

OLIIY MATEMATIKADAN

misol va masalalar to'plami

Mingyasharova Sevara Abdulla qizi

II-qism

O'quv qo'llanma

22.1
11-52

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT MUHANDISLIK VA
AGROTEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI

S.A.MINGYASHAROVA

elektron boz

**OLIV MATEMATIKADAN MISOL
VA MASALALAR TO'PLAMI**

II-qism

*O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi
tomonidan muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta'lim yo'nalishlari
talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan.*

Termiz-2024



UDK: 51(076.1)(075.8)

KBK: 22.11ya73

M 52

Mingyasharova S.A. "Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami" II-qism: O'quv qo'llanma / S.A. Mingyasharova – Surxondaryo: Termiz publishing center, 2024-y. – 169 b.

Ushbu o'quv qo'llanma oliy ta'lim muassasasining texnika sohasidagi yengil sanoat, tabiiy tola, texnologik mashinalar va jihozlar bakalavriat ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan. Qo'llanmada nazariy tushunchalar, ta'riflar, teoremlar, formulalar va ularning mohiyati, misol va masalalarning yechimi tushuntirilgan, mustahkamlash uchun mashqlar, nazorat testlari va ularning javoblari bilan keltirilgan.

O'quv qo'llanmadan oliy ta'lim muassasalarining texnika yo'nalishlarining kunduzgi, kechki va sirtqi bo'lim talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Mas'ul muharrir:

B.E.Qodirov

Termiz davlat universiteti texnologik ta'lim kafedrası dots., p.f.f.d.(PhD).

Taqrizchilar:

Sh.M.Yuldashev

Termiz davlat universiteti f.-m.f.f.d.(PhD);

O'.N.Sultonova

Termiz davlat muhandislik va agrotexnologiyalar universiteti prof., p.f.d.

Ushbu o'quv qo'llanma Termiz muhandislik-texnologiya instituti o'quv-uslubiy Kengashining 2024-yil 11/4-2-sonli qarori va O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 25-iyundagi 218-sonli buyrug'iga asosan o'quv qo'llanma sifatida nashrga tavsiya qilingan (№ 218-734).

ISBN: 978-9910-675-23-2

© Termiz davlat muhandislik va agrotexnologiyalar universiteti, 2024.

© "Termiz publishing center", nashriyoti 2024.

SO'Z BOSHI

Mamlakatimizda oliy ta'lim tizimini yangi bosqichga ko'tarish, ta'lim sifatini ilg'or xalqaro standartlar asosida takomillashtirish va oliy ta'lim bilan qamrov darajasini oshirish bo'yicha chora-tadbirlar ishlab chiqilib, keng ko'lamda amalga oshirish ishlari olib borilmoqda. Ta'lim tizimini tubdan isloh qilish, milliy va xalqaro mehnat bozori talablari darajasida raqobatbardosh mutaxassislar tayyorlash maqsadida O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Sh.M.Mirziyoyevning 2020-yil 24-yanvardagi Oliy Majlisga yo'llagan Murojaatnomasida mamlakatimizni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishda munosib hissa qo'shuvchi, zamonaviy bilim va pedagogik texnologiyalarni qo'llash ko'nikmalariga ega bo'lgan, yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash hamda sohaga ilg'or ta'lim texnologiyalarini joriy qilish orqali ta'lim sohasini yanada takomillashtirish borasida tizimli tadbirlar belgilab berildi.

Texnika oliy ta'lim muassalarida oliy matematika fanini o'qitishda xotira, tafakkur, ijodiy tasavvur etish, kuzatuvchanlikni rivojlantirish talabalarga fanni o'rganishga yordam beradi. Shuningdek, oliy matematika fani talabalarning mantiqiy fikrlash malakalarini oshirish, ularning o'z fikrlarini aniq, to'g'ri va tushunarli bayon etishi uchun zamin yaratadi.

"Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami" (II-qism) o'quv qo'llanma bakalavr muhandislar tayyorlash, ta'lim va bilimlar sohasi yo'nalishi bo'yicha davlat standartlariga mos kelishi bilan bir qatorda bu qo'llanma xorijiy adabiyotlardan foydalanilgan va o'quv dasturida keltirilgan mavzular bilan to'ldirilgan holda yozilgan.

O'quv qo'llanma 4 ta bob, ya'ni differensial tenglamalar, sonli qatorlar, funksional qatorlar va ehtimollar nazariyasi boblari bo'lib, ularga oid bo'lgan 15 ta mavzu yoritilgan. Har bir mavzuda nazariy ma'lumotlardan tashqari masala va misollarning yechilish namunalari, usullariga katta e'tibor berilgan. Unda masala va misollar yechishga matematikani chuqur o'rganishning asosiy vazifasi sifatida qaratiladi. Asosiy maqsad u yoki bu masalani yechishda nazariy materialga chuqurroq qarash, umumlantirish, yechimlarni tahlil qilish malakalarini talabada shakllantirishga qaratilgan bo'lib, har bir mavzuga oid misollar va mustaqil

ishlash uchun test topshiriqlari berilgan va ularning javoblari ham keltirilgan.

Qo'llanma kamchiliklardan holi bo'lmazligi mumkin. Muallif uni yanada mukammallashtirishga qaratilgan tanqidiy fikr va mulohazalarini bildiradigan hamkasblarga oldindan o'z tashakkurini izhor etadi.

Muallif

IX-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

16-§. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. ASOSIY TA'RIF VA TUSHUNCHALAR. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

16.1. Differensial tenglamalar haqida asosiy ta'rif va tushunchalar.

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi va noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi munosabat *differensial tenglama* deyiladi.

2-ta'rif. Agar noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bo'g'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb, unda ishtirok etgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan, $y' \sin x + y \cos x = 1$ tenglama — birinchi tartibli tenglama; $y'' = \sin x$ — ikkinchi tartibli tenglama; $y''' = xy$ — uchinchi tartibli tenglama va hokazo.

n — tartibli oddiy differensial tenglama deb

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (16.1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Agar noma'lum funksiya bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aytiladigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi. Shu funksiyani aniqlovchi $y = \varphi(x)$ yoki $f(x, y) = 0$ funksiya differensial tenglamaning integrali deyiladi. Har bir integral xOy tekisligida differensial tenglamaning integral chizig'i deb ataluvchi egri chiziqni aniqlaydi.

1-misol. Ushbu $y = 3e^x$ va $y = 4e^{-x}$ funksiyalar $y'' - y' = 0$ differensial tenglamaning yechimi bo'lishini tekshiring.

Yechish. 1) $y = 3e^x$ funksiyani tekshiramiz. y' va y'' larni topamiz:

$$y' = 3e^x, \quad y'' = 3e^x.$$

Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$3e^x - 3e^x = 0, \quad 0 = 0.$$

Demak, $y = 3e^x$ funksiya $y'' - y' = 0$ tenglamaning yechimi ekan.

2) Ikkinchi funksiya uchun ham tegishli hosilalarni topib, tenglamaga qo'yamiz:

$$y = 4e^{-x}, \quad y' = -4e^{-x}, \quad y'' = 4e^{-x}.$$

$$4e^{-x} - 4e^{-x} = 0, \quad 0 = 0.$$

Demak, $y = 4e^{-x}$ funksiya ham $y'' - y' = 0$ tenglamani yechimi ekan.

2-misol. $y = \frac{\cos x}{x}$ yechim $xy' + y = -\sin x$ differensial tenglamaning yechimi ekanligini tekshiring.

$$\text{Yechish. } y' = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - (x)'\cos x}{x^2} = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}.$$

$$xy' + y = x \left(\frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} \right) + \frac{\cos x}{x} = -\sin x - \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos x}{x} = -\sin x$$

$$-\sin x = -\sin x.$$

3-misol. $y' = x + 2$ differensial tenglamani yeching.

Yechish. Hosilasi $x + 2$ ga teng $y(x)$ funksiyani, ya'ni $x + 2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topamiz. Boshlang'ich funksiyalar topish qoidalaridan quyidagini hosil qilamiz:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + C,$$

bu yerda C — integrallash doimiysi.

$$\text{Javob: } y = \frac{x^2}{2} + 2x + C.$$

4-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimini topish jarayoni ko'pincha integrallash bilan bog'liq bo'lganligi uchun bu jarayon differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi.

Agar x, y va n ta ixtiyoriy $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmlarni o'z ichiga olgan

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (16.2)$$

tenglamadagi ixtiyoriy o'zgarmlarga har xil qiymatlar berganda (16.1) tenglama yechimlarining mavjudlik va yagonalik sohasidan o'tuvchi hamma integral chiziqlar va faqat o'sha chiziqlargina hosil bo'lsa, (16.2)

tenglama (16.1) differensial tenglamaning o'sha sohadagi umumiy integrali deyiladi. Ixtiyoriy o'zgarmlarga aniq qiymatlar berib, umumiy integraldan hosil qilingan integral *xususiy integral* deyiladi.

Umumiy integral (16.2) ni n marta x bo'yicha differensiallab, hosil bo'lgan n ta tenglamadan va (16.2) tenglamadan n ta ixtiyoriy o'zgarmlarni yo'qotsak, berilgan (16.1) differensial tenglamaga ega bo'lamiz. Differensial tenglamaning tartibi deb noma'lum funksiyaning bu tenglamaga kiruvchi hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Ushbu $F(x, y, y') = 0$ tenglama umumiy ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglama deb ataladi. Agar uni y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, bu quyidagicha yoziladi,

$$y' = f(x, y) \quad (16.3)$$

Hosilaga nisbatan yozilgan bu shakldan differensiallar ishtirok etgan

$$dy - f(x, y)dx = 0 \quad \text{yoki} \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (16.4)$$

shaklga yozish mumkin.

5-ta'rif. $y = \phi(x, c)$ umumiy yechim $c = c_0$ qiymati uchun olingan $y = \phi(x, c_0)$ yechim xususiy yechim deyiladi.

6-ta'rif. $y' = f(x, y)$ tenglamaning $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

16.2. O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalar.

Ushbu

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. Bu tenglamaning o'ziga xos xususiyati shundaki, x o'zgaruvchili funksiyaning oldida dx , y o'zgaruvchili funksiyaning oldida esa dy ko'paytuvchilar turadi. Bu tenglamaning yechimi uni hadma-had integrallash yo'li bilan aniqlanadi:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Integrallash doimiysi C ni yechim uchun qulay ko'rinishda tanlash mumkin.

4-misol. $ctgxdx - tgydy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga egamiz. Uni hadma-had integrallaymiz:

$$\int ctgxdx - \int tgydy = C$$

$$\ln|\sin x| + \ln|\cos y| = \ln \bar{C}$$

Bu yerda integrallash doimiysi C ni $\ln \bar{C}$ bilan almashtiramiz, ya'ni $C = \ln \bar{C}$.

$\ln|\sin x \cos y| = \ln \bar{C}$, $\sin x \cos y = \bar{C}$ - differensial tenglamaning umumiy integrali.

5-misol. $y' = \cos^2 y$ differensial tenglamaning $y(1) = \frac{\pi}{4}$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani $\cos^2 y \neq 0$ shart ostida $dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$ ko'rinishda yozamiz. So'ngra integrallab uning umumiy yechimini topamiz:

$$x = tgy + C.$$

Xususiy yechimni topish uchun umumiy yechimda $x = 1, y = \frac{\pi}{4}$ deymiz va $1 = tg \frac{\pi}{4} + C$ dan $C = 0$ ni topamiz.

Demak izlanayotgan xususiy yechim $x = tgy$ yoki $y = \arctg x$ ko'rinishida bo'ladi.

16.3. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, ($N_1(y) \neq 0$ va $M_2(x) \neq 0$) (16.5) ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi.

(16.5) tenglamani $M_2(x)N_1(y)$ ko'paytmaga bo'lib

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 \quad (16.6)$$

tenglamani hosil qilamiz. (16.6) tenglamaning umumiy integrali

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

dan iborat bo'ladi.

6-misol. Ushbu differensial tenglamani yeching:

$$(1 + x^2)dy - xydx = 0.$$

Yechish. Tenglamaning barcha hadlarini $(1 + x^2)y \neq 0$ ifodaga bo'lamiz:

$$\frac{(1 + x^2)dy}{(1 + x^2)y} - \frac{xydx}{(1 + x^2)y} = 0; \quad \frac{dy}{y} - \frac{xdx}{1 + x^2} = 0.$$

Buni integrallab, berilgan differensial tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$\ln y - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = C.$$

Ixtiyoriy o'zgarmas son C o'miga (hosil qilingan ifodani potentsiallash qulay bo'lishi uchun) $\ln C_1$ yozamiz (bunday almashtirishni yozish mumkin, chunki C kattalik o'zgarmasdir):

$$\ln y - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = \ln C_1; \quad \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} = C_1;$$

$$y = C_1 \sqrt{1 + x^2}$$

berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.

7-misol. Ushbu

$$y'tgx = y$$

tenglamaning $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda y' ni $\frac{dy}{dx}$ ga almashtirib olamiz.

$$\frac{dy}{dx} tgx = y; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{tgx};$$

ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirib, tenglikning ikkala tomonini ham integrallab yuboramiz:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{tgx}; \quad \ln y = \int ctgxdx;$$

$$\ln y = \ln \sin x + \ln C_1; \quad \ln y = \ln \sin x \cdot C_1; \quad y = \sin x \cdot C_1.$$

Demak, $y = \sin x \cdot C_1$ tenglamaning umumiy yechimi. Uning xususiy yechimini topish uchun $y = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ ni qo'yib, $1 = \sin \frac{\pi}{2} \cdot C_1$ dan $C_1 = 1$ ekanligini topamiz. Berilgan tenglamaning xususiy yechimi $y = \sin x$ ko'rinishida bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

Quyidagi funksiyalar berilgan differensial tenglamalarning umumiy integrallari bo'ladimi?

16.1.a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$; $y'' - 3y' + 2y = 0$ θ) $x^2 - xy + y^2 = c^2$; $(x - 2y)y' = 2x - y$

Javob: a) Berilgan fujnksiya birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \quad y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$$

Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} - 3(c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}) + 2(c_1 e^x + c_2 e^{2x}) = 0$$

$$c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} - 3c_1 e^x - 6c_2 e^{2x} + 2c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} = 0$$

$$0 = 0$$

va ayniyat hosil bo'ladi.

16.2. a) $y^3 - cx^3 + 3xy = 0$; $y^3 - (xy^2 + x^2)y' + 2xy = 0$ θ) $x\sqrt{1+y^2} = cy$; $xy' - y = y^3$

16.3. $y^2 - 2 = ce^{1/x}$; $2x^2 yy' + y^2 = 2$ **16.4.** $y = c_1 \ln x - x^2/4 + c_2$; $x(y'' + 1) + y' = 0$

Berilgan a kattalikning qanday qiymatlarida funksiya differensial tenglamani yechimi bo'ladi?

16.5. $x = cy^2 - y^a$, $y^2 - (2xy + 3)y' = 0$ *Javob:* $a = -1$

16.6. $x = ax^4 + c/x^2$, $y' + 2y/x = x^3$ *Javob:* $a = 1/6$

16.7. O'rninga qo'yish yo'li bilan $y = cx^3$ funksiya $3y - xy' = 0$ tenglamaning yechimi ekanligi tekshirilsin. Ushbu 1) $(1; \frac{1}{3})$; 2) $(1; 1)$; 3) $(1; -\frac{1}{3})$ nuqtalardan

o'tuvchi integral chiziqlar yasalsin.

Javob: integral egri chiziqlarining tenglamasi

1) $y = \frac{x^3}{3}$; 2) $y = x^3$; 3) $y = -\frac{x^3}{3}$.

16.8. O'rninga qo'yish yo'li bilan 1) $y'' + 4y = 0$ va 2) $y''' - 9y' = 0$ differensial tenglamalar mos ravishda 1) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ va 2) $y = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$ umumiy integrallarga ega ekanliklari tekshirilsin.

O'zgaruvchilari ajraladigan 1-tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

16.9. $(3x - 1)dy + y^2 dx = 0$

Javob: $e^{\frac{1}{y}} = e^3 \sqrt{3x - 1}$

16.10. $3x^2 y dx + 2\sqrt{4 - x^3} dy = 0$

Javob: $y = xe^x + xe^x \ln(x)$

16.11. $xy' + 2y = 2xyy'$

Javob: $x^2 y = ce^{2y}$

16.12. $e^{1-2x}(y^2 - 1)dy - dx = 0$

Javob: $y^3/3 - y = 0,5e^{2x-1} + C$

16.13. $x(y' - 1) = 2y'$

Javob: $y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C$

16.14. $e^{x+y} dx + dy = 0$

Javob: $e^x + e^{-y}(y + 1) = C$

16.15. $y' = (x + y)^2$

Javob: $\arctg(x + y) = x + C$

16.16. $xyy' = 1 - x^2$

Javob: $x^2 + y^2 = \ln cx^2$

16.21. $x^2 y' + y = 0$

Javob: $y = ce^{\frac{1}{x}}$

16.22. $x + xy + y'(y + xy) = 0$

Javob: $x + y = \ln C(x + 1)(y + 1)$

16.23. $\varphi^2 dr + (r - a)d\varphi = 0$

Javob: $r = ce^{\frac{1}{\varphi}} + a$

16.24. $2st^2 ds = (1 + t^2)dt$

Javob: $S^2 = (t^2 - 1 + Ct)/t$

16.25. a) $xy' + y = y^2$ $y(1) = 0,5$

b) $2x^2 yy' + y^2 = 2$

Javob: a) Differensial tenglamani $y' = \frac{dy}{dx}$ ko'rinishga yozib olib, quyidagi

ko'rinishga olib kelamiz. $\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$, $x(y^2 - y) \neq 0$. Bu tenglamani integrallab,

$\ln|y - 1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$ yoki $y(1 - cx) = 1$. **b)** $-y^2 + 2 = cx^{1/x}$

16.26. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$

Javob: $\ln|x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$

16.27. $yy' = -2x \sec y$

Javob: $x^2 + y \sin y + \cos y = C$

16.28. $5e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

Javob: $y = \arctg C(1 - e^x)^5$

16.29. $\ln \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0$

Javob: $y = \arccos e^{Cx}$

16.30.a) $yx^2 dy - \ln x dx = 0$ θ) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$

Javob: a) Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishga yozib olamiz

$$y dy = \frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow \int y dy = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

o'ng tomondagi integralni bo'laklab integrallash formulasi yordamida topamiz.

$$\left(u = \ln x, \quad dv = \frac{dx}{x^2}\right) \quad y^2/2 = -x^{-1} \ln x + \int x^{-2} dx \Rightarrow y^2/2 = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C.$$

Agar $y' = f(ax+by)$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama berilgan bo'lsa, $(a, b - o'zgarimas sonlar)$, u holda $z = ax+by$ yoki $z = ax+by+c$ ($c = const$) almashtirish bajarish yordamida yechiladi.

$$b) 1+y^2 = C(1-x^2)$$

$$16.31. (2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0 \quad \text{Javob: } x+2y+3\ln|2x+3y-7| = C$$

$$16.32. yy' = \frac{1-2x}{y} \quad \text{Javob: } y = \sqrt{C+3x-3x^2}$$

$$16.33. y'tgx - y = a \quad \text{Javob: } y = C \sin x - a$$

$$16.34. y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 \quad \text{Javob: } x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

Quyidagi tenglamalarning umumiy integrallari va berilgan boshlang'ich shartlar bo'yicha xususiy integrallari topilsin:

$$16.35. 2y'\sqrt{x} = y, x=4 \text{ bo'lganda } y=1. \quad \text{Javob: } y = ce^{\sqrt{x}}; y = e^{\sqrt{x-2}}$$

$$16.36. y' = (2y+1)ctgx, x = \frac{\pi}{4} \text{ bo'lganda } y = \frac{1}{2}. \quad \text{Javob: } y = \frac{C \sin^2 x - 1}{2}; y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$$

$$16.37. x^2 y' + y^2 = 0, x=4 \text{ bo'lganda } y=1 \quad \text{Javob: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C; y = -x$$

$$16.38. (1+x^2)y^3 dx - (y^2-1)x^3 dy = 0; y(1) = -1 \quad \text{Javob: } x^{-2} + y^{-2} = 2(1+\ln|x/y|)$$

$$16.39. (\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0; y(1) = 1 \quad \text{Javob: } 2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = 0$$

$$16.40. x^2(2yy'-1) = 1; y(1) = 0 \quad \text{Javob: } xy^2 = x^2 - 1$$

$$16.41. ydx + ctgx dx = 0; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \quad \text{Javob: } y = 2 \cos x$$

Quyidagi differensial tenglamalarda: 1) umumiy integral topilsin;

2) $y_{x=-2} = 4$ boshlang'ich shart bo'yicha xususiy integral topilsin:

$$16.42. xy' - y = 0 \quad \text{Javob: } y = cx; y = 2x$$

$$16.43. xy' + y = 0 \quad \text{Javob: } xy = c_1; xy = -8$$

$$16.44. yy' + x = 0 \quad \text{Javob: } x^2 + y^2 = c^2; x^2 + y^2 = 20$$

$$16.45. y' = y \quad \text{Javob: } y = ce^x; y = 4e^{x+2}$$

Mavzu bo'yicha nazorat testlari

Differensial tenglamalar va ular bilan bog'liq tushunchalar

1. **1-ta'rif.** Agar $f(x, y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda Differensial tenglama ta'rifini ko'rsating

A) noma'lum funksiya qatnashgan tenglama

B) noma'lum funksiyaning turli qiymatlari qatnashgan tenglama

C) noma'lum funksiyaning hosilalari qatnashgan tenglama

D) noma'lum funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari qatnashgan tenglama

E) noma'lum funksiya va uning integrallari qatnashgan tenglama

2. Quyidagilardan qaysi biri differensial tenglama bo'ladi?

$$A) y^2 + 5y - 3 \cos x = 0 \quad B) 3x^2 + 4xy - 1 = 0 \quad C) y(x) + 2y'(x_0) - x = 0$$

$$D) y - 2xy' + 5 = 0 \quad E) \int y dx + \sin(x+y) = 0$$

3. $(y')^3 - (y')^2 + y'' - y + 5y^4 + x^5 = 0$ differensial tenglama nechanchi tartibli?

$$A) I \quad B) II \quad C) III \quad D) IV \quad E) V$$

4. n tartibli differensial tenglama eng umumiy holda qanday ko'rinishda bo'ladi?

$$A) F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad B) F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

$$C) F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad D) F(y, y', \dots, y^{(n)}) = x \quad E) F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

5. Differensial tenglamaning yechimi yana nima deb ataladi?

A) ildiz B) differensial C) boshlang'ich funksiya

D) integral E) tenglashtiruvchi funksiya.

6. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning yechimi bo'ladi?

$$A) y = x^2 \quad B) y = \sin 2x \quad C) y = \cos 2x \quad D) y = e^{2x} \quad E) y = \ln 2x$$

7. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $y'' + 4y = 0$ differensial tenglamaning yechimi bo'lmaydi?

$$A) y = \sin 2x \quad B) y = \cos 2x \quad C) y = \cos 2x + \sin 2x$$

$$D) y = \cos 2x - \sin 2x \quad E) y = \cos 2x \cdot \sin 2x$$

8. n -tartibli $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ differensial tenglama uchun boshlang'ich shartlar qanday ko'rinishda bo'ladi?

$$A) y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \dots, y(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

$$B) y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y'_1, y''(x_2) = y''_2, \dots, y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y^{(n-1)}_{n-1}$$

C) $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$

D) $y_0(x_0) = y_0, y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, \dots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1}$

E) $y_0(x_0) = y_0, y_1(x_1) = y_1, y_2(x_2) = y_2, \dots, y_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1}$

9. Differensial tenglamalar nazariyasidagi mavjudlik va yagonalik teoremasi qaysi matematik nomi bilan yuritiladi?

A) Lagranj B) Laplas C) Koshi D) Bernulli E) Rikkati

10. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$ Koshi masalasining yechimi bo'ladi?

A) $y = 1 + x^2$

B) $y = 1 + \sin 2x$

C) $y = \cos 2x$

D) $y = e^{2x}$

E) $y = \lg(10+x)$

17-§. BIR JINSLI, CHIZIQLI, BERNULLI VA TO'LIQ DIFFERENSIAL TENGLAMALARI

17.1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.

$f(x, y) = t^n f(x, y)$ shart bajarilsa, $f(x, y)$ funksiya n o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi.

Misol uchun $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(tx, ty) = \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2} = t \sqrt{x^2 + y^2} = t f(x, y)$. Ushbu

$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$f(tx, ty) = f(x, y)$ yoki $f(tx, ty) = t^0 f(x, y)$. $f(tx, ty) = f(x, y)$ shartga

bo'ysunadigan nol o'lchovli bir jinsli funksiyaning $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishda yozish mumkin.

2-ta'rif. Ushbu

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (17.1)$$

ko'rinishdagi tenglama M va N funksiyalar x va y ning bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalari bo'lganda, bir jinsli tenglama deyiladi. Bu tenglamani

$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ko'rinishga keltirib, $\frac{y}{x} = z$ yoki $y = zx$ almashtirish bilan

yechildi. Haqiqatdan $y = zx$ almashtirish bajarilsa,

$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$; $x \frac{dz}{dx} + z = f(z)$, yoki ba'zi bir almashtirishlar bajarilgandan

so'ng $\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$ ko'rinishdagi tenglamaga kelamiz. Oxirgi tenglamani

integrallab $\ln|x| = \int \frac{dz}{f(z)-z} + C$ integralni olamiz.

1-misol. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadan $M(x, y) = (y^2 - 3x^2)$; $N(x, y) = 2xy$ funksiyalarning har biri ikki o'lchovli bir jinsli funkdiyalar. Demak, birinchi tartibli bir jinsli tenglamaning yuqorida keltirilgan ta'rifiga ko'ra berilgan tenglama bir jinsli tenglamadir. Buni yechish uchun $x = zy$

almashtirish bajaramiz. U holda $dx = zdy + ydz$ bo'ladi. Bu ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$(y^2 - 3(zy)^2)dy + 2zyy(zdy + ydz) = 0, \text{ bundan}$$

$$y^2dy - 3z^2y^2dy + 2z^2y^2dy + 2y^3zdz = 0$$

ni soddalashtirib $y^2dy - z^2y^2dy + 2y^3zdz = 0$ ni y^2 ga bo'lib yuboramiz.

$$dy - z^2dy + 2yzdz = 0, (1 - z^2)dy + 2yzdz = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{2zdz}{(1 - z^2)} = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu tenlikning ikkala tomonini ham integrallab olamiz.

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{2zdz}{(1 - z^2)} = C, \ln y - \ln(1 - z^2) = C.$$

Bu yerda ixtiyoriy o'zgarmas C o'rniga (hosil qilingan ifodani soddalashtirish oson bo'lishi uchun) $\ln C_1$ yozamiz:

$$\ln y - \ln(1 - z^2) = \ln C_1; \ln y = \ln C_1(1 - z^2)$$

$$y = C_1(1 - z^2)$$

bu tenglamaning z qatnashgan umumiy yechimidir. Noma'lum funksiya y ga qaytish uchun bu yechimda z o'rniga $\frac{x}{y}$ ni qo'yib, berilgan differensial tenglamaning umumiy integrali

$$y = C_1 \left(1 - \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right), \quad C_1 = \frac{y^3}{y^2 - x^2}$$

ni hosil qilamiz.

Differensial tenglama ko'rinishda

$$y' = h \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right) \quad (17.2)$$

bo'lsa, bir jinsli tenglamaga olib kelish uchun $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ yoki $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarni kesishish nuqtasiga koordinata boshi olib kelinadi.

Agar c_1 va c_2 (yoki ulardan biri) noldan farqli bo'lsa, u holda (17.2) tenglama:

1) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo'lganda $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ almashtirishlar orqali bir jinsli tenglamaga keltiriladi;

2) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ bo'lganda $z = a_1x + b_1y$ o'rniga qo'yish orqali o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

17.2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.

3-ta'rif. Noma'lum funksiya y ham, uning hosilasi y' ham faqat birinchi darajada qatnashgan differensial tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (17.3)$$

Bu yerda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x ning uzluksiz funksiyalaridir. Agar $g(x) = 0$ bo'lsa, (17.3) differensial tenglama bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi. Bu (17.3) tenglamaning yechimi $y = f(x)$ ni $y = u \cdot g$ ko'rinishda izlanadi. Bu yerda $u = u(x)$ va $g = g(x)$ bo'ladi, ya'ni

$$y' = u'g + g'u \quad (17.4)$$

(17.4) ni (17.3) ga qo'ysak, $u'g + g'u + f(x)u \cdot g = g(x)$ yoki

$$g \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dg}{dx} + f(x)g \right) = g(x)$$

u yoki g funksiyalarning birini ixtiyoriy tanlash mumkinligi hisobiga, g funksiyani

$$\frac{dg}{dx} + f(x)g = 0 \quad (17.5)$$

ko'rinishda olish mumkin. U holda

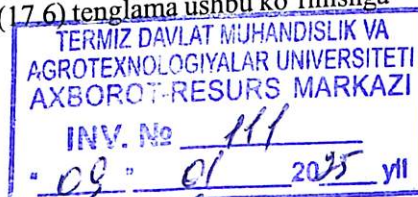
$$g \frac{du}{dx} = g(x) \quad (17.6)$$

ham o'rinli bo'ladi. (17.5) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{dg}{g} = -f(x)dx,$$

bundan $\int \frac{dg}{g} = -\int f(x)dx$, $\ln|g| = -\int f(x)dx$ va $g = e^{-\int f(x)dx}$

g funksiyani bunday tanlab olganimizda (17.6) tenglama ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:



$$e^{-\int f(x)dx} \cdot \frac{du}{dx} = g(x) \quad (17.7)$$

(17.7) ni integrallab, $u = \int [g(x)e^{-\int f(x)dx}] dx + C$ va nihoyat

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left\{ \int [g(x)e^{-\int f(x)dx}] dx + C \right\} \quad (17.8)$$

oxirgi (17.8) funksiya (17.3) chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

2-misol. $xy' - 3y = -x^2$ tenglamani yeching umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamani barcha hadlarini x ga bo'lib, qayta yozamiz:

$$y' - \frac{3}{x}y = -x$$

Demak, berilgan misolda $f(x) = -\frac{3}{x}$, $g(x) = -x$ ga teng bo'lib, berilgan tenglama (17.3) tipdagi chiziqli differensial tenglama ekan. Bu tenglamani yechish uchun $y = u \cdot v$ deb olib, $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ almashtirishdan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{3}{x}uv &= -x; \\ u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v \right) + v \frac{du}{dx} &= -x; \end{aligned} \quad (*)$$

Bu yerda v ni shunday tanlaymizki, $\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 0$ bo'lsin.

$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 0$ tenglamaning o'zgaruvchilarini ajratib, v ni topamiz:

$$\frac{dv}{v} - 3 \frac{dx}{x} = 0$$

tenglikning ikkala tomonini ham integrallab quyidagilarni topib olamiz:

$$\int \frac{dv}{v} - 3 \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln v - 3 \ln x = \ln C$$

yoki $v = Cx^3$. Yuqorida aytib o'tilganidek $C = 1$ bo'lgandagi $v = x^3$ xususiy yechim bilan cheklanish mumkin. v ning ifodasini almashtirilgan

(*) tenglamaga qo'yib, u ni topamiz:

$$v \frac{du}{dx} = -x; \quad x^3 \frac{du}{dx} = -x; \quad \int du = \int -\frac{dx}{x^2};$$

$$u = \frac{1}{x} + C.$$

$y = u \cdot v$ formulaga u va v uchun topilgan ifodalarni qo'yib, berilgan chiziqli differensial tenglamaning yechimini hosil qilamiz:

$$y = x^2 + x^3 C.$$

17.3. Bernulli tenglamasi.

4-ta'rif.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \geq 2 \quad (17.9)$$

ko'rinishidagi tenglama Bernulli tenglamasi deb ataladi, bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ — berilgan uzluksiz funksiyalar, $n \neq 0; 1$.

$y' + py = Qy^n$ chiziqli tenglamaga o'xshash $y = u^g$ almashtirish bilan yoki ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiya qilish bilan yechiladi. Bernulli tenglamasi $z = y^{1-n}$ almashtirish natijasida chiziqli tenglamaga keltiriladi, ya'ni

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x) \Rightarrow y^{1-n} = z \Rightarrow (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = Q(x).$$

(17.8) tenglama $n = 0$ da chiziqli tenglamaga keladi, $n = 1$ da esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keladi.

3-misol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning barcha hadlarini y^3 ga bo'lamiz

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3 \quad (**)$$

va $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz, u holda $\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$.

Bu qiymatlarni (**) ga qo'yib

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad (***)$$

chiziqli tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy integralini topamiz:

$$z = uv, \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Bu ifodalarni (***) tenglamaga qo'yamiz:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2xuv = -x^3 \text{ yoki } u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Qavs ichidagi ifodani nolga tenglab,

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \quad \frac{dv}{v} = 2xdx, \quad \ln|v| = x^2, \quad v = e^{x^2}$$

ekanligini topamiz. u ni aniqlash uchun

$$e^{x^2} \cdot \frac{du}{dx} = -2x^3$$

tenglamaga ega bo'lamiz. O'zgaruvchilarni ajratib

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C$$

ekanligini topamiz. Oxirgi integralni bo'laklab

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \quad z = uv = x^2 + 1 + C e^{x^2}$$

ifodalarni topamiz. Demak, berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{x^2} \text{ yoki } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{x^2}}} \text{ bo'lar ekan.}$$

17.4. To'la differensial tenglama.

Ta'rif. Agar $M(x, y)dx + N(x, y) = 0$ ko'rinishidagi tenglamaning chap qismi biror $u(x, y)$ funksiyaning to'la differensial, ya'ni

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (17.10)$$

bo'lsa, u holda bunday tenglama to'la differensialli tenglama deyiladi.

(17.10) tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak.

To'la differensialli tenglama ta'rifidan $du=0$, bundan $u(x, y)=C$ ekanligi kelib chiqadi (C -ixtiyoriy o'zgarmas).

$u(x, y)$ ni topish uchun y ni o'zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy=0$ ekanidan $du=M(x, y)dx$ bo'ladi. Bu tenglikni x bo'yicha integrallasak,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y) \quad (17.11)$$

(17.11) tenglikni y bo'yicha differensiallaymiz va natijani $N(x, y)$ ga tenglaymiz, chunki

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \quad \int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \quad (17.12)$$

(17.12) ifodani y bo'yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C.$$

Demak, $u(x, y) = \int M(x, y)dx + \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C.$

Bu ifodani ixtiyoriy o'zgarmasga tenglab, tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz.

4-misol. $(3x - 5x^2y^2)dx + (3y^2 - \frac{10}{3}x^3y)dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu yerda $M(x, y) = 3x - 5x^2y^2$, $N(x, y) = 3y^2 - \frac{10}{3}x^3y$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 10x^2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 10x^2y, \quad \text{ya'ni } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ bo'lganligi sababli

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x - 5x^2y^2.$$

Bu tenglikni x bo'yicha integrallaymiz:

$$u = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3y^2 + \varphi(y).$$

Bundan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -10y \frac{x^3}{3} + \varphi'(y).$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ ekanligini hisobga olsak,

$$3y^2 - \frac{10}{3}x^3y = -10y \frac{x^3}{3} + \varphi'(y) \text{ yoki } \varphi'(y) = 3y^2$$

bundan $\varphi(y) = y^3 + C.$

Demak,

$$u = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3y^2 + y^3 + C$$

yoki

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3y^2 + y^3 = C.$$

17.5. Integrallovchi ko'paytuvchi. Agar

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'lsa, u holda ba'zi bir shartlar bajarilganda, shunday $\mu(x, y)$ funksiyani topish mumkinki, $\mu M dx + \mu N dy = du$ bo'ladi. Bu $\mu(x, y)$ funksiya *integrallovchi ko'paytuvchi* deyiladi.

Quyidagi hollarda integrallovchi ko'paytuvchini topish oson:

$$1) \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}}{N} = \Phi(x) \text{ bo'lganda, } \ln \mu = \int \Phi(x) dx \text{ bo'ladi.}$$

$$2) \frac{\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \Phi_1(y) \text{ bo'lganda } \ln \mu = \int \Phi_1(y) dy \text{ bo'ladi.}$$

5-misol. $y^2 dx + (yx - 1) dy = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu yerda $M = y^2$, $N = yx - 1$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = y$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demak, tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning to'la differensial emas. Bu tenglamaning faqat y ga bog'liq bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchisi bormi, degan masalani qaraymiz.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{y - 2y}{y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Bundan

$$\ln \mu = -\ln y, \text{ ya'ni } \mu = \frac{1}{y}.$$

Berilgan tenglamani μ ga ko'paytirganda

$$y dx + (x - \frac{1}{y})$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu to'la differensial tenglamadir, chunki

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

Tenglamani yechib olamiz:

$$M dx = du, \quad y dx = du, \quad \int y dx = \int du, \quad u = yx + \varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - \frac{1}{y}, \quad \varphi(y) = -\ln y + C.$$

$$u = yx - \ln y + C \quad \text{yoki} \quad xy - \ln y = 0$$

umumiy integralni topamiz.

Mustaqil bajarish uchun misollar

Quyidagi bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimi topilsin.

$$17.1. a) y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$b) y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

$$\text{Javob: a) } y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C}; \quad b) y - 2x = Cx^3(y + x)$$

$$17.2. y' = \frac{x + y}{x - y}$$

$$\text{Javob: } \arctg \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$17.3. x dy - y dx = y dy$$

$$\text{Javob: } \ln|y| + x/y = C$$

$$17.4. y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$\text{Javob: } x^2 + y^2 = Cy$$

$$17.5. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\text{Javob: } y = \pm x \sqrt{2 \ln|Cx|}$$

$$17.6. xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Javob: } x^2 = c^2 + 2Cy$$

$$17.7. y^2 + x^2 y' = xy y'$$

$$\text{Javob: } e^{x/y} = Cy$$

$$17.8. y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$$

$$\text{Javob: } \ln|Cx| = -e^{-y/x}$$

$$17.9. xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$\text{Javob: } y = x^{1+Cx}$$

$$17.10. (3y^2 + 3xy + x^2) dx = (x^2 + 2xy) dy$$

$$\text{Javob: } (x + y)^2 = Cx^3 e^{-x/(x+y)}$$

$$17.11. y^2 + x^2 y' = xy y'$$

$$Javob: y = ce^{y/x}$$

$$17.12. xy' = y - xe^{y/x}$$

$$Javob: y = -x \ln \ln(Cx)$$

$$17.13. x y \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$$

$$Javob: Cx = e^{\cos y/x}$$

$$17.14. yy' = 2y - x$$

$$Javob: y - x = Ce^{\frac{x}{y-x}}$$

$$17.15. a) y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0 \quad b) x^2 + y^2 - 2xy y' = 0$$

Javob: yechish uchun ko'rsatma:

a) $M = y^2$ va $N = x^2 - xy$ ikki o'lchovli bir jinsli funksiya, ya'ni $M(\lambda y) = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 M(y)$; $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda x \lambda y = \lambda^2 (x^2 - xy) = \lambda^2 N(x, y)$.

Agar berilgan tenglamaga $y = xz$, $dy = x dz + z dx$ almashtirish bajarsak, u holda

$$x^2 z^2 dx + (x^2 - x^2 z)(x dz + z dx) = 0, x^2 z^2 dx + x^3(1-z) dz + x^2 z dx - x^2 z^2 dx = 0, x^2 z^2 dx - x^3(z-1) dz = 0$$

yoki $\frac{z-1}{z} dz = \frac{dx}{x}$ ko'rinishga olib kelinadi. Bu oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\int \left(1 - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x}, \quad z - \ln z = \ln x + \ln C, \quad z = \ln z + \ln x + \ln C = \ln cxz$$

$$\text{yoki } ez = cxz \Rightarrow e^{y/x} = cy.$$

$$b) x^2 - y^2 = Cx$$

$$17.16. \frac{dS}{dt} = \frac{S}{t} - \frac{t}{S}$$

$$Javob: S^2 = 2t^2 \ln \frac{C}{t}$$

$$17.17. a) y' = \frac{y}{x} + tg \frac{y}{x}$$

$$b) y' - \frac{3y}{x} = x$$

$$Javob: a) \sin z = Cx; \quad \sin \frac{y}{x} = Cx; \quad b) y = Cx^3 - x^2$$

$$17.18. y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$$

$$Javob: C(x-1) = e^{\frac{2(y-1)}{x-1}}$$

$$17.19. y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$$

$$Javob: C(x-y) = e^{\frac{3(x-1)}{x-y}}$$

Quyidagi chiziqli differensial tenglamalarning yechimi topilsin.

$$17.20. y' + 2y = 4x$$

$$Javob: y = ce^{-2x+2x-1}$$

$$17.21. y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$Javob: y = e^{-x^2} (c + x^2/2)$$

$$17.22. y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$$

$$Javob: y = cx^2 e^{1/x} + x^2$$

$$17.23. (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

$$Javob: y = (x+c)(1+x^2)$$

$$17.24. y' + y = \cos x$$

$$Javob: y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

$$17.25. y' + ay = e^{mx}$$

$$Javob: \begin{cases} y = ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}; & m \neq -a, \\ y = (c+x)e^{mx}, & m = -a \end{cases}$$

$$17.26. 2y dx + (y^2 - 6x) dy = 0$$

$$Javob: y^2 - 2x = cy^3$$

$$17.27. y' - y \sin x = \sin x \cos x$$

$$Javob: y = ce^{-\cos x} + 1 - \cos x$$

$$17.28. y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$$

$$Javob: y = ce^{x^2} + x^3$$

$$17.29. y' + y \cos x = e^{-\sin x}$$

$$Javob: y = xe^{-\sin x} + ce^{-\sin x}$$

$$17.30. y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$Javob: y = \sin x + c \cos x$$

$$17.31. y' - y \operatorname{ctg} x = 2x - \frac{x^2 \cos x}{\sin x}$$

$$Javob: y = x^2 + c \sin x$$

$$17.32. y dx - (x + y^2 \sin y) dy = 0$$

$$Javob: x = (c - \cos y)y$$

$$17.33. xy' - y = x^2 \cos x$$

$$Javob: y = x(\sin x + c)$$

$$17.34. y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$Javob: y = e^{-x^2} (x^2/2 + c)$$

$$17.35. y' \cos x + y = 1 - \sin x$$

$$Javob: \cos x(x+c)/(1+\sin x)$$

Quyidagi differensial tenglamalarni yeching.

$$17.36. y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}, \quad y(1) = 0$$

$$Javob: y = a(x-1)/x^n$$

$$17.37. (1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$$

$$Javob: y = \operatorname{arctg} x - 1 - ce^{-\operatorname{arctg} x}$$

$$17.38. y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0$$

$$Javob: y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1$$

$$17.39. y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$Javob: y = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \right) x + \left(\frac{1}{4} \right) \sin 2x + C \right]$$

$$17.40. y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = e^2/2$$

$$Javob: y = (1/2)x^2 \ln x$$

$$17.41. y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y(\pi/2) = 0$$

$$Javob: y = -\cos x$$

$$17.42. y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, \quad y(0) = 1/3$$

$$Javob: y = \cos 3x [1 - (2/3) \cos 3x]$$

$$17.43. xy' + 2y = x^2$$

$$Javob: y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

$$17.44. y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$Javob: y = (x^2 + C)e^{-x^2}$$

$$17.45. y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

$$Javob: y = (x^2 + C)e^{-x^2}$$

Bernulli tenglamalarini yeching.

17.46. a) $y' - 2xy = 2x^3 y^2$, $y(0) = 1$ b) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$

Javob: yechish uchun ko'rsatma: a) $y^{-2} y' - 2xy^{-1} = 2x^3$, $y^{-1} = z$, u holda $-y^{-2} y' = z'$. Bu munosabatlarni berilgan tenglamaga qo'y sak, u holda $z' + 2xz = -2x^3$ tenglamani yechimi $z = ce^{-x^2} + 1 - x^2$, $y^{-1} = \frac{1}{y} = z$ ekanligidan

$$y = \frac{1}{ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

Boshlang'ich shartdan foydalansak, u holda $y = \frac{1}{1-x^2}$.

b) $y^{-3} = (c - 3 \operatorname{tg} x) \cos^3 x$

17.47. a) $y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}$ b) $xy^2 y' = x^2 + y^3$

Javob: a) Bu tenglamada $n = -1$; $p(x) = -\frac{1}{2x}$; $Q(x) = \frac{x^2}{2}$. Berilgan tenglamani $y^2 = z$ degan almashtirish bajarsak, u holda $z' - \frac{z}{x} = x^2$ chiziqli tenglamani olamiz.

b) $y^3 = cx^3 - 3x^2$

17.48. $y' + \frac{2y}{x} = 2x^2 y^{4/3}$

Javob: $y^{-1/3} = cx^{2/3} - \frac{3}{7} x^3$

17.49. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

Javob: $y^{1/2} = \operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x|}{x} + \frac{c}{x}$

17.50. $y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}$

Javob: $y = e^{-x} \left[\frac{e^x}{2} + 1 \right]^2$

17.51. $y' + xy = xy^3$

Javob: $y^2 = \frac{1}{1+ce^{x^2}}$

17.52. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$, $y(-1) = 1$

Javob: $y = \frac{2x}{1-cx^2}$; $y = \frac{2x}{1-3x^2}$

17.53. $3y^2 y' + y^3 = (x+1)$, $y(1) = -1$

Javob: $y^3 = x + ce^{-x}$; $y^3 = x - 2e^{1-x}$

17.54. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$

Javob: $y(x^2 + cx) = 1$

17.55. a) $y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$

b) $2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

Javob: yechish uchun ko'rsatma: a) Bu yerda $\left(n = \frac{1}{2}\right)$. Agar $y = u^2$ bo'lsa,

u holda $u'g + u g' = \frac{u}{x} u g + x\sqrt{u} g$ yoki $g\left(u' - \frac{u}{x} u\right) + g'u = x\sqrt{u} g$.

Oxirgi munosabatdan $u' - \frac{u}{x} u = 0$, $g'u = x\sqrt{u} g$ tenglamalarni olamiz. Birinchi tenglamani yechimi $u = x^4$ bo'ladi. Ikkinchi tenglamani yechimini topish birinchi tenglama yechimiga bog'liq, ya'ni $g'x^4 = x\sqrt{g}u^4$. Uning yechimi $g = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + c\right)^2$. Umumiy yechim $g = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln|x| + c\right)^2$ bo'ladi.

b) $y^2 = x \ln \frac{c}{x}$

Quyidagi to'liq differensialli differensial tenglamalar yechilsin:

17.56. a) $(2x^3 - xy^2)dx + (2x^3 - xy^2)dy = 0$ b) $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$

Javob: yechish uchun ko'rsatma: a) $M(x, y) = 2x^3 - xy^2$; $N(x, y) = 2y^3 - x^2 y$.

Xususiy hosilalarni topamiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

Bu tenglama uchun (11.21) shart bajarilar ekan. Demak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 - xy^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y^3 - x^2 y$$

bu yerda $u = \int (2x^3 - xy^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2}$ yoki $\frac{\partial u}{\partial x} = -2x^2 + \varphi'(y) = 2x^3 - x^2 y$

$$\varphi'(y) = 2x^3, \quad \varphi(y) = 2x^3 y + c_0.$$

Shunday qilib, $u(x, y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + 2x^3 y - c_0$, binobarin $x^4 - x^2 y + 4x^3 y = 2c_0 = c$.

b) $4x^2 + y^2 = cx$

17.57. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$

Javob: $x^3 e^y - y = c$

17.58. $e^{-y} dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$

Javob: $y + xe^{-y} = c$

17.59. $2x \cos^2 y dx + (2x - x^2 \sin 2y)dy = 0$

Javob: $x^2 \cos^2 y + y = c$

17.60. $2x \cos^2 y dx + (2x - x^2 \sin 2y)dy = 0$

Javob: $x^2 \cos^2 y + y = c$

17.61. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4x^3)dy = 0$

Javob: $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = c$

17.62. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

Javob: $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = c$

$$17.63. (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$$

$$Javob: \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = c$$

$$17.64. (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$$

$$Javob: \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = c$$

Quyidagi differensial tenglamalarni integrallovchi ko'paytuvchisini toping.

$$17.65. a) (y + \ln x)dx - xdy = 0$$

$$b) (x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$$

$$Javob: yechish uchun ko'rsatma: a) \frac{\partial M}{\partial y} = 1; \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\text{integrallovchi ko'paytuvchi } \mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln |x|} = \frac{1}{x^2}.$$

Demak, $\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx - \frac{dx}{x} = 0, x \neq 0$. Bu tenglama uchun to'la differensial sharti bajariladi, ya'ni

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

Demak, to'liq differensial $u(x, y)$ quyidagicha bo'ladi. Birinchi tenglamadan

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}; \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x}$$

$$u(x, y) \text{ ni topamiz. } u(x, y) = \int \left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right) dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \varphi(y)$$

Oxirgi tenglikni y bo'yicha differensiallab, $-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x}$ tenglamani

olamiz. Bu yerda $\varphi'(y) = 0$ yoki $\varphi(y) = c_1$. Demak, $-\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c_1 = c_2$

yoki $y = cx - \ln x - 1$.

$$b) x^2 + \sin^2 y = cx$$

$$17.66. y^2 dx + (yx - 1)dy = 0$$

$$Javob: \mu = \frac{1}{y}; xy - \ln y = 0$$

$$17.67. (x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

$$Javob: e^x (x \sin y - y \sin y + y \cos y) = c$$

$$17.68. \cos x dy + (\sin x + e^y)dx = 0$$

$$Javob: x + e = e^y \cos x$$

$$17.69. 2x \operatorname{tg} y dx + (x^2 - 2 \sin y)dy = 0$$

$$Javob: \ln \mu = \ln \cos y; x^2 \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y = c$$

$$17.70. (e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$$

$$Javob: \mu = e^{-2x}; y^2 = (c - 2x)e^{2x}$$

$$17.71. (1 + 3x^2 \sin y)dx - x \operatorname{ctg} y dy = 0$$

$$Javob: \mu = \frac{1}{\sin y}; \frac{x}{\sin y} + x^3 = c$$

$$17.72. (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$Javob: y^2 = cx^3 + x^2$$

$$17.73. (\sin x + e^y)dx + \cos x dy = 0.$$

$$Javob: \mu = e^{-y}; e^y \cos x = c + x$$

Mavzu bo'yicha nazorat testlari

1. I tartibli differensial tenglama eng umumiy holda qanday ko'rinishda bo'ladi?

$$A) F(x, y, y') = 0 \quad B) F(x, y) = y' \quad C) F(x, y') = y$$

$$D) F(y, y') = x \quad E) F(x, y, y', y'') = 0$$

2. I tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini ko'rsating.

$$A) y' = f(x, y), y'(x_0) = y_0 \quad B) y' = f(x, y), y'(x_0) = y_0$$

$$C) y' = f(x_0, y) \quad D) y' = f(x, y_0) \quad E) y' = f(x_0, y_0)$$

3. $y' = xe^x, y(0) = 2$ Koshi masalasini yechimini toping.

$$A) y = xe^x + 2 \quad B) y = (x-1)e^x + 3 \quad C) y = (x+1)e^x + 1$$

$$D) y = (x-2)e^x + 4 \quad E) y = (x+2)e^x$$

4. I tartibli o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamani ko'rsating.

$$A) y' = f(xy) \quad B) y' = f(x/y) \quad C) y' + P(x)y = Q(x)$$

$$D) M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad E) M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

5. I tartibli bir jinsli differensial tenglamani qanday almashtirma yordamida integrallanadi?

$$A) y = u/x \quad B) y = u+x \quad C) y = u-x \quad D) y = ux \quad E) y = x/u$$

6. I tartibli chiziqli differensial tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?

$$A) y' = f(x+y) \quad B) y' = f(x/y) \quad C) y' + P(x)y = Q(x)$$

$$D) M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad E) M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

7. I tartibli $y' + P(x)y = Q(x)$ chiziqli differensial tenglama qaysi holda bir jinsli deyiladi?

$$A) Q(x) > 0 \quad B) Q(x) < 0 \quad C) Q(x) = 0 \quad D) Q(x) \neq 0 \quad E) P(x) = 0$$

8. I tartibli chiziqli differensial tenglama Bernulli usulida qanday almashtirma yordamida yechiladi?

$$A) y = u+v \quad B) y = u-v \quad C) y = uv \quad D) y = u/v \quad E) y = u^v$$

9. Bernulli tenglamasi qaysi javobda to'g'ri ifodalangan?

- A) $y' + P(x)y^n = Q(x)$ ($n \neq 0, n \neq 1$) B) $y^n y' + P(x)y = Q(x)$ ($n \neq 0, n \neq 1$)
 C) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$) D) $y' + P(x)y = Q(x)/y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$)
 E) $y' + P(x)/y^n = Q(x)$ ($n \neq 0, n \neq 1$) . $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ($n \neq 0, n \neq 1$)

10. Bernulli tenglamasi qanday almashtirma yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi?

- A) $z = y^n$ B) $z'' = y$ C) $z = y^{n-1}$ D) $z = y^{n+1}$ E) $z = y^{1-n}$

11. $y' + xy = x^3 y^3$ Bernulli tenglamasining umumiy yechimini topish uchun qanday almashtirma bajariladi?

- A) $z = y^3$ B) $z^3 = y$ C) $z = y^2$ D) $z = y^{-2}$ E) $z = y^{-3}$

12. Qaysi shartda $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ to'liq differensialli tenglama bo'ladi?

- A) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ B) $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$ C) $\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$
 D) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ E) $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 1$.

18-§. TARTIBINI PASAYTIRISH MUMKIN BO'LGAN YUQORI TARTIBLI TENGLAMALARNING BA'ZI BIR TIPLARI. O'ZGARMAS KOEFFISIYENTLI CHIZIQLI IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

18.1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.

1-ta'rif: Erkli o'zgaruvchi x , noma'lum funksiya $y = y(x)$ va uning hosilalari qatnashgan quyidagi ko'rinishdagi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (18.1)$$

yoki $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ tenglamaga n -tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda asosiy masala (18.1) tenglamaning yechimini topishdir. Buning uchun (18.1) tenglamani yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani keltiramiz va uni isboti ustida to'xtalmaymiz.

Teorema: Agar $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ tenglamada $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya va uning $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha olingan xususiy $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ hosilalari qiymatlarini o'z ichiga biror sohadagi uzluksiz funksiylaridan iborat bo'lsa, bu holda tenglamaning

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (18.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi mavjud va yagonadir. Teoremadagi (18.2) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi.

2-ta'rif: Berilgan (18.1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ funksiya n -tartibli differensial tenglama (18.1) ning umumiy yechimi deyiladi. Bu yerda $C_1, C_2, \dots, C_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lib, ularning har qanday qiymatlarida tenglamani qanoatlantiradi. Agar (18.2) boshlang'ich shartlar bo'lsa, u holda $C_1, C_2, \dots, C_n$ larni shunday tanlash mumkinki, yechim (18.2) shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimga ega bo'ladi. Shuningdek (18.1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$$

funksiya umumiy integral deyiladi va boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim xususiy integral deyiladi.

18.2. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan ba'zi bir yuqori tartibli differensial tenglamalar.

Yuqori tartibli differensial tenglamaning eng sodda ko'rinishi

$$y^{(n)} = f(x) \quad (18.3)$$

shaklda bo'ladi. Bu tenglama umumiy yechimini topish uchun uni x_0 va x oralig'ida integrallaymiz, u holda $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ekanligidan

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1 \quad (18.4)$$

ifodaga ega bo'lamiz, bunda C_1 integrallash o'zgarmasi. (18.4) ni bir marta integrallab

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + C_1(x - x_0) + C_2$$

integrallashni shunday davom ettirib, nihoyat (n -marta integrallashdan keyin) umumiy integralining

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n \quad (18.5)$$

ifodani hosil qilamiz. Oxirgi (18.5) ifoda (18.3) tenglamani umumiy yechimi bo'ladi. Agar (18.2) boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, ularga mos $C_1, C_2, \dots, C_n$ larni aniqlab differensial tenglamani xususiy yechimini topamiz.

1-misol: $y''' = \frac{2}{x}$ tenglamani $y|_{x_0=1} = 1, y'|_{x_0=1} = 1, y''|_{x_0=1} = 3$ ni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani ketma-ket uch marta integrallaymiz, u holda

$$y'' = \int_{x_0}^x \frac{2}{x} dx + C_1 = 2 \ln|x| + C_1, \quad y' = 2 \int_1^x (\ln x + C_1) dx + C_2 = 2 \int_1^x \ln x dx + C_1(x-1) + C_2 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \end{array} \right| = 2 \left(x \ln x - \int_1^x dx \right) + C_1(x-1) + C_2 = 2x \ln x - x + 1 + C_1(x-1) + C_2.$$

$$y = \int_1^x (2x \ln x - x + 1) dx + \frac{C_1(x-1)^2}{2} + C_2(x-1) + C_3 =$$

$$= 2 \int_1^x x \ln x dx - \frac{x^2}{2} + x + \frac{C_1(x-1)^2}{2} + C_2(x-1) + C_3 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = 2 \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int_1^x x dx \right) - \frac{x^2}{2} + x + \frac{C_1(x-1)^2}{2} + C_2(x-1) + C_3 =$$

$$= x^2 \ln x - \frac{3}{2} x^2 + x + \frac{C_1(x-1)^2}{2} + C_2(x-1) + C_3.$$

Endi boshlang'ich shartlardan foydalanamiz $y'' = 2 \ln x + C_1; y''|_{x_0=1} = 3$ dan

$$3 = 2 \ln x + C_1, \quad C_1 = 3.$$

$$y' = 2x \ln x - x + 1 + C_1(x-1) + C_2; \quad y'|_{x_0=1} = 1 \quad \text{dan} \quad 1 = 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 1 + 1 + C_1(1-1) + C_2,$$

$$\text{bundan } C_2 = 1. \quad y = x^2 \ln x - \frac{3}{2} x^2 + x + \frac{C_1(x-1)^2}{2} + (x-1) + C_3, \quad y|_{x_0=1} = 1 \quad \text{dan} \quad C_3 = \frac{3}{2}.$$

Demak xususiy yechim

$$y = x^2 \ln x - \frac{3}{2} x^2 + x + \frac{3}{2} (x-1)^2 + (x-1) + \frac{3}{2} = x^2 \ln x - x + 2.$$

18.3. Differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli tenglamalar.

Agar differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmasin, ya'ni

$$y'' = f(x, y') \quad (18.6)$$

bo'lsin. Uni yechish uchun $y' = p(x)$ belgilash kiritamiz, u holda (18.6) tenglamani $p' = f(x, p)$ shaklda yozamiz. Bu esa p parametrga nisbatan birinchi tartibli tenglama bo'ladi. Demak, $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ tenglamani integralini hisoblab $p = p(x, C)$ yechimni topamiz. $y' = p$ ekanligini hisobga olib,

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2 \text{ umumiy yechimni topamiz.}$$

2-misol: $xy'' - y' = x^2 e^x$ differensial tenglamaning $y|_{x=0} = -1, y'|_{x=0} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: $y' = p, y'' = p'$ bo'lsa, u holda $p' - \frac{1}{x} p = x e^x$ chiziqli tenglamani

hosil qilamiz, uni $p = uv, \quad p' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = x e^x$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = xe^x \quad \text{shaklda keltirib,} \quad v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \\ \ln v - \ln x = \ln C, \quad y = Cx, \quad C = 1 \Rightarrow y = x, \quad u'x = xe^x \Rightarrow u' = e^x \Rightarrow u = e^x + C_1, \\ y = \int xe^x dx + C_1x^2 + C_2 \text{ umumiy yechimni topamiz.}$$

Boshlang'ich shartlarga asosan $0 = 0 + C_1 \cdot 0$, $C_1 = 0$; $-1 = e^0(0-1) + C_2$, $C_2 = 0$ ekanligidan xususiy yechim $y = (x-1)e^x$ ko'rinishda bo'ladi.

18.4. x oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar.

Ushbu ko'rinishdagi

$$y'' = f(x, y') \quad (18.7)$$

differensial tenglamada x argument oshkor bo'lmagan hol. Bu tenglamaning yechimini topish uchun avvalgidek $y' = p(y)$ almashtirib olamiz, lekin p ni x ning emas y ni funksiyasi deb qaraymiz, u holda

$$y' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \text{ bo'lganligidek tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi.}$$

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \text{ va uni integrallab } p = p(y, C) \text{ ni topamiz. Bundan } \frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

$$\text{yoki } \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx \text{ ekanligi kelib chiqadi. Uni yana bir marta integrallab (18.7)}$$

tenglamani umumiy integrali $F(x, y, C_1, C_2) = 0$ ni topamiz.

3-misol: $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$ tenglamani $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

$$\text{Yechish: } y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy} \text{ dan } yp \frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0 \Rightarrow p \left(y \frac{dp}{dy} - p + p^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$p = 0, y' = 0, y = C, \quad y \frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0 \Rightarrow y \frac{dp}{dy} = p - p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 - p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p-1} - \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p-1| - \ln|p| = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow \frac{p-1}{p} = \frac{C_1}{y} \Rightarrow p \left(1 + \frac{C_1}{y} \right) = 1 \Rightarrow$$

$\left(1 + \frac{C_1}{y} \right) dy = dx \Rightarrow y + C_1 \ln y = x + C_2$ umumiy integrali bo'ladi. Boshlang'ich shartlarga asosan yozamiz $1 + C_1 \ln 1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$, $1 \cdot (1 + C_1) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$. Demak xususiy yechim $y = x + 1$ bo'ladi.

18.5. O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Ushbu

$$y'' + py' + qy = r(x) \quad (18.8)$$

ko'rinishdagi tenglama ($p = \text{const}, q = \text{const}$) ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $r(x)$ berilgan funksiya. Agar $r(x) = 0$ bo'lsa, (18.8) bir jinsli $r(x) \neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan tenglama differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglamani

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (18.9)$$

yechimni

$$y = e^{\lambda x} \quad (18.10)$$

ko'rinishda qidiramiz. Agar (18.9) ni (18.10) ga qo'ysak

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (\lambda = \text{const})$$

xarakteristik tenglamani olamiz.

1. Agar xarakteristik tenglama ikkita λ_1 va λ_2 yechimlari mavjud bo'lsa, ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) u holda differensial tenglama (18.10) umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (18.11)$$

4-misol: $y'' - 7y' + 6y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ xarakteristik tenglamani tuzib, $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = 6$ ildizlarga ega bo'lamiz, bularga esa e^x va e^{6x} xususiy yechimlar mos keladi. Bu yechimlar chiziqli erkli bo'lganidan, umumiy yechim (18.11) formulaga asosan quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

2. Agar xarakteristik tenglamani yechimlari $\lambda_1 = \lambda_2$ bo'lsa, u holda

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}. \quad (18.12)$$

5-misol: $y'' - 12y' + 36y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Karakteristik tenglama $\lambda^2 - 12\lambda + 36 = 0$ ko'rinishda bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$. Bunga mos $y = e^{6x}$ bo'lganligidan (18.12) formulaga asosan $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x}$.

3. Agar karakteristik tenglamani yechimlari kompleks son, ya'ni

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \left(\alpha = -p/2, \beta = \sqrt{q - p^2/4} \right)$$

bo'lsa, u holda $y = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$. (18.13)

6-misol. $y'' - 4y' + 13y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Karakteristik tenglama $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ ko'rinishda bo'lib, $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Bularga mos xususiy yechimlar $e^{2x} \cos 3x$ va $e^{2x} \sin 3x$ ko'rinishda bo'lgani uchun umumiy yechim, (18.13) formulaga asosan, $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Mustaqil bajarish uchun misollar

Quyidagi tenglamalar yechilsin.

18.1. a) $y'' = y' \operatorname{ctg} x$. b) $y''' = \frac{6}{x^2}$ boshlang'ich shartlar $x=1$ da $y=2, y'=1, y''=1$

Javob: a) $z = y'$ yoki $y'' = (y')' = z'$ almashtirish bajaramiz. $z' = z \operatorname{ctg} x$, $z \neq 0$ bo'lgani uchun

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x dx}{\sin x} \text{ yoki } \frac{dz}{z} = \frac{d \sin x}{\sin x}, \ln|z| = \ln|\sin x| + \ln c_1, z = \pm c_1 \sin x$$

$$\text{b) } y' = 3 \ln x + 2x^2 - 6x + 6$$

18.2. $y'' = 4 \cos 2x$ boshlang'ich shartlar $x=0$ bo'lganda $y=0, y'=0$

$$\text{Javob: } y = -\cos 2x$$

$$\text{18.3. } y'' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{18.4. } y'' = \frac{1}{x}$$

$$\text{18.5. } y'' = \frac{1}{2y^3}$$

$$\text{18.6. } y'' = 1 - y'^2$$

$$\text{18.7. } xy'' + y' = 0$$

$$\text{18.8. } yy'' = y'^2$$

$$\text{18.9. } yy'' + y'^2 = 0$$

$$\text{18.10. } (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$$

$$\text{18.11. } y'(1+y'^2) = ay''$$

$$\text{18.12. } x^2 y'' + xy' = 1$$

$$\text{18.13. } yy'' = y^2 y' + y'^2$$

$$\text{18.14. } yy'' - y'(1+y') = 0$$

$$\text{18.15. } y'' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{18.16. } x^3 y'' + x^2 y' = 1$$

$$\text{18.17. } yy'' - y(1+y') = 0$$

$$\text{18.18. } y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

$$\text{18.19. } y'' + 2y(y')^3 = 0$$

$$\text{18.20. } y'' x \ln x = y'$$

$$\text{18.21. } y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$$

$$\text{18.22. } y'' = -\frac{x}{y}$$

$$\text{18.23. } xy'' + y' = 0$$

$$\text{Javob: } y = c_1 x + \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + c_2$$

$$\text{Javob: } y = x \ln|x| + c_1 x + c_2$$

$$\text{Javob: } 1 + c_1 y^2 = \left(c_2 + \frac{c_1 x}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\text{Javob: } y = \ln|e^{2x} + c_1| - x + c_2$$

$$\text{Javob: } y = c_1 + c_2 \ln|x|$$

$$\text{Javob: } y = c_1 e^{c_2 x}$$

$$\text{Javob: } y = \pm \sqrt{c_1 x + c_2}$$

$$\text{Javob: } y = (1+c_1^2) \ln|x+c_1| - c_1 x + c_2$$

$$\text{Javob: } y = \frac{1}{2} (\ln|x|)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$\text{Javob: } x - c_1 = a \ln \left| \sin \frac{y - c_2}{a} \right|, a \neq 0$$

$$\text{Javob: } x = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{y}{y+c_1} \right| + c_2, y = c$$

$$\text{Javob: } y = c_1 e^{c_2 x} + \frac{1}{c_2}$$

$$\text{Javob: } y = \pm \frac{1}{2} \left[x \sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] + c_2$$

$$\text{Javob: } y = \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2$$

$$\text{Javob: } y = c_1 e^{c_2 x} + 1/c_2$$

$$\text{Javob: } y = c_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + c_2$$

$$\text{Javob: } y^3 + c_1 y + c_2 = 3x$$

$$\text{Javob: } y = c_1 x (\ln x - 1) + c_2$$

$$\text{Javob: } \operatorname{ctg} y = c_2 - c_1 x$$

$$\text{Javob: } y = \pm \frac{1}{2} \left[x \sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin \frac{x}{a} \right] + c_2$$

$$\text{Javob: } y = c_1 + c_2 \ln|x|$$

$$18.24. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$$

$$Javob: y = (c_1 x - c_1^2) e^{x/c_1 + 1} + c_2 \quad y = ex^2/2 + c$$

Quyidagi bir jinsli ikkinchi tartibli y differensial tenglamalar yechilsin.

$$18.25. y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$Javob: y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

$$18.26. y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$Javob: y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

$$18.27. y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$Javob: y = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

$$18.28. y'' - 4y' = 0$$

$$Javob: y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$18.29. y'' + 4y = 0$$

$$Javob: y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

$$18.30. y'' + 4y' = 0$$

$$Javob: y = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

$$18.31. y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$Javob: y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

$$18.32. y'' + 2ay' + a^2 y = 0$$

$$Javob: y = (c_1 x + c_2) e^{ax}$$

$$18.33. y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$Javob: y = e^{-x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$18.34. \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = 0$$

$$Javob: y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

Quyidagi tenglamalarning boshlang'ich yoki chetki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$$18.35. y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6.$$

$$Javob: y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$$

$$18.36. y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$Javob: y = xe^{5x}$$

$$18.37. y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}.$$

$$Javob: y = xe^{5x}$$

$$18.38. y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$Javob: y = (5 - 2e^{-3x})/3$$

$$18.39. y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$Javob: y = \sqrt{2} \sin 3x$$

$$18.40. y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$Javob: y = \sin x + (1/\sqrt{3}) \cos x$$

$$18.41. y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$Javob: y = e^{-t} (\cos t + 2 \sin t)$$

Mavzu bo'yicha nazorat testlari

II tartibli differensial tenglamalar. Tartibni pasaytirish usuli.

1. II tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

$$A) F(x, y'')=0 \quad B) F(x, y, y'')=0 \quad C) F(x, y, y', y'')=0$$

$$D) F(y, y', y'')=0 \quad E) F(x_0, y_0, y', y'')=0$$

2. II tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

$$A) y'' = f(x, y, y', y'') \quad B) y'' = f(y, y', y'') \quad C) y'' = f(x, y, y')$$

$$D) y'' = f(y, y') \quad E) y'' = f(x_0, y_0, y')$$

3. II tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasida boshlang'ich shartlar qanday ko'rinishda bo'ladi?

$$A) y(x_0) = y_0, \quad y'(x_1) = y_1 \quad B) y(x_0) = y_0, \quad y'(x_1) = y_1'$$

$$C) y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \quad D) y(x_0) = y'(x_0) = y_0 \quad E) y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0''$$

4. II tartibli differensial tenglamaning tartibini pasaytirish usulida integrallash uchun qanday almashtirma bajariladi?

$$A) y=p \quad B) y'=p \quad C) y''=p \quad D) yx=p \quad E) y/x=p$$

5. Quyidagi ko'rinishdagi II tartibli differensial tenglamalardan qaysi birining tartibini pasaytirish usulida integrallab bo'lmaydi?

$$A) y'' = f(x, y) \quad B) y'' = f(x, y') \quad C) y'' = f(y, y') \quad D) y'' = f(x)$$

E) barcha tenglamalarni tartibini pasaytirish usulida integrallab bo'ladi.

6. Quyidagi II tartibli differensial tenglamalardan qaysi birini tartibni pasaytirish usulida integrallab bo'lmaydi?

$$A) y'' = xy \quad B) y'' = xy' \quad C) y'' = yy' \quad D) y'' = x$$

E) barcha tenglamalarni tartibni pasaytirish usulida integrallab bo'ladi.

7. II tartibli eng sodda differensial tenglamani ko'rsating.

$$A) y'' = f(x, y) \quad B) y'' = f(x, y') \quad C) y'' = f(y, y') \quad D) y'' = f(x) \quad E) y'' = f(y')$$

8. $y'' = 12x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ Koshi masalasining yechimini toping.

$$A) y = 4x^3 + x^2 + x + 1 \quad B) y = 4x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad C) y = 4x^3 + x^2 + 3x + 1$$

$$D) y = 4x^3 + x^2 + 4x + 1 \quad E) y = 4x^3 + x^2 - x + 1$$

9. $y'' = y'$ tenglamaning umumiy yechimini tartibni pasaytirish usulida toping.

$$A) y = C_1 e^x + C_2 \quad B) y = C_1 e^{C_2 x} \quad C) y = C_1 + e^{C_2 x}$$

- D) $y = e^{C_1 x + C_2}$ E) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
10. $y'' = y'/x$, $y(1)=5$, $y'(1)=4$ Koshi masalasi yechimining $x=0$ nuqtadagi qiymati $y(0)$ nimaga teng?
- A) $y(0)=-1$ B) $y(0)=0$ C) $y(0)=1$ D) $y(0)=2$ E) $y(0)=3$

X-BOB. SONLI QATORLAR

19-§. SONLI QATORLAR. QATOR YAQINLASHUVINING ZARURIY VA YETARLI SHARTLARI

19.1. Sonli qatorlar.

Agar sonli qatorlarning biror $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ cheksiz ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ushbu

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Ko'rinishidagi yig'indi *sonli qator* deyiladi, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sonlar *qatorning hadlari*, qatorning n -hadi u_n esa qatorning *umumiy hadi* deb ataladi.

1-misol.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ qatorni $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$ ko'rinishida yozing

Yechish. n ga ketma-ket 1,2,3,4,5 sonlarni qo'yib, uning hadlarini tuzib olamiz.

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{2}{5}, \quad u_3 = \frac{3}{10}, \quad u_4 = \frac{4}{17}, \quad u_5 = \frac{5}{26}$$

va ularni quyidagi yig'indi ko'rinishida yozamiz.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

2-misol.

$$\frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{18 \cdot 17} + \dots$$

qatorning

u_n va u_{n+1} hadlarini toping.

Yechish. Berilgan qatorning hadlaridagi maxrajlari birinchi ko'paytuvchi uchun 3,8,13,18,... ketma-ketlikni tashkil qilib, u 5 ga ortib boryapti va ikkinchi ko'paytuvchi uchun 8,11,14,17,... ketma-ketlik 3 ga ortmoqda. Demak, bu ketma-ketlikning umumiy hadlarini quyidagicha yozsak bo'ladi.

$$3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2; \quad 8 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 5.$$

Qator hadlarining suratlari esa 1 ga teng. Endi qatorning u_n va u_{n+1} hadlarini yozamiz.

$$u_n = \frac{1}{(5n-2)(3n+5)}$$

bu yerda n ga $n+1$ qiymat berib u_{n+1} ni topib olamiz.

$$u_{n+1} = \frac{1}{[5(n+1)-2][3(n+1)+5]} = \frac{1}{(5n+3)(3n+8)}.$$

Demak, qator umumiy hadlari formulasini yozishda qator hadlari tuzilish qonuniyatini bilish zarurdir.

19.2. Sonli qator yaqinlashishi

Agar $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ qatorning birinchi n ta hadining yig'indisi S_n orqali belgilanadi va qatorning *n-xususiy yig'indisi* deyiladi:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

n cheksizlikka intilganda ($n \rightarrow \infty$) chekli S limitga intilsa: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, qator yaqinlashuvchi deyiladi. S son yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi deyiladi. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ bo'lsa, yoki mavjud bo'lmasa, qator uzoqlashuvchi deyiladi.

3-misol. Quyidagi qatorni yaqinlashishga tekshiring.

$$\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Yechish. Berilgan qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi S_n ni yozamiz va uni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} S_n &= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \\ &= \ln \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Endi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ni hisoblaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Demak, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

4-misol. Qatorni yaqinlashishga tekshiring

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}.$$

Yechish. Qatorning umumiy hadini sodda kasrlar yig'indisiga keltiramiz:

$$u_n = \frac{1}{9n^2 + 3n - 2} = \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right).$$

Bundan

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right), & u_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right), \\ u_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right), & u_4 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right), \dots \end{aligned}$$

U holda

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right). \end{aligned}$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}.$$

Demak, qator yaqinlashadi va uning yig'indisi $\frac{1}{6}$ ga teng.

Ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qator garmonik qator deb ataladi, u uzoqlashuvchidir.

Umumlashgan garmonik qator (yoki Dirixle qatori) deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

qator $p \leq 1$ da uzoqlashuvchi, $p > 1$ da yaqinlashuvchidir.

19.3. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.

Sonli qatorlar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2°. Agar qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3° Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda $ca_1, ca_2, ca_3, \dots, ca_n, \dots$ sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi cS ga teng bo'ladi.

4° Agar

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_1 va S_2 larga teng bo'lsa, u holda

$$a_1 \pm b_1 + a_2 \pm b_2 + a_3 \pm b_3 + \dots + a_n \pm b_n + \dots$$

sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S_1 \pm S_2$ ga teng bo'ladi.

19.4. Qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartlari.

Qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy sharti: Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator yaqinlashsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Qator uzoqlashuvchi bo'lishining (qator uzoqlashishining) yetarli sharti: Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator uzoqlashadi.

Quyidagi misollarda qator yaqinlashishning zaruriy shartini tekshiring va uzoqlashuvchi qatorlarni aniqlang.

5-misol. $\frac{4}{6} + \frac{8}{7} + \frac{12}{8} + \frac{16}{9} + \dots$

Yechish. Umumiy hadni yozamiz:

$$u_n = \frac{4n}{n+5}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ni aniqlaymiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n}{n}}{\frac{n+5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{5}{n}} = 4.$$

Shunday qilib, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4 \neq 0$, ya'ni qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy sharti bajarilmadi. Demak qator uzoqlashuvchi.

6-misol. $\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} + \dots$

Yechish. Berilgan qatorning umumiy hadini yozib olamiz:

$$u_n = \ln \frac{n+1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ni aniqlaymiz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 1 = 0.$$

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 = 0$, ya'ni qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy sharti bajarildi. Bundan qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ qatorlarni $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$ ko'rinishda yozing.

19.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)},$

19.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}$

19.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{5n-3}{5n+2} \right),$

19.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2,$

19.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

19.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2-5},$

19.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12},$

19.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n-4)}.$

Qatorlarning u_n va u_{n+1} hadlarini toping.

$$19.9. \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{7}{10} + \frac{10}{14} + \dots$$

$$19.10. 2 + \frac{5}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots$$

$$19.11. \frac{1}{101} + \frac{2}{301} + \frac{3}{501} + \frac{4}{701} + \dots$$

$$19.12. \frac{2}{15} + \frac{5}{65} + \frac{12}{375} + \frac{20}{1875} + \dots$$

$$19.13. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$19.14. \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{9}{3 \cdot 6} + \frac{27}{4 \cdot 7} + \frac{81}{5 \cdot 8} + \dots$$

Qatorlar uchun: 1) qatorni yaqinlashishini isbotlang; 2) qatorning yig'indisi (S) ni toping.

$$19.15. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], S = \frac{1}{4}$$

$$19.16. \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = 3(1 - (0,5)^n), S = 3$$

$$19.17. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), S = \frac{1}{3}$$

$$19.18. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right), S = \frac{11}{18}$$

$$19.19. \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right), S = \frac{23}{90}$$

$$19.20. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, S = 1$$

$$19.21. \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}, S = \frac{3}{2}$$

$$19.22. \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}, S = 1$$

$$19.23. \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right], S = \frac{1}{8}$$

$$19.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2} \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{3(3n+2)^2}, S = \frac{1}{12}$$

$$19.25. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), S = \frac{1}{2}$$

$$19.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad \text{Javob: } S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}, S = \frac{1}{3}$$

$$19.27. \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \dots + \arctg \frac{1}{2n^2} + \dots \quad \text{Javob: } S_n = \arctg \frac{n}{n+1}, S = \frac{\pi}{4}$$

$$19.28. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{5n-3}{5n+2} \right). \quad \text{Javob: } S_n = \ln \left(\frac{2}{5n+2} \right), \text{ uzoqlashadi}$$

Quyidagi qatorlar uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajariladimi?

$$19.29. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots \quad \text{Javob: Bajarilmaydi.}$$

$$19.30. \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad \text{Javob: Bajariladi.}$$

$$19.31. \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots \quad \text{Javob: Bajariladi.}$$

$$19.32. 1 + \frac{3}{8} + \frac{5}{27} + \frac{7}{64} + \dots \quad \text{Javob: Bajariladi.}$$

$$19.33. \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \dots \quad \text{Javob: Bajariladi.}$$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari
Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvi

1. Ushbu ifodalardan qaysi biri sonli qator bo'ladi?

- A) $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n \cdot \dots$ B) $u_1 : u_2 : u_3 : \dots : u_n : \dots$
 C) $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ D) $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

2. Quyidagilardan qaysi biri $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator uchun xususiy yig'indi bo'lmaydi?

- A) u_1 B) $u_1 + u_2$ C) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ D) $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sonli qator uchun S_{10} xususiy yig'indining qiymatini toping.

- A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{110}$ C) $\frac{10}{11}$ D) 1 E) $\frac{11}{12}$

4. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$ sonli qatorning u_n umumiy hadini ko'rsating.

- A) $u_n = \frac{n+1}{n}$ B) $u_n = \frac{n-1}{n}$ C) $u_n = \frac{n}{n+1}$
 D) $u_n = \frac{n}{n-1}$ E) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

5. Umumiy hadi $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo'lgan sonli qatorni toping.

- A) $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ B) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ C) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots$
 D) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \dots$ E) $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$

6. n -xususiy yig'indisi S_n bo'lgan sonli qator qaysi shartda yaqinlashuvchi deyiladi?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ B) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ C) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C, |C| < \infty$
 D) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ E) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mavjud emas.

7. n -xususiy yig'indisi S_n bo'lgan sonli qator qaysi shartda uzoqlashuvchi bo'lmaydi?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ B) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$

C) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mavjud emas

E) ko'rsatilgan barcha hollarda sonli qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

8. n -xususiy yig'indisi S_n bo'lgan yaqinlashuvchi sonli qatorning S yig'indisi qanday aniqlanadi?

- A) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}}$ B) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}$ C) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$
 D) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$ E) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

9. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$ sonli qator yig'indisini toping.

- A) 2 B) 1,5 C) ∞ D) 1,33 E) 1

10. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{4^n} + \dots$ sonli qator yig'indisini toping.

- A) 1 B) 0 C) 0,8 D) 1,5 E) $1\frac{1}{3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sonli qatorning S yig'indisini toping.

- A) $S=2$ B) $S=\frac{1}{2}$ C) $S=\frac{1}{4}$ D) $S=1$ E) $S=\frac{2}{3}$

12. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$ sonli qator yig'indisini toping.

- A) ∞ B) $\pi/2$ C) e D) 1,5 E) 0,75

13. $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy sharti nimadan iborat?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ B) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > 0$ C) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < 0$ D) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
 E) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ mavjud emas.

14. Quyidagi sonli qatorlardan qaysi biri garmonik qator bo'ladi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

15. Quyidagi sonli qatorlardan qaysi biri uzoqlashuvchi bo'ladi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{4^n}$

**20-§. MUSBAT HADLI SONLI QATORLAR
YAQINLASHISHINING YETARLI SHARTLARI: DALAMBER
ALOMATI, KOSHINING RADIKAL VA INTEGRAL
ALOMATLARI**

20.1. Musbat hadli qatorning yaqinlashishi uchun Dalamber alomati.

Agar $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$ mavjud bo'lsa, u holda bu qator uchun

$$\begin{cases} d < 1 \text{ da qator yaqinlashuvchi} \\ d > 1 \text{ da qator uzoqlashuvchi} \end{cases}$$

$d=1$ bo'lganda yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi noma'lum bo'lgan qator bo'ladi. Bunday hollarda qatorlarni yaqinlashishga tekshirish uchun boshqa alomatlardan foydalanish kerak.

1-misol. $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ushbu qatorni yaqinlashishga tekshirish uchun Dalamber alomatidan foydalanamiz. Bu yerda qatorning umumiy hadi

$$u_n = \frac{2^n}{n^{10}} \text{ va } u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} \text{ ga teng. Bundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{2^n}{n^{10}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}} \cdot \frac{n^{10}}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{10} = 2$$

$2 > 1$ bo'lganligi uchun berilgan qator uzoqlashuvchi qator ekan.

2-misol. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3 \cdot 2^2}} + \frac{3}{\sqrt{5 \cdot 2^3}} + \frac{4}{\sqrt{7 \cdot 2^4}} + \dots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qator uchun ham Dalamber alomatini qo'llaymiz. Bu yerda $u_n = \frac{n}{\sqrt{(2n-1) \cdot 2^n}}$ va $u_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1) \cdot 2^{n+1}}}$ ga teng. Bundan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1) \cdot 2^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{(2n-1) \cdot 2^n}}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \sqrt{\frac{(2n-1) \cdot 2^n}{(2n+1) \cdot 2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ bo'lganligi uchun berilgan qator yaqinlashuvchi qator ekan.

20.2. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashishi uchun Koshi alomati.

Agar $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = r$ mavjud bo'lsa, u holda bu qator uchun

$$\begin{cases} r < 1 \text{ da qator yaqinlashuvchi} \\ r > 1 \text{ da qator uzoqlashuvchi} \end{cases}$$

$r=1$ bo'lganda yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi noma'lum bo'lgan qator bo'ladi. Bunday hollarda qatorlarni yaqinlashishga tekshirish uchun boshqa alomatlardan foydalanish kerak.

3-misol. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{3n-2} \right)^n.$$

Yechish:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n = \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \right)^3 + \left(\frac{5}{4} \right)^4 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n + \dots$$

Koshi alomatini qo'llaymiz.

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ va } r = \frac{1}{2} < 1$$

bo'lgani uchun berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\text{b) } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n}{3n-2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{5}{3},$$

$r = \frac{5}{3} > 1$ bo'lgani uchun berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

20.3. Koshining integral alomati.

Hadlari musbat hamda kamayuvchi bo'lgan qatorning yaqinlashishi uchun Koshining integral alomati:

Agar $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ qator uchun $u_n = f(n)$ deb olinsa, bunda $f(n)$ kamayuvchi funksiya va

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} A & \text{bo'lsa, u holda qator yaqinlashadi,} \\ \infty & \text{bo'lsa, u holda qator uzoqlashadi.} \end{cases}$$

4-misol. $\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+4^2} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots$ qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. Qatorning umumiy hadini $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ deb olaylik. Bu funksiya Koshining integral alomatining barcha talablarini qondiradi.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg x) \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctg n - \arctg 1) = \\ &= \arctg \infty - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Demak, xosmas integral yaqinlashadi, shuning uchun berilgan qator ham yaqinlashadi.

5-misol. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. Qatorning umumiy hadini $f(x) = \frac{1}{x}$ deb olaylik. Bu funksiya Koshining integral alomatining barcha talablarini qondiradi.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x) \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln 1) = \ln \infty - 0 = \infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, bundan qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

20.4. Musbat hadli qatorlarni taqqoslash alomati.

Musbat hadli qatorlarning yaqinlashish belgilaridan yana biri taqqoslash alomatidir. U quyidagidan iborat: berilgan qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash uchun bu qatorning hadlarini yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi avvaldan ma'lum bo'lgan boshqa musbat hadli qatorning mos hadlari bilan taqqoslanadi.

Bizga

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (20.1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (20.2)$$

ikkita musbat hadli qator berilgan bo'lsin.

1) Agar $u_n \leq v_n$ bo'lib, (20.2) qator yaqinlashsa, u holda (20.1) qator ham yaqinlashadi.

2) Agar $u_n \geq v_n$ bo'lib, (20.1) qator uzoqlashsa, u holda (20.2) qator ham uzoqlashadi.

Taqqoslash alomati yordamida berilgan misollarni yaqinlashishga tekshiring.

6-misol. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ushbu qatorni qaraymiz:

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$$

Ravshanki, $a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$. Maxraji $q = \frac{2}{3}$ bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ geometrik qator yaqinlashuvchi, demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

7-misol. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ uzoqlashuvchi ekanligini asoslang.

Yechish. Berilgan qatorning hadlari, ikkinchi hadidan boshlab $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ garmonik qatorning mos hadlaridan katta, garmonik qator esa uzoqlashuvchi. Demak, birinchi taqqoslash alomatiga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

Qatorlarning yaqinlashishini Dalamber alomati yordamida isbotlang.

$$20.1. \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots$$

$$20.2. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$20.4. \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots$$

$$20.3. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \dots + n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} + \dots$$

$$20.5. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots$$

$$20.6. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \dots$$

$$20.8. \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

Qatorlarning yaqinlashishini Koshi alomati yordamida isbotlang.

$$20.10. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n(n+1)} + \dots$$

$$20.11. \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

$$20.12. \arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \dots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \dots$$

$$20.13. \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$$

$$20.15. \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} + \dots$$

$$20.16. \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

$$20.17. \left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2 + \left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2 + \dots$$

$$20.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

Qatorlarning yaqinlashishini solishtirish alomati yordamida yechning.

$$20.19. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \dots$$

$$20.20. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$20.21. 1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots$$

$$20.22. \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots$$

$$20.23. \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)n} + \dots$$

$$20.24. \lg \frac{\pi}{4} + \lg \frac{\pi}{8} + \dots + \lg \frac{\pi}{4n} + \dots$$

$$20.25. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

$$20.7. \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \dots + n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$20.9. \frac{2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} + \dots$$

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

$$20.26. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots$$

$$20.27. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

$$20.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$$

$$20.29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$$

$$20.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$$

$$20.31. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$20.32. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4 + 1}}$$

$$20.33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 5}$$

$$20.34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{3n^3+11}$$

$$20.35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12}$$

$$20.36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$$

Koshining integral alomati bilan quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin.

$$20.37. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$20.38. 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$20.39. \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

$$20.40. \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

Javob: uzoqlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: yaqinlashadi

Javob: uzoqlashadi

Javob: Qator uzoqlashadi.

Javob: Uzoqlashadi.

Javob: $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3} = \frac{3}{8}$ bo'lganda qator

Javob: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ bo'lganda qator

$$20.41. \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$$

Javob: $\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \infty$ bo'lganda qator uzoqlashadi.

$$20.42. \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots$$

Javob: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2-1} = \left[\frac{1}{4} \ln \frac{x}{x+1} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{4} \ln 2$ bo'lgani uchun qator yaqinlashadi.

$$20.43. \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi.

Qatorlarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

$$20.43. \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$20.44. 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$20.45. \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$20.46. 1 + \frac{4}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n^2}{n!} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$20.47. 2 + \frac{5}{8} + \dots + \frac{n^2+1}{n^3} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$20.48. \frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \dots + \frac{n}{1000n+1} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$20.49. \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$20.50. \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$20.51. \arctg 1 + \arctg^2 \frac{1}{2} + \dots + \arctg^n \frac{1}{n} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

Musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlari

1. Ta'rifni to'ldiring: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator musbat hadli deyiladi,

agar uning ...

A) barcha S_n xususiy yig'indilari musbat bo'lsa.

B) birinchi hadi musbat bo'lsa. C) ayrim hadlari musbat bo'lsa.

D) barcha hadlari musbat bo'lsa. E) yig'indisi musbat bo'lsa.

2. Quyidagi qatorlardan qaysi biri musbat hadli bo'ladi?

$$A) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} \quad B) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} \quad C) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k} \quad D) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k}$$

E) keltirilgan barcha qatorlar musbat hadli emas.

3. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishligining zaruriy

shartini ko'rsating.

$$A) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

$$B) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

$$C) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$D) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

$$E) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0.$$

4. Taqqoslash alomati shartini ko'rsating: Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ musbat

hadli sonli qatorlar hamda $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, unda ... shart

bajarilganda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$A) u_n \approx v_n. \quad B) u_n > v_n. \quad C) u_n \geq v_n. \quad D) u_n \leq v_n. \quad E) u_n \neq v_n.$$

5. Limitik taqqoslash alomatida musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sonli qatorlarni yaqinlashuvchi ekanligini tekshirish uchun quyidagi limitlarning qaysi biridan foydalaniladi?

$$A) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n.$$

$$B) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n).$$

$$C) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}.$$

$$D) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n).$$

$$E) \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \pm v_n).$$

6. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qatorni Dalamber alomati orqali tekshirish

uchun qaysi limit hisoblanadi?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} u_n$. B) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + u_n)$. C) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n)$.
D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

7. Quyidagi musbat hadli sonli qatorlardan qaysi birining yaqinlashuvini Dalamber alomati orqali aniqlab bo'ladi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2n}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n)^2}$

8. Umumiy hadi $u_n = (3n+1)/2^n$ bo'lgan sonli qator Dalamber alomati orqali tekshirilganda $d = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}/u_n)$ qiymati va qator yaqinlashuvi

haqidagi tasdiq qaysi javobda to'g'ri ko'rsatilgan?

- A) $d=1$ va qator uzoqlashuvchi. B) $d=0$ va qator yaqinlashuvchi.
C) $d=0.5$ va qator yaqinlashuvchi.
D) $d=\infty$ va qator uzoqlashuvchi. E) $d=1$ va qator yaqinlashuvchi.

9. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qatorni Koshi alomati orqali tekshirish uchun qaysi limit hisoblanadi?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$. B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$. C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n u_{n+1}}$.
D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$. E) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{u_n}{u_{n+1}}}$.

10. Quyidagi qatorlardan qaysi birining yaqinlashuvini Koshi alomati yordamida aniqlab bo'ladi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^5+5}$. E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

11. Integral alomatiga asosan musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sonli qator va $\int_1^{\infty} f(x) dx$ xosmas integral orasida qanday munosabat o'rinli bo'ladi?

A) Agar sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) Agar sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, unda xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

C) Agar xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, unda sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

D) Agar xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, unda sonli qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

E) Keltirilgan barcha munosabatlar o'rinli bo'ladi.

12. Umumlashgan garmonik qatorning umumiy u_n hadini ko'rsating.

- A) $u_n = \frac{1}{p^n}$. B) $u_n = \frac{p^n}{n}$. C) $u_n = \frac{1}{p+n}$. D) $u_n = \frac{1}{n^p}$.

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

13. Umumlashgan garmonik qator

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

p parametrning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi?

- A) $p > 1$. B) $p \geq 1$. C) $p < 1$. D) $p \leq 1$. E) $p \neq 1$.

14. Quyidagi umumlashgan garmonik qatorlardan qaysi biri yaqinlashuvchi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

E) barcha qatorlar uzoqlashuvchi .

21-§. ISHORASI ALMASHINUVCHI QATOR YAQINLASHUVINING LEYBNITS BELGISI. IXTIYORIY HADLI QATORNING ABSOLYUT VA SHARTLI YAQINLASHISHI

21.1. Ishoralari almashinuvchi qatorlar. Leybnits alomati.

Ishorasi almashinuvchi qatorlar deb, hadlari navbat bilan musbat va manfiy ishoraga ega bo'lgan qatorga aytiladi. Bunday qatorni yoyganda hadlarining ishoralari ochiq-oydin ko'rsatib

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n$
kabi yozish qulaydir (bu yerda barcha $u_n > 0$ deb hisoblanadi). Masalan:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-1} + \dots$$

$$\frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} - \frac{5}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{(n+2)!} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

qatorlar ishoralari almashinuvchi qatorlardir. Ishorasi almashinuvchi qatorlar yaqinlashuvchi bo'lishining yetarli shartini Leybnits alomati orqali ifodalash mumkin.

Ishorasi almashinuvchi

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n$$

1) qatorning absolyut qiymatlari kamayuvchi $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$

2) berilgan qatorning umumiy hadining limiti nolga teng bo'lishi kerak ya'ni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

bo'lsa, qator yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi S ushbu $0 < S < u_1$ shartni qanoatlantiradi.

Ishorasi almashinuvchi qator qoldig'i $|R_n| < u_{n+1}$ tengsizlik bilan baholanadi.

1-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n+2} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator uchun Leybnits alomatining shartlari bajarilishini tekshiramiz, ya'ni

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{4} > \frac{4}{5} > \dots > \frac{n+1}{n+2} > \dots$$

va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

birinchi shart bajarilyapti, lekin 2-shart bajarilmayapti. Demak, qator uzoqlashuvchi.

2-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator umumiy hadining absolyut qiymatini yozamiz:

$$u_n = \frac{1}{2n-1}$$

Leybnits alomati shartlarini tekshiramiz:

$$1) 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

Demak, qator hadlari absolyut qiymatlari bo'yicha kamayuvchi va nolga intiladi, shuning uchun qator yaqinlashuvchi. Bu yerda qator yig'indisi: $S < 1$.

3-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2n+1} + \dots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qator hadlaridan tuzilgan absolyut qiymatlarni Leybnits alomatiga qo'yib tekshiramiz.

$$1) \frac{2}{3} > \frac{3}{5} > \frac{4}{7} > \frac{5}{9} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Leybnits alomatining ikkala sharti ham bajarilmadi. Demak, qator uzoqlashuvchi. Shunga e'tibor berish kerakki, ikkinchi shart bajarilib, birinchi shart bajarilmasa qator uzoqlashadi deb xulosa chiqara olmaymiz, chunki Leybnits alomatidagi birinchi shart qatorning yaqinlashishi uchun zaruriy emas. Bu holda boshqa usullarga murojaat qilish zarurati paydo bo'ladi.

21.2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Agar qatorning hadlari orasida cheksiz ko'p musbat va cheksiz ko'p manfiy hadlar bo'lsa, bunday qator o'zgaruvchan ishorali qator deyiladi. Masalan,

$$1) \frac{a}{3^1} + \frac{2a}{3^2} + \frac{3a}{3^3} + \frac{4a}{3^4} + \dots + \frac{na}{3^n} + \dots$$

bunda a istalgan son,

$$2) \frac{\cos \pi}{1^2} + \frac{\cos 3\pi}{2^2} + \frac{\cos 5\pi}{3^2} + \dots + \frac{\cos (2n-1)}{n^2} + \dots$$

qatorlar o'zgaruvchan ishorali qatorlardir. Biz bundan oldin ko'rib o'tgan ishoralari almashinuvchi qatorlar o'zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holidir.

Ushbu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (21.1)$$

o'zgaruvchan ishorali qator berilgan bo'lsin (bunda $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sonlar musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin). Agar (21.1) qatorning absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (21.2)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (21.1) qator *absolyut yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

Agar (21.1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, (21.2) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, berilgan qator *shartli yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish qator yaqinlashuviga ta'sir etmaydi.

Agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish natijasida u uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi ham mumkin yoki boshqa songa yaqinlashuvchi qatorga aylanib qolishi mumkin.

Agar ishoralari o'zgaruvchan qator absolyut ham, shartli ham yaqinlashmasa, u holda uni uzoqlashuvchi qator deb yuritiladi.

4-misol. Berilgan qatorni absolyut yaqinlashishga tekshiring.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots$$

Yechish. Ishorasi almashinuvchi qatorning musbat hadlaridan tuzilgan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

qator cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil etib, u yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Demak, berilgan qator ham absolyut yaqinlashuvchi qatordir.

5-misol. Berilgan qatorni shartli yaqinlashishga tekshiring.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Yechish. O'zgaruvchi ishorali qatorning musbat hadlaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

qator Koshining integral alomati orqali tekshirganda uzoqlashuvchi ekanligi ma'lum. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qatordir.

Mustaqil bajarish uchun misollar.

$$21.1. 1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$21.2. 1 - \frac{1}{3^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$$

Javob: absolyut yaqinlashuvchi

$$21.3. \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$21.4. \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

Javob: absolyut yaqinlashuvchi

$$21.5. \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

Javob: absolyut yaqinlashuvchi

$$21.6. 2 - \frac{3}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} + \dots$$

Javob: uzoqlashuvchi

$$21.7. -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$21.8. \frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \dots$$

Javob: absolyut yaqinlashuvchi

$$21.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

Javob: yaqinlashuvchi

$$21.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$$

Javob: uzoqlashuvchi

Quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin:

$$21.11. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi, lekin absolyut emas.

$$21.12. 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$$

Javob: Absolyut yaqinlashadi.

$$21.13. \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$$

Javob: Yaqinlashadi, lekin absolyut emas.

$$21.14. \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi.

$$21.15. 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi.

$$21.16. 1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$$

Javob: Uzoqlashadi, chunki $\int_1^{\infty} \frac{dx}{100x-99} = \infty$.

$$21.17. \frac{1}{1+1^4} + \frac{2}{1+2^4} + \frac{3}{1+3^4} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi, chunki $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{\pi}{8}$

$$21.18. 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$$

Javob: Uzoqlashadi, chunki $\int_1^{\infty} \frac{2x-1}{x^2} dx = \infty$.

$$21.19. 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi

$$21.20. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi

$$21.21. \frac{21}{3} + \frac{41}{9} + \frac{61}{27} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi

$$21.22. \frac{2}{1} + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \dots$$

Javob: Yaqinlashadi

$$21.23. 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

Javob: Yaqinlashadi, lekin absolyut emas

$$21.24. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$$

Javob: Absolyut yaqinlashadi.

$$21.25. 1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{4}{4a^6} + \dots$$

Javob: $a > 1$ bo'lganda absolyut yaqinlashadi, $a = 1$ bo'lganda yaqinlashadi, lekin absolyut emas, $a < 1$ bo'lganda uzoqlashadi.

$$21.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}$$

Javob: yechish uchun ko'rsatma: Koshi alomatidan foydalanamiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \text{ ya'ni } \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

hamda $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = e^0 = 1$ (Lopital qoidasiga asosan

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{x} = 0).$$

$$21.28. \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots + \frac{3n-2}{4n-1} + \dots \quad \text{Javob: uzoqlashuvchi}$$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

1. Qaysi shartda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator ishorasi navbatlanuvchi bo'ladi?

A) $u_n + u_{n+1} < 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$). B) $u_n - u_{n+1} < 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

C) $u_n \cdot u_{n+1} > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$). D) $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

E) to'g'ri javob keltirilmagan.

2. Quyidagi qatorlarning qaysi biri ishorasi navbatlanuvchi bo'ladi?

A) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin k$. B) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos k$. C) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k}$. D) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{tg} k$.

E) keltirilgan barcha qatorlar ishorasi navbatlanuvchidir.

3. Leybnits alomatida ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning hadlariga quyidagi shartlardan qaysi biri qo'yiladi?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d < 1$. C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k < 1$.
D) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. E) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$.

4. Leybnits alomatida ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n > 0, n=1,2,3,\dots$) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning hadlariga quyidagi shartlardan qaysi biri qo'yiladi?

- A) $u_{n+1} > u_n$. B) $u_{n+1} \geq u_n$. C) $u_{n+1} < u_n$. D) $u_{n+1} \leq u_n$. E) $u_{n+1} \neq u_n$.

5. Agar Leybnits alomatiga asosan ishorasi navbatlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi S uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli bo'ladi?

- A) $S = u_1$. B) $S > u_1$. C) $S \geq u_1$. D) $S \leq u_1$. E) $S \neq u_1$.

6. Quyidagi ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlardan qaysi biri yaqinlashuvchi emas?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$.

E) keltirilgan barcha qatorlar yaqinlashuvchi.

7. Quyidagilardan qaysi biri ishorasi o'zgaruvchi qator bo'lmaydi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n$.

E) keltirilgan barcha qatorlar ishorasi o'zgaruvchi bo'ladi.

8. Qaysi shartda ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lmaydi

A) Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k$ limit mavjud va chekli bo'lsa.

B) Agar biror n_0 natural sonda $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

C) Agar biror n_0 natural sonda $\sum_{k=n_0}^{\infty} |u_k|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

D) Agar $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

E) Keltirilgan barcha shartlarda qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

9. Qaysi holda ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lmayligi mumkin?

- A) $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$. B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = d < 1$. C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = k < 1$.

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n|) < \infty$.

E) ko'rsatilgan barcha hollarda sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

10. Quyidagi qatorlardan qaysi biri absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$.

E) keltirilgan barcha qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

11. Quyidagi qatorlardan qaysi biri absolyut yaqinlashuvchi emas?

- A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

E) keltirilgan barcha qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

12. Agar ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, unda quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli emas?

A) Ixtiyoriy C o'zgarmas son uchun $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) Ixtiyoriy o'zgarmas m natural son uchun $\sum_{n=m}^{\infty} u_n$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qatorga $\sum_{n=1}^m v_n$ yig'indini qo'shsak, absolyut yaqinlashuvchi sonli qator hosil bo'ladi.

D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator hadlarining o'zini ixtiyoriy tarzda o'zgartirsak, absolyut

yaqinlashuvchi sonli qator hosil bo'ladi.

E) keltirilgan barcha tasdiqlar o'rinli bo'ladi.

13. Ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$ sonli qator bo'yicha musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

(2) qator tuzilgan. Qachon (1) qator shartli yaqinlashuvchi deb ataladi?

A) Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

B) Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

C) Agar (1) qator yaqinlashuvchi, (2) qator esa uzoqlashuvchi bo'lsa.

D) Agar (1) va (2) qatorlarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo'lsa.

E) Agar (1) va (2) qatorlarning birortasi yaqinlashuvchi bo'lsa.

14. Quyidagi qatorlar orasidan shartli yaqinlashuvchi qatorni ko'rsating.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$. C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{3^n}$.

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

XI-BOB. FUNKSIONAL QATORLAR

22-§. FUNKSIONAL QATORLAR. DARAJALI QATORLARNING YAQINLASHISH RADIUSI

22.1. Funksional qatorlar.

1-ta'rif. $X \in R$ to'plamda

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots \quad (22.1)$$

funksiyalar aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyalardan tuzilgan ketma-ketlik X to'plamda berilgan *funksional ketma-ketlik* deyiladi va $\{u_n(x)\}$ bilan belgilanadi.

2-ta'rif. $X \in R$ to'plamda berilgan $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (22.2)$$

ifodaga *funksional qator* deyiladi. Bunda $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$ — *funksional qatorning hadlari*, $u_n(x)$ — funksional qatorning *umumiy hadi* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ qatorda x ning o'rniga $x_0 \in X$ qiymat qo'yish natijasida hosil qilingan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorga x_0 nuqtada yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi. Bunda x_0 nuqta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtasi deyiladi. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat bo'lgan $X_0 (X_0 \subset X)$ to'plamga funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

4-ta'rif. Funktsional qatorning yaqinlashish sohasi uning yig'indisi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, ushbu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) = S(x)$ chekli limit mavjud bo'ladi. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ ayirma esa qatorning qoldig'i deyiladi.

Eslatma. Ayrim funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli alomatlari bilan topiladi.

1-misol. Funktsional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lg x}},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+x^2)^n}.$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ umumlashgan garmonik qator $\alpha > 1$ da yaqinlashadi $\alpha \leq 1$ da uzoqlashadi. $\alpha = \lg x$ desak umumlashgan garmonik qatordan berilgan qator kelib chiqadi. Bu qator $\lg x > 1$ da, ya'ni $x > 10$ da yaqinlashadi va $\lg x \leq 1$ da, ya'ni $0 < x \leq 10$ da uzoqlashadi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $(10; +\infty)$ dan iborat.

2) Berilgan qatorning hadlari $-\infty < x < +\infty$ da aniqlangan va uzluksiz. Koshining ildiz alomati bilan topamiz:

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(1+x^2)^n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{1+x^2} = +\infty, \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

Demak, qator $-\infty < x < +\infty$ da uzoqlashadi.

22.2. Funktsional qatorlarning tekis yaqinlashishi.

5-ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $n > N$ bo'lganda $[a, b]$ segmentdan olingan istalgan x uchun $|R_n(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, (22.2) qator $[a, b]$ segmentda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

1-teorema (Veyershtas teoremasi). Agar hadlari musbat va yaqinlashuvchi $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots$ sonlar qatori mavjud bo'lib, x ning $[a, b]$ dagi barcha qiymatlari uchun $|u_n(x)| \leq c_n$ bo'lsa, (22.2) qator $[a, b]$ segmentda absolyut va tekis yaqinlashadi.

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qatorga $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ qator uchun majorant qator deyiladi.

2-misol. Qatorlarning tekis yaqinlashish sohasini toping.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^{2n} + n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + \sqrt{(1-x^2)^n}}.$$

$$\text{Yechish: } 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^{2n} + n};$$

$$1) \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^4+2} > \frac{1}{x^6+3} > \dots > \frac{1}{x^{2n}+n} > \dots, \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}+n} = 0.$$

U holda qatorning qoldig'i $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$ tengsizlik bilan baholanadi.

Bundan $|R_n(x)| < \left| \frac{1}{x^{2n+2} + n+1} \right| < \frac{1}{n+1}$. $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$ tengsizlikdan $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ kelib chiqadi. U holda $n \geq N$ dan boshlab $|R_n(x)| \leq \varepsilon$ bo'ladi, bu yerda $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Demak, berilgan qator $x \in (-\infty; +\infty)$ da tekis yaqinlashadi.

2) Qatorning hadlari $[-1; 1]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^2 + \sqrt{(1-x^2)^n}} \right| \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{(1-x^2)^n}} \leq \frac{1}{n^2} = a_n$$

tengsizlik bajariladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sonli qator yaqinlashuvchi. U holda tekis yaqinlashish alomatiga ko'ra berilgan qator $[-1; 1]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

22.3. Darajali qatorlar va ularning yaqinlashish sohasi.

6-ta'rif. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ko'rinishdagi funktsional qatorga *darajali qator* deyiladi. Bunda $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — o'zgarmas sonlar darajali qatorning *koefitsiyentlari*, x_0 — darajali qatorning *markazi* deyiladi.

Xususan, $x_0 = 0$ bo'lganda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator hosil bo'ladi. Bu qatorda $a_n x^n$ had $(n+1)$ o'rinda turgan bo'lsa ham qulaylik uchun uni n -had deb qaraladi.

2-teorema (Abel teoremasi). Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator $x = x_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashsa u holda u x ning $|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarida absolyut yaqinlashadi.

1-natija. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator $x = x_1$ nuqtada uzoqlashsa, u holda u x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarida uzoqlashadi.

7-ta'rif. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator $\{|x| < R\}$ da absolyut yaqinlashsa va $\{|x| > R\}$ da uzoqlashsa $R \geq 0$ soniga darajali qatorning *yaqinlashish radiusi*, $(-R; R)$ oraliqqa darajali qatorning *yaqinlashish intervali (sohasi)* deyiladi.

Darajali qator yaqinlashish intervalining chegaraviy $x = \pm R$ nuqtalarida yaqinlashishi ham uzoqlashishi ham mumkin. Shu sababli darajali qator bu nuqtalarda alohida tekshiriladi.

Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning barcha $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ koeffitsiyentlari nolga teng bo'lmasa uning yaqinlashish radiusi quyidagi formulalardan biri bilan topiladi:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

formulalardan biri orqali topiladi.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qatorning yaqinlashish oralig'i markazi $x_0 \neq 0$ nuqtada bo'lgan $(x_0 - R; x_0 + R)$ intervaldan iborat bo'ladi.

3-misol. Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini toping.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

Yechish. 1) Berilgan qatorda $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)}$.

U holda

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!(n+1)}{n!} \right| = \infty.$$

Demak, qator $x \in (-\infty; +\infty)$ da yaqinlashadi.

$$2) \text{ Berilgan qator uchun } a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Bundan

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Demak, qator $(2-1; 2+1)$ ya'ni $(1, 3)$ oraliqda yaqinlashadi.

Intervalning chegaraviy nuqtalarida tekshiramiz.

$x=1$ da qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ko'rinishni oladi. Leybnits alomatiga ko'ra

$$1) \quad 1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \dots; \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Demak, qator $x=1$ da yaqinlashadi. $x=3$ da qator $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ko'rinishni

oladi. Bu qator yaqinlashuvchi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi $[1; 3]$ dan iborat.

Mustaqil bajarish uchun misollar

Funksional qatorlarni yaqinlashish sohasini toping.

$$22.1. \quad 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 < x < 1$$

$$22.2. \quad \ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 < x < 1$$

$$22.3. \quad x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 < x < 1$$

$$22.4. \quad x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 \leq x \leq 1$$

$$22.5. \quad x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 \leq x < 1$$

$$22.6. \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots$$

$$\text{Javob: } x < -1 \text{ va } x > 1$$

$$22.7. \quad 2x + 6x^2 + \dots + n(n+1)x^n + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 < x < 1$$

$$22.8. \quad \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \dots$$

$$\text{Javob: } -1 \leq x \leq 1$$

$$22.9. \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \dots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \dots$$

Javob: $x \neq \pm 1$

$$22.10. \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + n^2 \sin \frac{x}{2^n} + \dots$$

Javob: har xil x

$$22.11. x \lg \frac{x}{2} + x^2 \lg \frac{x}{4} + \dots + x^n \lg \frac{x}{2^n} + \dots$$

Javob: $-2 < x < 2$

$$22.12. \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

Javob: har xil x

$$22.13. \frac{\cos x}{e^x} + \frac{\cos 2x}{e^{2x}} + \dots + \frac{\cos nx}{e^{nx}} + \dots$$

Javob: $x > 0$

$$22.14. e^{-x} + e^{-4x} + \dots + e^{-n^2 x} + \dots$$

Javob: $x > 0$

$$22.15. \frac{x}{e^x} + \frac{2^x}{e^{2x}} + \dots + \frac{nx}{e^{nx}} + \dots$$

Javob: $x \geq 0$

$$22.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)} x^n$$

Javob: yechish uchun ko'rsatma:

$$u_n = \frac{n}{3^n(n+1)} x^n, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)}{3^{n+1}(n+2)} x^{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{3^n(n+2)} \cdot \frac{3^n(n+1)}{n} \right| |x| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{3n(n+2)} \cdot \frac{3^n(n+1)}{n} \right| |x| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)} \right| |x| = \frac{1}{3} |x| < 1$$

Demak, qatorning yaqinlashish oralig'i $-3 < x < 3$.

Quyidagi qatorlarning yaqinlashish intervali aniqlansin va qatorlar intervalning chegaralarida ham yaqinlashishi tekshirilsin:

$$22.17. 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots$$

Javob: $-3 \leq x < 3$

$$22.18. 1 - \frac{x^2}{5\sqrt{2}} + \frac{x^3}{5^2\sqrt{3}} - \frac{x^5}{5^3\sqrt{4}} + \dots$$

Javob: $-\sqrt{5} < x \leq \sqrt{5}$

$$22.19. 1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{2}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$$

Javob: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$22.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Javob: Barcha sonlar o'qida absolyut yaqinlashadi

$$22.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$$

Javob: $-1 < x \leq 1$

$$22.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-3)2^n}}$$

Javob: $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$22.23. 1) \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$$

Javob: 1) $R=0$ 2) $R=e$

$$22.24. (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$$

Javob: $-5 \leq x < 3$

$$22.25. \frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \dots$$

Javob: $1 < x \leq 2$

$$22.26. 1 + \frac{2x}{\sqrt{5} \cdot 5} + \frac{4x^2}{\sqrt{9} \cdot 5^2} + \frac{8x^3}{\sqrt{13} \cdot 5^3} + \dots$$

Javob: $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$22.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$$

Javob: $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

$$22.28. 1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \dots$$

Javob: $-0,1 < x \leq 0,1$

$$22.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Javob: $-1 \leq x \leq 1$

$$22.30. \frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(x-3)^3}{5 \cdot 2^3} + \dots$$

Javob: $-1 \leq x < 3$

$$22.31. \frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \dots$$

Javob: $-1 \leq x < 0$

22.32. Ushbu $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2+x^4} + \frac{1}{3+x^6} + \dots + \frac{1}{n+x^{2n}} + \dots$ qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Javob: $-\infty < x < \infty$

22.33. Ushbu $\sin x + \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^3 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin^n nx}{n^2} + \dots$ qatorni Veyershtas belgisi yordamida tekis yaqinlashishga tekshiring.

Javob: $-\infty < x < \infty$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

Funksional qatorlar

1. Quyidagi ifodalardan qaysi biri funksional qator bo'lmaydi?

- A) $u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$.
 B) $u_0(x) + u_2(x) + u_4(x) + \dots + u_{2n}(x) + \dots$.
 C) $u_0(x) + u_3(x) + u_6(x) + \dots + u_{3n}(x)$.
 D) $u_k(x) + u_{k+1}(x) + u_{k+2}(x) + \dots + u_{k+n}(x) + \dots$.

E) keltirilgan barcha ifodalar funksional qatorni ifodalaydi.

2. Quyidagilardan qaysi biri funksional qator emas?

- A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(n+1)^2}$. B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{(n+1)^2}$. C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{(n+1)^2}$.
 D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 nx + \sin^2 nx}{(n+1)^2}$. E) barcha qatorlar funksional qatordir.

3. Qaysi hollarda $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator $x=x_0$ nuqtada

yaqinlashuvchi bo'ladi?

I. musbat hadli $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa.

II. ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa.

III. ishorasi o'zgaruvchi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ sonli qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa.

- A) I va II hollarda. B) I va III hollarda. C) II va III hollarda.
 D) I, II va III hollarda. E) faqat I holda.

4. Quyidagi x_0 nuqtalardan qaysi birida $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} x^n$ funksional qator yaqinlashuvchi bo'ladi?

- A) $x_0 = -1$. B) $x_0 = \frac{1}{2}$. C) $x_0 = \frac{1}{4}$. D) $x_0 = 1$. E) $x_0 = -\frac{1}{2}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k^2 + 1}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty, \infty)$. B) $\pi m < x < \pi(n+1), n=0,1,2,\dots$. C) $x \neq \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

D) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. E) $x \neq \frac{\pi}{2} n, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos x^k}{(k+1)^2}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini aniqlang.

A) $(-\infty, \infty)$. B) $\pi m < x < \pi(n+1), n=0,1,2,\dots$. C) $x \neq \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

D) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. E) $x > 0$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty, \infty)$. B) $(0, \infty)$. C) $(-2, 2)$. D) $(-\infty, 0)$. E) $(-1, 1)$.

8. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k^2 + 1}$ funksional qator qaysi sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi?

A) $(-\infty, \infty)$. B) $\pi m < x < \pi(n+1), n=0,1,2,\dots$. C) $x \neq \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

D) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. E) $x \neq \frac{\pi}{2} n, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$.

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos x^k}{(k+1)^2}$ funksional qator qaysi sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi?

A) $(-\infty, \infty)$. B) $\pi m < x < \pi(n+1), n=0,1,2,\dots$. C) $x \neq \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

D) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. E) $x > 0$.

10. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x^k$ funksional qator quyidagi sohalardan qaysi birida tekis yaqinlashuvchi bo'ladi?

A) $(-\infty, \infty)$. B) $(0, \infty)$. C) $(-2, 2)$.

D) $(-\infty, 0)$. E) $(-1/2, 1/2)$.

Darajali qatorlar

1. Quyidagilardan qaysi biri darajali qator emas?

A) $\sum_{k=0}^n a_k x^k$. B) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$. C) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1}$. D) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k^3}$.

E) keltirilgan qatorlarning barchasi darajali qator bo'ladi.

2. Quyidagilardan qaysi biri darajali qator bo'ladi?

A) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ B) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k/2}$ C) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sqrt{k}}$ D) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$

E) keltirilgan qatorlarning barchasi darajali qator bo'ladi.

3. Agar R soni $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsa,

quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli emas?

- A) $0 \leq x < R$ sohada qator yaqinlashuvchi.
 B) $-R < x \leq 0$ sohada qator yaqinlashuvchi.
 C) $-R < x < R$ sohada qator yaqinlashuvchi.
 D) $|x| > R$ sohada qator uzoqlashuvchi.
 E) keltirilgan barcha tasdiqlar o'rinli.

4. Agar R soni $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsa,

quyidagi tasdiqlardan qaysi biri har doim ham o'rinli emas?

- A) $x > R$ sohada qator uzoqlashuvchi.
 B) $x < -R$ sohada qator uzoqlashuvchi.
 C) $|x| > R$ sohada qator uzoqlashuvchi.
 D) $x = \pm R$ nuqtalarda qator uzoqlashuvchi.
 E) keltirilgan barcha tasdiqlar doimo o'rinli bo'ladi.

5. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi R uchun Dalmber formulasini ko'rsating.

A) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$. B) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. C) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.
 D) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. E) $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

6. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi R uchun Koshi formulasini ko'rsating .

A) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$. B) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. C) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.
 D) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. E) $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$ darajali qatorning R yaqinlashish radiusini toping.

A) $R=3$. B) $R=2$. C) $R=1$. D) $R=0$. E) to'g'ri javob keltirilmagan.

8. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ darajali qatorning R yaqinlashish radiusini toping.

A) $R=3$. B) $R=2$. C) $R=1$. D) $R=0$. E) to'g'ri javob keltirilmagan.

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ darajali qatorning R yaqinlashish radiusini toping.

A) $R=3$. B) $R=2$. C) $R=1$. D) $R=0$. E) $R=\infty$.

10. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bo'lsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

darajali qatorning yaqinlashish oralig'i qanday topiladi?

- A) $(R-c, R+c)$. B) $(c-R, c+R)$. C) $(-R-c, R+c)$.
 D) $(-R-c, R-c)$. E) $(R-c, c-R)$.

23-§. FUNKSIYALARNI TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARIGA YOYISH

23.1. Funksiyaning Teylor formulasi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqta atrofida $(n+1)$ - tartibligacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi Teylor formulasi o'rinaldir.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (23.1)$$

bu yerda $1) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$. $R_n(x)$ - Teylor

formulasining Lagranj shaklidagi *qoldiq hadi* deyiladi.

$$2) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n \quad (0 < \theta < 1). \quad R_n(x) - \text{Teylor}$$

formulasining Koshi ko'rinishidagi *qoldiq hadi* deyiladi.

1-misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning $x=1$ ning manfiy bo'lmagan darajalari bo'yicha yoyilmasining uchta hadini toping.

Yechish. Bu hol uchun (23.1) formula ushbu

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + 0((x-1)^3)$$

ko'rinishda bo'ladi. Berilgan funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Ravshanki,

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Demak,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + 0((x-1)^3).$$

23.2. Makloren formulasi.

Agar (23.1) formulada $x_0 = 0$ deb olsak, unda ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad (23.2)$$

formula hosil bo'ladi. Bu Makloren formulasidir.

Ushbu $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = (1+x)^m$, $f(x) = \ln(1+x)$ funksiyalar uchun (23.2) Makloren formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$4) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Mustaqil bajarish uchun misollar

23.1. Quyidagi funksiyalar x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin va qoldiq hadning formulasi yozilsin va u tekshirilsin: 1) $\cos(x-a)$;

$$2) \sin^2 x; \quad 3) xe^x; \quad 4) \sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Javob: } 1) \cos(x-a) = \sin\alpha \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) + \cos\alpha \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right); \quad |R_n(x)| = \frac{x^n}{n!} \cos\left(\theta x - \alpha + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2) \sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots \quad 3) xe^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

$$4) \sin\left(mx + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{mx}{1} - \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} - \dots \right)$$

23.2. $f(x) = \ln(1+e^x)$ funksiyaning qatorga yoyilmasidagi birinchi hadi yozilsin.

$$\text{Javob: } \ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{kx}{2} + \frac{k^2 x^2}{2!2^2} - \frac{k^3 x^3}{4!2^3} + \dots$$

23.3. Quyidagi funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin:

$$1) \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad 2) \ln(2-3x+x^2); \quad 3) \ln(1-x+x^2).$$

$$\text{Javob: } 1) \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right]$$

$$2) \ln(2-3x+x^2) = \ln(1-x)(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \frac{x^n}{n}$$

$$3) \ln(1-x+x^2) = \ln \frac{1+x^3}{1+x} = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \dots \right] = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{3} \frac{x^n}{n}$$

23.4. $f(x) = e^{\frac{x}{a}}$ funksiyani $x-a$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin, qoldiq hadning formulasi yozilsin va tekshirilsin.

$$e^{\frac{x}{a}} = e \left[1 + \frac{x-a}{1!a} + \frac{(x-a)^2}{2!a^2} + \frac{(x-a)^3}{3!a^3} + \dots \right], \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!a^n} e^{1+\theta \left(\frac{x}{a} - 1 \right)}$$

Javob:

23.5. $f(x) = x^3 - 3x$ funksiya $x+1$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin.

$$Javob: x^3 - 3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

23.6. $f(x) = x^4$ funksiya $x+1$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin.

$$Javob: x^4 = 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$$

23.7. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyani $x+2$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, hosil bo'lgan qatorning yaqinlashishi Dalamber alomatiga asosan tekshirilsin.

$$Javob: \frac{1}{x} = -\frac{1}{2 \left(1 - \frac{x+2}{2} \right)} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(x+2)^3}{8} + \dots \right], -4 < x < 0 \text{ bo'lganda.}$$

23.8. 1) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ funksiya $x - \frac{\pi}{2}$ ning darajalari bo'yicha;

2) $f(x) = \sin 3x$ funksiya $x + \frac{\pi}{3}$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsin.

$$Javob: 1) \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{12} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{22^2} + \dots \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^{n-1}}{(n-1)! 2^{n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}; \text{ bunda } 0! \text{ shartli } 1 \text{ ga}$$

teng deb qabul qilingan.

$$2) \sin 3x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

23.9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyani $x+1$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, hosil bo'lgan qatorning yaqinlashishi Dalamber alomatiga asosan tekshirilsin.

Javob:

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1-(x+1)} = -1 + \frac{x+1}{3 \cdot 1!} + \frac{2(x+1)^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{2 \cdot 5(x+1)^3}{3^3 \cdot 3!} + \dots = -1 + \frac{x+1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^{n+1} (n+1)!} (x+1)^{n+1},$$

$$-2 < x < 0$$

Funksiyalarni $x=0$ nuqtada 6-hadgacha qatorga yoying:

$$23.10. y = e^{-2x} \quad 23.11. y = \sin \frac{x}{2}$$

$$23.12. y = x^3 \cos x \quad 23.13. y = \ln(1+5x).$$

$$23.14. y = \ln(5+2x). \quad 23.15. y = \sqrt{1+x^2}.$$

$$23.16. y = \frac{1}{1+x^4}. \quad 23.17. y = \frac{3}{4-x}.$$

$$23.18. y = x^2 e^{-2x}. \quad 23.19. y = \arctg x.$$

$$23.20. y = (1+x) \ln(1+x). \quad 23.21. y = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}.$$

$$23.22. y = \ln(1+e^x) \quad 23.23. y = e^{\cos x} \quad 23.24. y = \cos^n x$$

$$23.25. y = -\ln \cos x \quad 23.26. y = (1+x)^x$$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

Taylor va Makloren qatorlari

1. $y=f(x)$ funksiyaning Teylor qatori qayerda to'g'ri ifodalangan?

$$A) f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-a) + \frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$B) f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$C) f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \dots$$

$$D) f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f(2a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f(na)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$E) f(a) + \frac{f(a)}{1!}x + \frac{f(2a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f(na)}{n!}x^n + \dots$$

2. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $x-x_0$ darajalari bo'yicha Teylor qatorining $R_n(x)$ qoldiq hadi Lagranj ko'rinishida qanday ifodalanadi?

$$A) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x).$$

$$B) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (c-x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x).$$

$$C) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, c \in (x_0, x).$$

$$D) R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, c \in (x_0, x). \quad E) R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}, c \in (x_0, x).$$

3. Berilgan $f(x)$ funksiyaning Makloren qatori qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

$$A) f(0) + \frac{f'(0)}{1!} (x-a) + \frac{f''(0)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$B) f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$C) f(a) + \frac{f'(a)}{1!} x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n + \dots$$

$$D) f(a) + \frac{f(a)}{1!} x + \frac{f(2a)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f(na)}{n!} x^n + \dots$$

$$E) f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

4. $f(x) = e^{-x}$ funksiyaning Makloren qatorini toping.

$$A) 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$B) 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$C) 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$D) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$E) 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

5. Quyidagi darajali qatorlardan qaysi biri $(-1, 1)$ oraliqda $f(x) = 1/(1-x)$ funksiyaning Makloren qatorini ifodalaydi?

$$A) 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$B) 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$C) 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$D) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$E) 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

6. $f(x) = \arctg x$ funksiyaning Makloren qatori qayerda ifodalangan?

$$A) 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$B) 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$C) 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$D) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$E) x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots$$

7. $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiya Makloren qatorining 3- hadini toping.

$$A) \frac{x^3}{6} \quad B) -\frac{x^2}{64} \quad C) \frac{x}{24} \quad D) -\frac{x^2}{32} \quad E) \frac{x^2}{2!}$$

8. $f(x) = e^{3x}$ funksiya uchun Makloren qatorida x^3 daraja oldidagi koeffitsient qiymati nimaga teng?

$$A) 3. \quad B) 3.5. \quad C) 4. \quad D) 4.5. \quad E) 5.$$

9. $f(x) = \cos x^2$ funksiya Makloren qatorining x^2 darajasi oldidagi koeffitsient qiymati nimaga teng?

$$A) 2. \quad B) 4. \quad C) 0. \quad D) -1. \quad E) 0.5.$$

10. $f(x) = e^{\sin x}$ funksiyaning Makloren qatoridagi x^2 daraja oldidagi koeffitsient qiymatini toping.

$$A) 2. \quad B) 0.5. \quad C) 0. \quad D) -1. \quad E) 1.5.$$

XII-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

24-§. EHTIMOLLAR NAZARIYASI PREDMETI. HODISA TURLARI. EHTIMOLNING KLASSIK TA'RIFI. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

24.1. Ehtimolning ta'riflari.

Ehtimol termini hodisaning amalga oshish, ro'y berish imkoniyatining obyektiv o'lchovini ifodalaydi.

1-ta'rif. Ehtimollar nazriyasida *hodisa* deb sinov natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktga aytiladi

Biror tajriba natijasida quyidagi $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementar hodisalardan birortasi ro'y berishi mumkin bo'lsin, ya'ni $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bo'lsin. Bu elementar hodisalarga quyidagi shartlarni qo'yamiz:

1) hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas, boshqacha qilib aytganda, istalgan ikkita e_i va e_j ($i \neq j$) hodisa uchun ulardan biri ro'y bersa, ikkinchisi albatta ro'y bermaydi.

2) $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar yagona mumkin bo'lgan hodisalar, ya'ni ularning birortasi albatta ro'y berishi lozim.

3) $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalar teng imkoniyatli. Bu shart $e_1, e_2, \dots, e_n$ hodisalardan birortasining boshqalaridan ko'proq ro'y berishiga yordam beradigan hech qanday obyektiv sabablar yo'qligini anglatadi.

Aytaylik, A hodisa berilgan bo'lib, u e_i ($i = \overline{1, n}$) elementar hodisalardan ba'zilar ro'y bergandagina ro'y bersin. Bunday holda biz e_i ($i = \overline{1, n}$) elementar hodisalardan ro'y berishi A hodisaning ro'y berishiga ham olib keladiganlarini A hodisa qulaylik tug'diradigan hodisalar deb ataymiz.

Aytaylik, qaralayotgan n ta $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementar hodisadan m tasi A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'dirsin, ya'ni $A = (e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m})$ bo'lsin.

24.2. Ehtimolning klassik ta'rifi. A hodisaning ehtimoli deb A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar sonining teng

imkoniyatli barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A \text{ ga kirgan elementar hodisalar soni}}{\text{barcha elementar hodisalar soni}}$$

Ehtimollikning klassik ta'rifi teng imkoniyatli hodisalarni (tanga tashlash, kubik tashlash va hokazo) nazarda tutgan holda, ularning ehtimoligini hisoblash uchun yaxshi natijalar beradi.

1-misol. Kubik tashlanganda 3 ga karrali sonlarni tushishi A hodisa, ya'ni $A = \{3, 6\}$ bo'lsa, u holda A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda elementar hodisalar fazosi $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan iboratdir.

2-misol. Tanga bir marta tashlanganda $\langle G \rangle$ tushishi $A = \{G\}$ hodisa bo'lsa, elementar hodisalar fazosi $U = \{G, P\}$ bo'ladi. Bu holda A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

ga teng bo'ladi.

Ehtimolning xossalari.

a) muqarrar hodisaning ehtimoli birga teng:

$$P(U) = 1.$$

b) mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng:

$$P(V) = 0,$$

c) istalgan A hodisaning ehtimoli quyidagi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Klassik ta'rifdan foydalanib masalalar yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o'ynaydi, shuni e'tiborga olib kombinatorikaga doir ba'zi tushunchalar bilan tanishib o'taylik.

24.3. Kombinatorika elementlari.

2-ta'rif. Har qanday narsalardan tuzilgan va bir – biridan yo shu narsalarning tartibi bilan, yoki shu narsalarning o'zlari bilan farq qiluvchi turli gruppalar birlashmalari deb ataladi.

Birlashmalar uch xil bo'lishi mumkin: o'rinashtirish, o'rin almashtirish va gruppash. Ularning har birini ko'rib chiqaylik.

1) n elementini m tadan (bunda $m \leq n$) o'rinashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har birida berilgan n ta elementdan olingan m ta element bo'lib, ular bir – biridan yo elementlari bilan, yoki elementlarning tartibi bilan farq qiladi. n ta elementdan m tadan barcha o'rinashtirishlar soni A_n^m kabi belgilanib, u

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ yoki } A_n^m = n(n-1) \dots [n-(m-1)]$$

formula bilan hisoblanadi.

3-misol. 4 ta elementdan 2 tadan o'rinashtirish tuzilsin.

$$A_4^2 = 4 \cdot (4-1) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Haqiqatan, a, b, c, d elementlar uchun

$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$

ba, ca, da, cb, db, dc

kombinatsiya tuzish mumkin.

4 ta elementdan 3 tadan o'rinashtirish soni

$$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

$$A_n^1 = n, \quad A_n^0 = 1$$

2) Agar o'rinashtirishlar n ta elementdan n tadan olingan bo'lsa (ya'ni faqat elementlarining tartibi bilan farq qilsa), bunday o'rinashtirishlar o'rin almashtirishlar deb ataladi, u holda yuqoridagi formulaga ko'ra n ta elementdan barcha o'rin almashtirishlar soni quyidagicha bo'ladi:

$$P_n = n(n-1) \dots 1 = n!$$

4-misol. Uchta a, b, c elementlar yordamida nechta o'rin almashtirishlar tuzish mumkin.

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Haqiqatan, $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ elementlardan iborat.

3) Agar n ta elementdan m tadan tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinashtirishlardan bir – biridan eng kamida bir element bilan farq qiladiganlarini tanlab olsak, u holda *gruppashlar* (kombinatsiyalar) deb atalgan birlashmalarni hosil qilamiz.

n ta elementdan m tadan barcha gruppashlar (kombinatsiyalar) soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \dots [n-(m-1)]}{m!}$$

formula yordamida topiladi.

Xossalari:

$$1. C_n^0 = C_0^0 = 1.$$

$$2. C_n^1 = n.$$

$$3. C_n^m = C_n^{n-m} \quad \left(m > \frac{n}{2}\right).$$

$$4. C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$5. C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} - \text{rekurrent formula. Bu yerda } 0 \leq m \leq n.$$

5-misol. 4 ta elementdan 3 tadan gruppash tuzilsin.

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4.$$

Haqiqatan, a, b, c, d elementlar uchun gruppash abc, acb, bcd, bac lardan iborat.

Yuqoridagi 3 ta formula uchun $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$ munosabat o'rinalidir.

24.4. Ehtimolning geometrik ta'rifi. Biror Q soha berilgan bo'lib, bu soha Q_1 sohani o'z ichiga olsin, Q sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning Q_1 sohaga tushish ehtimolini topish talab qilinadi. Bu yerda barcha elementlar hodisalar to'plami Q ning barcha nuqtalaridan iborat. Binobarin, bu holda klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tanlangan nuqta Q ga albatta tushsin va uning biror Q_1 qismiga tushish ehtimoli shu Q_1 qismining o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, Q_1 ning formasiga va Q_1 qism Q ning qayerda joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{\text{mes } Q_1}{\text{mes } Q}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu formula yordamida aniqlangan p funksiya ehtimolning barcha xossalari qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

24.5. Ehtimolning statistik ta'rifi. Ehtimollar nazariyasining ko'pgina tatbiqlarida ehtimolning statik ta'rifi deb ataluvchi ta'rifdan foydalaniladi. Har birida biror hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi kuzatiladigan tajribalarni sharoitni o'zgartirmagan holda cheksiz ko'p marta takrorlash mumkin bo'lsin deb faraz qilaylik. Masalan, o'yin soqqasini yoki tangani tahlash, nishonga o'q uzish va shunga o'xshash tajribalarni cheksiz ko'p marta takrorlash mumkin.

Aytaylik, tajribalar soni n yetarlicha katta bo'lganda bizni qiziqtirayotgan A hodisa m marta ro'y bergan bo'lsin.

$W(A) = \frac{m}{n}$ nisbat A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi.

6-misol. Zavod 100 ta detal ishlab chiqardi. Ishlab chiqarilgan detallarni ekspertlar tekshirganda 2 tasi nostandart ekanligi aniqlandi. Standart detallarning nisbiy chastotasini toping.

Yechish. Jami detal 100 ta. 2 tasi nostandart ekanligidan standart detallar 98 ta ekanligi ma'lum. Standart detallarning nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{98}{100}$.

Ko'p kuzatishlar shuni ko'rsatadiki, agar bir xil shart-sharoitda tajribalar o'tkazilib, ularning har birida sinovlar soni yetarlicha katta bo'lsa, u holda nisbiy chastota turg'unlik xossasiga ega bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun misollar.

24.1. Gruppada 10 ta fan o'qitiladi. Agar har kuni 4 xil dars o'tilsa, bir kunlik darsni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Javob: 5040.

24.2. 8 ta stulga 8 kishini necha xil usul bilan o'tkazish mumkin?

Javob: 40320.

24.3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ tenglik o'rinli ekanini isbotlang.

24.4. Ikkita tanga bir vaqtda tashlangan m ($m=0,1,2$) marta gerbli tomon tushish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$.

24.5. Yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlar yozilgan ikkita soqqa bir vaqtda tashlanadi. Ikkala soqqada tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $P = \frac{5}{36}$.

24.6. Ikkita soqqa tashlangan. Tushgan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi to'rtga teng bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $P = \frac{1}{18}$.

24.7. Tanga ikki marta tashlangan. Hech bo'lmaganda bir marta "gerbli" tomon tushishi ehtimolini toping.

Javob: $P = \frac{3}{4}$.

24.8. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $P = \frac{24}{91}$.

24.9. Abonent telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uchta raqamini eslay olmadi va bu raqamlarni turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolini toping.

Javob: $P = \frac{1}{720}$.

24.10. Sexda 6 erkak va 4 ayol ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 9 ayol bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: $P = 0,5$.

24.11. Radiusi R bo'lgan doiraga radiusi r bo'lgan kichik doira joylashtirilgan. Katta doiraga tasodifan tashlangan nuqtaning kichik doiraga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doiraga tushish ehtimoli doira yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

$$\text{Javob: } P = \frac{r^2}{R^2}$$

24.12. O'lchamlari bir xil bo'lgan 5 ta kartochkaga A, B, G', L, O harflar yozilgan. Bu kartochkalarni tasodifan joylashtirganda "BOLG'A" so'zi hosil bo'lish ehtimoli topilsin.

$$\text{Javob: } P = \frac{1}{120}$$

24.13. Ikki do'st kunduzgi soat 12 bilan 13 orasida tayin bir joyda uchrashishga va oldin kelgan kishi do'stini $1/4$ soat kutib, kelmagandan kelmagandan keyin ketishga kelishib olishdi. Agar har bir kishi o'zining kelish momentini tavakkaliga (soat 12 bilan 13 orasida) tanlasa, ularning uchrashish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P = \frac{7}{16}$$

24.14. Lotareyalar 400 ta bo'lib, ulardan 450 tasi yutuqli. Bu biletlardan tasodifan bittasi olindi. Uning yutuqli bo'lish hodisasi ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P = \frac{9}{80}$$

24.15. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan: a) kvadrat ichiga; b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doira bo'lagiga tushish ehtimoli bu bo'lakning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraga nisbatan joylashishiga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

$$\text{Javob: a) } P = \frac{2}{\pi}; \text{ b) } P = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

24.16. Idishda 9 ta yaroqli va 1 ta yaroqsiz detal bor edi. Idishdan tavakkaliga 3 ta detal olindi. Bu detallarning uchalasining ham yaroqli detal bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P = 0,7$$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

- Ehtimollar nazariyasida hodisa qanday ta'riflanadi?
 - Har qanday tajribaning ixtiyoriy natijalari hodisa deyiladi.
 - Har qanday kuzatuvning ixtiyoriy natijalari hodisa deyiladi.
 - Har qanday tasdiqlar hodisa deyiladi.
 - Har qanday fikrlar hodisa deyiladi.
 - Hodisa tushunchasi ta'rifsiz qabul etiladi.
- Ehtimollar nazariyasida qanday hodisalar sinfi qaralmaydi?
 - Mumkin bo'lmagan hodisalar.
 - Muqarrar hodisalar.
 - Tasodifiy hodisalar.
 - Noma'lum hodisalar.
 - Barcha ko'rsatilgan hodisalar sinflari qaraladi.
- Muqarrar hodisalar odatda qanday belgilanadi?
 - Q.
 - Ω .
 - $\emptyset$.
 - M.
 - G.
- Quyidagilardan qaysi biri muqarrar hodisa bo'ladi?
 - Tashlangan tanga gerb tomoni bilan tushdi.
 - O'yin soqqasi tashlanganda 7 dan kichik ochko chiqdi.
 - Tasodifiy ravishda tanlangan natural son juft bo'ldi.
 - Sotib olingan lotareyaga yutuq chiqmadi.
 - Tekshirilgan mahsulot sifatli bo'lib chiqdi.
- "Ikki ta o'yin soqqasi tashlanganda ochkolar ko'paytmasi" tasdiq qanday davom ettirilganda muqarrar hodisaga ega bo'lamiz?
 - 36 dan katta bo'ldi.
 - 36 ga teng bo'ldi.
 - 36 dan kichik bo'ldi.
 - 36 dan katta bo'lmadi.
 - 36 dan kichik bo'lmadi.
- Qutida 10 ta shar bo'lib, ulardan 7 tasi oq va qolganlari qora ranglidir. Shu qutidan tasodifiy ravishda 4 ta shar olindi. Quyidagilardan qaysi biri muqarrar hodisa bo'ladi?
 - tanlangan sharlardan faqat bittasi oq rangli.
 - tanlangan sharlardan ko'pi bilan bittasi oq rangli.
 - tanlangan sharlardan kamida bittasi oq rangli.
 - tanlangan sharlardan birortasi ham oq rangli emas.
 - Keltirilgan hodisalar orasida muqarrar hodisa mavjud emas.
- Qutida n ta oq va m ta qora rangli shar bor. "Qutidan tasodifiy

ravishda tanlangan k ta shar orasida kamida bittasi oq rangli” hodisa muqarrar bo‘ladigan k parametrning eng kichik qiymati nimaga teng?

- A) $k=m-1$. B) $k=m$. C) $k=m+1$. D) $k=n-1$. E) $k=n$.

8. Quyidagilardan qaysi biri muqarrar hodisa bo‘ladi?

- A) Tasodifiy ravishda tanlangan natural son 5 ga karrali.
B) Matndan tasodifiy ravishda olingan harf unli.
C) Ikkita o‘yin soqqasi tashlanganda ochkolar yig‘indisi 2 dan kichik.
D) Talaba testdan muvaffaqiyatli o‘tdi.
E) Tanlangan mahsulot yoki sifatli yoki sifatsiz.

9. Mumkin bo‘lmagan hodisalar odatda qanday belgilanadi?

- A) Q. B) Ω . C) $\emptyset$. D) M. E) G.

10. Quyidagilardan qaysi biri mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi?

- A) Tashlangan tanga raqamli tomoni bilan tushdi.
B) O‘yin soqqasi tashlanganda 1 dan kichik ochko chiqdi.
C) Tasodifiy ravishda tanlangan natural son toq bo‘ldi.
D) Sotib olingan lotareyaga yutuq chiqdi.
E) Tekshirilgan mahsulot sifatli bo‘lib chiqdi.

11. “Ikkita o‘yin soqqasi tashlanganda ochkolar ko‘paytmasi” tasdiq qanday davom ettirilganda mumkin bo‘lmagan hodisaga ega bo‘lamiz?

- A) 36 dan katta bo‘ldi. B) 36 ga teng bo‘ldi.
C) 36 dan kichik bo‘ldi. D) 36 dan katta bo‘lmadi.
E) 36 dan kichik bo‘lmadi.

12. Qutida 10 ta shar bo‘lib, ulardan 7 tasi oq va qolganlari qora ranglidir. Shu qutidan tasodifiy ravishda 4 ta shar olindi. Quyidagilardan qaysi biri mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi?

- A) tanlangan sharlardan faqat bittasi oq rangli.
B) tanlangan sharlardan ko‘pi bilan bittasi oq rangli.
C) tanlangan sharlardan kamida bittasi oq rangli.
D) tanlangan sharlardan birortasi ham oq rangli emas.
E) Keltirilgan hodisalar orasida mumkin bo‘lmagan hodisa mavjud emas.

13. Quyidagilardan qaysi biri mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘ladi?

- A) Tasodifiy ravishda tanlangan natural son 5 ga karrali.

B) Matndan tasodifiy ravishda olingan harf unli.

C) Ikkita o‘yin soqqasi tashlanganda ochkolar yig‘indisi 2 dan kichik.

D) Talaba testdan muvaffaqiyatli o‘tdi.

E) Tanlangan mahsulot yoki sifatli yoki sifatsiz.

14. Quyidagi belgilardan qaysi biri tasodifiy hodisani ifodalashi mumkin?

- A) Π . B) Ω . C) $\emptyset$. D) b . E) A.

15. Quyidagilardan qaysi tasodifiy hodisa bo‘ladi?

- A) Tashlangan tanga raqam yoki gerb tomoni bilan tushdi.
B) O‘yin soqqasi tashlanganda 1 dan kichik ochko chiqdi.
C) Tasodifiy ravishda tanlangan natural son toq bo‘ldi.
D) Keltirilgan barcha hodisalar tasodifiydir.
E) Keltirilgan barcha hodisalar tasodifiy emas.

25-§. EHTIMOLLARNI QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH TEOREMALARI. SHARTLI EHTIMOLLAR. HODISALARNING BOG'LIQSIZLIGI

Berilgan hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollarni bevosita hisoblash ancha murakkab bo'lishi mumkin. Shuning uchun hodisaning ehtimolini hisoblashda uni boshqa soddaroq hodisalar kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash qulayroqdir. Biroq bunda boshqa hodisalarning kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalashda hodisaning ehtimoli bo'ysunadigan qoidalarini bilish kerak. Quyida ular bilan tanishib o'tamiz.

25.1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi. Ikkita birgalikda bo'lmagan A va B hodisadan istalgan birining ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Umuman har ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan istalgan birining ro'y berish ehtimoli bu ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

1-misol. Idishda 25 ta shar bo'lib, 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k, va 10 tasi oq bo'lsin. Idishdan olingan sharning rangli shar chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shar rangli bo'lishi uchun qizil yoki ko'k shar chiqishi kerak. A - qizil shar chiqish hodisasi, B - ko'k shar chiqish hodisasi bo'lsin. Bu hodisaning ehtimolliklari $P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ ga teng. A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

ko'rinishida yozish mumkin. Demak, rangli shar chiqish ehtimoli $\frac{3}{5}$ ga teng.

Natija. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan faqat bittasi albatta ro'y beradigan va ular birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

2-misol. Kubik tashlanganda quyidagi hodisalar ro'y bersin. Bular o'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi. Ularning ehtimolliklari mos ravishda

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Bu yerdan

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xususiyl holda, agar A va $\bar{A}$ hodisalar o'zaro qarama - qarshi hodisalarni ifodalasa, u holda

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

25.2. Shartli ehtimollar. Hodisalarning bog'liqsizligi. Hodisalarning ehtimolini aniqlash asosida biror S shartlar kompleksi yotishini aytgan edik. Agar $P(A)$ ehtimolni hisoblash S shartlar kompleksidan boshqa hech qanday shartlar talab qilinmasa bunday ehtimol, shartsiz ehtimol deyiladi. Ko'p hollarda A hodisaning ehtimolini biror B hodisa ($P(B) > 0$ deb faraz qilinadi) ro'y bergan shartda hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday ehtimol shartli ehtimol deyiladi va $P(A/B)$ kabi belgilanadi. Agar ikkita A va B hodisadan birining ehtimoli ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligi natijasida o'zgarmasa, u holda bu hodisalar o'zaro bog'liqsiz hodisalar deyiladi, aks holda bu hodisalar o'zaro bog'liq hodisalar deyiladi.

Masalan, oq va qora sharlar solingan yashikdan olingan birinchi shar unga qayta solinsa, ikkinchi marta olingan sharning oq bo'lish ehtimoli birinchi olingan sharning oq yoki qora bo'lishiga bog'liq emas. Shuning uchun birinchi va ikkinchi shar olish natijalari o'zaro bog'liqsiz bo'ladi.

Aksincha, agar birinchi olingan shar yashikka qayta solinmasa, u holda ikkinchi marta shar olinishidagi natija birinchi marta shar olish natijasiga bog'liq ravishda o'zgaradi, chunki birinchi marta shar olinishi natijasida yashikdagi sharlarning sostavi o'zgaradi. Bu yerda biz bog'liq hodisalar misoliga egamiz.

Shartli ehtimollar uchun A hodisa ro'y bergandan keying B hodisaning ro'y berishini

$$P_A(B) \text{ yoki } P(B/A)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3-misol. Birinchi idishda 5 ta oq va 3 ta qora shar bor. A hodisa birinchi tajribada oq shar chiqishi (shar qaytib idishga solinmadi), B hodisa esa ikkinchi tajribada oq shar chiqishi bo'lsin. A hodisa ro'y berganda B hodisaning ro'y berish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan A hodisaning ehtimoli $P(A) = \frac{5}{8}$ ga teng. A hodisa ro'y berganda B hodisaning ehtimoli $P_A(B) = \frac{4}{7}$ ga teng.

25.3. Hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi. Ikkita bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birinchisining ehtimolini ikkinchisining birinchisi ro'y bergan shart ostidagi shartli ehtimoliga ko'paytirilganiga teng va aksincha, ya'ni

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Xususiyl holda, agar A va B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimolining ko'paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

4-misol. Ikkita tanga bir vaqtda tashlanganda ikkalasida ham gerb tushish ehtimoli topilsin.

A - birinchi tangada gerb tushish hodisasi;

B - ikkinchi tangada gerb tushish hodisasi;

AB ikkala tangada bir vaqtda gerb tushishi hodisasi bo'lsin. U holda

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{1}{4}. \text{ Demak,}$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A va B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ekan.

25.4. Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi. Ikkita birgalikda bo'lgan A va B hodisadan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayrilganiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Agar A va B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

5-misol. Ikki mergan bir nishonga qarata o'q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7, ikkinchi mergan uchun esa 0,8 bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Yechish. A hodisa birinchi merganning nishonga tekkizish hodisasi, B - esa ikkinchi merganning nishonga tegish hodisasi, A va B hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lganligi uchun $P(A)=0,7$, $P(B)=0,8$, $P(AB)=P(A) \cdot P(B)=0,7 \cdot 0,8=0,56$ bo'ladi. Demak, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94$

Mustaqil bajarish uchun misollar

25.1. Pul – buyum loteriyasida 1000 ta bilekli har bir seriyaga 120 ta pul yutug'i va 80 ta buyum yutug'i to'g'ri keladi. Bitta loteriyasi bor kishiga pul yutug'i yoki buyum yutug'i, umuman yutuq chiqish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,20$.

25.2. Merganning bitta o'q uzishda 10 ochko urish ehtimoli 0,15 ga, 9 ochko urish ehtimoli 0,35 ga, 8 yoki undan kam ochko urish ehtimoli 0,5 ga teng. Merganning bitta o'q uzishda kamida 9 ochko urish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,5$.

25.3. 10 ta detalli partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga olingan ikkita detaldan kamida bittasi standart bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $p = \frac{44}{45}$.

25.4. Uchta yashikning har birida 10 tadan detal bor. Birinchi yashikda 9 ta, ikkinchi yashikda 8 ta, uchinchi yashikda 7 ta standart detal bor. Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan uchchala detal standart bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,504$.

25.5. Yashikda 10 oq va 5 ta qora shar bor. Yashikdan ikki marta tavakkaliga bittadan shar olinadi. Olingan sharlar yashikka solinmaydi. Agar birinchi olingan shar qora bo'lsa (A hodisa), ikkinchi olingan shar oq bo'lish (B hodisa) ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P(B/A) = \frac{5}{7}.$$

25.6. Yashikda 6 ta shar bor, ulardan uchasi qizil rangda. Yashikdan tavakkaliga 2 ta shar olindi. Ikkala sharining ham qizil rangda bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } p = 0,2.$$

25.7. Ikkita mergan bittadan o'q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisidiki esa 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } 0,88.$$

25.8. Student imtihonga programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini bilib keldi. Imtihan oluvchi studentga 3 ta savol berdi. Studentning uchchala savolni ham bilish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } \frac{57}{115}$$

25.9. Student imtihan biletlaridan ba'zilarini bilmaydi. Student uchun qaysi holda u bilmaydigan biletни olish ehtimoli kichik bo'ladi: birinchi bo'lib olgandami yoki eng oxirida olgandami?

Javob: Ikkala holda ham ehtimollar bir xil.

25.10. Uchta o'yin soqqasi tashlandi. Kamida bitta soqqada 6 ochko tushish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } \frac{91}{216}$$

25.11. Idishda 5 ta oq va 8 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharining qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } \frac{8}{12}$$

25.12. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa ikkinchi sharining qora rangda bo'lishi ehtimolligini toping.

$$\text{Javob: } \frac{7}{9}$$

25.13. Avtopoygada uch avtomobil qatnashmoqda. Ulardan birinchisining yo'nalishdan chiqib ketish ehtimoli 0,15; ikkinchisidiki — 0,05; uchinchisidiki esa — 0,1 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: Poyga oxirigacha:

- a) faqat bitta avtomobil;
- b) ikkita avtomobil;
- d) hech bo'lmaganda ikkita avtomobil.

$$\text{Javob: a) } 0,02525; \text{ b) } 0,24725; \text{ d) } 0,974.$$

25.14. Qutida 10 ta qizil va 6 ta ko'k tugmachalar bor. Tasodifiy ravishda 2 ta tugmacha olinadi. Ular bir xil rangda bo'lishi ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } 0,5.$$

25.15. Ikkita yashikda faqatgina rangi bilan farq qiladigan sharlar bor. Birinchisida 5 ta oq, 11 ta qora va 8 ta qizil shar, ikkinchisida esa 10 ta oq, 8 ta qora va 6 ta qizil shar bor. Ikkala yashikdan tasodifiy ravishda bittadan shar olinadi. Bu ikki sharining bir xil rangli bo'lish ehtimoli nechaga teng?

$$\text{Javob: } 0,323$$

25.16. Ikkita qutida sharlar bor. Birinchi qutida oltita yashil rangli va to'rtta malla rangli sharlar bor ekanligi ma'lum. Ikkinchi qutida esa uchta yashil rangli shar va yettita malla rangli shar bor. Birinchi qutidagi sharlar aralashtirildi va ular orasidan tasodifan bitta shar olinib, ikkinchi qutiga tashlab yuborildi. Shundan so'ng, ikkinchi qutidagi sharlar aralashtirilib yuboriladi va bu ikkinchi qutidan tasodifan bitta shar olindi. Bu ikkinchi qutidan olingan sharining yashil rangli bo'lishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob:

$$P(A) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right) + P(\bar{B}) \cdot P\left(\frac{A}{\bar{B}}\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{11} = \frac{36}{110} \approx 0,33.$$

25.17. Bizning qo'limizda ikkita idish bor. Birinchi idishda 2 ta oq va 3 ta qora shar, ikkinchi idishda esa 4 ta oq hamda 7 ta qora shar bor ekanligi ma'lum. Birinchi idishdan tasodifan bitta shar olinib, ikkinchi idishga tashlandi va ana shundan so'ng, ikkinchi idishdan tavakkaliga olingan bitta sharining oq shar bo'lishi hodisasining ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P = \frac{11}{30}$$

Mavzu yuzasidan nazorat testlari.

- Qaysi shartda A va B hodisalar birgalikdamos deyiladi?
A) $AB=\emptyset$. B) $AB=\Omega$. C) $A+B=\emptyset$. D) $A+B=\Omega$. E) $AB=A+B$.
- Agar A va B hodisalar birgalikdamos bo'lsa, quyidagi tengliklardan qaysi biri o'rinli bo'lmaydi?
A) $AB=\emptyset$. B) $A+B=\Omega$. C) $AB=BA$. D) $A+B=B+A$.
E) Barcha tengliklar o'rinli bo'la oladi.
- A va B hodisalar birgalikdamos bo'lsa, $P(A+B)$ ehtimol uchun qaysi tenglik o'rinli bo'lmaydi?
A) $P(A+B)=P(A)+P(B)$. B) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.
C) $P(A+B)=P(A|B)+P(B|A)$. D) $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$.
E) $P(A+B)=P(B+A)$.
- 36 ta qartadan iborat dastadan tasodifiy ravishda bitta qarta tanlandi. $A=\{\text{Tanlangan qarta valet}\}$, $B=\{\text{Tanlangan qarta tuz}\}$ hodisalar bo'yicha $P(A+B)$ ehtimolni toping.
A) $1/36$. B) $1/18$. C) $2/9$. D) $1/6$. E) $5/12$.
- A va B birgalikdamos hodisalar uchun $P(A)=0.4$ va $P(A+B)=0.7$ bo'lsa, $P(B)$ ehtimol qiymatini toping.
A) 0.4 . B) 0.6 . C) 0.3 . D) 0.55 . E) -0.3 .
- Qutida n ta oq, m ta qizil va r ta ko'k rangli shar bor. Shu qutidan tasodifiy ravishda tanlangan shar oq yoki qizil rangli bo'lish ehtimolini toping.
A) $n/(n+n+r)$. B) $m/(n+n+r)$. C) $r/(n+n+r)$.
D) $(n+m)/(n+n+r)$. E) $(n+r)/(n+n+r)$.
- Mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli 0.9 bo'lsa, uni sifatsiz bo'lish ehtimoli nimaga teng?
A) 0.1 . B) 0.09 . C) 0.99 . D) 0.19 . E) to'g'ri javob yo'q.
- A va B hodisalar birgalikda bo'lsa, quyidagi tengliklardan qaysi biri o'rinli bo'la olmaydi?
A) $AB=\emptyset$. B) $A+B=\Omega$. C) $AB=BA$. D) $A+B=B+A$.
E) Barcha tengliklar o'rinli bo'ladi.
- Agar A va B birgalikda bo'lgan hodisalar bo'lsa, $P(A+B)$ ehtimol qaysi formula bilan hisoblanadi?

- A) $P(A+B)=P(A)+P(B)$. B) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$.
C) $P(A+B)=P(A)+P(A)+P(A)P(B)$.
D) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.
E) $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$.
- Umumiy holda $P(A+B)$ ehtimol qaysi formula bilan topiladi?
A) $P(A+B)=P(A)+P(B)$. B) $P(A+B)=P(A)+P(B)+P(AB)$.
C) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. D) $P(A+B)=P(A)+P(B)\pm P(AB)$.
E) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$.
- $P(A/B)$ shartli ehtimol mazmuni qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?
A) A hodisa ro'y bergan holda B hodisaning ehtimoli.
B) A hodisa ro'y bermagan holda B hodisaning ehtimoli.
C) B hodisa ro'y bergan holda A hodisaning ehtimoli.
D) B hodisa ro'y bermagan holda A hodisaning ehtimoli.
E) A va B hodisalarni bir paytda ro'y berish ehtimoli.
- Agar A va B bog'liqmas hodisalar bo'lsa, ularning ko'paytmasining ehtimoli $P(AB)$ qaysi formula bilan hisoblanadi?
A) $P(AB)=P(A)P(A/B)$. B) $P(AB)=P(B/A)P(A/B)$.
C) $P(AB)=P(B)P(B/A)$. D) $P(AB)=P(A)P(B)$.
E) To'g'ri javob keltirilmagan.
- Ikkita talaba kompyuterda test asosida imtihon topshirmoqda. I talaba 0.7 , II talaba esa 0.6 ehtimol bilan imtihondan o'tishi mumkin. Ikkala talabani ham imtihondan o'tish ehtimoli nimaga teng?
A) 0.86 . B) 0.75 . C) 0.64 . D) 0.53 . E) 0.42 .
- Talaba testdagi I savolga 0.8 , II savolga esa 0.7 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Talabani ikkala savolga to'g'ri javob berish ehtimolini toping. A) 0.56 . B) 1.5 . C) 0.94 . D) 0.44 . E) 0.06 .
- Talaba testdagi I savolga 0.8 , II savolga esa 0.7 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Talabani faqat bitta savolga to'g'ri javob berish ehtimolini toping.
A) 0.64 . B) 0.49 . C) 0.56 . D) 0.38 . E) 0.5 .
- Qutida 6 ta oq va 10 ta qora rangli shar bor. Shu qutidan tasodifiy ravishda ikkita shar tanlab olindi. Tanlangan sharlarning ikkalasi ham oq rangli bo'lish ehtimoli nimaga teng bo'ladi?
A) $9/64$. B) $3/8$. C) $1/8$. D) $1/4$. E) $4/9$.

26-§. KAMIDA BITTA HODISANING RO'Y BERISH EHTIMOLI.

TO'LA EHTIMOL FORMULASI. BAYES FORMULASI.

Murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblashda ko'pincha bu hodisalarga qo'shish va ko'paytirish teoremlarini birga tatbiq qilib hosil qilingan formulalardan foydalanishga to'g'ri keladi. Quyidagi ana shunday muhim formulalarning ba'zilar bilan tanishib o'tamiz.

26.1. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar to'plami o'zaro bog'liqsiz bo'lsin va $p(A_i) = p_i$, $q_i = 1 - p_i$ bo'lsin. Aytaylik, sinov natijasida bu hodisalarning yoki hech biri ro'y bermasligi, yoki ularning bir qismi, yohud hammasi ro'y berishi mumkin bo'lsin. A hodisa yuqoridagi $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning hech bo'lmaganda bittasi ro'y berishidan iborat hodisa bo'lsin. A hodisaning ehtimoli berilgan hodisalarga teskari bo'lgan $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ hodisalar ehtimollarining ko'paytmasini birdan ayrilganiga teng:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Xususan, agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar ehtimolliklari bir xil $p(A_i) = p$, $q = 1 - p$ bo'lsa, u holda $P(A) = 1 - q^n$.

1- masala. Dushman kemasi uch zambarakdan o'qqa tutilmoqda. Ularning nishonga tekkizish ehtimollari quyidagicha: $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$ va $p_3 = 0,9$. Agar kemani cho'ktirish uchun bitta tekkizish yetarli bo'lsa, dushman kemasini uch zambarakdan bir otishda cho'ktirish ehtimolini toping.

Yechish. A dushman kemasini cho'ktirish hodisasi. A_i ($i = 1, 2, 3$) bu i -zambarakning nishonga tekkizish hodisasi bo'lsin. Har bir zambarakning nishonga tekkizishi qolganlarning natijasiga bog'liq emas. Shuning uchun A_i lar o'zaro bog'liq emas. U holda A_i ga teskari bo'lgan $\overline{A_i}$, ya'ni i -zambarakning nishonga tekkiza olmasligi hodisalarining ehtimollari mos ravishda quyidagilarga teng:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0,2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0,3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0,1.$$

Izlanayotgan ehtimollik esa quyidagiga teng

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

2- masala. Uchta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinov o'tkazilganda hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimoli 0,936. Agar har

uch tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lsa, uning bitta tajribada ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. Qaralayotgan hodisalar o'zaro bog'liq emas, shuning uchun $P(A) = 1 - q^n$. Shartga ko'ra $P(A) = 0,936$; $n = 3$.

Demak, $0,936 = 1 - q^3$ yoki $q^3 = 1 - 0,936 = 0,064$. Bundan $q = \sqrt[3]{0,064} = 0,4$.

Izlanayotgan ehtimollik $p = 1 - q = 0,6$

26.2. To'la ehtimol formulasi. Faraz qilaylik, A hodisa n ta juft - jufti bilan birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalar (gipotezalar)ning bittasi va faqat bittasi bilangina ro'y berishi mumkin bo'lsin, boshqacha qilib aytganda:

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n \quad (A - \text{murakkab hodisa}).$$

Bu yerda $AH_i \cap AH_j = \emptyset$ ($i \neq j$), u holda birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Ko'paytirish teoremasiga ko'ra $P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)$$

yoki

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

Bu tenglik to'la ehtimol formulasi deyiladi. To'la ehtimol formulasidan foydalanib, Bayes formulasi yoki gipotezalar ehtimollari formulasi deb ataluvchi muhim formulani hosil qilish mumkin.

3-masala. Iqtisodchi kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lsa, ma'lum bir kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimoli 0,75 ga, iqtisodiyot ko'rsatkichlari past bo'lsa, aksiyalar narxining oshish ehtimoli 0,3 ga teng ekan. Shu bilan birga, uning fikricha, kelasi yil mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng ekan. Iqtisodchining tahlili to'g'ri bo'lsa, kelasi yilda kompaniya aksiyalari narxining oshishi ehtimolini toping?

Yechish. A hodisa - "kelasi yilda kompaniya aksiyalarining narxi oshadi". Gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz.

H_1 – “Kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko‘rsatkichlari yuqori bo‘ladi”; H_2 – “Kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko‘rsatkichlari past bo‘ladi”. Masalaning shartiga ko‘ra $P(H_1)$ va $P(H_2)$ ehtimolliklar $P(H_1)=0,8$ va $P(H_2)=1-P(H_1)=1-0,8=0,2$ ga teng. Iqtisodchining tahliliga ko‘ra $P(A/H_1)=0,75$ va $P(A/H_2)=0,3$. To‘la ehtimollik formulasidan

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0,8\cdot 0,75+0,2\cdot 0,3=0,66$ ekanligi kelib chiqadi.

4- masala. Domla imtihonga 50 ta masala tuzib kelgan bo‘lib, ularning 30 tasi ehtimollar nazariyasi, 20 tasi matematik statistika kursidandir. Imtixonni topshirish uchun talaba tasodifiy tushgan birinchi masalani yechishi kerak. Agar talaba ehtimollar nazariyasi kursidan 15 ta, matematik statistika kursidan 18 ta masala yechishni bilsa, uning imtihon topshirish ehtimoli qanchaligini aniqlang.

Yechish. Tasodifan tanlangan masalaning ehtimollar nazariyasi kursidan bo‘lishi (H_1 hodisa) ehtimoli $P(H_1)=30/50=0,6$ ga matematik statistika kursidan bo‘lishi (H_2 hodisa) ehtimoli esa $P(H_2)=20/50=0,4$ ga teng. Agar A “masala talaba tomonidan yechiladi” hodisasi bo‘lsa, u holda $P(A/H_1)=15/30=0,5$ va $P(A/H_2)=18/20=0,9$. To‘la ehtimollik formulasiga asosan

$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0,6\cdot 0,5+0,4\cdot 0,9=0,3+0,36=0,66$.

26.3. Bayes formulasi. Birgalikda bo‘lmagan $H_1, H_2, \dots, H_n$ hodisalarning (gipotezalarning) to‘la gruppasi berilgan bo‘lib, tajribani o‘tkazishga qadar ularning har birining $P(H_i), i=\overline{1, n}$ ehtimollari tayin qiymatiga ega bo‘lsin. Tajriba natijasida A hodisa ro‘y berdi degan shart ostida $H_i (i=\overline{1, n})$ gipotezalarning ehtimollari tajribadan so‘ng qanday bo‘ladi?

H_i va A hodisalarning ko‘paytmasi uchun ushbu

$$P(AH_i) = P(A) \cdot P(A/H_i) = P(H_i)P(A/H_i)$$

formulaning o‘rinligidan

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$$

munosabatga ega bo‘lamiz, bu yerda to‘la ehtimol formulasini qo‘llasak, ushbu Bayes formulasi deb ataluvchi formulani hosil qilamiz:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}.$$

Bu formulalar yordamida yechiladigan masalalarni ko‘raylik.

5- masala. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan 300 tasi 1 – korxonada tayyorlangan bo‘lib, ularning 250 tasi yaroqli mahsulot; 40 tasi 2-korxonada tayyorlangan bo‘lib, ularning 30 tasi yaroqli hamda 20 tasi 3-korxonada tayyorlangan bo‘lib, ulardan 10 tasi yaroqli. Tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o‘rinli bo‘ladi:

H_1 gipoteza – mahsulotning 1 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi;

H_2 gipoteza – mahsulotning 2 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi;

H_3 gipoteza – mahsulotning 3 – korxonada tayyorlangan bo‘lishi.

Ularning ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P(H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo‘lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipoteza shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P(A/H_1) = \frac{5}{6}; \quad P(A/H_2) = \frac{3}{4}; \quad P(A/H_3) = \frac{1}{2}.$$

Yuqorida topilganlarni to‘la ehtimol formulasiga qo‘yib, izlanayotgan hodisa ehtimolini topamiz:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{36}.$$

6-masala. Ikki mergan nishonga bittadan o‘q uzdi. Birinchi merganning o‘qi nishonga 0,8 ehtimol bilan, ikkinchi merganniki esa 0,4 ehtimol bilan tegadi. O‘q uzilgandan so‘ng nishonga bitta o‘q tekkanligi (A hodisa) ma’lum bo‘ldi, bu o‘qni birinchi mergan uzgan bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Tajriba o‘tkazishdan oldin quyidagi gipotezalarni qo‘yamiz:

H_1 - birinchi mergan otgan o‘q ham, ikkinchi mergan otgan o‘q ham nishonga tegmaydi;

H_2 - ikkala merganning otgan o‘qi ham nishonga tegadi;

H_3 - birinchi merganning otgan o'qi nishonga tegadi, ikkinchisiniki esa tegmaydi;

H_4 - birinchi merganning otgan o'qi nishonga tegmaydi, ikkinchisiniki esa tegadi.

Gipotezalardan bittasi va faqat bittasi tajriba natijasida albatta ro'y beradi, ya'ni H_1, H_2, H_3, H_4 lar bog'liq bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi.

Bu gipotezalarning tajribadan oldingi ehtimollari:

$$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12,$$

$$P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32,$$

$$P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48,$$

$$P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

Bu gipotezalarda kuzatilayotgan A hodisaning shartli ehtimollari quyidagilarga teng: $P(A/H_1)=0, P(A/H_2)=0, P(A/H_3)=1, P(A/H_4)=1$.

Tajribadan keyin (A hodisa ro'y berganidan keyin) H_1, H_2 gipotezalar ro'y bermasligi ma'lum bo'ladi. H_3 va H_4 gipotezalarning tajribadan keyingi ehtimollari Bayes formulasiga ko'ra quyidagicha:

$$P(H_3/A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7};$$

$$P(H_4/A) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Demak, nishonga tekkan o'qning birinchi merganga tegishli bo'lish ehtimoli $\frac{6}{7}$ ekan.

Mustaqil bajarish uchun misollar.

26.1. Shahar avtotransporti muammolarini o'rganish va tahlil qilish niyatida ishga jamoat transportida qatnaydiganlar orasida so'rov o'tkazilmoqchi. Tadqiqot olib borilayotgan joyda 75% aholi ishga jamoat transportida qatnaydi. Agar uch kishi so'rovga rozi bo'lgan bo'lsa, ulardan hech bo'lmaganda bittasining ishga jamoat transportida qatnash ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,9844.

26.2. Bahorgi mavsumga kiyimlarning yangi kolleksiyasini tayyorlayotgan modeler yashil, qora va qizil ranglar jilosini tanlagan. Uning fikricha, bahorda yashil ranglarning modada bo'lish ehtimoli 0,3 ga, qora ranglarniki 0,2 ga va qizil ranglarniki 0,15 ga teng. Ranglar bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tanlanadi, deb faraz qilgan holda kolleksiyadagi ranglarning hech bo'lmaganda bittasi to'g'ri tanlanganligining ehtimolini toping.

Javob: 0,524

26.3. Uyali telefonlar orqali qo'ng'iroq qilinganda har ikki yuzdan bitta qo'ng'iroq noto'g'ri ulanar ekan. Uyali telefonlar orqali 5 marotaba qo'ng'iroq qilinganda hech bo'lmaganda bir marotaba noto'g'ri ulanish ehtimolini toping.

Javob: 0,0248.

26.4. Strategik ahamiyatga ega ko'priknig buzilishi uchun unga bitta bomba tushishi kifoya. Agar ko'priikka unga tegish ehtimoli mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo'lgan to'rtta bomba tashlangan bo'lsa, ko'priknig buzilish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,95$.

26.5. Iqtisodiy o'sish davrida mijozning bankdan olgan zayomini qaytarmaslik ehtimoli 0,04 ga, iqtisodiy tanglik davrida esa 0,13 ga teng. Faraz qilaylik, iqtisodiy o'sish davri boshlanish ehtimoli 0,65 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan mijozning qarzini qaytarmaslik ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,0715.

26.6. Ko'chmas mulk agenti qurilishga mo'ljallangan yer maydonini sotmoqchi. Uning fikricha, agar regionda iqtisodiy vaziyat yomonlashmasa,

bu yerning yaqin 6 oy ichida sotilish ehtimoli 0,99 ga teng. Agar iqtisodiy vaziyat yomonlashsa, bu ehtimollik 0,5 gacha kamayadi. Iqtisodchining fikricha keyingi 6 oy ichida iqtisodiy vaziyatning yomonlashish ehtimoli 0,7 ga teng. Yer maydonining yaqin 6 oy ichida sotilish ehtimolini toping.

Javob: 0,62.

26.7. Eksport-import firmasi ma'lum bir rivojlanayotgan davlat bilan qishloq xo'jalik uskunalari yetkazib berish to'g'risida shartnoma tuzmoqchi. Agar raqobatchi firma ham ana shunday shartnoma tuzishga harakat qilmasa, birinchi firmaning shartnomaga erishish ehtimoli 0,4 ga, aks holda 0,25 ga teng. Ekspertlarning fikricha, raqobatchi firmaning shartnoma tuzishga harakat qilish ehtimoli 0,4 ga teng. Birinchi firmaning shartnomaga erishish ehtimolini toping.

Javob: 0,37

26.8. Ikkita bir xil quti bo'lib, ularning birinchisida 2 ta oq va 1 ta qora shar bor, ikkinchisida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tasodifiy ravishda bitta quti tanlanadi va undan shar olinadi. Olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 13/30

26.9. Ikki xil detallar to'plami bor. Birinchi to'plamdagi detallarning standart bo'lish ehtimoli 0,8, ikkinchisidiki esa 0,9 ga teng. Tasodifiy tanlangan to'plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,85

26.10. Sportchilar gruppasida 20 chang'ichi, 6 velosipedchi va 4 yuguruvchi bor. Saralash normasini bajarish ehtimoli chang'ichi uchun 0,9 ga, velosipedchi uchun 0,8 ga, yuguruvchi uchun 0,75 ga teng. Tavakkaliga ajratilgan sportchining normani bajara olish ehtimolini toping.

Javob: 0,86.

26.11. Birinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 15 tasi standart, ikkinchi yashikda 30 detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart, uchinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 6 tasi standart. Tavakkaliga tanlangan yashikdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 43/60

26.12. "Oliy matematika" fani bo'yicha yakuniy imtihonda "Algebra", "Analitik geometriya" va "Matematik analiz" bo'limlar bo'yicha mos ravishda 60, 40 va 100 ta savollar mavjud va ularga talaba mos ravishda 0,8, 0,7 va 0,6 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Yakuniy imtihonda talaba unga tasodifiy ravishda berilgan savolga to'g'ri javob berdi. Bu savol "Analitik geometriya" bo'limiga tegishli ekanligi ehtimolini hisoblang.

Javob: 28/71

26.13. Ichida 2 ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solinib, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Sharlarning dastlabki tartibi (rangi bo'yicha) haqida mumkin bo'lgan barcha gipotezalar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda olingan sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 2/3

26.14. Benzokolonka joylashgan shossedan yuk mashinalari sonining o'sha shossedan o'tadigan yengil mashinalar soniga nisbatan 3:2 kabi. Yuk mashinasining benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng, yengil mashina uchun bu ehtimol 0,2 ga teng. Benzokolonka yoniga benzin olish uchun mashina kelibto'xtadi. Uning yuk mashina bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 3/7.

26.15. Chigitning unuvchanligi 70 % bo'lsa, ekilgan 5 ta chigitdan: a) uchtasining; b) ko'pi bilan uchtasining; c) kamida uchtasining unib chiqish ehtimolini toping.

Javob: a) 0,3087; b) 0,4717; c) 0,8370.

26.16. Ikki teng kuchli raqib shaxmat o'ynamoqda. Qaysi ehtimol kattaroq: a) raqiblardan birining ikki partiyadan bittasini yutish ehtimolimi yoki to'rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimolimi? b) to'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimolimi yoki besh partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimolimi? Durang natijalar e'tiborga olinmaydi.

Javob: a) $P_1(1) > P_4(2)$; b) $P_4(\mu \geq 2) > P_5(\mu \geq 3)$.

26.17. Ikki mergan bir vaqtda nishonga o'q uzmoqda. Bitta o'qni uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchi mergan uchun 0,6 ga teng. Agar bir yo'la 15 marta o'q uziladigan bo'lsa, ikkala merganning ham nishonga tekkizishlarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Javob: 7

26.18. Agar 49 ta bog'liq bo'lmagan tajribada hodisa ro'y berishning eng katta ehtimolli soni 30 ga teng bo'lsa, tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli p ni toping.

Javob: $0,60 < p \leq 0,62$

26.19. Iqtisodchi-analitik mamlakatdagi iqtisodiy ahvolni shartli ravishda «yaxshi», «o'rtacha», «yomon» hollarga bo'ladi va ayni paytda ularning ehtimolliklarini mos ravishda 0,15, 0,70, 0,15 deb baholaydi. Ma'lum bir iqtisodiy indeks mamlakatdagi iqtisodiy ahvol «yaxshi» bo'lganida 0,6 ehtimollik bilan, «o'rtacha» bo'lganida 0,3 ehtimollik bilan va «yomon» bo'lganida 0,1 ehtimollik bilan o'sadi. Aytaylik, ayni paytda ana shu indeks o'zgardi. Mamlakat iqtisodiyoti yaxshi ahvolda, ya'ni ko'tarilishda ekanligining ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,2857.

26.20. Virusli kasallikni aniqlashda maxsus meditsina testi quyidagi natijalarni beradi: 1) agar tekshiriluvchi kasal bo'lsa, test 0,92 ehtimollik bilan ijobiy natija beradi; 2) agar tekshiriluvchi kasal bo'lmasa, test 0,04 ehtimollik bilan ijobiy natija berishi mumkin. Bu kasallik kam uchraydigan bo'lib, unga aholining 0,1 %i chalingan. Aytaylik, tasodifan tanlab olingan odam testdan o'tkazilganida ijobiy natija olindi, ya'ni u kasallangan bo'lib chiqdi. Bu odamning haqiqatan ham kasal bo'lish ehtimoli qanchaga teng?

Javob: 0,0225.

26.21. Neft quvuri qurish mo'ljallangan joyda neft bor bo'lishi ehtimolini aniqlash maqsadida qidiruv ekspeditsiyasi tadqiqot olib bormoqda. Avvalgi tajribalarga asosanib, ular tekshirilayotgan hududda neft bo'lish ehtimoligini 0,4 bilan baholamoqdalar. Qidiruvning so'nggi bosqichida seysmik test o'tkaziladi. Agar neft haqiqatan mavjud bo'lsa, test 0,85 ehtimollik bilan uni bor deb, agar neft yo'q bo'lsa, 0,1 ehtimollik bilan uni bor deb ko'rsatishi mumkin. Seysmik test neft borligini ko'rsatdi. Ana shu hududda haqiqatan ham neft bor bo'lish ehtimoli qancha?

Javob: 0,85.

26.22. Kimyo zavodida avariylarning oldini olish maqsadida maxsus ogohlantiruv («signalizatsiya») sistemasi o'rnatilgan. Avariya holati yuzaga

kelganida u 0,95 ehtimollik bilan ogohlantiruvchi signal yuboradi. 0,02 ehtimollik bilan esa avariya holati bo'lmaganida ham ogohlantiruv sistemasi ishlab ketishi mumkin. Avariya holati ehtimoli 0,004 ga teng. Aytaylik, ogohlantiruv sistemasi ishlab ketdi. Haqiqatan ham avariya holati yuzaga kelgani ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,1602.

26.23. Bozorni o'rganish uchun o'tkaziladigan tanlanma test ma'lum ishonchlilik darajasiga ega. Biror bir tovar uchun, agar u haqiqatan ham xaridorgir bo'lsa, testdan o'tish ehtimoli 0,75, xaridorgir bo'lmasa ham testdan o'tish ehtimoli 0,15. Tajribadan yangi tovarning bozorda muvaffaqiyatga erishishi 0,6 ga teng. Agar yangi tovar tanlanma testdan o'tgan va uning natijalari tovarning xaridorgir bo'lishini ko'rsatgan bo'lsa, bu qanchalik haqiqatga yaqin?

Javob: 0,88.

26.24. Firma direktorida ishga qabul qilinishga da'vogarlarining ikkita ro'yxati bor. Birinchi ro'yxatda 5 ayol va 2 erkak, ikkinchisida esa 2 ayol va 6 erkak ko'rsatilgan. Da'vogarlardan birining familiyasi tasodifiy ravishda birinchi ro'yxatdan ikkinchisiga ko'chirib yoziladi va ikkinchi ro'yxatdan bir kishining familiyasi tasodifan tanlab olinadi. Agar bu erkak kishining familiyasi deb faraz qilinsa, birinchi ro'yxatdan ayol kishining familiyasi tanlangani ehtimolini toping.

Javob: 0,6818.

26.25. Ikki mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda bitta nishonga qarab bir martadan o'q otishdi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchisi uchun 0,8, ikkinchisi uchun esa 0,4 ga teng. O'q uzishlardan so'ng nishonga bitta o'q tekkani aniqlangan bo'lsa, uni birinchi mergan tekkizganligining ehtimoligini toping.

Javob: 6/7.

26.26. Boltlar ishlab chiqaradigan zavodda birinchi uskuna 25%, ikkinchisi 35%, uchinchi esa 40% mahsulotni ishlab chiqaradi. Bu uskunalarda ishlab chiqarilgan boltlarning sifatsiz ekanligining ehti- mollari mos ravishda 5%, 4% va 2% ni tashkil etadi.

a) Tasodifiy ravishda tanlangan boltning sifatsiz bo'lish ehtimoli qancha? b) Agar tasodifan tanlangan bolt sifatsiz bo'lsa, uning 1-, 2- va 3-

uskunada ishlab chiqarilganligi ehtimollarini toping.

Javob: a) 0,0345; b) 125/345, 140/345, 80/345.

26.27. "Oliy matematika" fani bo'yicha yakuniy imtihonda "Algebra", "Analitik geometriya" va "Matematik analiz" bo'limlar bo'yicha mos ravishda 60, 40 va 100 ta savollar mavjud va ularga talaba mos ravishda 0.8, 0.7 va 0.6 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Yakuniy imtihonda talaba unga tasodifiy ravishda berilgan savolga to'g'ri javob berdi. Bu savol "Matematik tahlil" bo'limiga tegishli ekanligi ehtimolini hisoblang.

Javob: 60/71.

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

1. A hodisa ehtimolini to'liq ehtimol formulasi yordamida hisoblashda tajriba natijalari $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ uchun qaysi shart talab etilmaydi?

- A) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ natijalar to'liq guruhni tashkil etadi.
- B) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ birgalikda bo'lmagan natijalar.
- C) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ teng imkoniyatli natijalar.
- D) $P(A|E_1), P(A|E_2), P(A|E_3), \dots, P(A|E_n)$ shartli ehtimollar berilgan.
- E) Barcha shartlar talab etiladi.

2. To'liq ehtimol formulasini qo'llash uchun qaysi ehtimollarni bilish talab etiladi?

- A) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ natijalarning shartsiz ehtimollarini.
- B) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ natijalarning shartli ehtimollarini.
- C) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ natijalar yig'indisining ehtimolini.
- D) $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ natijalar ko'paytmasining ehtimolini.
- E) A tasodifiy hodisa ehtimolini.

3. To'liq ehtimol formulasini qo'llash uchun qaysi ehtimollarni bilish talab etiladi?

- A) A tasodifiy hodisaning shartsiz ehtimolini.
- B) A tasodifiy hodisa ehtimolini.
- C) A tasodifiy hodisaga qarama-qarshi hodisaning ehtimolini.
- D) $P(E_1|A), P(E_2|A), P(E_3|A), \dots, P(E_n|A)$ shartli ehtimollarni
- E) $P(A|E_1), P(A|E_2), P(A|E_3), \dots, P(A|E_n)$ shartli ehtimollarni.

4. Talaba «Oliy matematika», «Umumiy fizika» va «Ingliz tili» fanlari bo'yicha test savollariga mos ravishda 0.8, 0.7 va 0.9 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Yakuniy testga «Oliy matematika», «Umumiy fizika» va «Ingliz tili» fanlaridan mos ravishda 40%, 35% va 25% savollar kiritilgan. Yakuniy testdan tasodifiy ravishda tanlab olingan savolga talaba to'g'ri javob berish ehtimolini hisoblang.

- A) 0.33. B) 0.79. C) 0.47. D) 0.56. E) 0.65.

5. Mahsulotlar partiyasi uch smena davomida ishlab chiqarilgan mahsulotlardan iborat. Bunda I, II va III smenalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlar soni mos ravishda 100, 80 va 70 ta bo'lib, ular 0.9, 0.8 va 0.6 ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Shu partiyadan tasodifiy ravishda tanlangan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli nimaga teng?

- A) 0.638. B) 0.692. C) 0.735. D) 0.784. E) 0.836.

6. "Oliy matematika" fani bo'yicha yakuniy imtihonda "Algebra", "Analitik geometriya" va "Matematik analiz" bo'limlar bo'yicha mos ravishda 60, 40 va 100 ta savollar mavjud va ularga talaba mos ravishda 0.8, 0.7 va 0.6 ehtimol bilan to'g'ri javob bera oladi. Yakuniy imtihonda talaba unga tasodifiy ravishda berilgan savolga to'g'ri javob berish ehtimolini hisoblang.

- A) 0.87. B) 0.83. C) 0.75. D) 0.71. E) 0.69.

7. Bayes formulasini qo'llash uchun qaysi ma'lumot talab etilmaydi?

- A) $P(E_1), P(E_2), P(E_3), \dots, P(E_n)$ ehtimollar.
- B) $P(A|E_1), P(A|E_2), P(A|E_3), \dots, P(A|E_n)$ shartli ehtimollar.
- C) Tasodifiy A hodisaning $P(A)$ ehtimoli.
- D) Keltirilgan barcha ma'lumotlar talab etiladi.
- E) Keltirilgan barcha ma'lumotlar talab etilmaydi.

8. Bayes formulasi yordamida nima hisoblanadi?

- A) Tasodifiy A hodisaning $P(A)$ ehtimoli.
- B) Tajribadagi E_i natijalarning $P(E_i)$ ehtimollari.
- C) $P(E_i|A)$ shartli ehtimollar.
- D) $P(A|E_i)$ shartli ehtimollar.
- E) $P(AE_i)$ shartlsiz ehtimollar.

9. Bayes formulasini keltirib chiqarishda qaysi tenglikdan foydalanilmaydi?

A) $AE_i = E_i A$. B) $P(AE_i) = P(E_i A)$. C) $P(AE_i) = P(A)P(E_i | A)$.

D) $P(E_i A) = P(E_i)P(A | E_i)$. E) Barcha tengliklardan foydalaniladi.

10. Quyidagi tengliklardan qaysi biri Bayes formulasini ifodalaydi?

A) $P(A) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(A|E_i)$. B) $P(E_k|A) = \frac{P(E_k)P(A|E_k)}{P(A)}$.

C) $P(AE_k) = P(A)P(E_k|A)$. D) $P(E_k A) = P(E_k)P(A|E_k)$.

E) $P(A) = \frac{P(E_k)P(A|E_k)}{P(E_k|A)}$.

11. Ombordagi 40% mahsulot I korxonada, qolgan 60% mahsulot esa II korxonada ishlab chiqarilgan. I korxonada ishlab chiqarilgan mahsulot 0.9, II korxona mahsuloti esa 0.8 ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Shu ombordan tasodifiy ravishda olingan mahsulot sifatli bo'lib chiqdi. Bu mahsulotni II korxonada ishlab chiqarilganligi ehtimolini toping.

A) 57/84. B) 12/21. C) 27/84. D) 9/21. E) 29/42.

12. Ombordagi 40% mahsulot I korxonada, qolgan 60% mahsulot esa II korxonada ishlab chiqarilgan. I korxonada ishlab chiqarilgan mahsulot 0.9, II korxona mahsuloti esa 0.8 ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Shu ombordan tasodifiy ravishda olingan mahsulot sifatli bo'lib chiqdi. Bu mahsulotni I korxonada ishlab chiqarilganligi ehtimolini toping.

A) 57/84. B) 12/21. C) 27/84. D) 9/21. E) 29/42.

27-§. O'ZARO BOG'LIQ BO'LMAGAN TAKRORIY TAJIRIBALAR. BERNULLI SXEMASI. BERNULLI, PUASSON FORMULALARI

27.1. Bernulli formulasi.

Aytaylik, biror A hodisaning ketma-ket o'tkazilayotgan bog'liqsiz tajribalar (sinovlar) ning har birida ro'y berishi ham bermasligi ham mumkin bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng va bu ehtimollik tajriba nomeriga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son. Tabiiyki, har bir tajriba uchun A hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1-p$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligiga Bernulli sxemasi deyiladi.

Agar biror A hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermasligini kuzatish uchun bir nechta tajribalar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har biriga A hodisaning ro'y berish yoki ro'y bermaslik ehtimoli qolgan tajribalarning natijalariga bog'liq bo'lmasa (bog'liq bo'lsa), u holda bu tajribalar A hodisaga nisbatan bog'liq bo'lmagan (bog'liq bo'lgan) tajribalar ketma-ketligini tashkil etadi deyiladi.

Masalan, yashikda s ta oq va l ta qora shar bo'lsin. Shu yashikdan bir necha marta bittadan shar olish tajribalari ketma-ketligini ko'raylik. Bunda har bir tajribadan so'ng olingan shar yashikka qaytarib solinsa (qaytarib solinmasa), bu tajribalar ketma-ketligi bir-biriga bog'liq bo'lmaydi (bir-biriga bog'liq bo'ladi).

Bog'liq bo'lmagan n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berish ehtimoli p va ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1-p$ bo'lsin. Bu holda kuzatilayotgan A hodisaning n ta tajribada k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P_n(k) = C_n^k q^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n)$$

bu yerda

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bu formula **Bernulli formulasi** deyiladi.

1-masala. Chigitning unuvchanligi 80 % bo'lsa, ekilgan 4 ta chigitdan:

a) uchtasining unib chiqish; b) hech bo'lmaganda ikkitasining unib chiqish ehtimolini toping.

a) Shartga ko'ra $n = 4$; $k = 3$; $p = 0,8$; $q = 0,2$. Bernulli formulasiga ko'ra:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

b) 4 hodisa ekilgan 4 ta chigitdan 2 tasi yoki 3 tasi, yoki 4 tasi unib chiqishini, ya'ni hech bo'lmaganda ikkitasining unib chiqishini bildirsin. Ehtimollarni qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P_4(A) = P_4(\text{yoki 2, yoki 3, yoki 4}) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4).$$

$$P_4(3) \text{ ehtimol (a) punktda hisoblangan;}$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

Demak, $P(A) = 0,9728$.

2-masala. Ma'lum bir korxona mahsulotlarining 5%i sifatsiz. Tasodifan olingan 5 ta mahsulot ichida ikkitasining sifatsiz bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Tasodifan olingan mahsulotning sifatsiz bo'lish ehtimolligi $p = 0,05$. U holda Bernulli formulasiga asosan

$$P_5(2) = C_5^2 (0,05)^2 (0,95)^3 = 0,02.$$

Javob: 0,02.

27.2. Puasson formulasi.

Puasson formulasi Bernulli sxemasida n ning qiymati yetarlicha katta, p ning qiymati esa kichkina bo'lgan hollarda (odatda $p < 0,1$; $npq \leq 9$) hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ hisoblashda Bernulli formulasi o'rniga Puasson formulasidan foydalaniladi:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda = np.$$

3-masala. Darslik 100 000 nusxada chop etilgan. Chop etilgan darslikning sifatsiz tikilgan ekanligining ehtimoli 0,0001 ga teng. Tirajning

ichida sifatsiz tikilgan kitoblar soni roppa-rosa 3 ta bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Bu holda $n = 100\,000$, $p = 0,0001$, $k = 3$. n yetarlicha katta, p ehtimollik esa kichkina bo'lgani uchun Puasson formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

λ ni hisoblaymiz: $\lambda = n \cdot p = 100\,000 \cdot 0,0001 = 10$. U holda

$$P_{100\,000}(3) \approx \frac{10^3 e^{-10}}{3!} = \frac{10^3 \cdot 0,000045}{6} = 0,0075.$$

4-masala. Darslik 200 000 nusxada bosib chiqarilgan. Darslikning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,00005 ga teng. Butun tirajda rosa 5 ta yaroqsiz kitob bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 200\,000$, $p = 0,00005$, $k = 5$. n son katta va p ehtimol kichik, shu sababli Puasson formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

bu yerda $\lambda = np$, λ ning qiymatini topamiz:

$$\lambda = 200\,000 \cdot 0,00005 = 10.$$

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{200\,000}(5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = \frac{10^5}{120} \cdot 0,000045 \approx 0,0375.$$

Mustaqil bajarish uchun misollar.

- 27.1. Qurilish kompaniyasida o'tkazilgan auditorlik tekshiruvi paytida auditor tasodifiy ravishda 5 ta hisob varaqasini tanlaydi. Agar hisob varaqalarining 3%i da xatolarga yo'l qo'yilgan bo'lsa, auditorning
- faqat bitta hisob varaqasida xato topishi;
 - hech bo'lmaganda bitta hisob varaqasida xato topishi ehtimolini toping.

Javob: a) 0,1328; b) 0,1413.

- 27.2. Fakultetdagi talabalarning o'rtacha 10%i «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha imtihonda qoniqsiz baho olar ekan. Aytaylik, guruhda 20 ta talaba bor.

- ikkita talabaning imtihon topshira olmaslik ehtimoli qancha?
- to'rtta talabaning imtihon topshira olmaslik ehtimoli qancha?
- kamida uchta talabaning imtihon topshira olmaslik ehtimolligi qancha?
- imtihon topshira olmaydigan talabalarning kutilayotgan o'rtacha soni qancha?

Javob: a) 0,270; b) 0,0898; d) 0,3231; e) 2

- 27.3. Avtomat dastgoh to'g'ri sozlangan bo'lsa, ishlab chiqarilayotgan detallarning faqat 1% nosoz bo'ladi. Avtomat to'g'ri sozlangan bo'lsin. a) ishlab chiqarilgan mahsulotning katta partiyasidan tasodifiy ravishda ikkitasi tanlab olindi. Ulardan bittasining nosoz bo'lish ehtimoli qancha? b) ishlab chiqarilgan mahsulotning katta partiyasidan tasodifiy ravishda beshtasi tanlab olindi. Ularning hammasi sifatli bo'lish ehtimoli qancha? d) bir kunlik ishlab chiqarilgan detallar soni 200 ta bo'ldi. Nosoz detallarning kutilayotgan o'rtacha soni qancha?

Javob: a) 0,0198; b) 0,9510; d) 2

- 27.4. Savdo agenti bir kunda o'rta hisobda 8 ta doimiy xaridorlar bilan muloqotda bo'ladi. U tajribasidan doimiy xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,1 ga teng ekanini biladi.

- bir kun davomida 2 kishining xarid qilish ehtimoli nechaga teng?
- bir kun davomida hech bo'lmaganda 2 kishining xarid qilish ehtimoli nechaga teng?
- kun davomida hech kimning xarid qilmaslik ehtimoli nechaga teng?
- bir kun davomida kutiladigan xaridlarning o'rtacha soni nechaga teng?

Javob: a) 0,1488; b) 0,1869; d) 0,43; e) 4

- 27.5. Tanga 6 marta tashlanadi.

- Tanga «gerb» tomoni bilan ikki martadan kam tushishi;
- «gerb» tomoni kamida ikki marta tushishi ehtimolini toping.

Javob: a) 7/64; b) 57/64.

- 27.6. Sexda 6 ta motor ishlaydi. Ularning har biri uchun ayni paytda ishlayotganligi ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, ayni paytda

- 4 ta motor ishlayotganligi;
- hamma motor o'chirilganligi;
- hamma motor ishlayotganligi ehtimollarini toping.

Javob: a) $P(6;4)=0,246$; b) $P(6;0)=0,000064$; d) $P(6;6)=0,26$;

- 27.7. Agar har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,3 ga teng bo'lsa, uning 5 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovning kamida 2 tasida ro'y berish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,472$

- 27.8. Teng kuchli raqibdan to'rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli kattami yoki sakkiztadan beshtasini? Durang natija hisobga olinmaydi.

Javob: $P(4;3)=1/4$; $P(8;5)=7/32$

- 27.9. Fabrikada to'quvchi 1000 ta ip to'pini nazorat qiladi. Bir daqiqa davomida 1 ta to'pda ipning uzilish ehtimoli 0,004. Bir daqiqa davomida 5 ta to'pda ipning uzilish ehtimolini toping.

Javob: 0,1563.

- 27.10. Har bir o'q otishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,001 ga teng. Agar 5000 marta o'q otilgan bo'lsa kamida ikkita o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Javob: $1 - 6e^{-5} \approx 0,9596$

- 27.11. Bir soat davomida ixtiyoriy abonentning kommutatorga qo'ng'iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng. Telefon stansiyasining 800 ta abonent bor. Bir soat davomida 5 ta abonentning kommutatorga qo'ng'iroq qilish ehtimolini toping.

Javob: $8^5 e^{-8/5} \approx 0,0916$

- 27.12. Bir jamoaning 500 a'zosi bor. Ulardan aynan ikkitasining tug'ilgan kuni yangi yil bayramiga to'g'ri kelish ehtimolini toping. Yilning ixtiyoriy bir kunida tug'ilish ehtimoli 1/365 ga teng hisoblansin.

Javob: $\approx 0,2385$.

27.13. Bir soat davomida istalgan abonentning kommutatorga telefon qilish ehtimoli 0,01 ga teng. Telefon stansiyasi 300 abonentga xizmat qiladi. Bir soat davomida 4 ta abonentning telefon qilish ehtimolini toping.

Javob: $P_{300}(4) \approx 0,169$

27.14. Omborga jami 1000 ta detal keltirilgan. Bitta detalning yaroqsiz chiqishi hodisasining ehtimoli $p=0,003$ ga teng. Tasodifan olingan

a) rosa ikkita; b) ikkitadan kam; d) ikkitadan ko'p; e) kamida ikkita detalning yaroqsiz chiqishi hodisasi ehtimolini toping.

Javob: a) $P_{1000}(2) = 0,224$; b) $p = 0,1992$; d) $p = 0,5678$; e) $p = 0,95$.

27.15. Tangani 8 marta tashlab ko'radilar. Bunda "gerbli" tomoni bilan 6 marta tushishi hodisasining ehtimolini toping.

Javob: 7/64

Mavzu yuzasidan nazorat testlari.

1. Bernulli sxemasi uchun quyidagi shartlardan qaysi biri talab etilmaydi?

- A) Barcha sinovlarda A tasodifiy hodisa ehtimolligi $P(A)=p$ o'zgarmas.
- B) Har bir sinov natijasi oldingi sinovlar natijalariga bog'liq emas
- C) Har bir sinov natijasi keyingi sinov natijalariga ta'sir etmaydi.
- D) Barcha sinovlar soni chekli.
- E) Barcha shartlar talab etiladi.

2. Quyidagilardan qaysi biri Bernulli sxemasi orqali ifodalanmaydi?

- A) n ta simmetrik tanga tashlanganda ulardan m tasini gerb tomoni bilan tushishi.
- B) n ta o'yin soqqasi tashlanganda ulardan m tasida 3 ochko chiqishi.
- C) n ta talabaga bir xil test berilganda ulardan m tasini to'g'ri javob berishi
- D) n ta bir xil mahsulot tekshirilganda ulardan m tasini sifatli chiqishi.
- E) Keltirilganlarning barchasi Bernulli sxemasi orqali ifodalanadi.

3. Bog'liqmas sinovlar n marta takrorlanganda ehtimoli $P(A)=p$ bo'lgan A hodisa k marta ro'y berishini ifodalovchi $P_n(m)$ ehtimol uchun Bernulli formulasi qayerda to'g'ri ifodalangan ($q=1-p$).

- A) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.
- B) $P_n(m) = C_n^m q^m p^{n-m}$.
- C) $P_n(m) = C_n^m p^m q^n$.
- D) $P_n(m) = C_n^m p^n q^m$.
- E) $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n+m}$.

4. Bernulli formulasida $P(A)=0,6$ bo'lgan holda $P_4(3)$ ehtimol qiymati nimaga teng bo'ladi?

- A) 0,3456 .
- B) 0,2304 .
- C) 0,1536 .
- D) 0,1228 .
- E) 0,1096 .

5. Simmetrik tanga 10 marta tashlanganda 6 marta raqam tomoni bilan tushish ehtimolini aniqlang.

- A) $C_{10}^6 (0.5)^6$.
- B) $C_{10}^6 (0.5)^4$.
- C) $C_{10}^6 (0.5)^{10}$.
- D) $C_{10}^6 (0.5)^{16}$.
- E) $C_{10}^4 (0.5)^6$.

6. Mahsulot 0.8 ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Tekshirilgan 20 ta mahsulotdan 15 tasi sifatli bo'lish ehtimoli nimaga teng?

- A) $C_{20}^{15} (0.8)^5 (0.2)^{15}$.
- B) $C_{20}^5 (0.8)^5 (0.2)^{15}$.
- C) $C_{20}^{15} (0.8)^{15} (0.2)^{20}$.
- D) $C_{20}^{15} (0.8)^{15} (0.2)^5$.
- E) $C_{20}^5 (0.8)^{15} (0.2)^5$.

7. Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarli katta bo'lganda

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q=1-p)$$

ehtimol uchun Puasson teoremasini ifodalovchi

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

taqribiy formuladagi λ qiymati nimaga teng bo'ladi?

- A) $\lambda=p/n$.
- B) $\lambda=pn$.
- C) $\lambda=p+n$.
- D) $\lambda=p-n$.
- E) $\lambda=p^n$.

8. Partiyadagi $n=1000$ ta mahsulotning har biri $p=0.005$ ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Shu partiyadagi sifatli mahsulotlar soni $m=10$ bo'lishini ifodalovchi $P_{1000}(10)$ ehtimolning taqribiy qiymati Puasson teoremasi orqali qanday ifodalanadi?

- A) $\frac{50^{10}}{10!} e^{-50}$.
- B) $\frac{5^{1000}}{1000!} e^{-5}$.
- C) $\frac{1000^5}{1000!} e^{-5}$.
- D) $\frac{10^5}{5!} e^{-10}$.
- E) $\frac{5^{10}}{10!} e^{-5}$.

9. $n=400$ bog'liqmas sinovlarning har birida o'zgarmas $p=0.0025$ ehtimolga ega bo'lgan A tasodifiy hodisani bu sinovlarda $m=4$ marta ro'y berishini ifodalovchi $P_{400}(4)$ ehtimolning taqribiy qiymatini Puasson teoremasi va $e^{-1}=0.36788$ ekanligidan foydalanib toping.

- A) 0,09197 .
- B) 0,02299 .
- C) 0,01533 .
- D) 0,00276 .
- E) 0,00098 .

10. Transportda tashilayotgan $n=1000$ shisha idishning har biri yo'lda $p=0.001$ ehtimol bilan sinishi mumkin. Yo'lda hech bo'lmaganda bitta shisha idishni sinish ehtimomlining taqribiy qiymatini Puasson teoremasi va $e^{-1} \approx 0.368$ ekanligidan foydalanib toping.

- A) 0,795 .
- B) 0,299 .
- C) 0,453 .
- D) 0,376 .
- E) 0,632 .

28-§. MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL TEOREMALARI

28.1. Muavr – Laplasning lokal teoremasi.

Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ ga teng bo'lgan n ta bog'liqsiz tajribada hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli (n yetarlicha katta bo'lganda) taqriban

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad (28.1)$$

ga teng. Bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlar jadvali – ilovaning 3-jadvalida keltirilgan ($\varphi(-x) = \varphi(x)$ - juft funksiya). (28.1) formula Muavr – Laplasning lokal formulasidir.

1-masala. Korxonada ishlab chiqarilgan detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,005 ga teng. 10 000 ta detaldan iborat partiyadagi yaroqsiz detallar sonining 40 ta bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $n = 10000$;

$$k = 40; \quad p = 0,005; \quad q = 0,995.$$

$n = 10000$ yetarlicha katta son bo'lgani uchun Muavr – Laplasning lokal formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ bu yerda } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 10000 \cdot 0,005}{\sqrt{10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995}} \approx -\frac{10}{7,05} = -1,42.$$

Jadvaldan $\varphi(-1,42) = \varphi(1,42) = 0,1456$ ni topamiz.

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{10000}(40) \approx \frac{1}{7,05} \cdot 0,1456 \approx 0,0206.$$

28.2. Muavr – Laplasning integral formulasi.

Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ ga teng bo'lgan n ta bog'liqsiz tajribada hodisaning kamida k_1 marta ro'y berish ehtimoli (n yetarlicha katta bo'lganda) taqriban

$$P_n(k_1 \leq \mu \leq k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \quad (28.2)$$

ga teng. Bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Laplas funksiyasi bo'lib, bunda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning ($0 \leq x \leq 5$) musbat qiymatlari uchun Laplas funksiyaning qiymatlari jadvali 4 – ilovada keltirilgan. $x > 5$ qiymatlar uchun $\Phi(x) = 0,5$ deb olinadi ($\Phi(x) = -\Phi(x)$, ya'ni $\Phi(x)$ - toq funksiya).

2-masala. Tavakkaliga olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifan olingan 400 ta pilladan 70 tadan 130 tagacha yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Masala shartga ko'ra:

$$p = 0,2; \quad q = 0,8; \quad n = 400; \quad k_1 = 70; \quad k_2 = 130.$$

Muavr – Laplasning integral formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k_1 \leq \mu \leq k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

x' va x'' larning qiymatlarini topamiz:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -\frac{10}{8} = -1,25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{55}{8} = 6,25.$$

Jadvaldan topamiz:

$$\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,39435,$$

$$\Phi(6,25) = 0,5, \text{ chunki } x > 5 \text{ da } \Phi(x) = 0,5.$$

Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{400}(70 \leq \mu \leq 130) \approx \Phi(6,25) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,39435 = 0,89435.$$

Eslatma. Ayrim darsliklarda $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ funksiya o'rniga

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt$ funksiya ishlatiladi. Bu ikki funksiya o'zaro

$\Phi_0(x) = 0,5 + \Phi(x)$ munosabat bilan bog'langan. Muavr-Laplasning integral teoremasini $\Phi_0(x)$ funksiya orqali ham ifodalash mumkin:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$x > 5$ qiymatlarida $\Phi_0(x) = 1$ deb hisoblash mumkin.

Jadvallardan foydalanganda diqqat qiling!

Mustaqil bajarish uchun misollar.

28.1. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, uning 400 ta tajribadan 80 tasida ro'y berish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P_{400}(80) \approx 0,04986$$

28.2. O'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,51 ga teng. Tug'ilgan 100 chaqaloqning 50 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P_{100}(50) \approx 0,04565$$

28.3. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli $p = 0,5$ ga teng bo'lgan 10 000 ta tajriba o'tkaziladi. Shuncha tajribada A hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli sonining ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P_{10000}(5000) \approx 0,007978$$

28.4. Ishchi ayol 800 ta urchuqqa xizmat ko'rsatadi. Δt vaqt oralig'ida har bir urchuqda yigirilayotgan ipning uzilish ehtimolli sonini va bu sonning ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } k_0 = 4, P_{800}(4) = 0,1954$$

28.5. Fakultet studentlarining imtihon komissiyasidan "4" va "5" baholar bilan o'tish ehtimoli 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan 400 studentdan 34 tadan 55 tagacha hech bo'lmaganda bitta fandan "4" dan past baho olish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P_{400}(34 \leq \mu \leq 55) = 0,8351$$

28.6. Hodisaning 2100 ta bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Hodisaning: **a)** kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500 marta; **b)** kamida 1470 marta; **v)** ko'pi bilan 1469 marta ro'y berish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: a) } P_{2100}(1470 \leq \mu \leq 1500) \approx 0,4236; \text{ b) } P_{2100}(1470 \leq \mu \leq 2100) \approx 0,5;$$

$$\text{v) } P_{2100}(0 \leq \mu \leq 1469) \approx 0,5.$$

28.7. O'zaro bog'liq bo'lmagan 625 ta tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,04 dan katta bo'lmashlik ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| < 0,04\right\} = 0,9876$$

28.8. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisa ro'y berish nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,02 dan ortiq bo'lmashligining 0,7698 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish kerak?

$$\text{Javob: } n = 900$$

28.9. Texnik kontrol bo'limi 475 ta buyumning yaroqliligini tekshiradi. Buyumning brak bo'lish ehtimoli 0,05 ga teng. Tekshirilgan buyumlar orasida braklari soni m ning yotadigan chegaralarini 0,9426 ehtimol bilan toping.

$$\text{Javob: } 14 \leq m \leq 32$$

28.10. Birinchi sinfga 200 ta o'quvchi qabul qilinishi kerak. Agar o'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,515 bo'sa, birinchi sinfga qabul qilinganlarning roppa-rosa 100 tasi qiz bola bo'lishining ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } \approx 0,051$$

28.11. Agar hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajriba o'tkazilganda uning aynan 104 marta ro'y berish ehtimolini toping.

$$\text{Javob: } 0,0006$$

28.12. Tasodifiy ravishda 100 ta tanga ustma-ust qilib taxlangan. Ularning ichida «gerb» tomoni tepaga qilib taxlanganlari 45 dan 55 tagacha bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Javob: $\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0,6826$.

28.13. Ishlab chiqarishdagi 1% mahsulot sifatsiz chiqadi. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda olingan 1100 ta mahsulotdan 17 tasining sifatsiz chiqish ehtimoli qancha?

Javob: $\Phi(20/11) - \Phi(-10/3) \approx 0,965$.

28.14. Merganning bitta otishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,75. Agar 100 marta nishonga qarata o'q uzilgan bo'lsa, merganning nishonga

a) kamida 70 va ko'pi bilan 80 marta;

b) ko'pi bilan 70 marta tekkizish ehtimolini toping.

Javob: $p \approx 2\Phi(1,15) = 0,7498$; $p \approx -\Phi(1,15) + 0,5 = 0,1251$.

28.15. 2100 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Quyidagi xodisalar ehtimolliklarni toping:

a) kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500 marta;

b) kamida 1470 marta;

d) ko'pi bilan 1469 marta ro'y beradi.

Javob: a) 0,4236; b) 0,5; d) 0,5.

28.16. n ta tajribaning har birida ijobiy natija olish ehtimoli 0,9 ga teng. 0,98 ga teng ehtimollik bilan kamida 150 ta tajribaning ijobiy natija berishi uchun nechta tajriba o'tkazish kerak?

Javob: $n=177$.

Mavzu yuzasidan nazorat testlari.

1. Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarli katta bo'lganda

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q=1-p)$$

ehtimol uchun Muavr–Laplasning lokal teoremasini ifodalovchi

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

taqribiy formuladagi $\varphi(x)$ funksiya qaysi javobda to'g'ri ifodalangan?

A) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2/2)$. B) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(x^2/2)$.

C) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. D) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 10^{-x^2/2}$.

E) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln(x^2/2)$.

2. Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarli katta bo'lganda

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q=1-p)$$

ehtimol uchun Muavr–Laplasning lokal teoremasini ifodalovchi

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

taqribiy formuladagi x qiymati nimaga teng bo'ladi?

A) $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. B) $x = \frac{n-mp}{\sqrt{npq}}$. C) $x = \frac{m+np}{\sqrt{npq}}$.

D) $x = \frac{n+mp}{\sqrt{npq}}$. E) $x = \frac{mp-nq}{\sqrt{npq}}$.

3. $n=600$ bog'liqmas sinovlarning har birida o'zgarish $p=0,6$ ehtimolga ega bo'lgan A tasodifiy hodisani bu sinovlarda $m=372$ marta ro'y berishini ifodalovchi $P_{600}(372)$ ehtimolning taqribiy qiymatini Muavr-Laplasning lokal teoremasi va $\varphi(1)=0,242$ ekanligidan foydalanib toping.

A) 242/5553 . B) 121/4000 . C) 242/4557 .

D) 121/6000 . E) 6/25.

4. Partiyadagi $n=2100$ ta mahsulotning har biri $p=0,7$ ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Bu partiyadagi sifatli mahsulotlar soni $m=1491$ ta bo'lishini ifodalovchi $P_{2100}(1491)$ ehtimolning taqribiy qiymatini Muavr-Laplasning lokal teoremasi va $\varphi(1)=0,242$ ekanligidan foydalanib toping.

A) 0,0115. B) 0,0195. C) 0,0015. D) 0,0095 E) 0,1195.

5. Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarli katta bo'lganda

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q = 1 - p)$$

ehtimol uchun Muavr-Laplasning integral teoremasini ifodalovchi

$$P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1, 2,$$

taqribiy formuladagi $\Phi(x)$ funksiya qaysi javobda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin(t^2/2) dt.$ B) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos(t^2/2) dt.$

C) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$ D) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ln(t^2/2) dt.$

E) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x 10^{-t^2/2} dt.$

6. Bernulli sxemasida sinovlar soni n yetarli katta bo'lganda

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q = 1 - p)$$

ehtimol uchun Muavr-Laplasning integral teoremasini ifodalovchi

$$P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

taqribiy formuladagi $x_i, i=1,2$ qiymatlari qanday aniqlanadi?

A) $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}.$

B) $x_i = \frac{n - m_i p}{\sqrt{npq}}.$

C) $x_i = \frac{m_i + np}{\sqrt{npq}}.$

D) $x_i = \frac{n + m_i p}{\sqrt{npq}}.$

E) $x_i = \frac{m_i p - nq}{\sqrt{npq}}.$

7. Ehtimoli $p=0,8$ bo'lgan A tasodifiy hodisaning $n=400$ ta bog'liqmas kuzatuvlardagi ro'y berishlar soni 310 dan kam emas va 340 dan ortiqmas bo'lish ehtimoli $P_{400}(310, 340)$ ning taqribiy qiymati Muavr-Laplasning integral teoremasi yordamida topilsin. Bunda $\Phi(1,25)=0,3944$, $\Phi(2,5)=0,4938$ ekanligidan foydalaning.

A) 0,0994. B) 0,8882. C) 0,7856. D) 0,0485. E) 0,2458.

8. Partiyadagi $n=900$ mahsulotning har biri $p=0,8$ ehtimol bilan sifatli bo'lishi mumkin. Bu partiyadagi sifatli mahsulotlar soni 735 dan kam emas va 750 dan ortiqmas bo'lish ehtimoli $P_{900}(735, 750)$ ning taqribiy qiymati Muavr-Laplasning integral teoremasi yordamida topilsin. Bunda $\Phi(1,25)=0,3944$, $\Phi(2,5)=0,4938$ ekanligidan foydalaning.

A) 0,0994. B) 0,8882. C) 0,7856. D) 0,0485.

E) 0,2458.

29-§. TASODIFIY MIQDOR VA UNING TAQSIMOT QONUNI

29.1. Tasodifiy miqdorlar.

O'zining turli qiymatlarini tasodifga bog'liq ravishda qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorlar *tasodifiy miqdorlar* deyiladi va X , Y , Z kabi bosh harflar bilan belgilanadi. Tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar uning *mumkin bo'lgan qiymatlari* deb ataladi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda chiqqan ochko (X), tasodifiy tanlangan sonning kasr qismi (Y) - tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Tasodifiy miqdorlar diskret va uzluksiz bo'lishi mumkin.

Mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki sanoqli to'plamni tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlar *diskret* deb ataladi.

Misollar:

1. O'yin soqqasini bir marta tashlaganda tushadigan ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'lib, uning qiymatlar to'plami $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan iborat.
 2. Bir sutka davomida Toshkent shahrida tug'ilgan chaqaloqlar soni (60, 75, 58, ...) ma'lum bir sonlar oralig'ida musbat butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
 3. Berilgan partiyadagi yaroqsiz mahsulotlar soni (4, 5, 2, 3, ...) noldan to partiyadagi mahsulotlarning umumiy soniga teng bo'lganga qadar butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
 4. Nishonga birinchi marta tekkizguncha o'q otishlar soni (1, 5, 3, ...) barcha natural sonlar to'plamidan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
 5. Artilleriya snaryadining uchish masofasi (2, 5—3 km.) ma'lum bir musbat sonlar oralig'ida qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
 6. Bir oy davomida qoramol massasining ko'payishi (-0,5kg, ... 5,2 kg) ma'lum bir sonlar oralig'ida qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
- Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarni chekli yoki (sanoqli) cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga *diskret tasodifiy miqdor* deyiladi (1—3 misollar). Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi (4—5 misollar).

29.2. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni jadval, formula va grafik ko'rinishda berilishi mumkin.

Agarda X diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, uning mumkin bo'lgan qiymatlarini $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ kabi belgilab chiqish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan misoldagi X - diskret tasodifiy miqdor bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1=1, x_2=2, \dots, x_6=6$ chekli to'plamni tashkil etadi.

X diskret tasodifiy miqdorni to'la aniqlash uchun faqat uning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ qiymatlarini bilish kifoya bo'lmasdan, shu qiymatlarning

$$P\{X=x_1\} = p_1, \quad P\{X=x_2\} = p_2, \dots, \quad P\{X=x_n\} = p_n, \dots$$

Ehtimolliklarini formula ko'rinishini ham bilish zarurdir. Bu holda X diskret tasodifiy miqdorni ushbu

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

(29.1)

jadval ko'rinishida aniqlash mumkin. Bu yerda

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$$

(29.2)

shart bajarilishi kerak. Bu shart (29.1) jadvalning birinchi satrida X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari keltirilganligini ifodalaydi.

Ta'rif: (29.2) shartni qanoatlantiruvchi (29.1) jadval X diskret tasodifiy miqdorning *taqsimot qonuni* deyiladi.

Masalan, simmetrik tanga ikki marta tashlanganda uning gerb tomoni bilan tushishlar sonini X deb olaylik. Bu holda X tasodifiy miqdor bo'ladi. Uning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1=0, x_2=1, x_3=2$ chekli to'plam bo'lgani uchun X diskret tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu qiymatlarning ehtimolliklarini klassik ta'rif yordamida topish mumkin. Bunda barcha natijalar soni $n=4$ va x_1, x_2 va x_3 uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar soni $m_1=1, m_2=2, m_3=1$ bo'lgani uchun

$$P\{X=0\} = \frac{1}{4} = 0,25, \quad P\{X=1\} = \frac{2}{4} = 0,5, \quad P\{X=2\} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Demak, ko'rilyotgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

(29.3)

ko'rinishda bo'lib, (29.2) shart

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,25 + 0,5 + 0,25 = 1$$

bajariladi.

Diskret X tasodifiy miqdor to'g'risidagi barcha ma'lumotni

$$F(x) = P\{X < x\}, \sum_{x_i < x} p_i, x \in (-\infty, \infty) \quad (29.4)$$

funksiya orqali ham berish mumkin.

Bu yerda x_i ning x dan kichik bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari yig'indisi olinadi.

$y = F(x)$ funktsiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deyiladi.

Ehtimollikning xossaligidan foydalanib, $F(x)$ taqsimot funktsiyasining quyidagi uchta asosiy xossasini isbotlash mumkin:

I. Ixtiyoriy $x \in (-\infty, \infty)$ uchun $0 \leq F(x) \leq 1$,

II. $y = F(x)$ kamaymovchi funktsiya, ya'ni $\forall x_1 < x_2$ uchun $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'ladi.

III. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Yuqorida ko'rib o'tilgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini topamiz:

$$a) x \leq 0 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X < 0\} = P(\emptyset) = 0;$$

$$b) 0 < x \leq 1 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} = 0,25;$$

$$c) 1 < x \leq 2 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0,25 + 0,5 = 0,75;$$

$$d) x > 2 \Rightarrow F(x) = P\{X < x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = P(\Omega) = 1.$$

Bu misoldan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi uzlukli, pog'onasimon (zinapoyasimon) bo'lishi kelib chiqadi. Bu funktsiyaning uzilish nuqtalari X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini, shu nuqtalardagi sakrashlari esa bu qiymatlarning ehtimolliklarini ifodalaydi.

X diskret tasodifiy miqdorning $[a; b]$ oraliqda qiymat qabul qilish ehtimoli $P(a \leq X \leq b)$ quyidagicha hisoblanadi:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i$$

Mumkin bo'lgan qiymatlari biror chekli yoki cheksiz (a, b) oraliqni to'la qoplaydigan X tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

Masalan, tasodifiy tanlangan sonning kasr qismini ifodalovchi Y tasodifiy miqdor uzluksiz bo'lib, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $[0, 1)$ yarim oraliqni qoplaydi.

Uzluksiz X tasodifiy miqdorni (1) taqsimot qonuni orqali aniqlab bo'lmaydi, chunki uning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqsiz bo'lib, ularni natural sonlar bilan belgilab chiqib bo'lmaydi. Bundan tashqari $\forall x \in (a, b)$ mumkin bo'lgan qiymatning ehtimolligi $p_x = P\{X = x\} = 0$ bo'ladi. Ammo uzluksiz X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funktsiyasini (4) munosabat bilan aniqlash mumkin va bu funktsiya uzluksiz tasodifiy miqdor to'g'risida to'liq ma'lumotni o'z ichiga oladi. Bu holda uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamida taqsimot funktsiyasi $F(x)$ uzluksiz bo'lishini ko'rsatish mumkin va shu sababli uning hosilasi to'g'risida so'z yuritish mumkin.

Agarda $F(x)$ taqsimot funktsiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ X tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deyiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $f(x)$ zichlik funktsiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlangandir.

Har qanday $f(x)$ zichlik funktsiyasi quyidagi ikkita asosiy xossaga ega:

$$I. f(x) \geq 0, x \in (-\infty, \infty); \quad II. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Masalan, tasodifiy ravishda tanlangan sonning kasr qismini ifodalovchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \in [1, \infty) \end{cases} \quad (5)$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin va bu funktsiya yuqoridagi ikkita shartni qanoatlantiradi.

1-masala. X diskret tasodifiy miqdor ushbu

X	-1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

taqsimot qonuni bilan berilgan. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Ravshanki, $\forall x \in (-\infty, -1)$ uchun $F(x)=0$, chunki bu holda $X < x$ hodisa mumkin bo'lmagan hodisadir. Endi $-1 < x < 3$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (-1, 3]$ uchun

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0,2; \quad 3 < x \leq 5 \text{ bo'lganda } \forall x \in (3, 5] \text{ uchun}$$

$$F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 3) = 0,2 + 0,5 = 0,7; \quad x > 5$$

bo'lganda esa $F(x) = P(X < x) = 1$ bo'ladi. Chunki $\forall x > 5$ uchun $X < x$ hodisa ishonchli hodisa bo'ladi. Bu taqsimot funksiyasining analitik ifodasi quyidagicha bo'ladi.

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -1 \\ 0,2; & -1 < x \leq 3 \\ 0,7; & 3 < x \leq 5 \\ 1; & x > 5. \end{cases}$$

Tasodifiy miqdor X o'zining taqsimot qonuni yoki taqsimot funksiyasi yoki zichlik funksiyasi bilan berilganda u to'liq aniqlangan bo'ladi. Ba'zi hollarda X tasodifiy miqdor to'g'risida bunday to'liq ma'lumot kerak bo'lmasdan, uning ma'lum bir xususiyatlarini ifodalovchi sonli xarakteristikalarini bilish kifoyadir. Masalan, X biror tarmoq xodimlarining ish haqini ifodalovchi tasodifiy miqdor bo'lsa, uning har bir xodim uchun qiymatlarini bilish shart bo'lmasdan, barcha xodimlar bo'yicha o'rta qiymatini bilish yetarlidir.

29.3. Binomial taqsimot.

Aytaylik, n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi o'tkazilganida biror A hodisa ro'y berishi yoki bermasligi mumkin. A ning ro'y berish ehtimoli p tajribadan tajribaga o'zgarmas bo'lib qoladi. Teskari hodisaning ehtimoli esa $q = 1 - p$ ga teng. Tajribalarning o'zaro bog'liq emasligi har bir tajribada A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi qolgan tajribalar natijalariga bog'liq emasligini bildiradi.

X diskret tasodifiy miqdor n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro'y berishlari soni, p esa A hodisaning ehtimoli bo'lsin, ya'ni avval ko'rib o'tilgan Bernulli sxemasi o'rinli bo'lsin. Ana shu tasodifiy miqdor n va p parametrlari *binomial taqsimot* qonuniga bo'ysunadi:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

2-masala. Bir shaharda 30% aholi ish joyiga shaxsiy avtotransportida borishni afzal ko'radi. Tasodifiy ravishda 8 ta odam tanlab olindi. X — shaxsiy avtomobilni afzal ko'radiganlar soni. Uning taqsimot qonunini toping.

Yechish. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, ..., 8; ularga mos kelgan ehtimolliklar $P(X=k)$ quyidagi Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi:

$$P(X = k) = P_8(k) = C_8^k \cdot (0,3)^k \cdot (0,7)^{8-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

29.4. Puasson taqsimot qonuni.

Puasson taqsimoti ko'pincha ma'lum vaqt oralig'ida yoki uzunlik (yuza, hajm) oralig'ida hodisaning ro'y berishlar soni ustida gap borganda va ehtimollik juda kichik bo'lganda ishlatiladi. Masalan: 10 daqiqa davomida telefon stansiyasiga qilingan qo'ng'iroqlar soni; bir soat davomida yoqilg'i quyish stansiyasiga kelgan mashinalar soni; 100 km uzunlikka ega bo'lgan suv quvuridagi nosozliklar soni; ma'lum hududdagi bir hafta davomida ro'y bergan yo'l transport hodisalari soni va h.k;

Puasson taqsimoti bilan taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., k, ... qiymatlarni

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu yerda $\lambda = np$. n — tajribalar soni, p hodisaning ehtimoli.

3-masala. Bankka tashrif qiluvchi shaxslar soni Puasson taqsimotiga bo'ysunadi. O'rta hisobda bankka har 3 daqiqada bir mijoz kirar ekan.

a) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka bir mijoz kirishi ehtimolini toping.

b) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka kamida uch kishi kirish ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra o'rta hisobda bankka har 3 daqiqada bir mijoz kirar ekan. Puasson taqsimoti uchun matematik kutulish λ parametrga teng ekanligini hisobga olsak, $\lambda = 1/3$ ekanligini

hosil qilamiz.

a) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka bir mijoz kirishi ehtimolini topamiz:

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1/3}}{3} = 0,2388.$$

b) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka kamida uch kishi kirish ehtimolini topish uchun teskari hodisa, ya'ni ko'pi bilan ikki kishi kirish ehtimolini topamiz:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} \right) = e^{-1/3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \right) = 0,9951:$$

Izlanayotgan ehtimollik:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,9951 = 0,0048.$$

Javob: a) 0,2388; b) 0,0048.

4-masala. Radioapparat 1000 ta elementdan tashkil topgan. Bir yil davomida bitta elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng va qolgan elementlarning holatiga bog'liq emas. Ikkita hamda kamida ikkita elementning ishdan chiqish ehtimollarini toping.

Yechish: X — ishdan chiqqan elementlar sonini bildiruvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega. $n=1000$ — sinovlar soni katta, bitta elementning ishdan chiqish hodisaning ro'y berish ehtimoli esa yetarlicha kichkina $p=0,001$ bo'lgani uchun binomial taqsimotni Puasson taqsimoti yordamida taqribiy hisoblash mumkin. U holda Puasson taqsimotiga ko'ra:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = 1000 \cdot 0,001 = 1$$

va

1) roppa-rosa ikkita elementning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P(X = 2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2e} = 0,184.$$

2) kamida ikkita elementning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1)) \approx 1 - e^{-2}(1 + \lambda) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264.$$

$$Javob: P(X = 2) \approx 0,184. P(X \geq 2) \approx 0,264.$$

Mustaqil bajarish uchun misollar

29.1. Kompaniya o'zining moliyaviy hisoblarini tekshirib boradi va buxgalteriya hisoblarini tekshirish uchun muntazam ravishda auditorlar xizmatidan foydalanadi. Faraz qilaylik, kompaniya xizmatchilari hisoblarni tekshirishda 5% xatoga yo'l qo'yadilar. Auditor tasodifiy ravishda 3 ta hujjatni tanlab oladi.

a) X tasodifiy miqdor, ya'ni auditor topgan xatolar sonining taqsimot qonunini toping.

b) Taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini yasang.

d) Auditor bittadan ziyod xato topishi ehtimolini toping.

$$Javob: a) P(0)=0,857375; P(1)=0,135375; P(2)=0,007125; P(3)=0,000125; d) 0,00725.$$

29.2. Soliq nazoratiga «A» firma ro'yxatdagi tarkibining 20% «mavhum jonlar» ekanligi haqida ma'lumot tushdi. Tekshiruvchi nazoratchi tasodifiy ravishda bajarilgan ishlar to'g'risidagi hujjatning 4 tasini tanlab oladi va unda ko'rsatilgan ishchilarni qidira boshlaydi. Tasodifan olingan hujjatlar orasida birorta ham qalbakisi bo'lmazligi ehtimoli qanday? Hech bo'lmaganda bitta qalbakisi bo'lishi-chi?

$$Javob: 0,4096; 0,5904.$$

29.3. 100 ta lotareya bileti chiqarilgan. O'yinga 1 ta 5000 so'mlik, 10 ta 1000 so'mlik yutuq qo'yilgan. Bitta lotareya bileti egasi uchun X tasodifiy yutuq qiymatining taqsimot qonunini toping.

$$Javob: X: \begin{matrix} 0 & 1000 & 5000 \\ p: 0,89 & 0,1 & 0,01. \end{matrix}$$

29.4. Uchta tanga tashlanmoqda. «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar sonini bildiruvchi X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

$$Javob: X: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p: 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8. \end{matrix}$$

29.5. 10 ta detal ichida 8 ta nostandarti bor. Tasodifiy ravishda 2 ta detal tanlab olindi. Tanlab olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Javob: X 0 1 2
P 1/45 16/45 28/45.

29.6. Tangani 5 marta tashlash tajribasi berilgan. X tasodifiy miqdor tanganing raqamli tomonining tushishlari sonidan iborat bo'lsin. Uning taqsimot qonuni topilsin.

Javob: X 0 1 2 3 4 5
P 1/32 5/32 10/32 10/32 5/32 1/32.

29.7. X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuniga ega:

X -2 1 4
P 0,5 0,35 0,15

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Javob: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -2 & \text{bo'lsa,} \\ 0,5 & \text{agar } -2 < x \leq 1 & \text{bo'lsa,} \\ 0,85, & \text{agar } 1 < x \leq 4 & \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 4 & \text{bo'lsa.} \end{cases}$

29.8. «Dengi» jurnali 1990 yilda Rossiya bozorida investitsiyalardan qaytish Amerika bozoridagi xuddi shunday investitsiyalardagidan ancha yuqori bo'lishi kutilganini e'lon qildi. Rossiya bozoriga investitsiyalar qilish bo'yicha maslahatchi ana shunday loyihalardan biriga investitsiyadan qaytishning taqsimoti (yiliga % hisobida) quyidagicha ko'rinishga ega:

x_i	9	10	11	12	13	14	15
$P(X=x_i)=p_i$	0,05	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05

- a) Haqiqatan ham taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;
b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;
d) Investitsiyalarning qaytishi hech bo'lmaganda 12% ni tashkil etish ehtimolini toping.

Javob: d) 0,5.

29.9. Ma'lum bir portga kuniga boshqa shaharlardan yuk ortish uchun keladigan kemalar soni quyidagi jadval bilan berilgan X tasodifiy miqdordan iborat:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

- a) Haqiqatan ham taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;
b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;
d) Taqsimot funksiyasi $\Phi(x)$ dan foydalanib, ma'lum kunda 1 tadan 4 tagacha (1 va 4 ham kiradi) yuk kemalari kelish ehtimolini toping.
e) Agar ma'lum kunlari 3 tadan ortiq kema kelsa, qo'shimcha ishchi kuchi yollash uchun zarur bo'ladigan xarajatlarni port o'z zimmasiga oladi. Biror belgilangan kunda port qo'shimcha xarajatlar qilishiga to'g'ri kelishi ehtimolini toping.
f) Faraz qilaylik, turli kunlarda keladigan kemalar soni o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Bu kemalarning hech biri haftaning 5 ishchi kuni davomida portga kirmasligi ehtimolini toping.
g) Har xil kunlarda yuk ortishga keluvchi kemalar soni o'zaro bog'liq emas deb faraz qilib, port ketma-ket ikki kun davomida qo'shimcha xarajat qilishi ehtimolini toping.

Javob: d) 0,8; c) 0,2; f) 0,00001; g) 0,04.

29.10. Kotibaning bir betlik matnda yo'l qo'yadigan xatolari soni quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdordan iborat bo'lsin:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)=p_i$	0,01	0,09	0,3	0,2	0,2	0,10	0,10

- a) taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;
b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;
d) taqsimot funksiyasi $\Phi(x)$ dan foydalanib, kotiba bir betlik matnda ikkitadan ziyod xatoga yo'l qo'yishi ehtimolini toping;
e) kotiba bir betda ko'pi bilan 4 ta xatoga yo'l qo'yishi ehtimolini toping.

Javob: d) 0,6; e) 0,8.

29.11. Televizion ko'rsatuvda bosh og'rishiga qarshi yangi davo vositaning reklamasini ko'rgandan so'ng uni sotib olganlar foizi quyidagicha aniqlangan tasodifiy miqdordan iborat:

x_i	0	10	20	30	40	50
$P(X=x_i)=p_i$	0,10	0,20	0,35	0,20	0,10	0,05

- a) taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;
 b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;
 d) $\Phi(x)$ dan foydalanib, reklamani ko'rgan 20% dan ortiq kishi bosh og'rishiga qarshi yangi vositani sotib olishi ehtimolini toping.

Javob: d) $P(X > 20) = 0,35$.

- 29.12. Ishlab chiqarilgan 25 ta mahsulotning 6 tasi sifatsizligi ma'lum bo'lsa, tasodifan tanlab olingan 3 ta mahsulot orasidagi X sifatsizlari sonining taqsimot qonunini toping.

Javob: $X: 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$
 $p: 0,42 \quad 0,458 \quad 0,12 \quad 0,01$.

- 29.13. Ikkita shoshqol (o'yin kubigi) ikki marta tashlanmoqda. Ularning ikkalasida ham juft ochkolar tushishlar sonidan iborat bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob: $X: 0 \quad 1 \quad 2$
 $p: 9/16 \quad 6/16 \quad 1/16$.

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

1. Binomial taqsimot ifodalangan javobni toping.

A) $P\{X=k\} = pq^{k-1}$. B) $P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

C) $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. D) $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

E) $P\{X=k\} = C_{r+k-1}^{r-1} p^r q^k$.

2. $P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotdagi p va q orasidagi bog'lanish qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $p^2 + q^2 = 1$. B) $pq = 1$. C) $p + q = 1$. D) $p + q + pq = 1$. E) $p + q - pq = 1$.

3. $P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotdagi p va q uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o'rinli emas?

A) $p + q = 1$. B) $|p| + q = p + |q| = 1$. C) $|p + q| = 1$. D) $|p| + |q| = 1$.

E) Barcha tengliklar o'rinli.

4. Parametrlari $n=4$ va $p=0,8$ bo'lgan binomial taqsimotga ega X tasodifiy miqdor uchun $P\{X=2\}$ ehtimol qiymatini hisoblang.

A) 0,2432. B) 0,3286. C) 0,1536.

D) 0,4354. E) 0,0784.

5. Puasson taqsimoti ifodalangan javobni toping.

A) $P\{X=k\} = pq^{k-1}$. B) $P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

C) $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. D) $P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

E) $P\{X=k\} = C_{r+k-1}^{r-1} p^r q^k$.

6. $P(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ Puasson taqsimotida λ parametr qaysi shartni qanoatlantiradi?

A) $\lambda \leq 0$. B) $\lambda \geq 0$. C) $\lambda < 0$. D) $\lambda > 0$. E) $\lambda \neq 0$.

7. X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funksiyasi qaysi formula bilan aniqlanadi?

A) $F(x) = P\{X > x\}$. B) $F(x) = 1 + P\{X > x\}$. C) $F(x) = 1 - P\{X < x\}$.

D) $F(x) = P\{X < x\}$. E) $F(x) = P\{X = x\}$.

8. Diskret X tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni orqali berilgan:

x_i	-1	3	8
p_i	0,3	0,5	0,2

Bu tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

A) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0,3, & -1 \leq x < 3 \\ 0,5, & 3 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$ B) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0,5, & -1 \leq x < 3 \\ 0,8, & 3 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$

C) $F(x) = \begin{cases} 0,3, & x < -1 \\ 0,5, & -1 \leq x < 3 \\ 0,8, & 3 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$ D) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0,3, & -1 \leq x < 3 \\ 0,8, & 3 \leq x < 8 \\ 1, & x \geq 8 \end{cases}$

$$E) F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.3, & -1 \leq x < 3 \\ 0.5, & 3 \leq x < 8 \\ 0.8, & x \geq 8 \end{cases}$$

9. Ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasi uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o'rinli emas?

A) $F(x)$ – kamaymovchi funksiya. B) Ixtiyoriy x uchun $0 \leq F(x) \leq 1$.

C) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. D) $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

E) $F(x)$ – uzluksiz funksiya.

10. Ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasi uchun $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ qiymati nimaga teng?

A) $-\infty$. B) -1 . C) 0 . D) 1 . E) aniqlanmagan.

11. Ixtiyoriy $F(x)$ taqsimot funksiyasi uchun $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ qiymati nimaga teng?

A) $-\infty$. B) -1 . C) 0 . D) 1 . E) aniqlanmagan.

12. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ orqali $P\{a \leq X < b\}$ ehtimol qanday topiladi?

A) $P\{a \leq X < b\} = F(a)F(b)$. B) $P\{a \leq X < b\} = F(a) + F(b)$.

C) $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$. D) $P\{a \leq X < b\} = F(a) - F(b)$.

E) $P\{a \leq X < b\} = F(a) + F(b) - F(a)F(b)$.

13. X tasodifiy miqdor ushbu $F(x)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ (x+2)/7, & -2 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

$P\{-3 \leq X < 4\}$ ehtimol qiymati nimaga teng?

A) $2/7$. B) $3/7$. C) $4/7$. D) $5/7$. E) $6/7$.

14. X tasodifiy miqdor ushbu $F(x)$ taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ (x+2)/7, & -2 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

$P\{-1 \leq X < 3\}$ ehtimol qiymati nimaga teng?

A) $2/7$. B) $3/7$. C) $4/7$. D) $5/7$. E) $6/7$.

30.3. Diskret tasodifiy miqdorning binomial va Puasson taqsimoti

1. Diskret tasodifiy miqdorning binomial taqsimoti uchun

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

2. Puasson taqsimoti uchun:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda.$$

30.4. O'rtacha kvadratik chetlanish.

Agarda X biror narsani massasini ifodalab, uning o'lchov birligi kilogramm (kg) bo'lsa, dispersiya o'lchovi kg^2 bo'lib, ma'nosiz bo'ladi. Shu sababli bunday paytlarda $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ formula bilan aniqlanadigan va o'rtacha kvadratik chetlanish deb ataladigan ko'rsatgichdan foydalaniladi.

1-masala. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

X ning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Ushbu

$$DX = M(X)^2 - [M(X)]^2$$

formuladan foydalanamiz.

X ning matematik kutilishini topaylik:

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,3 = 5,3.$$

Endi X^2 ning taqsimot qonunini yozamiz:

X^2	1	9	36	64
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Shu X^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,3 = 34,7$$

bo'ladi. Demak, X ning dispersiyasi quyidagicha:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 34,7 - (5,3)^2 = 5,61.$$

Izlanayotgan o'rtacha kvadratik chetlanishni topsak,

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5,61} \approx 2,37 \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

2-masala. O'zaro bog'lanmagan X , Y tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari mos holda $D(X)=4$, $D(Y)=7$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=5X+3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'lanmaganligi sababli $5X$ va $3Y$ tasodifiy miqdorlar ham o'zaro bog'lanmagan.

Dispersiyaning xossaligidan foydalanib (O'zaro bog'lanmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi qo'shiluvchilarning dispersiyalari yig'indisiga teng; O'zgaras ko'paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin) ushuni topamiz:

$$D(Z) = D(5X+3Y) = D(5X) + D(3Y) = 25D(X) + 9D(Y) = 25 \cdot 4 + 9 \cdot 7 = 163.$$

Mustaqil bajarish uchun misollar

30.1. 2 ta o'yin kubigi bir marta tashlanganda chiqadigan ochkolar ko'paytmasining matematik kutilishi topilsin.

$$\text{Javob: } M(x \cdot y) = 12,25$$

30.2. Avvalgi masala shartlarida yig'indining matematik kutilishi topilsin.

$$\text{Javob: } M(x+y) = M(x) + M(y) = 7$$

30.3. Qutida 5 ta shar bo'lib, ulardan 2 tasi oq va 3 tasi esa qora rangda. Tavakkaliga qutidan ikkita shar olindi. X -tasodifiy miqdor oq shar chiqish soni taqsimotining matematik kutilishi topilsin.

$$\text{Javob: } M(x) = \frac{4}{5}$$

30.4. Avvalgi masala shartlarida X tasodifiy miqdorning dispersiyasi hisoblansin.

$$\text{Javob: } D(x) = \frac{9}{25}$$

30.5. Diskret 2 ta erkli tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

XY -ko'paytmasining matematik kutilishini toping.

$$\text{Javob: } 1,53$$

30.6. X -tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = 2,2$

30.7. 10 ta detaldan iborat to'plamda 3 ta nostandart detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X -diskret tasodifiy miqdor, olingan 2 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining matematik kutilishini toping.

Javob: $M(X) = \frac{3}{5} = 0,6$

30.8. Geolog safardan qayta turib, tog'dan 6 ta namuna olib keldi. Shulardan 4 tasida izlanayotgan metal qotishmasi bor. Tavakkaliga 3 ta namuna tanlandi. X -diskret tasodifiy miqdor olingan namunalar orasida izlanayotgan metal qorishmasi borligi soni taqsimotining o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = 0,4$

X	0	1	2	3
p	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

30.9. X -diskret tasodifiy miqdor faqat 2 ta mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatlarga ega, shu bilan birga $x_1 < x_2$, X tasodifiy miqdorning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 ga teng. $M(X) = 2,6$ ni o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X) = 0,8$ ni bilgan holda, X ning taqsimot qonuni topilsin.

Javob: $x_1 = 1; x_2 = 3$ $p_1 = 0,2; p_2 = 0,8$

30.10. X diskret tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan $x_3 = 3, x_1, x_2$ qiymatlarga ega shu bilan birga $x_1 < x_2 < x_3$ X ning x_3 va x_2 qiymatlarini qabul qilish ehtimoli mos ravishda 0,5 va 0,4 ga teng. X miqdorning matematik kutilishi $M(X) = 2,4$ va dispersiyasi $D(X) = 0,44$ ni bilgan holda uning taqsimot qonunini toping.

Javob:

X	1	2	3
p	0,1	0,4	0,5

30.11. Sinov paytida biror detalning buzilish ehtimoli 0,3 ga teng. Sinov paytida kuzatilgan 20 ta detaldan ishdan chiqqan detallar sonining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(X) = 6$

30.12. Har bir tajribada biror qurilmadagi elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor-elementning 5 ta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = \frac{9}{20}$

30.13. Bir korxona yangi mahsulot ishlab chiqarish maqsadida korxonani ta'mirlash va kengaytirishni rejalashtirgan. Rahbariyat kelajak ahvolni tahlil qilgan holda katta va o'rtacha xarajatlarni ko'zda tutuvchi ikki loyihadan birini tanlashi zarur. Muammo shundan iboratki, korxona ishlab chiqarmoqchi bo'lgan yangi mahsulotga talab yaxshi o'rganil- magan. Talab past, o'rtacha va yuqori bo'lishi mumkin. Ehtimolliklar mos ravishda 0,2, 0,5 va 0,3 ga teng. X shartli ming pul birligidan daromadni bildirsin. Korxona katta va o'rtacha xarajatli loyihalar uchun quyidagi daromadlarni rejalashtirgan:

	Katta xarajatlardagi daromad		O'rtacha xarajatlardagi daromad	
	X	P(X)	X	P(X)
Talab				
Past	0	0,2	50	0,2
O'rtacha	100	0,5	150	0,5
Yuqori	300	0,3	200	0,3

a) Ikki turdagi loyiha uchun kutilayotgan o'rtacha daromadni hisoblang. Bo'lajak daromadni maksimallashtirish uchun korxona qanday yechimni tanlashi kerak?

b) Ikki turdagi loyiha uchun daromad dispersiyasini hisoblang. Noaniqlikni minimallashtirish uchun korxona qanday yechimni tanlashi kerak?

Javob: a) $M(X) = 145; 140$; b) $D(X) = 2725; 12400$.

30.14. Tavakkalga asoslangan qandaydir biznes uchun daromad taxminan ming shartli pul birligiga teng va quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_i	-2000	-1000	0	1000	2000	3000
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Izoh: -2000, -1000 kamomadni bildiradi.

- a) Bu biznesdan ehtimoli eng katta bo'lgan pul daromadi nimaga teng?
 b) Ehtimollik nuqtaiy nazaridan bu tavakkalchilik o'zini oqlaydimi? Tushuntirib bering.
 d) Biznesdan uzoq muddatga mo'ljallangan o'rtacha daromad nimaga teng?

Javob: d) 800.

30.15. Agar x va y tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, $D(X)=12$ va $D(Y)=7$ ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=5X-4Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: $D(Z)=412$

30.16. 3 ta erkli sinovlar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisasi 0,4 ehtimol bilan ro'y bersin. X tasodifiy miqdor A hodisaning ro'y berish sonining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(X)=1,2$

30.17. Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa, $M(X)=5$; $M(Y)=3$; $Z=4X-2Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Javob: $M(Z)=14$

30.18. Agar 3 ta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=0,6$ bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidaniborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(X)=0,48$

30.19. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Agar x ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,8 ga, matematik kutilishi 2,6 ga, dispersiyasi esa 0,64 ga teng bo'lsa, x ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P(x=x_1)=0,2$

30.20. X tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan qiymatlar $x_1 < x_2 < x_3$ qabul qiladi. X ning x_2 va x_3 qiymatlarni qabul qilish ehtimollari mos

ravishda 0,2 va 0,5 ga teng. Matematik kutilishi esa 3,2 va dispersiyasi 0,76 ga teng bo'lsa, X ning taqsimot qonuni topilsin.

Javob:

X	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

Mavzu yuzasidan nazorat testlari

- $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotli X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(X)$ qaysi formula bilan hisoblanadi?
 A) $M(X)=nq$. B) $M(X)=npq$. C) $M(X)=np$.
 D) $M(X)=n/p$. E) $M(X)=n/q$.
- $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotli X tasodifiy miqdorning $D(X)$ dispersiyasini hisoblash formulasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?
 A) $D(X)=nq$. B) $D(X)=npq$. C) $D(X)=np$.
 D) $D(X)=n/p$. E) $D(X)=n/q$.
- $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotda matematik kutilish $M(X)=8$ va dispersiya $D(X)=4,8$ bo'lsa, n parametrlarning qiymati nimaga teng?
 A) 20 . B) 10 . C) 15 . D) 40 . E) 25 .
- $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ binomial taqsimotda matematik kutilish $M(X)=8$ va dispersiyasi $D(X)=4,8$ bo'lsa, p parametrlarning qiymati nimaga teng?
 A) 0.8 . B) 0.6 . C) 0.4 . D) 0.2 . E) 0.5 .
- $P(X=k) = C_{15}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^{15-k}$ binomial taqsimotga ega X tasodifiy miqdorning $M(X)$ matematik kutilishining qiymati nimaga teng?
 A) 3 . B) 2.4 . C) 18.75 . D) 75 . E) 12 .
- $P(X=k) = C_{15}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^{15-k}$ binomial taqsimotga ega X tasodifiy miqdorning $D(X)$ dispersiyasining qiymati nimaga teng?
 A) 3 . B) 2.4 . C) 18.75 . D) 75 . E) 12 .

7. $P(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ Puasson taqsimotga ega X tasodifiy miqdorning $M(X)$ matematik kutilishi qaysi formula bilan topiladi?

- A) $M(X) = 1/\lambda$. B) $M(X) = 1/\lambda^2$. C) $M(X) = \lambda$.
D) $M(X) = \lambda^2$. E) $M(X) = \lambda + 1/\lambda$.

8. $P(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ Puasson taqsimotiga ega X tasodifiy miqdorning $D(X)$ dispersiyasi qaysi formula bilan topiladi?

- A) $D(X) = 1/\lambda$. B) $D(X) = 1/\lambda^2$. C) $D(X) = \lambda$.
D) $D(X) = \lambda^2$. E) $D(X) = \lambda + 1/\lambda$.

9. Puasson taqsimotida matematik kutilish $M(X)$ va dispersiya $D(X)$ orasida qaysi munosabat o'rinli bo'ladi?

- A) $M(X) < D(X)$. B) $M(X) > D(X)$. C) $M(X) \neq D(X)$.
D) $M(X) = D(X)$. E) Keltirilgan barcha munosabatlar o'rinli bo'ladi.

10. $P(k) = 3^k e^{-3} / k!$ Puasson taqsimotga ega X tasodifiy miqdorning $M(X)$ matematik kutilishi nimaga teng?

- A) $M(X) = 1/3$. B) $M(X) = 1/9$. C) $M(X) = 3$.
D) $M(X) = 9$. E) $M(X) = 10/3$.

11. $P(k) = 2^k e^{-2} / k!$ Puasson taqsimotga ega X tasodifiy miqdorning $D(X)$ dispersiyasi nimaga teng?

- A) $D(X) = 0,25$. B) $D(X) = 0,5$. C) $D(X) = 4$.
D) $D(X) = 2$. E) $D(X) = 2,5$.

Ilovalar

1-jadval

e^{-x} funksiyasining qiymatlari

x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$	x	$exp(-x)$
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,0	0,0498
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,2	0,0408
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,4	0,0334
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,6	0,0273
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,8	0,0224
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,0	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,2	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,4	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,6	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,8	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,0	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,2	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,4	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,6	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,8	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,0	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,2	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,4	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,6	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,8	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,0	0,0009

2-jadval

$$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

funksiya qiymatlari

m	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.6$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1638	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198
4		0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030
5				0.0001	0.0002	0.0004
m	$\lambda=0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1.0$	$\lambda=2.0$	$\lambda=3.0$
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1879	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1680
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7				0.0001	0.0034	0.0216
8					0.0009	0.0081
9					0.0002	0.0027
10						0.0008
11						0.0002
12						0.0001
m	$\lambda=4.0$	$\lambda=5.0$	$\lambda=6.0$	$\lambda=7.0$	$\lambda=8.0$	$\lambda=9.0$
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15		0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16		0.0001	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109
17			0.0001	0.0006	0.0021	0.0058

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiya qiymatlarining jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.398	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Laplas integral funksiyasining qiymatlari

4-jadval

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0.96	0.3315
0.01	0.0040	0.33	0.1293	0.65	0.2422	0.97	0.3340
0.02	0.0080	0.34	0.1331	0.66	0.2454	0.98	0.3365
0.03	0.0120	0.35	0.1368	0.67	0.2486	0.99	0.3389
0.04	0.0160	0.36	0.1406	0.68	0.2517	1.00	0.3413
0.05	0.0199	0.37	0.1443	0.69	0.2549	1.01	0.3438
0.06	0.0239	0.38	0.1480	0.70	0.2580	1.02	0.3461
0.07	0.0279	0.39	0.1517	0.71	0.2611	1.03	0.3485
0.08	0.0319	0.40	0.1554	0.72	0.2642	1.04	0.3508
0.09	0.0359	0.41	0.1591	0.73	0.2673	1.05	0.3531
0.10	0.0398	0.42	0.1628	0.74	0.2704	1.06	0.3554
0.11	0.0438	0.43	0.1664	0.75	0.2734	1.07	0.3577
0.12	0.0478	0.44	0.1700	0.76	0.2764	1.08	0.3599
0.13	0.0517	0.45	0.1736	0.77	0.2794	1.09	0.3621
0.14	0.0557	0.46	0.1772	0.78	0.2823	1.10	0.3643
0.15	0.0596	0.47	0.1808	0.79	0.2852	1.11	0.3665
0.16	0.0636	0.48	0.1844	0.80	0.2881	1.12	0.3686
0.17	0.0675	0.49	0.1879	0.81	0.2910	1.13	0.3708
0.18	0.0714	0.50	0.1915	0.82	0.2939	1.14	0.3729
0.19	0.0753	0.51	0.1950	0.83	0.2967	1.15	0.3749
0.20	0.0793	0.52	0.1985	0.84	0.2995	1.16	0.3770
0.21	0.0832	0.53	0.2019	0.85	0.3023	1.17	0.3790
0.22	0.0871	0.54	0.2054	0.86	0.3051	1.18	0.3810
0.23	0.0910	0.55	0.2088	0.87	0.3078	1.19	0.3830
0.24	0.0948	0.56	0.2123	0.88	0.3106	1.20	0.3849
0.25	0.0987	0.57	0.2157	0.89	0.3133	1.21	0.3869
0.26	0.1026	0.58	0.2190	0.90	0.3159	1.22	0.3888
0.27	0.1064	0.59	0.2224	0.91	0.3186	1.23	0.3907
0.28	0.1103	0.60	0.2257	0.92	0.3212	1.24	0.3925
0.29	0.1141	0.61	0.2291	0.93	0.3238	1.25	0.3944
0.30	0.1179	0.62	0.2324	0.94	0.3264	1.26	0.3962
0.31	0.1217	0.63	0.2357	0.95	0.3289	1.27	0.3980

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

4-jadvalning davomi

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0.4738	2.54	0.4945
1.29	0.4015	1.62	0.4474	1.95	0.4744	2.56	0.4948
1.30	0.4032	1.63	0.4484	1.96	0.4750	2.58	0.4951
1.31	0.4049	1.64	0.4495	1.97	0.4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1.65	0.4505	1.98	0.4761	2.62	0.4956
1.33	0.4082	1.66	0.4515	1.99	0.4767	2.64	0.4959
1.34	0.4099	1.67	0.4525	2.00	0.4772	2.66	0.4961
1.35	0.4115	1.68	0.4535	2.02	0.4783	2.68	0.4963
1.36	0.4131	1.69	0.4545	2.04	0.4793	2.70	0.4965
1.37	0.4147	1.70	0.4554	2.06	0.4803	2.72	0.4967
1.38	0.4162	1.71	0.4564	2.08	0.4812	2.74	0.4969
1.39	0.4177	1.72	0.4573	2.10	0.4821	2.76	0.4971
1.40	0.4192	1.73	0.4582	2.12	0.4830	2.78	0.4973
1.41	0.4207	1.74	0.4591	2.14	0.4838	2.80	0.4974
1.42	0.4222	1.75	0.4599	2.16	0.4846	2.82	0.4976
1.43	0.4236	1.76	0.4608	2.18	0.4854	2.84	0.4977
1.44	0.4251	1.77	0.4616	2.20	0.4861	2.86	0.4979
1.45	0.4265	1.78	0.4625	2.22	0.4868	2.88	0.4980
1.46	0.4279	1.79	0.4633	2.24	0.4875	2.90	0.4981
1.47	0.4292	1.80	0.4641	2.26	0.4881	2.92	0.4982
1.48	0.4306	1.81	0.4649	2.28	0.4887	2.94	0.4984
1.49	0.4319	1.82	0.4656	2.30	0.4893	2.96	0.4985
1.50	0.4332	1.83	0.4664	2.32	0.4898	2.98	0.4986
1.51	0.4345	1.84	0.4671	2.34	0.4904	3.00	0.49865
1.52	0.4357	1.85	0.4678	2.36	0.4909	3.20	0.49931
1.53	0.4370	1.86	0.4686	2.38	0.4913	3.40	0.49966
1.54	0.4382	1.87	0.4693	2.40	0.4918	3.60	0.499841
1.55	0.4394	1.88	0.4699	2.42	0.4922	3.80	0.499928
1.56	0.4406	1.89	0.4706	2.44	0.4927	4.00	0.499968
1.57	0.4418	1.90	0.4713	2.46	0.4931	4.25	0.499989
1.58	0.4429	1.91	0.4719	2.48	0.4934	4.50	0.499997
1.59	0.4441	1.92	0.4726	2.50	0.4938	4.75	0.499999
1.60	0.4452	1.93	0.4732	2.52	0.4941	5.00	0.500000

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

TEST JAVOBLARI

16. Differensial tenglamalar va ular bilan bog‘liq tushunchalar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
C	D	B	C	D	D	E	C	C	D						

17. I tartibli differensial tenglamalar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
A	B	B	D	D	C	C	C	C	E	D	D				

18. II tartibli differensial tenglamalar. Tartibni pasaytirish usuli.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
C	C	C	B	A	A	D	B	A	E						

19. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashuvi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
C	E	C	C	C	C	E	E	B	C	D	E	D	D	D	

20. Musbat hadli sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
D	C	A	D	C	D	D	C	B	C	E	D	A	D		

21-mavzu. Ishorasi navbatlanuvchi va o'zgaruvchi sonli qatorlar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
D	C	A	C	D	C	C	E	A	B	D	E	C	E		

22. Funktsional qatorlar

[illegible]

22. Darajali qatorlar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
E	A	E	D	B	E	E	C	E	B						

23. Teylor va Makloren qatorlari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
B	A	E	A	A	D	D	D	C	B					

24. Hodisalar va ular ustida amallar

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
E	D	B	B	D	C	C	E	C	B	A	D	C	E	C	

25. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	C	C	C	D	A	A	D	C	C	D	E	A	D	C

26. To'liq ehtimol va Bayes formulalari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
C	A	E	B	D	D	C	D	E	B	B	D				

27. Bernulli va Puasson teoremlari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
E	C	A	A	C	D	B	E	C	E						

28. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremlari

[illegible]

29. Diskret tasodifiy miqdorlar va uning taqsimot qonunlari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
B	C	E	C	C	D	D	D	E	C	D	C	E	C		

30. Asosiy diskret taqsimotlarning sonli xarakteristiklari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11					
C	B	A	C	E	B	C	C	D	C	D					

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Yo.U. Soatov "Oliy matematika" 1, 2, 3-jild Toshkent "O'qituvchi" nashriyoti 1992, 1998, 1998.
2. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma'ruzalar, I, II q. T. "Voris-nashriyot", 2010.
3. N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S. Ahmedova, "Oliy matematika". O'quv qo'llanma.-Qarshi Davlat Universiteti, 1-,2-jild, 2010.
4. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике – М.: Наукаб 1987.
5. Sadullayev A., Mansurov X.T., Xudoyberganov G., Vorisov A.K., G'ulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami, 1,2,3 q. T. "O'qituvchi", 1995, 1995, 2000.
6. Canuto C., Tabacco A. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verleg, Italia, Milan, 2008.
7. Xurramov Sh. R. Oliy matematika, I-II-jild. –T.: "Tafakkur" nashriyoti, 2018.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа – М.: "Наука", 1975.
9. Aksoy A.G., Khamsi M.A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.
10. Tao T. Analysis 1,2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
11. А.И.Приленка «Сборник задач по математике для поступающие в вузы» Москва 1984
12. T. Azlarov, X. Mansurov. "Matematik analiz" 1-2-qism Toshkent "O'qituvchi" 1994
13. A. Abduhamidov, H. Nasimov, U. Nosirov, J. Husanov. "Algebra va matematik analiz asoslaridan masalalar to'plami" 1-qism Toshkent 2004
14. K.Sh. Ruzmetov, G'X.Djumabayev. "Matematika" Toshkent. "O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati".2018.
15. B. Abdalimov. Oliy matematika. – T.:1994.
16. Xurramov Sh.R. Oliy matematika. Misollar. Nazorat topshiriqlari. II-qism. – T.: "Fan va texnologiyalar", 2015.

MUNDARIJA

SO'Z BOSHI.....	3
IX-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR	
16-§. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. ASOSIY TA'RIF VA TUSHUNCHALAR. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.....	5
16.1. Differensial tenglamalar haqida asosiy ta'rif va tushunchalar.....	5
16.2. O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamalar.....	7
16.3. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.....	8
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	10
17-§. BIR JINSLI, CHIZIQLI, BERNULLI VA TO'LIQ DIFFERENSIAL TENGLAMALARI.....	15
17.1. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.....	15
17.2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.....	17
17.3. Bernulli tenglamasi.....	19
17.4. To'la differensial tenglama.....	20
17.5. Integrallovchi ko'paytuvchi.....	22
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	23
18-§. TARTIBINI PASAYTIRISH MUMKIN BO'LGAN YUQORI TARTIBLI TENGLAMALARNING BA'ZI BIR TIPLARI. O'ZGARMAS KOEFFISIVENTLI CHIZIQLI IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.....	31
18.1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.....	31
18.2. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan ba'zi bir yuqori tartibli differensial tenglamalar.....	32
18.3. Differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli tenglamalar.....	33
18.4. x oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar.....	34
18.5. O'zgarmas ko'effisiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.....	35
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	36

X-BOB. SONLI QATORLAR

19-§. SONLI QATORLAR. QATOR YAQINLASHUVINING ZARURIY VA YETARLI SHARTLARI.....	41
19.1. Sonli qatorlar.....	41
19.2. Sonli qator yaqinlashishi.....	42
19.3. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.....	44
19.4. Qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartlari.....	44
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	45
20-§. MUSBAT HADLI SONLI QATORLAR YAQINLASHISHINING YETARLI SHARTLARI: DALAMBER ALOMATI, KOSHINING RADIKAL VA INTEGRAL ALOMATLARI.....	50
20.1. Musbat hadli qatorning yaqinlashishi uchun Dalamber alomati.....	50
20.2. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashishi uchun Koshi alomati.....	51
20.3. Koshining integral alomati.....	51
20.4. Musbat hadli qatorlarni taqoslash alomati.....	52
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	53
21-§. ISHORASI ALMASHINUVCHI QATOR YAQINLASHUVINING LEYBNITS BELGISI. IXTIYORIY HADLI QATORNING ABSOLYUT VA SHARTLI YAQINLASHISHI.....	60
21.1. Ishoralari almashinuvchi qatorlar. Leybnits alomati.....	60
21.2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.....	62
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	63
XI-BOB. FUNKSIONAL QATORLAR	
22-§. FUNKSIONAL QATORLAR. DARAJALI QATORLARNING YAQINLASHISH RADIUSI.....	69
22.1. Funksional qatorlar.....	69
22.2. Funksional qatorlarning tekis yaqinlashishi.....	70
22.3. Darajali qatorlar va ularning yaqinlashish sohasi.....	71
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	73
23-§. FUNKSIYALARNI TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARIGA YOYISH.....	80

23.1. Funksiyaning Teylor formulasi.....	80
23.2. Makloren formulasi.....	80
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	81

XII-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

24-§. EHTIMOLLAR NAZARIYASI PREDMETI. HODISA TURLARI. EHTIMOLNING KLASSIK TA'RIFI. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI.....

24.1. Ehtimolning ta'riflari.....	86
24.2. Ehtimolning klassik ta'rif.....	86
24.3. Kombinatorika elementlari.....	88
24.4. Ehtimolning geometrik ta'rif.....	89
24.5. Ehtimolning statistik ta'rif.....	90
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	90

25-§. EHTIMOLLARNI QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH TEOREMALARI. SHARTLI EHTIMOLLAR. HODISALARNING BOG'LIQSIZLIGI.....

25.1. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi.....	96
25.2. Shartli ehtimollar. Hodisalarning bog'liqsizligi.....	97
25.3. Hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi.....	98
25.4. Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi.....	98
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	99

26-§. KAMIDA BITTA HODISANING RO'Y BERISH EHTIMOLI. TO'LA EHTIMOL FORMULASI. BAYES FORMULASI.....

26.1. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli.....	104
26.2. To'la ehtimol formulasi.....	105
26.3. Bayes formulasi.....	106
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	109

27-§. O'ZARO BOG'LIQ BO'LMAGAN TAKRORIY TAJRIBALAR. BERNULLI SXEMASI. BERNULLI, PUASSON FORMULALARI.....

27.1. Bernulli formulasi.....	117
-------------------------------	-----

27.2. Puasson formulasi.....	118
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	120
28-§. MUAVR-LAPLASNING LOKAL VA INTEGRAL TEOREMALARI.....	124
28.1. Muavr – Laplasning lokal teoremasi.....	124
28.2. Muavr – Laplasning integral formulasi.....	125
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	126
29-§. TASODIFIY MIQDOR VA UNING TAQSIMOT QONUNI.....	132
29.1. Tasodifiy miqdorlar.....	132
29.2. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.....	133
29.3. Binomial taqsimot.....	136
29.4. Puasson taqsimot qonuni.....	137
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	139
30-§. DISKRET TASODIFIY MIQDORNING SONLI XARAKTERISTIKALARI.....	146
30.1. Matematik kutilish va uning xossalari.....	146
30.2. Dispersiya va uning xossalari.....	147
30.3. Diskret tasodifiy miqdorning binomial va Puasson taqsimoti.....	148
30.4. O'rtacha kvadratik chetlanish.....	149
Mustaqil bajarish uchun misollar.....	155
Ilovalar.....	160
TEST JAVOBLARI.....	163
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.....	163

S.A.MINGYASHAROVA

**OLIY MATEMATIKADAN MISOL
VA MASALALAR TO'PLAMI**

II-qism

**TERMIZ DAVLAT MUHANDISLIK VA
AGROTEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI**

Muharrir: Eshqorayev S. S.

Korrektor va dizayner: Ro'zimurodov B.

Nashriyot litsenziyasi № 255979

Bosishga 10.10.2024-yilda ruxsat etildi.

Format 60x84/16 Garnitura Times New Roman.

Shartli bosma tobog'i 7. Adadi 50.

Shartnoma №55 "Termiz publishing center" nashriyoti
Surxondaryo viloyati, Termiz shahri, Uvaysiy ko'chasi 8A-uy, Toshkent
sh., "TRASTBANK" XA BANKINING BOSH OFISI, MFO: 00491,

INN: 311209934 H/R: 20208000307031406001

Telefon: +998-88-808-21-07

ISBN 978-9910-675-23-2



6047



TERMIZ-2024

ISBN 978-9910-675-23-2



9 789910 675232

6047

