosabat o'rinli.

Bundan $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ formulani e'tiborga olib,

$$\frac{5 \cdot n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikdan

$$20(n-2) = (n+1)(n+2) \text{ yoki } 20n-40 = n^2+3n+2$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Kvadrat tenglamani yechib, $n=14$ yoki $n=3$ ekanligini topamiz.

7-masala. 1,2,3,4 raqamlardan ularning har birini bir martadan ortiq ishlatmasdan nechta uch xonali va to'rt xonali son tuzish mumkin?

Yechilishi. Masalada 1,2,3,4 raqamlaridan tuzish mumkin bo'lgan uch xonali va to'rt xonali sonlar nechta ekanligini topish yoki, boshqacha aytganda, shu raqamlardan yo uch xonali, yoki to'rt xonali son tuzish usullari nechta ekanligini topish talab qilinadi. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra to'rt xonali sonni $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ta usul bilan, uch xonali sonni $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ta usul bilan tuzish mumkin. Unda yo uch xonali, yoki to'rt xonali sonni tanlash qo'shish qoidasiga ko'ra $24+24=48$ ta usul bilan amalga oshirish mumkin.

Shunday qilib, sonni hosil qilishda har bir raqamdan uzog'i bilan bir marta foydalanib, 1,2,3,4 raqamlaridan tuzish mumkin bo'lgan uch xonali va to'rt xonali sonlarning umumiy miqdori 48 ga teng bo'ladi.

8-masala. Mahalla fuqoralar yig'ini tarkibiga 8 kishi saylanadi. Ulardan rais va o'rinbosarini saylash kerak. Buni nechta usul bilan bajarish mumkin?

Yechilishi. Masala 8 ta elementdan ikkitadan o'rinlashtirish (takrorlamasdan) sonini topishga keltiriladi, chunki bu yerda mahalla fuqoralar yig'ini rahbarligiga kim saylanishi ham, ular orasida vasifalar

qanday taqsimlanishi ham muhim. Shunday qilib, izlanayotgan son $A_8^3 = 8 \cdot 7 = 56$.

9-misol. 1,2,3,4,5,6,7,8 raqamlaridan nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechilishi. Ko'rsatilgan raqamlardan tuzilgan har bir uch xonali sonni berilgan sakkizta raqamdan olingan uchta raqamdan tuzilgan takrorlanadigan o'rinashtirish deb qarash mumkin. Shuning uchun, izlanayotgan sonni $A_n^k = n^k$ formula bo'yicha topamiz: $A_8^3 = 8^3 = 512$.

10- masala. Agar har bir raqam son tasvirida bir marta uchrasa, 0,1,2,3,4 raqamlaridan nechta turli to'rt xonali son tuzish mumkin?

Yechilishi. Qaralayotgan to'rt xonali son 0,1,2,3,4 raqamlaridan tuzilgan va birinchi raqami noldan farqli bo'lgan biron o'rin almashtirish ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Beshta raqamdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni $P_5 = 5! = 120$ ta bo'lgani uchun va ulardan $4!$ ta o'rin almashtirish noldan boshlangani uchun izlanayotgan miqdor

$$5! - 4! = 4! \cdot 5 - 4! = 4! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$$

11- masala. 3 ta yashil, 4 ta ko'k va 5 ta qizil marjonni nechta usul bilan ipga tuzish mumkin?

Yechilishi. Masalada $k_1 = 3$ ta (yashil marjon) birinchi tip elementdan, $k_2 = 4$ ta (ko'k marjon) ikkinchi tip elementdan, $k_3 = 5$ ta (qizil marjon) uchinchi tip elementdan takrorlanadigan o'rin almashtirishlar sonini topish talab qilinadi. $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$ formulaga ko'ra

$$P(3, 4, 5) = \frac{(3 + 4 + 5)!}{3! 4! 5!} = \frac{12!}{3! 4! 5!} = 27720$$

ni hosil qilamiz.

12-masala. 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sonlardan juft-juft qilib olib, nechta to'g'ri kasr tuzish mumkin.

Yechilishi. Berilgan sonlardan tuzilgan va birinchi elementi ikkinchisidan kichik bo'lgan turli juftliklar 7 ta elementdan 2 tadan tuzilgan

gruppalashlar nechta bo'lsa, shuncha bo'ladi. Bu yerdan $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

formulaga ko'ra, $C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$ ni hosil qilamiz.

13- masala. Magazinda uch xil nav un bor. 9 xalta unni nechta usul bilan sotib olish mumkin?

Yechilishi. Masalada uchta turli elementdan tuzish mumkin bo'lgan barcha 9 elementli gruppalar sonini topish talab qilinadi, bunda ko'rsatilgan elementlar har bir gruppada takrorlanishi mumkin, gruppalarining o'zlari esa bir-biridan kamida bitta elementi bilan farq qiladi.

Bu masala uchta elementdan to'qqiztadan takrorlanish bilan tuzilgan gruppalashlar sonini topishdan iborat.

Demak, $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ formulaga ko'ra,

$$\overline{C}_3^9 = C_{11}^9 = \frac{11!}{9!2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

ni hosil qilamiz.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

- 10 ta elementdan 4 ta dan tuzilgan o'rinlashtirishlar sonini toping.
- 8 kishidan iborat ro'yxatni necha xil usul bilan tuzish mumkin?
- To'plamning elementlaridan tuzilgan barcha o'rin almashtirish soni 100 tadan oshmasligi uchun bu to'plamda nechta element bo'lishi kerak? 200 ta dan kam bo'lmashligi uchunchi?

4. O'rinlashtirishlar sonini toping:

1) A_{10}^3 ; 2) A_{m-1}^{m-4} ; 3) $A_6^3 + A_5^3$; 4) $\frac{A_4^3 + A_3^2}{A_5^1}$; 5) $A_6^2 \cdot A_7^2$.

5. Talaba 8 kun ichida 3 ta yakuniy nazorat topshirishi kerak. Yakuniy nazorat jadvalini nechta usul bilan tuzish mumkin?

6. To'rt til: rus, ingliz, nemis, fransuz tillaridan bu tillarning istalgan biriga bevosita tarjima qilish uchun nechta lug'atga ega bo'lish kerak?

7. 3 ta turli sovg'ani 6 o'quvchiga har bir o'quvchi: 1) ko'pi bilan bitta sovg'a; 2) ko'pi bilan sakkizta sovg'a oladigan qilib, nechta usul bilan taqsimlash mumkin?

8. Agar beshta turli sovg'adan bittasi albatta taqdim qilinishi lozim bo'lsa, uch kishiga bittadan sovg'ani nechta usul bilan taqdim qilish mumkin?

9. Omborda turli mevalar solingan 5 ta quti, turli sabzavotlar solingan 3 ta quti bor. Ikki ta sabzavot do'konchasining har biriga mevalar va sabzavot solingan bittadan qutini nechta usul bilan berish mumkin?

10. Agar x absissa va y ordinata 1, 2, 3, 4, 5, 6, qiymatlarni qabul qilsa, nechta $M(x, y)$ nuqta hosil qilish mumkin?

11. 1) «xola»; 2) «dada» so'zlarining harflaridan nechta o'rin almashtirish tuzish mumkin?

12. Son tasvirida har bir raqam bir marta uchraydi degan shartda 1, 2, 3, 4, 5, 6, raqamlaridan 3 raqami bilan boshlanib, 5 raqami bilan tugaydigan nechta turli olti xonali son tuzish mumkin?

13. Yozilishida 2 raqamidan ikki marta, 3 va 4 raqamlaridan esa uch marta fodalanib, nechta turli sakkiz xonali son hosil qilish mumkin?

14. $m+n+p$ ta buyumni birinchisida m ta, ikkinchisida n ta, uchinchisida esa p ta buyum bo'lgan uchta guruhga nechta usul bilan ajratish mumkin?

15. Stol atrofiga uch nafar erkak kishi va uch nafar ayol kishini, erkak kishi va ayol kishi yonma-yon o'tirmaydigan qilib, nechta usul bilan o'tqazish mumkin?

16. «Malaka» so'zining harflarini uchta «a» harfi ketma-ket kelmaydigan qilib, nechta usul bilan joylashtirish mumkin?

17. Vzvodda 5 ta serjant va 50 ta soldat bor. Bitta serjant va uchta soldatlardan iborat necha xil usulda navbatchi guruh tuzish mumkin?

18. Yigirma kishidan 5 kishilik komissiyani nechta usul bilan saylash mumkin?

19. Hech bir uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan 8 ta nuqtadan nechta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin?

20. n burchak diagonalari sonini toping.

21. Kitob do'konida olti xil kitob sotiladi. 10 ta kitobni nechta usul bilan sotib olish mumkin?

22. Olti qavatli uyning lifti 10 kishini birinchi qavatdan yuqoriga olib chiqadi. Har bir qavatda tushib qoladigan kishilar soni qavatlar bo'yicha nechta usul bilan taqsimlanishi mumkin?

23. 6 ta bir xil ruchkani to'rt kishi orasida nechta usul bilan taqsimlash mumkin?

24. 15 kishilik guruh, biri 6 kishilik, ikkinchisi esa 9 kishilik ikkita guruhga bo'linadi. Buni nechta usul bilan bajarish mumkin?

25. Tenglamalarni yeching:

1) $A_7^3 = 42x$; 2) $A_{m+1}^3 = 5m(m+1)$; 3) $\frac{A_4^4 + A_2^2}{A_x^2} = 13$.

26. Hisoblang: 1) C_{13}^{13} ; 2) $C_6^4 + C_5^0$; 3) C_{100}^{98} .

27. Tengliklarni tekshiring.

1) $C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$; 2) $C_{15}^6 = C_{15}^9$; 3) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$; 4) $C_{14}^9 + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$.

28. Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases} C_n^m = C_n^{m+2} \\ C_n^2 = 153 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} C_n^m = C_m^{n+1} \\ C_m^2 = 20 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

29. Ushbu

1) $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$; 2) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$ tenglamalarni yeching.

30. Ushbu

1) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2,5x \\ C_{x-1}^y = 10 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. 154200. 2. 40320. 3. 1) $n \leq 4$; 2) $n \geq 6$. 4. 1) 720;

2) $(m-1)(m-2) \dots 5 \cdot 4$; 3) 100; 4) 6; 5) 1260.

5. $A_8^3 = 336$. 6. $A_4^2 = 12$. 7. 1) $A_6^3 = 120$. 2) $A_6^3 = 6^3 = 216$.

8. $3 \cdot A_4^2 = 36$. 9. $A_5^2 \cdot A_3^2 = 120$. 10. $A_6^2 = 36$. 11. 1) $P_4 = 24$

2) $P(2,2) = 6$. 12. $P_4 = 24$. 13. $P(2,3,3) = 560$. 14. $P(m,n,p) = \frac{(m+n+p)!}{m! n! p!}$.

15. $2 \cdot (3!)^2 = 72$. 16. $P(3,1,1,1) - 4! = 96$. 17. $5 \cdot C_{30}^3 = 5 \cdot 19600 = 98000$.

18. $C_{20}^5 = 15504$. 19. $C_8^2 = 28$. 20. $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$. 21. $\overline{C}_6^{10} = C_{15}^{10} = 3003$.

22. $\overline{C}_{10}^5 = C_{14}^5 = 2002$. 23. $\overline{C}_6^4 = C_9^6 = 1001$. 24. $C_{15}^6 = 5005$.

25. 1) {5}; 2) {6}; 3) {6}. 26. 1) 105; 2) 16; 3) 4950.

28. 1) {18;8}; 2) {5;2}; 3) {12;5}. 29. 1) $x = 2$, ($0 < x \leq 4$); 2) $x = 3$.

30. 1) $x = 18$, $y = 8$; 2) $x = 6$, $y = 3$.

18.3-amaliy mashg'ulot.

Ehtimolning klassik va geometrik ta'riflari.

1. Ehtimolning klassik va statistik ta'riflari

1-misol. Qutida 7 ta oq, 3ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

Yechilishi. A olingan shar oq ekanligi hodisasi bo'lsin. Bu sinov 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 7 tasi A hodisaga qulaylik tug'diruvchidir. Demak, $P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$.

2-misol. Telefonda nomer terayotgan abonent ohirgi ikki raqamni esidan chiqarib qo'yadi va faqat bu raqamlar har hil ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligini ehtimolini toping.

Yechilishi. B – ikkita kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin, hammasi bo'lib, o'nta raqamdan ikkitadan nechta o'rinlashtirishlar tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ ta turli raqamlarni terish mumkin.

$$\text{Demak, } P(B) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

3-misol. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Sinovning barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalari soni C_5^2 gat yeng. Bularning ichidan C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lishi hodisasi (A) uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

4-misol. Yashikda 4 ta oq, 10 ta qora va 6 ta ko'k shar bor. Yashikdan tasodifan bitta shar olinadi. Shu sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Bu yerda elementar hodisalar yashikdan ixtiyoriy shar olinishidan iborat. Barcha bunday natijalar soni yashikdagi sharlar soniga teng, ya'ni $n = 20$. Oq shar chiqishi hodisasini A bilan belgilasak, unga sharoit yaratuvchi hodisalar soni yashikdagi oq sharlar soniga tengligi ravshan, ya'ni $m = 4$. Demak, ta'rifga asosan, $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

5-misol. O'yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish ehtimoli topilsin.

Yechilishi. O'yin kubida 6 ta tomoni bo'lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak, hamma ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n=6$. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga sharoit yaratuvchi hodisalar esa 2, 4, 6 ya'ni ularning soni $k=3$. Agar o'yin kubi tashlanganda juft tomoni tushish hodisasini A bilan belgilasak, u holda uning ehtimoli ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

6-misol. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning tushgan tomonlaridagi ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga kublardan hech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechilishi. «Birinchii» o'yin kubida tushgan tomonida bir ochko, ikki ochko, ..., olti ochko tushishi mumkin. «Ikkinchi» kubni tashlaganda ham shunday oltita elementar hodisa bo'lishi mumkin. «Birinchii» kubni tashlashdagi hodisalarining har biri «ikkinchi» kubni tashlash natijasidagi har bir hodisa bilan birga ro'y berishi mumkin. Shunday qilib, hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $6 \cdot 6 = 36$ ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (hech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig'indisi juft son) sharoit yaratuvchi hodisalar quyidagicha beshta bo'ladi:

$$1) 6, 2; 6+2=8, \quad 4) 2, 6; 2+6=8,$$

$$2) 6, 4; 6+4=10, \quad 5) 4, 6; 4+6=10.$$

$$3) 6, 6; 6+6=12,$$

Demak, $n=36$, $k=5$ bo'lsa, izlanayotgan hodisaning ehtimoli:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{5}{36}.$$

7-misol. Yashikka 21 ta yaroqli va 10 ta yaroqsiz detal solingan. Uni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgani ma'lum bo'ldi. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan detal yaroqli detal bo'lib chiqdi: 1) yaroqli detal; 2) yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. 1) Ravshanki, olingan yaroqli detal yo'qolgan bo'lishi mumkin emas, qolgan o'ttizta detalning $(21+10-1=30)$ istalgan biri yo'qolgan bo'lishi mumkin, shu bilan birga ularning orasida 20 ta detal yaroqlidir $(21-1=20)$.

Yaroqli detal yo'qolgan hodisasini A bilan belgilasak, uning ehtimoli:

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

2) Har biri ham yo'qolishi mumkin bo'lgan o'ttizta detal orasida 10 ta yaroqsiz detal bor edi. Yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lishi hodisasi $\bar{A}$ bo'lsa, uni ehtimoli: $P(\bar{A}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

8-misol. Uchta o'yin kubini tashlashda ikkita kubning (qaysilari bo'lishining ahamiyati yo'q) yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqsa, qolgan bitta kubda olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hamma elementar hodisalar soni 6^3 ga teng. Bitta yoqda olti ochko va qolgan ikkita kubning yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni 5^2 ga teng. Izlanayotgan ehtimol bizni qiziqtirayotgan hodisalar soni 5^2 ni hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalarning jami soni 6^3 ga nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{5^2}{6^3} = \frac{25}{216}.$$

9-misol. N ta detaldan iborat partiyada n ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga m ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa k ta yaroqli detal bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hamma elementar hodisalar soni N ta detaldan m tadan detalni ajratib olish usullari soniga, ya'ni N ta elementdan m tadan tuzilgan gruppashlar soni C_N^m ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (m ta detal orasida rosa k ta yaroqli detal bor) sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hisoblaymiz: n ta yaroqli detal orasidan k ta yaroqli detalni C_n^k ta usul bilan olish mumkin; bunda qolgan $m-k$ ta detal yaroqsiz bo'lishi lozim: $m-k$ ta yaroqsiz detalni esa $N-n$ ta yaroqsiz detal orasidan C_{N-n}^{m-k} usul bilan olish mumkin. Demak, sharoit yaratuvchi hodisalar soni $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$ ga teng.

Izlanayotgan ehtimol, hodisaga sharoit yaratuvchi hodisalar sonining

$$\text{barcha elementar hodisalar soni nisbatiga teng: } P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Yashikda 50 ta bir xil mahsulotlar bor, ulardan 5 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga bitta mahsulot olinadi. Olingan mahsulot yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

2. Ikkita o'yin kubi tashlanganda hech bo'lmasa bir marta 6 raqam tushish ehtimolini toping.

3. Kubning qarama qarshi ikkita tomoni ko'k rangga, uchta tomoni yashil rangga va bir tomoni qizil rangga bo'yalgan. Kub bir marta tashlanganda yashil tomoni tushish ehtimolini toping.

4. m ($m \geq 2$) ta oq va n ($n \geq 2$) ta qora shar solingan idishdan tavakkaliga 5 ta shar olinadi. Ular orasida ikkita oq shar bo'lish ehtimolini toping.

5. Qur'a tashlashda ishtirokchilar yashikdagi 1 dan 100 gacha nomerlangan jetonlardan tasodifan oladilar. Tavakkaliga olingan birinchi jetonning nomerida 5 raqami uchramaslik ehtimolini toping.

6. Xaltachada 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: o, p, r, s, t. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan kublarda «sport» so'zini yozilish ehtimolini toping.

7. Oltita bir xil taxtachaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: a, t, m, r, s, o. Taxtachalar yaxshilab arashlashtirilgan. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan to'rtta taxtachada «tros» so'zini o'qish mumkinligi ehtimolini toping.

8. Hamma tomoni bo'yalgan kub mingta bir xil o'lchamli kubchalarga bo'lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchani 1) bitta; 2) ikkita; 3) uchta yoqi bo'yalgan 4) bo'yalmagan bo'lish ehtimolini toping.

9. Yaxshilab aralashtirilgan 28 ta domino toshidan tavakkaliga bitta tosh olingan. Ixtiyoriy ravishda olingan ikkinchi toshni birinchi tosh yoniga o'yin qoidasi bo'yicha qo'yish mumkinligini ehtimolini birinchi soqqa 1) dubl bo'lganda; 2) dubl bo'lmaganda toping.

10. 8 ta turli kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo'yiladi. Tayin ikkita kitob yonma-yon bo'lib qolish ehtimolini toping.

11. Kutubxonada 10 ta turli kitob bor, bunda beshta kitobning har biri 4 ming so'mdan, uchta kitob ming so'mdan, ikkita kitob 3 ming so'mdan turadi. Tavakkaliga olingan ikkita kitobning bahosi 5 ming so'mdan bo'lish ehtimolini toping.

12. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan. O'ylangan son:

a) tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lish; b) tasodifan aytilgan, raqamlari har xil ikki xonali son bo'lish ehtimolini toping.

13. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlariga tushgan ochkolar yig'indisi yettiga teng bo'lish ehtimolini toping.

14. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: 1) chiqqan ochkolar yig'indisi sakkizga, ayirmasi esa to'rtga teng; 2) chiqqan ochkolar ayirmasi to'rtga tengligi ma'lum bo'lib, ularning yig'indisi sakkizga teng.

15. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi esa to'rtga teng bo'lish ehtimolini toping.

16. Tanga ikki marta tashlangan. Hech bo'lmaganda bir marta "gerbli" tomon tushish ehtimolini toping.

17. Tangani uch marta tashlaganda hammasida "gerb" tushish ehtimoli topilsin.

18. Qutida nomerlangan oltita bir xil kubik bor. Hamma kubiklar tavakkaliga bittalab olinadi. Olingan kubiklarning nomerlari ortib borish tartibida chiqish ehtimolini toping.

19. Dastada 101, 102, ..., 120 bilan nomerlangan ixtiyoriy taxlangan 20 ta perfokarta bor. Perfokartachi tavakkaliga ikkita karta oladi. 101 va 120 nomerli kartalar chiqish ehtimolini toping.

20. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

21. Konvertidagi 100 ta fotokartochka orasida bitta izlanayotgan fotokartochka bor. Konvertidan tavakkaliga 10 ta kartochka olinadi. Bularning orasida kerakli kartochka ham bo'lish ehtimolini toping.

22. Yashikda 100 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasida: 1) yaroqsiz bo'lmisligi; 2) yaroqli detallar bo'lmisligi ehtimolini toping.

23. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

24. Abonent, telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

25. Sexda 6 erkak va 4 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 ayol bo'lish ehtimolini toping.

26. Yashikda 15 ta mahsulot bo'lib, ularning 10 tasi a'lo sifatli. Tavakkaliga olingan beshta mahsulot orasida 3 tasi a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

27. Guruhda 12 talaba bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 ta a'lochi talaba bo'lish ehtimolini toping.

28. Qutida 5 ta bir xil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan.

Tavakkaliga 2 ta buyum olingan. Olingan ikkita buyum orasida : 1) bitta bo'yalgan buyum; 2) ikkita bo'yalgan buyum; 3) hech bo'lmaganda bitta bo'yalgan buyum bo'lish ehtimolini toping.

29. "Maxfiy" qulfning umumiy o'qida 4 ta disk bo'lib, ularning har biri 5 ta sektorga bo'lingan va sektorlarga turli raqamlar yozilgan. Disklarni ulardagi raqamlar aniq to'rt xonali son tashkil qiladigan qilib o'rnatilgan holdagina qulf ochiladi. Disklarni ixtiyoriy o'rnatishda qulfning ochilish ehtimolini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P = 0,1$. 2. $P = 0,5$. 3. $P = 1/2$. 4. $P = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$.

5. $P = 0,81$. 6. $P = \frac{1}{120}$. 7. $P = \frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360}$. 8. 1) 0,384; 2) 0,096; 3) 0,008;

4) 0,512. 9. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$. 10. $P = \frac{1}{4}$. 11. $P = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$.

12. a) $P = 1/90$ b) $P = 1/81$. 13. $P = 1/6$. 14. 1) $1/18$; 2) $1/2$. 15. $1/18$.

16. $3/4$. 17. $1/8$. 18. $1/720$. 19. $P = \frac{1}{C_{20}^2} = \frac{1}{190}$. 20. $P = C_{10}^3 / C_{15}^3 = 24/91$.

21. $P = C_{99}^9 / C_{100}^{10} = 0,1$. 22. 1) $P = C_{90}^4 / C_{100}^4 \approx 0,65$; 2) $P = C_{10}^4 / C_{100}^4 \approx 0,00005$.

23. $P = \frac{C_3^2}{C_5^3} = 0,3$. 24. $P = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$. 25. $P = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = 0,5$.

26. $P = C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{15}^5 \approx 0,4$. 27. $P = C_8^5 \cdot C_4^4 / C_{12}^9 = 14/55$.

28. 1) $P = C_3^1 \cdot C_2^1 / C_5^2 = 0,6$; 2) $P = C_3^2 / C_5^2 = 0,3$; 3) $P = 0,9$. 29. $P = 1/5^4$.

2. Ehtimolning geometrik ta'rifi.

1-misol. Uzunligi 30 sm bo'lgan L kesmaga uzunligi 20 sm kesma joylashtirilgan. Katta kesmaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kichik kesmaga tushish ehtimolini toping.

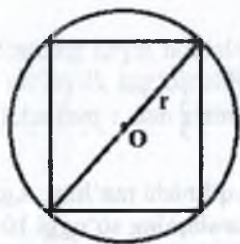
Yechilishi. L kesmaning uzunligi 30 sm. l kesmaning uzunligi 20 sm.

$P = \frac{l \text{ ning uzunligi}}{L \text{ ning uzunligi}} = \frac{l}{L}$ formulaga ko'ra izlanayotgan ehtimol quyidagicha

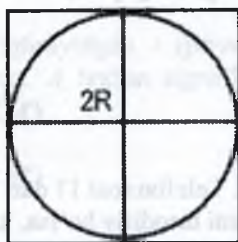
$$\text{topiladi: } P = \frac{l}{L} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

2-misol. r radiusili doiraga kvadrat ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtani kvadratga tushish ehtimolini toping.

Yechilishi. Doiraning yuzi $S_{doira} = \pi r^2$, kvadratning yuzi $S_{kv} = 2r^2$ (1-chizma).



1-chizma.



2-chizma.

$P = \frac{g \text{ ning yuzi}}{G \text{ ning yuzi}} = \frac{S_g}{S_G}$ formulaga asosan, doiraga tavakkaliga

tashlangan nuqtaning kvadrat ichiga tushish ehtimoli $P = \frac{S_{doira}}{S_{kv}} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$ bo'ladi.

3-misol. Tomon $2R$ ga teng kvadratga doira ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtani doiraga tushish ehtimolini toping.

Yechilishi. Doiraning yuzi $S_{doira} = \pi R^2$, kvadratning yuzi $S_{kv} = 4R^2$ (2-chizma). $P = \frac{g \text{ ning yuzi}}{G \text{ ning yuzi}} = \frac{S_g}{S_G}$ formulaga asosan doiraga tavakkaliga

tashlangan nuqtaning kvadrat ichiga tushish ehtimoli $P = \frac{S_{doira}}{S_{kv}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$.

4-misol. $[0; 2]$ kesmadan tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $y \leq x$ va $y \geq \frac{1}{4}x^2$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ehtimolini toping.

Yechilishi. Masalaning shartidan (x, y) nuqtaning koordinatalari

2. Tekislik bir-biridan $2a$ masofada joylashgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lingan. Tekislikka radiusi $r < a$ bo'lgan tanga tavakkaliga tashlangan. Tanga to'g'ri chiziqlarning bittasini ham kesmaslik ehtimolini toping.

3. Bir-biridan 6 sm masofada yotgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lingan tekislikka radiusi 1 sm bo'lgan doira tavakkaliga tashlangan. Doira to'g'ri chiziqlarning hech birini kesmaslik ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

4. Tekislikda radiuslari mos ravishda 5 sm va 10 sm bo'lgan ikkita konsentrik aylana chizilgan. Katta doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanalardan hosil bo'lgan halqaga ham tushish ehtimolini toping. Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

5. Radius R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan: 1) kvadrat ichiga; 2) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doira bo'lagiga tushish ehtimoli bu bo'lakning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraga nisbatan joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

6. Kubga shar ichki chizilgan. Kub ichiga tavakkaliga tashlangan nuqta shar ichiga tushish ehtimoli toping.

7. Tez aylanadigan disk juft sondagi teng sektorlarga bo'linib, sektorlarga birin-ketin oq va qora ranglarga bo'yalgan. Diskga qarata o'q uzilgan. O'qning oq sektorlardan biriga tegish ehtimolini toping. O'qning yassi figuraga tegish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional deb faraz qilinadi.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P = r^2 / R^2$. 2. $P = (2a - 2r) / 2a = (a - r) / a$. 3. $P = (6 - 2) / 6 = 2 / 3$.

4. $P = (10^2 - 5^2) / 10^2 = 0,75$. 5. 1) $P = 2 / \pi$; 2) $P = 3\sqrt{3} / 4\pi$.

6. $P = \frac{\pi}{6}$. 7. $P = 0,5\pi R^2 / \pi R^2 = 0,5$.

3. Hodisaning nisbiy chastotasi

1-misol. Texnik nazorat bo'limi tasodifan ajratib olingan 200 ta kitobdan iborat partiyada 10 ta yaroqsiz kitob topdi. Yaroqsiz kitoblar chiqishning nisbiy chastotasini toping.

Yechilishi. $W(A) = \frac{5}{100} = 0,05$

2-misol. Nishonga 20 ta o'q uzilgan. shundan 18 ta o'q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

Yechilishi. $W(A) = \frac{18}{20} = 0.9$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. 100 ta detalli partiyadan texnik kontrol bo'limi 5 ta nostandart detal topdi. Nostandart detallar chiqishining nisbiy chastotasi nimaga teng.

2. Nishonga 40 ta o'q uzilgan, shundan 36 ta o'q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

3. Asboblari partiyasini sinov vaqtida yaroqli detallarning nisbiy chastotasi 0,9 ga teng bo'lib chiqdi. Agar hammasi bo'lib 200 ta asbob sinalgan bo'lsa, yaroqli asboblari sonini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $W = 0,05$. 2. $P = 0,9$. 3. 180 ta asbob

18.4-amaliy mashg'ulot.

Ehtimolning xossalariidan foydalanib murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblash. Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqligi

1. Birga ro'y bermas hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi

1-misol. Sexda bir necha stanok ishlaydi. Smena davomida bitta stanokni sozlashni talab etish ehtimoli 0,2 ga teng, ikkita stanokni sozlashni talab etish ehtimoli 0,13 ga teng. Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlashni talab etish ehtimoli esa 0,07 ga teng. Smena davomida stanoklarni sozlashni talab etilishining ehtimolini toping.

Yechilishi. Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

A - Smena davomida bitta stanokni sozlash talab etiladi;

B - Smena davomida ikkita stanokni sozlash talab etiladi;

C - Smena davomida ikkitadan ortiq stanokni sozlash talab etiladi.

A, B va C hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni quyidagi hodisa qiziqtiradi: $(A + B + C)$ – smena davomida sozlash uchun zarur bo'ladigan stanoklar:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

2-misol. Yashikda 10 ta qizil va 6 ta ko'k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir hil rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A -hodisa olingan ikkala shar qizil bo'lishi, B -hodisa esa olingan ikkala sharning ko'k bo'lish hodisasi bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar.

Demak, $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

A -hodisaning ro'y berishiga C_{10}^2 ta natija imkoniyat yaratadi. B hodisaning ro'y berishiga esa C_6^2 ta natija imkoniyat yaratadi. Umumiy ro'y berishi mumkin bo'lgan natijalar soni esa C_{16}^2 ga teng. U holda:

$$P(A+B) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{\frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{16 \cdot 15}{2}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

3-misol. Kutubxona stellajida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo'yilgan bo'lib, ulardan 5 tasi muqovalidir. Kutubxonachi ayol tavakkaliga 3 ta darslik oladi. Olingan darsliklarning hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechilishi. Birinchi usul. Olingan uchta darslikdan hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish talabi quyidagi uchta birga ro'y bermas hodisadan istalgan biri ro'y berganda bajariladi: B —bitta darslik muqovali, ikkitasi muqovasiz, C — ikkita darslik muqovali, bittasi muqovasiz, D —uchala darslik muqovali.

Bizni qiziqtirayotgan A hodisani (olingan darslikning hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lishi) bu hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin: $A = B + C + D$. Qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) \quad (*)$$

Ushbu

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

formuladan foydalanib B, C va D hodisalarning ehtimollarini topamiz:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Bu ehtimollarni $(*)$ tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.$$

Ikkinchi usul. A hodisa (olingan darslikning hech bo'lmaganda bittasi muqovali) va $\bar{A}$ hodisa (olingan darsliklarning bittasi ham muqovali emas) qarama-qarshi hodisalaridir, shuning uchun $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng). Bundan $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$\bar{A}$ hodisaning (olingan darsliklarning bittasi ham muqovali emas) ro'y berish ehtimoli $P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$. Izlanayotgan ehtimol:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 24/91 = 67/91.$$

4-misol. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda $P(B) \geq P(A)$ bo'lishini isbotlang.

Isboti. B hodisani birga ro'y bermas A va $\bar{A}\bar{B}$ hodisalarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin: $B = A + \bar{A}\bar{B}$.

Birgalikda bo'lmagan hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$P(B) = P(A + \bar{A}\bar{B}) = P(A) + P(\bar{A}\bar{B}).$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) \geq 0 \text{ bo'lgani uchun } P(B) \geq P(A).$$

5-misol. $P(A)$ ehtimolni ushbu ikkita birga ro'y bermas hodisaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkinmi? $P(AB) = 0,72$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,18$.

Yechilishi. A hodisani ushbu ikkita birga ro'y bermas hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin: $A = AB + \bar{A}\bar{B}$.

Birga ro'y bermas hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A) = P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = 0,72 + 0,18 = 0,9.$$

6-misol. Yashikda 5 tasi standart bo'lgan 20 ta detal ixtiyoriy tartibda joylashtirilgan. Ishchi tavakkaliga uchta detalni oladi. Olingan detallardan hech bo'lmaganda bittasi standart detal bo'lishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechilishi. Birinchi usul. Ravshanki, quyidagi uchta birgalikda bo'lmagan hodisalardan istalgan bittasi ro'y bersa, olingan detallarning hech bo'lmaganda bittasi standart bo'ladi: B - bitta detal standart, ikkitasi

nostandart; C – ikkita detal standart, bittasi nostandart; D – uchala detal ham standart.

Shunday qilib, A hodisani bu uchta hodisaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash (tasvirlash) mumkin: $A = B + C + D$. Qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$$

Har qaysi hodisaning ehtimolini $P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$ formulaga ko'ra topamiz:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{35}{76},$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38},$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$$

Topilganlarni qo'shib, A hodisaning ehtimolini hosil qilamiz.

$$P(A) = 35/76 + 5/38 + 1/114 = 137/228.$$

Ikkinchi usul. A hodisa (olingan uchta detalning hech bo'lmaganda bittasi standart) va $\bar{A}$ hodisa (olingan detallarning hech biri standart emas) o'zaro qarama – qarshidir; shuning uchun

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ yoki } P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

$\bar{A}$ hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{91}{228}.$$

Demak, izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 91/228 = 137/228.$$

2. Erkli hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi

1-misol. Tanga va kubik bir vaqtda tashlangan. "Gerb tushishi" va "3" ochko tushishi hodisalarining birgalikda ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. A hodisa tanganing "gerb" tushishi, B hodisa esa kubik tashlanganda "3" ochko tushishi bo'lsin. A va B hodisalar bog'liq bo'lmagan hodisalar. U holda: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

2-misol. Bir qutida 4 ta oq va 8 ta qora shar, ikkinchi yashikda esa 3ta oq va 9 ta qora shar bor. Har qaysi qutidan bittadan shar olindi. Olingan ikkala sharining oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A - birinchi qutidan oq shar chiqish, B - ikkinchi qutidan oq shar chiqish hodisasi bo'lsin. Ravshanki, A va B hodisalar bog'liq emas. Topamiz: $P(A) = 4/12 = 1/3$, $P(B) = 3/22 = 1/4$, $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = (1/3) \cdot (1/4) = 1/12.$$

3-misol. Kuchlanishni orttirilganda ketma - ket ulangan uchta elementdan birining ishdan chiqishi natijasida elektr zanjirida uzilish ro'y berish mumkin: elementlarning ishdan chiqish ehtimoli mos ravishda 0,2; 0,3; 0,4 ga teng. Zanjirda uzilish ro'y bermaslik ehtimolini aniqlang.

Yechilishi. Aytaylik A_1, A_2, A_3 hodisalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning ishdan chiqishni bildirsin. Ularning ehtimollari shartga ko'ra mos ravishda $P(A_1) = 0,2$; $P(A_2) = 0,3$; $P(A_3) = 0,4$ ga teng. Unda qarama - qarshi A_1, A_2, A_3 hodisalarining (mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi element ishdan chiqmaydi) ehtimollari:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0,8; \quad P(\bar{A}_2) = 0,7; \quad P(\bar{A}_3) = 0,6.$$

Zanjirning uzilmasligidan iborat A hodisa $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ erkli hodisalarining birga ro'y berishidir: $A = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. Binobarin $P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3)$ formulaga ko'ra

$$P(A) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336$$

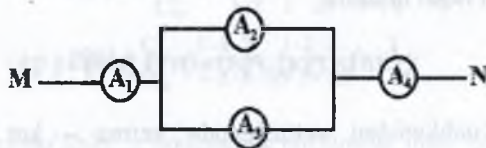
ni hosil qilamiz.

4-misol. M va N nuqtalar orasida elektr zanjir 1-chizmada tasvirlangan sxema bo'yicha tuzilgan. Zanjirning turli elementlarning ishlashi bir – biriga bog'liq emas. Elementlarning T vaqt ichida beto'xtov ishlash ehtimoli quyidagicha:

Element	A_1	A_2	A_3	A_4
Ehtimoli	0,6	0,8	0,7	0,9

T vaqt ichida sistemaning beto'xtov ishlash ehtimolini aniqlang.

Yechilishi. Elektr zanjirning MN uchastkasi quyidagi uchta hodisa ro'y berganda tok o'tkazadi (A hodisa): A_1 (A_1 element ishlatayapti), A_4 (A_4 element ishlatayapti), B (A_2 va A_3 elementlardan kamida bittasi ishlatayapti) ya'ni $A = A_1 \cdot A_4 \cdot B$.



1 chizma.

A_1, A_4 va B hodisalari erkli bo'lgani uchun

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_4) \cdot P(B).$$

$P(B)$ ni topish uchun A_2 va A_3 elementlarning ishdan chiqishidan $\bar{B}$ hodisaning ehtimolini hisoblaymiz, $\bar{B} = \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ va $\bar{A}_2, \bar{A}_3$ hodisalar erkli bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = [1 - P(A_2)][1 - P(A_3)] = \\ &= 0,2 \cdot 0,3 = 0,06 \end{aligned}$$

Bu yerdan $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,94$. Shunday qilib, $P(A) = 0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,94 = 0,5076$.

5-misol. Ikkita birga ro'y bermas A_1 va A_2 hodisalarning har birining ro'y berish ehtimoli mos ravishda p_1 va p_2 ga teng. Bu hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

B_1 – faqat A_1 hodisani ro‘y berishini; B_2 – faqat A_2 hodisa ro‘y berishini bildirsin.

B_1 hodisaning ro‘y berishi $A_1 \bar{A}_2$ hodisaning ro‘y berishiga teng kuchli (birinchi hodisa ro‘y berdi va ikkinchi hodisa ro‘y bermadi), ya’ni $B_1 = A_1 \bar{A}_2$.

B_2 hodisaning ro‘y berishi $\bar{A}_1 A_2$ hodisaning ro‘y berishiga teng kuchli (ikkinchi hodisa ro‘y berdi va birinchi hodisa ro‘y bermadi), ya’ni $B_2 = \bar{A}_1 A_2$.

Shunday qilib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro‘y berish ehtimolini topish uchun B_1 va B_2 hodisalar birga ro‘y bermas, shuning uchun qo‘shish teoremasini qo‘llanish mumkin:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2). (*)$$

Endi B_1 va B_2 hodisalardan har birining ehtimolini topish kerak.

A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va $\bar{A}_2$ hodisalar, shuningdek $\bar{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli, shu sababli ko‘paytirish teoremasidan foydalanish mumkin:

$$P(B_1) = P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = p_1 q_2;$$

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = q_1 p_2.$$

Bu ehtimollarni (*) munosabatga qo‘yib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro‘y berish ehtimolini topamiz: $P(B_1 + B_2) = p_1 q_2 + q_1 p_2$.

6-misol. Tushgan yoqlarning bittasida ham 6 ochko bo‘lmasligini 0,3 dan kichik ehtimol bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun nechta o‘yin kubini tashlash kerak?

Yechilishi. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz: A – tushgan yoqlarning bittasida ham 6 ochko bo‘lmasligi, A_i – i kubning tushgan yog‘ida 6 ochko bo‘lmasligi ($i = 1, 2, \dots, n$).

Bizni qiziqtirayotgan A hodisa $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning birgalikda ro‘y berishidan iborat, ya’ni $A = A_1 A_2 \dots A_n$.

Istalgan tushgan yoqda oltiga teng bo‘lmagan ochko bo‘lish ehtimoli

$$P(A_1) = \frac{5}{6}$$

ga teng.

A hodisalar erkli, shuning uchun erkli hodisalarni ehtimollarini ko'paytirish teoremasini qo'llash mumkin:

$$P(A) = P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Shartga ko'ra $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,3$. Demak, $n \lg \frac{5}{6} < \lg 0,3$. Bu yerdan $\lg \frac{5}{6} < 0$ ni hisobga olib, $n > 6,6$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, o'yin kublarining izlanayotgan soni $n \geq 7$.

8-misol. Texnik sistemada uzellarning hammasi uchun emas, balki ba'zilar (eng kam ishonchlilari) uchun dublyor uzellar ulangan. Uzellarning ishonchliligi (beto'htov ishlash ehtimoli) 2- rasmda berilgan. Sistemaning ishonchliligini aniqlang.

Yechilishi. Sistemaning beto'htov ishlashi (A hodisa) uchun ikkita A_1 elementdan kamida bittasi ishlashi (A_1 hodisa). A_2 va A_3 elementlar ishlashi (A_2, A_3 hodisalar) va uchta A_4 elementdan kamida bittasi ishlashi (A_4 hodisa) lozim, ya'ni $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$.

A_1, A_2, A_3, A_4 hodisalar erkli bo'lgani uchun

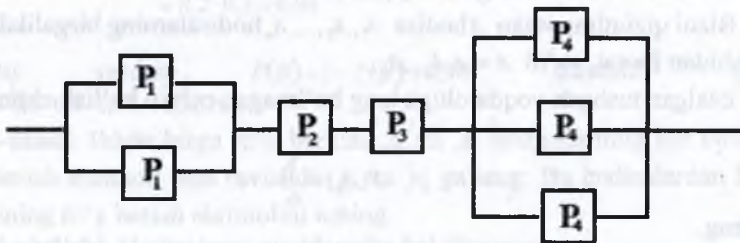
$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4).$$

Bu tenglikning o'ng tomoniga kiradigan ehtimollarni topamiz. $P(A_1)$ va $P(A_4)$ ni hisoblaymiz:

$$P(A_1) = 1 - (1 - p_1)^2, \quad P(A_4) = 1 - (1 - p_4)^3$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$P(A) = p_2 p_3 [1 - (1 - p_1)^2] [1 - (1 - p_4)^3].$$



2- chizma.

3. Birga ro'y beruvchi hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi

1-misol. Tavakkaliga olingan ikki xonali son yo 3 ga, yo 5 ga yo ularning ikkalasiga bir vaqtda karrali bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi: A –tavakkaliga olingan son 3 ga karrali bo'lish hodisasidan, B –olingan son 5 ga karrali bo'lish hodisasidan iborat bo'lsin. $P(A+B)$ ni topamiz. A va B lar birgalikdagi hodisalar bo'lgan uchun $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ formuladan foydalanamiz:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Hammasi bo'lib, 90 ta ikki xonali son mavjud: 10,11,...,98,99. Bularning 30 tasi 3 ga karrali (A hodisasining ro'y berishga qulaylik tug'diradi); 18 tasi 5 ga karrali (B hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi); 6 tasi 3 va 5 ga karrali (AB hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi). Shunday qilib,

$$P(A) = 30/90 = 1/3, P(B) = 18/90 = 1/5, P(AB) = 6/90 = 1/15,$$

ya'ni

$$P(A+B) = 1/3 + 1/5 - 1/15 = 7/15.$$

2-misol. Ikki ovchi bo'riga qarata bittadan o'q uzishdi. Birinchi ovchining bo'riga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisniki 0,8 ga teng. Hech bo'lmaganda bitta o'qning bo'riga tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. A hodisa birinchi ovchining bo'riga o'qni tekkizishi, B hodisa esa ikkinchi ovchining bo'riga o'qni tekkizishi bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda bo'lgan, ammo bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodisalar. U holda

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94. \end{aligned}$$

4. Shartli ehtimol. Erksiz hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi

1-misol. Yashikda 8 tasi standart bo'lgan 12 ta detal bor. Ishchi tavakkaliga ikkita detalni oladi. Olingan ikkala detal standart bo'lishi ehtimolini toping.

Yechilishi. Quyidagi belgilarni kiritamiz: A - olingan birinchi standart detal; B - olingan ikkinchi detal standart detal. Birinchi detalning standart bo'lish ehtimoli $P(A) = 8/12 = 2/3$ ga teng. Ikkinchi detalning birinchi detal standart degan shart ostidagi standart bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli $P_A(B) = 7/11$ ga teng.

Olingan ikkala detalning standart bo'lish ehtimolini bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi bo'yicha topamiz:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = (2/3) \cdot (7/11) = 14/33.$$

2 misol. Yashikda 6 ta qora, 5 ta qizil va 4 ta oq shar bor. Ketma - ket uchta shar olinadi. Birinchi shar qora ikkinchi shar qizil, va uchinchi shar oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Quyidagi hodisalarni qaraymiz: A - birinchi olingan shar qora, B - ikkinchi olingan shar qizil, C - uchinchi olingan shar oq. D orqali sharlar qora, qizil, oq tartibida olinishdan iborat hodisalarni belgilaymiz, $D = A \cdot B \cdot C$ ekanligi ravshan. $P(D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$ formula bo'yicha ehtimolini topamiz. Bu tenglikning o'ng tomoniga kiruchi ehtimollarni topamiz. Birinchi galda qora shar chiqish ehtimoli $P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Birinchi

marta qora shar olinganlik shartidan qizil shar chiqish ehtimoli $P(B/A) = \frac{5}{14}$,

chunki qora shar olingandan keyin yashikda 14 ta shar qolgan va ulardan 5 tasi qizil shar. Qora shar va qizil shar olinganlik shartida yashikdan oq shar chiqish ehtimoli $P(C/AB) = \frac{4}{13}$ (qora va qizil sharlar olingandan keyin yashikda 13 ta shart qolgan, ulardan 4 tasi oq shar). Shunday qilib,

$$P(D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{91} \approx 0,044.$$

3-misol. Sexda 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 3kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hodisalarni quyidagicha belgilaylik: A hodisa birinchi ajratilgan erkak kishi, B ikkinchi ajratilgan erkak kishi, C uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan kishi shartida u erkak bo'lishi ehtimoli: $P(A) = \frac{7}{10}$.

Birinchi ajratilgan erkak kishi shartida ikkinchi kishining erkak bo'lishi ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli: $P(B/A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Oldin ikki erkak kishi ajratib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishi erkak bo'lishi ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli: $P(C/AB) = \frac{5}{8}$. Barcha ajratib olingan kishilar erkak bo'lish ehtimoli

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

4-misol. Yashikda 10 ta mahsulot bo'lib, shulardan 8 tasi oliy sifatli. Tasodifiy ravishda 2 ta mahsulot olindi. Olingan mahsulotlarni hammasini oliy sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechilishi. A_1 – birinchi olingan mahsulotni, A_2 – ikkinchi olingan mahsulotni oliy sifatli chiqish hodisasini bildirsin. Demak, A_1 hodisaning ehtimoli $P(A_1) = \frac{8}{10}$.

A_1 hodisa ro'y bergandan keyin yashikda hammasi bo'lib 9 ta mahsulot qolib, bulardan 7 tasi oliy sifatli mahsulot qoladi, shuning uchun $P_{A_1}(A_2) = \frac{7}{9}$.

Yuqoridagi bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

5-misol. O'quv zalida ehtimollar nazariyasiga doir 6 ta darslik bo'lib, ularning 3 tasi muqovali. Kutubxonachi tavakkaliga 2 ta darslik oldi. Ikkala darslik ham muqovali bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz: A – birinchi olingan darslik muqovali, B – ikkinchi olingan darslik muqovali.

Birinchi darslikning muqovali bo'lish ehtimoli: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Birinci olingan darslik muqovali bo'lish shartida ikkinchi olingan darslikning muqovali bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli $P_A(B) = \frac{2}{5}$.

Ikkala darslik ham muqovali bo'lish ehtimoli bir-biriga bog'liq hodisalarning ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan quyidagiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0,2.$$

6-misol. Sexda 7 erkak va 6 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Hodisalarni quyidagicha belgilaylik: A – birinchi ajratilgan erkak kishi, B – ikkinchi ajratilgan erkak kishi, C – uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan erkak kishi bo'lish ehtimoli: $P(A) = \frac{7}{13}$.

Birinchi ajratilgan erkak kishi shartida ikkinchi kishining erkak bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli: $P_A(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Oldin ikki erkak kishi ajratilib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishi erkak bo'lishi ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{11}.$$

Ajratib olingan kishilarning hammasi erkak ishchilar bo'lish ehtimoli:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} = \frac{35}{286}.$$

7-misol. Yashikda 8 tasi standart bo'lgan 12 ta detal bor. Ishchi tavakkaliga ikkita detalni oladi. Olingan ikkala detal standart bo'lishi ehtimolini toping.

Yechilishi. Quyidagi belgilarni kiritamiz: A – olingan birinchi standart detal; B – olingan ikkinchi detal standart detal. Birinchi detalning standart bo'lish ehtimoli $P(A) = 8/12 = 2/3$ ga teng. Ikkinchi detalning birinchi detal standart degan shart ostidagi standart bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli $P_A(B) = 7/11$ ga teng.

Olingan ikkala detalning standart bo'lish ehtimolini bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi bo'yicha topamiz:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = (2/3) \cdot (7/11) = 14/33.$$

8-misol. Omborxonaga uchta stanokda tayyorlangan detallar kiritiladi. Birinchi stanokda detallar umumiy miqdorning 40% i, ikkinchi stanokda 35% i va uchinchi stanokda 25% i tayyorlangan. Bunda birinchi stanokda 90%, ikkinchi stanokda 80% va uchinchi stanokda 70 % birinchi nav detal tayyorlangan. Tavakkaliga olingan detal birinchi navli bo'lishi ehtimoli qanday?

Yechilishi. Quyidagi belgilarni kiritamiz: B_1 – detal birinchi stanokda tayyorlangan, B_2 - detal ikkinchi stanokda tayyorlangan va B_3 – detal uchinchi stanokda tayyorlangan; A hodisa – detal birinchi navli detal bo'lish hodisasi. Masala shartidan:

$$P(B_1) = 0,4, P(B_2) = 0,35,$$

$$P(B_3) = 0,25, P_{B_1}(A) = 0,9 \quad P_{B_2}(A) = 0,8 \quad \text{va} \quad P_{B_3}(A) = 0,7$$

Ravshanki, $A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A$, u holda

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + \\ + 0,35 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,815.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Qutida 10 ta detal bo'lib, ulardan 4 tasi yaroqsiz. Yig'uvchiga tavakkaliga 3 ta detal oldi. Olingan detallarning hech bo'lmaganda bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.

2. Qutida 20 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k va 5 tasi oq. Rangli shar chiqish ehtimolini toping.

3. Merganning bitta o'q uzishda 10 ochkoga tegish ehtimoli 0,1 ga, 9 ochkoga tegish ehtimoli 0,3 ga, 8 yoqi undan kam ochkoga tegish ehtimoli 0,6 ga teng. Merganning bitta o'q uzishda kamida 9 ochko urish ehtimolini toping.

4. 10 ta detali partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga olingan ikkita detaldan kamida biri standart bo'lish ehtimolini toping.

5. Qutidagi 10 ta detal orasida 2 tasi nostandart. Tavakkaliga olingan 6 ta detal orasida nostandart detal bittadan ortiq bo'lmalik ehtimolini toping.

6. A, B, C va D hodisalar to'la guruhni tashkil qiladi. Hodisalar ehtimollari bunday: $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,3$. D hodisaning ehtimoli qanchaga teng?

7. Avariya yuz berganligi haqida signal berish uchun ikkita erkli ishlaydigan signalizator o'rnatilgan. Avariya yuz berganda signalizator ishlay boshlash ehtimoli birinchisi uchun 0,95 ga, ikkinchisi uchun 0,9 ga teng. Avariya yuz berganda faqat bitta signalizator ishlay boshlash ehtimolini toping.

8. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzishda merganlardan faqat bittasining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

9. Ikkita to'pdan bir yo'la o'q uzishda nishonga bitta o'q tegish ehtimoli 0,38 ga teng. Agar ikkinchi to'pdan bitta otishda o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, bu ehtimolni birinchi to'p uchun toping.

10. Texnik kontrol bo'limi buyumlarning standartga muvofiqligini tekshiradi. Buyumning standartga muvofiq bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi standartga muvofiq bo'lish ehtimolini toping.

11. Qurilma uchta bir-biriga bog'liqsiz ishlaydigan uchta elementlardan iborat. T vaqt ichida qurilmani elementlarini ishlab turish ehtimollari mos ravishda 0,6, 0,8, 0,7 ga teng. Shu vaqt ichida qurilmaning 1) faqat bitta elementi, 2) faqat ikkita elementi, 3) hamma elementlari ishlash ehtimollari topilsin.

12. Tanga va o'yin kubi tashlandi. «Gerbli tomon tushdi» va «5 ochko chiqdi» hodisalarining birgalikda ro'y berish ehtimolini toping.

13. Ikkita qutida detallar bor: birinchisida 10 ta (ulardan 3 tasi standart), ikkinchisida 15 ta (ulardan 6 tasi standart). Har bir qutidan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Ikkala detal standart bo'lish ehtimolini toping.

14. Uchta o'yin kubi tashlanganda kamida bitta kubda 6 ochko tushish (A hodisa) ehtimoli qanchaga teng?

15. Korxona tayyorlagan mahsulotning 95% i standart, shundan 86% i birinchi nav. Shu korxonada tayyorlangan mahsulotdan tavakkaliga olingan bittasi birinchi nav bo'lish ehtimolini toping.

16. Tanga bir tomoni bilan ketma-ket ikki marta tushguncha tashlanadi. Quyidagi hodisalarining ehtimollarini toping: 1) tajriba oltinchi otishgacha tugaydi; 2) tangani juft marta tashlash lozim bo'ladi.

17. Biror fizik kattalikni bir marta o'ldashda berilgan aniqlikdan ortiq xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o'ldash erkli o'ldash o'tkazilgan. Bulardan faqat bittasida yo'l qo'yilgan xato berilgan aniqlikdan ortiq bo'lish ehtimolini toping.

18. Buyumlar partiyasidan tovarshunos oliy nav buyumlarni ajratmoqda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy nav bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasi oliy nav bo'lish ehtimolini toping.

19. Talaba o'ziga kerakli formulani uchta spravochnikdan izlamogda. Formulaning birinchi, ikkinchi, uchinchi spravochnikda bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula 1) faqat bitta spravochnikda; 2) faqat ikkita spravochnikda; 3) formula uchala spravochnikda bo'lish ehtimolini toping.

20. Yig'uvchiga kerakli detalning birinchi, ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi yashikda bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 ga teng. Detalning: 1) ko'pi bilan uchta yashikda; 2) kamida ikkita yashikda bo'lish ehtimolini toping.

21. Uchta o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: 1) tushgan yoqlarning har birida 5 ochko bo'lishi; 2) tushgan yoqlarning hammasida bir xil sondagi ochkolar bo'lishi.

22. 3 ta o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: 1) ikkita tushgan yoqda bir ochko, uchinchi yoqda esa boshqa sondagi ochko bo'lishi; 2) tushgan ikkita yoqda bir xil sondagi ochko, uchinchi yoqda esa boshqa sondagi ochko bo'lishi; 3) hamma tushgan yoqlarda turli sondagi ochkolar bo'lishi.

23. Merganning bitta o'q uzishda o'qning nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Bitta ham o'q xato ketmasligini 0,4 dan kichik ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun mergan nechta o'q uzishi kerak?

24. Radiusi R bo'lgan doiraga muntazam uchburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: 1) 4ta nuqtaning hammasi uchburchak ichiga tushadi; 2) bitta nuqta uchburchak ichiga tushadi va har bir "kichik" segment ichiga bittadan nuqta tushadi. Nuqtaning figuraga tushish ehtimoli figura yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

25. Biror joy uchun may oyida bulutli kunlarning o'rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi mayda havo ochiq bo'lish ehtimolini toping.

26. Qutida 10 ta detal bo'lib, ular orasida 6 ta yaroqli. Yig'uvchi tavakkaliga 4 ta detal oladi. Olingan detallarning hammasi yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

27. Qutida 1 dan 5 gacha nomerlangan 5 ta shar bor. Tavakkaliga bittalab, joyga qaytarib qo'ymasdan, 3 ta shar olinadi. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: 1) ketma-ket 1,4, 5 nomerli sharlar chiqadi; 2) olingan sharlar qanday tartibda chiqishidan qat'iy nazar 1,4, 5 nomerga ega bo'ladi.

28. Talaba programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabani imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolini bilish ehtimolini toping.

29. Xaltachada 1 dan 10 gacha nomerlangan 10 ta bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin-ketin 1,2,3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini quyidagi hollarda toping: a) kubiklar olingach, xaltachaga qaytarib solinmaydi; b) olingan kubik xaltachaga qaytarib solinadi.

30. Ikki mergan bittadan o'q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasi nishonga tekkizganligi ehtimolini toping.

31. Yig'uvchida 1- zavodda tayyorlangan 16 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 4 ta detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olindi. Ulardan aqalli bittasini 1-zavodda tayyorlanganligi ehtimolini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P = 1 - C_6^3 / C_{10}^3 = 5/6$. 2. $P = 3/4$. 3. $P = 0,4$. 4. $P = \frac{44}{45}$. 5. $P = 2/3$.

6. $P(D) = 0,1$. 7. $P = 0,14$. 8. $P = 0,38$. 9. $P = 0,7$. 10. $P = 0,18$.

11. 1) $P = 0,188$, 2) $P = 0,452$, 3) $P = 0,336$. 12. $P = 1/12$. 13. $P = 0,12$.

14. $P(A) = \frac{91}{216}$. 15. $P = 0,817$. 16. 1) $P = \frac{15}{16}$; 2) $P = \frac{2}{3}$. 17. $P = 0,432$.

18. $P = 0,384$. 19. 1) $P = 0,188$; 2) $P = 0,452$; 3) $P = 0,336$.

20. 1) $P = 0,6976$; 2) $P = 0,9572$. 21. 1) $P = \frac{1}{6}$; 2) $P = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$.

22. 1) $P = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{72}$; 2) $P = \frac{5}{12}$; 3) $P = \frac{5}{9}$. 23. $n \geq 5$.

24. 1) $P = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; 2) $P = 3! \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$.

$$25. P = 25/31 \cdot 24/30 = 20/31.$$

$$26. P = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}. \quad 27. 1) P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}; \quad 2) P = 0,1.$$

$$28. P = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}. \quad 29. a) P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}; \quad b) P = 0,001.$$

$$30. P = 0,88. \quad 31. P = \frac{92}{95}.$$

8.5-amaliy mashg'ulot.

To'la ehtimol formulasi. Beyes formulasi.

1. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli

1-misol. Elektr zanjiriga erkli ishlaydigan 3 ta element ketma –ket ulangan. Birinchi, ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Zanjirda tok bo'lmashlik ehtimolini toping.

Yechilishi. Elementlar ketma-ket ulanganligi sababli elementlardan kamida bittasi buzilsa, zanjirda tok bo'lmaydi (A hodisa). Yuqoridagi formulaga asosan:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0,2)(1 - 0,15)(1 - 0,2) = 0,388.$$

2-misol. Ikkita sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar, bunda har bir sportchi o'z kuchini ikki marta sinab ko'radi. Mashqni birinchi bo'lib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofotini olishlari ehtimolini toping.

Yechilishi. Mukofot topshirilishi uchun to'rtta sinovdan kamida bittasi muvaffaqiyatli bo'lishi kifoya. Sinovning muvaffaqiyatli o'tish ehtimoli $p = 0,5$, muvaffaqiyatsiz o'tish ehtimoli esa $q = 1 - 0,5 = 0,5$.

$$\text{Izlanayotgan ehtimol: } P = 1 - q^4 = 1 - 0,5^4 = 0,9375.$$

3-misol. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechilishi. Uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish (A hodisa) ehtimoli: $P(A) = 1 - q^3$ ga teng, bu yerda q – o'qning xato ketish ehtimoli.

Shartga ko'ra $P(A) = 0,875$.

Demak, $0,875 = 1 - q^3$ yoki $q^3 = 1 - 0,875 = 0,125$. Bu yerdan $q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$. Izlanayotgan ehtimol: $p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Qurilma o'zaro erkli ishlaydigan ikkita elementni o'z ichiga oladi. Elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda 0,05 ga va 0,08 ga teng. Qurilmaning buzilish uchun kamida bitta elementning buzilishi yetarli bo'lsa, qurilmaning ishlamay qolish ehtimolini toping.

2. Ko'prik yakson bo'lishi uchun bitta aviatsion bombaning kelib tushishi kifoya. Agar ko'priikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo'lgan 4 ta bomba tashlansa, ko'prikn yakson bo'lish ehtimolini toping.

3. Uch tadqiqotchi bir- biridan erkli ravishda biror kattalikni o'lchamokda. Birinchi tadqiqotchining asbob ko'rsatishini o'qishda xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,1 ga teng. Ikkinchi va uchinchi tadqiqotchi uchun bu ehtimol mos ravishda 0,15 va 0,2 ga teng. Bir martadan o'lchashda tadqiqotchilardan kamida birining xatoga yo'l qo'yish ehtimolini toping.

4. To'rtta o'q uzishda kamida bitta o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,9984 ga teng. Bitta o'q uzishda o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P = 0,126$. 2. $P = 0,95$. 3. $P = 0,388$. 4. $p = 0,8$.

2. To'la ehtimol formulasi

1-misol. Omborxonada uchta stanokda tayyorlangan detallar kiritiladi. Birinchi stanokda detallar umumiy miqdorning 40% i, ikkinchi stanokda 35% i va uchinchi stanokda 25% i tayyorlangan. Bunda birinchi stanokda 90% ikkinchi stanokda 80% va uchinchi stanokda 70 % birinchi nav detal tayyorlangan. Tavakkaliga olingan detal birinchi navli bo'lishi ehtimoli qanday?

Yechilishi. Quyidagi belgilarni kiritamiz: B_1 – detal birinchi stanokda tayyorlangan, B_2 - detal ikkinchi stanokda tayyorlangan va B_3 – detal uchinchi stanokda tayyorlangan; A hodisa – detal birinchi navli detal bo'lish hodisasi. Masala shartidan: $P(B_1) = 0,4$, $P(B_2) = 0,35$

$P(B_3) = 0,25$, $P_{B_1}(A) = 0,9$, $P_{B_2}(A) = 0,8$ va $P_{B_3}(A) = 0,7$. Ravshanki,
 $A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A$, u holda

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + \\ + 0,35 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,815.$$

2-misol. Zavodning 2 ta sexida bir xil miqdorda mahsulotlar ishlab chiqariladi. 1 va 2- sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sifatli bo'lish ehtimollari mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotlardan tasodifan olingan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechilishi. B_1 -- mahsulotni 1-sexda ishlanganligini bildirsin, B_2 -- mahsulotni 2-sexda ishlanganligini bildirsin. A - mahsulot sifatli ekanini bildirsin. B_1 va B_2 hodisalar birga ro'y bermas va to'la hodisalar guruhnisini tashkil etadi. Shuning uchun bu masalani yechishda to'la ehtimol formulasidan foydalanamiz.

Mahsulotning 1- sexda ishlanganligi ehtimoli: $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

Mahsulotning 2- sexda ishlanganligi ehtimoli: $P(B_2) = \frac{1}{2}$.

1-sexda ishlangan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli: $P_{B_1}(A) = 0,8$.

2-sexda ishlangan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli: $P_{B_2}(A) = 0,9$.

Demak, tasodifan olingan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

3-misol. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin umumiy konveyerga o'tadi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ortiq. Birinchi avtomat o'rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o'rtacha hisobda detallarning 84% ini a'lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerdan tavakkaliga olingan detal a'lo sifatli bo'lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqarganligi ehtimolini toping.

Yechilishi. A orqali -- detal a'lo sifatli bo'lishi hodisasini belgilaymiz. Bu yerda ikkita taxmin (gipoteza) qilish mumkin: B_1 -- detalni birinchi

avtomat ishlab chiqarganligini hodisasini bildirsa uni ehtimoli $P(B_1) = \frac{2}{3}$ (chunki birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko'p detal ishlab chiqaradi); B_2 – detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqarganligini bildirsa, uni ehtimoli $P(B_2) = \frac{1}{3}$.

Agar detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,6$.

Agar detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli $P_{B_2}(A) = 0,84$.

Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68. \end{aligned}$$

4-misol. Birinchi qutida 20 ta radiolampa bo'lib, ulardan 18 tasi standart; ikkinchi qutida esa 10 ta radiolampa bo'lib, ulardan 9 tasi standart. Ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta lampa olinib, birinchi qutiga solingan. Birinchi qutidan tavakkaliga olingan lampaning standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A orqali, birinchi qutidan standart lampa olinganlik hodisasini belgilaymiz.

Ikkinchi qutidan yo standart lampa olingan (B_1 hodisa), yoki nostandart lampa olingan (B_2 hodisa) bo'lishi mumkin.

Ikkinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli: $P(B_1) = \frac{9}{10}$.

Ikkinchi qutidan nostandart lampa olinish ehtimoli: $P(B_2) = \frac{1}{10}$.

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga standart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga nostandart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Izlanayotgan ehtimol, ya'ni birinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9. \end{aligned}$$

5-misol. Ichida 2 ta shar bo'lgan idishda bitta oq shar solinib, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqida mumkin bo'lgan barcha taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechilishi. A orqali oq shar olinganlik hodisasini belgilaymiz. Sharlarning dastlabki tarkibi haqida quyidagi taxminlar (gipotezalar) bo'lishi mumkin: B_1 – oq sharlar yo'q, B_2 – bitta oq shar bor, B_3 – ikkita oq shar bor.

Hammasi bo'lib uchta gipoteza mavjud bo'lib, shu bilan birga ular shartga ko'ra teng imkoniyatli va gipotezalar ehtimollari yig'indisi birga teng (chunki ular hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi) bo'lgani uchun gipotezalarning har birining ehtimoli $\frac{1}{3}$ ga teng, ya'ni

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Idishda dastlab oq sharlar bo'lmaganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli $P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}$.

Idishda dastlab bitta oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli $P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}$.

Idishda dastlab ikkita oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli $P_{B_3}(A) = \frac{3}{3} = 1$.

Idishdan oq shar olinishining izlanayotgan ehtimolini to'liq ehtimol formulasidan foydalanib topamiz:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \\ + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Yig'uvchiga 1-zavodda tayyorlangan detallardan 3 quti, 2-zavodda tayyorlangan detallardan 2 quti keltirildi. 1-zavoddan keltirilgan detalning standart bo'lish ehtimoli 0,8 ga, 2-zavoddan keltirilgan detalning standart bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Yig'uvchi tavakkaliga bir qutini tanlab, undan tavakkaliga bitta detal oldi. Olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

2. Ichida n ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solingan, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Agar idishdagi sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

3. Birinchi qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 15 tasi standart; ikkinchi qutida 30 ta detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart; uchinchi qutida 10 ta detal bo'lib, ulardan 6 tasi standart. Tavakkaliga tanlangan qutidan tasodifan olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

4. Ikkita qutida radiolampalar bor. Birinchi qutida 12 ta lampa bo'lib, ulardan bittasi nostandart; ikkinchisida 10 ta lampa bo'lib, ulardan bittasi nostandart. Birinchi qutidan tavakkaliga bitta lampa olinib, ikkinchisiga solingan. Ikkinchi qutidan tavakkaliga olingan detalning nostandart bo'lish ehtimolini toping.

5. Hisoblash laboratoriyasida 6 ta klavishli avtomat va 4 ta yarimavtomat bor. Biror hisoblash ishini bajarish davomida avtomatning ishdan chiqmaslik ehtimoli 0,95 ga teng; yarim avtomat uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Talaba hisoblash ishini tavakkaliga tanlagan mashinada bajaradi. Hisoblash tugaguncha mashinaning ishdan chiqmaslik ehtimolini toping.

6. Piramidada beshta miltiq bo'lib, ularning uchasi optik nishon bilan ta'minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,95 ga teng; optik nishon o'rnatilmagan miltiqdan o'q

uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga teng. Agar mergan tavakkaliga olingan multiqdan o'q uzsa, o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

7. Qutida 1- zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3 -zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1 -zavodda tayyorlangan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng; 2- zavodda va 3-zavodda tayyorlangan detallar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

8. Birinchi idishda 10 ta shar bo'lib, ularning 8 tasi oq; ikkinchi idishda 20 ta shar bo'lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Oq shar olinganlik ehtimolini toping.

9. 28 ta toshli dominodan tavakkaliga bitta tosh olingan. Tavakkaliga olingan ikkinchi toshni birinchi tosh yoniga o'yin qoidasi bo'yicha qo'yish mumkin bo'lgan tosh chiqish ehtimolini toping.

10. Uchta idishning har birida 6 tadan qora shar va 4 tadan oq shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, ikkinchi idishga solingan, shundan so'ng ikkinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga solindi. Uchinchi idishdan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P = 0,84$. 2. $P = \frac{n+2}{2(n+1)}$. 3. $P = 43/60$. 4. $P = \frac{13}{132}$. 5. $P = 0,89$. 6. $P = 0,85$. 7. $P = 0,78$. 8. $P = 0,5$. 9. $P = 7/18$. 10. $P = 0,4$.

3. Bayes formulasi

1-misol. Birinchi qutida 8 ta oq va 6 ta qora shar, ikkinchi qutida esa 10 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tavakkaliga quti va shar tanlanadi. Olingan shar qora ekanligi ma'lum. Birinchi quti tanlanganligining ehtimolini toping.

Yechilishi. Quydagi belgilashlarni kiritamiz: B_1 - birinchi quti tanlangan; B_2 - ikkinchi quti tanlangan; A - ikkinchi ketma ket sinov (quti tanlanishi va shar olinishi) natijasida qora shar olingan. U holda $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/2$. Birinchi quti tanlangandan so'ng qora shar chiqish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 6/14 = 3/7$ ga teng bo'ladi. Ikkinchi quti tanlangandan so'ng qora shar chiqish ehtimolligi $P_{B_2}(A) = 4/14 = 2/7$ ga teng.

To'liq ehtimol formulaga ko'ra, olingan shar qora bo'lishi ehtimolini topamiz:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}$$

Qora shar birinchi qutidan olinganligi ehtimoli Bayes formulasi bo'yicha hisoblanadi:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{(1/2) \cdot (3/7)}{5/14} = \frac{3}{5}$$

2-misol. Zavodni 1–sexda yalpi mahsulotning 35%, 2–sexda 40% i va 3–sexda 25% i ishlab chiqariladi. Sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimollari mos holda 0,8, 0,85 va 0,9 ga teng. Tasodifiy olingan mahsulot tekshirilganda sifatsiz chiqdi. Uni 1–sexda ishlanganligi ehtimoli topilsin.

Yechilishi. Mahsulotni 1–sexda ishlab chiqarilganligini B_1 , 2 va 3–sexlarda ishlab chiqarilganligini mos holda B_2 va B_3 bilan belgilaymiz. A – mahsulotning sifatli bo'lishini bildirsin.

Demak,

$$P(B_1) = \frac{35\%}{100\%} = 0,35, \quad P(B_2) = \frac{40\%}{100\%} = 0,4, \quad P(B_3) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25.$$

Masalaning shartiga asosan, agar mahsulot 1–sexda ishlab chiqarilgan bo'lsa, uni sifatli bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,8$ ga teng, sifatsiz bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - P_{B_1}(A) = 0,2$.

Xuddi shunday 2 va 3–sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sifatli bo'lish ehtimollari mos holda $P_{B_2}(A) = 0,85$, $P_{B_3}(A) = 0,9$. Demak,

$$P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - P_{B_2}(A) = 0,15,$$

$$P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - P_{B_3}(A) = 0,1.$$

To'la ehtimol formulasiga asosan, tasodifan olingan mahsulotning sifatsiz bo'lish ehtimoli

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A}) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(\bar{A}) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(\bar{A}) = \\ &= 0,35 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,1 = 0,07 + 0,06 + 0,025 = 0,155. \end{aligned}$$

Demak, sifatsiz chiqqan mahsulotning 1–sexda ishlanganlik ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,35 \cdot 0,2}{0,155} = \frac{0,07}{0,155} = \frac{70}{155} = \frac{14}{31}.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Piramidada 10 ta miltiq bo'lib, ularning 4 tasi optik nishon bilan ta'minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o'q uzganda nishonga tekizish ehtimoli 0,95 ga teng, optik nishon o'rnatilmagan miltiq uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Mergan tavakkaliga olingan miltiqdan otgan o'q nishonga tegdi. Quyidagi ehtimollardan qaysi katta: merganni optik nishonli miltiqdan otgan o'qini nishonga tegishimi yoki optik nishon o'rnatilmagan miltiqdan otgan o'qni nishonga tegishimi?

2. Benzokolonka joylashgan shossedan o'tadigan yuk mashinalari sonining o'sha shossedan o'tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk mashinaning benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng; yengil mashina uchun bu ehtimol 0,2 ga teng. Benzokolonkadan bitta mashina benzin olib ketgan. Uning yuk mashinasi bo'lish ehtimolini toping.

3. Ikki perforatorchi ayol turli perforatorlarda bir xil komplekt perfokartalar tayyorlashdi. Birinchi perforatorchi ayolning xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng; ikkinchi perforatorchi ayol uchun bu ehtimol 0,1 ga teng. Perfokartalarni tekshirishda xatoga yo'l qo'yilganligi aniqlandi. Birinchi perforatorchi ayol xato qilganligining ehtimolini toping (ikkala perforator ham buzilmagan deb faraz qilinadi)

4. Zavod 30% mahsulotni 1-sexda, 20% mahsulotni 2-sexda, 50% mahsulotni 3-sexda ishlab chiqaradi. Birinchi sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli 0,85 ga, 2-sexda va 3-sexda chiqarilgan mahsulotlar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,7 va 0,9 ga teng. Tasodifiy olingan mahsulot sifatli chiqdi. Uni 3-sexda ishlangan bo'lish ehtimoli topilsin.

5. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o'rta hisobda 50% i K kasallik bilan, 30% i L kasallik bilan, 20% i M kasallik bilan qabul qilinadi. K kasallikni to'liq davolanish ehtimoli 0,7 ga teng, L va M kasalliklar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Kasalxonaga qabul qilingan bemor butunlay sog'ayib ketdi. Bu bemor K kasallik bilan og'rigan bo'lishi ehtimolini toping.

6. Buyumning standartga muvofiqligini ikki tovarshunoslardan biri tekshiradi. Buyumning birinchi tovarshunosga kelib tushish ehtimoli 0,55

ga, ikkinchi tovarshunosga kelib tushish ehtimoli esa 0,45 ga teng. Standart buyumni birinchi tovarshunos standartga muvofiq deb qabul qilish ehtimoli 0,9 ga teng; ikkinchi tovarshunos uchun bu ehtimol 0,98 ga teng. Standart buyum tekshirishda standartga muvofiq deb qabul qilindi. Bu buyumni ikkinchi tovarshunos tekshirgan bo'lish ehtimolini toping.

7. Uch mergan bir yo'la o'q uzishdi, bunda ikki o'q nishonga tegdi. Agar birinchi, ikkinchi va uchinchi merganlarning o'qni nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,6; 0,5 va 0,4 ga teng bo'lsa, o'qni uchinchi mergan nishonga tekkizganligining ehtimolini toping.

8. Zavodning 1-sexida 25 ta, 2-sexida 35 ta, 3-sexida 20 ta mashina ishlab chiqarildi. 1-sexda ishlab chiqarilgan mashinalarning difektsiz bo'lish ehtimoli 0,9 ga, 2 va 3-sexlarda ishlangan mashinalarning difektsiz bo'lish ehtimoli mos holda 0,8 va 0,9 ga teng. Zavoddan chiqqan mashinalar orasida tasodifiy olingan mashina difektsiz chiqdi. Uning 2-sexda ishlanganligi ehtimoli topilsin.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. Miltiq optik nishonsiz bo'lganligining ehtimoli katta. $24/43$.

2. $P = 3/7$. 3. $P = 1/3$. 4. $P \approx 0,53$. 5. $P = 5/11$. 6. $P \approx 0,47$. 7. $P = 10/19$.

8. $P \approx 0,4$.

8.6-amaliy mashg'ulot.

Bog'liqmas sinovlar ketma – ketligi. Bernulli formulasi.

Laplasning lokal va integral teoremlari

1. Bog'liqmas sinovlar ketma – ketligi. Bernulli formulasi.

1-misol. Bitta o'q uzishda nishonga tegish ehtimoli $p = 0,8$ ga teng. 10 ta o'q uzishda nishonga yetti marta tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. Bu yerda $n = 10$, $k = 7$, $p = 0,8$, $q = 0,2$ bernulli formulasiga ko'ra:

$$P_{10}(7) = \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^{10-7} = \frac{10!}{73!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 = 0,2.$$

2-misol. Ishchi ishlov berayotgan detallar orasida o'rtacha 4% i nostandart bo'ladi. Sinash uchun olingan 30 ta detaldan ikkitasi nostandart

bo'lish ehtimolini toping. Qaralayotgan 30 ta detal dan iborat tanlanmada nostandart detallarning eng ehtimolli soni va uning ehtimoli qancha?

Yechilishi. Bu yerda tajriba 30 ta detalning har biri sifatidan iborat. A hodisa – nostandart detal chiqish hodisasi; uning ehtimoli $p=0,04$, u holda $q=0,96$. Bu yerdan Bernulli formulasi bo'yicha

$$P_{30}(2) = C_{30}^2 (0,04)^2 (0,96)^{28} \approx 0,202$$

ni topamiz.

Berilgan tanlanmadagi nostandart detallarning eng ehtimolli son $k_0 = [np + p]$ formula bo'yicha topiladi:

$$k_0 = [30 \cdot 0,04] = [1,24] = 1,$$

uning ehtimoli esa

$$P_{30}(1) = C_{30}^1 \cdot 0,04^1 \cdot (0,96)^{29} \approx 0,305$$

3-misol. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. To'rtta o'q uzish seriyasida 1) kamida bir marta nishonga tegish; 2) nishonga kamida uch marta tegish; 3) nishonga ko'pi bilan bir marta tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. Bu yerda $n=4$, $p=0,8$, $q=0,2$. 1) qarama qarshi hodisa – 4 ta o'q uzish seriyasida bir marta ham nishonga tegmaslik ehtimolini topamiz:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,016.$$

Bu yerdan bir marta nishonga tekkizish ehtimolini topamiz:

$$P_4(k \geq 1) = 1 - 0,016 = 0,984.$$

2) 4 ta o'q uzish seriyasida kamida uch marta nishonga tegishdan iborat. B hodisa: yo uch marta nishonga tekkizishni (C hodisa), yoqi to'rt marta nishonga tekkizishni (D hodisa) bildiradi, ya'ni $B = C + D$. Bundan $P(B) = P(C) + P(D)$; demak,

$$\begin{aligned} P_4(k \geq 3) &= P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 = \\ &= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192. \end{aligned}$$

3) nishonga ko'pi bilan bir marta tegish ehtimoli shunga o'xshash topiladi:

$$P_4(k \leq 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0,0016 + C_4^1 p^1 q^3 = \\ = 0,0016 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0272.$$

4-misol. Har bir detalning standart bo'lish ehtimolligi $p=0,8$ bo'lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan rosa 2 tasining standart bo'lishi ehtimolligini toping.

Yechilishi. Izlanayotgan ehtimollikni $n=5, m=2, p=0,8$ va $q=0,2$ da $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Bernulli formulasidan topamiz:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0,00512 = 0,0512.$$

5-misol. Har bir otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $p=2/3$. Otilgan 10 ta o'qdan 3 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. $n=10, k=3, p=2/3, q=1/3$. U holda Bernulli formulasiga asosan: $P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7$.

6-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda: to'rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimoli kattami yo'q olti partiyadan uchtasini yutish ehtimoli kattami (durang natijalar hisobga olinmaydi)?

Yechilishi. Teng kuchli shaxmatchilar o'ynashmoqda, shu sababli o'yinchining har bir partiyada yutish ehtimoli $p=1/2$, demak, partiyani yutqazish ehtimoli q ham $1/2$ ga teng. Hamma partiyalarda yutish ehtimoli o'zgarmas va partiyalarni kaysi tartibda yutishning farqi yo'qligi sababli Bernulli formulasini qo'llash mumkin.

O'yinchining to'rt partiyadan ikki partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Olti partiyadan uch partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

$P_4(2) > P_6(3)$ bo'lgani uchun olti partiyadan uchtasida yutishdan ko'ra to'rt partiyada ikki marta yutishning ehtimoli kattaroq.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Ikki teng kuchli raqib shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi birining yutish ehtimoli kattaroq: 1) ikki partiyadan bir partiyada yutishnimi yoqi to'rt partiyadan ikkitasida yutishnimi; 2) to'rt partiyadan kamida ikkitasida yutishnimi yoqi besh partiyadan kamida uchtasida yutishnimi? Durang natijalar e'tiborga olinmaydi.

2. Tanga 5 marta tashlanadi. «Gerbli» tomon 1) ikki martadan kam tushish; 2) kamida ikki marta tushish ehtimolini toping.

3. Agar bir marta sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, u holda to'rt marta erkli sinashlarda A hodisaning kamida uch marta ro'y berish ehtimolini toping.

4. A hodisa kamida to'rt marta ro'y bergan holda B hodisa ro'y beradi. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lgan 5 ta erkli sinash o'tkaziladigan bo'lsa, B hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

5. Oilada 5 ta farzand bor. Bu bolalar orasida: 1) ikkita o'g'il bola; 2) ko'pi bilan ikkita o'g'il bola 3) ikkitadan ortiq; 4) kamida ikkita va ko'pi bilan uchta o'g'il bolalar bo'lish ehtimolini toping. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolini 0,51 ga teng deb olinadi.

6. Uzunligi 15 sm bo'lgan AB kesmani C nuqta orqali 2:1 kabi nisbatda bo'lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlangan. Bu nuqtalardan ikkitasi C nuqtadan chapga, ikkitasi esa undan o'ngga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. 1) Ikki partiyadan bittasini yutish ehtimoli kattaroq:

$P_2(1)=1/2$; $P_4(2)=3/8$; 2) to'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimoli kattaroq: $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-P_4(0)+P_4(1)=11/16$;

$$P_3(3)+P_3(4)+P_3(5)=8/16=1/2.$$

$$2.1) P=P_3(0)+P_3(1)=3/16; 2) Q=1-[P_3(0)+P_3(1)]=13/16.$$

$$3. P_4(3)+P_4(4)=0,1792. 4. P_5(4)+P_5(5)=0,74. 5. 1) 0,31; 2) 0,48; 3) 0,52;$$

$$4) 0,62. 6. P_4(2)=C_4^2(2/3)^2(1/3)^2=8/27.$$

2. Laplasning lokal va integral teoremlari

1-misol. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. $n=100$, $k=75$, $p=0,8$, $q=0,2$. U holda

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25.$$

Jadvaldan $\phi(-1,25) = 0,1826$.

$$\text{Demak, } P_{100}(75) = \frac{0,1826}{4} = 0,04565.$$

2-misol. Agar biror hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 100 ta sinovdan

1) rosa 50 marta ro'y berish ehtimolini;

2) kami bilan 30 marta, ko'pi bilan 45 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. 1) Shartga ko'ra, $n=100$, $p=0,4$, $q=0,6$. Sinovlar soni n katta bo'lganligi uchun, masalani lokal teoremgaga ko'ra yechamiz:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{50-100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{10}{\sqrt{24}} \approx 2,04$$

$\phi(x)$ -funksiyaning qiymatlar jadvalidan $\phi(2,04) = 0,0498$ ekanligini topamiz.

Topilganlarni $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$ formulaga qo'yib, izlanayotgan ehtimolni topamiz:

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \phi(2,04) = \frac{0,0498}{24} = 0,0102$$

b) Laplasning integral teoremasini qo'llaymiz.
 $n=100$, $k_1=30$, $k_2=45$, $p=0,4$, $q=0,6$ ekanligiga asosan,

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{30-100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{-10}{\sqrt{24}} \approx -2,04,$$

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{45 - 100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{5}{\sqrt{24}} \approx 1,02,$$

$\phi(x)$ ning qiymatlar jadvalidan

$$\phi(-2,04) = -\phi(2,04) = -0,4793, \quad \phi(1,02) = 0,3461.$$

Topilganlarni $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ formulaga qo'yib, talab qilingan ehtimollikni topamiz.

$$P_{100}(30; 45) \approx \phi(1,02) - \phi(-2,04) = \phi(1,02) + \phi(2,04) = 0,3461 + 0,4793 = 0,8254.$$

3-misol. A hodisaning 900 ta bog'liqmas sinovning har birida ro'y berish ehtimoli $p = 0,8$ ga teng. A hodisa:

1) 750 marta ; 2) 710 dan 740 martagacha ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. 1) $n = 900, k = 750, p = 0,8, q = 0,2$

U holda

$$\frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5$$

jadvaldan $\phi(2,5) \approx 0,0175$

$$\text{Demak, } P_{900}(750) \approx \frac{1}{2} 0,0175 \approx 0,00146.$$

$$\text{b) } \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83, \quad \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67$$

jadvaldan $\phi(-0,83) = -\phi(0,83) \approx -0,2967, \quad \phi(1,67) \approx 0,4525$.

$$\text{Demak, } P_{900}(710; 740) \approx 0,4525 + 0,2967 = 0,7492.$$

4-misol. Agar A hodisaning har bir sinovida ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 243 marta sinashda rosa 70 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. Masalaning shartiga ko'ra,

$$n = 243, k = 70, p = 0,25, q = 0,75,$$

x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37.$$

Jadvaldan (1-ilova) $\phi(1,37) = 0,1561$ ni topamiz. Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231.$$

5-misol. Agar A hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 2400 marta sinashda 1400 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi. n katta son bo'lgani uchun Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \cdot x$ ni hisoblaymiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ funksiya juft bo'lgani uchun } \varphi(-1,67) = \varphi(1,67).$$

Jadvaldan (1-ilova) $\phi(1,67) = 0,0989$ ni topamiz. Izlanayotgan ehtimol

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} \cdot 0,0989 = 0,0041.$$

6-misol. 100 marta erkli sinovning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, $r=0,8$ ga teng. Hodisaning: 1) kamida 75 marta va ko'pi bilan 90 marta; 2) kamida 75 marta; 3) ko'pi bilan 74 marta ro'y berish ehtimollarini toping.

Yechilishi. Laplasning integral teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{bu yerda } F(x) - \text{Laplas funksiyasi, } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

1) Shartga ko'ra $n=100$, $p=0,8$, $q=0,2$, $k_1=75$, $k_2=90$. x' va x'' ni hisoblaymiz:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Laplas funksiyasi tok, ya'ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_{100}(75; 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Jadvaldan (2-ilova) quyidagini topamiz:

$$\Phi(2,5) = 0,4938, \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Izlanayotgan ehtimol: $P_{100}(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

2) 100 marta sinashda hodisaning kamida 75 marta ro'y berish ehtimoli $P_{100}(75; 100)$ ni hisoblaymiz. Shunday qilib, $k_1 = 75$, $k_2 = 100$. U holda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25; \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

Jadvaldan (2-ilova) quyidagini topamiz:

$$\Phi(5) = 0,5 \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{100}(75; 100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

3) «A kamida 75 marta ro'y berish» va «A ko'pi bilan 74 marta ro'y berish» hodisalari qarama – qarshi hodisalar, shuning uchun bu hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng. Demak, izlanayotgan ehtimol: $F(x_1) \leq F(x_2)$.

7-misol. Hodisaning erkli sinovlarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning kamida 75 marta ro'y berish ehtimolini 0,9 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta sinov o'tkazish lozim?

Yechilishi. Shartga ko'ra $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k_1 = 75$; $k_2 = n$; $P_n(75, n) = 0,9$.

Laplasning ushbu integral teoremasidan foydalanamiz: 1) $F(x) = 0$

Bunga masalada berilgan ma'lumotlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$0,9 = \Phi \left[\frac{n-0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \right] - \Phi \left[\frac{75-0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \right] \text{ yoki } 0,9 = \Phi \left[\frac{\sqrt{n}}{2} \right] - \Phi \left[\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}} \right].$$

Ravshanki, sinovlar soni $n > 75$, shuning uchun $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx 4,33$. Laplas funksiyasi o'suvchi va $\Phi(4) \approx 0,5$ bo'lgani uchun $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0,5$ deb olish mumkin. Demak,

$$F(x-0) = \lim_{y \uparrow x} F(y),$$

$$F(x+0) = \lim_{y \downarrow x} F(y),$$

$$F(+\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y),$$

$$F(-\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y).$$

Shunday qilib,

$$\Phi \left[\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}} \right] = -0,4. (*)$$

Jadvaldan (2-ilova) $\Phi(1,28) = 0,4$ ni topamiz. Bu yerdan va (*) munosabatdan, Laplas funksiyasining toqligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{75-0,8n}{0,4\sqrt{n}} = -1,28.$$

Bu tenglamani $\sqrt{n}$ nisbatan kvadrat tenglama sifatida yechib, $\sqrt{n} = 10$ ni hosil qilamiz.

Demak, sinashlar soni $p = 100$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Merganni har bir o'q uzilgandagi nishonga tegizish ehtimoli 0,8 ga teng. Nishonga 100 marta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

2. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 marta sinashda hodisaning rosa 104 marta ro'y berish ehtimolini taqriban toping.

3. O'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,51 ga teng. Tug'ilgan 100 chaqaloqning 50 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.

4. Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,75 ga teng, 100 ta o'q uzilganda nishonga tekkan o'qlar soni 1) 70 bilan 80 oralig'ida, 2) 70 gacha bo'lish ehtimolini toping.

5. Hodisaning 2100 ta erkli sinashning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Hodisaning: 1) kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500 marta 2) kamida 1470 marta 3) ko'pi bilan 1469 marta ro'y berish ehtimollarini toping.

6. Hodisaning 21 marta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Sinovlarning ko'pchiligida hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

7. Merganni har bir otishda nishonga tekkizish ehtimoli $\frac{3}{4}$ ga teng. 1200 marta otganda quyidagi hodisalar ehtimolini toping: 1) 885 bilan 930 oralig'ida; 2) kamida 870 marta tegishi.

8. Lampochkani 1000 soatdan ortiq yonish ehtimoli $\frac{1}{3}$ ga teng. 1800 ta lampochkadan hech bo'lmasa 580 tasini 1000 soatdan ortiq yonish ehtimolini baholang.

9. n ta tajribaning har birida ijobiy natija olinish ehtimoli 0,9 ga teng. Kamida 150 ta tajribada ijobiy natija olinishini 0,98 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish lozim?

10. Tangani gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasining $p = 0,5$ ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo'yicha 0,01 dan katta bo'lmasligini 0,6 ehtimol bilan kutish uchun tangani necha marta tashlash kerak?

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $P_{100}(75) = 0,04565$. 2. $P_{400}(104) = 0,0006$. 3. $P_{100}(50) = 0,0782$.

4. 1) $P_{100}(70, 80) = 2\Phi(1,15) = 0,7498$; 2) $P_{100}(0; 70) = 0,1251$.

5. 1) $P_{2100}(1470; 1500) = 0,4236$; 2) $P_{2100}(1470; 2100) = 0,5$; 3) $P_{2100}(0; 1469) = 0,5$.

6 $P_{21}(11; 21) = 0,95945$. 7. 1) 0,8175 2) 0,9772.

8. 0,8413. 9. $n = 177$. 10. $n = 1764$.

8.7-amaliy mashg'ulot

Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Taqsimotni integral va zichlik funksiyalari va ularning xossalari

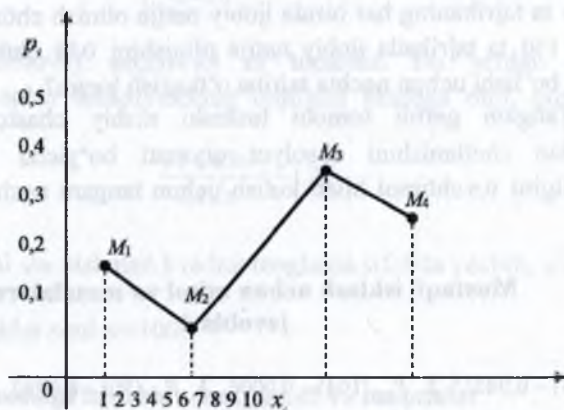
1. Tasodifiy miqdorning ta'rifi. Diskret tasodifiy miqdor ehtimolliklarining taqsimot qonuni

1-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni (katori) bilan berilgan:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

taqsimot ko'pburchagini yasang.

Yechilishi. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini yasaymiz, bunda abssissalar o'qi bo'ylab mumkin bo'lgan x_i qiymatlarni, ordinatalar o'qi bo'ylab esa tegishli p_i ehtimollarni qo'yamiz. $M_1(1;0,2)$, $M_2(3;0,1)$, $M_3(6;0,4)$ va $M_4(8;0,3)$ nuqtalarni yasaymiz. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalar bilan tutashtirib, izlanayotgan taqsimot ko'pburchagini hosil qilamiz (1-chizma).



1-chizma

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

1)

x_i	2	4	5	6
p_i	0,3	0,1	0,2	0,6

2)

x_i	10	15	20
p_i	0,1	0,7	0,2

Taqsimot ko'pburchagini yasang.

2. Partiyada 10% nostandart detal bor. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi nostandart detallar sonining taqsimot qonunini yozing va hosil qilingan taqsimotning ko'pburchagini yasang.

Javobi.

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

6.3. Diskret tasodifiy miqdorlar ustida amallar

1-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	1	4	6
p_i	0,2	0,3	0,5

$Y = 2X$ tasodifiy miqdorning taqsimoti qonunini toping.

Yechilishi. $Y = 2X$ miqdorining mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz:

$$y_1 = 2 \cdot 1 = 2; \quad y_2 = 2 \cdot 4 = 8; \quad y_3 = 2 \cdot 6 = 12.$$

Ko'rib turibmizki, X ning turli mumkin bo'lgan qiymatlariga Y ning turli mumkin bo'lgan qiymatlari mos keladi. Bu $y = f(x) = 2x$ funksiya monotonligidandir.

Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topamiz. $Y = y_1 = 2$ bo'lishi uchun X miqdor $x_1 = 1$ qiymatni qabul qilishi yetarli. $X = 1$ hodisaning ehtimoli esa shartga ko'ra 0,2 ga teng; demak, $Y = y_1 = 2$ hodisaning ham ehtimoli 0,2 ga teng.

Y ning qolgan mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini shunga o'xshash topamiz:

$$P(Y = 8) = P(X = 4) = 0,3;$$

$$P(Y = 12) = P(X = 6) = 0,5.$$

Y ning izlanayotgan taqsimot qonunini yozamiz:

y_i	2	8	12
p_i	0,2	0,3	0,5

2-misol. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

x_i	-1	0	1	3	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	0,25

bo'lsa, $Y = 4X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. $Y = 2X$ miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz. (6.1) formulaga asosan quyidagiga egamiz:

$y_i = 4x_i$	-4	0	4	12	20
x_i					
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	0,25

Agar $f(x)$ nomonoton funksiya bo'lsa, u holda u X ning turli qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qilishi mumkin. Bu holda oldin (4.1) ko'rinishdagi yordamchi jadval tuzib olinadi, keyin esa Y tasodifiy miqdorning bir xil qiymatlari ustunlari birlashtiriladi, bunda mos ehtimolliklar qo'shiladi.

3 - misol. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

x_i	-3	-2	1	3
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

bo'lsa, $Z = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. Agar Z tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini tuzamiz: $z_1 = (-3)^2 = 9$, $z_2 = (-2)^2 = 4$, $z_3 = (-1)^2 = 1$, $z_4 = 3^2 = 9$. $Z = X^2$ uchun yordamchi jadval bunday bo'ladi:

$z_i = x_i^2$	9	4	1	9
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Bunda $P\{Z=3\} = P\{X^2=9\} = P\{X=-3\} + P\{X=3\} = 0,2 + 0,3 = 0,5$.

Demak,

z_i	1	4	9
p_i	0,40	0,10	0,50

4-misol. X va Y diskret erkli tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimotlar bilan berilgan:

x_i	1	3
p_i	0,3	0,7

y_i	2	4
p_i	0,6	0,4

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

Yechilishi. $Z = X + Y$ miqdorning taqsimotini tuzish uchun Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini va ularning ehtimollarini topish lozim.

Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari X ning har bir mumkin bo'lgan qiymati bilan Y ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yig'indilaridan iborat:

$$z_1 = 1 + 2 = 3;$$

$$z_2 = 1 + 4 = 5;$$

$$z_3 = 3 + 2 = 5;$$

$$z_4 = 3 + 4 = 7.$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollarini topamiz. $Z = 3$ bo'lishi uchun X miqdor $x_1 = 1$ qiymatni va Y miqdor $y_1 = 2$ qiymatni qabul qilishi yetarli. Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollari berilgan taqsimot qonunlariga ko'ra mos ravishda 0,3 va 0,6 ga teng. X va Y argumentlar erkli bo'lgani uchun $X = 1$ va $Y = 2$ hodisalar erkli va demak, ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli (ya'ni $Z = 3$ hodisaning ehtimoli) ko'paytirish teoremasi ko'ra $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ ga teng. Shunga o'xshash quyidagilarni topamiz:

$$P(Z=1+4=5)=0,3 \cdot 0,4=0,12;$$

$$P(Z=3+2=5)=0,7 \cdot 0,6=0,42;$$

$$P(Z=3+4=7)=0,7 \cdot 0,4=0,28.$$

Avval birga ro'y bermas $Z=z_2=5$, $Z=z_3=5$ hodisalarning ehtimollarini qo'shib ($0,12+0,42=0,54$) izlanayotgan taqsimotni yozamiz:

z_i	3	5	7
p_i	0,18	0,54	0,28

Tekshirish: $0,18+0,54+0,28=1$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

x_i	-2	-1	1	2	3
p_i	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

bo'lsa, 1) $Y=2X$; 2) $Z=X^2$ tasodifiy miqdorlarni taqsimot qonunini yozing.

Javobi. 1)

y_i	-4	-2	2	4	6
p_i	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

2)

z_i	1	4	9
p_i	0,55	0,35	0,10

2. Agar x va y tasodifiy miqdorlarni ikkita taqsimot qonuni berilgan

x_i	1	2	3
p_i	0,30	0,50	0,20

y_i	-2	-1
q_i	0,40	0,60

bo'lsa, 1) $Z=X+Y$; 2) $W=X \cdot Y$ tasodifiy miqdorlarni taqsimot qonunini yozing.

Javobi.

1)

z_i	-1	0	1	2
p_i	0,12	0,38	0,38	0,12

2)

w_i	-6	-4	-3	-2	-1
p_i	0,08	0,20	0,12	0,42	0,18

3. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	3	6	10
p_i	0,2	0,1	0,7

$Y = 2X + 1$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javobi.

y_i	7	13	21
p_i	0,2	0,1	0,7

4. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	-1	-2	1	2
p_i	0,3	0,1	0,2	0,4

$Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javobi.

y_i	1	4
p_i	0,5	0,5

5. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p_i	0,2	0,7	0,1

$Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javobi.

y_i	$\sqrt{2}/2$	1
p_i	0,3	0,7

6. X va Y diskret erkli tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimotlar bilan berilgan:

1)

x_i	10	12	16
p_i	0,4	0,1	0,5

y_i	1	2
p_i	0,2	0,8

2)

x_i	4	10
p_i	0,7	0,3

y_i	1	7
p_i	0,8	0,2

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

Javobi.

1)

z_i	11	12	13	14	17	18
p_i	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

2)

z_i	5	11	17
p_i	0,56	0,38	0,06

2. Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimot (integral) funksiyasi

1-misol. X -tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 4 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning
1) 0,2 dan kichik qiymat; 2) uchdan kichik qiymat; 3) uchdan kichik bo'lmagan qiymat; 4) beshdan kichik bo'lmagan qiymat qabul qilish ehtimollarini toping.

Yechilishi. 1) $x \leq 2$ bo'lganda $F(x) = 0$ bo'lgani uchun $F(0,2) = 0$, ya'ni $P(X < 2) = 0$;

2) taqsimot funksiyaning uzluksizligidan va $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ tenglikdan foydalanib $P(X < 3) = F(3 - 0) = F(3) = [0,5x - 1]_{x=3} = 1,5 - 1 = 0,5$;

3) $\{X \geq 3\}$ va $\{X < 3\}$ hodisalar qarama-qarshi hodisalardir, shuning uchun

$$P(X \geq 3) + P(X < 3) = 1.$$

Bu yerda $P(X < 3) = 0,5$ ni hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,5 = 0,5;$$

4) qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng, shuning uchun $P(X \geq 5) + P(X < 5) = 1$. Bu yerdan, masala shartiga ko'ra $x > 4$ bo'lganda $F(x) = 1$ bo'lishini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - 1 = 0.$$

2-misol. X -tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

$F(x)$ -taqsimot funksiyani toping.

Yechilishi. 1. Agar $x < 2$ bo'lsa, $F(x) = 0$. Haqiqatan, X miqdor 2 dan kichik qiymatlarni qabul qilmaydi. Demak, $x < 2$ bo'lganda $F(x) = P(X \leq x) = 0$.

2. Agar $2 \leq x < 4$ bo'lsa, $F(x) = 0,5$. Haqiqatan, X miqdor 2 qiymatni 0,5 ehtimol bilan qabul qilishi mumkin.

3. Agar $4 \leq x < 7$ bo'lsa, $F(x) = 0,7$. Haqiqatan, X miqdorning 2 qiymatni 0,5 ehtimol bilan va 4 qiymatni 0,2 ehtimol bilan qabul qilish mumkin; demak X bu qiymatlarni qaysi biri bo'lishdan qat'iy nazar birini (birga ro'y bermas hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga ko'ra $0,5 + 0,2 = 0,7$ ehtimol bilan qabul qiladi).

4. Agar $x \geq 7$ bo'lsa $F(x) = 1$. Haqiqatan, $X > 7$ hodisasi ishonchli hodisa va uning ehtimoli birga teng.

Shunday qilib, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi o'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,5 & 2 \leq x < 4 \text{ bo'lganda,} \\ 0,7 & 4 \leq x < 7 \text{ bo'lganda,} \\ 1 & x \geq 7 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. X -tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 1 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan. 4 ta sinov natijasida X tasodifiy miqdorning rosa uch marta $(0,25; 0,75)$ intervalda yotadigan qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

2. X tasodifiy miqdor butun Ox o'qda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \frac{x}{2}$$

integral funksiya bilan berilgan. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan x_1 qiymatni toping: sinov natijasida X miqdor x_1 dan katta qiymatni $1/6$ ehtimol bilan qabul qiladi.

3. X tasodifiy miqdor butun Ox o'qda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \frac{x}{2}$$

integral funksiya bilan berilgan. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan x_1 qiymatni toping. Sinov natijasida X miqdor x_1 dan katta qiymatni $1/4$ ehtimol bilan qabul qiladi.

4. X -tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

$F(x)$ integral funksiyani toping va uning grafigini yasang.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $p = P(0,25 < X < 0,75) = 0,5$; $P_4^3 = C_4^3 p^3 q = 0,25$. 2. $x_1 = 2\sqrt{3}$.

$$3. x_1 = 2. \quad 4. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \text{ bo'lganda,} \\ 0,2, & 3 < x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ 0,3, & 4 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,7, & 7 < x \leq 10 \text{ bo'lganda} \\ 1, & x > 10 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

3. Uzlüksiz tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining differensial (zichligi) funksiyasi

1-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

Yechilishi. Zichlik funksiya ta'rifiga asosan deyarli barcha x lar uchun $f(x) = F'(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$x = 0$ da $F'(x)$ birinchi tartibli hosilaga ega emasligini eslatib o'tamiz.

2-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(0, \frac{\pi}{3})$ intervalda

$f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida

$f(x) = 0$. X ning $(\pi/6, \pi/4)$ intervalga tegishli qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

Yechilishi. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Shartga ko'ra $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$. Demak, izlanayotgan ehtimol

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

3-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

bo'lsa $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechilishi. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Agar $x \leq 0$ bo'lsa, $f(x) = 0$, demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Agar $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x.$$

Agar $x > \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^x 0 dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Shunday qilib, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

4-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi sonlar o'qida

$$f(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan bo'lsa, C o'zgarmas parametрни toping.

Yechilishi. $f(x)$ zichlik funksiya

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

shartni qanoatlantirishi lozim. Bu shartning berilgan funksiya uchun bajarilishini talab qilamiz: $4C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = 1$. Bu yerdan $C = \frac{1}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}}$.

Dastlab ushbu aniqmas integralni hisoblaymiz: $\int \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \arctg e^x$.

So'ngra, xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^{-x} + e^x} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \frac{\pi}{2}.$$

Shunday qilib, $C = \frac{1}{2\pi}$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi/4 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/4 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

2. X tasodifiy miqdor taqsimot zichligi funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -\pi/2 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & \text{agar } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x > \pi/2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Tajriba natijasida tasodifiy miqdorni $(0; \pi/4)$ intervaldagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli topilsin.

3. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(0, \infty)$ intervalda $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$) zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning $(1, 2)$ intervalga tegishli qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

4. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(-\pi/2, \pi/2)$ intervalda $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos^2 x$ zichlik funksiya bilan berilgan, bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning uchta erkli sinovda rosa ikki marta $(0, \pi/4)$ intervalda yotadigan qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

5. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

bo'lsa, $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

6. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

bo'lsa $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

7. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi sonlar o'qida $f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$ tenglik bilan berilgan bo'lsa, C o'zgarmas parametrni toping.

8. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $(0, \pi/2)$ intervalda $f(x) = C \sin 2x$ bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. C o'zgarmas parametrni toping.

9. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $(0, 1)$ intervalda $f(x) = C \arctg x$ bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. C o'zgarmas parametrni toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $(0, \pi/4)$ intervalda $f(x) = 2\cos 2x$ bundan intervaldan tashqarida $f(x) = 0$.

$$2. P(0 < x < \pi/4) = \frac{\pi+2}{4\pi}.$$

$$3. P(1 < X < 2) = (e^\alpha - 1)/e^{2\alpha}.$$

$$4. p = P\left\{0 < X < \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{\pi+2}{4\pi}; P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

$$6. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 1/2(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

$$7. C = 1/2\pi. \quad 8. C = 1.9.. \quad C = (\pi - \ln 4)/4.$$

18.8-amaliy mashg'ulot.

Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilma va dispersiya. Boshlang'ich va markaziy momentlar

1-misol. Quyidagi

1)

x_i	-4	6	10
p_i	0,2	0,3	0,5

2)

x_i	0,21	0,54	0,61
p_i	0,1	0,5	0,4

taqsimot qonunga ega X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmani toping.

Yechilishi. 1) Matematik kutilma X ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ularning ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga teng:

$$M(X) = -4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6.$$

Javobi. 2) $M(X) = 0,535$.

2-misol. Agar X va Y ning matematik kutilma ma'lum bo'lsa, Z tasodifiy miqdorning matematik kutilmani toping.

1) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$;

2) $Z = 3X + 4Y$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

3) $Z = 5X - 3Y$, $M(X) = 4$, $M(Y) = 3$.

Yechilishi. 1) Matematik kutilmaning xossalaridan foydalanib (yig'indining matematik kutilma qo'shiluvchilarining matematik kutilmalari yig'indisiga teng; o'zgarma ko'paytuvchini matematik kutilma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin), quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} M(Z) &= M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = \\ &= M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11. \end{aligned}$$

Javobi. 2) $M(Z) = 30$. 3) $M(Z) = 11$.

3-misol. X tasodifiy miqdorning dispersiyasini formula bo'yicha hisoblang:

x_i	-2	4	6
p_i	0,3	0,2	0,5

Yechilishi.

$$M(X) = -2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,5 = 3,2,$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,2 + 36 \cdot 0,5 = 22,4,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 22,4 - 10,24 = 12,16.$$

4-misol. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli musbat va bir xil taqsimlangan bo'lsa, u holda

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{n}$$

ekanligini isbotlang.

Yechilishi. Ushbu tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad \dots,$$

$$Y_n = \frac{X_n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}. \quad (*)$$

Bu kasrlarning maxrajlari nolga teng bo'la olmaydi, chunki $X_i (i = \overline{1, n})$ miqdorlar musbat.

Shunga ko'ra X_i miqdorlar bir xil taqsimlangan, shu sababli Y_i miqdorlar ham bir xil taqsimlangan, demak, ular bir xil sonli xarakteristikalariga, jumladan, bir xil matematik kutilishlarga ega:

$$M(Y_1) = M(Y_2) = \dots = M(Y_n). \quad (**)$$

So'ngra

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 1$$

ekanligini ko'rish oson, demak,

$$M(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = M(1) = 1.$$

Yig'indining matematik kutilishi qo'shiluvchilarning matematik kutilishlari yig'indisiga teng, shuning uchun $M(Y_1) + M(Y_2) + \dots + M(Y_n) = 1$ (**) ga asosan,

$$nM(Y_1)=1.$$

$$\text{Bundan } M(Y_1)=\frac{1}{n}.$$

(*) ni e'tiborga olgan holda, uzil – kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{n}.$$

5-misol. X va Y erkli tasodifiy miqdorlar. Agar $D(X)=5$, $D(Y)=6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=3X+2Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechilishi. X va Y miqdorlar erkli bo'lgani uchun $3X$ va $2Y$ miqdorlar ham erkli. Dispersiyaning xossaligidan foydalanib (erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi qo'shiluvchilarning dispersiyalari yig'indisiga teng. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin), quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} D(Z) &= D(3X + 2Y) = D(3x) + D(2Y) = \\ &= 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69. \end{aligned}$$

6-misol. A hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor- A hodisaning beshta erkli sinovda ro'y berish sonining dispersiyasini toping.

Yechilishi. Hodisaning erkli sinovlarda ro'y berish sonining dispersiyasi (har bir sinovda hodisaning ehtimoli bir xil bo'lganda) sinovlar sonini hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollariga ko'paytirilganiga teng: $D(X) = npq$. Shartga ko'ra $n=5$; $p=0,2$; $q=1-p=0,8$.

Demak, dispersiya:

$$D(X) = npq = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,8.$$

7-misol. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_2 > x_1$. X ning x_1 qiymatini qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. Matematik kutilishi va dispersiya ma'lum: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$. X miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechilishi. Diskret tasodifiy miqdorinng barcha mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari yig'indisi birga teng, shuning uchun X ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli $1 - 0,6 = 0,4$ ga teng.

X ning taqsimot qonuni ni yozamiz:

x_i	x_1	x_2
p_i	0,6	0,4

(1)

x_1 va x_2 ni topish uchun bu sonlarni o'zaro bog'laydigan ikkita tenglama tuzish lozim. Shu maqsadda biz ma'lum matematik kutilish va dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

$M(X)$ ni topamiz: $M(X) = 0,6x_1 + 0,4x_2$. Shartga ko'ra $M(X) = 1,4$, demak,

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4. \quad (2)$$

x_1 va x_2 ni bog'laydigan bitta tenglamani hosil qildik. Ikkinchi tenglamani hosil qilish uchun bizga ma'lum dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

X^2 ning taqsimot qonuni ni yozamiz:

x_i^2	x_1^2	x_2^2
p_i	0,6	0,4

$M(X^2)$ ni topamiz: $M(X^2) = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2$.

Dispersiyani topamiz:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2.$$

Bunga $D(X) = 0,24$ ni qoyib, elementar almashtirishlardan sung

$$0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2 \quad (3)$$

ni hosil qilamiz.

(2) va (3) ni birlashtirib, ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4 \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2 \end{cases}$$

bu sistemani yechib, ushbu ikkita yechimni hosil qilamiz:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; \text{ va } x_1 = 1,8; x_2 = 0,8.$$

Shartga ko'ra $x_2 > x_1$, shuning uchun masalani faqat birinchi yechim:

$$x_1 = 1; x_2 = 2 \quad (4)$$

qanoatlantiradi.

(4) ni (1) ga qo'yib, izlanayotgan taqsimot qonunini hosil qilamiz:

x_i	1	2
p_i	0,6	0,4

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Matematik kutilma xossalaridan foydalanib:

1) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$ tenglikni; 2) $X - M(X)$ chetlanishning matematik kutilishi nolga tengligini isbotlang.

2. X diskret tasodifiy miqdor uchta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiladi: $x_1 = 4$ ni $p_1 = 0,5$ ehtimol bilan, $x_2 = 6$ ni $p_2 = 0,3$ ehtimol bilan va x_3 ni p_3 ehtimol bilan. $M(X) = 8$ ni bilgan holda x_3 ni va p_3 ni toping.

3. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining ro'yxati berilgan: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Shuningdek, bu miqdorning va uning kvadratining matematik kutilishlari ma'lum: $M(X) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. X ning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollarni toping.

4. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z = 2X + 3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

5. Ushbu

x_i	-5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

6. X tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Shu tasodifiy miqdorni chetlanishining matematik kutishini, dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

7. Biror qurilmadagi elementning har bir tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,9 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor- elementning o'nta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasini toping.

8. Agar ikkita erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=0,9$ ekanligi ma'lum bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

9. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lgan erkli sinovlar o'tkazilmoqda. Agar uchta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish sonining dispersiyasi 0,63 ga teng bo'lsa, bu hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

10. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega, shu bilan birga, $x_2 > x_1$. X ning x_1 qiymatini qabul qilish ehtimoli 0,2 ga teng. Matematik kutilishi va dispersiya ma'lum: $M(X)=2,6$ ni va o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X)=0,8$ ni bilgan holda X ning taqsimot qonuni ni toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

2. $x_3 = 2$; $p_3 = 0,2$. 3. $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,5$. 4. $D(Z) = 61$.

5. $D(X) = 15,21$; $\sigma(X) = 3,9$.

6. $M(X) = 2,64$; $D(X) = 1,8976$; $\sigma(X) \approx 1,3775$. 7. $D(X) = 0,9$.

8. $P(X) = 0,495$. 9. $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,7$. 10.

x_i	1	3
p_i	0,2	0,8

2. Boshlang'ich va markaziy momentlar

1-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu Taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	1	3
p_i	0,4	0,6

Birinci, ikkinchi va uchinchi tartibli boshlangich momentlarni toping.

Yechilishi. Birinchi tartibli boshlangich momentni topamiz:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2.$$

X^2 miqdorning taqsimot qonuni ni yozamiz

x_i^2	1	9
p_i	0,4	0,6

Ikkinchi tartibli boshlangich momentni topamiz

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8.$$

X^3 miqdorning taqsimot qonuni ni yozamiz

x_i^3	1	27
p_i	0,4	0,6

Uchinchi tartibli boshlangich momentni topamiz

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6.$$

2. X diskret tasodifiy miqdor ushbu Taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,4	0,5

Birinci, ikkinchi va uchinchi tartibli boshlangich momentlarini toping.

Javobi. $\nu_1 = 3,9$; $\nu_2 = 16,5$; $\nu_3 = 74,1$.

3. X diskret tasodifiy miqdor

x_i	1	2	4
p_i	0,1	0,3	0,6

taqsimot qonuni bilan berilgan. Birinchi, ikkinchi, uchinchi va turtinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Yechilishi. Birinchi tartibli markaziy moment nolga teng: $\mu_1 = 0$.

Markaziy momentlarni hisoblash uchun markaziy momentlarni boshlangich momentlar orqali ifodalaydigan formulalardan foydalanish qulay, shuning uchun avval boshlangich momentlarni topamiz:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5.$$

Markaziy momentlarni topamiz:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^3 = -0,888;$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = & 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + \\ & + 6 \cdot 10,9 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,7777. \end{aligned}$$

4. X diskret tasodifiy miqdor.

x_i	3	5
p_i	0,2	0,8

Taqsimot qonuni bilan berilgan. Birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Javobi. $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0,64$; $\mu_3 = -0,12$; $\mu_4 = 1,33$.

5-misol. Uchinchi tartibli markaziy momentning ta'rifiga ko'ra momentlar bilan

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

tenglik bilan bog'langanligini isbot qiling.

Isboti. Markaziy momentning ta'rifiga ko'ra

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3.$$

Matematik kutilishning xossaligidan foydalanib va $M(X)$ o'zgarmas kattalik ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) = \end{aligned}$$

$$= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X). (*)$$

Boshlang'ich momentning ta'rifiga ko'ra

$$\nu_1 = M(X), \nu_2 = M(X^2), \nu_3 = M(X^3). (**)$$

(**) ni (*) ga qo'yib, uzil-kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

6. To'rtinchi tartibli markaziy moment boshlang'ich momentlar bilan

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

tenglik orqali boglanganligini isbot qiling.

18.9-amaliy mashg'ulot.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

1-misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimot funksiyasi bilan berilgan

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{x^2}{9}, & \text{agar } 0 < x \leq 3 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 3 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

X ni matematik kutilma, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Yechilishi. Oldin zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{2x}{9}, & \text{agar } 0 < x \leq 3 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x > 3 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Endi $M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = \int_0^3 x \frac{2x}{9} dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{0^3}{3} = 2.$$

Demak, $x = 2$ chiziq yuzani teng ikkiga bo'ladi.

Endi dispersiyani hisoblaymiz:

$$D(X) = \int_0^3 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2x}{9} dx - 2^2 = \frac{2}{9} \int_0^3 x^3 dx - 4 = \\ = \frac{2}{9} \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 - 4 = \frac{3^4}{9 \cdot 2} - \frac{0^4}{9 \cdot 4} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = 4,5 - 4 = 0,5$$

O'rta kvadratik chetlanishi $\sigma(X) = \sqrt{0,5} \approx 0,7$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda} \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

differensial funksiyasi berilgan. $F(x)$ integral funksiyani toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda} \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

differensial funksiyasi berilgan. $F(x)$ integral funksiyani toping.

3. X tasodifiy miqdor (0,2) intervalda $f(x) = \frac{1}{2}x$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X miqdorning matematik kutilishini toping.

4. X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda $f(x) = c(x^2 + 2x)$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. a) C parametrini toping; b) X miqdorning matematik kutilishini toping.

5. X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda $f(x) = x + 0,5$ differensial funksiya bilan berilgan, bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. $Y = X^3$ funksiyaning matematik kutilishini (dastlab Y ning differensial funksiyasini topmasdan) toping.

6. X tasodifiy miqdor $(0,5)$ intervalda $f(x)=2/25x$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x)=0$. X ning dispersiyasini toping.

7. X tasodifiy miqdor $(0,1)$ intervalda $f(x)=cx^2$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x)=0$. a) C parametrini toping; b) X miqdorning matematik kutilishini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda} \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda} \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda} \\ 1, & x > 2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

3. $4/3$. 4. $C=3/4$. $M(X)=11/16$. 5. $13/40$.

6. $25/18$. 7. $C=3$. $M(X)=3/4$.

18.10-amaliy mashg'ulot.

Binomial, Puasson, geometrik, tekis, ko'rsatgichli va normal taqsimlangan miqdorlar.

9.1. Binomial taqsimot.

1-misol. Nishonga qarata uchta o'q uzildi. Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolligi $p=0,4$. X tasodifiy miqdor – nishonga tegishlar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. X tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega va uning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2 va 3. Shuning uchun

$$P(X=k) = \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot (0,4)^k \cdot (0,6)^{3-k}.$$

Bundan

$$P(X=0)=0,216; P(X=1)=0,432; P(X=2)=0,288; P(X=3)=0,064.$$

X tasodifiy miqdorning taqsimoti ushbu ko'rinishda bo'ladi:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

2-misol. Qurilma bir – biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechilishi. X diskret tasodifiy miqdor (bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar soni) ushbu mumkin bo'lgan qiymatlarga ega: $x_1 = 0$ (qurilma elementlarining bittasi ham ishdan chikmagan), $x_2 = 1$ (bitta element ishdan chiqqan), $x_3 = 2$ (ikkita element ishdan chiqqan), $x_4 = 3$ (uchta element ishdan chiqqan).

Elementlarning ishdan chiqishi bir – biriga bog'lik emas, elementlarning ishdan chiqish ehtimollari o'zaro teng, shuning uchun Bernulli formulasini qullash mumkin. Shartga ko'ra $n=3$; $p=0,1$ (demak, $q=1-0,1=0,9$) ekanligini e'tiborga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729; \quad P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243.$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; \quad P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Tekshirish: $0,729+0,243+0,027+0,001=1$.

X ning izlanayotgan binomial taqsimot qonunini yozamiz:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

3-misol. Idishda 10 ta shar bor, ulardan 3 tasi oq. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni. Uning taqsimot qonunini yozing.

Yechilishi. X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Ushbu $P = \frac{C_n^m C_{N-n}^{n-m}}{C_N^n}$ formulaga

asosan, $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ va $X = 3$ hodisalarning ehtimolliklarini topamiz:

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{35}{120}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{63}{120};$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_7^0}{C_{10}^2} = \frac{21}{120}, \quad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}.$$

Endi X miqdorning taqsimot qatorini yozishimiz mumkin:

X	0	1	2	3
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

Tekshirish: $\frac{35}{120} + \frac{63}{120} + \frac{21}{120} + \frac{1}{120} = 1.$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Binomial taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.

Javobi. $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

2. X diskret tasodifiy miqdor – tangani ikki marta tashlashda «gerbli» tomon tushish sonining binominal taqsimot qonuni ni yozing.

Javobi.

X	0	1	2
p	0,25	0,50	0,25

3. Ikkita o'yin soqqasi bir vaqtda 2 marta tashlanadi. X diskret tasodifiy miqdor – ikkita o'yin soqqasida juft ochkolar tushish sonining binominal taqsimot qonuni ni yozing.

Javobi.

X	0	1	2
p	9/16	6/16	1/16

2. Puasson taqsimoti

1-misol. 800 ta urchuqning har biriga τ vaqt ichida ipning uzilish ehtimolligi 0,005 ga teng. Ko'rsatilgan vaqt ichida rosa 4 ta ip uzilish ehtimolligini toping.

Yechilishi. Bu masalani yechishda $P(X=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, bunda $\lambda = np$ formulani qo'llash mumkin: chunki $n = 800$ son katta, $p = 0,005$ ehtimol esa kichik. Bu formuladan foydalanib topamiz, $\lambda = np = 800 \times 0,005 = 4$;

$$P_{800}(4) \approx \frac{4^4}{4!} e^{-4} = \frac{256}{24} \cdot 0,0183 = 0,1952.$$

Aniq formula bo'yicha hisoblash 0,1959 ni beradi, demak, Pausson formulasini qo'llanishdagi xatolik 0,0007 bo'ladi. Laplas lokal formulasi bo'yicha hisoblash esa 0,2000 ni hosil qilamiz, demak xatolik 0,0051 bo'ladi, ya'ni Puasson formulasidan foydalanilganidan ko'ra 6 marta ortiq bo'ladi.

2-misol. Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping:

X	0	1	2	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

Yechilishi. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ formuladan foydalanamiz.

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

bo'lgani uchun

$$D(X) = M(X^2) - \lambda^2 \quad (2)$$

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ni yozamiz, bunda X^2 ning k^2 qiymatni qabul qilish ehtimoli X k qiymatni qabul qilish ehtimoliga tengligini (bu X ning mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy emasligidan kelib chiqadi) hisobga olamiz:

X^2	0	1	4	...	k^2	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

X^2 ning matematik kutilishini topamiz:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bundan $k = 0$ da birinchi had nolga teng bo'lishini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

$k-1=m$ desak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M(X^2) = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right].$$

Endi

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \text{ larni e'tiborga olib,}$$

$$M(X^2) = \lambda \cdot (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \quad (3)$$

ni hosil qilamiz. (3) ni (2) ga qo'yamiz:

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotining dispersiyasi λ parametrga teng.

3-misol. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotlardan 10000 tasini omborga yuborildi. Har bir mahsulotni yo'lda ishdan chiqish ehtimoli 0,0002 ga teng bo'lsa, mahsulotlar omborga yetguncha ikkitasi ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechilishi. Shartga ko'ra $n=10000$, $p=0,0002$, $k=2$. λ ni topamiz

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2. \text{ Puasson formulasiga ko'ra}$$

$$P_{10000}(2) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2 \cdot 0,13534 = 0,27068.$$

4-misol. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotlardan bazaga 500 tasi jo'natildi. Yo'lda buyumning shikastlanish ehtimoli 0,002 ga teng. Yo'lda: 1) rosa 3 ta; 2) uchtdan kam; 3) uchtdan ortiq; 4) kamida bitta mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechilishi. $p=500$ soni katta, $r=0,002$ ehtimol kichik va qaralayotgan hodisalar (mahsulotlarning shikastlanish) erkli, shu sababli ushbu

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Puasson formulasini qo'llash mumkin:

1) λ ni topamiz: $\lambda = pr = 500 \cdot 0,002 = 1$.

Rosa 3 ta ($k=3$) mahsulotning shikastlanish ehtimolini topamiz:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{0,36788}{6} = 0,0613.$$

2) Uchtadan kam detalning shikastlanish ehtimolini topamiz:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2} \cdot 0,36788 = 0,9197.$$

3) Uchtadan ko'p mahsulotning shikastlanish ehtimoli P ni topamiz. «Uchtadan ko'p mahsulot shikastlangan» va «ko'pi bilan uchta mahsulot shikastlangan» (bu hodisaning ehtimolini Q orqali belgilaymiz) hodisalari qarama – qarshi hodisalardir, shu sababli $P + Q = 1$. Bu yerdan

$$P = 1 - Q = 1 - [P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)].$$

Yuqorida hosil qilingan natijalardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P = 1 - [0,9197 + 0,0613] = 0,019.$$

4) Kamida bitta mahsulotning shikastlanish ehtimoli P_1 ni topamiz. «Kamida bitta mahsulot shikastlangan» va «mahsulotning bittasi ham shikastlanmagan» (bu hodisaning ehtimolini Q_1 orqali belgilaymiz) hodisalari qarama – qarshi hodisalardir, demak, $P_1 + Q_1 = 1$. Bu yerdan kamida bitta mahsulotning shikastlangan bo'lish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,36788 = 0,632.$$

5-misol. Erkli sinashlarda hodisaning ro'y berish sonining Puasson taqsimoti buyicha hisoblangan ehtimollari yig'indisi birga teng bo'lishini isbotlang. Sinashlar cheksiz ko'p marta o'tkaziladi deb faraz qilinadi.

Yechilishi. Puasson qonuniga asosan

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

e^x funksiyaning ushbu Makloren qatoridan foydalanamiz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Ma'lumki, bu qator x ning istalgan qiymatida yaqinlashadi, shu sababli $x = \lambda$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Izlanayotgan ehtimollar yig'indisi $\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)$ ni topamiz, bunda $e^{-\lambda}$ ifoda k ga bog'liq emasligini, va demak, uni yig'indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligini hisobga olamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = e^0 = 1.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Binomial taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.
2. Magazinga 1000 shisha mineral suvi berildi. Tashish vaqtida shishaning sinib qolish ehtimoli 0,003 ga teng. Magazinga: a) rosa ikkita; b) ikkitadan kam; v) ikkitadan ko'p; g) kamida bitta singan shisha keltirish ehtimolini toping.
3. 1000 ta yashikka mahsulotlar joylashtirilgan. Hamma mahsulotlardan 200 tasi sifatsiz. Ma'lum bitta yashikda kamida uchta yaroqsiz mahsulotlar bo'lish ehtimoli topilsin.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$

2. Ko'rsatma. $e^{-1} = 0,04979$ deb oling.

a) $P_{1000}(2) = 0,224$; b) $P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = 0,1992$;

c) $P_{1000}(k > 2) = 0,5678$; g) $P = 1 - P_{1000}(0) = 0,95.$

3. Ko'rsatma $n = 200, p = 0,001. 0,001$

3. Geometrik taqsimot

Agar X tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ qiymatlarini

$$p_k = P(X = k) = q^k p \quad (1)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsa, ya'ni uning taqsimoti

X	0	1	2	...	k	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^k	...

ko'rinishda bo'lsa, u *geometrik qonuni bo'yicha taqsimlangan* deb ataladi.

Bu yerda $p = 1 - q, p \in (0, 1)$. Bunda $\sum_{k=1}^{\infty} q^k p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{1}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1,$

chunki p_k ehtimolliklar geometrik progresiyaning tashkil etadi: $p, pq, pq^2, \dots, pq^k, \dots$. Shuning uchun ham (1) taqsimot *geometrik taqsimot* deyiladi va Ge orqali belgilanadi.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Geometrik taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.

Javobi. $M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$

4. Tekis taqsimot

1-misol. Ampermetr shkalasining bo'lim bahosi $0,1A$ ga teng. Strelkaning ko'rsatishi eng yaqin butun bo'linmagacha yaxlitlanadi. Ko'rsatkichlarni o'qishda $0,02A$ dan ortiq xatoga yo'l qo'yilish ehtimolini toping.

Yechilishi. Yaxlitlash xatosini ikkita qo'shni butun bo'linma orasidagi intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin.

Tekis taqsimotning differensial funksiyasi: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, bu yerda $b-a-$

qaralayotgan x ning mumkin bo'lgan qiymatlari joylashgan intervalning uzunligi; bu intervalda tashqarida $f(x)=0$. Qaralayotgan masalada X ning mumkin bo'lgan qiymatlari yotadigan intervalning uzunligi 0,1 ga teng, shuning uchun $f(x)=\frac{1}{0,1}=10$.

Agar sanash xatosi (0,02; 0,08) intervalda yotadigan bo'lsa, xato 0,02 dan ortiq bo'lishini tushunish oson.

Ushbu $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(0,02 < X < 0,08) = \int_{0,02}^{0,08} 10dx = 0,6$$

2-misol. (a, b) intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Yechilishi. Tekis taqsimot differensial funksiyasining grafigi $x = \frac{a+b}{2}$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik, shuning uchun $M(X) = \frac{a+b}{2}$.

Shunday qilib, (a, b) intervalda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi bu interval uchlari yig'indisining yarimiga teng. Shu natijaning o'zini, albatta $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$ formula bo'yicha ham hosil qilish mumkin edi.

3-misol. (a, b) intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechilishi. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Bu formulaga $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $M(X) = \frac{a+b}{2}$ (313 – masalaga qarang) ni qo'yib va elementar almashtirishlarni bajarib, uzil – kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

O'rtacha kvadratik chetlanish dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga teng:

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Tekis taqsimlangan X uzluksiz tasodifiy miqdorning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.

2. Ushbu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ tenglikni isbotlang, bunda

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ bo'lganda,} \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > b \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

3. O'lchov asbobi shkalasining bo'lim bahosi 0,2 ga teng. Asbobning ko'rsatishi eng yaqin butun bo'linmagachayaxlitlanadi. Asbobning ko'rsatishini o'qishda: a) 0,04 dan kichik; b) 0,05 dan ortiq xato qilinish ehtimolini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

$$1. M(X) = \frac{a+b}{2}, M(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

$$3. a) P(0 < x < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20) = 0,4;$$

$$b) P(0,05 < X < 0,15) = 0,5.$$

5. Ko'rsatgichli taqsimot

1-misol. Uzluksiz X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lib,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 3e^{-3x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsin. Shu tasodifiy miqdorni 1) (0,13;0,7) oraliqqa tushish ehtimoli

2) matematik kutilishi va dispersiyasi topilsin.

Yechilishi: Shartga ko'ra $\lambda = 3$. Demak,

$$1) P(0,13 < X < 0,7) = e^{-(3 \cdot 0,13)} - e^{-(3 \cdot 0,7)} = e^{-0,39} - e^{-2,1} = 0,677 - 0,122 = 0,555.$$

$$2) \lambda = 3. M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9}, \sigma(X) = \frac{1}{3}.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Ko'rsatkichli taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.

2. Ushbu $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$ tenglikni isbotlang.

3. Agar ko'rsatkichli taqsimotning parametri $\lambda = 6$ bo'lsa, uning differensial va integral funksiyasini toping.

4. Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, X ning $(a; b)$ intervalga tushish ehtimoli $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ ga teng bo'lishini ko'rsating.

5. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $f(x) = 0,004e^{-0,004x}$

differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan; $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$. Sinov natijasida X ning $(1, 2)$ intervalga tushish ehtimolini toping.

6. Uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $F(x) = 1 - e^{-0,6x}$ integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan; $x < 0$ bo'lganda $F(x) = 0$, X ning sinov natijasida $(2, 5)$ intervalga tushish ehtimolini toping.

7. $f(x) = 5e^{-5x}$ ($x \geq 0$) differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishini toping.

8. $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$ ($x \geq 0$) integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishini toping.

9. $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$) differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

10. $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ ($x \geq 0$) integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$. 3. $(0, \infty)$ intervalda $f(x) = 6e^{-6x}$, bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. $(0, \infty)$ intervalda $F(x) = 1 - e^{-6x}$, bu intervaldan tashqarida $F(x) = 0$. 4. $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. 5. 0,039. 6. 0,252 7. 0,2. 8. 10. 9. $D(X) = 0,01$; $\sigma(X) = 0,1$. 10. $D(X) = 6,25$; $\sigma(X) = 2,5$.

6. Normal taqsimot (Gauss taqsimoti)

1-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutilishi 20 ga, o'rtacha kvadratik chetlanishi 5 ga teng. Tajriba natijasida shu tasodifiy miqdorlarni (15;25) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechilishi. Shartga ko'ra $a = 20$, $\sigma = 5$, $\alpha = 15$, $\beta = 25$

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 25) &= \Phi\left(\frac{25 - 20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(1) = 0,3413 + 0,3413 = 0,6826. \end{aligned}$$

2-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutilishi 10 ga, o'rtacha kvadratik chetlanishi 3 ga teng. Chetlanishni absolyut qiymati bo'yicha 4 dan kichik bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. $P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ formuladan foydalanamiz. Shartga ko'ra $a = 10$, $\delta = 4$, $\sigma = 3$ bo'lgani uchun

$$P(|x - 10| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 2\Phi(1,5).$$

$\Phi(1,5)$ ni kitobni oxiridagi 2-ilovadan topamiz. $\Phi(1,5) = 0,4332$.

$$P(|x - 10| < 4) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Normal taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalarini toping.

2. Ushbu $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ tenglikni isbotlang.

3. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning differensial funksiyasini $M(X)=3, D(X)=16$ ni bilgan holda yozing.

4. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $a=3$ ga, o'rtacha kvadratik chetlash $\sigma=2$ ga teng. X ning differensial funksiyasini yozing.

5. Normal taqsimlangan x tasodifiy miqdorning differensial funksiyasini $M(X)=3, D(X)=16$ ni bilgan holda yozing.

6. Normal taqsimlangan x tasodifiy miqdor $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$ differensial funksiya bilan berilgan. x ning matematik kutilishini va dispersiyasini toping.

7. Normal taqsimotining $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx$ integral funksiyasi berilgan. $f(x)$ differensial funksiyani toping.

8. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$ differensial funksiya bilan berilgan. X ning matematik kutilishini va dispersiyasini toping.

9. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 2 ga teng. Sinash natijasida X ning (12,14) da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

10. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 20 va 5 ga teng. Sinov natijasida X ning (15,25) da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

11. Biror moddani tarozida tortish sistematik xatolarsiz o'tkaziladi. Tarozida tortishning tasodifiy xatolari o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=20$ g bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi, Tarozida tortish absolyut qiymati bo'yicha 10 g dan oshmaydigan xato bilan o'tkazilishining ehtimolini toping.

12. O'lchashning tasodifiy xatolari o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 20\text{mm}$ va matematik kutilishii $\alpha = 0$ bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi. Uchta erkli o'lchashdan kamida bittasining xatosi absolyut qiymat bo'yicha 4mm dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

13. X tasodifiy miqdor $a = 25$ matematik kutilishi bilan normal taqsimlangan. X ning $(10, 15)$ intervalga tushish ehtimoli $0,2$ ga teng. X ning $(35, 40)$ intervalga tushish ehtimoli nimaga teng?

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$. 3. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$.

4. $f(x) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$. 5. $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$.

6. $M(X) = 1$; $D(X) = 25$. 7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. 8. $M(X) = 1$, $D(X) = 25$.

9. $0,1359$. 10. $0,6826$. 11. $0,383$. 12. $0,41$. 13. $0,2$.

18.11-amaliy mashg'ulot.

Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev teoremasi.

Ya. Bernulli teoremasi

1-misol. Qurilma o'zaro erkli ishlaydigan 10 ta elementdan iborat. Har bir elementning T vaqt ichida ishdan chiqish ehtimoli $0,05$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, T vaqt ichida ishdan chiqqan elementlar soni bilan shu vaqt ichida ishdan chiqqan elementlarning o'rtacha soni (matematik kutilishi) orasidagi ayirmaning absolyut qiymat bo'yicha: a) ikkidan kichik bo'lishi; b) ikkidan kichik bo'lmaslik ehtimolini baholang.

Yechilishi. a) X orqali diskret tasodifiy miqdorni – qarayotgan T vaqt ichida ishdan chiqqan elementlar sonini belgilaymiz. U holda

$$M(X) = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5; \quad D(X) = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475.$$

Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Bunga $M(X)=0,5$; $D(X)=0,475$, $\varepsilon=2$ larni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz: $P(|X-0,5|<2) \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88$.

b) $|X-0,5|<2$ va $|X-0,5| \geq 2$ hodisalar qarama – qarshi hodisalardir, shuning uchun ularning ehtimollari yig'indisi birga teng. Demak,

$$P(|X-0,5|>2) \leq 1 - 0,88 = 0,12.$$

2-misol. Tanga 1000 marta tashlanayapti. «Gerb» tushishining chetlanish chastotasining ehtimoli uning kelishini ehtimolidan 0,1 oz bo'lganini quyidan baholang.

Yechilishi. Bunda $n=1000$, $p=q=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=0,1$ quyidagi tengsizlikdan

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

foydalanib, quyidagini hosil qilamiz

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1\right) > 1 - \frac{(1/2) \cdot (1/2)}{1000 \cdot 0,01} = \frac{39}{40}$$

$\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0,1$ tengsizlik, quyidagi $400 < m < 600$ qo'ish tengsizlikka teng kuchlidir, ya'ni (400, 600) oraliqda gerbning tushish ehtimoli $\frac{39}{40}$ kattadir.

3-misol. x diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Chebisev tengsizligidan foydalanib, $|X - M(X)| < 0,2$ ni baholang.

Yechilishi. x miqdorning matematik kutilishi va dispersiyani topamiz:

$$\begin{aligned}
 M(X) &= 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54; \\
 D(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 = \\
 &= (0,3^2 \cdot 0,2 + 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8) - 0,54^2 = 0,0144
 \end{aligned}$$

Ushbu shakldagi Chebishev tengsizligidan foydalanamiz:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Bunga $M(X) = 0,54$, $D(X) = 0,0144$, $\varepsilon = 0,2$ ni qo'yib, uzil - kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|X - 0,54| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64.$$

4-misol. Qutida 1000 ta oq va 2000 ta qora shar bor. 300 ta shar (qaytarishi bilan) tasodifan olindi. Olingan sharlar orasida m oq sharlar quyidagi ikki karrali tengsizlikni $80 < m < 120$ qanoatlantirishining ehtimolini quyidagicha baholang.

Yechilishi. Ikki karrali tengsizlikni quyidagicha yozish ham mumkin

$$-20 < m - 100 < 20, \text{ yoki } -\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15}.$$

Shunday qilib, quyidagi tengsizlikni $\left| \frac{m}{300} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{15}$ ehtimolini baholash talab etiladi, ya'ni $\varepsilon = \frac{1}{15}$ va $P\left(\left| \frac{m}{300} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{15}\right) > 1 - \frac{(1/3)(2/3)}{300 \cdot 1/225} = \frac{5}{6}$.

5-misol. 100 bir - biriga bog'liq bo'lmagan tajribada x tasodifiy miqdorning $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ qiymatlari topildi. Uning matematik kutilishi $M(X) = 10$ va dispersiyani $D(X) = 1$. $\left(\sum_{i=1}^{100} x_i \right) / 100$ hodisaning kuzatilayotgan o'rta arifmetigi va uning matematik ehtimolining farqini absolyut qiymatining ehtimolini quyida baholang.

Yechilishi. Quyidagi tengsizlikdan foydalanamiz

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n x_i / n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Masala shartiga ko'ra $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, unda

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} x_i\right| 100 - 10 < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{1}{100 \cdot (1/4)} = \frac{24}{25}.$$

Shunday qilib, izdanayotgan ehtimol 0,96 katta.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Yoritish tarmog'iga 20 ta lampochka parallel ulangan. t vaqt ichida lampochkaning yonish ehtimoli 0,8 ga teng. Chebishev tezligidan foydalanib, t vaqt ichida yongan lampochkalar bilan shu vaqt ichida yongan lampochkalarining o'rtacha soni (matematik kutilishi) orasidagi ayirmaning absolyut qiymati: a) uchdan kichik bo'lish; b) uchdan kichik bo'lmashlik ehtimolini baholang.

2. Har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli $\frac{1}{4}$ ga teng. Agar 800 ta sinov o'tkaziladigan bo'lsa A hodisaning ro'y berish soni x ning 150 gacha bo'lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

3. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P\{|X - M(X)| < \sqrt{0,4}\}$ ni baholang.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. a) $P(|X - 16| < 3) \geq 0,36$; b) $P(|X - 16| \geq 3) \leq 0,64$.

2. $P(|X - 200| < 50) \geq 1 - 150/50^2 = 0,94$

3.. $P(|X - 0,22| < \sqrt{0,4}) \geq 1 - \frac{0,76}{0,4} = 0,9$

18.12-amaliy mashg'ulot.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimoti

1-misol. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

$Y \backslash X$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

X va Y ni tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

Yechilishi. Ehtimollarni "ustunlar bo'yicha" qo'shib, X ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini hosil qilamiz:

$$p(3) = 0,17 + 0,10 = 0,27; \quad p(10) = 0,13 + 0,30 = 0,43;$$

$$p(12) = 0,25 + 0,05 = 0,30.$$

X tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozamiz:

x_i	3	10	12
p_i	0,27	0,43	0,30

Tekshirish: $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1.$

Shunga o'xshash ehtimollarni "satrlar bo'yicha" qo'shib Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

y_j	4	5
p_j	0,55	0,45

Tekshirish: $0,55 + 0,45 = 1.$

2-misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. (X, Y) tasodifiy nuqtaning $x=0, x=\pi/4, y=\pi/6, y=\pi/3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

Yechilishi. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Bunda $x_1 = 0, x_2 = \pi/4, y_1 = \pi/6, y_2 = \pi/3$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$P = \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right] - \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,26.$$

3-misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. Sistemaning differensial funksiyasini toping.

Yechilishi. Ushbu formuladan foydalanamiz: $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Xususiylar hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (3^{-x} - 3^{-x-y}) \cdot \ln 3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 3^{-x-y} \cdot \ln^2 3.$$

Shunday qilib, izlanayotgan differensial funksiya

$$f(x, y) = \begin{cases} 3^{-x-y} \cdot \ln^2 3, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Tekshirish.

$$\ln^2 3 \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 3^{-x-y} dx dy = \ln^2 3 \cdot \int_0^{\infty} 3^{-x} dx \int_0^{\infty} 3^{-y} dy = \ln^2 3 \cdot \frac{1}{\ln^2 3} = 1.$$

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

$Y \backslash X$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

2. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

$Y \backslash X$	2	3	4
5	0,10	0,30	0,20
7	0,06	0,18	0,16

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

3. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. (X, Y) tasodifiy nuqtaning $x=1, x=2, y=3, y=5$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

4. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - 3^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. Sistemaning differensial funksiyasini toping

5. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasining differensial funksiyasi berilgan: $f(x, y) = \frac{1}{(16+x^2)(25+y^2)}$. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning integral funksiyasini toping.

6. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasining differensial funksiyasi berilgan: $f(x, y) = \frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}$. C o'zgarmasni toping.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1.

x_i	26	30	41	50
p_i	0,14	0,42	0,19	0,25
y_j	1,3	2,7		
p_j	0,29	0,71		

2.

x_i	2	3	4
p_i	0,16	0,48	0,36

y_j	5	7
p_j	0,6	0,4

3. $P = 3/128$. 4. $f(x, y) = \begin{cases} 8e^{-4x-2y}, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$

5Ko'rsatma. Ushbu formuladan foydalaning: $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$.

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{4\pi} \arctg \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{5\pi} \arctg \frac{x}{5} + \frac{1}{10} \right).$$

6. Ko'rsatma. Ushbu formuladan foydalaning: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

$$C = \frac{12}{\pi^2}.$$

2. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari ehtimollarining shartli taqsimot qonunlari

1-misol. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

$Y \backslash X$	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

1) Tashkil etuvchilarning shartsiz taqsimot qonunlarini toping; 2) X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi $y_1 = 0,4$ qiymat qabul qiladi, degan shartda shartli taqsimot qonunini toping; 3) $X = x_2 = 5$ shartda Y ning shartli taqsimot qonunini toping.

Yechilishi. 1) "Ustunlar bo'yicha" ehtimollarni jamlab, X ning taqsimot qonunini topamiz:

x_i	2	5	8
p_i	0,20	0,42	0,38

Ehtimollarni "satrlar bo'yicha" jamlab, Y ning taqsimot qonunini topamiz:

y_j	0,4	0,8
p_j	0,80	0,20

2) Y tashkil etuvchi $y_1 = 0,4$ qiymat qabul qiladi degan shartda X ning mumkin bo'lgan qiymatlarining shartli ehtimollarini topamiz:

$$p(x_1 | y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,80} = \frac{3}{16};$$

$$p(x_2 | y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,80} = \frac{3}{8};$$

$$p(x_3 | y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,35}{0,80} = \frac{7}{16}.$$

X ning izlanayotgan shartli taqsimot qonunini yozamiz:

x_i	2	5	8
$p(X y_1)$	3/16	3/8	7/16

Tekshirish. $3/16 + 3/8 + 7/16 = 1$.

3) Shunga o'xshash Y ning shartli taqsimot qonunini topamiz:

y_j	0,4	0,8
$p(Y x_2)$	5/7	2/7

Tekshirish. $5/7 + 2/7 = 1$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

$Y \backslash X$	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

a) $Y=10$ shartda X ning shartli taqsimot qonunini toping; b) $X=6$ shartda Y ning shartli taqsimot qonunini toping.

Javobi. a)

x_i	3	6
$p(X 10)$	5/7	2/7

b)

y_j	10	14	18
$p(Y x_2)$	5/14	5/28	13/28

2. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

$Y \backslash X$	3	6	8
12	0,10	0,30	0,20
14	0,06	0,18	0,16

$Y=12$ shartda X ning shartli taqsimot qonunini toping;

Javobi.

x_i	3	6	8
$p(X 12)$	1/6	1/2	1/3

18.13-amaliy mashg'ulot.

Korrelyasiya momenti va korrelyasiya koeffitsiyenti

1-misol. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni berilgan.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Quyidagilarni toping: 1) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarni; 2) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarni; 4) K_{XY} korrelyasiya momentini; 5) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini

Yechilishi. 1) Berilgan X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishini aniqlaymiz:

$$M(X) = x_1 p_{11} + x_1 p_{12} + x_1 p_{13} + x_2 p_{21} + x_2 p_{22} + x_2 p_{23} = \\ = 1 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,12 + 1 \cdot 0,08 + 2 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,25 = 1,64,$$

$$M(Y) = y_1 p_{11} + y_1 p_{21} + y_2 p_{12} + y_2 p_{22} + y_3 p_{13} + y_3 p_{23} = \\ = 1 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,12 + 2 \cdot 0,11 + 3 \cdot 0,08 + 3 \cdot 0,25 = 1,89.$$

2) **I-usul.** Berilgan X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini hisoblaymiz:

$$D(X) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - M(X))^2 p_{ij} = \\ = (1 - 1,64)^2 \cdot 0,16 + (1 - 1,64)^2 \cdot 0,12 + (1 - 1,64)^2 \cdot 0,08 + \\ + (2 - 1,64)^2 \cdot 0,28 + (2 - 1,64)^2 \cdot 0,11 + (2 - 1,64)^2 \cdot 0,25 = \\ = 0,4096 \cdot 0,36 + 0,1296 \cdot 0,64 = 0,2304,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (y_j - M(Y))^2 p_{ij} = \\ = (1 - 1,89)^2 \cdot 0,16 + (1 - 1,89)^2 \cdot 0,28 + (2 - 1,89)^2 \cdot 0,12 + \\ + (2 - 1,89)^2 \cdot 0,11 + (3 - 1,89)^2 \cdot 0,08 + (3 - 1,89)^2 \cdot 0,25 = \\ = 0,7921 \cdot 0,44 + 0,0121 \cdot 0,23 + 1,2321 \cdot 0,33 = 0,7579.$$

3) **usul.** $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarni hisoblaymiz:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 1 \cdot 0,36 + 2^2 \cdot 0,64 - (1,64)^2 = 0,2304,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 1^2 \cdot 0,44 + 2^2 \cdot 0,64 + 3 \cdot 0,33 - (1,89)^2 = \\ = 4,33 - 3,5721 = 0,7579.$$

3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarni topamiz:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,23204} = 0,48, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,7579} = 0,87.$$

4) **I-usul.** K_{XY} korrelyasiya momentini hisoblaymiz:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) p(x_i, y_j) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-1,64) \cdot (1-1,89) \cdot 0,16 + (1-1,64) \cdot (2-1,89) \cdot 0,12 + \\
 &+ (1-1,64) \cdot (3-1,89) \cdot 0,08 + (2-1,64) \cdot (1-1,89) \cdot 0,28 + \\
 &+ (2-1,64) \cdot (2-1,89) \cdot 0,11 + (2-1,64) \cdot (3-1,89) \cdot 0,25 = \\
 &= -0,64 \cdot (-0,0404) + 0,36 \cdot 0,0404 = 0,0404.
 \end{aligned}$$

2-usul. K_{XY} korrelyasiya momentini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
 K_{XY} &= M(XY) - M(X) \cdot M(Y) = \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 0,16 + 1 \cdot 2 \cdot 0,12 + 1 \cdot 3 \cdot 0,08 + 2 \cdot 1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 2 \cdot 0,11 + \\
 &+ 2 \cdot 3 \cdot 0,25 - 1,64 \cdot 1,89 = 3,16 - 3,0996 = 0,0404.
 \end{aligned}$$

Ko'rinib turibdiki 2 usul bilan hisoblash soddaroq.

5) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{0,0404}{0,48 \cdot 0,87} \approx 0,096732,$$

ya'ni $r_{XY} \approx 0,1$.

2-misol. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (y - xy), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

bu yerda $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Quyidagilarni toping: 1) c koeffitsiyentni; 2) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarini; 3) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 4) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarini; 5) K_{XY} korrelyasiya momentini; 6) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini.

Yechilishi. 1) c koeffitsiyentni ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

normal shartdan topamiz. $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ sohada $f(x, y) = c \cdot (y - xy)$ bo'lganligi uchun, bundan

$$c \cdot \int_0^1 \int_0^1 (y - xy) dx dy = c \cdot \int_0^1 (1-x) \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{c}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{c}{4}, \frac{c}{4} = 1, \text{ ya'ni } c = 4.$$

2) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ sohaning tashqarisida berilgan funksiya $f(x, y) = 0$. Endi X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorning $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarini topamiz:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_D 4xy(1-x) dx dy = 4 \int_0^1 x(1-x) dx \int_0^1 y dy = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (x-x^2) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \int_D 4y^2(1-x) dx dy = 4 \int_0^1 (1-x) dx \int_0^1 y^2 dy = \\ &= 4 \int_0^1 (1-x) dx \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} (x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3) **1- usul.** $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini topamiz:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2, \\ &= \int_D (x - \frac{1}{3})^2 4y(1-x) dx dy = 4 \int_0^1 (1-x)(x - \frac{1}{3})^2 dx \int_0^1 y dy = \\ &= 4 \int_0^1 (1-x)(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) dx \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 2 \int_0^1 (x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x) dx = \\ &= 2 \left(\frac{5}{9}x^3 - \frac{7}{18}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{18}, \end{aligned}$$

2- usul. $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini topamiz:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x) dx - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \\ D(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y) dy - [M(Y)]^2 = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \\ &= 2 \left(\frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Bu yerdan ko'rinib turibdiki 2-usul yordamida $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini topish yengilroq.

4) X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarini (9) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,236, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,236.$$

5) X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorning K_{XY} korrelyasiya momentini ushbu

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))f(x, y) dx dy$$

yoki

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y)$$

formulalardan foydalanamiz. Ikkinchi formuladan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} K_{XY} &= \iint_D xy4y(1-x) dx dy - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4 \int_0^1 (x - x^2) dx \int_0^1 y^2 dy - \frac{2}{9} = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 - \frac{2}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{2}{9} = 0. \end{aligned}$$

6) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{0}{0,236 \cdot 0,236} = 0.$$

Demak, 2-xossaga asosan, X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar bog'liqmas.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Quyidagilarni toping: 1) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarni; 2) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarni; 4) K_{XY} korrelyasiya momentini; 5) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini.

2. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	10	20	30
20	3λ	λ	0
40	2λ	4λ	2λ
60	λ	2λ	5λ

Quyidagilarni toping: 1) λ koeffitsiyentni; 2) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarni; 3) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 4) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarni; 5) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini.

3. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x, y) = \begin{cases} c^2 - x^2 - y^2, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

bu yerda

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq c^2\} (c > 0).$$

Quyidagilarni toping:

1) c koeffitsiyentni; 2) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarini; 3) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 4) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarini; 5) K_{XY} korrelyasiya momentini; 6) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini.

4. X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan: $f(x,y) = \begin{cases} c \cdot \sin(y+x), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$ bu yerda $D = \left\{ (x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. Quyidagilarni toping:

- 1) c koeffitsiyentni; 2) $M(X)$, $M(Y)$ matematik kutilishlarini;
- 3) $D(X)$, $D(Y)$ dispersiyalarini; 4) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ o'rtacha kvadratik chetlanishlarini; 5) K_{XY} korrelyasiya momentini; 6) r_{XY} korrelyasiya koeffitsiyentini.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalarning javoblari

1. 1) $M(X) = 0,7$, $M(Y) = 0,6$; 2) $D(X) = 0,21$ $D(Y) = 0,24$; 3) $\sigma(X) \approx 0,46$ $\sigma(Y) \approx 0,49$; 4) $K_{XY} = 0$; 5) $r_{XY} = 0$.

2. 1) $\lambda = \frac{1}{20}$ 2) $M(X) = 22$, $M(Y) = 41$; 3) $D(X) = 56$, $D(Y) = 259$; 4) $\sigma(X) \approx 7,48$, $\sigma(Y) \approx 16,09$; 5) $r_{XY} = 0,56$.

3. $c^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; 2) $M(X) = M(Y) = 0$; 3) $D(X) = D(Y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$;

4) $\sigma(X) = \sigma(Y) = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}}$; 5) $K_{XY} = 0$; 6) $r_{XY} = 0$.

4. 1) $c = \frac{1}{2}$; 2) $M(X) = \frac{\pi}{4}$, $M(Y) = \frac{\pi}{4}$; 3) $D(X) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2$,

$D(Y) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2$; 4) $\sigma(X) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2}$, $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2}$;

5) $K_{XY} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}$; 6) $r_{XY} \approx -0,2454$.

18-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari

18.1-masala. Quyidagi X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan. 1) Taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping va uning grafigini chizing. 2) X diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikallari $M(X)$, $D(X)$ va $\sigma(X)$ larni hisoblang.

18.1.1

X	12	20	29	34
P	0,1	0,3	0,2	0,4

18.1.2.

X	24	26	38	40
P	0,3	0,1	0,2	0,4

18.1.3.

X	20	26	34	38
P	0,2	0,4	0,3	0,1

18.1.4.

X	24	30	38	40
P	0,2	0,4	0,1	0,3

18.1.5

X	22	22	30	34
P	0,3	0,1	0,2	0,4

18.1.6.

X	44	46	48	50
P	0,1	0,3	0,2	0,4

18.1.7.

X	24	28	34	36
P	0,1	0,4	0,3	0,2

18.1.8.

X	34	36	38	42
P	0,3	0,2	0,4	0,1

18.1.9

X	12	16	18	22
P	0,4	0,3	0,2	0,1

18.1.10.

X	18	25	38	40
P	0,4	0,1	0,2	0,3

18.1.11.

X	22	26	34	38
P	0,4	0,2	0,3	0,1

18.1.12.

X	54	56	58	60
P	0,2	0,1	0,4	0,3

18.1.13.

X	42	46	49	54
P	0,3	0,1	0,2	0,4

18.1.14.

X	14	16	18	20
P	0,3	0,1	0,4	0,2

18.1.15.

X	24	26	29	32
P	0,1	0,4	0,3	0,2

18.1.16.

X	25	30	35	40
P	0,1	0,2	0,3	0,4

18.1.17.

X	12	26	28	33
P	0,2	0,3	0,1	0,4

18.1.18.

X	8	16	28	30
P	0,3	0,4	0,2	0,1

18.1.19.

X	26	36	38	48
P	0,5	0,1	0,2	0,2

18.1.20.

X	28	30	36	42
P	0,3	0,2	0,4	0,1

18.1.21.

X	26	29	34	44
P	0,3	0,1	0,2	0,4

18.1.22.

X	24	26	38	40
P	0,3	0,2	0,1	0,4

18.1.23.

X	26	29	32	36
P	0,2	0,3	0,4	0,1

18.1.24.

X	44	46	58	62
P	0,1	0,2	0,4	0,3

18.1.25.

X	32	36	38	42
P	0,3	0,1	0,2	0,4

18.1.26.

X	58	60	68	70
P	0,3	0,2	0,1	0,4

18.2-masala. Quyidagi X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan bo'lsa, quyidagilarni toping: 1) zichlik funksiyasi $f(x)$ ni; 2) X uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ va ehtimoli $P(0,2 < X < 0,7)$ larni hisoblang.

$$18.2.1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.2. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x}{5}, & 0 < x \leq 5 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 5 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.3. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1 + \sin x, & -\pi/2 < x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.4. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ \cos x, & -\pi/2 < x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.5. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.6. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \leq 3 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 3 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.7. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x^2}{49}, & 0 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 7 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.8. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 2\sin x, & 0 < x \leq \pi/6 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/6 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.9. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \leq \pi \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.10. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ bo'lganda,} \\ \cos 2x, & \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.11. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.12. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x}{2} \left(2 - \frac{x}{2} \right), & 0 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.13. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x}{4} \left(4 - \frac{x}{4} \right), & 0 < x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 4 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.14. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x^2}{81}, & 0 < x \leq 9 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 9 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.15. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ x - 1, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.16. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ x^4, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 1 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.17. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 5x^4 + 3x, & 0 < x \leq \frac{1}{5} \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \frac{1}{5} \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.18. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x}{8}, & 0 < x \leq 8 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 8 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.19. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{3}{5}(x+1), & -1 < x \leq \frac{1}{3} \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.20. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 3x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{9} \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \frac{\pi}{9} \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.21. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sqrt[4]{x}, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 1 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.22. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ \ln \frac{x}{4}, & 4 < x \leq 4e \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 4e \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.23. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \frac{x}{3}, & 0 < x \leq 3 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 3 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$18.2.24. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin 4x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{8} \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \frac{\pi}{8} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

$$18.2.25. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 0.5(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

$$18.2.26. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin 5x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{10} \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \frac{\pi}{10} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya qiymatlarining jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	0802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3132	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

I – ilovaning davomi

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0042	0042	0040	0038	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0031	0031	0030	0028	0028	0027	0026	0025	0025

3,2	0024	0022	0022	0022	0020	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0016	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0010	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0007	0009
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2 – ilova

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ funksiya qiymatining jadvali}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3668
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2519	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925

0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,499966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

19-BOB. MATEMATIK STATISTIKA

19.1-§. Matematik statistikaning vazifalari.

Statistik taqsimot. Empirik taqsimot funksiyasi

19.1. Matematik statistikaning vazifalari. Statistika lotincha so'z bo'lib, holat, vaziyat ma'nosini bildiradi. Statistika tabiatda va jamiyatda uchraydigan hodisalarni o'rganadi va ular bo'ysinadigan qonuniyatlarni aniqlab, quyidagi vazifalarni bajaradi.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi-statistik ma'lumotlarni to'plash va guruhlash usullarini ko'rsatish.

Ikkinchi vazifasi - statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq holda ishlab chiqish.

Matematik statistika yuqoridagi vazifalarni bajarish mobaynida shug'ullanadigan ba'zi masalalarni keltirib o'tamiz:

1) tasodifiy hodisa ro'y berishi ehtimolining noma'lum qiymatini baholash;

2) noma'lum taqsimot funksiyani baholash;

3) ko'rinishi ma'lum bo'lgan taqsimot funksiyasining noma'lum parametrlarini baholash;

4) tasodifiy miqdorning bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog'liqligini va bog'liqlik darajasini aniqlash;

5) statistik gipotezalarni tekshirish.

Zamonaviy statistika fani noaniqlik sharoitida muammoning eng qulay yechimini aniqlab beradi.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar chiqarish maqsadida statistik ma'lumotlarni to'plash va ularni tahlil qilish metodlarini yaratishdan iboratdir.

Bir jinsli obyektlar to'plamini bu obyektlarni xarakterlovchi biror bir sifat yoki son belgisiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar obyekt biror xil detallar partiyasi bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartligi, son belgisi bo'lib esa detalning o'lchamiga xizmat qilishi mumkin.

Ba'zan tekshirish yalpi o'tkaziladi, ya'ni to'plamdagi obyektlarning har birini o'rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish

amaliyotda nisbatan kam qo'llaniladi. Masalan, to'plam juda ko'p obyektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpi tekshirish o'tkazish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o'rganiladi.

Tanlanma to'plam (bundan keyin *tanlanma*) deb umumiy to'plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam (bosh to'plam yoki tanlanma) hajmi deb, bu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 ta detaldan tekshirish uchun 50 ta detal olingan bo'lsa, u holda bosh to'plam hajmi $N = 500$, tanlanma hajmi esa $n = 50$.

Bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'yicha bosh to'plam haqida hulosa qilishga asoslangan usulga, *tanlanma usul* deb ataladi.

Tanlanmani ajratib olish ikki xil yo'l bilan amalga oshirilishi mumkin: obyekt ajratib olinib uning ustida kuzatish o'tkazilgandan so'ng, u bosh to'plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.

Takroriy tanlanma deb, shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan obyekt tajribadan so'ng (keyingisini olishdan oldin) bosh to'plamga qaytariladi.

Takroriy bo'lmagan tanlanma deb, ajratib olingan obyekt kuzatishdan so'ng bosh to'plamga qaytarilmaydi.

Odatda, ko'p hollarda, qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi. Tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha bosh to'plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning obyektlari bosh to'plamni to'g'ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta'riflanadi: tanlanma *representativ* (vakolatli) bo'lishi kerak. Odatda, tanlanmaning reprezentativligini ta'minlash uchun bosh to'plam har bir elementining tanlanmaga tushish ehtimoli teng deb olinadi.

Amaliyotda tanlanma ajratib olishda turli usullardan foydalaniladi. Bu usullarni 2 tipga ajratish mumkin:

1. Bosh to'plamni qism to'plamlarga ajratmasdan tanlanma olish, bunda oddiy tasodifiy: a) qaytarilmaydigan; b) qaytariladigan usullardan foydalaniladi.

2. Bosh to'plamni qism to'plamlarga ajratib so'ngra tanlanma olish, bunda bosh to'plam: a) tipik; b) mexanik; v) seriyalab qism to'plamlarga ajratiladi, so'ngra tanlanma ajratib olinadi.

Agar bosh to'plamdan obyektlar bittadan tasodifiy ravishda olinib tanlanma tanlansa, bu *oddiy tasodifiy* tanlash deyiladi.

Tipik tanlashda bosh to'plamni uning "tipik" xususiyatlarini e'tiborga olgan holda qism to'plamlarga ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Mexanik tanlash bosh to'plamni mexanik ravishda qism to'plamlarga ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Seriyali tanlash bosh to'plamni qism to'plamlarga seriyalab ajratiladi, so'ngra uning qism to'plamlaridan tanlanma ajratib olinadi.

Odatda, ko'p hollarla, tanlanma ajratib olishda yuqoridagi usullardan aralash foydalaniladi, ya'ni ko'rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to'plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

19.2. Empirik taqsimot funksiyasi. Bosh to'plamdan tanlanma olingan bo'lsin. Bunda tanlanmaning x_i qiymati n_i ($i=1,2,\dots$) marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantlar, variantlarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi esa *variatsion qator* deyiladi. Kuzatishlar soni- n_i chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati esa $w_i = \frac{n_i}{n}$ nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & \dots & x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \dots & x_k & \dots \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_i & \dots & n_j & n_{j+1} & n_{j+2} & \dots & n_k & \dots \end{array} \quad \text{yoki} \quad \begin{array}{ccccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_i & \dots & w_j & w_{j+1} & w_{j+2} & \dots & w_k & \dots \end{array}$$

Shunday qilib, taqsimot ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslikni bildiradi.

Faraz qilamiz, X -son belgining chastotalar statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x - X belgining x dan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni; n - umumiy kuzatishlar soni.

Ma'lumki, $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi: $\frac{n_x}{n}$. Agar x o'zgaradigan bo'lsa, u holda, nisbiy chastota ham o'zgaradi.

Demak, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

19.2.2-ta'rif. Taqsimotning *empirik funksiyasi* (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n(x)$ funksiyaga aytiladi.

Demak, ta'rifga ko'ra,

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda n – tanlamaning hajmi, $n_x - x$ dan kichik bo'lgan varianlar soni.

Bosh to'plamning $F(x)$ -taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik funksiya $F_n^*(x)$ $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini, nazariy taqsimot funksiya $F(x)$ esa $X < x$ hodisaning ro'y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o'rinli. Empirik taqsimot funksiyasi, taqsimot funksiyasining barcha xossalariga ega:

1⁰. $0 \leq F_n^*(x) \leq 1$.

2⁰. $F_n^*(x)$ matonat kamayadigan funksiya.

3⁰. Agar x_i eng kichik varian va x_k eng katta variantga bo'lsa, u holda

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_i \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > x_k \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to'plam nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatan ham, Bernulli teoremasiga asosan, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - F_n^*(x)| < \varepsilon) = 1$.

Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to'plam nazariy (integral) funksiyasining taxmini ko'rinishi sifatida foydalanish mumkin.

19.3. Poligon va gistogramma

19.3.1-ta'rif. Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1^*, n_1), (x_2^*, n_2), \dots, (x_k^*, n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga x_i^* lari, ordinatalar o'qiga esa ularga mos n_i chastolarni qo'yamiz. So'ngra (x_i^*, n_i) nuqtalarni kema – ket tushirib chastotalar poligonini hosil qilamiz.

19.3.2-ta'rif. Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1^*, W_1), (x_2^*, W_2), \dots, (x_k^*, W_k)$ nuqtalarini tushiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga x_i^* larni, ordinatalar o'qiga esa mos ravishda W_i nisbiy chastotalarni qo'yamiz.

So'ngra (x_i^*, W_i) nuqtalari ketma – ket tushirib, nisbiy chastotalar poligonini hosil qilamiz.

19.3.3-ta'rif. Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi integvallardan, balandliklar esa $\frac{n_i}{h}, i = \overline{1, k}$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

19.3.4-ta'rif. Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi integvallardan, balandliklari esa $\frac{W_i}{h} = \frac{n_i}{nh}, i = \overline{1, k}$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi

$$S = \sum_{i=1}^k h \cdot \frac{W_i}{h} = \sum_{i=1}^k W_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

ekanini ko'ramiz.

Ravshanki, agar nisbiy chastotalar gistogrammasining uchlarini silliq chiziq bilan tutashtirib chiqsak, bu chiziq taqriban X belgining taqsimot funksiyasiga mos keluvchi taqsimot zichligining grafigini aks ettirishni ko'ramiz.

Agar tanlanma hajmini ortirib, intervalga uzunligi h ni nolga intiltirsak, taqsimot zichligining grafigiga borgan sari yahinlashamiz.

19.2-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar

19.4. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar. Variatsion qatorning ba'zi xarakteristiklari. Ma'lumki, matematik statistika masalaridan biri tanlanmadan bosh to'plam taqsimot funksiyasining xarakteristiklari hisoblangan noma'lum parametrlar uchun statistik baholar o'rnatish edi. Bu masala qanday hal qilinishini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilamiz, bosh to'plamning son belgisini o'rganish talab qilinayotgan va belgining taqsimot funksiyasi nazariy mulohazalar asosida aniqlangan bo'lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan noma'lum parametrlarni baholash masalasini ko'rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to'g'rirog'i o'rganilayotgan

belgi bosh to'plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda matematik kutilmani va o'rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to'liq aniqlaydi, agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo'lsa, u holda bu taqsimotni aniqlaydigan $\lambda > 0$ parametрни baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma'lumotlar, masalan, tanlanma son belgisini n marta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar bo'ladi. Demak, baholanayotgan belgining bahosi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Tanlanmadagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarni erkli $X_1, X_2, \dots, X_n$ -tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametrining statistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topish kerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrning statistik bahosi deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Statistik baho baholanayotgan parametrning yaxshi bahosi bo'lishi uchun u ma'lum bir talablarni qanoatlantirishi lozim. Quyida mana shu talablarni ko'rib chiqamiz.

Bosh to'plam $F(x)$ -nazariy taqsimot funksiyasining θ parametri noma'lum bo'lib uning statistik bahosi θ^* bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan n hajmli tanlanma bo'yicha θ^* baho topamiz. Tajribani takrorlaymiz, ya'ni bosh to'plamdan yana n hajmli tanlanma olib θ_1^* bahoni topamiz. Tajribani ko'p marta takrorlab, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz, umuman olganda, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ sonlar har xil bo'ladi. U holda θ^* bahoni tasodifiy miqdor, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$ sonlarni esa uning mumkin bo'lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

θ^* tasodifiy miqdorning $M(\theta^*)$ -matematik kutilmasini hisoblaymiz. $M(\theta^*)$ va θ noma'lum parametr qiymatlarini taqqoslasak ular orasida:

- 1) $M(\theta^*) < \theta$; 2) $M(\theta^*) = \theta$; 3) $M(\theta^*) > \theta$.

munosabatlardan biri albatta o'rinli bo'ladi. Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan statistik bahoni ishlatish

sistematik xatolarga olib keladi. Shu sababli, θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lishini talab qilish tabiiy holdir.

Demak, $M(\theta^*) = \theta$ talabga rioya qilish sistematik xatolardan saqlaydi.

19.4.1-ta'rif. Agar bosh to'plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ parametrga teng, ya'ni $M(\theta^*) = \theta$, bo'lsa, u holda θ^* baho *siljimagan baho* deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

19.4.2-ta'rif. Agar θ^* baho va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\theta^*) = \theta$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho *asimptotik siljimagan baho* deb ataladi.

Ammo shuni ham ta'kidlash kerakki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo'ladi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya'ni $D(\theta^*)$ -dispersiyasi anchagina katta bo'lishi mumkin. U holda 1-tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan θ_i^* -baho $\bar{\theta}^*$ -o'rtacha qiymatdan va demak baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo'lishi mumkin.

θ_i^* ni θ ning tarqibiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo'yiladi.

19.4.3-ta'rif. Agar $\theta_i^* \in \theta^*$ bahoning dispersiyasi eng kichik, ya'ni $\inf_{\theta^*} D(\theta^*) = \theta_i^*$ bo'lsa, u holda θ_i^* *effektiv baho* deb ataladi.

Umuman olganda, effektiv baho mavjud bo'lmashligi ham mumkin.

19.4.4-ta'rif. Agar θ^* , $\theta_i^* (i=1, 2, \dots)$ baholar va θ noma'lum parametrlar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\{(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2\}}{\inf_{\theta^*} M\{(\theta_i^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2\}} = 1$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda θ^* baho *asimptotik effektiv baho* deb ataladi.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

19.4.5-ta'rif. Asosli baho deb baholanayotgan parametrga $n \rightarrow \infty$ da ehtimol bo'yicha yaqinlashadigan θ^* bahoga aytiladi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\theta^* - \theta| > \varepsilon\} = 0$, bu yerda $\varepsilon > 0$ —yetarli darajada kichik son.

Agar bahoning dispersiyasi $n \rightarrow \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli ham bo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'planning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_N$ -qiymatlari turli bo'lsa, $\overline{x_B}$ -bosh to'plam o'rtachasi

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'planning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$ -qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lsa:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i N_i. \quad (2)$$

Bosh to'planning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasa, uning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \overline{x_B}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ -qiymatlari turli bo'lsa, $\overline{x_T}$ -tanlanma o'rtacha

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$ -qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lsa:

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i. \quad (4)$$

Bosh to'plam o'rtachasi- $M(X)$ ning statistik bahosi sifatida

$$\overline{x_T} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ yoki } \overline{x_T} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

-tanlanma o'rtacha qabul qilinadi. $\overline{x_T}$ siljimagan baho ekanligiga, ya'ni $M(\overline{x_T}) = M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x_T}$ ni $\overline{X_T}$ -tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, \dots, x_n$ -variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil

taqsimlanganligi uchun ular bir xil son xarakteristikalariga, jumladan bir xil matematik kutilmaga ega: $a = M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardan bittasining matematik kutilmasiga teng, ya'ni

$$M(\overline{X_T}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{nM(X_1)}{n} = M(X_1) = a.$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to'plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, bu miqdorlarning va bosh to'plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X_T}) = a = M(X)$. U holda $\overline{x_T}$ bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma'lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi) asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\overline{x_T} - M(\overline{x_T})\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\overline{x_T} - a\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

ya'ni n ortishi bilan $\overline{x_T}$ -tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasiga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\overline{x_T}$ baho a uchun asosli baho bo'lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to'plamdan ancha katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o'rtachalari topiladigan bo'lsa, ular o'zaro taqriban teng bo'ladi. Bu tanlanma o'rtachaning *turg'unlik xossasi* deyiladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_N$ -qiymatlari turli bo'lsa, *bosh to'plam dispersiyasi*

$$D(X) \equiv D_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x_B})^2 \quad (5)$$

formula bilan topiladi; agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$ -qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo'lsa:

$$D_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_B)^2. \quad (6)$$

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X) \equiv \sigma_B = \sqrt{D_B} \quad (7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$ -qiymatlari turli bo'lsa, *tanlanma dispersiyasi*

$$D(x) \equiv D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_T)^2 \quad (8)$$

formula bilan topiladi; agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_k$ -qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lsa:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2. \quad (9)$$

19.4.6-misol. Tanlanmaning

$$x_i: \quad 4 \quad 8 \quad 11$$

$$n_i: \quad 5 \quad 10 \quad 5$$

statistik taqsimoti bo'yicha uning dispersiyasini toping.

Yechilishi. (4) formuladan foydalansak: $\bar{x}_T = 7,75$. Dispersiyani hisoblash uchun (9) formuladan foydalanamiz. U holda

$$D_T = \frac{5 \cdot (4 - 7,75)^2 + 10 \cdot (8 - 7,75)^2 + 5 \cdot (11 - 7,75)^2}{20} = \frac{70,3125 + 0,625 + 70,3125}{20} = 7,0625.$$

Dispersiyani hisoblashda (5), (6), (8), (9) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo'lgan quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}. \quad (10)$$

Bosh to'plam dispersiyasi uchun baho sifatida tanlanma dispersiyasi $D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2$ qanday baho bo'lishini ko'rib chiqamiz. Qulaylik uchun $m = M(X)$, $\sigma_1^2 = D_B$ belgilashlar kiritib olamiz.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i - m - (\bar{x}_T - m)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \\ &- \frac{2}{n} (\bar{x}_T - m)^2 \sum_{i=1}^n (x_i - m) + \frac{n}{n} (\bar{x}_T - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \\ &- \frac{2}{n} (\bar{x}_T - m)(\bar{x}_T - m)n + (\bar{x}_T - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - (\bar{x}_T - m)^2. \end{aligned}$$

Agar $M(\bar{x}_T - m)^2 = D(\bar{x}_T) = \frac{1}{n} \sigma_1^2$ belgilashni e'tiborga olsak,

$$M(\sigma^2) = \frac{1}{n} M \left(\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right) - M(\bar{x}_T - m)^2 = \sigma_1^2 - \frac{1}{n} \sigma_1^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_1^2.$$

Demak, tanlanma dispersiyasi- D_T bosh to'plam dispersiyasi D_B uchun siljimagan baho bo'lolmas ekan, shu sababli, bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T \quad (11)$$

–“tuzatilgan” dispersiya olinadi.

Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$ – “tuzatilgan” o'rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

Shuni alohida ta'kidlash keraki, s siljimagan baho bo'la olmaydi, shuning uchun uni “tuzatilgan” o'rtacha kvadratik chetlanish deb ataymiz.

19.4.7-eslatma. $D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_T)^2$ va $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_T)^2$ formulalar maxrajleri bilan farqlanadi. U holda n ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va “tuzatilgan” dispersiyalarning farqi juda kam bo'ladi. Shu sababli, “tuzatilgan” dispersiyadan $n < 30$ hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

19.4.8-eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida x_i -variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo'lsa, u holda x_i -variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$ -shartli variantaga o'tish orqali u_i -variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so'ngra yangi tanlanma uchun $\overline{u_T}$ va $D_T(u)$ lar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x_T}, D_T(x)$ xarakteristikalarini topish uchun $\overline{x_T} = c_2 \overline{u_T} + c_1$ va $D_T(x) = c_2^2 D_T(u)$ formulalardan foydalaniladi.

Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o'rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba'zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta *moda* deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga karab, mediana quyidagicha aniqlanadi.

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{agar } n = 2k + 1, \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{agar } n = 2k. \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo'lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida *o'rtacha absolyut chetlanish* θ ham ishlatiladi.

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - \overline{x_T}|}{n}$$

Variatsiya koeffitsienti V deb tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o'rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi:

$$V = \frac{\sigma_T}{\overline{x_T}} \cdot 100\%.$$

Variatsiya koeffitsienti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsienti katta bo'lgani ko'proq tarqoqlikka ega bo'ladi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{array}{cccc} x_i & 1 & 3 & 6 & 16 \\ n_i & 4 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

tanlanma uchun M_0, M_r, R, θ, V -xarakteristikalarini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} M_0 &= M_r = 3; \quad R = 15; \\ \bar{x}_r &= \frac{4 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 16}{4 + 10 + 5 + 1} = \frac{20}{20} = 4, \quad \theta = \frac{4 \cdot |1-4| + 10 \cdot |3-4| + 5 \cdot |6-4| + 1 \cdot |16-4|}{20} = 2,2 \\ \sigma_r &= \sqrt{\frac{4 \cdot (1-4)^2 + 10 \cdot (3-4)^2 + 5 \cdot (6-4)^2 + 1 \cdot (16-4)^2}{20}} \approx 3,24, \quad V = \frac{3,24}{4} \cdot 100\% = 80,1\% \end{aligned}$$

19.3-§. Nuqtaviy va intervalli baholar.

Ishonchli intervallar

19.5. Nuqtaviy va intyervalli baholar. Ishonchli ehtimol va ishonchli intyerval. Normal taqsimotning noma'lum paramyetrleri uchun intyervalli baholar. Faraz qilaylik, bosh to'plam X belgisining taqsimot funksiyasi $F(x, \theta)$ bo'lib, θ noma'lum parametr bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ bo'lsin.

19.5.1-ta'rif. Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaga *statistika* deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funksiyaning noma'lum θ parametri uchun shunday $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika qidiriladiki, $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ni θ parametr uchun taqribiy qiymat deb olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika θ parametring bahosi deyiladi.

19.5.2-ta'rif. Agar noma'lum parametr bitta $\bar{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy baho deyiladi.

Yuqorida tanishgan statistik baholar: tanlanma o'rtachasi, tanlanma "tuzatilgan" dispersiyasi, moda, mediana, variatsiya qulochi va boshqalar nuqtaviy baho hisoblanadi.

Tajribalar soni juda katta bo'lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda noma'lum parametrga yaqin bo'ladi. Ammo, kuzatishlar soni kam bo'lsa, $\bar{\theta}$

nuqtaviy baho va θ parametr orasidagi farq sezilarli darajada bo'lishi mumkin. Bunday hollarda θ parametrni baholash uchun *intervalli baholardan* foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

19.5.3-ta'rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimiz kerak bo'ladi. Buni quyida ko'rib chiqamiz.

Tanlanma ma'lumotlari asosida topilgan $\bar{\theta}$ -statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo'lsin. θ ni o'zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma'lumki, $\bar{\theta}$ ning aniqliligi yuqori bo'lgan sari $|\theta - \bar{\theta}|$ ning qiymati kamayib boradi, ya'ni $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ ($\delta > 0$) tengsizlikda δ qancha kichik bo'lsa, baho shuncha aniq bo'ladi. Shu sababli, δ bahoning aniqliligi deb ataladi.

Statistik usullar $\bar{\theta}$ baho $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat'iy tasdiqlay olmaydi, balki bu tengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa qila oladi.

$|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\bar{\theta}$ baho bo'yicha *ishonchliligi* (*ishonchlilik ehtimoli*) deyiladi. Bu erda, $P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = \gamma$. Ko'p hollarda, ishonchlilik oldindan beriladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$P(|\theta - \bar{\theta}| < \delta) = \gamma$ ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P(\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta) = \gamma. \quad (1)$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval θ noma'lum parametrni o'z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi *ishonchlilik intervali* deb ataladi.

19.5.4-eslatma. $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turli tanlanmalar uchun $\bar{\theta}$ ning qiymatlari turlicha bo'ladi. Shu sababli, tanlanma o'zgarasa $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta)$ intervalning chetki nuqtalari ham o'zgaradi.

Ishonchlilik intervallarni topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Ma'lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: a va σ aniqlaydi. Faraz qilamiz ulardan biri, σ -o'rtacha kvadratik chetlanish, ma'lum ikkinchisi, a -matematik kutilma, noma'lum bo'lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi a uchun ishonch intervalini γ ishonch bilan δ aniqlikda topamiz.

Tanlanma o'rtachasi $\bar{x}_T$ ni $\bar{X}_T$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o'rtacha ham normal taqsimlangan bo'ladi. shu bilan birga, $\bar{X}_T$ ning parametrlari quyidagicha:

$$M(\bar{X}_T) = a; \quad D(\bar{X}_T) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$P(|\bar{X}_T - a| < \delta) = \gamma$ munosabat o'rinli bo'lsin. U holda

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanib, X ni $\bar{X}_T$ bilan σ ni esa $\sigma(\bar{X}_T) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P(|\bar{X}_T - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \quad (2)$$

bu yerda $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ bo'ladi. U holda (2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$P\left(|\bar{X}_T - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t), \text{ yoki } P\left(\bar{X}_T - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_T + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t). \quad (3)$$

Shunday qilib, ishonch intervali $\bar{X}_T$ ni $\bar{x}_T$ ga almashtirganimizdan so'ng $\left(\bar{x}_T - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_T + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ dan iborat bo'ladi. Bundan $\left(\bar{x}_T - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_T + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ tasodifiy interval a parametrni $\gamma = 2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

(3) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

19.5.5-misol. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib uning o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=3$. Tanlanma hajmi $n=36$ va bahoning ishonchliligi $\gamma=0,95$ bo'lsin. Noma'lum parametr a -matematik kutilmaning $\bar{x}_T$ -tanlanma o'rtacha bo'yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechilishi. Jadvaldan foydalanib t ni topamiz, ya'ni $2\Phi(t)=0,95 \Rightarrow \Phi(t)=0,475 \Rightarrow t=1,96$. Bahoning aniqligi: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$. U holda ishonchlilik intervali: $(\bar{x}_T - 0,98; \bar{x}_T + 0,98)$.

Berilgan $\gamma=0,95$ ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko'p sondagi tanlanmalar olingan bo'lsa, u holda ularning 95%i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametрни haqiqatan ham o'z ichiga oladi; 5% hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

19.5.6-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} \quad (4)$$

formuladan topiladi.

Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning a -matematik kutilmasini $\bar{x}_T$ -tanlanma o'rtachasi orqali baholashda σ -o'rtacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lsin. U holda

$$\bar{x}_T - t(\gamma, n) \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t(\gamma, n) \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (5)$$

interval a uchun ishonch intervali bo'lib xizmat qiladi. Bu yerda s - "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma, n)$ esa berilgan n va γ bo'yicha maxsus jadvaldan topiladi. Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi.

19.5.7-misol. Bosh to'plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va quyidagi statistik taqsimot tuzilgan:

$$\begin{array}{l} x_i: \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ n_i: \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

Bosh to'planning X belgisi normal taqsimlangan bo'lsa, uning α -matematik kutilmasi uchun $\bar{x}_T$ bo'yicha $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechilishi. Tanlanma o'rtachasini va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{n}, \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}}.$$

U holda: $\bar{x}_T = 2$, $s = 2,4$. Jadvaldan $\gamma=0,95$ va $n=10$ larga mos $t(\gamma, n) = 2,26$ ni topamiz. Topilganlarni (5) ifodaga qo'yib: $0,3 < \alpha < 3,7$ ishonchli intervalni hosil qilamiz. Bu interval noma'lum α -matematik kutilmani $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydi.

Bosh to'planning o'rganilatgan X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Uning σ -o'rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma'lumotlari bo'yicha γ ehtimol bilan ishonch intervali topish talab qilinsin.

Ma'lumki, tanlanmaning s^2 - "tuzatilgan" dispersiyasi σ^2 -bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli, σ -paremetrni s orqali baholaymiz. Buning uchun

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma, \text{ yoki } P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s - \delta < \sigma < s + \delta$ qo'sh tengsizlikni teng kuchli

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q = \delta/s$ belgilashdan so'ng

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \quad (q < 1) \quad (6)$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Agar $q > 1$ bo'lsa ishonch intervali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$0 < \sigma < s(1+q).$$

bu yerda $q-n$ va γ bo'yicha maxsus jadvaldan topiladi.

19.5.8-misol. Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan va $n=50$ hajmli tanlanmaning "tuzatilgan" dispersiyasi: $s=1,5$ bo'lsin. σ -noma'lum parametрни $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan $n=50$ va $\gamma=0,95$ qiymatlarga mos $q=0,21$ ni topamiz. Bu yerda $q < 1$ bo'lgani uchun (6) tengsizlikdan foydalanib, $1,185 < \sigma < 1,815$ ishonchlilik intervalini topamiz.

19.4-§. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar.

Korrelyatsion jadval. Korrelyasiya nazariyasining ikki asosiy masalasi

19.6. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar. Shartli o'rtacha. Korrelyatsion jadval. Ryegryessiya tanlanma tyenglamasi va tanlanma chizig'i. Korrelyasiya nazariyasining ikki asosiy masalasi. Kundalik faoliyatimizdagi ko'pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o'rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog'liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Avvalam bor Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog'liqligini o'rganamiz.

Ikki belgi funksional bog'lanish bilan, yoki statistik bog'lanish bilan bog'langan, yoki umuman erkli bo'lishi mumkin.

19.6. 1-ta'rif. Agar X belgining har bir mumkin bo'lgan qiymatiga Y belgining bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda Y X tasodifiy miqdorning funksiyasi deyiladi va $Y=f(X)$ kabi belgilanadi.

19.6. 2-misollar. 1. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti:

X	2	3
p	0,6	0,4

$Y=X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Yechilishi. Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarini topamiz: $y_1=4$ $y_2=9$. U holda Y ning taqsimoti:

$$Y \quad 4 \quad 9 \\ p \quad 0,6 \quad 0,4$$

2. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, $M(X)=a=2$ va $\sigma(X)=0,5$ bo'lsa, $Y=3X+1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Y ning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(Y)=3 \cdot 2+1=7, \quad \sigma(Y)=3 \cdot 0,5=1,5.$$

$$\text{U holda } Y \text{ ning zichlik funksiyasi: } g(y)=\frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-7)^2}{2 \cdot 2,25}}.$$

Funksional bog'lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, ximiya va boshqa fanlarda ayniqsa yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma'lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C=2\pi R$ geometriyadan ma'lum bo'lgan formula bilan aniqlangan funksional bog'lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat'iy funksional bog'lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta'sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog'lanish bo'lishi mumkin.

19.6.3-ta'rif. Agar miqdorlardan birining o'zgarishi ikkinchi miqdor taqsimotining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki miqdor orasidagi bog'lanishga statistik bog'lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y(Z_1, Z_2, V_1, V_2)$ va $X(Z_1, Z_2, U_1, U_2)$ (Z_i, V_i, U_i - tasodifiy faktorlar) lar berilgan bo'lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog'lanish statistik bog'lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog'liq bo'lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiyarlari: Z_1, Z_2 va umumiy bo'lmaganlari: V_i, U_i ($i=1,2$) bor. Statistik bog'lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelyatsion bog'lanish bilan tanishib chiqamiz.

19.6.4-ta'rif. Agar bir-biriga statistik bog'lanishda bo'lgan ikki miqdordan birining o'zgarishi ikkinchi miqdor o'rtacha qiymatining o'zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog'lanish *korrelyatsion bog'lanish* deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelyatsion bog‘lanishda bo‘lgan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y ;
2. Yig‘ib olingan hosil miqdori Y va ishlatilgan o‘g‘itlar miqdori X ;
3. Jami mahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y ;
4. Sarflangan kapital mablag‘lar X va shu mablag‘lardan olingan sof foyda Y ;
5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi X va mehnat unumdorligi ko‘rsatkichi Y .

Yuqoridagi ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, korrelyatsion bog‘lanishni matematik ifodalash, ya’ni $y=f(x)$ ko‘rinishda yozish, uchun *shartli o‘rtacha* tushunchasini kiritishimiz kerak.

19.6.5-ta’rif. $X=x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlarining arifmetik o‘rtachasini $\bar{y}_x$ -shartli o‘rtacha deb ataymiz.

Xuddi shunday usulda $\bar{x}_y$ -shartli o‘rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

19.6.6-ta’rif. $Y=y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o‘rtachasini $\bar{x}_y$ -shartli o‘rtacha deb ataymiz.

19.6.7-misol. X miqdorning $x_1=5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1=6$, $y_2=7$, $y_3=8$ qiymatlari mos keldi. $\bar{y}_x=?$

Yechilishi. $\bar{y}_x = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{6+7+8}{3} = 7.$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o‘tkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_n, y_n) lardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y orasidagi bog‘lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko‘rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko‘p, ya’ni x_i qiymat m_x marta, y_i qiymat m_y marta, (x_i, y_i) juftliklar $m_{x,y}$ marta takrorlanishi mumkin bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga *korrelyatsion jadval* yoki *korrelyatsion panjara* deb ataluvchi jadval hosil bo‘ladi. $m_x, m_y, m_{x,y}$ lar mos ravishda $x_i, y_i, (x_i, y_i)$

larning chastotalari deyiladi. $m_{xy_i} = m_{y_i}$ belgilash kiritib quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu yerda $\sum_i m_{y_i} = m_{y_1}$, $\sum_j m_{y_j} = m_{y_2}$, $\sum_i m_{y_i} = \sum_j m_{y_j} = n$.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_i	m_{x_i}
x_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1i}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2i}	m_{x_2}
...	...	...	...	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{ki}	m_{x_k}
m_{y_j}	m_{y_1}	m_{y_2}	...	m_{y_i}	n

Bu holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelyatsion panjarada shartli o'rtacha topilishiga doir misol ko'rib chiqamiz.

19.6.8-misol. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o'rtacha $\bar{y}_x$ ni toping.

$X \backslash Y$	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n = 30$

Yechilishi. Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

$X \backslash Y$	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n = 30$
$\bar{y}_x$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar (bog'lanishlar) to'g'ri, teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli bo'lishi mumkin. Masalan, to'g'ri korrelyatsion bog'lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o'rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog'lanishda esa aksincha va hakozi.

Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi xalqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligi deb, $\bar{y}_x$ shartli o'rtachaning x ga funksional bog'lanishiga aytiladi: $\bar{y}_x = f(x)$. Bu tenglama Y ning X ga *regressiya tanlanma tenglamasi* (ba'zida Y ning X ga regressiya tenglamasi), $f(x)$ funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba'zida regressiya funksiyasi) deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga *regressiya tanlama chizig'i* (ba'zida Y ning X ga regressiya chizig'i) deyiladi.

X ning Y ga regressiya tanlama tenglamasi va regressiya tanlama chizig'i ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi: $\bar{x}_y = \varphi(y)$.

Korrelyatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish jarayonida asosan quyidagi ikki masalani hal qiladi.

1-masala. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funksiyasining ko'rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish *chiziqli*, aks holda esa *chiziqsiz* deyiladi.

2-masala. Korrelyatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog'lanishiining zichligi $X=x$ qiymatga mos Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\bar{y}_x$ -shartli o'rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi. Agar tarqoqlik katta bo'lsa, Y belgi X belgiga kuchsiz bog'langanligidan yoki ular orasida bog'liqlik yo'qligidan darak beradi. Aksincha, kichik tarqoqlik belgilar orasida ancha kuchli (zich) bog'liqlik borligini ko'rsatadi.

19.5-§. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi.

Eng kichik kvadratlar usuli.

19.7. Chiziqli regressiya. Eng kichik kvadratlar usuli. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi parametrlarini topish. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Ma'lumki, korrelyatsion bog'langan X va Y belgilarning regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = f(x), \text{ yoki } \overline{x_y} = \varphi(y)$$

ko'rinishda yozilib, agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish chiziqli deb atalar edi. Biz mana shu chiziqli korrelyatsion bog'lanishni atroflicha o'rganib chiqamiz.

Buning uchun (X, Y) juftlikning sonli belgilari sistemasini o'rganamiz. Bunda ikki: 1) ma'lumotlar gruppalanmagan; 2) ma'lumotlar gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo'ladi.

1) Tanlanma ustida o'tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma'lumotlardan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sonlar juftligi ketma-ketligini hosil qilingan bo'lib, bu ma'lumotlarni gruppalash shart bo'lmasin, ya'ni X belgining turli x qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo'lsin. Bunday holatda shartli o'rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b \quad (1)$$

tanlanma regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsientni ρ_x bilan belgilab, uni Y ning X ga regressiya tanlanma koeffitsienti deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_x X + b \quad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlashimiz keraki, natijada kuzatish ma'lumotlari bo'yicha topilgan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalarni xOy tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (3) to'g'ri chiziqli yaqin atrofida yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $y_i - y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu yerda y_i - (3) tenglamadan kuzatilgan x_i qiymatga mos keluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarning yig'indisi eng kichik, ya'ni $\min \sum_{i=1}^n (y_i - y_i)^2$, bo'lsin (noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarni topishning bu usuli *eng kichik kvadratlar usuli* deb ataladi).

Har bir chetlanish noma'lum ρ_{yx} va b koeffitsientlarga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlari kvadratlari yig'indisining funksiyasi F ham bu koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi:

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i)^2.$$

Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma'lum parametrlar bo'yicha F ning xususiy hosilalarini hisoblab nolg'a tenglashtiramiz (hozircha ρ_{xy} o'rniga ρ yozib turamiz):

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho + b - y_i) x_i = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho + b - y_i) = 0.$$

Elementar almashtirishlar bajarib ρ va b ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \rho \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \rho \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4)$$

Bu sistemani yechib izlanayotgan parametrlarni topamiz (ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad b = \frac{n \sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (5)$$

Xuddi shu usulda x ning y ga regressiya to'g'ri chiziqli tanlanma tenglamasini topish mumkin.

$$\bar{x}_y = \rho_{yx} y + c. \quad (6)$$

2) Faraz qilamiz, kuzatish natijasida olingan ma'lumotlar ko'p sonli (kamida 50 ta kuzatish o'tkazilishi kerak), ya'ni gruppalanadigan, bo'lib x belgining x qiymatiga va mos y belgining y qiymati bir necha marta kuzatilgan bo'lsin, ya'ni ma'lumotlar ichida takrorlanadiganlari ham bor, u holda ular korrelyatsion jadval ko'rinishida beriladi.

Quyidagi (soddalik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x \Rightarrow \sum x = n\bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y \Rightarrow \sum y = n\bar{y}, \quad \bar{x^2} = \frac{1}{n} \sum x^2 \Rightarrow \sum x^2 = n\bar{x^2},$$

$\sum xy = n_{xy}$ ((x, y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi hisobga olingan) ayniyatlardan foydalanib, (4) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} (\bar{x^2}) \rho_{yx} + (n\bar{x}) b = \sum n_{xy}, \\ (\bar{x}) \rho_{yx} + b = \bar{y}. \end{cases} \quad (7)$$

Bu sistemani ρ_{yx} va b ga nisbatan yechib, izlanayotgan regressiya tanlama tenglamasini topamiz:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b. \quad (8)$$

Ammo (7) sistemaning yechimini topishdagi ba'zi bir hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida (8) tenglamani $\bar{y}$ uchun ham yozib:

$$\bar{y} = \rho_{yx} \bar{x} + b, \quad (9)$$

chunki $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqta ham (8) tenglamaning yechimi bo'ladi, (8) va (9) tenglamalardan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va yangi sistemadan

$$\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{yx}(\overline{x} - \overline{x}) \quad (10)$$

regressiya tanlama tenglamasini hosil qilamiz.

(7) sistemadan regressiya koeffitsientini topamiz:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} - n\overline{x}\overline{y}}{n(\overline{x^2} - (\overline{x})^2)} = \frac{\sum n_{xy} - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2} \quad (\text{ma'lumotlar gruppalanmasa } n_{xy}=1). \quad (11)$$

19.7.1-eslatma. Agar (x_i, y_i) ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa x_i, y_i variantlardan mos ravishda $u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{h_1}, v_i = \frac{y_i - \overline{y}}{h_2}$ shartli variantalarga o'tib hisoblashlarni ancha yengillashtirish mumkin.

19.6-§. Korrelyasion bog'lanish zichligi. **Tanlanma korrelyasiya koeffitsient va tanlanma** **korrelyasion nisbat**

19.8. Korrelyasion bog'lanish zichligi. Korrelyasiya tanlanma koeffitsienti va uning xossalari. Tanlanma korrelyasion nisbat va uning xossalari. Ma'lumki, korrelyasiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelyatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog'lanish zichligi Y ning $X = x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y_x}$ shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo'yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo'lsa, u holda Y ning X ga kuchsiz bog'langanligini yoki umuman bog'lanmaganligini bildiradi. Tarqoqlikning kamligi esa ular orasida ancha kuchli bog'lanish borligini ko'rsatadi.

Y va X belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlovchi kattaliklar: korrelyasiya tanlanma koeffitsienti va tanlanma korrelyatsion nisbatlar bilan tanishib chiqamiz. Bu ikki kattalikning vazifalari bir-biriga o'xshasa ham turli shakldagi masalalarni hal qiladi. Shu sababli, bu ikki kattalikni alohida-alohida o'rganamiz.

Korrelyasiya tanlanma koeffitsienti belgilar orasidagi chiziqli bog'lanish zichligini aniqlab beradi. Uning formulasini keltirib chiqarish uchun Y ning X to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{yx}(\overline{x} - \overline{x}) \quad (1)$$

parametri ρ_{xy} ning

$$\rho_{xy} = \frac{\sum n_{xy} - \bar{n} \bar{xy}}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (2)$$

ifodasining ko'rinishini o'zgartiramiz. Buning uchun (2) tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko'paytiramiz. U holda:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \rho_{xy} = \frac{\sum n_{xy} - \bar{n} \bar{xy}}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (\text{agar ma'lumotlar gruppalanmasa: } n_{xy} = 1).$$

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma korrelyasiya koeffitsienti deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - \bar{n} \bar{xy}}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (\text{ma'lumotlar gruppalanmasa}), \quad (3)$$

yoki

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} - \bar{n} \bar{xy}}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (\text{ma'lumotlar gruppalanmasa}). \quad (4)$$

Bu yerda x, y lar mos ravishda X va Y belgilarning kuzatilgan qiymatlari; n_{xy} - kuzatilgan (x, y) juftlikning chastotasi; n - tanlanma hajmi; $\bar{x}, \bar{y}$ - mos tanlanma o'rtachalar; σ_x, σ_y - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishlari.

r_T - tanlanma korrelyasiya koeffitsienti bosh to'plam r -korrelyasiya koeffitsientining bahosi hisoblanadi, shuning uchun Y va X kattaliklarning son belgilari orasidagi chiziqli bog'liqligining o'lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo'lsa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal qonun bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelyasiya koeffitsientini baholash uchun ($n \geq 50$) $r_T - 3 \frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_B \leq r_T + 3 \frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$ formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelyasiya koeffitsienti uchun quyidagi xossalar o'rinni:

1⁰. Tanlanma korrelyasiya koeffitsientining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya'ni $|r_T| \leq 1$, yoki $-1 \leq r_T \leq 1$.

2⁰. Tanlanma korrelyasiya koeffitsientining absolyut qiymati orsa, belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligi ortadi.

3⁰. Agar $|r_T| = 1$ bo'lsa, u holda kuzatilayotgan belgilarning chiziqli funksional bog'langan bo'ladi.

4⁰. Agar $r_T = 0$ bo'lib, regressiya tanlanma chiziqlari to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi bog'lanish chiziqli korrelyatsion bog'lanish bo'lmaydi.

19.8.1-eslatma. Agar $r_T = 0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan belgilar chiziqsiz korrelyatsion bog'lanishda (masalan, parabolik, ko'rsatkichli va h.k.) va hattoki, funksional bog'lanishda bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelyasiya koeffitsientining ma'nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelyasiya koeffitsienti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo'lsa, chiziqli korrelyatsion bog'lanish shuncha kuchsiz.

19.8. 2-eslatma. Tanlanma korrelyasiya koeffitsientining ishorasi regressiya koeffitsientlarining ishoralari bilan bir xil bo'ladi, bu quyidagi formulalardan kelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \rho_{xy} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \quad (5)$$

19.8. 3-eslatma. Tanlanma korrelyasiya koeffitsienti tanlanma regressiya koeffitsientlarining geometrik o'rtacha qiymatiga teng:

$$r_T = \pm \sqrt{\rho_{yx} \rho_{xy}}.$$

Haqiqatan ham (5) dan:

$$\rho_{yx} \rho_{xy} = r_T^2 \Rightarrow r_T = \pm \sqrt{\rho_{yx} \rho_{xy}}.$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsientlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

19.8. 4-misol. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

x	0		1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,3		2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelyasiya koeffitsientini toping.

Yechilishi. $r_r = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak,

$r_r = 0,98$ ekanligini topamiz. Bundan esa cho'chqa bolasining og'irligi va yoshi orasidagi bog'lanish kuchli, degan xulosaga kelamiz.

19.8.5-eslatma. Tanlanma korrelyasiya koeffitsientini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o'tish mumkin (bunda r_r ning qiymati o'zgarmaydi).

Kuzatilayotgan (yoki biz o'rganmoqchi bo'lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini baholash uchun r_r -korrelyasiya tanlanma koeffitsienti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko'rinishdagi korrelyatsion bog'lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo'lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelyatsion bog'lanishning zichligini aniqlash uchun *tanlanma korrelyatsion nisbat* deb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelyatsion nisbatni kiritish bilan bog'liq bo'lgan ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz.

19.8.6-ta'rif. Bosh to'plamning biror bir gruppasiga tegishli belgilarning arifmetik o'rtachasi *grupp o'rtachasi* deb ataladi.

Gruppa o'rtachasini ba'zi hollarda shartli o'rtacha deb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o'rtacha tushunchasida bu holat yuz bergan.

Gruppa o'rtachasi va gruppalar hajmi ma'lum bo'lsa umumiy to'plam o'rtachasini (bosh to'plam o'rtachasi) topish mumkin.

19.8. 7-misol. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plam o'rtachasi topilsin:

Gruppa birinchi ikkinchi

Belgining qiymatlari 1 6 1 5

Chastota 10 15 20 30

Hajm $10+15=25$ $20+30=50$.

Yechilishi. Gruppa o'rtachalarini topamiz:

$$\bar{x}_1 = \frac{10 \cdot 1 + 15 \cdot 6}{25} = 4, \quad \bar{x}_2 = \frac{20 \cdot 1 + 30 \cdot 5}{50} = 3,4.$$

Gruppa o'rtachalari bo'yicha umumiy o'rtachani topamiz:

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 4 + 50 \cdot 3,4}{25 + 50} = 3,6.$$

19.8.8-ta'rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppaga o'rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppaga dispersiyasi deb ataladi:

$$D_{\varphi}(X_j) = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_j)^2}{N_j}, \quad (6)$$

bu yerda $n_i - x_i$ qiymatning chastotasi; j -gruppaga nomeri; $\bar{x}_j$ - j gruppaning gruppaga o'rtachasi; $N_j = \sum n_i$ - j gruppaga hajmi.

19.8. 9-misol. Ikki gruppadan tashkil topgan to'plamning gruppaga dispersiyasi topilsin:

Gruppaga birinchi ikkinchi

Belgining qiymatlari 1 6 1 5

Chastota 10 15 20 30

Hajm 10+15=25 20+30=50.

Yechilishi. 19.8.7-misoldan ma'lumki, $\bar{x}_1 = 4$, $\bar{x}_2 = 3,4$. Endi gruppaga dispersiyalarini topamiz:

$$D_{\varphi}(X_1) = \frac{10 \cdot (1-4)^2 + 15 \cdot (6-4)^2}{25} = 6,$$

$$D_{\varphi}(X_2) = \frac{20 \cdot (1-3,4)^2 + 30 \cdot (5-3,4)^2}{50} = \frac{115,2 + 76,8}{50} = 3,84.$$

19.8.10-ta'rif. Gruppaga dispersiyalarining gruppalar hajmi bo'yicha olingan arifmetik o'rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{\varphi}} = \frac{\sum N_j D_{\varphi}(X_j)}{n},$$

bu erda, N_j - j gruppaga hajmi; $n = \sum N_j$ - umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalar ichki dispersiyasini topsak:

$$\overline{D_{\varphi}} = \frac{25 \cdot 6 + 50 \cdot 3,84}{75} = 4,56.$$

19.8.11-ta'rif. Gruppa o'rtachalarining umumiy to'plam o'rtachasiga (bosh to'plam o'rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_{\varphi}(\bar{x}_j) = \frac{\sum N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n},$$

bu yerda $\bar{x}_j$ - j gruppaning gruppa o'rtachasi; N_j - j gruppa hajmi; $\bar{x}$ - umumiy o'rtacha; $n = \sum N_j$ - umumiy to'plam hajmi.

Masalan, 3-misolda gruppalararo dispersiyani topsak:

$$D_{\varphi}(\bar{x}_j) = \frac{25 \cdot (4 - 3,6)^2 + 50 \cdot (3,4 - 3,6)^2}{75} = \frac{4 + 2}{75} = 0,08.$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib tanlanma korrelyatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

19.8.12-ta'rif. Y ning X ga tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} \quad (6)$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda $\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}$ - shartli yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik

chetlanish; $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}}$ - o'rtacha kvadratik chetlanish; n - tanlanma hajmi; n_x - X belgining x qiymati chastotasi; n_y - Y belgining y qiymati chastotasi; $\bar{y}$ - Y belgining umumiy o'rtachasi; $\bar{y}_x$ - Y belgining $X = x$ ga mos shartli o'rtachasi (x gruppaning gruppa o'rtachasi).

X ning Y ga tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_x} \quad (7)$$

19.8.13-misol. $n = 50$ hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y belgining X belgiga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

$\begin{matrix} \diagdown \\ Y \end{matrix} \begin{matrix} \diagup \\ X \end{matrix}$	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Yechilishi. $\bar{y}$ - umumiy o'rtachani topamiz:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y_i}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17,4.$$

σ_y - o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38 \cdot (15 - 17,4)^2 + 12 \cdot (25 - 17,4)^2}{50}} = 4,27.$$

σ_{y_x} - shartli o'rtachaning o'rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik chetlanish) topamiz:

$$\sigma_{y_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10(21 - 17,4)^2 + 28(15 - 17,4)^2 + 12(20 - 17,4)^2}{50}} = 2,73.$$

Topilganlarni (6) formulaga qo'ysak:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x}}{\sigma_y} = \frac{2,73}{4,27} = 0,64.$$

Tanlanma korrelyatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o'rinli. η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo'lganligi sababli tanlanma korrelyatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o'tamiz.

1^o. Tanlama korrelyatsion nisbat quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi: $0 \leq \eta \leq 1$.

2^o. Agar $\eta = 1$ bo'lsa, belgilar funksional bog'lanishda, ya'ni $y = f(x)$, bo'ladi.

3^o. Tanlanma korrelyatsion nisbat tanlanma korrelyasiya koeffitsientining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta \geq |\tau|$.

4^o. Agar $\eta = |\tau|$ bo'lsa, belgilar orasida chiziqli bog'lanish bo'ladi.

5^o. Agar $\eta = 0$ bo'lsa, belgilar korrelyatsion bog'lanishda bo'lmaydi.

Tanlanma korrelyatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelyatsion bog'lanish, shu jumladan, chiziqli bog'lanish zichligining ham o'lchovi bo'lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga tanlanma korrelyatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog'lanish shakli haqida hech qanday ma'lumot bermaydi.

19.7-§. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyasiya

19.9. Egri chiziqli korrelyasiya. To'plamiy korrelyasiya. Umumiy tanlanma korrelyasiya koeffitsienti. Xususiy tanlanma korrelyasiya koeffitsienti.

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish o'rganilayotgan bo'lib, $\overline{y_x} = f(x)$ yoki $\overline{x_y} = \varphi(y)$ regressiya grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo'lsa, u holda korrelyasiya *egri chiziqli* deyiladi.

Egri chiziqli korrelyasiya nazariyasida ham chiziqli korrelyasiya nazariyasi kabi masalalar, ya'ni korrelyatsion bog'lanish shakli va zichligini aniqlash bilan shug'ullaniladi. Egri chiziqli korrelyasiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari ko'rinishiga quyidagilar misol bo'lishi mumkin:

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c \text{ (ikkinchi tartibli parabolik korrelyasiya);}$$

$$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (uchinchi tartibli parabolik korrelyasiya);}$$

$$\overline{y_x} = \frac{a}{x} + b \text{ (giperbolik korrelyasiya);}$$

$$\overline{y_x} = ae^{bx} \text{ (ko'rsatkichli korrelyasiya) va h.k.}$$

Regressiya funksiyasining ko'rinishini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasida $(x; \overline{y_x})$ nuqtalarning o'rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko'rinishi haqida gipoteza qilinadi; o'rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabul qilinadi.

Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanishni ifodalovchi regressiya funksiyalarining noma'lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi.

Regressiya funksiyasining noma'lum parametrlari ham eng kichik kvadratlar usuli yordamida baholanadi. Egri chiziqli korrelyasiya zichligini baholashda tanlanma korrelyatsion nisbatdan foydalanamiz.

n marta kuzatish ma'lumotlari asosida belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish egri chiziqli korrelyasiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelyasiya deb hisoblaymiz va bu ko'rinishdagi korrelyasiyaning noma'lum parametrlarini tanlanma ma'lumotlari yordamida baholaymiz. Anqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, a, b, c noma'lum parametrlarni tanlanma ma'lumotlari bo'yicha topish kerak bo'ladi. Noma'lum koeffitsientlarni

$$v_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so'ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n n_x x_i^4 + b \sum_{i=1}^n n_x x_i^3 + c \sum_{i=1}^n n_x x_i^2 = \sum_{i=1}^n n_x x_i^2 \overline{y_x}, \\ a \sum_{i=1}^n n_x x_i^3 + b \sum_{i=1}^n n_x x_i^2 + c \sum_{i=1}^n n_x x_i = \sum_{i=1}^n n_x x_i \overline{y_x}, \\ a \sum_{i=1}^n n_x x_i^2 + b \sum_{i=1}^n n_x x_i + cn = \sum_{i=1}^n n_x \overline{y_x}. \end{cases} \quad (2)$$

Kuzatish natijalari (x_i, y_i) juftliklardan foydalanib a, b, c larga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilamiz va undan a, b, c noma'lum parametrlar topiladi.

19.9.1-misol. Korrelyasiya jadvali ma'lumotlari asosida $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi Y ning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

$\begin{matrix} Y \backslash X \\ \end{matrix}$	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$

Yechilishi. Korrelyatsion jadval ma'lumotlari asosida quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x y_x$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning Σ qatoridagi sonlarni (2) ga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74,98a + 67,48b + 60,89c = 413,93, \\ 67,48a + 60,89b + 55,10c = 373,30, \\ 60,89a + 55,10b + 50c = 337,59. \end{cases}$$

Bu sistemadan $a = 1,94$, $b = 2,98$, $c = 1,10$ yechimlarini topamiz. U holda regressiya tenglamasi

$$\overline{y_x} = 1,94x^2 + 2,98x + 1,10$$

ko'rinishda bo'ladi. Tekshirish uchun tenglama bo'yicha hisoblangan $\overline{y_x}$ ning qiymatlari bilan jadval bo'yicha topilgan $\overline{y_x}$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin.

Yuqorida keltirilgan boshqa turdagi egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffitsiyentlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba'zi hollarda oldin ma'lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b$ ($a > 0, b > 0$) regressiya tenglamasidagi noma'lum a, b koeffitsientlarni topishda avvalam bor bu tenglamani $\ln y = \ln a + b \ln x$ ko'rinishda yozib olamiz, so'ngra

$u = \ln x$, $z = \ln y$ belgilashlar yordamida $z = bu + \ln a$ chiziqli funktsiyani hosil qilamiz.

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko'proq belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zarurati tug'iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish to'plamiy (ko'plik) korrelyatsiya deb ataladi.

To'plamli korrelyatsiyaning eng sodda holi bo'lgan uchta belgi orasidagi chiziqli korrelyatsiyani qaraymiz. Bu holda X , Y va Z belgilar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$z = ax + by + cz \quad (3)$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1. Kuzatish ma'lumotlari bo'yicha regressiyaning a , b , c koeffitsientlarni topish, ya'ni $z = ax + by + cz$ tanlanma tenglamani topish;

2. Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog'lanish zichligini baholash;

3. Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog'lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma'lumki, (3) chiziqli bog'lanish tenglamasini:

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) \quad (4)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu ko'rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq..

Ba'zi elementar hisoblashlardan so'ng a va b koeffitsientlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{yz}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \quad b = \frac{r_{yz} - r_{xz}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y}. \quad (5)$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} - mos ravishda X va Z , Y va Z , X va Y belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientlari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - o'rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog'liq zichligi quyidagi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xx}^2 - 2r_{xy}r_{yz} + r_{yy}^2}{1 - r_{yy}^2}}, \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (6)$$

korrelyasiya umumiy tanlanma koeffitsienti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o'zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog'lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{x(y)} = \frac{r_{xx} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{yy}^2)(1 - r_{zz}^2)}}, \quad (7)$$

$$r_{y(z)} = \frac{r_{yy} - r_{yz}r_{zx}}{\sqrt{(1 - r_{zz}^2)(1 - r_{xx}^2)}} \quad (8)$$

korrelyasiya xususiy tanlanma koeffitsientlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o'rganishda, tasodifiy jarayonlarning o'zaro bog'liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelyatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko'rsatkichlarning bir-biriga bog'liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelyasiya nazariyasining elementlari muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

19.8-§. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy

19.10. Statistik gipotazalar. I va II tur xatoliklar. Statistik kriteriy.

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko'pincha tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo'lgan gipotezalarga tayanib ish ko'riladi.

Ma'lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani statistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta'kidlash uchun biz quyidagi ta'rifni keltiramiz.

19.10.1-ta'rif. *Statistik gipoteza* deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, yoki agar tasodifiy miqdor bo'ysinadigan

taqsimot qonunning ko'rinishi ma'lum bo'lsa, u holda bu taqsimot qonunning noma'lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo'la oladi:

1. Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonun bo'yicha taqsimlangan;

2. Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o'rtacha o'lchamlari bir-biriga teng;

3. Normal taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi ikki to'plamning dispersiyalari o'zaro teng;

1-gipotezada taqsimotning ko'rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

«Ertaga yomg'ir yog'adi», «Bu yil mo'l hosil olamiz» kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo'la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko'rinishi haqida, na uning parametrlari haqida so'z boradi.

Oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada yoki qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin.

Asosiy (yoki nolinchi) gipoteza deb ilgari surilgan H_0 -gipotezaga, konkurent (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo'lgan H_1 -gipotezaga aytiladi.

Masalan, " X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi" gipotezasi surilgan bo'lsin.

Bu holda:

$$H_0: P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda > 0, k=0,1,2,3,\dots); \quad H_1: P(X=k) \neq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da'voni o'z ichiga olgan gipoteza *oddiy gipoteza*; bittadan ortiq sondagi da'volarni o'z ichiga olgan gipoteza esa *murakkab gipoteza* deyiladi.

Masalan, agar X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimot:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0. \end{cases}$$

qonuniga bo'ysunib, uning λ parametri noma'lum bo'lsin. U holda $H_0: \lambda = 2,5$ gipoteza oddiy gipoteza; $H_1: \lambda > 2,5$ gipoteza esa murakkab gipotezadir.

Ilgari surilgan gipoteza to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shu sababli uni tekshirib ko'riladi va so'ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo'l qo'yilishi mumkin.

Agar to'g'ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto'g'ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0 -gipoteza	to'g'ri	noto'g'ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To'g'ri qaror
Qabul qilindi	To'g'ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo'lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga "uchishga ruxsat berilsin" degan to'g'ri qaror rad etilgan bo'lsa, u holda bu I tur xatolik bo'lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan "uchishga ruxsat berilsin" degan noto'g'ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo'lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikga qaraganda og'irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

To'g'ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to'g'ri bo'lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto'g'ri bo'lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli α bilan belgilanadi; u muhimlilik (qiymatdorlik) darajasi deb ataladi. Ko'p hollarda: $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$.

Biz ma'lum taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi belgining noma'lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko'rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so'ng, uning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq, yoki taxminiy taqsimoti ma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni κ bilan belgilaymiz.

19.10.2-ta'rif. *Statistik kriteriy* (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan κ -tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega X va Y bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan

bo'lsa, u holda κ kriteriy sifatida "tuzatilgan" tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}. \quad (1)$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma'lum bo'lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun F tasodifiy miqdor bo'lib, u Fisher-Snedekor qonuni bo'yicha taqsimlangan.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo'yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyni kuzatiladigan (xususiy) qiymati hosil qilinadi.

K_{hozir} - kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyni tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgan dispersiyalar: $s_1^2 = 20$ va $s_2^2 = 5$ bo'lsa, u holda

$$K_{\text{hozir}} = F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4$$

Tanlangan κ kriteriyni mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami kesishmaydigan ikkita qism to'plamlarga ajratiladi:

$$K = K^- \cup K^+, K^- \cap K^+ = \emptyset.$$

Ulardan biri H_0 -asosiy gipoteza rad qilinadigan, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabul qilinadigan qiymatlarini o'z ichiga oladi.

19.10.3-ta'rif. *Kritik soha* deb, kriteriyni H_0 -asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.

19.10. 4-ta'rif. *Gipotezaning qabul qilinish sohasi* deb, kriteriyni asosiy gipotezani qabul qiladigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy printsiplari E. Neyman, K. Pirson va boshqa matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, bu printsiplni quyidagicha ta'riflash mumkin: agar kriteriyni kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyni kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriy bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lgani uchun uning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami biror intervaldan iborat bo'ladi. Shu

sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo'ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to'g'risida gapirish mumkin.

19.10. 5-ta'rif. *Kritik nuqtalar* deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{\alpha}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni o'ng tomonli kritik soha, tengsizlik aksincha bo'lsa chap tomonli kritik soha deyiladi. Agar kritik soha $K < k_{\alpha}'$, $K > k_{\alpha}'$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni ikki tomonli kritik soha deyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o'ng tomonli kritik sohani topishga o'xshash bo'lganligi sababli biz faqat o'ng tomonli kritik sohani topish bilan tanishib chiqamiz.

Kritik sohani topish uchun kritik nuqtani aniqlash etarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymati berilishi kerak. So'ngra, quyidagi talabga asosanib, k_{α} nuqta topiladi: H_0 -asosiy gipoteza o'rinli bo'lishi shartida tanlangan K kriteriyning k_{α} nuqtadan katta bo'lishi ehtimoli α -muhimlilik darajasiga teng bo'lsin:

$$P(K > k_{\alpha}) = \alpha. \quad (2)$$

Har bir kriteriy uchun (2) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so'ng, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma ma'lumotlari bo'yicha kriteriyning kuzatish qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{\alpha}$ bo'lsa, u holda H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi; agar $K < k_{\alpha}$ bo'lsa, u holda gipotezani rad qilishga asos yo'q deyiladi.

19.10. 6-eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo'lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo'ladi. Aslida "kuzatish natijalari H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo'q" deyish to'g'riroq bo'ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko'ra ko'proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma'lumki biror umumiy da'voni rad qilish bu uchun bu da'voga zid bo'lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli *kriteriy quvvati* tushunchasi kritiladi.

19.10.7-ta'rif. Konkurent gipoteza to'g'ri bo'lganda kriteriyning kritik sohada bo'lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli β bo'lsa, u holda kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, quvvat qancha katta bo'lsa II tur xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli shuncha kam bo'ladi. Yuqoridagi ta'riflardan ko'rinib turibdiki, α ning kamayishi β ning o'sishiga olib keladi, va aksincha. Masalan, $\alpha=0$ bo'lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan noto'g'rilari ham. Shu sababli, ikkala parametрни bir paytda kamaytirib bo'lmaydi. I tur va II tur xatoliklarni kamaytirishning yagona yo'li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gepotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to'plamning dispersiyalarni taqqoslash. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo'lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o'lchov asboblarning, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko'rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to'plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa kriteriy sifatida $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kattalik olinishni aytib o'tgan

edik. Bunda F tasodifiy miqdor bo'ysinadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, bu yerda n_1 -hisoblanganda qiymati katta bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2 -hisoblanganda qiymati kichik bo'lgan "tuzatilgan" dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{kr} = F_{kr}(\alpha; k_1, k_2)$ tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

19.10.8-misol. Normal taqsimlangan X va Y bosh to'plamlardan olingan $n_1=11$ va $n_2=14$ hajmli ikkita erkli tanlanma bo'yicha "tuzatilgan" dispersiyalar: $s_x^2=0,76$, $s_y^2=0,38$ topilgan. $\alpha=0,05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring:

$$H_0: D(X)=D(Y); H_1: D(X)>D(Y).$$

Yechilishi. Gipotezani tekshirish uchun $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kriteriyни tanlaymiz. U

holda

$$K_{\text{tabel}} = F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,76}{0,38} = 2.$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan $\alpha = 0,05$, $k_1 = n_1 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 13$ bo'yicha $k_{kr} = F_{kr}(0,05; 10, 13) = 2,67$ kritik nuqtani topamiz. $2 < 2,67$, ya'ni $K_{\text{tabel}} < k_{kr}$ bo'lgani uchun gipotezani rad qilishga asos yo'q.

19-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

19.1. Matematik statistikaning vazifalari. Statistika taqsimot. Empirik taqsimot funksiyasi ([3], 187-196 betlar; [5], [9]).

19.2. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar ([3], 197-211 betlar; [5], [9]).

19.3. Nuqtaviy va intervalli baholar. Ishonchli intervallar ([3], 213-235 betlar; [5], [9]).

19.4. Funksional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar. Korrelyatsion jadval. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi ([3], 253-262 betlar; [5], [9]).

19.5. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli ([3], 267-272 betlar; [5], [9]).

19.6. Korrelyatsion bog'lanish zichligi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsient va tanlanma korrelyatsion nisbat ([3], 274-275 betlar; [5], [9]).

19.7. Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya ([3], 275-278 betlar; [5], [9]).

19.8. Statistik gipotezalar. Statistik kriteriy ([3], 281-283 betlar; [5], [9]).

19.1-amaliy mashg'ulot.

Tanlanmaning statistik taqsimoti. Empirik taqsimot funksiyasi. Poligon va gistogramma

1-misol. 10 marta tajriba o'tkazish natijasida tanlanmaning statistik taqsimoti ma'lum

x_i	2	5	7
n_i	3	5	2

Tanlanmani nisbiy chastotalarga nisbatan taqsimoti topilsin.

Yechilishi. Tanlanmaning hajmini topamiz: $n = 3 + 5 + 2 = 10$.

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad W_2 = \frac{5}{10} = 0,5, \quad W_3 = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Nisbiy sanoqqa nisbatan statistik taqsimot:

x_i	2	5	2
W_i	0,3	0,5	0,2

Tekshirish: $0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Javobi.

x_i	4	7	8	12
W_i	0,25	0,10	0,15	0,50

2. Tanlanma

x_i	4	6	12
n_i	3	10	7

Chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Javobi.

x_i	4	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

3. Tanlanma

x_i	3	5	8	12
n_i	2	8	4	6

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Javobi.

x_i	3	5	8	12
W_i	0,1	0,4	0,2	0,3

13.2. Empirik taqsimot funksiyasi

1- **misol.** Tanlanma chastotalarning empirik taqsimoti berilgan:

x_i	-1	0	1	2
n_i	5	3	7	5

Nisbiy chastotalar empirik taqsimotini toping.

Yechilishi. $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 5 + 3 + 7 + 5 = 20$

$$W_1 = \frac{5}{20} = 0,25; W_2 = \frac{3}{20} = 0,15; W_3 = \frac{7}{20} = 0,35; W_4 = \frac{5}{20} = 0,25.$$

x_i	-1	0	1	2
W_i	0,25	0,15	0,35	0,25

Shu bilan birga $0,25 + 0,15 + 0,35 + 0,25 = 1$.

2 -**misol.** Quyidagi empirik taqsimot berilgan:

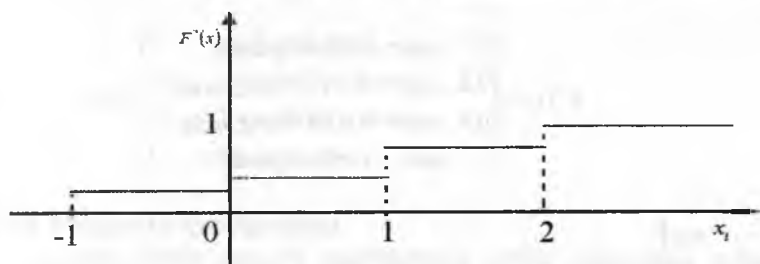
x_i	-1	0	1	2
W_i	0,25	0,15	0,35	0,25

Empirik taqsimot funksiyasi tuzing va uning grafigini chizing.

Yechilishi.

$$F_n^* = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \text{ bo'lganda,} \\ 0,25, & -1 < x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0,25 + 0,15 = 0,4, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 0,25 + 0,15 + 0,35 = 0,75, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,25 + 0,15 + 0,35 + 0,25 = 1, & x > 2 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz (1- chizma.)



1- chizma.

3-misol. Quyidagi tanlanmaning statistik taqsimoti asosida empirik taqsimot funksiyasi tuzilsin.

x_i	2	7	9
n_i	10	15	25

Yechilishi. Tanlanma hajmini topamiz: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Eng kichik varianta 2 ga teng, 2 dan kichik x_i yo'q, shuning uchun

$$F^*(x) = 0, \text{ agar } x \leq 2 \text{ bo'lsa}$$

$X < 7$ qiymat, $x_i = 2$ qiymat 7 marta kuzatilgan, demak,

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0,2, \text{ agar } 2 < x \leq 7$$

9 dan kichik variantalar soni 2 va 7. Ularning chastotalari $10+15=25$, shuning uchun

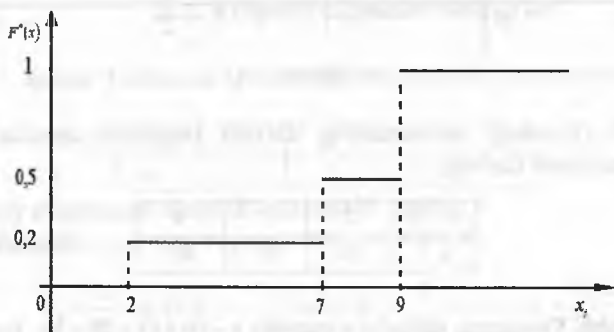
$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ agar } 7 < x \leq 9.$$

$x=9$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 9$ bo'lganda

$$F^*(x) = 1.$$

Topilganlarni umumlashtirsak (2- chizma),

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,2, & \text{agar } 2 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,5, & \text{agar } 7 < x \leq 9 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & \text{agar } x > 9 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$



2- chizma.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Tanlanmaning quyida berilgan ushbu taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping:

1)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

2)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

Javobi: 1) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,1, & 2 < x \leq 5 \text{ bo'lganda,} \\ 0,4, & 5 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,6, & 7 < x \leq 8 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 8 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$

2) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ 0,4, & 4 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,7, & 7 < x \leq 8 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 8 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$

3. Poligon va gistogramma

1-misol. Ushbu empirik taqsimotning nisbiy chastotalar poligonini yasang:

x_i^*	-2	0	1	3
W_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Yechilishi. Berilganga asoslanib poligonni hosil qilamiz. Kuzatishlar soni katta bo'lganda yoki X uzluksiz belgi bo'lganda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun X belgining kuzatilgan qiymatlari tushadigan oraliq bir xil h uzunlikdagi Δ_i intervallarga bo'linadi va har bir interval uchun $n_i - \Delta_i$ intervalga tushgan variantlar soni topiladi.

2-misol. Ushbu Tanlanmaning chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

Δ_i	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;-0)	(-20;-15)	(-5;-10)	(-10;-15)
n_i	2	8	17	24	26	13	10
W_i	0,02	7,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,1

Yechilishi. $h=5$

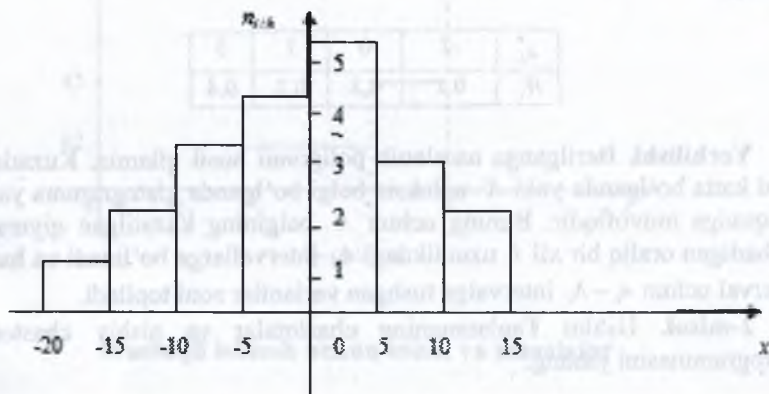
Δ_i	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;-0)	(-20;-15)	(-5;-10)	(-10;-15)
$\frac{n_i}{h}$	0,4	1,6	3,4	4,8	5,2	2,6	2
$\frac{W_i}{h}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,020

Berilgan tanlanmalar asosida chastotaning (3-chizma) va nisbiy chastotaning (2-chizma.) gistogrammasi hosil qilamiz.

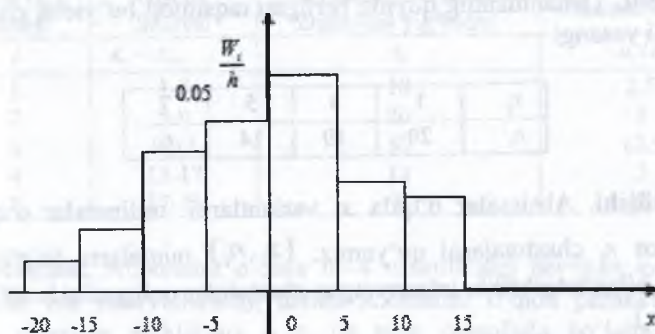
Ta'rifga ko'ra nisbiy chastotalar gistogrammasini yuzi

$$S = \sum_{i=1}^k h \cdot \frac{W_i}{h} = \sum_{i=1}^k W_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

ekanini ko'ramiz.



3- chizma.



4- chizma.

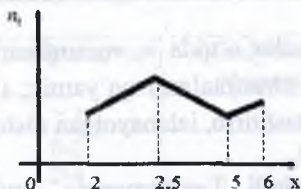
Ravshanki, agar nisbiy chastotalar gistogrammasining uchlarini silliq chiziq bilan tutashtirib chiqsak, bu chiziq taqriban X belgining taqsimot funksiyasiga mos keluvchi taqsimot zichligining grafigini aks ettirishni ko'ramiz.

Agar tanlanma hajmini ortirib, intervalga uzunligi h ni nolga intiltirsak, taqsimot zichligining grafigiga borgan sari yaqinlashamiz.

3-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti asosida chastotalar poligoni tuzilsin

x_i	2	2,5	5	6
n_i	0,1	0,4	0,2	0,3

Yechilishi. Absissalar o'qida x_i variantalarni, ordinatalar o'qida esa ularga mos n_i -chastotalarni qo'yamiz. (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan chastotalar poligonini hosil qilamiz (5-chizma.).

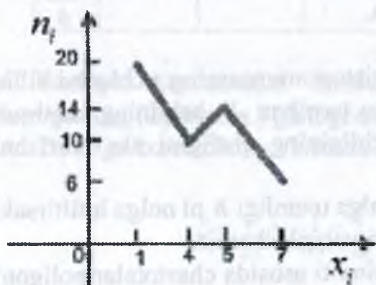


5- chizma.

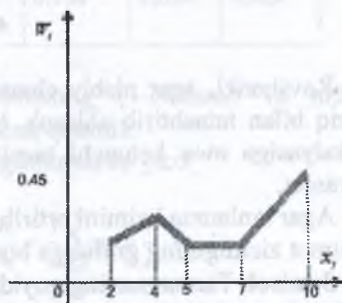
4-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Yechilishi. Absissalar o'qida x_i variantlarni, ordinatalar o'qida esa ularga mos n_i chastotalarni qo'yamiz. (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan chastotalar poligonini hosil qilamiz (6-chizma.).



6- chizma.



7-chizma.

5-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

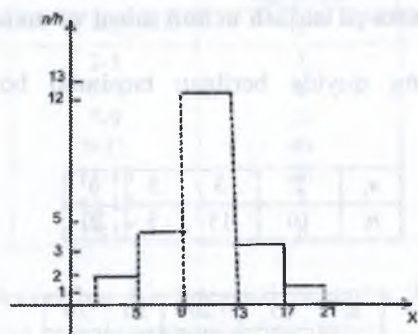
x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

Yechilishi. a) absissalar o'qida x_i variantlarni, ordinatalar o'qida esa mos keluvchi w_i nisbiy chastotalarni qo'yamiz; (x_i, w_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan nisbiy chastotalar poligonini hosil qilamiz (7-chizma.).

6-misol. $n=100$ hajmli Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval nomeri	Qismaniy interval	Intervaldagi variantalar chastotasi yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	1-5	10	2.5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12.5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Yechilishi. Absissalar o'qida $h=4$ uzunlikdagi berilgan intervallarni yasaymiz. Bu intervallarning ustida absissalar o'qida parallel va unga tegishli chastota zichliklari n_i/h ga teng masofada bo'lgan kesmalar o'tkazamiz. Masalan, (1, 5) intervalning ustida absissalar o'qiga parallel qilib, $n_i/h=10/4=2,5$ masofada kesma yasaymiz. Qolgan kesmalar ham shunga o'hshash yasaladi. Chastotalar gistogrammasi 8-chizmada tasvirlangan.



8-chizma.

7-misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval nomeri	Qismaniy interval	Qismaniy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50

Yechilishi. Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = 20/100 = 0,2; W_2 = 30/100 = 0,3; W_3 = 50/100 = 0,5.$$

Intervalning uzunligi $h=2$ ekanligini hisobga olib, nisbiy chastotalar zichligini topamiz:

$$W_1/h = 0,2/2 = 0,1; W_2/h = 0,3/2 = 0,15; W_3/h = 0,5/2 = 0,25.$$

Absissalar o'qida berilgan qismaniy intervalni belgilaymiz. Bu intervallarning ustida absissalar o'qiga parallel va unga tegishli nisbiy chastota zichliklariga teng masofada kesmalar o'tkazamiz. Masalan, (0,2) intervalning ustida absissalar o'qiga parallel va undan 0,1 masofada yotadigan kesma o'tkazamiz; qolgan kesmalar ham shunga o'xshash yasaladi.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang:

1)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

2)

x_i	15	20	30	10
n_i	10	15	20	25

2. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

1)

x_i	1	4	5	8	9
W_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

2)

x_i	20	40	65	80
W_i	0,1	0,2	0,3	0,4

3. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

1)

Interval nomeri	Qismaniy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

2)

Interval nomeri	Qismaniy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

Ko'rsatma. Avval har bir integrval uchun n_i / h chastota zichligini toping va jadvalning so'nggi ustunini to'ldiring.

4. Tanlanmaning quyida berilgan ushbu taqsimoti bo'yicha uning emperik funksiyasini toping:

1)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

2)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

5. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar histogrammasini yasang.

1)

Interval nomeri	Qismaniy interval	Qismaniy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n = \sum n_i = 20$

2)

Interval nomeri	Qismaniy interval	Qismaniy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
		$n = \sum n_i = 25$

Ko'rsatma. Avval har bir intervalning nisbiy chastota zichligiga mos nisbiy chastotalarni toping.

19.2-amaliy mashg'ulot.

Taqsimot parametrlarining statistik baholari.

Baholarga qo'yiladigan talablar

1-misol. Tanlanmaning

$$x_i: 4 \quad 8 \quad 11$$

$$n_i: 5 \quad 10 \quad 5$$

statistik taqsimoti bo'yicha bosh to'plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Yechilishi. (4) formuladan foydalanamiz. U holda

$$\bar{x}_1 = \frac{4 \cdot 5 + 8 \cdot 10 + 11 \cdot 5}{20} = \frac{155}{20} = 7,75.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Bosh to'plamdan $n = 50$ hajmdagi tanlanma ajratilgan. Quyidagi

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

taqsimot bo'yicha bosh to'plam o'rtachasining siljimagan bahosini toping.

2. Guruhdagi 40 ta talabani yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o'rtachasi va tanlanma dispersiyasini toping.

3. $n = 26$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma dispersiyasining $D_T = 3$ bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

4. $n = 10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

5. Ushbu $n = 100$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

19.3-amaliy mashg'ulot.
To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi.
Eng kichik kvadratlar usuli.

1-misol. Hajmi $n=5$ bo'lgan tanlanmaning

$$\begin{aligned}x_i: & 1 \quad 1,5 \quad 3 \quad 4,5 \quad 5 \\n_i: & 1,25 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 1,75 \quad 2,25\end{aligned}$$

taqsimoti bo'yicha Y ning X ga regressiya to'g'ri chiziqli tanlanma tenglamasini toping.

Yechilishi. Ma'lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum = 15$	$\sum = 8,15$	$\sum = 57,5$	$\sum = 26,975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni 19.7 banddagi (5) formulaga qo'ysak:

$$\begin{aligned}\rho_{yx} &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 0,202, \\b &= \frac{n \sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{5 \cdot 57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 1,024.\end{aligned}$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $\bar{y}_x = 0,202x + 1,024$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

x	10	2	7	5
y	8	2	6	4

2. Bir oylik ish xaqi fondining- y ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmi- x ga bog'liqligini o'rganish maqsadida 10 ta korxona bo'yicha quyidagi ma'lumotlar olingan. y ning x ga to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (mln. sum)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (mln. sum)	110	120	130	135	140	145	150	154	160	164

3. Quyidagi berilgan ma'lumotlar bo'yicha 1 ga yerdan olingan hosil miqdori- y ning sarflangan o'g'it miqdori- x ga bog'liqligi ifodalovchi to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X (ts)	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y (ts)	25	27	26	30	32	35	38

4. Shahardagi 10 ta oziq-ovqat magazini bo'yicha bir oylik tovar ayirboshlash hajmi- x va shu davr mobaynidagi muomala xarajatlari- y hajmi o'rganilgan. x ning y ga bog'liqligi ifodalovchi to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X (mln. sum)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln. sum)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

5. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha arpa boshog'idagi donlar soni- y ning boshogning uzunligi- x ga bog'liqligini ifodalovchi to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

x	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

19-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari

1- topshiriq. Tanlanmalarning sonli xarakteristikalarini hisoblash

1-misol. Bosh to'plamdan $n = 50$ hajmli tanlanma olingan

varianta X_i 2 5 7 10

chastota n_i 16 12 8 14

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagani bahosini toping.

Yechilishi. Bosh o'rtacha qiymatning siljimagani bahosi o'rtacha tanlanma qiymat bo'ladi:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76$$

2-misol. $n = 10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha o'rtacha tanlanma qiymatini toping:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Yechilishi. Dastlabki variantalar katta sonlar, shuning uchun shartli variantalarga o'tamiz: $u_i = x_i - 1270$. Natijada shartli variantalar taqsimotini hosil qilamiz:

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

Izlanayotgan o'rtacha tanlama qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_i = C + \frac{\sum n_i x_i}{n} = 1270 + \frac{-(20) \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

3-misol. $n = 41$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh dispersiyaning $D_i = 3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagani bahosini toping.

Yechilishi. Izlanayotgan siljimagani baho tuzatilgan dispersiyaga teng:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_t = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

4-misol. $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Yechilishi. Variantalar – nisbatan katta sonlar, shuning uchun $u_i = x_i - 191$ shartli variantalarga o'tamiz (biz variantalardan o'rtacha tanlanma qiymatga eng yaqin son $C=19$ ni ayirdik). Natijada shartli variantalar taqsimotini hosil qilamiz:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Izlanayotgan tanlanma dispersiyani topamiz:

$$D_t = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2}{10} - \left[\frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{10} \right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04.$$

Berilgan tanlama taqsimotining tanlanma o'rta qiymatini, tanlanma dispersiyasini $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ formula yordamida soddalashtirib hisoblang.

1	x_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
	n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5
2	x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
	n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2
3	x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8			
	n_i	5	10	17	30	20	12	6			
4	x_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55	
	n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4	
5	x_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6				

	n_i	4	6	30	40	18	2				
6	x_i	65	70	75	80	85	90				
	n_i	2	5	25	15	5	3				
7	x_i	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0					
	n_i	4	7	20	15	3					
8	x_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45					
	n_i	18	20	25	22	15					
9	x_i	5	10	15	20	25	30				
	n_i	10	20	40	30	15	5				
10	x_i	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8				
	n_i	5	10	25	20	15	4				
11	x_i	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8			
	n_i	7	12	16	30	25	15	6			
12	x_i	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1			
	n_i	10	15	18	24	20	14	5			
13	x_i	8,2	8,6	9,0	9,4	9,8	10,2				
	n_i	6	12	30	25	20	4				
14	x_i	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,3			
	n_i	10	13	16	28	23	17	7			
15	x_i	10,1	10,5	10,9	11,3	11,7	12,1	12,5			
	n_i	20	25	30	45	40	35	15			
16	x_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0		
	n_i	15	18	23	25	35	32	22	13		
17	x_i	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5		
	n_i	19	25	28	30	40	35	24	15		
18	x_i	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8		
	n_i	20	25	35	40	50	32	23	15		
19	x_i	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3		
	n_i	10	15	20	22	35	30	25	12		
20	x_i	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4		

	n_i	15	25	30	35	45	40	30	20		
21	x_i	4,3	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,4		
	n_i	6	8	13	15	25	20	14	5		
22	x_i	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0		
	n_i	10	16	18	20	30	28	15	8		
23	x_i	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	12,2	12,4	12,6		
	n_i	5	8	12	15	25	22	13	7		
24	x_i	11,5	11,9	12,3	12,7	13,1	13,5	13,9	14,3		
	n_i	10	14	18	20	26	21	13	8		
25	x_i	12,3	12,5	12,7	12,9	13,1	13,3	13,5	13,7		
	n_i	2	5	8	12	20	15	7	3		
26	x_i	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2		
	n_i	3	10	15	25	40	30	20	5		
27	x_i	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2	14,4	14,6		
	n_i	10	15	18	20	30	25	16	12		
28	x_i	13,8	14,3	14,8	15,3	15,8	16,3	16,8	17,3		
	n_i	4	7	9	11	15	10	6	5		
29	x_i	14	16	18	20	22	24	26	28		
	n_i	15	17	20	22	25	23	16	13		
30	x_i	16,1	16,4	16,7	17,0	17,3	17,6				
	n_i	10	14	21	28	23	15				

2-topshiriq. Chiziqli regressiya tenglamasini eng kichik kvadratlar usuli yordamida aniqlash

1-misol. To'g'ri to'rtburchak plitkani uzunliklari $x(sm)$ va massalari $y(kg)$ bo'yicha taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

$\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}$	6	8	10	12	14	n_i
30	2	17	9	3	-	31
35	-	10	17	9	-	36
40	-	3	24	16	13	56
45	-	-	6	24	12	42
50	-	-	2	11	22	35
n_j	2	30	58	63	47	200

Regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini tuzing.

Yechilishi. $C_1 = 40$, $C_2 = 10$, $h_1 = 5$, $h_2 = 2$ bo'lganligi sababli

$$u_i = \frac{x_i - 40}{5}, \quad v_i = \frac{y_i - 10}{2}$$

almashtirish olib quyidagi jadvalga ega bo'lamiz.

$\begin{smallmatrix} v \\ y \\ \backslash \\ x \\ u \end{smallmatrix}$	-2	-1	0	1	2	$n_{..}$
-2	2	17	9	3	-	31
-1	-	10	17	9	-	36
0	-	3	24	16	13	56
1	-	-	6	24	12	42
2	-	-	2	11	22	35
$n_{.v}$	2	30	58	63	47	$200=n$

Jadvaldan foydalanib quyidagilarni hisoblaymiz.

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{.v} u}{n} = \frac{-2 \cdot 31 - 1 \cdot 36 + 0 \cdot 56 + 1 \cdot 42 + 2 \cdot 35}{200} = 0,07;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_{.v} v}{n} = \frac{-2 \cdot 2 - 1 \cdot 30 + 0 \cdot 58 + 1 \cdot 63 + 2 \cdot 47}{200} = 0,62;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{\sum n_{.v} u^2}{n} = \frac{(-2)^2 \cdot 31 + (-1)^2 \cdot 36 + 0^2 \cdot 56 + 1^2 \cdot 42 + 2^2 \cdot 35}{200} = 1,71;$$

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum n_{.v} v^2}{n} = \frac{(-2)^2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 30 + 0^2 \cdot 58 + 1^2 \cdot 63 + 2^2 \cdot 47}{200} = 1,45;$$

$$\bar{\sigma}_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,71 - (0,07)^2} = 1,31;$$

$$\bar{\sigma}_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2} = \sqrt{1,45 - 0,62^2} = \sqrt{1,03} = 1,025.$$

$\sum n_{uv} UV$ yig'indini hisoblash uchun ushbu hisoblash jadvalini tuzamiz.

$\begin{smallmatrix} v \\ u \\ \backslash \end{smallmatrix}$	-2	-1	0	1	2	$V = \sum u \cdot V$
-2	- 4	17	- 17	3	-	-18
2			9			36

	-4		-			-18		-6					
			34										
-1	-		10		10	17		0		9		-	1
										9			
			-			-17		-9					
			10										
0	-		3		-3	24		0		16		26	
								16				13	39
			0			0		0				0	0
1	-		-			6		0		2		24	48
										4		12	48
										24			
						6		24				12	
2	-		-			2		0		11		22	55
												44	110
						4		22				44	
U =	-4		-44			-25		31				56	195
V · U	8		44			0		31				112	195

Korrelyasion jadval har bir katagining yuqoridagi o'ng burchagiga vn_{uv} ko'paytmani yozamiz. Katakning quyi chap burchagiga un_{uv} ko'paytmani yozamiz.

Barcha kataklarning yuqoridagi o'ng burchagidagi va quyidagi chap burchagidagi sonlarni qo'shib, $V = \sum vn_{uv}$ va $U = \sum un_{uv}$ qiymatlarni hosil qilamiz. Barcha uV va vU ko'paytmalarni hisoblab, natijalarni qo'shimcha satr va ustunga yozamiz, bunda $\sum uV = \sum vU$ ko'paytma nazorat uchun xizmat qiladi. U holda

$$\sum n_{uv}uv = \sum vU = \sum Uv.$$

Endi korrelyasiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_T = \frac{\sum n_{uv}uv - nu\bar{v}}{\sqrt{n\sigma_u \cdot \sigma_v}} = \frac{195 - 200 \cdot 0,07 \cdot 0,62}{200 \cdot 1,3 \cdot 1,67} = 0,69.$$

(8) formulalarga asoslanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\bar{x} = 0,07 \cdot 5 + 40 = 40,35, \quad \bar{y} = 0,62 \cdot 2 + 10 = 11,24, \quad \sigma_x = 5 \cdot 1,31 = 6,55, \quad \sigma_y = 2 \cdot 1,025 = 2,05.$$

U holda (5) formulaga ko'ra r ning x ga tanlanma regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasi

$$\bar{y}_x - 11,24 = 0,69 \frac{2,05}{6,55} (x - 40,35)$$

yoki

$$\bar{y}_x = 0,21x + 2,77$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunga o'xshash $\bar{x}_y - \bar{x} = r_r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$ formuladan foydalanib X ning Y ga tanlanma regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasi

$$\bar{x}_y = 2,1y + 16,75$$

ko'rinishga ega bo'lishini topamiz.

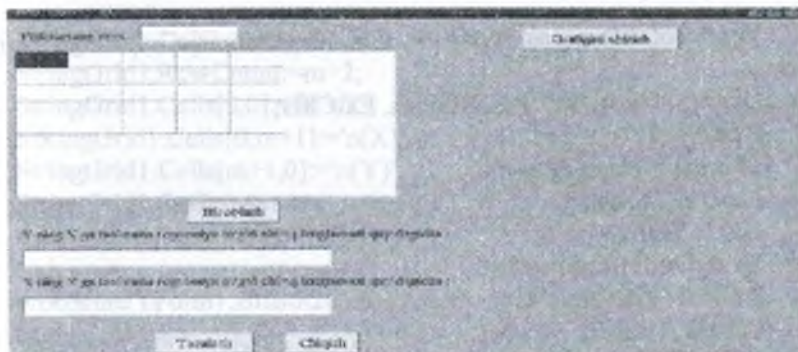
3. Delphi dasturlash tilidan foydalanib tekislovchi funktsiya parametrlarini aniqlash

Masala sharti : To'g'ri to'rtburchak plitkalarining uzunliklari x (sm) va massalari u (kg) bo'yicha taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan :

X/Y	6	8	10	12	14	n_x
30	2	17	9	3	0	31
35	0	10	17	9	0	36
40	0	3	24	16	13	56
45	0	0	6	24	12	42
50	0	0	2	11	22	35
n_y	2	30	58	63	47	200

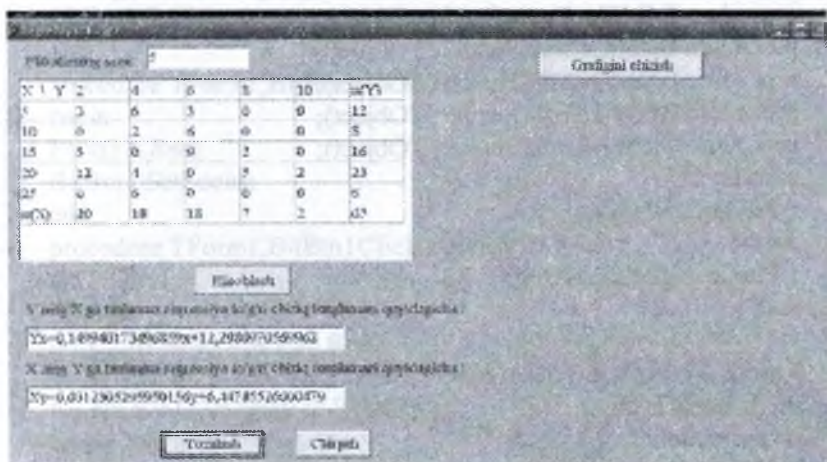
Regressiya to'g'ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini tuzing.

Yechilishi : Bu berilgan masalani yechish uchun Delphi dasturlash tilidan foydalandim. Uning interfeys ko'rinishi quyidagicha :



Masala shartiga ko'ra pitkalar soni kiritiladi va Enter tugmasi bosiladi. So'ng jadval to'ldirilib, Hisoblash tugmasi bir marta bosiladi. Natijada, u ning x ga bog'liq tanlanma to'g'ri chiziqli tenglamasi va aksincha, x ning u ga bog'liq tanlanma to'g'ri chiziqli tenglamasi hisoblanadi.

Uning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi :



Bu berilgan masala uchun Delphi dasturlash tilida dasturiy vosita matn ko'rinishi quyidagicha bo'ladi :

```
unit Unit1;
interface
uses
```

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls,
Forms,

Dialogs, Grids, StdCtrls, Buttons, ExtCtrls;

type

TForm1 = class(TForm)

Label1: TLabel;

Edit1: TEdit;

StringGrid1: TStringGrid;

BitBtn1: TBitBtn;

Label2: TLabel;

Edit2: TEdit;

Label3: TLabel;

Edit3: TEdit;

BitBtn2: TBitBtn;

BitBtn3: TBitBtn;

BitBtn4: TBitBtn;

Image1: TImage;

procedure Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);

procedure BitBtn2Click(Sender: TObject);

procedure BitBtn3Click(Sender: TObject);

procedure BitBtn1Click(Sender: TObject);

procedure BitBtn4Click(Sender: TObject);

private

{ Private declarations }

public

{ Public declarations }

end;

var

Form1: TForm1;

m,i,j: Integer;

implementation

{ \$R*.dfm }

procedure TForm1.Edit1KeyPress(Sender: TObject; var Key: Char);

begin

if not(key in ['0'..'9', #13]) then key:=#0;

if key=#13 then

begin

m:=StrToInt(Edit1.Text);

```

StringGrid1.ColCount:=m+2;
StringGrid1.RowCount:=m+2;
StringGrid1.Cells[0,0]:='X \ Y';
StRingGrid1.Cells[0,m+1]:='n(X)';
StringGrid1.Cells[m+1,0]:='n(Y)';
StringGrid1.SetFocus;
end;
end;
procedure TForm1.BitBtn2Click(Sender: TObject);
begin
Edit1.Clear;
Edit2.Clear;
Edit3.Clear;
for i:=0 to m do
for j:=0 to m do
StringGrid1.Cells[i,j]:='';
StRingGrid1.Cells[0,0]:='X \ Y';
BitBtn2.SetFocus;
end;
end;
procedure TForm1.BitBtn3Click(Sender: TObject);
begin
Form1.Close;
BitBtn3.SetFocus;
end;
end;
procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender: TObject);
var
f:Integer;
C1,C2,h1,h2,Q,R,S,P,n: Real;
DeltaX,DeltaY,Xsh,Ysh,DeltaU,DeltaV,Ush,Vsh,Ukv,Vkv:Real;
Nx,Ny,x,y,U,V: array of Real;
begin
if m mod 2=0 then f:=m div 2
else f:=m div 2+1;
C1:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[f,0]);
C2:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[0,f]);
SetLength(x,m);
SetLength(y,m);
SetLength(U,m);

```

```

SetLength(V,m);
SetLength(Nx,m);
SetLength(Ny,m);
for i:=1 to m do
begin
y[i-1]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[0,i]);
x[i-1]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[i,0]);
end;
h1:=x[2]-x[1];
h2:=y[2]-y[1];
for i:=0 to m-1 do
begin
U[i]:=(x[i]-C1)/h1;
V[i]:=(y[i]-C2)/h2;
end;
for i:=1 to m do
Begin
S:=0;
for j:=1 to m do
S:=S+StrToFloat(StringGrid1.Cells[j,i]);
Nx[i-1]:=S;
StringGrid1.Cells[m+1,i]:=FloatToStr(S);
end;
for i:=1 to m do
Begin
S:=0;
for j:=1 to m do
S:=S+StrToFloat(StringGrid1.Cells[i,j]);
Ny[i-1]:=S;
StringGrid1.Cells[i,m+1]:=FloatToStr(S);
end;
n:=0;
for i:=0 to m do
n:=n+Nx[i];
StringGrid1.Cells[m+1,m+1]:=FloatToStr(n);
Ush:=0; Vsh:=0;
for i:=0 to m do
Begin

```

```

Ush:=Ush+(U[i]*Nx[i])/n;
Vsh:=Vsh+(V[i]*Ny[i])/n;
end;
Ukv:=0; Vkv:=0;
for i:=0 to m do
Begin
Ukv:=Ukv+(sqr(U[i])*Nx[i])/n;
Vkv:=Vkv+(sqr(V[i])*Ny[i])/n;
end;
DeltaU:=Sqrt(Ukv-sqr(Ush));
DeltaV:=Sqrt(Vkv-sqr(Vsh));
P:=0;
for i:=1 to m do
Begin
S:=0;
for j:=1 to m do
S:=S+V[j]*StrToFloat(StringGrid1.Cells[j,i]);
S:=S*U[i];
P:=P+S;
end;
R:=(P-n*Ush*Vsh)/(n*DeltaU*DeltaV);
Xsh:=Ush*h1+C1;
Ysh:=Vsh*h2+C2;
DeltaX:=h1*DeltaU;
DeltaY:=h2*DeltaV;
Q:=R*DeltaY/DeltaX;
Edit2.Text:='Yx'+FloatToStr(Q)+'x'+FloatToStr(Q*Xsh+Ysh);
Q:=R*DeltaX/DeltaY;
Edit3.Text:='Yy'+FloatToStr(Q)+'y'+FloatToStr(Q*Ysh+Xsh);
BitBtn2.SetFocus;
end;
procedure TForm1.BitBtn4Click(Sender: TObject);
var
x0, y0, xmax, ymax : Integer;
x,y : real;
begin
Image1.Canvas.Pen.Color:=clBlack;
x0:=Image1.Width div 2;

```

```

y0:=Image1.Height div 2;
xmax:=Image1.Width;
ymax:=Image1.Height;
With Image1.Canvas do
begin
pen.Color:=clRed;
MoveTo(0,y0);
LineTo(xmax,y0);
MoveTo(x0,0);
LineTo(x0,ymax);
x:=-2;
repeat
y:=0.22*x+2.32;
pixels[x0+round(50*x), y0-round(50*x)]:=clRed;
x:=x+0.01;
until x>2;
BitBtn4.SetFocus;
end;
end;
end.

```

4. Maple tizimidan foydalanib tekislanuvchi funksiyalarning parametrlarini topish

Tekislanuvchi funksiyaning parametrlarini topish uchun *stats* paketi yordamida boshlanadi, so'ng *fit* kutubxona ostida *leastsquare* (eng kichik kvadrat) komandasi va formuladagi o'zgaruvchilar kiritiladi. Tekislanuvchi funksiya va katta qavs ichida izlanayotgan parametr, so'ngra o'rta qavuslar ichiga o'zgaruvchilarning empirik qiymatlari kiritiladi.

stats paketi yordamida faqat chiziqli, parabolik va giperbolik bog'lanishlarnigina topmasdan, boshqa har qanday analitik bog'lanishlarni (ko'rsatgichli, logarifm, darajali va hokazo) ham topish mumkin. *leastsquare* komandasidan keyin faqat mos formulani qo'yish mumkin.

stats paketi yordamida empirik ma'lumotlarga mos bo'lgan, ko'rsatilgan nuqtadan o'tuvchi nazariy bog'lanish grafigini yasash, bundan tashqari gistogramma va o'rtacha qiymatlarni hisoblab kiritish mumkin.

1-misol. Agar x o'zgaruvchining beshta, ya'ni $x = 0, 19, 40, 60, 74$ qiymatlariga mos ravishda y o'zgaruvchining beshta, ya'ni $y = 3, 6, 8, 7, 1, 9, 8, 11, 2$ qiymatlari ma'lum bo'lsa, x ning $y = ax + b$ chiziqli bog'lanish formulasini eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

Berilgan misolning yechimi Maple paketida quyidagicha bo'ladi :

> with(stats):

> fit[leastsquare]([x,y], y=a*x+b, {a,b}) ([[0,19,40,70,74],[3,6,8,7,1,9,8,11,2]]);

$$y = 0.09505274468x + 3.720858566$$

Variantlar

1.

$y \backslash x$	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4	-	-	-	-	6
55	-	3	5	-	-	-	8
65	-	-	5	35	5	-	45
75	-	-	2	8	17	-	27
85	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	$n = 100$

2.

$y \backslash x$	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4	-	-	-	-	6
50	-	3	7	-	-	-	10
60	-	-	5	30	10	-	45
70	-	-	7	10	8	-	25
80	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n = 100$

3.

$y \backslash x$	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	-	-	-	-	5
25	-	6	4	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	9	7	-	17
55	-	-	-	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	$n = 100$

4.

$y \backslash x$	2	7	12	27	22	27	n_y
100	1	5	-	-	-	-	6
110	-	5	3	-	-	-	8
120	-	-	3	40	12	-	55
130	-	-	2	10	5	-	17
140	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	$n = 100$

5.

$y \backslash x$	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	-	-	-	-	8
20	-	4	4	-	-	-	8
30	-	-	7	35	8	-	50
40	-	-	2	10	8	-	20
50	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

6.

$y \backslash x$	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	4	-	45
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

7.

$y \backslash x$	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	-	-	-	-	7
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	2	-	43
55	-	-	12	8	6	-	26
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	$n = 100$

8.

$y \backslash x$	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n = 100$

9.

$y \backslash x$	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	$n = 100$

10.

$y \backslash x$	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	1	-	-	-	-	6
30	-	6	2	-	-	-	8
40	-	-	40	5	5	-	50
50	-	-	2	8	7	-	17
60	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

11.

$y \backslash x$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

12.

$y \backslash x$	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	1	1	-	
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

13.

$y \backslash x$	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

14.

$y \backslash x$	13	18	23	28	33	n_y
25	3	2	-	-	-	5
35	-	6	4	-	-	10
45	-	1	9	5	-	15
55	-	1	2	4	8	15
65	-	-	1	-	4	5
n_x	3	10	16	9	12	$n = 50$

15.

$y \backslash x$	30	35	40	45	50	n_y
46	2	6	-	-	-	8
56	2	8	10	-	-	20
66	-	-	32	3	9	44
76	-	-	4	11	6	21
86	-	-	-	2	5	7
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

16.

$y \backslash x$	33	38	43	48	53	58	n_y
65	4	8	1	-	-	-	13
75	-	4	4	2	-	-	10
85	-	1	6	6	1	-	14
95	-	-	-	1	5	-	6
105	-	-	-	1	4	1	6
115	-	-	-	-	2	4	6
n_x	4	13	11	10	12	5	$n = 55$

17.

$y \backslash x$	3	7	11	15	19	23	n_y
6	5	3	-	2	-	-	10
16	7	10	1	2	-	-	20
26	2	18	15	20	-	-	55
36	-	-	30	26	-	-	56
46	-	-	-	19	12	-	31
56	-	-	-	-	21	7	28
n_x	14	31	46	69	33	7	$n = 200$

18.

$y \backslash x$	45	50	55	60	65	70	75	n_y
30	-	-	-	-	8	2	1	11
35	-	1	6	22	33	10	3	75
40	1	2	10	48	37	8	1	107
45	-	1	12	11	2	-	-	26
50	-	2	1	1	-	-	-	4
55	-	-	1	-	-	-	-	1
n_x	1	6	30	82	80	20	5	$n = 224$

19.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
6	3	5	10	2	-	20
9	-	-	7	12	-	19
12	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

20

$y \backslash x$	0	4	8	12	16	$n_{\cdot}$
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
19	-	3	22	2	-	27
25	-	-	-	15	-	15
31	-	-	-	-	21	21
$n_{\cdot}$	21	18	23	17	21	$n=100$

21.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	$n_{\cdot}$
10	20	5	-	-	-	25
20	7	15	3	1	-	26
30	-	3	17	4	-	24
40	-	-	8	13	7	28
50	-	-	-	5	42	47
$n_{\cdot}$	27	23	28	23	49	$n=150$

22.

$y \backslash x$	150	165	175	185	195	$n_{\cdot}$
50	2	2	-	-	-	4
70	-	2	-	-	-	2
90	-	-	9	2	1	12
110	-	-	2	7	9	18
130	-	-	-	3	11	14
$n_{\cdot}$	2	4	11	12	21	$n=50$

23.

$y \backslash x$	20	25	30	35	40	$n_{\cdot}$
10	3	7	-	-	-	10
16	-	12	5	1	-	18
20	-	-	6	1	1	8
24	-	-	-	3	1	4
28	-	-	-	-	1	1
$n_{\cdot}$	3	19	11	5	3	$n=41$

24.

$y \backslash x$	25	35	45	55	65	$n_{\cdot}$
2	5	10	-	-	-	15
4	-	13	10	10	-	33
6	-	-	18	16	-	34
8	-	-	-	2	2	4
10	-	-	-	-	1	1
$n_{\cdot}$	5	23	28	28	3	$n=87$

25.

$y \backslash x$	10	20	30	40	50	$n_{\cdot}$
10	7	17	10	-	-	34
20	-	23	12	5	-	40
30	-	10	5	3	2	20
40	-	-	2	2	1	5
50	-	-	-	-	1	1
$n_{\cdot}$	7	50	29	10	4	$n=100$

26.

$y \backslash x$	5	15	25	35	45	$n_{\cdot}$
2	3	14	-	-	-	17
12	-	16	18	-	-	34
22	-	-	20	10	11	41
32	-	-	-	6	2	8
$n_{\cdot}$	3	30	38	16	13	$n=100$

Adabiyotlar

1. Abdushukurov A.A. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. 2010.
2. Adirov T.X., Xamdamov I.M., Shomansurova F. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to'plami. T.: «Iqtisod - Moliya», 2013.
3. Гмурман В.Э. Теория вероятностей и математическая статистика.
М.: «Юрай» 2011 г.-479с
4. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Ташкент, «Ўқитувчи», 1978
5. Гмурман В.Е. Руководства к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Выйсшая школа, 1979.
6. Писменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004.
6. Rasulov A. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. "Turon-Bo'ston". 2012 .
7. Rasulov A.S., Raimova G.M., Sarimsakova X.K. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: 2006.
8. Сирожиддинов С.Х., Маматов М. Эҳтимоллар назарияси курси. Т. Ўқитувчи, 1980.
9. Соатов Ё.У. Олий математика. 2-жилд.-Т.: Ўзбекистон, 1994.
10. Соатов Ё.У. Олий математика. 3-жилд.-Т.: Ўзбекистон, 1996.
11. Farmonov SH. va boshq. "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika". T.: "Turon-Bo'ston", 2012
12. Fayzullayeva S.F.Ehtimollar nazariyasidan masalalar to'plami. T.:2006.
- 13.Xashimov A.R., Mamurov E.N., Adirov T.X.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O'quv qo'llanma. T. : 2013.
14. Adirov T.X., Mamurov E.N. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O'quv qo'llanma. Toshkent, 2005.

20-BOB.

KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

20.1-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiya.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi

20.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Elementlari kompleks sonlardan iborat ikkita D va E ($D, E \subset C$) to'plamlar berilgan bo'lsin.

20.1.1—ta'rif. Agar $\forall z \in D$ ($z = x + iy$; $x, y \in R, i^2 = -1$) songa biror qonun (qoida) bo'yicha tayin bir $w = u + iv$ ($w \in E$; $u, v \in R$) son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda E to'plamda bir qiymatli *kompleks o'zgaruvchili funksiya* ($KO'F$) aniqlangan deyiladi va $u, w = f(z)$ kabi yoki $f: D \rightarrow E$ kabi belgilanadi.

20.1.2—ta'rif. Agar har bir $z \in D$ bir nechta w qiymat ($w \in E$) mos qo'yilsa, u holda $w = u + iv$ funksiya ko'p qiymatli funksiya deyiladi. Bunda D to'plam (soha¹) funksiyaning *aniqlanish sohasi*, $\{w | w = f(z), z \in D\} = E_1$ to'plam ($E_1 \subseteq E$) (soha) esa funksiyaning *qiymatlari to'plami* (sohasi) deyiladi.

$w = f(z)$ funksiyaning ushbu $u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ ko'rinishda yozish mumkin, bunda

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} w, \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} w, \quad (x, y) \in D.$$

Shunday qilib, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning berilishi ikkita haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar ($u = u(x, y), v = v(x, y)$) ning berilishiga ekvivalent ekan.

20.1.3-misol. Ushbu $w = z^2$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Agar kompleks tekislikdagi E to'plam quyidagi ikki shartni

1) E to'plam faqat ichki nuqtalardan iborat,

2) E ning har qanday ikki nuqtasini siniq chiziq bilan birlashtirganda bu siniq chiziq butunlay E da yotsa, u holda E to'plam *soha* deyiladi.

Yechilishi $w = u + iv$, $z = x + iy$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda berilgan funksiyani $u + iv = (x + iy)^2$ ko'rinishda yozamiz. Bundan

$$u + iv = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = C$ – barcha kompleks sonlardan iborat.

20.2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti. $w = f(z)$ -bir qiymatli funksiya D sohada aniqlangan bo'lib, z_0 nuqta D ning limit nuqtasi bo'lsin, ya'ni z_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\delta(z_0) = \{z \in D : |z - z_0| < \delta, \delta > 0\}$ atrofida D ga qarashli (z_0 dan boshqa) hech bo'lmaganda bitta nuqtasi bo'lsin.

20.2.1-ta'rif. Agar tayin A kompleks son va istalgan kichik $\varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta(A, \varepsilon, z_0) > 0$ topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z (z \neq z_0)$ lar uchun $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A son $w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A. \quad (20.2.2)$$

20.2.1 – ta'rifni qisqacha quyidagicha ham yozish mumkin :

$$\exists A \in C, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(A, \varepsilon, z_0) > 0, \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Agar A limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x, y) = u_0 \text{ va } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 \quad (A = u_0 + i \cdot v_0)$$

limitlar ham mavjud bo'ladi. Bunda aksincha tasdiq ham o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiqdan haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarning limitlari ustidagi arifmetik amallarni KO'Flarning limitlariga ko'chirish mumkinligi kelib

chiqadi. Agar $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar $z_0 \in D$ nuqtada limitlarga ega bo'lsa, u holda

$$1) \lim_{z \rightarrow z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \pm c_2 \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z),$$

bunda c_1, c_2 — o'zgarmas sonlar;

$$2) \lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z),$$

$$3) \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right) = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)}, \text{ bunda } \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \neq 0.$$

20.3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. $w = f(z)$ funksiya D sohada aniqlangan bir qiymatli funksiya bo'lib, $z_0 \in D$ bo'lsin.

20.3.1—ta'rif. Agar

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (20.3.2)$$

bo'lsa, u holda $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Bu ta'rifni ushbu ko'rinishda ham ta'riflash mumkin:

20.3.3—ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ kichik son uchun shunday $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sonni topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha z lar (z_0 ham) uchun $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Yuqorida keltirilgan 20.2.1— va 20.3.1—ta'riflarda (20.2.2) va (20.3.2) ni solishtirish natijasida $w = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $A = f(z_0)$ bo'lishi kerakligini ko'ramiz, ya'ni funksiya bir tomondan z_0 nuqtada chekli A limitga ega bo'lishi va ikkinchi tomondan A son funksiyaning z_0 nuqtadagi $f(z_0)$ xususiy qiymatiga teng bo'lishi shart ekan.

20.3.1 va 20.3.3 –ta’riflarning geometrik ma’nosi quyidagicha: agar $U_\delta(z_0)$ atrof ichidagi z nuqtalarga mos kelgan $w = f(z)$ nuqtalar $U_\epsilon(f(z_0))$ atrof ichida joylashgan bo’lsa, $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo’ladi.

$w = f(z)$ funksiyani z_0 nuqtada uzluksizligini boshqacha ham ta’riflash mumkin:

20.3.4–ta’rif. Agar funksiya argumentining z_0 nuqtadagi cheksiz kichik Δz orttirmasiga funksiyani cheksiz kichik $\Delta f(z)$ orttirmasiga mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f(z) = 0$$

bo’lsa, u holda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo’lsa, u holda $f(z)$ funksiya D sohada *uzluksiz* deyiladi.

20.4. Uzluksiz funksiyalarning xossalari. $w = f(z)$ funksiya D sohada berilgan bo’lsin.

1°. Agar $w = f(z)$ funksiya $\bar{D}$ –yopiq sohada uzluksiz bo’lsa, u holda u shu sohada chegaralangan bo’ladi, ya’ni shunday o’zgarma $M > 0$ soni mavjud bo’lib, $\bar{D}$ sohadagi hamma z larda

$$|f(z)| \leq M$$

bo’ladi.

2°. Agar $w = f(z)$ funksiya $\bar{D}$ sohada uluksiz bo’lsa, u holda $|f(z)|$ funksiya shu sohada eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya’ni $\exists z_1, z_2 \in \bar{D}$ topiladiki, $\forall z \in \bar{D}$ lar uchun

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$$

munosabat o’rinli bo’ladi.

3°. Agar $w = f(z)$ funksiya $\bar{D}$ sohada uluksiz bo’lsa, u holda u shu sohada tekis uluksiz bo’ladi, ya’ni $\forall \epsilon > 0$ son uchun $\delta(\epsilon) > 0$ topilib, $|z'' - z'| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\bar{D}$ sohadagi ixtiyoriy ikkita z'' va z' nuqtalar uchun

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

20.2-§. Kompleks o'zgaruvchili asosiy elementar funksiyalar

20.5. Ko'rsatkichli funksiya

20.5.1—ta'rif. Ko'rsatkichli $w = e^z$ funksiya ushbu

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) \quad (20.5.2)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda $y=0$ desak, u holda $e^z = e^x$, ya'ni $z=x$ bo'lganda, haqiqiy o'zgaruvchili ko'rsatkichli funksiyaga teng bo'ladi.

Ko'rsatkichli funksiya ushbu

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

xossaga ega. Haqiqatan ham, kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasiga asosan

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \cdot \sin(y_1 + y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \cdot \sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Xuddi shunday

$$(e^z)^n = e^{nz}, \text{ bunda } n \in \mathbb{N}$$

ekanligi ko'rsatiladi.

(20.5.2) formulada $x=0, y=\varphi$ deb olinsa, u holda ushbu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Eyler formulasiga ega bo'lamiz. Xususiyl holda, bu formula yordamida kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini topamiz:

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.$$

$|e^z| = e^x, e^x \neq 0$ ni e'tiborga olsak, u holda ko'rsatkichli e^z funksiya nolga aylanmasligi, ya'ni $e^z \neq 0$ degan xulosani chiqarish mumkin.

(20.5.2) dan $\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (e^z) = 0, \lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} (e^z) = \infty$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

Ko'rsatkichli e^z funksiya davriy funksiya bo'lib, uning eng kichik musbat davri $2\pi i$ ga teng. Haqiqatan ham, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = e^z$.

Ta'kidlaymizki, e^z funksiyaning qiymatlari sohasi kompleks sonlar to'plamidan iborat. Shunga asosan, z ning shunday qiymatlarini topish mumkinki, unda $e^z < 0$ bo'ladi. Masalan, $z = \pi \cdot i \Rightarrow e^z = e^{\pi i} = -1 < 0$.

20.6. Logarifmik funksiya.

20.6.1—ta'rif. Ushbu

$$e^w = z \quad (20.6.2)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday w son z ning *e* asosli logarifmi deyiladi va u

$$w = \operatorname{Ln}(z) \quad (20.6.3)$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar w va z larni $w = u + i \cdot v, z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$ ko'rinishda yozsak, u holda (20.6.2) dan ushbu

$$e^{u+iv} = r e^{i\phi} \text{ yoki } e^u \cdot e^{i \cdot v} = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa $e^u = r$ yoki

$$u = \ln r, \quad v = \phi + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Demak,

$$w = u + i \cdot v = \ln r + i \cdot (\phi + 2\pi k) \quad (20.6.4)$$

bo'lib, (20.6.3) ga ko'ra,

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z), \quad (20.6.5)$$

bunda $r = |z|$, $\varphi + 2k\pi = \text{Arg}(z)$. (20.6.4) da $k = 0$ bo'lgan holni, ya'ni $w = \ln r + i \cdot \varphi$ ga logarifmning bosh qiymati deyiladi va $\ln z$ orqali belgilanadi:

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi.$$

Agar z musbat haqiqiy son bo'lsa, u holda $\arg(z) = 0$, $\ln z = \ln|z|$.

(20.6.5) dan logarifmning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

$$2^0. \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2).$$

$$3^0. \ln(z^n) = n \cdot \ln(z).$$

$$4^0. \ln(\sqrt[n]{z}) = \frac{1}{n} \cdot \ln(z).$$

26.6.6-misol. Ushbu $\ln(-1)$, $\ln(-i)$, $\ln(2i)$ larni hisoblang.

Yechilishi. (20.6.5) formulaga asosan,

$$\ln(-1) = \ln 1 + i \cdot (\pi + 2k\pi) = i \cdot \pi(2k+1), \quad \ln(-1) = i \cdot \pi \text{ va}$$

$$\ln(2i) = \ln 2 + i \cdot \frac{\pi}{2} \text{ bo'ladi.}$$

20.7. $w = z^n$ darajali funksiya. Agar n – natural son bo'lsa, u holda $w = z^n$ darajali funksiyaning Muavr formulasidan foydalanib ushbu

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \Rightarrow w = z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

ko'rinishda yozib olsak, u bir qiymatli funksiya bo'ladi.

Agar $n = \frac{1}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$) bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} w &= z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} = \\ &= \sqrt[q]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\arg z + 2k\pi}{q} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\arg z + 2k\pi}{q} \right) \right), k = 0, 1, \dots, q-1 \end{aligned} \quad (20.7.1)$$

Demak, (20.7.1) ga ko'ra $w = z^{\frac{1}{q}}$ funksiya ko'p qiymatli funksiya bo'ladi.

Agar $n = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}$) bo'lsa, u holda u ushbu

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \left(z^{\frac{1}{q}} \right)^p = \sqrt[q]{|z|^p} \left(\cos \left(\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} \right) \right), k = 0, 1, 2, \dots, q-1$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ravshanki, $w = z^{\frac{p}{q}}$ - ko'p qiymatli funksiya.

$w = z^{\alpha}$ ($\alpha = a + i \cdot b$) funksiya ushbu $w = z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \text{Ln}(z)}$ ($z \neq 0$) ko'rinishida aniqlanadi va u ko'p qiymatli funksiya bo'ladi.

20.8. Trigonometrik funksiyalar. Kompleks $z = x + i \cdot y$ o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar quyidagilar:

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos z = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

$z = x$ ($y = 0$) bo'lganda, haqiqiy o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalarga keltiriladi:

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} (\cos x + i \cdot \sin x - (\cos x - i \cdot \sin x)) = \frac{1}{2i} \cdot 2i \cdot \sin x = \sin x.$$

Kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar haqiqiy o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalarning xossalalariga o'xshagan xossalarga ega. Masalan,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z, \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \cos(-z) = \cos z, \sin(-z) = -\sin z, \operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z$$

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

va hokazo.

20.9. Giperbolik funksiyalar. Bu funksiyalar quyidagicha aniqlanadi:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (20.9.1)^2$$

Giperbolik va trigonometrik funksiyalar orasidagi bog'lanishni topish uchun (20.9.1) da z ni $i \cdot z$ ga almashtirib chiqish yetarli:

$$\begin{aligned} \sinh(i \cdot z) &= i \cdot \sin z \Rightarrow \sin z = -i \cdot \sinh(i \cdot z) \\ \cosh(i \cdot z) &= \cos z, \quad \tanh(i \cdot z) = i \cdot \operatorname{tg} z, \quad \coth(i \cdot z) = -i \cdot \operatorname{ctg} z. \end{aligned}$$

Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $\sinh z$ va $\cosh z$ giperbolik funksiyalar $2\pi \cdot i$ davrli funksiyalar, $\tanh z$ va $\coth z$ funksiyalar esa $\pi \cdot i$ davrli funksiyalardir.

20.10. Teskari trigonometrik va teskari giperbolik funksiyalar. Ushbu

$z = \sin w$ funksiya berilgan bo'lsin. Bunda w o'zgaruvchi berilgan funksiyaga teskari funksiya bo'lib, u z ning *arksinusi* deyiladi va

$$w = \operatorname{Arc} \sin z$$

kabi yoziladi. Xuddi shunday

$$z = \cos w, z = \operatorname{tg} w, z = \operatorname{ctg} w$$

funksiyalar berilgan bo'lsa, ularga teskari bo'lgan funksiyalar mos ravishda

$$w = \operatorname{Arc} \cos z, w = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} z, w = \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} z$$

kabi yoziladi.

Sinusning ta'rifiga asosan

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{2iw} - 2i \cdot e^{iw} - 1 = 0,$$

bundan

Ba'zi adabiyotlarda $\sinh z$, $\cosh z$, $\tanh z$ va $\coth z$ funksiyalarni mos ravishda $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ kabi belgilangan.

$$e^{i \cdot w} = i \cdot z + \sqrt{(i \cdot z)^2 + 1} \Rightarrow e^{i \cdot w} = i \cdot z + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow i \cdot w = \operatorname{Ln}(i \cdot z + \sqrt{1 - z^2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow w = \frac{1}{i} \cdot \operatorname{Ln}(i \cdot z + \sqrt{1 - z^2}) \Rightarrow w = -i \cdot \operatorname{Ln}(i \cdot z + \sqrt{1 - z^2}).$$

Shunday qilib, z ning qiymati berilganda unga mos kelgan sinus trigonometrik funksiyaning qiymatini topadigan ushbu

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \cdot \operatorname{Ln}(i \cdot z + \sqrt{1 - z^2})$$

formulaga ega bo'ldik. (7) ni hisobga olsak $w = \operatorname{Arcsin} z$ - ko'p qiymatli funksiya bo'ladi.

Xuddi shunday

$$\operatorname{Arccos} z = -i \cdot \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1 - z^2}), \operatorname{Arctgz} = -\frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{i - z}{i + z}\right), z \neq \pm i,$$

$$\text{aniqlanadi. } \operatorname{Arcctgz} = \frac{i}{2} \cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i}\right), z \neq \pm i$$

20.3-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallash.

Eyler - Dalamber sharti

20.11. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallash. Kompleks tekislikdagi biror D sohada bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, $z_0 \in D$ bo'lsin.

20.11. 1-ta'rif. Agar ushbu

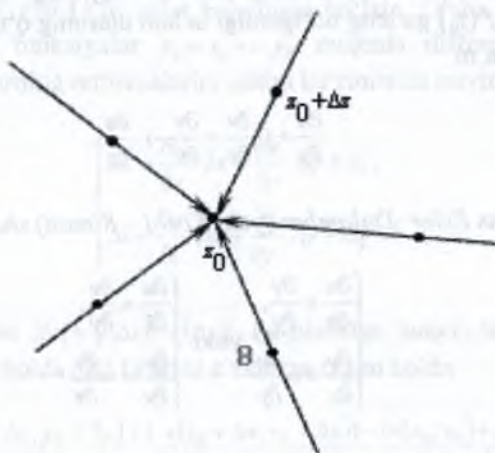
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (20.11.2)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va u qisqacha $w', f'(z_0), \frac{dw}{dz}, \frac{df}{dz}$ kabi belgilanadi.

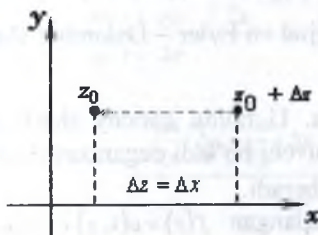
Ta'kidlaymizki, (20.11.2) tenglikda $z_0 + \Delta z$ nuqta z_0 nuqtaga har qanday yo'l (qonun) bilan yaqinlashtirilganda $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbat faqat yagona aniq limitga intilishi ko'zda tutiladi.

20.11. 3-ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda uni z_0 nuqtada *differensiallanuvchi* (yoki *monogen*) deyiladi

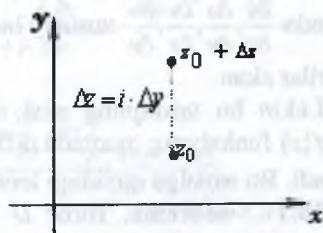
Ta'rifdan ko'rinadiki, agar funksiya z_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa (20.11.2) limit mavjud bo'lib, u $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$ ning qanday yo'l bilan nolga intilishiga bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun $z_0 + \Delta z$ nuqtani Ox o'qiga parallel bo'lgan yo'l bilan z_0 nuqtaga intiltirganimizda $\Delta y = 0$ (20.2-chizmaga qarang), Oy o'qiga parallel yo'l bilan z_0 nuqtaga intiltirganimizda esa $\Delta x = 0$ deb olishimiz mumkin bo'ladi (20.3-chizmaga qarang).



20.1-chizma.



20.2- chizma.



20.3- chizma

Demak, (20.11.2) dan $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$ deb olinganda $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi uchun ushbu

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (20.11.4)$$

formulani hosil qilamiz. Xuddi shunday $\Delta x = 0, \Delta z = i \cdot \Delta y$ deb olinganda

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{i \cdot \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{i \cdot \Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20.11.5)$$

ni hosil qilamiz. (20.11.4) bilan (20.11.5) ning chap tomonlari ta'rifga asosan bir xil $f'(z_0)$ ga teng bo'lganligi uchun ularning o'ng tomonlari ham teng bo'ladi, ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Bundan, esa *Eyler–Dalamber* (yoki *Koshi – Riman*) sharti deb ataluvchi

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (20.11.6)$$

shartga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (20.11.6) zaruriy shart kelib chiqar ekan, ya'ni $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ nuqtada $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ xususiy hosilalar mavjud va Eyler – Dalamber sharti bajarilar ekan.

Lekin bu tasdiqning aksi o'rinli emas. U holda qanday shartlarda $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi degan savol kelib chiqadi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

20.11.7–teorema. Biror D sohada aniqlangan $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ funksiyaning shu sohaga tegishli z_0 nuqtasida differensiallanuvchi bo'lishi

uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishlari hamda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriy shart. $w = f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (20.11.6) shartning bajarilishini yuqorida ko'rsatdik, ya'ni zaruriy shartni isbotladik. Endi yetarli shartni isbotlaymiz.

Yetarli shart. (20.11.6) shart bajarilgan bo'lsin. O'sha shartga ko'ra $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun ularning orttirmalarini ushbu ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1, \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_2, \end{cases} \quad (20.11.8)$$

bunda α_1 va α_2 lar $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik ifodalar. U holda (20.11.8) ni e'tiborga olgan holda

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{(u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) + i \cdot v(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)) - (u(x_0; y_0) + i \cdot v(x_0; y_0))}{\Delta x + i \cdot \Delta y} = \\ &= \frac{\Delta u + i \cdot \Delta v}{\Delta x + i \cdot \Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \right) + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_2 \right)}{\Delta x + i \cdot \Delta y} = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta y + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y \right)}{\Delta x + i \cdot \Delta y} + \frac{\alpha_1 + i \cdot \alpha_2}{\Delta x + i \cdot \Delta y}. \end{aligned}$$

Bu tenglikning o'ng tomonida (20.11.6) ga asosan, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ni $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ga, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ni $\frac{\partial u}{\partial x}$ ga almashtirish natijasida

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta y + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta y \right)}{\Delta x + i \cdot \Delta y} + \alpha_3, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_1 + i \cdot \alpha_2}{\Delta x + i \cdot \Delta y}$$

ya'ni

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \cdot \Delta y)}{\Delta x + i \cdot \Delta y} + \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3,$$

bunda $\alpha_3 \rightarrow 0$ ga nisbatan cheksiz kichik ifoda. Oxirgi tenglikdan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$$

mavjud va $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, teorema to'liq isbot bo'ldi.

Eyler-Dalamber shartini hisobga olgan holda $f(z)$ differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini ushbu

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

formulalar bilan topish mumkin.

Haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning differensiallash qoidalari KO'F lar uchun ham o'rinni bo'ladi: agar $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar biror z nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$1. (f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$$

$$2. (f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z),$$

$$3. \left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}, \quad (f_2(z) \neq 0),$$

4. Agar $\varphi(z)$ funksiya z nuqtada, $f(w)$ funksiya esa $w = \varphi(z)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $(f(\varphi(z)))' = f'_\varphi(\varphi) \cdot \varphi'_z(z)$ bo'ladi.

5. Agar $f(z)$ funksiya z nuqtada, $f^{-1}(w)$ funksiya mavjud va $w = f(z)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'}$ bo'ladi, bunda

$(f^{-1}(w))' \neq 0$ va $f^{-1}(w)$ funksiya $f(z)$ ga teskari funksiya.

Ta'kidlaymizki, kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida differensiallanuvchi bo'ladi.

20.4-§. Analitik funksiyalar. Differensial

KO'Flarning asosiy fundamental tushunchalaridan biri analitik funksiya tushunchasidir.

20.12. Analitik funksiya.

20.12. 1-ta'rif. Agar bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada va uning atrofida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u z_0 nuqtada *analitik* deyiladi.

20.12. 2-ta'rif. Agar bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida analitik bo'lsa, u holda u D sohada *analitik (golomorf)* deyiladi.

20.12.3-ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, uning atrofida differensiallanuvchi bo'lmasa, u holda u z_0 nuqtada *monogen* deyiladi.

20.12.4-ta'rif. Bir qiymatli $w = f(z)$ funksiyaning D sohadagi analitik bo'lgan nuqtalari funksiyaning *to'g'ri (regulyar) nuqtalari* deyiladi.

20.12.5-ta'rif. Bir qiymatli $w = f(z)$ funksiya o'zining aniqlanish sohasidagi $w = f(z)$ funksiya z nuqtada analitik bo'lsin. u holda

$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$ limit mavjud. Bundan $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$ bo'ladi, bunda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha \rightarrow 0$. U holda

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z \quad (20.12.6)$$

deb yozish mumkin. Agar $f'(z) \neq 0$ bo'lsa, unda (20.12.6) ning birinchi qo'shiluvchisi $\Delta z \rightarrow 0$ da Δz tartibli cheksiz kichik ifoda; ikkinchi qo'shiluvchisi esa Δz ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik ifoda. Birinchi qo'shiluvchi $w = f(z)$ funksiya orttirmasining bosh qiymatini tashkil etadi.

20.12.6-ta'rif. $w = f(z)$ funksiya orttirmasining bosh qiymati, ya'ni $f'(z) \cdot \Delta z$ ga uning z nuqtadagi *differensial* deyiladi va $dw = f'(z) \cdot \Delta z$ kabi yoziladi.

$w = z$ bo'lganda $dz = z' \cdot \Delta z = \Delta z$ ni e'tiborga olganda $dw = f'(z) \cdot dz$ deb yozish mumkin. Bundan $\frac{dw}{dz} = f'(z)$ kelib chiqadi.

20.12.7-eslatma: Agar $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ funksiya D sohada analitik bo'lsa, u holda $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar Laplas tenglamasi deb ataluvchi ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham Eyler–Dalamber tengligining birinchisini y bo'yicha, ikkinchisini esa x bo'yicha differensiallash natijasida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

bo'lib, bundan $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ kelib chiqadi. Bu holda $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar *garmonik funksiyalar* deb ataladi.

20.12.8-misol. $w = z^2$ funksiya analitik funksiya bo'ladimi? Agar analitik funksiya bo'lsa, uning hosilasini toping.

Yechilishi. $w = z^2$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini topamiz:

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \Rightarrow \operatorname{Re}(w) = u = x^2 - y^2, \operatorname{Im}(w) = v = 2xy.$$

Endi Eyler – Dalamber shartini tekshirib ko'ramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Bundan (20.11.6) analitiklik shartining bajarilishiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, berilgan funksiya butun kompleks tekisligining barcha nuqtalarida analitik ekan. Uning hosilasini (20.11.6) formulalardan foydalanib topamiz:

$$(z^2)' = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + i \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2x + i \cdot 2y = 2z.$$

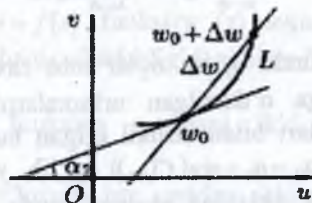
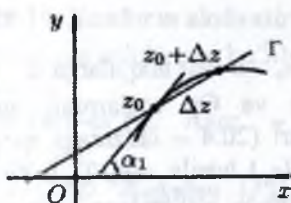
Endi berilgan funksiyaning hosilasini **20.11. 1**– ta’rifga asosan topamiz:

$$w' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z \cdot \Delta z - (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

20.13. Hosila argumentining va modulining geometrik ma’nosi.

D) Hosila modulining geometrik ma’nosi.

$w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik bo‘lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo‘lsin. $w = f(z)$ funksiya (z) tekisligidagi z_0 nuqtani (w) tekisligidagi $w_0 = f(z_0)$ nuqtaga akslantirsin. z_0 nuqtaning atrofidan olingan ixtiyoriy $z_0 + \Delta z$ nuqta biror uzluksiz Γ chiziq bo‘ylab z_0 nuqtaga intilsin. U holda bu nuqtaga mos $w_0 + \Delta w$ nuqta Γ chiziqning tasviri bo‘lgan L uzluksiz chiziq bo‘ylab w_0 nuqtaga intilsin (20.4 – chizma qarang).



20.4- chizma.

Hosilaning ta’rifiga ko‘ra

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

bundan

$$k = |f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

bo'lib, $|\Delta z| = |z - z_0|$ -miqdor z_0 va $z_0 + \Delta z$ nuqtalar orasidagi cheksiz kichik masofa, $|\Delta w|$ -miqdor esa w_0 va $w_0 + \Delta w$ nuqtalar orasidagi cheksiz kichik masofa. $|f'(z_0)|$ -ikkita Δw va Δz cheksiz kichik miqdorlar nisbatining limiti. Bu limit ($f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik) Γ chiziqni tanlashga bog'liq emas.

Demak, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$ -o'zgarmas, ya'ni z_0 nuqtadan o'tuvchi barcha chiziqlar uchun cho'zilish koeffitsiyenti bir xil bo'ladi. $|f'(z_0)|$ -qiymat (kattalik) $w = f(z)$ aklantirishning $|f'(z_0)| > 1$ bo'lganda cho'zilish koeffitsiyenti, $|f'(z_0)| < 1$ bo'lganda esa qisilish koeffitsiyenti deyiladi.

Shunday qilib hosila modulining geometrik ma'nosi quyidagicha:

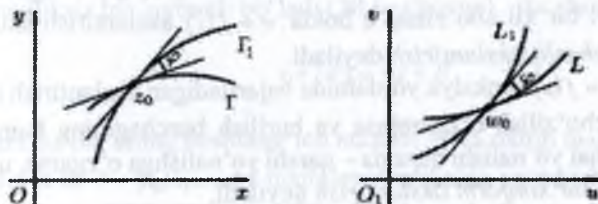
1^o. Analitik funksiya yordami bilan bajariladigan akslantirish $f'(z)$ hosila nolga teng bo'lmagan barcha nuqtalarda o'zgarmas cho'zilishga ega.

II) Hosila argumentining geometrik ma'nosi.

z_0 nuqtada hosila argumenti uchun

$$\begin{aligned} \phi &= \arg(f'(z_0)) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1 \end{aligned}$$

bo'lib, bunda α_1 va α_2 lar mos ravishda z_0 va w_0 nuqtalarga Γ va L chiziqlarga o'tkazilgan urinmalarning Ox va Oy o'qlarning musbat yo'nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari (20.4 - chizmaga qarang). Bundan $\alpha_2 = \alpha_1 + \arg(f'(z_0))$ bo'lib, ya'ni $f'(z_0)$ hosila $\arg(f'(z_0))$ ning Γ chiziqni L chiziqqa akslantirganda w_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning yo'nalishini hosil qilish uchun z_0 nuqtaga o'tkazilgan urinmaning yo'nalishini $\arg(f'(z_0))$ burchakka burish kerak ekan degan xulosa kelib chiqadi.



20.5- chizma.

$w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik ($f'(z_0) \neq 0$) bo'lgani uchun $\arg(f'(z_0))$ burchak z_0 nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlar uchun bir xil bo'ladi, ya'ni z_0 va w_0 nuqtalardan o'tuvchi boshqa Γ va L chiziqlar uchun ham $\arg(f'(z_0)) = \alpha_2^* - \alpha_1^* = \varphi$ bo'ladi. Shunday qilib (z) tekisligidagi z_0 nuqtada Γ va Γ_1 chiziqlar tashkil qilgan $\arg(f'(z_0)) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2^* - \alpha_1^* = \varphi$ burchak ularning (w) tekisligidagi tasvirlari bo'lgan L va L_1 chiziqlarning w_0 nuqtada tashkil qilgan burchagi ham $\varphi = \arg(f'(z_0))$ burchakka teng bo'lar ekan (20.5 – chizma), ya'ni $w = f(z)$ analitik funksiya yordami bilan D sohani D_1 ga akslantirganda z_0 nuqtadan o'tuvchi Γ, Γ_1 chiziqlarning hammasi bir xil $\varphi = \arg(f'(z_0))$ burchakka burilar ekan. Shuning uchun ham Γ, Γ_1 chiziqlar orasidagi burchaklar o'zgarmay qoladi.

Demak, hosila argumentining geometrik ma'nosi quyidagicha bo'ladi:

2^o. Analitik funksiya yordami bilan bajariladigan akslantirish $f'(z)$ hosila nolga teng bo'lmagan barcha nuqtalarda burchakni saqlash xossasiga ega.

20.14. Konform akslantirish. $w = f(z)$ funksiya (z) tekisligidagi biror D sohada aniqlangan bo'lib, u D sohani (w) tekisligidagi biror E sohaga akslantirsin.

20.14.1–ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa:

1) $\forall z_0 \in D$ nuqtadan ($f'(z_0) \neq 0$) o'tuvchi har qanday ikkita chiziq orasidagi burchakning miqdori ham, yo'nalishi ham o'zgarmasa;

2) z_0 nuqtadan o'tuvchi hamma chiziqlarning z_0 ga istalgancha yaqin turgan yoylari bir xil cho'zilsa, u holda $w = f(z)$ akslantirish shu nuqtada *konform (o'xshash) akslantirish* deyiladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish natijasida z nuqtadagi cho'zilish o'zgarmasa va burilish burchagining ham miqdori o'zgarmay faqat yo'nalishi qarama – qarshi yo'nalishga o'zgarsa, u holda bu akslantirish *II tur konform akslantirish* deyiladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada analitik hamda $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $w = f(z)$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish z_0 nuqtada konform bo'lib, $\arg(f'(z_0))$ burilish burchagini, $|f'(z_0)|$ esa z_0 nuqtadagi cho'zilish koeffitsiyentini bildiradi.

20.14.2-misol. $w = z^2$ funksiya $z = 0$ nuqtadan tashqari hamma nuqtada konform akslantiradi. $z = 0$ nuqtada esa $f'(0) = 0$ bo'lgani uchun akslantirish konform bo'lmaydi.

Agar $f(z)$ funksiya analitik bo'lsa, $w = \overline{f(\overline{z})}$ II tur konform akslantirish bo'ladi. Haqiqatan ham $w = \overline{f(\overline{z})}$ akslantirishni ikkita ketma – ket akslantirish yordamida amalga oshirish mumkin: $\zeta = f(z) \rightarrow w = \overline{\zeta}$.

20.14.3-misol. Ushbu $w = z^2$ analitik funksiya yordamida bajariladigan akslantirishda quyidagi nuqtalarning har birida ro'y beradigan φ burilish burchagi va k cho'zilish koeffitsiyenti aniqlansin: a) $z = -\frac{1}{4}$; b) $z = 1 + i$

Yechilishi. a) $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) \neq 0 \Rightarrow$ cho'zilish koeffitsiyenti $k = \left|f'\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{2}$, burilish burchagi $\varphi = \arg\left(f'\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \pi$.

b) $f'(1+i) = 2 \cdot (1+i) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow 1+i$ nuqtada cho'zilish koeffitsiyenti $k = |f'(1+i)| = 2\sqrt{2}$; burilish burchagi $\varphi = \arg(f'(1+i)) = \frac{\pi}{4}$.

20.5-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning integrallash

20.15. Integralning ta'rif. (z) tekisligidagi biror D sohada uzluksiz bir qiymatli $w = f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

U holda D sohaning ichidan olingan ixtiyoriy Γ -silliqlik chiziqda³ ham $f(z)$ funksiya uzluksiz bir qiymatli bo'ladi (20.6- chizma). Bu chiziq tenglamasi

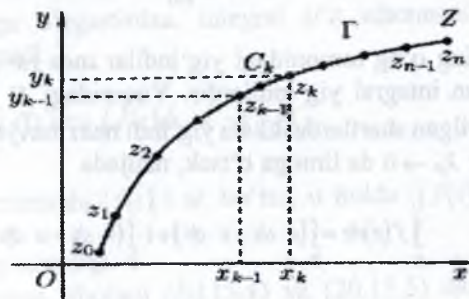
$$z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (20.15.1)$$

ko'rinishda bo'lib, uning boshlang'ich nuqtasi z_0 va oxirgi nuqtasi z bo'lsin. Γ -chiziqni n ta $P = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ nuqtalar yordamida yo'nalishi z_0 dan z ga qarab yo'nalgan $\overline{z_0 z_1}, \overline{z_1 z_2}, \dots, \overline{z_{n-1} z_n}$ yoylarga bo'lamiz. Bu yoylarning $\forall \overline{z_{k-1} z_k} (k = 1, 2, \dots, n)$ bo'lagidan $\forall \xi_k$ nuqtani olib, ushbu

$$\sigma_P(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta z_k \quad (20.15.2)$$

integral yig'indini tuzamiz. Aslida bu yig'indi Γ chiziqni bo'laklarga bo'lish qonuniga va $\overline{z_{k-1} z_k}$ yoydan ξ_k nuqtani tanlash qonuniga bog'liq.

Agar P bo'linish nuqtalarini to'g'ri chiziqlar orqali tutashtirsak, u holda Γ egri chiziq ichiga chizilgan siniqlik chiziqlar sistemasi hosil bo'ladi. Γ sillikli chiziq bo'lgani uchun z_k va z_{k-1} nuqtalarni tutashtiruvchi vatarning uzunligi nolga intilganda, ya'ni $|\Delta z_k| \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda uning qarshisidagi yoy uzunligi ham nolga intiladi. Shu vatarlarning eng uzunini $\lambda_P = \max_k |\Delta z_k|, k = \overline{1, n}$ deb belgilaymiz.



20.6- chizma.

³ Agar $z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$ chizig'i har bir nuqtasida uzluksiz urinmaga ega bo'lsa, ya'ni $\forall t \in [\alpha, \beta]: \exists z'(t) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu chiziq *silliqlik chiziq* deyiladi.

20.15.3—ta’rif. Agar $\lambda_p \rightarrow 0$ da (20.15.2) integral yig’indi Γ chiziqni bo’lish va undan $\xi_k, k=\overline{1, n}$ nuqtalarni tanlash qonuniga bog’liq bo’lmasdan biror chekli limitga ega bo’lsa, shu limit $f(z)$ funksiyadan Γ chiziq bo’ylab olingan integral deyiladi va u

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta z_k \quad (20.15.4)$$

kabi belgilanadi.

Endi agar Γ —silliqlik chiziq, $f(z)$ esa bir qiymatli uzluksiz bo’lsa, u holda (20.15.4) integral mavjud bo’lishini ko’rsatamiz:

Haqiqatan ham, $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y), z = x + i \cdot y, \xi_k = \tilde{x}_k + i \cdot \tilde{y}_k$ larni e’tiborga olsak, u holda

$$f(\xi_k) = u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + i \cdot v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k), \Delta z_k = x_k + i \cdot y_k - (x_{k-1} + i \cdot y_{k-1}) = \Delta x_k + i \cdot \Delta y_k.$$

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n ((u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) + i \cdot v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)) \cdot (\Delta x_k + i \cdot \Delta y_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n (u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k - v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k) + i \cdot \sum_{k=1}^n (v(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta x_k + u(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \Delta y_k). \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikning o’ng tomonidagi yig’indilar mos ravishda egri chiziqli integrallar uchun integral yig’indilardir. Yuqoridagi Γ chiziqqa va $f(z)$ funksiyaga qo’yilgan shartlarda ikkala yig’indi ham mavjud bo’ladi. U holda oxirgi tenglikda $\lambda_p \rightarrow 0$ da limitga o’tsak, natijada

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \int_{\Gamma} (v \cdot dx + u \cdot dy) \quad (20.15.5)$$

formulaga ega bo’lamiz.

Shunday qilib kompleks o’zgaruvchili funksiyadan olingan integralni hisoblash masalasi haqiqiy funksiyadan olingan egri chiziqli integralni hisoblashga keltiriladi ekan.

(20.15.5) ni qisqacha (qulayroq) ushbu

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u + i \cdot v)(dx + i \cdot dy) \quad (20.15.6)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Agar Γ chiziq tenglamasi $z = x(t) + i \cdot y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ ko'rinishda bo'lib, u uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (20.15.6) ning ko'rinishi ushbu

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t) dt \quad (20.15.7)$$

ko'rinishga keladi.

20.16. Integralning asosiy xossalari. KO'Fdan olingan integralning asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

$$1^{\circ}. \int_{\Gamma} dz = z - z_0.$$

$$2^{\circ}. \int_{\Gamma} (f_1(z) \pm f_2(z)) dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz \pm \int_{\Gamma} f_2(z) dz.$$

$$3^{\circ}. \int_{\Gamma} \alpha \cdot f(z) dz = \alpha \cdot \int_{\Gamma} f(z) dz, \alpha - \text{kompleks son}.$$

4 $^{\circ}$. $\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma^{-}} f(z) dz$, integrallash chizig'ining yo'nalishini qarama – qarshi yo'nalishga o'zgartirilsa, integral o'z ishorasini qarama–qarshi ishoraga almashtiradi.

$$5^{\circ}. \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

$$6^{\circ}. \text{Agar } \Gamma \text{ chiziqda } |f(z)| \leq M \text{ bo'lsa, u holda } \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l \text{ bo'lib,}$$

l esa Γ chiziqning uzunligi.

Bu xossalarning isbotlari (20.15.4) va (20.15.5) dan bevosita kelib chiqadi.

20.16.1-misol. (z) tekisligidagi z_0 va z nuqtalarni birlashtiruvchi Γ chiziq tenglamasi $z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$ bo'lsin, bunda $z_0 = z(\alpha), z = z(\beta)$. Bu holda

$f(z) = z^n$ funksiyaning integrali (20.15.7) formuladan foydalanib quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (z(t))^n \cdot z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dt} (z(t))^{n+1} dt = \frac{1}{n+1} \cdot (z(t))^{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left[(z(\beta))^{n+1} - (z(\alpha))^{n+1} \right] = \frac{1}{n+1} \cdot \left[z^{n+1} - z_0^{n+1} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1} \cdot \left[z^{n+1} - z_0^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (20.16.1)$$

bunda n – butun son bo‘lib, $n \neq -1$. Agar $n = -2, -3, \dots$ manfiy butun sondan iborat bo‘lsa, Γ chiziq $z = 0$ nuqtadan o‘tmasligi kerak. Agar $z = z_0$ bo‘lsa, ya’ni Γ chiziq yopiq bo‘lsa, u holda (20.16.2) dan $\int_{\Gamma} z^n dz = 0$ bo‘ladi.

20.16.3-misol. Markazi a nuqtada, radiusi r bo‘lgan Γ – aylana bo‘ylab $f(z) = \frac{1}{z-a}$ funksiyadan olingan integral hisoblansin.

Yechish: Γ – aylana tenglamasi $z - a = r \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bo‘lib, bundan

$$d(z-a) = dz = i \cdot r \cdot e^{i\varphi} d\varphi \Rightarrow \frac{dz}{z-a} = \frac{i \cdot r \cdot e^{i\varphi}}{r \cdot e^{i\varphi}} d\varphi = i \cdot d\varphi \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = i \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot i.$$

Agar $a = 0$ bo‘lsa, ya’ni Γ – aylananing markazi nol nuqtada bo‘lsa, u holda oxirgi tenglikka ko‘ra

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi \cdot i. \quad (20.16.4)$$

20.16.5-misol. $\oint_{\Gamma} \operatorname{Im} z \cdot dz$ integralni hisoblang, bunda Γ – yarim aylana, $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Yechish: (20.16.2) formulaga ko‘ra

$$\oint_{\Gamma} y(dx + i \cdot dy) = \int_{\Gamma} y \cdot dx + i \cdot \int_{\Gamma} y \cdot dy = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + i \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_1^{-1} - i \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

20.17. Koshi teoremasi. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral.

Nyuton–Leybnits formulasi

20.17.1–teorema (Koshi (Cauchy)). Agar bir bog'lamli D sohada $f(z)$ funksiya analitik bo'lsa, u holda D da yotuvchi har qanday Γ –yopiq chiziq bo'yicha $f(z)$ funksiya dan olingan integral nolga teng bo'ladi:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Isboti. Agar qo'shimcha $f'(z)$ funksiyaning D ga uzluksizligini talab qilsa, u holda teoremaning isboti yengillashadi. (20) formulaga ko'ra

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u \cdot dx - v \cdot dy) + i \cdot \int_{\Gamma} (v \cdot dx + u \cdot dy).$$

D sohada $f(z) = u + i \cdot v$ funksiya analitik, $f'(z)$ funksiya esa uzluksiz bo'lgani uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar ham D da uzluksiz hamda Eyler

– Dalamber shartini qanoatlantiradi: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Bu shartga asosan,

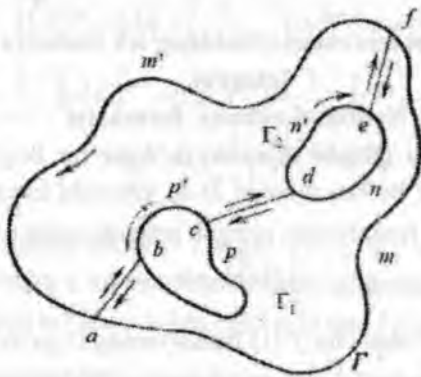
$$\int_{\Gamma} (u \cdot dx - v \cdot dy) \text{ va } \int_{\Gamma} (v \cdot dx + u \cdot dy)$$

nolga tengligi kelib chiqadi.

Demak, shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Koshi teoremasi ko'p bog'lamli soha uchun ham o'rinli. Soddalik uchun uch bog'lamli soha uchun qaraymiz. Faraz qilaylik, D soha tashqi tomondan Γ_0 yopiq chiziq bilan, ichki tomondan o'zaro kesishmaydigan yopiq Γ_1 va Γ_2 chiziqlar bilan chegaralangan uch bog'lamli soha bo'lsin. Γ –yopiq chiziqning sohaga nisbatan musbat yo'nalishi deb quyidagi yo'nalishni qabul qilamiz: qabul qilingan yo'nalish bo'yicha harakat qilganimizda D soha doim chap tomonda qolsin, buning uchun Γ bo'ylab soat strelkasiga teskari, Γ_1 va Γ_2 chiziqlar bo'ylab esa soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha harakat qilish kerak (20.7–chizma).

$f(z)$ funksiya $\bar{D}$ yopiq sohada analitik, ya'ni D sohada hamda Γ_1 va Γ_2 chiziqlarda analitik bo'lsin. D sohani ikkita bir bog'lamli sohaga aylantirish



20.7- chizma.

maqsadida $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ yopiq chiziqlarni ab, cd, ef chiziqlar orqali tutashtiramiz. Natijada D_1 va D_2 bir bog'lamli sohalar hosil bo'lib, ularning chegaralari mos ravishda quyidagicha: $\Gamma_1 = amfendcpba$, $\Gamma_2 = abp'cdn'efm'a$.

Shartga ko'ra $f(z)$ funksiya $\bar{D}$ yopiq sohada analitik bo'lgani uchun uning qismlari D_1 va D_2 larida ham analitik bo'ladi. Shuning uchun 20.17.1-teoremaga asosan, Γ_1 va Γ_2 yopiq chiziqlar bo'yicha olingan integrallarning har biri nolga teng bo'ladi:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0.$$

20.16 banddagi integralning 5° - xossasiga asosan,

$$\int_{\Gamma_1} = \int_{amf} + \int_{fe} + \int_{end} + \int_{dc} + \int_{cph} + \int_{ba} = 0.$$

Xuddi shunday

$$\int_{\Gamma_2} = \int_{ab} + \int_{bp'c} + \int_{cd} + \int_{dn'e} + \int_{ef} + \int_{fm'a} = 0.$$

Bularning o'ng tomonlari nolga teng bo'lganligi uchun ularni qo'shsak, yig'indi ham nolga teng bo'ladi. Qo'shganimizda ab , ba va boshqa qarama – qarshi yo'nalishlar bo'ylab olingan integrallar nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_{ab} + \int_{ba} = \int_{ab} - \int_{ab} = 0, \int_{cd} + \int_{dc} = \int_{cd} - \int_{cd} = 0, \int_{lf} + \int_{fl} = \int_{lf} - \int_{lf} = 0.$$

Bularni e'tiborga olsak,

$$\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \left(\int_{cpb} + \int_{bp'c} \right) + \left(\int_{end} + \int_{dn'e} \right) + \left(\int_{amf} + \int_{fm'a} \right) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 0.$$

Shu bilan Koshi teoremasi ko'p bog'lamli soha uchun ham isbot bo'ldi.

20.17.2-eslatma. Ichkaridagi Γ_1 va Γ_2 yopiq chiziqlarning yo'nalishini o'zgartirsak, u holda

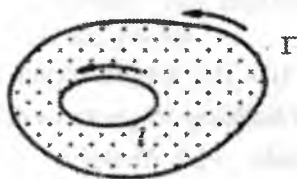
$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

ga ega bo'lamiz, bunda $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ yopiq chiziqlar bir xil yo'nalishda (yo soat strelkasi bo'yicha yoki soat strelkasiga teskari yo'nalishda).

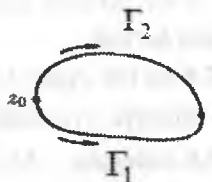
Xususiyl holda, agar $f(z)$ funksiya Γ va l yopiq chiziqlar bilan chegaralangan ikki bog'lamli sohada analitik bo'lsa (20.8 – chizma) u holda

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_l f(z)dz$$

bo'ladi.



20.8- chizma.



20.9- chizma.

20.17.3—natija. Agar $f(z)$ funksiya bir bog‘lamli D sohada analitik bo‘lsa, u holda undan olingan integral integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmasdan, faqat u boshlang‘ich z_0 nuqta va oxirgi z nuqtaga bog‘liq bo‘ladi.

Haqiqatan ham, Γ_1 va Γ_2 lar D sohadagi z_0 va z nuqtalarni birlashtiruvchi chiziqlar bo‘lsin (20.9 – chizma). Koshi teoremasiga asosan

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2^-} f(z) dz = 0, \text{ ya'ni}$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Bunday hollarda agar integral faqat boshlang‘ich va oxirgi nuqtalarga bog‘liq bo‘lsa, u holda

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

belgilash qo‘llaniladi. Bunda z_0 belgilangan nuqta, z o‘zgaruvchi nuqta

bo‘lsa, u holda $\int_{z_0}^z f(z) dz - z$ ning funksiyasi bo‘ladi va uni

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

deb belgilaymiz.

Agar $f(z)$ D sohada analitik funksiya bo‘lsa, u holda $F(z)$ funksiya ham D sohada analitik funksiya bo‘ladi, ya’ni

$$F'(z) = \left(\int_{z_0}^z f(z) dz \right)' = f(z)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

20.17.4—ta’rif. Agar D sohada $F'(z) = f(z)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiya uchun *boshlang‘ich funksiya* deyiladi.

20.17.5—teorema. Agar D sohada $F(z)$ funksiya $f(z)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $\Phi(z) = F(z) + C$, $C = \text{const}$ funksiya ham D da $f(z)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi va aksincha, agar $F(z)$

va $\Phi(z)$ funksiyalar $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ lar uchun

$$\Phi(z) - F(z) = C$$

bo'ladi.

Demak, $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qilar ekan.

20.17.6—ta'rif. $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalarining umumiy ko'rinishiga *aniqmas integral* deyiladi va u

$$\int f(z) dz = F(z) + C$$

kabi belgilanadi, bunda $F'(z) = f(z)$.

$F(z)$ funksiya $f(z)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin. Demak,

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) + C. \text{ Bunda } z = z_0 \text{ desak, } 0 = F(z_0) + C, C = -F(z_0),$$

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0) \quad (20.17.7)$$

formulaga ega bo'lamiz. Odatda (20.17.7) formulani *Nyuton–Leybnits formulasi* deb ataladi.

20.6-§. Koshi integrali. Koshining integral formulasi

20.18. Koshi integrali

20.18.1–teorema. $f(z)$ funksiya $\bar{D}$ sohada analitik va D sohaning chegarasi Γ bo'lsa, u holda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (20.18.2)$$

formula o'rinli bo'ladi, bunda $z_0 \in D$, Γ ning yo'nalishi soat strelkasiga teskari

(20.18.2) ning o'ng tomonidagi integralga *Koshi integrali*, (20.18.2) formulaga esa *Koshining integral formulasi* deyiladi. Koshining integral formulasi KO'Flar nazariyasining asosiy asosiy formulalaridan biri bo'lib, u orqali funksiyaning chegarasidagi qiymati berilganda funksiyaning D sohaning ichidagi ixtiyoriy z_0 nuqtadagi qiymatini topish mumkin bo'ladi.

$\forall z_0 \in D$ nuqtani markaz qilib istalgancha kichik r radiusli Γ_0 aylanani shunday chizaylikki, u butunlay D ning ichida yotsin, ya'ni aylana Γ chiziq bilan kesishmasin. Natijada chegarasi Γ va Γ_0 yopiq chiziqlardan iborat bo'lgan ikki bog'lamli D_1 soha hosil bo'ladi. U holda Koshi teoremasidagi eslatmaga asosan, $\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Ma'lumki, $\int_{\Gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Demak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot f(z_0) \cdot 2\pi i + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned} \quad (20.18.3)$$

(20.18.3) tenglikning chap tomonini baholaymiz. $f(z)$ funksiya D sohada analitik bo'lgani uchun u $z_0 \in D$ nuqtada uzluksiz. U holda $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists r > 0$ topiladiki, $|z - z_0| \leq r$ ni qanoatlantiruvchi z lar uchun $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ bajariladi. Integralning 5° xossasiga asosan

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| < \frac{1}{2\pi r} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Bu tengsizlikning chap tomoni ε ga bog'liq emasligini hamda ε ning istalgancha kichik qilib tanlash mumkinligini e'tiborga olgan holda oxirgi tengsizlikdan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan esa (20.18.2) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

20.18.4-eslatma: Agar z_0 nuqta $\bar{D}$ sohadaning tashqarisida bo'lsa, u holda $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$ bo'ladi.

Ta'kidlaymizki, (20.18.2) Koshi formulasi ko'p bog'lamli sohalar uchun ham o'rinli.

Koshi formulasini qo'llab quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

20.18.5-teorema. z_0 nuqtada differensiallanuvchi $f(z)$ funksiyaning hamma tartibdagi hosilalari mavjud bo'ladi hamda n – tartibli hosilasi uchun

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (20.18.6)$$

formula o'rinli bo'ladi.

20.7-§. Kompleks hadli qatorlar

Hadlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan qatorlar matematik analiz kursida batafsil o'rganiladi. Endi biz hadlari kompleks sonlardan tuzilgan qatorlar bilan tanishamiz.

20.19. Sonli qatorlar. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots \quad (20.19.1)$$

qatorni qaraymiz, bunda $u_n = a_n + i \cdot b_n$, a_n va b_n ($n = 1, 2, \dots$) lar haqiqiy sonlar. (20.19.1) qatorni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i \cdot b_n) = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) + \dots + (a_k + i \cdot b_k) + \dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (a_k + i \cdot b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + i \cdot \sum_{k=1}^n b_k$$

yig'indiga (20.19.1) qatorning n – qismaniy yig'indisi deyiladi.

Agar (20.19.1) qatorning $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ qismaniy yig'indilari ketma – ketligi chekli S limitga ega bo'lsa, ya'ni $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (20.19.1) qator yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Ta'rifga ko'ra

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k + i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k.$$

S – chekli son bo'lganda (20.19.1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, S songa qatorning yig'indisi deyiladi va $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kabi belgilanadi.

Ravshanki, agar hadlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (20.19.2)$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (20.19.3)$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (20.19.1) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

Bu tasdiqqa asosan, agar (20.19.1) qatorni yaqinlashishga tekshirmoqchi bo'lsak, uning o'rniga (20.19.2) va (20.19.3) qatorlarni yaqinlashishga tekshirish yetarli. (20.19.2) va (20.19.3) qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi matematik analiz kursida keltirilgan alomatlar, teoremlar yordamida tekshiriladi.

Kompleks hadli qatorlar nazariyasidagi ta'riflar va teoremlar, ularning isbotlari haqiqiy sonli qatorlar nazariyasidagi mos ta'riflar va teoremlarning isbotlariga o'xshaydi. Shuning uchun biz bu bandda ularning ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Ushbu

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + i \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

qatorga (20.19.1) qatorning *goldig'i* deyiladi.

20.19.4–teorema. Agar (20.19.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning u_n – umumiy hadi $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (20.19.5)$$

(20.19.5) shart qator yaqinlashishining zaruriy sharti bo'lib hisoblanadi. Agar ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_k| + \dots \quad (20.19.6)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (20.19.1) qator *absolyut yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

20.19.7–teorema. Agar (20.19.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (20.19.1) qator yaqinlashuvchi (absolyut yaqinlashuvchi) bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra umumiy hadi $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ bo'lgan (20.19.6) qator yaqinlashuvchi. U holda

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ va } |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

tengsizliklar va haqiqiy sonli qatorlarni taqqoslash haqidagi teoremlarga asosan (20.19.2) va (20.19.3) qatorlarning yaqinlashishidan (20.19.1) qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, (20.19.1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda uning hadlarining o'rinlarini almashtirish natijasida hosil bo'lgan qator ham yaqinlashuvchi va yig'indisi shu S ga teng bo'ladi. Kompleks hadli qatorlarni tekshirishda matematik analiz kursidagi musbat hadli qatorlarni tekshirishdagi yaqinlashish alomatlarini qo'llash mumkin.

Masalan, Dalamber alomati: agar $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = D$ bo'lib, $D < 1$ bo'lsa,

(20.19.6) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi; agar $D > 1$ bo'lsa, uzoqlashuvchi bo'ladi.

20.20. Darajali qatorlar. Kompleks sohada ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (20.20.1)$$

(bunda c_n – kompleks son, $z = x + i \cdot y$) ko'rinishdagi qatorga **darajali qator** deyiladi.

Bundan tashqari quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (20.20.2)$$

qatorni ham qaraymiz (z_0 – kompleks son). Bu qatorni $t = z - z_0$ almashtirish natijasida (20.20.1) qatorga keltiriladi. Shuning uchun darajali qator deyilganda (20.20.1) qator nazarda tutilgan bo'ladi. z ning (20.20.1) qatorni yaqinlashtiriladigan qaiymatlari to'plamiga (20.20.1) qatorning *yaqinlashish sohasi* deyiladi. Darajali qatorning yaqinlashish sohasini topishda Abel teoremasi muhim rol o'ynaydi.

20.20.3–teorema (Abel). Agar (20.20.1) qator $z = z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $|z| < |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z ning barcha qiymatlarida (20.20.1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

20.20.4–natija. Agar (20.20.1) qator $z = z_0$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $|z| > |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z ning barcha qiymatlarida, ya'ni markazi koordinatalar boshida, radiusi $|z_0|$ bo'lgan doiraning tashqarisida uzoqlashuvchi bo'ladi.

$z = 0$ nuqtadan (20.20.1) qator yaqinlashadigan z nuqtagacha bo'lgan masofalar to'plamining aniq yuqori chegarasi R bo'lsin. U holda $|z| > R$ da (20.20.1) qator uzoqlashadi.

Abel teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi.

20.20.5–natija. (20.20.1) qator $K = \{z|z| < R\}$ doira ichida yaqinlashuvchi, radiusi R dan kichik bo'lgan ixtiyoriy doirada ($|z| \leq R_1 < R$) qator tekis yaqinlashadi.

K doiraga qatorning *yaqinlashish doirasi*, R ga esa qatorning *yaqinlashish radiusi* deyiladi. $|z| = R$ aylanada (20.20.1) qator yaqinlashuvchi bo'lishi ham, uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. $|z| = R$ aylananing biror

z° nuqtasida (20.20.1) qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini tekshirmoqchi bo'lsak, u nuqtani (20.20.1) qatorga qo'yib, o'zgarmas hadli, ya'ni sonli qator hosil qilib, uni tekshirish kerak bo'ladi.

Agar (20.20.1) qator faqat $z = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning yaqinlashish radiusi $R = 0$, agar qator kompleks tekisligining hamma joyida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $R = \infty$ bo'ladi.

(20.20.1) qatorning yaqinlashish radiusi Koshi – Adamar formulasi deb ataluvchi ushbu

$$R = \frac{1}{L}, \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (20.20.5)$$

formula bilan topiladi.

Darajali qatorning quyidagi xossalarini isbotsiz keltirib o'tamiz:

1°. Darajali qator yig'indisi o'zining yaqinlashish doirasi ichida analitik funksiyani ifodalaydi.

2°. Darajali qatorni o'zining yaqinlashish doirasi ichida istalgan marta hadma – had differensiallash, hadma – had integrallash mumkin. bunda hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiusi berilgan qatorning yaqinlashish radiusiga teng bo'ladi.

20.20.6-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechilishi. Bunda $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. U holda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \quad R = \infty.$$

Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi butun kompleks tekisligidan iborat.

20.20.7-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)2^n}$ qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

Yechilishi. Bunda $c_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$ bo'lib,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} \right| = 2.$$

Berilgan qator $|z-i| < 2$ da yaqinlashadi.

20.20.8-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin. Hamda $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = 3 - 2i$ nuqtalarda yaqinlashishga tekshiring.

Yechilishi. Yaqinlashish radiusini Dalamber alatiga ko'ra topamiz.

$$|u_n| = \frac{|z_n|^{2n}}{\sqrt{n}}, |u_{n+1}| = \frac{|z_{n+1}|^{2n+2}}{\sqrt{n+1}}. \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z^{2n+2}| \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} |z^{2n}|} = |z|^2.$$

Berilgan qator $|z|^2 < 1$ ni qanoatlantiruvchi barcha z larda yaqinlashadi, ya'ni $|z| < 1$ da yaqinlashadi. Yaqinlashish doirasi markazi $z = 0$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iborat. $z_1 = 0$ nuqta yaqinlashish doirasida yotadi, demak berilgan qator bu nuqtada absolyut yaqinlashadi. $z_2 = i$ nuqta yaqinlashish doirasining chegarasida joylashgan. Bu nuqtada qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin. $z_2 = i$ qiymatni berilgan qatorning umumiy hadidagi z ning o'rniga qo'yish bilan topamiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{i^{2n}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}}.$$

Hosil bo'lgan sonli qatorning umumiy hadi $u_n = \frac{-1}{\sqrt{n}}$, bu qator sonli qatorlar yaqinlashishi haqidagi Koshining integral alatiga ko'ra uzoqlashadi.

Demak, $z_2 = i$ nuqtada berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi. $z_3 = 3 - 2i$ nuqta yaqinlashish doirasidan tashqarida joylashgani uchun bu nuqtada berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

20.21. Teylor qatori

20.21.1-teorema. $|z - z_0| < R$ doirada analitik bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyani yagona ravishda bu doirada ushbu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (20.21.2)$$

ko'rinishidagi darajali qatorga yoyish mumkin, bunda

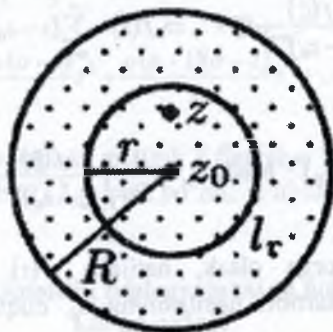
$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (20.21.3)$$

Γ_0 – markazi z_0 nuqtada bo'lib, butunlay $|z - z_0| < R$ doirada joylashgan aylana.

(20.21.2) qatorga $f(z)$ funksiyaning *Taylor qatori* deyiladi. Berilgan doirada yotuvchi markazi z_0 nuqtada bo'lgan va radiusi $r < R$ bo'lgan aylana chizamiz. $|z - z_0| < r$ doirada yotuvchi ixtiyoriy z nuqtani olamiz (20.10-chizma). $f(z)$ funksiya $|z - z_0| < r$ doira va uning chegarasi Γ_0 da analitik bo'lgani uchun Koshining integral formulasi (20.18.2) ga asosan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

bunda ξ nuqta Γ_0 aylanadagi nuqta. Bunda



20.10- chizma

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ bo'lgani uchun $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$ bo'ladi.

Demak, $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$ ifodani birinchi hadi $\frac{1}{\xi - z_0}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi

geometrik progressiyaning yig'indisi deb qarasak, u holda

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} + \dots$$

ega bo'lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini $\frac{1}{2\pi i} \cdot f(\xi)$ ga ko'paytirib, so'ngra uni hadma - had Γ_0 chiziqli bo'ylab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \dots + \\ &+ (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \dots \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

yoki

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ bunda } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(20.18.6) ni e'tiborga olsak, natijada $f(z)$ funksiya yoyilmasi koeffitsiyentining n - tartibli hosilasining z_0 nuqtadagi qiymati orqali ifodasini hosil qilamiz:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Shunday qilib koeffitsiyenti (20.21.3) formula bilan topiladigan $f(z)$ funksiyaning (20.21.2) yoyilmasiga ega bo'ldik.

Xususiyl holda, $z_0 = 0$ bo'lib, (20.21.2) qatordan, ushbu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (20.21.4)$$

qator hosil bo'ladi. (20.21.4) qatorga $f(z)$ funksiyaning *Makloren qatori* deyiladi.

Ba'zi elementar funksiyalarning Teylor (Makloren) qatorlari yoyilmasini keltiramiz:

$$1. e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$2. \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$3. \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$4. \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \dots, |z| < 1.$$

$$5. (1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots, |z| < 1.$$

20.21.2-teorema. D sohada analitik f funksiya berilgan bo'lsin. Agar $\lim Z_n = a$, $a \in D$ bo'lib, $f(Z_n) = 0$ bo'lsa, u holda D sohada $f(Z) = 0$ bo'ladi.

20.8-§. Analitik funksiyalarning nollari.

Loran qatori

20.22. Analitik funksiyalarning nollari. Yagonalik teoremasi. Biror D sohada analitik $f(z)$ funksiya berilgan bo'lib, z_0 nuqta D ning ichki nuqtasi bo'lsin. Biz yuqorida analitik $f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning biror

atrofida koeffitsiyentlari (20.21.3) tenglik bilan aniqlanadigan (20.21.2) ko'rinishdagi darajali qatorga yoyilishini ko'rdik. (20.21.2) dagi z ning o'rniga z_0 qo'yilsa, $f(z_0)=c_0$ bo'ladi.

20.22.1-ta'rif. Agar $f(z_0)=c_0=0$ bo'lsa, shu z_0 son $f(z)$ funksiyani noli deb ataladi, ya'ni $f(z)$ funksiyani nolga aylantiradigan har qanday z nuqtani shu *funksiyani noli* deyiladi.

Agar z_0 son $f(z)$ funksiyani noli bo'lsa, u holda (20.21.2) qatorning ko'rinishi

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots+c_n(z-z_0)^n+\dots$$

bo'ladi. Agar $c_0=0, c_1=c_2=\dots=c_{n-1}=0$ bo'lib, $c_n \neq 0$ bo'lsa, z_0 son $f(z)$ funksiyani n karrali yoki n tartibli noli deyiladi. Bu holda

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\dots=(z-z_0)^n\varphi(z) \quad (20.22.2)$$

bo'lib, $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-z_0)+c_{n+2}(z-z_0)^2+\dots$. $z=z_0$ nuqta $\varphi(z)$ uchun uning noli bo'lmaydi, chunki $\varphi(z_0)=c_n \neq 0$. (20.21.3) ga asosan $\varphi(z_0)=c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Demak, $f(z)$ funksiya n -tartibli z_0 nolga ega bo'lsa, u holda

$$f(z_0)=0, f'(z_0)=0, \dots, f^{(n-1)}(z_0)=0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

bo'lar ekan. Bunga teskari tasdiq ham o'rinli, ya'ni agar $f(z)$ ning ko'rinishi (20.22.2) shaklida bo'lib, $\varphi(z)$ analitik va $\varphi(z_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda z_0 nuqta $f(z)$ ning n -tartibli noli bo'ladi.

20.22.3-teorema (yagonalik haqida). Faraz qilaylik $f(z)$ funksiya D sohada analitik bo'lsin. Agar shunday $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, a \in D, z_n \in D$ ketma-ketlik topilib, $f(z_n)=0$ bo'lsa, u holda D sohada $f(z)=0$ bo'ladi.

20.22.4-natija. Agar $f(z)$ funksiya D sohada analitik bo'lib, a limit nuqtaga ega bo'lgan $E \subset D$ to'plamda $f(z)=0$ bo'lsa, u holda D sohada $f(z)=0$ bo'ladi.

20.22.5-natija. Agar $f(z)$ funksiya D sohada analitik bo'lib, a limit nuqtaga ega bo'lgan $\Gamma \subset D$ chiziqda $f(z)=0$ bo'lsa, u holda D sohada $f(z)=0$ bo'ladi.

20.22.6-natija. Agar $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada analitik bo'lib, a limit nuqtaga ega bo'lgan $E \subset D$ to'plamda $f(z)=g(z)$ bo'lsa, u holda D sohada $f(z)=g(z)$ bo'ladi.

20.23. Manfiy darajali qator. Ko'p hollarda amaliyotda

$$b_1(z-z_0)^{-1} + b_2(z-z_0)^{-2} + \dots + b_n(z-z_0)^{-n} + \dots \quad (20.23.1)$$

qator ham ishlatiladi, bunda z_0 va $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ - koeffitsiyentlar kompleks sonlardir. Bunda $Z = (z-z_0)^{-1} = \frac{1}{z-z_0}$ deb belgilasak, u holda (20.23.1) ning ko'rinishi

$$b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n + \dots \quad (20.23.2)$$

shaklga keladi. Bu musbat darajali qatorning yaqinlashish sohasi $|Z| < R$ doiradan iborat ekanligi 20.20 banddan ma'lum bo'lib,

$$r = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}, R = \frac{1}{r} \quad (20.23.3)$$

ekanligini e'tiborga olgan holda $|Z| = \left| \frac{1}{z-z_0} \right| < R$ yoki $|z-z_0| > r$ tengsizlikni hosil qilamiz. bu tengsizlik markazi z_0 nuqtada joylashgan radiusi r bo'lgan aylana tashqarisidagi z nuqtalar to'plamini ifodalaydi. Shunday qilib, manfiy darajali (20.23.1) qatorning yaqinlashish sohasi $|z-z_0| = r$ aylana tashqarisidan iborat ekan.

Xususiyl holda $z_0=0$ bo'lsa, u vaqtda aylananing markazi koordinat boshida joylashadi. Agar $r=0$ bo'lsa, yaqinlashish sohasi tekislikning z_0 dan tashqari barcha nuqtalaridan iborat bo'ladi. Agar $r=\infty$ bo'lsa, qator biror nuqtada ham yaqinlashmaydi, ya'ni butun tekislikda ($z=\infty$ dan boshqa) uzoqlashuvchi bo'ladi.

20.24. Loran qatori

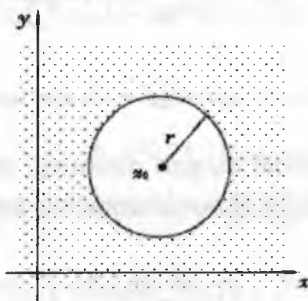
20.24.1-teorema. $r < |z - z_0| < R$ xalqada analitik bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiya bu xalqada ushbu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (20.24.2)$$

ko'rinishidagi darajali qatorga yoyiladi (20.11-chizma), bunda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (20.24.3)$$

C – berilgan xalqada joylashgan markazi z_0 nuqtada bo'lgan ixtiyoriy aylana.



20.11-chizma.

(20.24.2) qatorga $f(z)$ funksiyaning *Loran qatori* deyiladi.

$f(z)$ funksiyaning Loran qatori ikki qismdan iborat bo'lib

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

uning birinchi qismi, ya'ni $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ qator Loran qatorining *to'g'ri qismi* deyiladi va u $|z - z_0| < R$ doira ichida analitik $f_1(z)$ funksiyaqa yaqinlashadi;

ikkinchi qismi, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ qator Loran qatorining *bosh qismi* deyiladi

va u $r < |z - z_0|$ sohada analitik $f_2(z)$ funksiyaga yaqinlashadi va nihoyat $r < |z - z_0| < R$ xalqada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ qator analitik $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ funksiyaga yaqinlashadi.

20.24.4-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik bo'lmasa, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deyiladi.

Xususiyl holda $f(z)$ funksiya $|z - z_0| < R$ doira ichida maxsus nuqtaga ega bo'lmasa, uning Loran qatoriga yoyilmasi Teylor qatoriga aylanadi.

20.24.5-misol. Ushbu $f(z) = e^z$ funksiyani $z_0 = 0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoying.

Yechilishi. Ma'lumki, ushbu

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

yoyilma butun kompleks tekislikda o'rinli. Bunda $u = \frac{1}{z}$ deb olsak,

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

yoyilmaga ega bo'lamiz.

20.24.6-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$ funksiyani $z_0 = 0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoying.

Yechilishi. Berilgan funksiya ikkita $z_1 = -2$ va $z_2 = 3$ maxsus nuqtalarga ega. U a) $0 \leq |z| < 2$; b) $2 < |z| < 3$; c) $|z| > 3$ sohalarda analitik (20.12-chizma). $f(z)$ funksiyani quyidagi

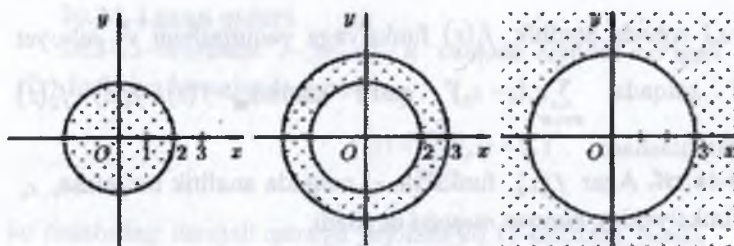
$$f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2} \right)$$

ko'rinishda tasvirlaymiz.

a) $|z| < 2$ doira ichida

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots \right), \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{3} \right| < 1;$$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \dots \right), \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{2} \right| < 1.$$



20.12-chizma.

Demak, $f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2} \right) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \right) \cdot z^n$ Loran

qatori Teylor qatoriga aylanadi.

b) $2 < |z| < 3$ xalqada

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots \right), \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{3} \right| < 1;$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} - \dots, \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{2} \right| > 1$$

bo'lib,

$$f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2} \right) = -\frac{1}{5} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} \right].$$

c) $|z| > 3$ sohada

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots \right), \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{3} \right| > 1;$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \dots \right), \text{ bu yerda } \left| \frac{z}{2} \right| > 1.$$

Demak,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} \right].$$

20.9-§. Maxsus nuqtalarning klassifikatsiyasi. funksiyaning nollari bilan qutblari orasidagi bog'lanish

20.25. Maxsus nuqtalarning klassifikatsiyasi. Ma'lumki, $f(z)$ funksiyaning analitik bo'lmagan nuqtalari uning *maxsus nuqtalari* deyiladi. Funksiyaning maxsus nuqtalari ko'p bo'lib, ulardan ko'p uchraydigani ajralgan maxsus nuqtalardir.

20.25.1-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning biror $0 < |z - z_0| < R$ atrofida analitik bo'lib, a nuqtaning o'zida analitik bo'lmasa, u holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning *ajralgan (yakkalangan) maxsus nuqtasi* deyiladi.

20.25.2-misol. Ushbu $\frac{1}{z+3}$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi $z = -3$ dan iborat.

Ajralgan maxsus nuqtalar *uch tipga*, ya'ni qutulib bo'ladigan (yoki chetlashtiriladigan), qutb va muhim maxsus nuqtalarga bo'linadi.

Agar $z = z_0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus bo'lsa, u holda shunday $R > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |z - z_0| < R$ xalqada $f(z)$ funksiya analitik bo'lib, u Loran qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Agar: 1) Loran qatori tarkibida uning bosh qismi qatnashmasa, ya'ni manfiy darajali hadlari qatnashmasa, bu holda z_0 nuqtaga *qutilib bo'ladigan maxsus nuqta* deyiladi.

2) Loran qatori tarkibida uning bosh qismi qatnashib, u chekli sondagi manfiy darajali hadlardan iborat bo'lsa, bu holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning *qutbi* deyiladi.

3) Loran qatori tarkibida uning bosh qismi qatnashib, u cheksiz ko'p manfiy darajali hadlardan iborat bo'lsa, bu holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning *muhim maxsus nuqtasi* deyiladi.

20.26. Qutilib bo'ladigan maxsus nuqta. z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning qutilib bo'ladi maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda uning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatori yoyilmasining ko'rinishi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

shaklda bo'ladi.

Agar $c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ni $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi qiymati deb qayta aniqlasak, ya'ni $f(z_0) = c_0$ deb olinsa, u holda $f(z)$ funksiya $|z - z_0| < R$ doiraning hamma nqtalarida analitik bo'ladi. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ ($c_0 \neq \infty$) dan z_0

nuqtaning istalgancha kichik atrofida $f(z)$ funksiyaning chegaralanganligi kelib chiqadi. Bunda teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi, ya'ni agarda $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ - chekli bo'lsa, u holda z_0 yakkalangan maxsus nuqta qutilishi

mumkin bo'lgan maxsus nuqta bo'ladi.

20.27. Qutb maxsus nuqta. Agar z_0 nuqta $f(z)$ funksiya uchun qutb bo'lsa, u holda z_0 nuqta atrofidagi $f(z)$ funksiyaning Loran qatori quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}, \quad (20.27.1)$$

bunda $c_{-m} \neq 0$. Bu holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning m - tartibli qutbi bo'ladi, agar $m=1$ bo'lsa, z_0 nuqta oddiy qutb bo'ladi.

(20.27.1) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left((z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + c_{-1} (z - z_0)^{m-1} + \dots + c_{-m} \right)$$

yoki

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (20.27.2)$$

bunda $g(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + c_{-1} (z - z_0)^{m-1} + c_{-2} (z - z_0)^{m-2} + \dots + c_{-m}$ -

analitik funksiya bo'lib, $g(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Bundan $z \rightarrow z_0$ da $f(z) \rightarrow \infty$, ya'ni $f(z)$ funksiya z_0 qutb atrofida cheksiz katta bo'lar ekan. (20.27.2) dan $f(z)(z - z_0)^m = g(z)$ bo'lib, undan $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = c_{-m}$ ($c_{-m} \neq 0, c_{-m} \neq \infty$)

bo'lsa, z_0 nuqta m - tartibli qutb bo'ladi.

20.27. 3-teorema (Funksiyaning noli bilan qutbi orasidagi bog'lanish). Agar z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning m - tartibli noli bo'lsa, u

holda z_0 nuqta $\frac{1}{f(z)}$ funksiyaning m - tartibli qutbi bo'ladi va aksincha,

ya'ni agar z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning m – tartibli qutbi bo'lsa, u holda z_0 nuqta $\frac{1}{f(z)}$ funksiyaning m – tartibli noli bo'ladi.

20.28. Muhim maxsus nuqta. Odatda ajralgan maxsus nuqtaning qaysi tipdagi maxsus nuqta ekanligini aniqlash uchun Loran qatoriga murojaat qilinadi. Agar z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsa, $f(z)$ funksiyaga tegishli Loran qatorining ko'rinishlari 1.12.1 punktda bayon qilingan.

20.28.1-teorema. $f(z)$ funksiya ajralgan maxsus z_0 nuqtasi muhim maxsus nuqtasi bo'lishi uchun shu funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatorining bosh qismi cheksiz ko'p hadlarga ega bo'lishi zarur va yetarli:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

20.28.2-misol. Ushbu $f(z) = e^z$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi $z = 0$ dan iborat ekanligi ravshan. Ushbu

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

yoyilmadan foydalanib, berilgan funksiyani $z = 0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoyish uchun $t = \frac{1}{z}$ almashtirish olsak, natijada yuqoridagi qator

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

ko'rinishga keladi. Bu yoyilma $e^{\frac{1}{z}}$ funksiya Loran qatorining bosh qismi ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya'ni yoyilmada manfiy darajali hadlar soni cheksiz ko'p. Demak, 1.12-teoremaga asosan, $z = 0$ nuqta $e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'ladi.

20.28.3-eslatma: Agar $f(z)$ funksiya uchun $z = \infty$ nuqta maxsus nuqta bo'lsin. $z = \infty$ nuqtaning atrofi deganda markazi $z = 0$ nuqtada va radiusi istalgancha katta R radiusli doiraning tashqi qismi tushuniladi

Agar $z = \infty$ nuqtaning atrofida $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadan boshqa maxsus nuqtalari bo'lmasa, u holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi. $z = \infty$ yakkalangan maxsus nuqta qutilib bo'ladi maxsus nuqta, m – tartibli qutb maxsus nuqta yoki muhim

maxsus nuqta bo'lishi mumkin. Birinchi holda $z = \infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiya Loran qatori yoyilmasi tarkibida musbat darajali hadlari bo'lmaydi; ikkinchi holda chekli sondagi musbat darajali qatnashishi mumkin; uchunchi holda cheksiz ko'p musbat darajali hadlari qatnashishi mumkin.

$f(z)$ funksiyani $z = \infty$ nuqta atrofidagi holatini o'rganish masalasi $z = \frac{1}{w}$ almashtirish natijasida $f\left(\frac{1}{w}\right)$ funksiyani $z = 0$ nuqta atrofidagi holatini o'rganishga keltiriladi.

20.28.4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping.

Yechish: $z = 0$ nuqta $f(z)$ uchun maxsus nuqta bo'ladi. bu maxsus nuqtaning turini aniqlash uchun quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^3} = \infty.$$

Demak, $z = 0$ nuqta berilgan funksiya uchun qutb maxsus nuqta bo'lar ekan.

20.28.5-misol. Ushbu $f(z) = \frac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiya uchun $z_1 = 0, z_2 = -2$ nuqtalar oddiy maxsus nuqtalar, $z_3 = 1$ nuqta esa 2 - tartibli maxsus nuqta bo'ladi.

20.28.6-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z-3}, g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ funksiyalarni $z = \infty$ nuqta atrofidagi xususiyatini aniqlang.

Yechilishi. $z = \frac{1}{w}$ almashtirishni bajaramiz. $f(z) = \frac{1}{z-3}$ funksiya $f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1-3w}$ ko'rinishga keladi. $|3w| < 1$ shart bajarilganda $f\left(\frac{1}{w}\right) = w(1 + 3w + (3w)^2 + \dots)$ yoyilma o'rinni bo'ladi. Bunda eski o'zgaruvchiga qaytsak

$$f(z) = \frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z} \right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} + \dots,$$

$z = \infty$ nuqta $f(z)$ uchun qutilishi mumkin bo'lgan maxsus nuqta bo'lar ekan.

$g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ funksiya uchun $z = \infty$ nuqta to'g'ri nuqta ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

20.10-§. Funksiyaning qoldig'i (chegirmasi)

20.29. Funksiyaning qoldig'i tushunchasi va qoldiqlar to'g'risidagi asosiy teorema.

Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtani o'z ichida saqllovchi D sohada analitik bo'lsa, u holda z_0 nuqtani o'rab oluvchi D sohada butunlay yotuvchi yopiq Γ chiziq bo'ylab olingan integral Koshi teoremasiga asosan nolga teng bo'ladi: $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Agar z_0 nuqta $f(z)$ ning ajralgan maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda bu integral nolga teng bo'lmasligi ham mumkin. Mana shu integralning qiymatini hisoblash masalasi qo'yiladi.

Faraz qilaylik, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiyaning $0 < |z - z_0| < R$ xalqada Loran qatoriga yoyish mumkin:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots$$

z_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi $0 < |z - z_0| < R$ xalqada yotuvchi bitta yopiq chiziqni olaylik. Oxirgi qatori Γ chiziqda tekis yaqunlashuvchi bo'lgani uchun uni shu chiziq bo'yicha hadma - had integrallash mumkin. U holda, ma'lumki

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0, \text{ agar } k \neq -1 \text{ bo'lsa} \\ 2\pi i, \text{ agar } k = -1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Xususiyl holda Γ yopiq chiziql aylana bo'lishi ham mumkin. Demak,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}. \quad (20.29.1)$$

20.29.2—ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $0 < |z - z_0| < R$ xalqada analitik bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning z_0 -ajralgan maxsus nuqtaga nisbatan qoldig'i (*chegirmasi*) deb $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$ integralning qiymatiga aytiladi va

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

kabi belgilanadi.

Agar (20.29.1) tenglikni e'tiborga olsak,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (20.29.3)$$

bo'ladi.

Demak, qoldiqni boshqacha ham ta'riflash mumkin: $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtaga nisbatan qoldig'i deb $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatori $(z - z_0)^{-1}$ hadining oldidagi c_{-1} koeffitsiyentiga aytilar ekan.

Ravshanki, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning to'g'ri yoki qutilib bo'ladigan maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda uning Loran qatorining bosh qismi bo'lmaydi, ya'ni $c_{-1} = 0, c_{-2} = 0, \dots$. Bundan (20.29.3) ga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \text{Res}(f(z_0)) = c_{-1} = 0$$

bo'ladi. Shunday qilib, yuqorida aytilgan ikki turli nuqtada funksiyaning qoldig'i nolga teng bo'ladi.

20.29.4—teorema (Koshi). Agar $f(z)$ funksiya Γ chiziq bilan chegaralangan yopiq $\bar{D}$ sohaning chekli sonidagi ajralgan maxsus z_k ($k=1,2,\dots,n$) nuqtalaridan tashqari hamma nuqtalarida analitik bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyadan Γ chiziq bo'ylab olingan integralning qiymati Γ chiziqning ichidagi barcha z_k ($k=1,2,\dots,n$) nuqtalarga nisbatan funksiya qoldiqlari yig'indisining $2\pi i$ ga ko'paytirilganiga teng:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z_k)).$$

20.30. Qutbga nisbatan qoldiqni hisoblash

1. $z = z_0$ maxsus nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutbi bo'lsin. u holda $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatori

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \text{Res}(f(z_0)) \quad (20.30.1)$$

Xususiyl holda, agar $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ bo'lib, $\varphi(z), \psi(z)$ funksiyalar z_0 nuqtada analitik bo'lsa, hamda $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda (49) formulani e'tiborga olsak

$$\text{Res}(f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\left[\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} \right]} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

bo'ladi. Demak,

$$\text{Res}(f(z_0)) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (20.30.2)$$

2. $z = z_0$ maxsus nuqta $f(z)$ funksiyaning m – tartibli qutbi bo‘lsin. U holda $f(z)$ ning z_0 nuqta atrofidagi Loran qatori

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bundan

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1}.$$

Bu tenglikni $(m-1)$ marta differensiallash natijasida

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+m)(n+m-1)(n+m-2) \dots (n+2)(z - z_0)^{n+m} + (m-1)! c_{-1}, \end{aligned}$$

bunda $z \rightarrow z_0, n \rightarrow \infty$ da limitga o‘tib ushbu

$$\text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^m f(z)) \quad (20.30.3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

3. Agar $z = z_0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi bo‘lsa, u holda $f(z)$ ning bu nuqtadagi qoldig‘ini hisoblashda, odatda uning Loran qatori yoyilmasidagi c_{-1} koeffitsiyent aniqlanadi.

20.30.4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{z+2}{z^3-z^4}$ funksiyaning maxsus nuqtalariga nisbatan qoldiqlarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning maxsus nuqtalari $z_1=1, z_2=0$ nuqtalardan iborat bo‘lib, $z_1=1$ oddiy maxsus nuqta, $z_2=0$ esa uchinchi tartibli ($m=3$) maxsus nuqta.

(20.30.2) formulaga asosan,

$$\operatorname{Res}(f(1)) = \frac{z+2}{(z^3-z^4)} \Big|_{z=1} = -3;$$

(20.30.3) formulaga asosan,

$$\operatorname{Res}(f(0)) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left((z-0)^3 \frac{z+2}{z^3-z^4} \right)'' \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\left(\frac{z+2}{1-z} \right)'' \right] = 3.$$

20.31. Funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtaga nisbatan qoldig'i. $f(z)$ funksiya uchun $z = \infty$ nuqta ajralgan maxsus nuqta bo'lsin. U holda funksiyaning $|z| > R$ yoki $R < |z| < \infty$ atrofda Loran qatoriga yoyish mumkin:

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Bu qator $|z| > R$ sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun r radiusli ($r < R$) ixtiyoriy C aylanada ham tekis yaqinlashadi. Shuning uchun bu qatorni hadma – had C aylana bo'ylab integrallash mumkin. C ning musbat yo'nalishi soat strelkasi bo'yicha bo'ladi.

$$\int_C z^n dz = \begin{cases} 0, \text{ agar } n \neq -1 \text{ bo'lsa} \\ 2\pi i, \text{ agar } n = -1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ekanligi e'tiborga olinsa, yuqoridagi qatorni hadma – had integrallansa,

$$\int_{C^-} f(z) dz = c_{-1} \int_{C^-} \frac{dz}{z} = -c_{-1} \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i (-c_{-1})$$

formula hosil bo'ladi. Bundan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}.$$

20.31.1—ta’rif. $z = \infty$ nuqtaning biror atrofida bir qiymatli va analitik bo’lgan $f(z)$ funksiyaning o’sha nuqtaga nisbatan qoldig’i deb Loran qatoridagi $\frac{1}{z}$ hadining minus ishorasi bilan olingan koeffitsiyentiga aytiladi va u $\text{Res}(f(\infty)) = -c_{-1}$ belgilanadi.

20.32. Qoldiqlar nazariyasi yordami bilan aniq integrallarni hisoblash. Kompleks funksiyadan yopiq chiziq bo’ylab olingan integrallarni hisoblash qiyin bo’lganda uning o’rniga qoldiqlar nazariyasi asosiy teoremasi yordamida integral belgisi ostidagi funksiyaning shu kontur ichida yotgan maxsus nuqtalariga nisbatan qoldiqlarini hisoblash qulay bo’ladi. Ko’p hollarda bu usul bilan haqiqiy argumentli funksiyadan olingan aniq integrallarni ham hisoblash mumkin. Buning uchun avval bu integrallarni yopiq chiziq bo’yicha olingan integralga keltiriladi, so’ngra qoldiqlar nazariyasi asosiy teoremasi qo’llaniladi.

1. Ushbu

$$J = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \quad (20.32.1)$$

ko’rinishidagi integralni qaraymiz, bunda $R(u, v)$, u va v larning ratsional funksiyasi. Bu erda $z = e^{ik}$ almashtirishni bajaramiz. Ravshanki, x 0 dan 2π gacha o’zgarganda kompleks o’zgaruvchisi z birlik doirani chizadi.

Eyler formulasiga asosan:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dx = -i \frac{dz}{z} = \frac{1}{iz} dz$$

bo’ladi. Bularni (20.32.1) ga qo’yish natijasida, uni

$$J = \int_{|z|=1} R_1(z) dz$$

ko’rinishga keltiramiz, bunda $R_1(z) = -\frac{i}{z} \left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i} \right)$ ning ratsional funksiyasi. Qoldiqlar nazariyasi asosiy teoremasiga asosan,

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R_i(z),$$

bunda $z_1, \dots, z_n$ lar $R_i(z)$ funksiyaning $|z| < 1$ doira ichida yotgan qutblari.

2. Ushbu

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx \quad (20.32.2)$$

ratsional funksiyadan olingan integralni qaraymiz, bunda (20.32.2) integral yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

(20.32.2) integralga qoldiqlar to'g'risidagi asosiy teoremasini qo'llab bo'lmaydi, chunki integrallash chizig'i cheksiz yopiq chiziq emas.

Asosiy teoremasini qo'llash uchun yordamchi $\Gamma_R = [-R; R] \cup C_R$ yopiq chiziqni (bunda C_R - yarim doira) hamda $J = \int_{\Gamma_R} R(z) dz$ integralni qaraymiz.

Bu integralni hisoblash uchun quyidagi yordamchi lemmadan foydalanamiz.

20.32.3-lemma ([2], 229-230 b.q.) $f(z)$ funksiya $\operatorname{Im} z \geq 0$ sohaning chekli sondagi maxsus nuqtalardan tashqari uning chegarasigacha uzluksiz bulsin. Agar

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} R(z) dz = 0 \quad (20.32.4)$$

bo'lsa (bunda C_R yarim aylana $|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$), u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} f(z), \quad (20.32.5)$$

(20.32.5) formulada qoldiq $f(z)$ funksiyaning hamma yuqori yarim tekislikdagi maxsus nuqtalar bo'yicha olingan.

Endi 20.32.3-lemmani (20.32.2) integralni hisoblashga tatbiq qilamiz. $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ bo'lsin, bunda $P_n(z)$ va $Q_m(z)$ lar mos ravishda n va m darajali ko'p hadlar. (20.32.2) integral yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $k = m - n \geq 2$ hamda $R(z)$ funksiyaning haqiqiy o'qda qutbga ega emasligi kelib chiqadi.

Demak, $z \rightarrow \infty$ da $R(z) \approx \frac{A}{z^k}$, $k \geq 2$ butun son. Istalgancha katta $|z|$ larda $|R(z)| \leq \frac{d}{|z|^2}$. U holda C_R yarim aylanada $|R(z)| \leq \frac{d}{R^2}$ tengsizlik bajariladi hamda

$$\left| \int_{C_R} R(z) dz \right| \leq \frac{d}{R^2} \pi R = \frac{d\pi}{R} \rightarrow 0.$$

Shunday qilib, (20.32.4) shart bajariladi, u holda lemmasiga asosan,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z_k > 0 \\ z = z_k}} \text{res } f(z), \quad (20.32.6)$$

bunda qoldiq $R(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi qutblari bo'yicha olingan.

Xuddi shunday

$$\int_{-R}^R f(x) dx = -2\pi i \sum_{\substack{\text{Im } z_k < 0 \\ z = z_k}} \text{res } f(z),$$

formula ham o'rinli ekanligi ko'rsatiladi.

20.32.7-misol. Ushbu

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$$

integralni hisoblang.

Yechilishi. $R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^4} = \frac{1}{(z+i)^4(z-i)^4}$ funksiya yuqori yarim tekislikda to'rtinchi tartibli $z=i$ qutbga ega. U holda (20.32.1) formulaga asosan,

$$\operatorname{res} R(z) = \frac{1}{3!} \left[\frac{1}{(z+i)^4} \right]_{z=-i}^{(3)} = -\frac{5i}{32}$$

hamda (20.30.3) formulaga ko'ra, $J = 2\pi i \operatorname{res} R(z) = \frac{5\pi}{16}$.

20.33. Analitik davom ettirish.

20.33.1-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa: 1) $f(z)$ funksiya E to'plamda aniqlangan; 2) $F(z)$ funksiya $E \subset D$ sohada analitik; 3) $z \in E$ da $f(z) = F(z)$. U holda $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning E to'plamdan D sohaga *analitik davomi* deyiladi.

20.33.2-teorema (analitik davomning yagonaligi). Agar E to'plam a limit nuqtaga ega bo'lib $E \subset D$ bo'lsa, u holda E to'plamdan D sohaga analitik davom ettirish yagona bo'ladi.

Misollar.

1. $\sin x, \cos x$ va $e^x, x \in \mathbf{R}$ funksiyalarning kompleks tekislikka analitik davomlari mos ravishda $\sin z, \cos z$ va $e^z, z \in \mathbf{C}$ funksiyalar bo'ladi.

2. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1, x \in \mathbf{R}$ funksiyaning kompleks tekislikka analitik davomi $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1, z \in \mathbf{C}$ funksiya bo'ladi

20-bob bo'yicha nazariy materiallarni mustahkamlash uchun topshiriqlar

1. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Modul va argument haqidagi teorema. n -darajali ildiz chiqarish ([2], 3-16; [3], 4-20 va 27-41 betlar, [7],[9]).

2. Kompleks sonli ketma-ketlikning limiti ([2], 30-34 betlar, [7],[9]).

3. Kompleks argumentli funksiyaning limiti va uzluksizligi ([2], 42-47 betlar; [7],[9]).

4. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasi ([2], 48-56 betlar; [2], 57-64 betlar; [3], 79-86 betlar, [7],[9]).

5. Koshi-Riman sharti. Garmonik funksiyalar ([2], 49-53 betlar; [3], 91-102 betlar, [7],[9]).

6. Haqiqiy yoki mavhum qismi bo'yicha analitik funksiyaning qurish ([6], 52-56 betlar; [3], 86-90 betlar, [7],[9]).

7. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral ([2], 135-140 betlar, [7],[9]).

8. Kompleks argumentli funksiyalarni integrallash ([2], 111-114 betlar; [3], 104-113 betlar, [7],[9]).

9. Koshi teoremasi ([2], 120-139 betlar; [3], 120-122 betlar, [7],[9]).

10. Bir bog'lamli sohada Koshining integral formulasi ([2], 145-149 betlar; [3], 123-131 betlar, [7],[9]).

11. Kompleks sonli va funksional qatorlar. Koshi-Adamar formulasi. ([2], 188-206 betlar; 207-213 betlar; 214-217 betlar; [3], 136-143, 144-151, 152-162 betlar, [7],[9]).

12. Maxsus nuqtalar ([2], 234-244 betlar; 245-252 betlar; [3], 181-195 betlar, [7],[9]).

13. Loran qatori. Maxsus nuqtalar atrofida Loran qatoriga yoyish ([2], 236-244 betlar; [3], 164-177 betlar, [7],[9]).

14. Qoldiqlar nazariyasi elementlari ([2], 262-295 betlar; [3], 200-214 betlar, [7],[9]).

15. Qoldiqlar nazariyasi yordamida aniq integrallarni hisoblash ([2], 297-304 va 305-512 betlar; [3], 215-226 betlar, [7],[9]).

20.1-amaliy mashg'ulot.

Ketma-ketlikning limitini topish

1-misol. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, berilgan ketma-ketliklarning ko'rsatilgan limitga ega ekanligini isbotlang

$$z_n = \frac{n+in+1-i}{n}; \quad a=1+i.$$

Yechilishi. $\varepsilon > 0$ - ixtiyoriy son bo'lsin. $a=1+i$ nuqtaning ε - atrofini qaraymiz. Shunday N nomer topiladiki, $n > N$ da qaralayotgan ketma-ketlikning barcha z_n nuqtalari $a=1+i$ nuqtaning ε - atrofida joylashishini ko'rsatish kerak, boshqacha aytganda,

$$|z_n - (1+i)| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib,

$$|z_n - (1+i)| = \left| \frac{n+in+1-i}{n} - (1+i) \right| = \left| \frac{1-i}{n} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

U holda (1) tengsizlik $\frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$ ko'rinishga ega. $N = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ sonning butun qismi bo'lsin (agar $\frac{\sqrt{2}}{n} < 1$ bo'lsa, u holda $N = 1$). Bunda har bir $n > N$ da $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$ uchun (1) tengsizlik bajariladi. $1+i$ nuqtaning atrofini tanlash ixtiyoriyligidan ko'rinadiki, $1+i$ son $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi.

2-misol. Ushbu

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{2n+5}{3n+4} + i \frac{4n-7}{5n-2} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

kompleks sonlar ketma-ketligining limitini toping.

Yechilishi. Ravshanki, $z_n = \frac{2n+5}{3n+4} + i \frac{4n-7}{5n-2} \quad (n = 1, 2, \dots)$ kompleks sonning haqiqiy qismi $x_n = \frac{2n+5}{3n+4}$, $(n = 1, 2, \dots)$ mavhum qismi esa, $y_n = \frac{4n-7}{5n-2}$, $(n = 1, 2, \dots)$ bo'ladi.

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n+4} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-7}{5n-2} = \frac{4}{5}$$

ekanini e'tiborga olsak, unda teoreмага ko'ra berilgan kompleks sonlar ketma-ketligining limiti $\frac{2}{3} + i \frac{4}{5}$ ga teng bo'lishini topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{3n+4} + i \frac{4n-7}{5n-2} \right) = \frac{2}{3} + i \frac{4}{5}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, berilgan ketma-ketliklarning ko'rsatilgan limitga ega ekanligini isbotlang.

a) $z_n = \frac{n^2 + 3i}{n^2 - 2i}; a = 1.$

b) $z_n = \frac{in^2 + 2n^2 + 1}{n^2 + i}; a = 2 + i.$

c) $z_n = \frac{in^3 + 3}{2n^3 - i}; a = \frac{i}{2}.$

2. Ushbu ketma-ketliklarning limitga (chekli yoki cheksiz) ega ekanligini aniqlang va limit mavjud bo'lsa uni toping. Kompleks tekislikda ketma-ketlikning birinchi beshta hadini tasvirlang.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_n = \left(\frac{e^n}{2}\right)^n; & \text{b) } z_n = i^{(-1)^n}; \\ \text{c) } z_n = \left(2 + \frac{i}{n}\right)^n; & \text{d) } z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}. \end{array}$$

3. a kompleks parametrning qanday qiymatlarida ketma-ketlik yaqinlashadi:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left\{ \frac{a^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}; & \text{b) } \{na^n\}_{n=1}^{\infty}; \\ \text{c) } \left\{ \frac{a^n}{1+a^n} \right\}_{n=1}^{\infty}; & \text{d) } \{1+a+\dots+a^n\}_{n=1}^{\infty}. \end{array}$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

2. a) 0. b) ega emas. c) ∞ . d) ega emas. 3. a) barcha qiymatlarida. b) barcha qiymatlarida. c) $|a| < 1$, $|a| > 1$ va $a=1$ da. d) $|a| < 1$, $|a| > 1$ va $a=1$ da.

20.2-amaliy mashg'ulot.

Kompleks argumentli funksiyaning limiti va uzluksizligi

1-misol. Ushbu $f(z) = z^2 + 1 + i$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Yechilishi. Berilgan funksiyani $f(z) = u + iv$ ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} u + iv &= z^2 + 1 + i = (x + iy)^2 + 1 + i = x^2 + 2ixy + (iy)^2 + 1 + i = \\ &= x^2 - y^2 + 1 + i(2xy + 1). \end{aligned}$$

Bundan quyidagilarni topamiz:

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 1; \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy + 1.$$

2-misol. Ushbu

$$f = \frac{x(ix-1)+iy(y+1)}{x^2+y^2}$$

funksiyani $z = x + iy$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalang.

Yechilishi. $z = x + iy$ ekanligini hisobga olib berilgan funksiyani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x(ix-1)+iy(y+1)}{x^2+y^2} = \frac{i(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \\ &= i - \frac{1}{x+iy} = i - \frac{1}{z} = \frac{iz-1}{z}. \end{aligned}$$

Demak, $f(z) = \frac{iz-1}{z}$.

3-misol. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \operatorname{Im} z}{|z|}$ ($z \neq 0$) limitni hisoblang.

Yechilishi. Avvalo $f(z) = \frac{z^2 \operatorname{Im} z}{|z|}$ funksiyaning haqiqiy va mavhum

qismlarini topamiz:

$$f(z) = \frac{z^2 \operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{(x+iy)^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Demak, $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \frac{x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ma'lumki,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Bundan, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} v(x, y)$ tenglikka ko'ra,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \operatorname{Im} z}{|z|} = 0$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ funksiyaning $z = 0$ nuqtada limitga ega ekanligini ko'rsating, agar limiti mavjud bo'lsa, uni toping.

Yechilishi. Avval $z_n = \frac{i}{n} \rightarrow 0$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz.

$\operatorname{Re} z_n = 0$ ekanligidan $f(z_n) = 0$ va unga mos funksiyaning qiymatlari $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$

ketma-ketligi 0 ga yaqinlashadi. Endi 0 ga yaqinlashuvchi $z'_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}$ ketma-ketlikni olamiz. $\operatorname{Re} z'_n = \frac{1}{n}$ va $\operatorname{Im} z'_n = \frac{1}{n^2}$ shuning uchun $f(z'_n) = 1$ va $\{f(z'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik 1 ga yaqinlashadi. 0 ga yaqinlashuvchi ikkita $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarga mos keluvchi funksiyalar qiymatlarining $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{f(z'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklari turli xil limitlarga ega. Bundan $f(z)$ funksiya $z=0$ nuqtada limitga ega emas degan xulosaga kelamiz.

5-misol. Quyidagi

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & |z| > 1; \\ z, & |z| = 1; \\ z^2, & |z| < 1. \end{cases}$$

funksiyalarning aniqlanish sohasini, uzluksizlik va uzilish nuqtalarini toping.

Yechilishi. a) Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D=C$ butun kompleks tekislikdir. $f(z) = \frac{1}{z}$ funksiya ikkita uzluksiz funksiyaning nisbati sifatida

$\{z: |z| > 1\}$ to'plamda uzluksizdir, ya'ni ixtiyoriy $z_0 \in \{z: |z| > 1\}$ uchun $f(z_0) = \frac{1}{z_0}$

va $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0}$. Xuddi shuningdek $f(z) = z^2$ funksiya ham $\{z: |z| < 1\}$ to'plamda

uzluksizdir. Funksiyani birlik aylana $|z|=1$ da uzluksizlikka tekshiramiz. $f(z)$ funksiya $|z|=1$ aylananing biror ζ nuqtasida uzluksiz bo'lishi uchun z nuqta ζ ga $|z| < 1$ doiraning ichkarisidan, tashqarisidan va $|z|=1$ aylana bo'yicha intilgandagi limitlar mavjud bo'lib, quyidagi tengliklar bajarilishi kerak:

$$\lim_{|z|<1: z \rightarrow \zeta} f(z) = \lim_{|z|>1: z \rightarrow \zeta} f(z) = \lim_{|z|=1: z \rightarrow \zeta} f(z) \quad \text{yoki} \quad \zeta^2 = \zeta = \frac{1}{\zeta}.$$

Bu shartlarni aylananing yagona $\zeta=1$ nuqtasigina qanoatlantiradi. Demak, berilgan funksiya birlik aylananing $\zeta=1$ nuqtasida uzluksiz bo'lib, qolgan nuqtalarda uzilishga egadir. Shunday qilib, funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami $\{z: z \in C, |z|=1\} \setminus \{1\}$ dan iborat.

Demak, funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami $\{z: z \in C, |z|=1\} \setminus \{1\}$ dan iborat.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi funksiyalarning haqiqiy va mavhum qismlarini toping:

a) $f(z) = z - \frac{1}{z}$;

b) $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$;

c) $f(z) = \overline{z^2} + |z|^2$;

d) $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

2. Keltirilgan funksiyalarni $z = x + iy$ o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalang:

a) $f = \frac{y - ix}{x^2 + y^2}$;

b) $f = y^3 - 3x^2y + y + i(x^3 - 3xy^2 - x)$;

c) $f = \frac{x^2 + y^2 + x + i(x^2 + y^2 - y)}{x^2 + y^2}$.

3. Ushbu funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtalardagi limitga ega ekanligini ko'rsating, agar limiti mavjud bo'lsa, uni toping.

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $z = 0$;

b) $f(z) = \frac{|z|}{z}$, $z = 0$;

c) $f(z) = \frac{z}{z-i}$, $z = \infty$.

4. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini, uzluksizlik va uzilish nuqtalarini toping.

a) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2}, & |z| > 1; \\ z^2, & |z| = 1; \\ z^3, & |z| < 1. \end{cases}$

b) $f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 0; \\ i, & z = 0; \\ 1, & z = \infty. \end{cases}$

c) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2(z^2 + 1 + i)}{\sin^2 z}, & z \neq 0; \\ 1 + i, & z = 0 \end{cases}$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $\operatorname{Re} f = x - \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} f = -y + \frac{y}{x^2 + y^2}$. b) $\operatorname{Re} f = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$,

$\operatorname{Im} f = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$. c) $\operatorname{Re} f = 2x^2$, $\operatorname{Im} f = -2xy$. d) $\operatorname{Re} f = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$,

$\operatorname{Im} f = -\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}$. 2. a) $f(z) = -\frac{i}{z}$. b) $f(z) = iz(z^2 - 1)$. c) $f(z) = 1 + i + \frac{1}{z}$.

3. a) mavjud emas. b) mavjud emas. c) 1. 4. b) $\{z: z \in \mathbb{C}, |z|=1\} \setminus \{i\}$ uzilish nuqtalari to'plami. c) $z=0$ nuqtadan tashqari butun kompleks tekislikda uzluksiz. d) butun kompleks tekislikda uzluksiz.

20.3-amaliy mashg'ulot. Darajali qatorlar.Koshi-Adamar formulasi

1-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechilishi. Qator butun kompleks tekislikda yaqinlashadi, chunki $\forall z$ uchun shunday n_0 ni ko'rsatish mumkinki, $n > n_0$ da $\left| \frac{z}{n} \right| < \frac{1}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\left| \frac{z^n}{n^n} \right| < \frac{1}{2^n}$. Bundan taqqoslash teoremasiga ko'ra qatorning ixtiyoriy z nuqtada yaqinlashishi kelib chiqadi.

2-misol. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish radiusini toping:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n} z^n.$$

Yechilishi. Koshi-Adamar formulasidan foydalanamiz: ya'ni $R = \frac{1}{l}$,

bu yerda $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Bunda $|c_n| = \left| \frac{i^n}{3^n} \right| = \frac{1}{3^n}$ bo'lib,

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \quad R = 3$$

teng bo'ladi.

3-misol. Ushbu qatorlarning yaqinlashish doirasini toping:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+i)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1}}$$

Yechilishi. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ formuladan foydalanamiz. Bunda

$c_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1}}$, $c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2} \cdot 2^n}$ bo'lib, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+2} \cdot 2^n \cdot (-1)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n+1}} \right| = 6$ ni hosil qilamiz.

Demak, berilgan qatorning yaqinlashish doirasi $|z+i| < 6$ dan iborat.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish radiusini toping:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$.

2. Ushbu qatorlarning yaqinlashish doirasini toping:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^{n-1} \cdot 3^{1-n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{(2i)^n}$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. b) $R = e$. c) $R = \frac{1}{e}$. d) $R = 1.2$. b) $|z-2i| < \frac{5}{3}$. c) $|z| < \infty$. d) $|z+i| < 2$.

20.4-amaliy mashg'ulot

Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning hosilasi

1-misol. Quyidagi $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ funksiya differensiallanuvchimi?

Yechilishi. Koshi-Riman shartini tekshiramiz. Funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini yozib olamiz va kerakli hosilalarni hisoblaymiz

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy, \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ Koshi-Riman shartlari bajarildi, demak funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi quyidagiga teng bo'ladi

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z,$$

2-misol. Quyidagi $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ funksiya differensiallanuvchimi?

Yechilishi: Funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini topib, Koshi-Riman shartini tekshiramiz

$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Koshi-Riman sharti bajariladi, demak funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi quyidagicha topiladi:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

$$f(z) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z, \quad f(z) = e^z.$$

3-misol. Ushbu $w = f(z) = z \operatorname{Im} z$ funksiyaning differensiallanuvchi bo'ladigan barcha nuqtalarni toping, bu yerda $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z = y$, $z = x + iy \in E = \mathbb{C}$.

Yechilishi. Bu funksiyaning $z = 0$ nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(z+h) - f(z) = (z+h) \operatorname{Im}(z+h) - z \operatorname{Im} z = \\ &= (z+h)(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h) - z \operatorname{Im} z = z \operatorname{Im} h + h \operatorname{Im} z + h \operatorname{Im} h. \end{aligned}$$

Bundan hosila ta'rifidagi nisbat quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = z \frac{\operatorname{Im} h}{h} + \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h \quad \text{va} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Im} h = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z.$$

Ikkala limit ham $z (z \in \mathbb{C})$ -ning ixtiyoriy qiymatida mavjud. Birinchi qo'shiluvchi $z \frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ning limitini hisoblaymiz: $\lim_{h \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{Im} h}{h}$.

Agar $z = 0$ bo'lsa, bu limit mavjud va nolga teng. Demak, funksiya $z = 0$ nuqtada monogen va uning hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(0) = 0$.

Agar $z \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada funksiyaning monogen yoki monogen bo'lmashligi $\frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ifodaning limiti mavjud yoki mavjud emasligidan bog'liq bo'ladi. Endi limitni hisoblaymiz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} h}{h} = \begin{cases} 0, & h = h_1 + ih_2 \quad h_2 = 0, \quad h_1 \rightarrow 0 \\ \frac{1}{i}, & h = h_1 + ih_2 \quad h_1 = 0, \quad h_2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Bu yerdan ravshanki limitning natigasi h ning nolga intilish yo'lidan bog'liq ekan. Bu tanlab olingan ikkita yo'l bo'yicha nolga intilganda limitlar har xil (0 va $-i$), ya'ni limit mavjud emas. Demak $z \neq 0$ nuqtalarda hosila ham mavjud emas ekan.

4-misol. Ushbu $w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ funksiyaning bir qiymatli analitiklikka tekshiring.

Yechilishi. Ta'rifga asosan $w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ funksiyaning bir qiymatli analitik ekanligini ko'rsatamiz

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \frac{e^h - 1}{h}, \quad h = \Delta z,$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z \cdot 1 = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demak, $w = e^z$ funksiya kompleks tekislikda monogen, ya'ni bu funksiya kompleks tekislikda bir qiymatli analitik bo'ladi va uning hosilasi $(e^z)' = e^z$.

5-misol. Ushbu $f(w) = e^w$, $w = g(z) = az$, $a = \text{const}$ funksiyalarning hosilasini toping.

Yechilishi. Bu funksiyalarning har biri kompleks $\mathbb{C}$ tekislikda aniqlangan va shu tekislikda differensiallanuvchi $f'(w) = e^w$, $g'(z) = a$, shuning uchun murakkab $F(z) = e^{g(z)} = e^{az}$ funksiya ham kompleks tekislikda aniqlangan va differensiallanuvchi. Ya'ni, $F(z) = e^{az}$ funksiyaning hosilasi uchun $F'(z) = ae^{az}$ formula o'rinli. Shu formuladan foydalanib, $w = \sin az$, $z \in \mathbb{C}$, $a = \text{const}$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz.

Eyler formulasidan $\sin az = \frac{e^{iza} - e^{-iza}}{2i}$ va

$$(\sin az)' = \frac{1}{2i} \cdot [(e^{iza})' - (e^{-iza})'] = \frac{1}{2i} (e^{iza} ai - (-ia)e^{-iza}) = a \frac{e^{iza} + e^{-iza}}{2} = a \cos az.$$

Demak, $(\sin az)' = a \cos az$, $z \in \mathbb{C}$ $a = \text{const}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Funksiya differensiallanuvchi bo'ladigan barcha nuqtalarni toping:

a) $f(z) = z \operatorname{Re} z$;

b) $f(z) = |z|^2$;

c) $f(z) = \operatorname{Im} z$;

d) $f(z) = z|z|^2$.

2. Ushbu funksiya kompleks tekislikning qanday nuqtalarida hosilaga ega ekanligini aniqlang. Bu nuqtalardagi hosilasi nimaga teng? Berilgan funksiya kompleks tekislikning analitik bo'ladimi?

a) $f(z) = z^2 + i|z|^2$;

b) $f(z) = x^2 + iy^2$;

c) $f(z) = y \cdot x + i(x^2 - y^2)$;

d) $f(z) = \frac{1}{z}$.

3. Quyidagi funksiyalarning qayerda differensiallanuvchi ekanligini aniqlang va hosilasini hisoblang:

a) $f(z) = ze^{-z}$;

b) $f(z) = \frac{e^z}{z}$;

c) $f(z) = \frac{z \cos z}{1 + z^2}$;

d) $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $z=0$ nuqtada; b) $z=0$ nuqtada; c) hech qayerda; d) $z=0$ nuqtada.
 2. a) $f'(0)=0$, hech qayerda bir qiymatli analitik emas; b) $y=x$ to'g'ri chiziq nuqtalarida hosilaga ega, barcha nuqtalarida $f'=2x$; hech qayerda bir qiymatli analitik emas; c) $f'(0)=0$; d) $z=0$ nuqtadan tashqari hamma joyda bir qiymatli analitik, $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$. 3. a) $f'(z)=(1-z)e^{-z}$. b) $f'(z)=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)e^z, z \neq 0$
 c) $f'(z)=\frac{(1+z^2)(\cos z - \sin z) - 2z \cos z}{(1+z^2)^2}, z \neq \pm i$. d) $f'(z)=\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$.

20.5-amaliy mashg'ulot.

Haqiqiy yoki mavhum qismi bo'yicha analitik funksiyani qurish

1-misol. Ushbu $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2, z = x + iy \in \mathbb{C}$ funksiyaga ko'ra, bir qiymatli analitik funksiyani tiklang.

Yechilishi. 1-usul. a) $u(x, y)$ funksiyaning garmonikligini tekshiramiz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + 2 = 0.$$

$u(x, y)$ garmonik funksiya ekan, demak u $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy qismidan iborat bo'ladi.

b) $u(x, y) = x^2 - y^2$ funksiyaga qo'shma garmonik bo'lgan $v(x, y)$ funksiya Koshi-Riman sistemasi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

va quyidagi formuladan topiladi.

$$v(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} 2y dx + 2x dy + c, \quad c = \text{const}$$

integralning qiymati M_0 va M nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziqdan bog'liq emas. Integralni oson hisoblash maqsadida M_0 va M nuqtalarni tutashtiruvchi koordinata o'qlariga parallel ikkita kesmadan tuzilgan siniq chiziqni olamiz. Birinchi kesma $[M_0(x_0, y_0), M(x, y_0)]$ bu yerda $dy=0$; ikkinchi kesma $[M(x, y_0), M(x, y)]$ bu yerda $dx=0$.

Demak,

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x 2y_0 dx + \int_{y_0}^y 2x dy + c = 2y(x - x_0) + 2x(y - y_0) + c =$$

$$= 2xy - 2x_0y_0 + c = 2xy + c_1, \quad c_1 = c - 2x_0y_0 = \text{const} \text{ ya'ni } v(x, y) = 2xy + c_1.$$

Bu misolni yechishning ikkinchi usulini keltiramiz.

2-usul.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad v(x, y) = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y),$$

$$2x + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = c = \text{const}, \quad v(x, y) = 2xy + c.$$

Kompleks tekislikda $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy + ic$ kompleks funksiyani tuzamiz, bunda x, y o'zgaruvchining $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ orqali ifodasidan foydalanamiz

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$f(z) = \frac{(z + \bar{z})^2}{4} - (z + \bar{z})(z - \bar{z}) - \frac{(z - \bar{z})^2}{4} + ic = z^2 + ic, \quad f(z) = z^2 + ic.$$

Agar $f(0) = 0$ bo'lsa, u holda $0 = 0 + ic$ va $c = 0$ bo'ladi. Bundan $f(z) = z^2$.

2-misol. Differensiallanuvchi $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$ bo'lsa, uning mavhum qismi $v(x, y)$ ni toping?

Yechilishi. Koshi- Riman shartidan foydalanamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

bo'lgani uchun $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$, bu tenglikning ikkala tomonini y bo'yicha

integrallasak $v(x, y) = 2xy - y + \varphi(x)$, $\varphi(x)$ - ixtiyoriy funksiya, ni hosil qilamiz.

Ushbu $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ shartga ko'ra, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$, dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \varphi'(x)$ ni hosil

qilamiz. Berilgan shartga ko'ra $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ bo'ladi. Natijada quyidagi

tenglikni hosil qilamiz

$$-2y - \varphi'(x) = -2y, \quad \varphi'(x) = 0,$$

bundan $\varphi(x) = C$ - o'zgarmas son bo'lib, izlanayotgan funksiya quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C) = x^2 - y^2 + 2xyi - (x + yi) + Ci,$$

$$f(z) = (x + yi)^2 - (x + yi) + Ci,$$

bu yerdan $f(z) = z^2 - z + C_1$.

3-misol. Differensiallanuvchi $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi $v(x, y) = x + y$ berilgan. Uning haqiqiy qismini toping.

Yechilishi. $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$ bo'lgani uchun Koshi- Riman shartiga ko'ra $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ bo'ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini x bo'yicha integrallab, quyidagilarni hosil qilamiz

$$u = x + \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y)$$

shartga ko'ra $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ bo'ladi. Yana Koshi- Riman shartiga ko'ra,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varphi'(y) = -1$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan tenglikni integrallab quyidagini olamiz

$$\varphi(y) = -y + C \quad \text{va} \quad u = x - y + C.$$

Demak, izlangan funksiya quyidagicha ekan

$$f(z) = x - y + C + i(x + y) = (1 + i)(x + yi) + C \quad f(z) = (1 + i)z + C, \quad C = \text{const.}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu funksiyalarni garmoniklikka tekshiring:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$;

b) $u(x, y) = x \cdot y$;

c) $u(x, y) = x^2 + y^2$;

d) $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

2. $v(x, y)$ qo'shma garmonik funksiyaning toping:

a) $u(x, y) = xy$;

b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$;

c) $u(x, y) = e^x \cos y$

d) $u(x, y) = x \cos y \sinh x - y \sin y \cosh x$

3. Berilgan funksiya ko'ra bir qiymatli analitik funksiyaning tiklang:

a) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$;

b) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^3 + 6x^2 y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0$;

c) $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = e^x \cos y$;

d) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 0$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) Ha; b) Ha; c) Yo'q; d) Yo'q. 2. a) $v(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$; b)

$v(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$; c) $v(x, y) = e^x \sin y$; d) $v(x, y) = y \cos y \sinh x + x \sin y \cosh x + C$.

3. a) $f(z) = i(z^3 + C)$; b) $f(z) = (1 - 2i)z^3$; c) $f(z) = e^z + C$; d) $f(z) = ze^z$.

20.6-amaliy mashg'ulot.

Kompleks argumentli funksiyalarni integrallash

1-misol. a) $f(z) = 1$; b) $f(z) = z$ funksiyalardan L esa kompleks tekislikning A va B nuqtalarni tutashtiruvchi silliq egri chiziq bo'yicha olingan integralni hisoblang.

Yechilishi. a) Integral yig'indini ta'rifi bo'yicha tuzamiz:

$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = B - A,$$

formuladan $\int_L dz = B - A$ tenglik kelib chiqadi.

Agar L yopiq egri chiziq bo'lsa, u holda $A = B$ va $\int_L dz = 0$ bo'ladi.

b) Endi $f(z) = z$ bo'lsin. Bu uzluksiz funksiya. Integral yig'indi

$$\sum_{k=1}^n \zeta_k (z_k - z_{k-1})$$

iborat. Ravshanki, unung limiti mavjud. Endi $\zeta_k = z_{k-1}$ va $\zeta_k = z_k$ deb olamiz. Limitning mavjudligi z_k , ζ_k nuqtalarning tanlanishidan bog'liq emas. $\zeta_k = z_k$ deb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \zeta_k (z_k - z_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_{k-1} (z_k - z_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k (z_k - z_{k-1}) = \int_L z dz$$

ni hosil qilamiz.

Demak,

$$2 \int_L z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_n^2 - z_0^2 = B^2 - A^2.$$

Bundan $\int_L z dz = \frac{B^2 - A^2}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar L yopiq bo'lsa, u holda $\int_L z dz = 0$.

2-misol. Ushbu $f(z) = (y+1) - xi$ funksiyadan $z_A = 1$ va $z_B = -i$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesma bo'yicha olingan $\int_{AB} f(z) dz$ integralni hisoblang.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini yozib olamiz $u = y + 1$, $v = -x$

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} (y+1) dx + x dy - i \int_{AB} x dx - (y+1) dy =$$

$$= (y+1) \cdot x \Big|_{x=1}^{x=0, y=-1} - i \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=0} + i \cdot \frac{(y+1)^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=-1} = -1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -1.$$

Bu integralni f funksiyaning ifodasini z o'zgaruvchi orqali ifodalab olib ham hisoblash mumkin: $f(z) = 1 - iz$

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_1^{-1} (1 - iz) dz = \frac{(1 - iz)^2}{-2i} \Big|_1^{-1} = \frac{(1 + i^2)^2}{-2i} + \frac{(1 - i)^2}{2i} = \frac{1 - 2i + i^2}{2i} = -1.$$

3-misol. Ushbu $f(z) = x^2 + y^2 i$ funksiyadan $A = 1 + i$ va $B = 2 + 3i$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesma bo'yicha olingan $\int_{AB} f(z) dz$ integralni hisoblang.

Yechilishi. $u = x^2$ va $v = y^2$ ekanligi ravshan, demak,

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} x^2 dx - y^2 dy + i \int_{AB} y^2 dx + x^2 dy.$$

Birinchi integral oddiy aniq integral kabi hisoblanadi:

$$\int_{AB} x^2 dx - y^2 dy = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^3 y^2 dy = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}$$

Ikkinchi integralni hisoblash uchun AB to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzamiz:

$(y-1)/(3-1) = (x-1)/(2-1)$ bundan $y = 2x - 1$ to'g'ri chiziqning tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerdan $dy = 2dx$ ni topib egri chisikli integralni aniq integralga keltirib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{AB} y^2 dx + x^2 dy &= \int_1^2 [(2x-1)^2 + 2x^2] dx = \\ &= \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1) dx = (2x^3 - 2x^2 + x) \Big|_1^2 = 10 - 1 = 9. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\int_{AB} f(z) dz = -\frac{19}{3} + 9i.$

4-misol. Ushbu $\int_{\gamma} z dz$ integralni hisoblang.

Yechilishi. Integral ostidagi funksiya analitik bo'lgani uchun Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanamiz:

$$\int_{\gamma} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^{1+i} = \frac{1}{2} [(1+i)^2 - 1^2] = \frac{1}{2} (1 + 2i - 1 + 1) = \frac{1}{2} + i.$$

5-misol. Ushbu $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ integralni hisoblang, bu yerda γ – yopiq kontur

$$x = \cos t, \quad y = \sin t.$$

Yechilishi. $\bar{z} = x - yi$ va $dz = dx + i dy$ bo'lgani uchun, u holda

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma} x dx + y dy + i \int_{\gamma} x dy - y dx$$

bo'ladi. Birinchi integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya to'liq differensialdan iborat. Ikkinchi integralni quyidagilarni hisobga olib hisoblaymiz:

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt \quad \text{va} \quad x dy - y dx = \cos^2 t dt + \sin^2 t dt = dt$$

larni e'tiborga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

6-misol. Ushbu $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4}$ integralni hisoblang, bu yerda γ – ellips kontri

$$x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t.$$

Yechilishi: Integral ostidagi funksiya ellips bilan chegaeralanga sohada analitik bo'lgani uchun, integral nolga teng bo'laadi, ya'ni

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4} = 0.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int_L |z| dz$ Suyidagi integrallarni hisoblang, bunda L :

a) -1 va 1 nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi.

b) $|z|=1$ birlik aylananing quyi yarmi. Integrallash yo'lining boshlang'ich nuqtasi $z=-1$.

c) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi to'g'ri chiziq kesmasi.

d) $z=-i$ nuqtadan $z=i$ nuqtaga boruvchi $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ yarim aylana.

2. $\int_{|z|=1} (z-1) |dz|$ integralni hisoblang.

3. $\int_0^i \frac{\ln z}{z} dz$ integralni hisoblang.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) 1. b) 2. c) i . d) $2i$. 2. 8. 3. $0,5(\ln i)^2$.

20.7-amaliy mashg'ulot.

Bir bog'lamli sohada Koshining integral formulasi

1-misol. Ushbu $\int_{|z+i|=1} \cos z \frac{dz}{z+1}$ integralni hisoblang.

Yechilishi. Integrallash chegarasi markazi $(0; 1)$, radiusi 1 ga teng bo'lgan aylanadan iborat. Zichlik funksiyasi $f(z) = \cos z$ butun kompleks tekislikda differensiallanuvchi, yadrosi $\frac{1}{z+1}$ esa $z = -1$ nuqtadan tashqari hamma joyda differensiallanuvchi. $z = -1$ nuqta $|z+i| < 1$ doiradan tashqarida joylashgan. $\varphi(z) = \frac{\cos z}{z+1}$ funksiya $|z+i| < 1$ doirada ikkita differensiallanuvchi funksiyaning nisbati sifatida differensiallanuvchi bo'ladi. Koshining integral teoremasiga ko'ra integralning qiymati nolga teng, ya'ni $\int_{|z+i|=1} \cos z \frac{dz}{z+1} = 0$.

2-misol. Ushbu $\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+1}$ integralni hisoblang.

Yechilishi. Integrallash chegarasi markazi $(0; 1)$ nuqtada, radiusi 3 ga teng bo'lgan $|z+i|=3$ aylanadan iborat. Zichlik funksiyasi $f(z) = \sin z$ butun kompleks tekislikda differensiallanuvchi, yadrosi $\frac{1}{z+1}$ esa $z = -1$ nuqtadan tashqari hamma joyda differensiallanuvchi. $z = -1$ nuqta $|z+i| < 3$ doirada joylashgan. Koshining integral formulasiga ko'ra

$$\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+1} = 2\pi i \sin(-1) = -2\pi i \sin 1.$$

3-misol. Ushbu

$$\int_{\partial D^*} \frac{z^2 e^z}{z^3 + 1} dz$$

integralni hisoblang, bu yerda $D^* = \left\{ z : |z+1| \leq \frac{1}{2} \right\}$.

Yechilishi. a) Birinchi navbatda ∂D^* ni aniqlaymiz. $\partial D^* = \left\{ z : |z+1| = \frac{1}{2} \right\}$ markazi -1 nuqtada, radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan aylana.

b) Integral ostidagi $\varphi(z) = \frac{z^2 e^z}{z^3 + 1}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini topamiz.

Bu funksiya ikkita $f(z) = z^2 e^z$ va $g(z) = z^3 + 1$ funksiyalarning nisbati sifatida C kompleks tekislikda differensiallanuvchi.

Demak, $F(z)$ funksiyaning uzilish nuqtalari $z^3 + 1 = 0$ tenglamaning ildizlaridan iborat bo'ladi. Ushbu

$$z + 1 = 0, z^2 - z + 1 = 0$$

tenglamalarning ildizlari $z_1 = -1, z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Demak, $F(z)$ funksiya chegarasi $\partial D = \{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ bo'lgan to'rt bog'lamli $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ sohada differensiallanuvchi. Ildizlardan faqat $z_1 = -1$ ildizi D^- sohaga tegishli, qolgan $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ nuqtalar esa yopiq $\bar{D}^+$ sohaga tegishli emas.

c) Koshi integralning formulasining yadrosi - $\frac{1}{z+1}$, zichlik funksiyasi esa $f(z) = \frac{z^2 e^z}{z^3 - z + 1}$ ekan. Koshining integral formulaga ko'ra integralning qiymati

$$2\pi i f(z_0) = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{(-1)^2 e^{-1}}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{2\pi i e^{-1}}{3} = \frac{2\pi i}{3e},$$

bunda $z_0 = -1$.

Demak,

$$\int_{\partial D^+} \frac{z^2 e^z}{z^3 + 1} dz = \int_{\partial D^+} \frac{z^2 e^z}{(z^2 - z + 1)(z - (-1))} dz = \frac{2\pi i}{3e}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Integralni hisoblang

a) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$

b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz.$

c) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz.$

d) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^2}.$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) 0. b) $2\pi i$. c) $2\pi i$. d) $-\frac{\pi i}{4}.$

20.8-amaliy mashg'ulot.

Yagonalik teoremasi

1-misol. $z = 0$ nuqta atrofida regulyar bo'lib, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

Yechilishi. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $z=0$ nuqta atrofida regulyar bo'lib, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}$ ($n \in N$) shartni qanoatlantirsin. Regulyar funksiyaning ta'rifidan $z=0$ nuqta atrofida quyidagi yoyilma o'rinni

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_k z^k + \dots,$$

shartga ko'ra

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = c_0 + c_1 \frac{1}{n} + c_2 \frac{1}{n^2} + \dots + c_k \frac{1}{n^k} + \dots = \frac{1}{3n+1}.$$

Oxirgi tenglikdan c_k ($k \in N$) koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Buning uchun $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib $c_0 = 0$ ni hosil qilamiz. U holda

$$\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots + \frac{c_k}{n^k} + \dots = \frac{1}{3n+1},$$

bundan $c_1 + \frac{c_2}{n} + \dots + \frac{c_k}{n^{k-1}} + \dots = \frac{n}{3n+1}$. Bu tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak $c_1 = \frac{1}{3}$ ni hosil qilamiz. Natijada

$$\frac{c_2}{n} + \dots + \frac{c_k}{n^{k-1}} + \dots = \frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3}, \quad c_2 + \dots + \frac{c_k}{n^{k-2}} + \dots = n \cdot \left(\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{3} \right).$$

Ko'rinib turibdiki, $n \rightarrow \infty$ da $c_2 = -\frac{1}{3^2}$ dir. Bu jarayonni davom ettirib

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{3^2}, \quad c_3 = \frac{1}{3^3}, \quad \dots, \quad c_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{3^k}, \quad \dots$$

koeffitsiyentlarni hosil qilamiz.

Demak,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}z - \frac{1}{3^2}z^2 + \frac{1}{3^3}z^3 + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1}{3^k} + \dots = \frac{z}{3} \left(1 - \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots + (-1)^k \left(\frac{z}{3}\right)^k + \dots \right) = \\ &= \frac{z}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{3}} = \frac{z}{3+z}, \quad z \in U_1(0) = \{z : |z| < 1\}. \end{aligned}$$

Haqiqatdan ham, $f(z) = \frac{z}{3+z}$ funksiya $z=0$ nuqta atrofida regulyar bo'lib, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n+1}$ ($n \in N$) shartni qanoatlantiradi. $z_n = \frac{1}{n}$, ($n \in N$) ketma-ketlikning limiti $z=0$ nuqta bo'lganligi uchun yagonalik teoremasiga ko'ra bu shartni qanoatlantiruvchi funksiya yagonadir. Demak, qilingan faraz to'g'ri bo'lib, bu funksiya $f(z) = \frac{z}{3+z}$ dan iborat.

2-misol. $D = \{z : |z| < 1\}$ sohada regulyar va $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$ shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

Yechilishi. $D = \{z : |z| < 1\}$ sohada regulyar $w = z^2$ funksiyaning qaraymiz. Faraz qilaylik, izlanayotgan regulyar funksiya mavjud bo'lib, uni $f(z)$ bilan belgilaylik. $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ nuqtalardan tashkil topgan E to'plamda bu ikki funksiyaning qiymatlarini taqqoslaymiz. Ularning qiymatlari bir xil. E to'plam $z = 0$ limitik nuqtaga ega, bundan yagonalik teoremasiga ko'ra butun $D = \{z : |z| < 1\}$ sohada $f(z) \equiv z^2$. Demak, izlanayotgan regulyar funksiya mavjud.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $z = 0$ nuqta atrofida regulyar va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$.

d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

2. Quyidagi funksiyalarning analitik davomini toping:

a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$.

b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $|z| < 1$.

c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, $|z| < 1$.

d) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$, $|z| < 1$.

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) Mavjud. b) Mavjud. c) Mavjud emas. d) Mavjud emas. 2. a)

$F(z) = \frac{1}{1+z}$, $z \in D = C \setminus \{-1\}$. b) $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \in D = C \setminus \{\pm i\}$.

c) $F(z) = \frac{1}{1-z^2}$, $z \in D = C \setminus \{\pm 1\}$. d) $F(z) = \frac{1}{1-z^4}$, $z \in D = C \setminus \{\pm 1, \pm i\}$.

20.9-amaliy mashg'ulot.

Maxsus nuqtalar. Loran qatori

1. Regulyar funksiyaning nollari

1-misol. Ushbu $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ funksiyaning nollarini toping va tartibini aniqlang.

Yechilishi. Regulyar funksiyaning noli ta'rifidan $\sin \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_k} = k\pi$, bundan

$$z_k = \frac{1}{k\pi} (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad z = \infty.$$

Demak, $z_k = \frac{1}{k\pi} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ va $z = \infty$ nuqtalar berilgan funksiyaning oddiy nollaridir.

2-misol. Ushbu $f(z) = (e^z + 1)^3$ funksiyaning nollarini toping va tartibini aniqlang.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning nollarini toppish uchun quyidagi tenglamani yechamiz

$$(e^z + 1)^3 = 0 \Rightarrow e^z + 1 = 0 \Rightarrow e^z = -1 \Rightarrow z_k = \ln(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2k\pi), \\ \Rightarrow z_k = (2k+1)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Demak, $f(z) = (e^z + 1)^3$ funksiya $z_k = (2k+1)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ nuqtalarda uchinchi tartibli nolga ega.

3-misol. Ushbu $f(z) = \frac{(z^3 + 1)^6}{(z^3 + 4)^{11}} e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning nollarini toping va tartibini aniqlang.

Yechilishi. $z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}, k = 0, 1, 2$ nuqtalar oltinchi tartibli nollar bo'ladi.

$$f(z) \approx \frac{z^{18}}{z^{22}} e^{\frac{1}{z}} \approx \frac{1}{z^4}, \quad (z \rightarrow \infty).$$

4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang.

Yechilishi. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiya kompleks tekislikning $z \neq 0$ bo'lgan barcha nuqtalarida regulyardir. $z = 0$ nuqtadagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots) = 1.$$

Bu limit mavjud va chekli, shuning uchun $z = 0$ nuqta berilgan funksiya uchun tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi.

5-misol. Ushbu $f(z) = \frac{z}{z-3}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang.

Yechilishi. Ushbu $f(z) = \frac{z}{z-3}$ funksiya kompleks tekislikning $z \neq 3$ bo'lgan barcha nuqtalarida ikkita regulyar funksiyalarning nisbati sifatida regulyar va $\lim_{z \rightarrow 3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z}{z-3} = \infty$. Demak, ta'rifga ko'ra $z = 3$ nuqta berilgan funksiyaning qutbi ekan.

6-misol. Ushbu $f(z) = \sin z$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va tipini aniqlang.

Yechilishi. $f(z) = \sin z$ funksiya butun kompleks tekislikda regulyar bo'lib, faqat $z = \infty$ nuqtadagina aniqlanmagan. Bu nuqtani muhim maxsus nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = a$ (bu misolda $a = \infty$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty$$

bo'ladigan quyidagi ikkita

$$\{z'_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\pi\}_{n=1}^{\infty}, \{z''_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(2n + \frac{1}{2})\pi\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ketma-ketliklarni tanlasak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n)$ bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin z''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n + \frac{1}{2})\pi = 1.$$

Bu limitlar bir-biriga teng emas. Demak, $z = \infty$ nuqta $f(z) = \sin z$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi funksiyalarning barcha nollarini toping va tartibini aniqlang:

a) $\frac{(z^2 + 9)^3}{z^4}$.

b) $\frac{(z^2 - 16)^3}{(z-1)^3}$.

c) $z + \sin z$.

d) $\frac{(z^2 - \pi^2) \cdot \sin z}{z^2}$.

2. $z = a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta ekanligini isbotlang:

a) $\frac{z^2 - 1}{z - 1}$ ($a = 1$).

b) $\frac{z^2 - 1}{z + 1}$ ($a = -1$).

c) $\frac{z^3 - z}{z + 1}$ ($a = -1$).

d) $\frac{1 - \cos z}{z^2}$ ($a = 0$).

3. $z = a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun qutb ekanligini isbotlang:

a) $\frac{1}{z} \quad (a=0).$ b) $\frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (a=1).$

c) $\frac{z+i}{(z^2+1)^2} \quad (a=i).$ d) $\frac{1-\cos z}{z^2} \quad (a=0).$

4. $z = a$ nuqta quyidagi funksiyalar uchun muhim maxsus nuqta ekanligini isbotlang:

a) $e^z \quad (a=\infty).$ b) $\cos z \quad (a=\infty).$

c) $e^{z^2} \quad (a=0).$ d) $z^2 \cos \frac{\pi}{z} \quad (a=0).$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $z = -3i$ va $z = 3i$ - ikkinchi tartibli nollar. b) $z = -4$ va $z = 4$ - uchinchi tartibli nollar. c) $z = 0$ - ikkinchi tartibli, $z = k\pi \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots)$ - birinchi tartibli noli. d) $z = \pm\pi$ - ikkinchi tartibli, $z = k\pi \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots)$ - birinchi tartibli noli.

2. Maxsus nuqtalar atrofida Loran qatori

1-misol. Ushbu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ Loran qatorining yaqinlashish sohasini toping.

Yechilishi. Berilgan qatorning to'g'ri qismini ifodalovchi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ qatorning yaqinlashish doirasini topamiz:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^{n+1}}{1 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n} + 3}{\frac{1}{3^n} + 1} = 3,$$

bu $|z| < 3$ doira.

Berilgan qatorning bosh qismi bo'lgan $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ qator uchun $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^{-n}}{1 + 3^{-n-1}} = 1$, bundan uning yaqinlashish sohasi $|z| > 1$ doiradan iborat ekanligi kelib chiqadi. Berilgan qator $1 < |z| < 3$ halqada yaqinlashadi.

2-misol. Ushbu $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ funksiyani $z = 0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoying hamda bosh va to'g'ri qismlarini ko'rsating.

Yechilishi. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots \right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$$

qatorning bosh qismi $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$, to'g'ri qismi esa $f_2(z) = z^2 + z + \frac{1}{2}$ dan iborat.

Cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida yaqinlashuvchi (bu qator $z=0$ nuqtadan tashqari butun kompleks tekislikda yaqinlashadi) (18) qator bu $f(z)$ funksiyani $z=\infty$ atrofida Loran qatoriga yoyilmasidan iborat. $z=\infty$ nuqta atrofida (18) qatorning bosh qismi $z^2 + z$ ga, to'g'ri qismi esa $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$ ga teng.

3-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ funksiyani z ning darajalari bo'yicha $z=0$ nuqtaning atrofida Loran qatoriga yoying.

Yechilishi. Berilgan funksiyani quyidagicha ifodalab olamiz $f(z) = \frac{-1/5}{1-2z/5}$. $z=0$ nuqtaning atrofida $\left| \frac{2z}{5} \right| < 1$ tengsizlik bajariladi shu sababli $\frac{-1/5}{1-2z/5}$ kasrni birinchi hadi $a = -1/5$ va maxraji $q = 2z/5$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi deb qarashimiz mumkin. Shu sababli quyidagini yozishimiz mumkin:

$$f(z) = -\frac{1}{5} - \frac{2z}{5^2} - \frac{2^2 z^2}{5^3} - \frac{2^3 z^3}{5^4} - \dots \text{ yoki } f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{n-1}}{5^n}$$

Bu yoyilmada qatorning faqat to'g'ri qismi qatnashgan. $\left| \frac{2z}{5} \right| < 1$ tengsizlikdan qatorning yaqinlashish sohasi quyidagi doiradan iboratligi kelib chiqadi $|z| < 5/2$.

4-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ funksiyani z ning darajalari bo'yicha $z=\infty$ nuqtaning atrofida Loran qatoriga yoying.

Yechilishi: Berilgan funksiyani quyidagicha ifodalab olamiz $f(z) = \frac{1}{2z-5} = \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{5}{2z}}$. $z=\infty$ nuqtaning atrofida $\left| \frac{5}{2z} \right| < 1$ tengsizlik bajariladi

shu sababli kasrni birinchi hadi $a = \frac{1}{2z}$ va maxraji $q = \frac{5}{2z}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi deb qarashimiz mumkin. Shu sababli quyidagini yozishimiz mumkin:

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{5^2}{2^2 z^2} + \frac{5^2}{2^3 z^3} + \frac{5^2}{2^4 z^4} + \dots \text{ yoki } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{2^n z^n}.$$

Yoyilmada qatorning to'g'ri qismi yo'q. Qator $|z| > 5/2$ sohada yaqinlashadi.

3. Tuzatib bo'ladigan maxsus nuqta

1-misol. Ushbu $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiyani $z=0$ maxsus nuqta atrofida Loran qatoriga yoying va maxsus nuqtaning tipini aniqlang.

Yechilishi. $\sin z$ funksiyaning $z=0$ nuqta atrofidagi yoyimasidan foydalanamiz:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Loran qatorining bosh qismi nolga teng.

Demak, 20.26-bandga ko'ra, $z=0$ nuqta $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiyaning bir qiymatli xarakterdagi qutilib bo'ladigan maxsus nuqtasi bo'ladi.

4. Qutb maxsus nuqta.

4-misol. $z=0$ nuqtani $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning Loran qatoriga yoyamiz. Bu funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

iborat bo'lib, bosh qismining cheksiz ko'p hadlari mavjud.

Demak, 20.28.1-teoremaga ko'ra, $z=0$ nuqta $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiya uchun muhim maxsus nuqta bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n.$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (z-i)^n.$$

$$d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$$

2. $1 < |z| < 2$ halqada z -ning darajalari bo'yicha loran qatoriga yoying.

$$a) \frac{1}{(z+1)(z-2)}.$$

$$b) \frac{3}{z^2+z-2}.$$

$$c) \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}.$$

$$d) \frac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}.$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1. a) $\frac{1}{2} < |z| < 2$. b) bo'sh to'plam. c) $|z-i| > 1$. d) $|z|=1$. 2. a)

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{n+1}}{3} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n. \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{2^{n+1}}. \quad c) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{5} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5 \cdot 4^{n+1}} z^{2n}. \quad d)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{3} z^n + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} z + \frac{7}{12} z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{17 \cdot (-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n.$$

20.10-amaliy mashg'ulot.

Qoldiqlar nazariyasi elementlari va uning tatbiqlari

Qoldiqlarni hisoblash.

1-misol. Quyidagi funksiyalarning maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarini toping:

$$1) f(z) = \frac{(e^z - 1)^4}{z^4},$$

$$2) f(z) = \frac{(e^z - 1)^4}{(z - 2\pi)^5}$$

$$3) f(z) = z^5 \cdot \sin \frac{1}{z},$$

$$4) f(z) = z^2 \cdot \sin^6 \frac{1}{z}.$$

Yechilishi. 1. $z_0 = 0$ nuqta $f(z) = \frac{(e^z - 1)^4}{z^4}$ funksiya uchun tuzatiladigan maxsus nuqta bo'ladi, shu sababli $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$.

2. $z_0 = 2\pi$ nuqta $f(z) = \frac{(e^z - 1)^4}{(z - 2\pi)^5}$ funksiya uchun birinchi tartibli qutb bo'ladi. Bu holda qoldiqni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - 2\pi)) = \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{(e^z - 1)^4}{(z - 2\pi)^5} \cdot (z - 2\pi) = \left(\lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{e^z - 1}{z - 2\pi} \right)^4 = \\ &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(e^z - 1)'}{(z - 2\pi)'} \right)^4 = \left(\lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{e^z}{1} \right)^4 = e^{3\pi} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

3. $z = 0$ nuqta $f(z) = z^5 \cdot \sin \frac{1}{z}$ funksiya uchun maxsus nuqta bo'ladi.

Bu funksiyaning $z = 0$ nuqta atrofidagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$f(z) = z^3 \cdot \sin \frac{1}{z^2} = z^3 - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots$$

shu sababli $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

4. $f(z) = z^2 \sin^6 \frac{1}{z}$ funksiya uchun $z = 0$ maxsus nuqta bo'ladi. Funksiya juft bo'lganligi sababli uning $z = 0$ nuqta atrofida Loran qatoriga yoyilmasida toq daraja ko'rsatkichlar qatnashmaydi, jumladan $\frac{1}{z}$ ham ishtirok etmaydi. Shu sababli $\frac{1}{z}$ ning koefitsienti c_{-1} nolga teng bo'ladi, demak $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 0$.

2-misol. Quyidagi funksiyalarning maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarini toping:

$$1) f(z) = \operatorname{ctgz}; \quad 2) f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Yechilishi. 1) $f(z) = \operatorname{ctgz} = \frac{\cos z}{\sin z}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$\sin z = 0 \Rightarrow z_k = \pi k \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. $\cos z_k \neq 0$, $\sin z_k = 0$, $(\sin z_k)' \neq 0$ bo'lganligi sababli formulaga ko'ra qoldiqni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname{res}_{z \rightarrow z_k} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=z_k} = 1.$$

2) $f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i. \quad z^3 \Big|_{z=\pm i} \neq 0, \quad (1+z^2) \Big|_{z=\pm i} = 0, \quad (1+z^2)' \Big|_{z=\pm i} \neq 0$$

shartlar bajarilganligi sababli qoldiqlarni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname{res}_{z \rightarrow z_k} \frac{z^3}{1+z^2} = \frac{z^3}{(1+z^2)'} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{2}.$$

3-misol. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z(e^{2z} - 1)}$ funksiyaning maxsus nuqtalaridagi qoldiqlarini hisoblang.

Yechilishi. e^z funksiyaning davri 2π ekanligini inobatga olib, berilgan funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$$z(e^{2z} - 1) = 0 \Rightarrow z_0 = 0, \quad 2z_k = 0 + 2\pi ki \Rightarrow z_0 = 0, \quad z_k = \pi ki \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

1. $z_k = \pi ki \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ maxsus nuqtalarni o'rganamiz. Buning uchun funksiyani quyidagicha ifodalab olish qulay $f(z) = \frac{1/z}{e^{2z} - 1}$, z_k nuqtalarda quyidagi shartlarning bajarilishini ko'ramiz: $1/z \neq 0$, $e^{2z} - 1 = 0$, $(e^{2z} - 1)' \neq 0$ bu holda qoldiq quyidagicha hisoblanadi:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res}_{z \rightarrow z_0} \frac{1/z}{e^{2z} - 1} = \frac{1/z}{(e^{2z} - 1)' \big|_{z=z_0}} = \frac{1}{2z_0 e^{2z_0}} = \frac{1}{2\pi ki}.$$

2. $z_0 = 0$ maxsus nuqtani tekshiramiz $f(z) = \frac{1}{z(e^{2z} - 1)}$. Bu nuqta $e^{2z} - 1$

funksiya uchun $(e^{2z} - 1)' = 2e^{2z} \big|_{z=0} \neq 0$, birinchi tartibli nol bo'ladi. Shu sababli

$e^{2z} - 1 = (z - 0) \cdot \varphi(z) = z \cdot \varphi(z)$, bu yerda $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow z(e^{2z} - 1) = z^2 \cdot \varphi(z)$ va $\varphi(0) \neq 0$.

Bu yerdan kelib chiqadiki, $z_0 = 0$ nuqta kasrning maxrajini uchun ($n=2$) ikkinchi tartibli surati uchun esa nol inchi tartibli ($k=0$) nol bo'ladi. $n-k=2-0=2$ bo'lgani sababli $z=0$ funksiya uchun ikkinchi tartibli qutb bo'ladi. Bu nuqtada qoldiq quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi.

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot (z - z_0)^n)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2}{z(e^{2z} - 1)} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{e^{2z} - 1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{2z} - 1) - z \cdot 2e^{2z}}{(e^{2z} - 1)^2}$$

Bu $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat, uni ochamiz. Buning

uchun quyidagi yoyilmadan foydalanamiz

$$e^{2z} = 1 + \frac{2z}{1!} + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{2z} - 1 = 2z + o(z), \quad e^{2z} \approx 1 + 2z.$$

Maxrajini $(e^{2z} - 1)^2$ unga ekvivalent bo'lgan $4z^2$ cheksiz kichik bilan almashtiramiz. U holda

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^{2z} - 1) - z \cdot 2e^{2z}}{(e^{2z} - 1)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2z + 2z^2 + 4z^3/3 + \dots) - 2z \cdot (1 + 2z + 2z^2 + \dots)}{(2z)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2z^2 - 8z^3/3 + \dots}{4z^3} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi funksiyalar maxsus nuqtalarining turlarini aniqlang va shu nuqtalardagi qoldiqlarini hisoblang.

$$1) f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}.$$

$$2) f(z) = z \cos \frac{1}{z + \pi}.$$

$$3) f(z) = \frac{shz^2}{z}.$$

$$4) f(z) = \frac{z^4}{(z + 2)^3}.$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

1) $z = 0, z = -1$ ikkinchi tartibli qutblar va $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -2$, $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 2$.

2) $z = -\pi$ muhim maxsus nuqta va $\operatorname{res}_{z=-\pi} f(z) = -\frac{1}{2}$. 3) $z = 0$ tuzatiladigan maxsus

nuqta va $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$. 4) $z = -2$ uchinchi tartibli qutblar va $\operatorname{res}_{z=-2} f(z) = 24$.

Qoldiqlar nazariyasi yordamida aniq integrallarni hisoblash

1-misol. Ushbu $\oint_{|z|=2} \frac{tgz}{z} dz$ integralni hisoblang.

Yechilishi: Integrallash konturi markazi koordinatalar boshida radiusi ikkiga teng bo'lgan aylanadan iborat, $|z|=2$, $R=2$; $D: |z| < 2$ sohada $f(z) = \frac{tgz}{z}$ funksiyani uchta $z=0$, $z=\frac{\pi}{2}$, $z=-\frac{\pi}{2}$ maxsus nuqtasi bor. D sohaning ichidagi uchta maxsus nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarida funksiya analitik bo'ladi. Qolgan $z_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=1, \pm 2, \pm 3 \dots$ maxsus nuqtalari D doiraning tashqarisida joylashgan. $z=0$ nuqta tuzatiladigan maxsus nuqta bo'lganligi uchun $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{tgz}{z} = 1$, $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$ bo'ladi. $z = \frac{\pi}{2}$, $z = -\frac{\pi}{2}$ nuqtalardagi qoldiqlarni quyidagi formuladan foydalanamiz: $\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$, bu yerda $\varphi(z_k) \neq 0$, $\psi(z_k) = 0$, $\psi'(z_k) \neq 0$. Shu sababli integral ostidagi funksiyani quyidagicha tasvirlaymiz: $\frac{tgz}{z} = \frac{(\sin z)/z}{\cos z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, yuqoridagi shartlarning bajarilishini ko'rsatib,

$$\varphi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pm \pi/2)}{\pm \pi/2} \neq 0, \quad \psi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \psi'\left(z_0\right) = -\sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$$

qoldiqlarni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=\pm \frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(\pm \pi/2)}{\psi'(\pm \pi/2)} = \frac{(\sin z)/z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = \mp \frac{2}{\pi}.$$

Demak,

$$\oint_{|z|=2} \frac{tgz}{z} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z)) = 0.$$

2- misol. Agar $(L): z=1+4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ aylana bo'lsa, quyidagi integralni hisoblang:

$$\oint_{(L)} \frac{z^2+1}{z-i} sh \frac{1}{z} dz.$$

Yechilishi: (L) kontur markazi $z_0=1$ nuqtada radiusi 4 ga teng bo'lgan aylanadan iborat. Integral ostidagi funksiyani maxsus nuqtalarini topamiz

$f(z) = \frac{z^2+1}{z-i} sh \frac{1}{z}$ ular $z=0$, $z=i$ lardan iborat bo'lib $(D): |z| < 4$, sohaning ichida yotadi, shu sababli quyidagi formula o'rinni bo'ladi

$$\oint_{(L)} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=i} f(z)).$$

Funksiyaning $z=0$ nuqtadagi qoldig'ini hisoblash uchun uni nol nuqta atrofida qatarga yoyamiz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2+1}{z-i} \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{z} = \frac{(z-i) \cdot (z+i)}{z-i} \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{z} = \\ &= (z+i) \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) = 1 + \frac{i}{z} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{i}{3!z^3} + \dots \end{aligned}$$

Bu yerdan $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = i$ ni topamiz. $f(z)$ ning $z=i$ nuqtadagi qoldig'ini hisoblash uchun avvalo maxsus nuqtaning tipini aniqlaymiz.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)(z+i)}{z-i} \operatorname{sh} \frac{1}{z} = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z+i) \operatorname{sh} \frac{1}{z} \right] = 2i \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{i} \right) = 2i \cdot \operatorname{sh}(-i) = -2i^2 \cdot \sin 1 = 2 \sin 1,$$

bundan $z=i$ ning tuzatiladigan maxsus nuqta bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli,

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0 \quad \text{va} \quad \oint_{(L)} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z \rightarrow 0} f(z) + \operatorname{res}_{z=i} f(z)) = 2\pi i \cdot (i + 0) = -2\pi.$$

3-misol. Ushbu $\oint_{(L)} \frac{z dz}{(z^2 - (1+3i)z + 3i)^2}$ integralni hisoblang, bu yerda

$$(L): \frac{(z-1)^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{ellipsdan iborat.}$$

Yechilishi: Integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalarini uravneni $z^2 - (1+3i)z + 3i = 0$ tenglamani yechib topamiz: $z=1, z=3i$; $z=1$ nuqta $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-3i)^2}$ funksiya uchun ($k=2$) ikkinchi tartibli qutb bo'ladi va u kontur ichida yotadi. Suning uchun qoldiq quyidagicha hisoblanadi.

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z(z-1)^2}{(z-1)^2(z-3i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z}{(z-3i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-3i-z}{(z-3i)^3} = \frac{-7+24i}{250}.$$

$$\text{Demak,} \quad \oint_{(L)} \frac{z dz}{(z^2 - (1+3i)z + 3i)} = 2\pi i \operatorname{res}_{z \rightarrow 1} f(z) = 2\pi i \frac{-7+24i}{250} = -\frac{\pi(24+7i)}{125}.$$

4-misol. Ushbu $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ integralni hisoblang.

Yechilishi: Integral ostidagi funksiya juft bo'lganligi uchun quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \quad \text{funksiya ikkinchi darajali ko'phadning to'rtinchi}$$

darajali ko'phadga nisbatidan iborat, bunda $k=2$ va $n=4$ va $n-k>1$ bo'lib, integralning yaqinlashish sharti bajariladi. $f(z)$ funksiya yuqori yarim tekislikda ikkita $z=i$ va $z=2i$ maxsus nuqtaga ega, shuning uchun integralga qoldiqlar orqali hisoblash formulasini qo'llashimiz mumkin:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2} 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} + \operatorname{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right].$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} \quad \text{funksiya uchun } z=i \text{ va}$$

$z=2i$ lar birinchi tartibli qutblar bo'ladi. Qutblarda qoldiqni hisoblash formulasidan quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned} I &= \pi i \left[\operatorname{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} + \operatorname{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right] = \\ &= \pi i \left[\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)} + \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)} \right] = \\ &= \pi i \left[\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} + \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} \right] = \pi i \left[\frac{-1}{2i \cdot 3} + \frac{-4}{-3 \cdot 4i} \right] = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Integrallarni hisoblang:

$$1) \oint_{|z+i|=3} \frac{e^z}{z^3 - \pi i z^2} dz; \quad 2) \oint_{|z-\pi|=4} \frac{z dz}{\sin z};$$

$$3) \oint_{(L)} z^2 \sin \frac{1}{z} dz, \quad (L): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$4) \oint_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}; \quad 5) \oint_{|z-1|=1.5} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)}.$$

Mustaqil yechish uchun misollarning javoblari

$$1) \frac{2+\pi i}{\pi^2}, \quad 2) 2\pi^2 i, \quad 3) -\frac{\pi i}{3}, \quad 4) \frac{\pi}{4}, \quad 5) \frac{3\pi i}{8}.$$

20-bob bo'yicha amaliy mashg'ulotlarni mustahkamlash uchun nazorat topshiriqlari

20.1-masala. Kompleks qatorlar

1. $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$ funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.
2. $f(z) = \frac{1}{1-z+z^2}$ funksiyani $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2n)^{-n} n^5 z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3n^n} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^n}{(2n+6)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3n+2)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.
9. $f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-4)}$ funksiyani $3 < |z| < 4$ xalqada Loran qatoriga yoying.
10. $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ funksiyani $z_0 = 1$ ning atrofida $1 \leq |z-1| < 2$ xalqada Loran qatoriga yoying.
11. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ funksiyani $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoying.
12. $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ funksiyani $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoying.
13. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ funksiyani $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoying.
14. $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)(z^3-4)}$ funksiyani $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoying.

15. $f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$ funksiyani $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoying.

16. $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-\alpha n} z^n$, $\alpha > 1$ qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)^n}{(6n+1)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(5n!)^2} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{(3n+2)!} z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.

20. $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5^{-|n|}) z^n$ Loran qatori yaqinlashuvchi bo'ladigan nuqtalar to'plamini toping.

21. $f(z) = \frac{2}{(z-3)(z+4)}$ funksiyani $3 < |z| < 4$ halqada z ning darajasi bo'yicha Loran qatoriga yoying.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n\delta} (E: \operatorname{Re} z > \delta > 0)$ qatorning tekis yaqinlashishi isbotlansin.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n + z^{-n}} (E: |z| \leq \rho < 1/2)$ qatorning tekis yaqinlashishi isbotlansin.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta} (E: \operatorname{Re} z \geq \delta > 1)$ qatorning tekis yaqinlashishi isbotlansin.

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+z) \ln^2 n}$, $z \neq -2, -3, -4, \dots$ qatorning absolyut yaqinlashishi topilsin.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, $|z| < e$ qatorning absolyut yaqinlashishi isbotlansin.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \frac{z^n}{1+z^n}$, $|z| < \frac{1}{4}$ qatorning absolyut yaqinlashishi topilsin.

20. 2-masala. Integralni hisoblang.

1. Integralni hisoblang: $\int_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz$.

2. Integralni hisoblang: $\int_{|z|=2} \sin \frac{z}{z+1} dz$.

3. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+1}$.

4. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 8)^3}.$

5. Integralni hisoblang: $\int_{|z|=2} \frac{z^1}{z+1} e^z dz.$

6. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 1}.$

7. Integralni hisoblang: $\int_{|z|=2} \frac{z^3 + 1}{z^4 - 1} dz.$

8. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{ix} dx}{x^3 - 6x + 109}.$

9. Integralni hisoblang: $\int_{|z|=3} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz.$

10. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}.$

11. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$

integralni hisoblang.

12. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz$

integralni hisoblang.

13. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasidan foydalanib $\int_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{z^3} dz$

integralni hisoblang.

14. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z-i|=3} \cos z \frac{dz}{z+i}$ ni hisoblang.

15. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{(z^2 - 2)^2}$ integralni

hisoblang.

16. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z-1|=1} \frac{z \cos z dz}{(z+1)^3}$ integralni

hisoblang.

17. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z-1|=1} \frac{(z+2) \sin z dz}{(z+1)^4}$ integralni

hisoblang.

18. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}$ integralni

hisoblang.

19. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z-1|=1} \frac{(z+2)\sin z dz}{(z+1)^4}$ integralni

hisoblang.

20. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z+1|=1} \frac{z dz}{(z+1)(z-1)^3}$ integralni

hisoblang.

21. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z|=2} \frac{z dz}{z^4 - 1}$ integralni

hisoblang.

22. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z-1|=3} \frac{z^5(z+2)^2 dz}{(z+1)^4}$ integralni

hisoblang.

23. Koshining integral formulasi yordamida $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^2 + 2}$ integralni

hisoblang.

24. Koshining integral formulasidan foydalanib $\int_{|z-1|=1} \frac{z^3 \sin z}{(z-1)^2} dz$ integralni

hisoblang.

25. Integral hisoblansin: $\int_{|z|=1/2} \frac{e^{z^2}}{z(1-z)^2} dz.$

26. Integral hisoblansin: $\int_{|z+i|=1} \frac{\cos(2z+1)}{(z+i)^2(z-5)} dz.$

27. Integral hisoblansin: $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin 2(z-1)}{(z-i)^2(z+6)} dz.$

28. Integral hisoblansin: $\int_{|z|=2} \frac{\sin z^2}{z^3(z-5)} dz.$

29. Integral hisoblansin: $\int_{|z-i|=1/2} \frac{e^z dz}{z(z-1)^3}.$

30. Integral hisoblansin: $\int_{|z|=1/2} \frac{e^z dz}{z^3(1-z)}.$

Adabiyotlar

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б. М. Методы теории функций комплексного переменного. М.: «Наука». 1960.
2. Махсудов Ш., Салоҳиддинов М., Сирожиiddинов С. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Т.: «Ўқитувчи» нашриёти. 1979.
3. Махсудов Ш. Аналитик функциялардан амалий машғулотлар. Т.: «Ўқитувчи» нашриёти. 1978.
4. Писменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М. изд. «Айрис – пресс». 2002.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. «Наука». 1977.
6. Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Тўйчиев Т.. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ).- Т. : Ўзбекистон, 2000.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: «Наука». 1980.
8. То'uchiyev T.T., Tishabayev J.K., Djumaboyev D.X., Kitmanov A.M. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan mustaqil ishlar. T. «Mumtoz so'z» nashriyoti. 2018.
9. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ (матрицалар). – Тошкент. Университет, 1998.

**Gaziyev A., Soleyev A., Yaxshiboyev M.,
Arziqulov A.**

OLIY MATEMATIKA

3-QISM

“Excellent Polygraphy” nashriyoti, 2021

Muharrir: Barno Bahramova
Texnik muharrir: Yunusali O‘rinov
Badiiy muharrir: Shoimov Zuxriddin
Musahhiha: Gulchehra Azizova
Dizayner: Husan Safaraliyev

Noshirlik faoliyatini boshlaganligi haqida vakolatli davlat organini xabardor qilganligi to‘g‘risida 07.09.2020-yil sanasidagi № 8521 sonli tasdiqnoma

Nashriyont litsenziyasi:



8521

Terishga 24.08.2021-yilda berildi. Bosishga 29.12.2021-yilda ruxsat etildi.

Bichimi: 60x84 1/16. Ofset bosma. «Times New Roman» garniturası.

Shartli b.t. 27.5. Nashr b.t. 29.0. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № O-03.

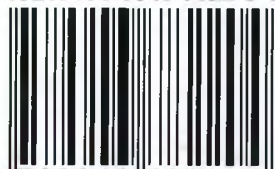
Bahosi shartnoma asosida.

**“Excellent Polygraphy” nashriyoti, Toshkent shahri,
Shayxontoxur tumani, Jangox mavzesi 12-uy, 13-xonadon**

**“Excellent Polygraphy” MCHJ bosmaxonasida bosildi.
Toshkent shahri, Shayxontoxur tumani, Jangox mavzesi 12-uy,
13-xonadon. Telefon: 99890 936-66-11, 99890 000-33-93**

«Excellent Polygraphy»
nashriyoti

ISBN 978-9943-7822-0-4



9 789943 782204