

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**G‘.G‘.QURBONOV
Z.Sh.OCHILOVA**

.

MATEMATIK MODELLASHTIRISH

O‘quv qo‘llanma

**”Durdona” nashriyoti
Buxoro – 2025**

UO‘K 519.876.5(075.8)

22.18ya73

Q 80

Qurbonov, G‘.G‘.

Matematik modellashtirish [Matn] : o‘quv qo‘llanma / G‘.G‘. Qurbonov .-

Buxoro: Sadriddin Salim Buxoriy, 2025.- 160 b.

KBK 22.18ya73

Taqrizchilar:

Rashidov Anvar Sharipovich, Buxoro davlat pedogigika instituti,

p.f.f.d (PhD) dotsent

Jo'rayeva Nargiza Olтинboyevna, Buxoro davlat pedogigika instituti,

p.f.f.d (PhD) dotsent

**O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va
innovatsiyalar vazirligining 2025-yil 9-iyuldagi 258-sonli
buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan. Ro‘yxatga olish
raqami 503123.**

ISBN 978-9910-10-545-6

MUNDARIJA

Kirish	4
I bob. Matematik model haqida asosiy tushunchalar	5
1-mavzu: Jamiyat fikrining abstraksiyalanish jarayoni. matematik model tushunchasi	5
2-mavzu: Matematik modelni qurish va uni tadqiq qilish usullari ..	14
3-mavzu: Jarayonlarni modellashtirishda energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish.	25
4-mavzu: Demografik modellar.	29
5-mavzu: Raqobatdagi jarayonlarning turli modellari.	39
6-mavzu: Biologik modellar	54
7-mavzu: Epidemiya modeli	64
8-mavzu: Modellashtirish asoslari	70
9-Mavzu: Modellartirishning statistik asoslari.	82
II bob. Sonli usullar haqida asosiy tushunchalar	91
10-mavzu: Sonli usullar	91
11-mavzu: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechish usullari	97
12-Mavzu: Bir jinsli tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi.....	118
13-mavzu: Transport masalasi va uning qo'yilishi.....	122
14-mavzu: Sonli differensiallash.....	131
15-mavzu: Oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechish.....	138
16-mavzu: Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari.	144
17-mavzu: Reklama kompaniyasini tashkillashtirish	149
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	157

KIRISH

Zamonaviy fan va texnikaning jadal rivojlanishi, ijtimoiy-iqtisodiy hayotda yuzaga kelayotgan murakkab tizimlarni chuqur o'rganish va ularni boshqarish zarurati matematik usullarni keng qo'llashni talab qilmoqda. Ayniqsa, real obyektlar va jarayonlarni tahlil qilish, prognozlash hamda optimallashtirishda matematik modellashtirish muhim ahamiyat kasb etadi.

Matematik modellashtirish – bu real obyekt yoki jarayonning xatti-harakatlarini matematik ifodalar yordamida tasvirlash va o'rganish jarayonidir. Bunda murakkab muammolar soddalashtirilgan, tahlil qilinadigan shaklga keltiriladi, so'ngra ularning yechimlari aniqlanadi va amaliyotda qo'llaniladi. Bu uslub nafaqat muammoning mohiyatini chuqur tushunish, balki u asosida aniq qarorlar qabul qilish imkonini ham beradi.

Mazkur o'quv qo'llanma talabalarga matematik modellashtirishning nazariy asoslari, asosiy tushunchalari, modellar turlari, ularni qurish bosqichlari va amaliyotda qo'llash yo'llari haqida tizimli bilim berishga mo'ljallangan. O'quv qo'llanma da nazariy ma'lumotlar bilan bir qatorda, turli fan sohalarida qo'llaniladigan real modellar va ularning amaliy qo'llanilishi bo'yicha misollar ham keltirilgan.

“Matematik modellartirish” fanida har xil tipdagi matematik masalalarni taqribiy yechish algoritmlarini nazariy asoslash, amalda qo'llash masalari o'rganiladi.

Mazkur o'quv qo'llanma Amaliy matematika ta'lim yo'nalishi talabalari uchun “Matematik modellartirish” fani bo'yicha yangi o'quv rejasi va dasturlari asosida tayyorlandi. Ushbu o'quv qo'llanma adabiyotlar ro'yxatida keltirilgan mualliflarning ma'ruza matnlari asosida yaratilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma oliy ta'lim muassasalarining texnika, iqtisodiyot, tabiiy va ijtimoiy fanlar yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan bakalavr va magistr darajasidagi talabalari, shuningdek, tadqiqotchilar va sohaga qiziquvchilar uchun mo'ljallangan. Mazkur qo'llanma mustaqil o'rganish, seminar va amaliy mashg'ulotlarda foydalanish uchun qulay metodik asos yaratadi.

I BOB. MATEMATIK MODEL HAQIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

1-MAVZU: JAMIYAT FIKRINING ABSTRAKSIYALANISH JARAYONI. MATEMATIK MODEL TUSHUNCHASI

Reja:

1. Model va modellashtirish tushunchalari. Insonning bilim jarayoni va amaliy faoliyatida modellashtirishning o'rni.
2. Matematik model tushunchasi. Matematik modellarning tasnifi.
3. Matematik modellarning tasnifi.
4. Matematik modellarni taqdim etish shakllari.

Tayanch so'z va iboralar: Gipoteza, tizim, jarayon, tadqiqot ob'ekti, o'xshashlik, model, modellashtirish, matematik model, modellashtirishning maqsadi, matematik modellarning tasnifi, matematik modellarni taqdim etish shakllari.

Ma'lumki, ilmiy bilimlar tadqiqot ob'ektlari deb ataladigan ob'ektlar, hodisalar va jarayonlarni o'rganishga qaratilgan. Bunda bizga model va modellashtirish tushunchalari katta ahamiyat kasb etadi.

Modellarni ishlab chiqishda gipotezalar muhim rol o'ynaydi (hypothesis-asos, taxmin), ya'ni ma'lum miqdordagi eksperimental ma'lumotlar, kuzatishlar, taxminlarga asoslangan hodisalarning sabab-oqibat munosabatlari to'g'risida ma'lum bashoratlar, taxminiy qarorlar kabilar. Gipotezalarning to'g'riligini tekshirish esa, qoida tariqasida, o'xshashliklarga asoslanadi.

Analogiya (yunoncha analogiya-muvofiqlik, mutanosiblik)-bu ikkita ob'ektning o'xshashligidir. Ikki ob'ektning o'xshashligi yoki farqining ahamiyati shartli va abstraktsiya darajasiga bog'liq, u tadqiqotning yakuniy natijasi bilan belgilanadi. Abstraktsiya darajasi tadqiqot ob'ektining hisobga olingan parametrlari to'plamiga bog'liq.

Muayyan darajada haqiqiy, ob'ektiv mavjud dunyoni aks ettiradigan farazlar va o'xshashliklar ravshanlikka ega bo'lishi yoki o'rganish uchun qulay mantiqiy sxemalarda aks ettirilgan bo'lishi kerak. Bu fikrlash va mantiqiy tuzilmalarni soddalashtiradigan, shuningdek, tabiiy hodisalarni tushunishga olib keladigan tajribalar o'tkazishga imkon beradigan shunga o'xshash mantiqiy sxemalar modellar deb ataladi. Boshqacha qilib aytganda, model asl ob'ektning

o‘rni bosuvchi ob‘ekt bo‘lib, tadqiqotchini qiziqtirgan asl nusxaning ba‘zi xususiyatlarini o‘rganishni ta‘minlaydi.

Biz model atamasida (lat. *modulus*-o‘lchov, namuna, norma) bilish (o‘rganish) jarayonida asl ob‘ektni almashtiradigan, ushbu tadqiqot uchun muhim bo‘lgan ba‘zi o‘ziga xos xususiyatlarni saqlaydigan moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob‘ektni tushunamiz. Model bizga turli xil boshqaruv variantlarini sinab ko‘rish orqali ob‘ektni qanday qilib to‘g‘ri boshqarishni o‘rganishga imkon beradi. Buning uchun haqiqiy ob‘ektdan foydalanish ko‘pincha xavfli yoki shunchaki imkonsizdir. Boshqacha qilib aytganda, model - bu bilish jarayonida asl ob‘ektni almashtirib, uning ba‘zi muhim xususiyatlarini saqlab turadigan shunday moddiy yoki aqliy tasavvur qilingan ob‘ekt.

Model-bu o‘rganilayotgan ob‘ekt hodisalarining alohida tomonlarini aks ettiruvchi soddalashtirilgan tizim. O‘rganilgan har bir jarayonni turli xil modellar bilan tavsiflash mumkin, hech qanday model buni to‘liq va har tomonlama bajara olmaydi. Shu bilan birga, o‘rganilayotgan ob‘ektning individual xususiyatlarini aks ettiruvchi soddalashtirilgan modeldan foydalanish sabablar va oqibatlar, kirish va chiqishlarning o‘zaro bog‘liqligini aniqroq ko‘rish, kerakli xulosalarni tezroq chiqarish va to‘g‘ri qarorlar qabul qilish imkonini beradi.

Shunday qilib, model quyidagilar uchun kerak:

1) muayyan ob‘ekt qanday ishlashini tushuntirish: uning tuzilishi, ichki aloqalari, asosiy xususiyatlari, rivojlanish qonunlari, o‘z-o‘zini rivojlantirish va atrof-muhit bilan o‘zaro ta‘siri;

2) ob‘ekt yoki jarayonni boshqarishni o‘rganish, berilgan maqsadlar va mezonlar bo‘yicha boshqarishning eng yaxshi usullarini aniqlash;

3) ob‘ektga ta‘sir qilishning berilgan usullari va shakllarini amalga oshirishning bevosita va bilvosita oqibatlarini bashorat qilish.

Namunaviy modellarni ko‘rib chiqamiz. Globus, bu yerning modeli. t vaqt o‘tishi bilan v boshlang‘ich tezlik va a tezlanish bilan harakatlanadigan jismning bosib o‘tgan yo‘lini hisoblash uchun quyidagi tenglamadan foydalanamiz:

$$S = vt + \frac{at^2}{2}$$

Ushbu tenglama - tekis tezlanuvchan jism harakatining matematik modeli.

Asl nusxalari bo‘lmagan modellar mavjud emas. Modellarning asl

nusxalari bo'lishi mumkin:

- Ob'ektlar (raketa, odam, atom, galaktika, sayyora, hayvon, bino, kosmik jism).

- Jarayonlar (iqlim o'zgarishi, urush, iqtisodiyotning pasayishi, inflyatsiya, epidemiya, muzokaralar, sud jarayoni).

- Tabiiy hodisalar (zilzila, tsunami, shimoliy chiroqlar, qor yog'ishi, do'l, vulqon otilishi, chaqmoq, momaqaldiraq).

Modellar asl ob'ektning tuzilishi, xususiyatlari, hatti – harakati yoki faoliyati to'g'risida ma'lumot olish uchun kerak.

Modellashtirish - bu asl nusxani analog (model) bilan almashtirish jarayoni, so'ngra asl nusxaning xususiyatlari va hatti-harakatlarini o'rganish usuli.

Modelni qurish va undan foydalanish jarayoni modellashtirish deb ataladi. Shartli ravishda moddiy va ideal modellashtirishni ajratish mumkin.

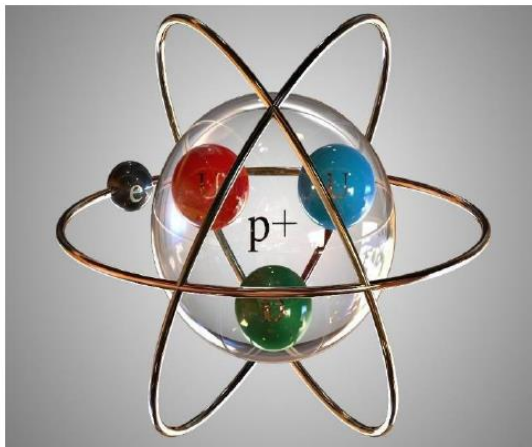
Moddiy (jismoniy) modellashtirish deb shunday modellashtirishga aytiladiki, bunda haqiqiy ob'ektga kattalashtirilgan yoki kichraytirilgan nusxa qarama-qarshi bo'lib, o'rganilgan xususiyatlar o'xshashlik nazariyasi yordamida ob'ektga o'tkaziladi.

Moddiy modellashtirishda ob'ektni o'rganish boshqa miqyosda takrorlanganda sodir bo'ladi. Bu yerda tajriba natijalarini modeldan asl nusxaga miqdoriy o'tkazish mumkin.

Moddiy modellashtirishni biz o'z navbatida geometrik va fizik modellashtirishga bo'lishimiz mumkin.

Model geometrik deb ataladi, agar u geometrik jihatdan asl nusxasiga o'xshash bo'lsa, ya'ni uning shakli va nisbatlarini saqlab qolsa (1.1-rasm)

Model fizik deb ataladi, agar u nafaqat geometrik munosabatlar nuqtai nazaridan, balki unda sodir bo'ladigan jismoniy jarayonlar nuqtai nazaridan ham asl nusxasiga o'xshash bo'lsa. Shu bilan birga, model ham, asl nusxa ham har doim bir xil jismoniy tuzilishga ega (1.2-rasm).



1.1-rasm. Uy va atomning modeli [8]



1.2-rasm. Uchuvchi samolyot modeli va ekotizim

Ideal modellash - bu modellash, unda haqiqiy ob'ektga uning so'zlar ko'rinishidagi ifodasi, grafika, jadvallar, matematik formulalar shaklidagi tasvirlanishi qarama – qarshi qo'yiladi .

Ideal modellashda asosiy bo'lib matematik modellash hisoblanadi.

Ilm-fanda, muxandislik, tashkiliy, iqtisodiy ob'ektlar va tizimlarni tadqiq qilishda va umuman inson hayotida modellashning roli juda katta. Aytish mumkinki: har qanday ob'ekt, tizim, jarayon, hodisani bilish mohiyatan uning (uning) modelini yaratishga olib keladi.

Matematik modelning talqinini shunday berish mumkin - matematik model-bu modellashirilgan ob'ekt yoki hodisaning kirish va chiqish ma'lumotlari o'rtasidagi shakliy bog'liqlikni aniqlaydigan matematik iboralar to'plamidir

Haqiqiy tizimning matematik modeli bu tizimni matematik usullar bilan o'rganishga imkon beradigan rasmiylashtirilgan tavsifidir. Odatda

u tizim holatlarining xususiyatlarini uning parametrlariga, kirish signallariga, boshlang'ich va chegara shartlariga, vaqtga va boshqalarga qarab belgilaydigan munosabatlar to'plamiga (tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy sharoitlar, formulalar va boshqalar) qarab aniqlash mumkin. Mazmunli tavsif jarayonning nazariy asoslarini, tizimda yuzaga keladigan elementar hodisalarning fizik tabiati va miqdoriy xususiyatlari, ular o'rtasidagi o'zaro ta'sir darajasi va tabiati, ma'lum bir hodisaning ahamiyati va boshqalar to'g'risida mavjud ma'lumotlarni o'rganish asosida tuziladi. Mazmunli tavsif haqiqiy tizimning formallashtirilgan sxemasini tuzishni osonlashtiradi, bu uni eng oddiy elementlarga ajratishga imkon beradi. Ushbu elementlarda sodir bo'ladigan jarayonlar, ular orasidagi munosabatlar kabi, soddalashtirilgan. Bu haqiqiy tizimning matematik modelini yaratishga imkon beradi, buning uchun jadvallar yoki grafikalar ko'rinishidagi barcha mavjud ma'lumotlar tegishli matematik ifodalar shaklida yoziladi.

Ilm-fanning turli sohalaridagi tadqiqotchilar, agar "yaxshi" matematik modelni shakllantirish mumkin bo'lsa, unda ob'ektni o'rganish uchun ming yillar davomida to'plangan fanning butun arsenalidan foydalanish mumkin va "bilim sohasi o'z qonunlarini matematik munosabatlar shaklida ifoda etganda fanga aylanadi" degan iqtibosni keltirishadi.

Ushbu to'plam tenglamalar, tengsizliklar, tenglamalar va tengsizliklar tizimlari, mantiqiy va raqamli ifodalardan iborat bo'lishi mumkin.

Matematik modellashtirish usuli turli fanlarda eng ko'p qirrali tadqiqot usullaridan biridir.

Matematik modellashtirishda asl ob'ektning o'ziga xos jismoniy tabiati va unda sodir bo'ladigan jarayonlarni emas, balki mavhum ko'rinishadgi matematik tilda yozilgan faqat kirish qiymatlarining chiqish qiymatlariga o'zgarish qonuniyatini ko'rib chiqadilar.

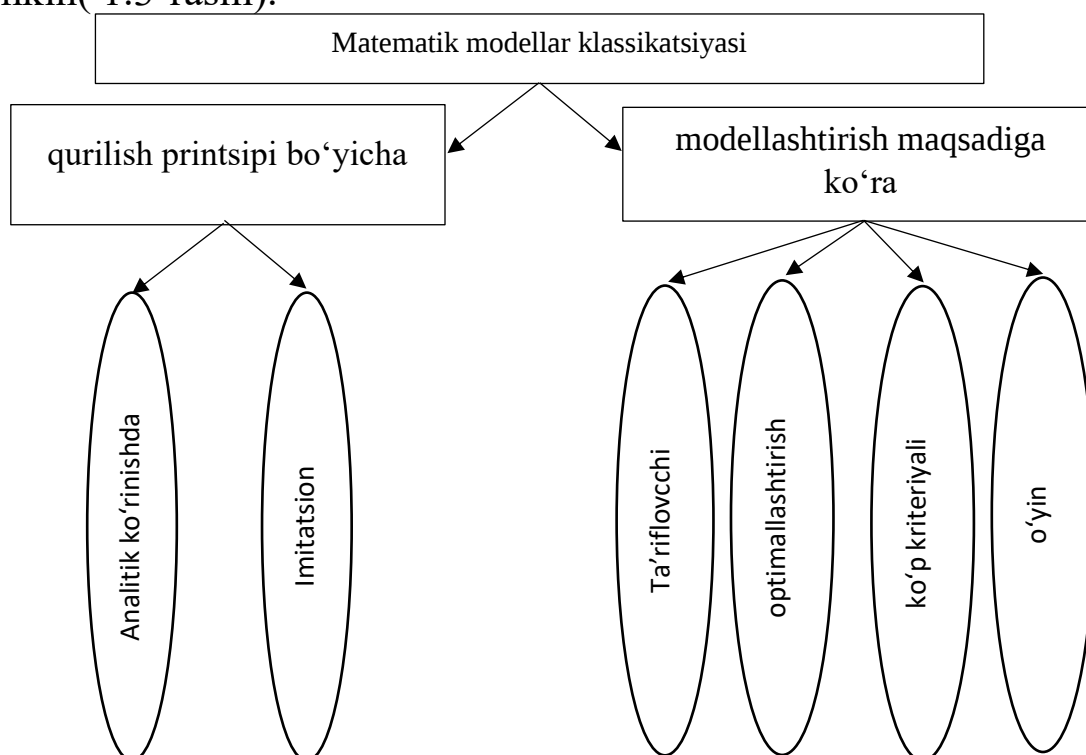
Masalan $S = vt$ va $S = vt + \frac{at^2}{2}$ tenglamalar mos ravishda jismning tekis va tekis tezlanuvchan harakati kabi fizik jarayonlarning matematik modellari. Matematik modellarni qurish uchun maxsus belgilardan iborat shakllantirilgan matematik tildan foydalaniladi.

Hozirgi vaqtda matematik modellashtirish ilmiy tadqiqotlarning eng samarali va eng ko'p qo'llaniladigan usullaridan biridir. U

matematika, fizika, kimyo, biologiya va boshqa ko'plab ilmiy fanlarga asoslanib, sintez rolini o'ynaydi.

Matematik modellash usullarining jadal rivojlanishi va ularning turli sohalarda qo'llanilishi tufayli turli xil turdagi ko'plab modellar paydo bo'ldi. Shu munosabat bilan ma'lum bir tartibga solish, mavjud va paydo bo'lgan matematik modellarni tasniflash zarurati tug'iladi.

Matematik modellarni quyidagi xususiyatlarga ko'ra tasniflash mumkin (1.3-rasm).



1.3-rasm. Matematik modellarni tasniflash sxemasi

1. Modellarni qurish tamoyillariga ko'ra ular analitik va imitatsion modellarga bo'linadi.

Analitik - bu haqiqiy ob'ektlar yoki tizimlarning ishlash jarayonlari aniq funktsional bog'liqliklar shaklida yozilgan matematik modellardir. Biroq, ushbu bog'liqliklarni (differentsial va integral tenglamalar, tenglamalar tizimlari) faqat nisbatan oddiy tizimlar va hodisalar uchun olish mumkin.

Hodisalar murakkab va xilma-xil bo'lganda, tadqiqotchi ularni soddalashtirishga o'tishi kerak. Natijada, analitik matematik model haqiqiy tizim yoki jarayonning taqribiy ko'rinishiga aylanadi. Agar shunga qaramay, murakkab tizimlar uchun modelni yaratish mumkin bo'lsa ham, ko'pincha uni o'rganish qiyin hal qilinadigan muammoga

aylanadi. Shuning uchun bunday hollarda tadqiqotchilar imitatsiya modellarini yaratishga majbur bo'ladilar.

Imitatsiya - bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar va tizimlarning hatti-harakatlarini taqlid qiladigan matematik modellar va ularning mantiqiy tuzilishi va vaqt o'tishi ketma-ketligini saqlab qolgan holda jarayon yoki tizimni tashkil etadigan elementar hodisalarni tadqid qilishdir.

Imitatsiya modellari tizimning hatti-harakatlarini oldindan hisoblash yoki bashorat qilishga imkon bermaydi, balki berilgan dastlabki ma'lumotlar asosida matematik modelda hisoblash tajribasini o'tkazishga imkon beradi. Shuning uchun informatika fanida bunday ta'rif ham mavjud:

imitatsiya modellari-bu ma'lum bir davrda real ob'ektlar, jarayonlar yoki tizimlarning hatti-harakatlarini tadqid qiluvchi matematik modellar bilan kompyuterda o'tkaziladigan hisoblash tajribalari.

2. Modellash tirish maqsadlariga ko'ra matematik modellar tavsiflovchi, optimallashtirish, ko'p mezonli va o'yin modellariga bo'linadi. Deskriptiv (tavsiflovchi) - bu faqat ob'ektlar va hodisalarni tasvirlaydigan va ular haqidagi ma'lumotlarni yozib oladigan modellar. Masalan, quyosh tizimining modeli undagi sayyoralarning joylashishini va ularning orbitasini, quyosh tizimiga kirib kelgan kometaning harakat modelini aniqlaydi, uning parvoz yo'lini, yerdan qancha masofani bosib o'tishini va hokazolarni taxmin qilishga imkon beradi.

Optimallashtiruvchi modellar deb shunday modellarga aytiladiki, ularning parametrlari o'zgarishi modellashtirish natijasiga ta'sir qiladi. Bu modellar muayyan shartlarga rioya qilgan holda muammoning maqbul (har qanday ma'noda eng yaxshi) echimini topishga xizmat qiladi. Masalan, ishlab chiqaruvchilardan iste'molchilarga mahsulotlarni tashish modeli ularning narxi minimal bo'lishi uchun transport yo'nalishini tanlashga (optimallashtirishga) imkon beradi.

Jarayonni bir vaqtning o'zida bir nechta parametrlar bo'yicha optimallashtirishga imkon beradigan modellar ko'p kriteriyali modellar deb ataladi, bunday modellarda optimallashtirish maqsadlari bir-biriga ziddiyatli bo'lishi ham mumkin, masalan, oilaning ovqatlanish modeli foydali, kaloriya miqdori va uni sotib olish xarajatlarining minimalligi kabi mezonlarga javob berishi kerak;

O'yin modellari deb matematik nazariyasida o'yin deb ataladigan

ziddiyatli vaziyatda raqiblarning strategiyasini belgilaydigan modellarga aytiladi. Karta, sport o'yinlari, harbiy janglar modellari o'yin modellariga tegishli. Ular o'yinchilarning taktikasi va strategiyasini modellashtirishga imkon beradi.

Analitik modellar - bu ob'ekt o'zgaruvchilari o'rtasidagi munosabatlarni differentsial, algebraik yoki boshqa har qanday matematik tenglamalar tizimi sifatida tasniflash vositasidir. Bunday modellar odatda fizik qonunlar asosida olinadi. Analitik modellardan foydalanish ko'pincha kompyuterdan foydalanmasdan turib ham ob'ektning asosiy xususiyatlarini o'rganishga imkon beradi.

Strukturaviy model tizimdagi qismlarning shakli, joylashuvi, ularning o'zaro bog'liqligi to'g'risida umumiy fikr beradigan blok-diagrammalar, tizim va atrof-muhit o'rtasida aloqalar to'plami kabidir.

Eng oddiy holatda, strukturaviy matematik model yordamida o'rganilayotgan ob'ektning hatti-harakatlarini tavsiflovchi tenglamalar tuzilishi beriladi.

Strukturaviy modellarning variantlari sifatida grafiklar, tarkibiy va funktsional sxemalar, diagrammalar va boshqalarni ko'rsatish mumkin. AHM (analog hisoblash mashinalari) strukturaviy matematik modellashtirish tamoyillari asosida ishlaydi.

Algoritmik modellar o'rganilayotgan ob'ektning matematik modelini ifodalovchi tenglamalarni sonli yechishning bosqichma-bosqich jarayonini takrorlaydi va odatda kompyuter dasturi shaklida amalga oshiriladi. Algoritmik modellardagi tadqiqot natijalari har doim taqribiy hisoblanadi. Kompyuterlardan foydalanish algoritmik modellarni ko'p qirrali bo'lishiga olib keladi. Ularning yordami bilan boshqa har qanday matematik modellarni kompyuterda bajarishga olib kelish mumkin.

Deterministik modellar ba'zi tenglamalar bilan tavsiflanadi. Matematik fizika tenglamalarini boshlang'ich va chegaraviy shartlar asosida ko'rib chiqish deterministik modellarga misol bo'la oladi.

Stoxastik modellar ba'zi ehtimollik qonunlari bilan tavsiflanadi.

Imitatsiya modellari ob'ektni biror-bir belgisiga qarab imitatsiya qiladi (takrorlaydi). Imitatio so'zi lotinchadan taqlid so'ziga mos keladi. Masalan, uni almashtirish kerak bo'lgan joyda odamning harakatlarini qaytaradigan (taqlid qiladigan) robot. Biroq, modelni tavsiflash formalari modellashtiriladigan ob'ektdan uzoq bo'lishi mumkin. Bunday modellarga jarayonlar yoki ob'ektlarning matematik

modellari misol bo'la oladi. Matematik modellarni taqdim etish shakli har xil formulalar, tenglamalar yoki tenglamalar tizimidir (algebraik, differentsial, integral va boshqalar), bu jarayon fizikasini, boshlang'ich va chegara shartlarini hisobga oladi. Bir xil tenglamalar tizimi turli xil jarayonlarni tasvirlashi mumkin.

Bu matematik modellarning boshqa taqdim etish shakllariga nisbatan katta afzalligi. Matematik modelni uni qurish mumkin bo'lgan barcha masalalarga qo'llash mumkin.

Analog modellar - bu o'rganilayotgan jarayonlarni boshqa fizik tabiatga ega bo'lgan jarayonlar bilan almashtiradigan model. Ularning barchasi bir xil matematik modelga ega.

Oddiy misol - ikkita tizim, birinchisi mexanik xususiyatga ega bo'lib, maxovik bilan bog'langan, qovushoq tormozlovchi suyuqlikka botirilgan, aylanishni prujina va maxovik orqali uzatadigan, mexanik qurilma. Ikkinchisi tizim – bu induktiv katushka kondensator, elektr energiyasi hisoblagichi bilan bo'g'langan elektrik qurilma. Agar biz induktivlik, sig'im, va qarshilikni prujina egiluvchanligi, maxovik inersiyasi va suyuqlik ishqalanishiga mos mos qo'ya olsak, u holda bu tizimlar struktiraviy va funksional o'xshash bo'ladi, ularni differensial tenglamalar bilan tavsiflash mumkin.

Mantiqiy model - bu mantiqiy xulosalar va shartlarni tahlil qilish asosida amalga oshiriladigan amallarni tanlashning turli xil variantlarini taqdim etadigan model.

Bilimlarni taqdim etishning mantiqiy modeli predikatlar mantig'ining xususiyatlaridan foydalangan holda yaratiladi. Predikat-bu faqat ikkita qiymatni qabul qiladigan funktsiya: chin va yolg'on belgilari orqali ob'ektlarning xususiyatlarini yoki ular orasidagi aloqalarni ifodalash uchun mo'ljallangan. Mantiqiy predikatlarda mulohaza atamasi qo'llaniladi. Mulohaza-ob'ektda biron bir xususiyat mavjudligini tasdiqlaydigan yoki rad etadigan iborat.

Informatsion(axborot) modeli - bu real dunyoning bir qismini axborot shaklida o'rganishdir(akslantirishdir). Axborot modelini qurish uchun bir necha bosqichlardan o'tish kerak. Ob'ektni idrok etishdan formal ko'rinishini hosil qilishgacha bo'lgan jarayon "formallashtirish", teskari jarayon esa "interpretatsiya" deb ataladi.

Axborot modeli asosida 3 ta postulat yotadi:

1. Barchasi elementlardan iborat.
2. Elementlar xususiyatlarga ega.

3. Elementlar bir-biri bilan munosabatlar orqali bog'langan.

Shu uchta postulatni qanoatlantiradigan modelni axborot modeli deyish mumkin.

Nazorat uchun savollari:

1. Model va modellashtirish tushunchalariga ta'rif bering?
2. Modellashtirish maqsadlari nimalardan iborat?
3. Matematik modelga ta'rif bering.
4. Modellashtirishning qanday turlari mavjud?
5. Modellarning xususiyatlarini sanab o'ting.
6. Modellarni qanday tasniflash xususiyatlariga ko'ra ajratish mumkin?

**2-MAVZU: MATEMATIK MODELNI QURISH VA UNI
TADQIQ QILISH USULLARI**

Reja:

1. Modellarning xususiyatlari.
2. Matematik modellarni qurish usullari.
3. Matematik modellarni qurish bosqichlari.
4. Matematik modelning o'rganilayotgan ob'ektga muvofiqligi.

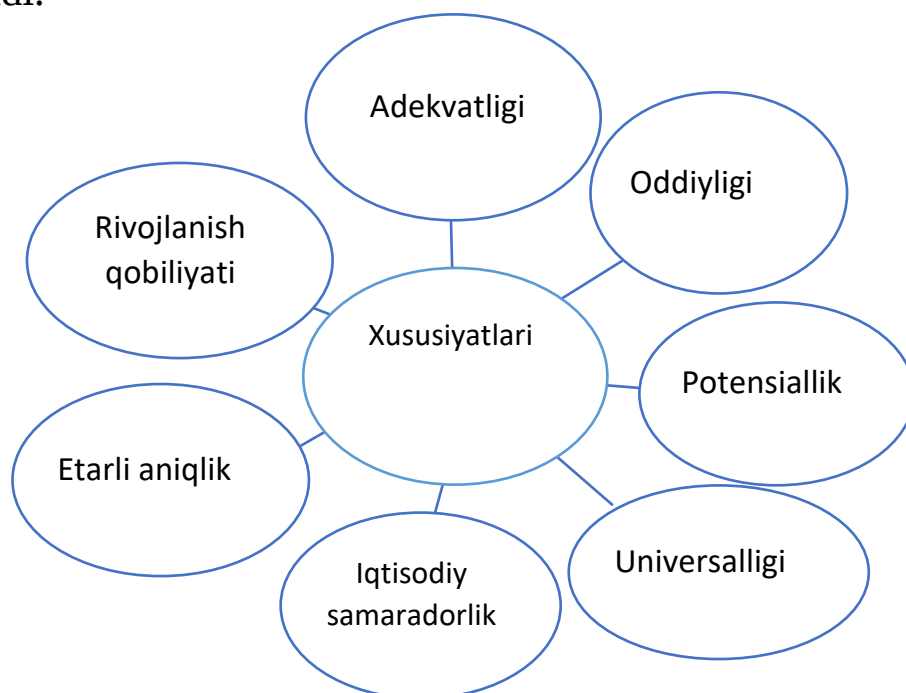
Tayanch so'z va iboralar: Matematik modellarning adekvatligi, ko'p qirraliligi, samaradorligi, matematik modellarni qurishning deduktiv va induktiv usullari, matematik modellarni qurish usullari, matematik modellarni qurishning blokli printsipi, matematik modellarni qurish bosqichlari, matematik masalaning korrektiligi, matematik modelning o'rganilayotgan ob'ektga muvofiqligi.

Matematik modellashtirish metodologiya bo'lib, matematika, fizika va biologiya kabi ilmiy fanlarda vosita sifatida ishlatiladi va ular bilan raqobatlashmaydi. Ijodiy faoliyatning deyarli barcha sohalarida tadqiqotchilardan tortib harbiy sohalarga qadar modellashtirish qo'llaniladi. Matematik modellashtirish quyidagi talablarning bajarilishi bilan ta'minlanishi kerak: tajribaga asoslangan asosiy tushunchalar va taxminlarni aniq shakllantirish (апостериорный), qo'llanilgan modellarning adekvatligini tahlil qilish, hisoblash algoritmlarining kafolatlangan aniqligi va boshqalar. Rasmiylashtirilishi qiyin bo'lgan ob'ektlarni modellashtirishda matematik va matematik bo'lmagan atamalarning farqlanishini,

shuningdek ob'ektlarni o'rganishda mavjud matematik apparatlardan foydalanish xususiyatlarini qo'shimcha ravishda hisobga olish kerak.

Matematik modellarga qo'yiladigan asosiy talablar adekvatlik, universallik va samaradorlik talablaridir (rasm. 2.1).

Adekvatlik. Agar model berilgan xususiyatlarni maqbul aniqlik bilan aks ettirsa, bunday model adekvat deb hisoblanadi. Adekvatlik model va ob'ektning chiqish parametrlari qiymatlarining mos kelish darajasi sifatida aniqlanadi. Modelning aniqligi ob'ekt ishlashining turli sharoitlarida farq qiladi. Ushbu shartlar tashqi parametrlar bilan tavsiflanadi. Tashqi parametrlar fazosida oldindan berilgan mumkin bo'lgan xatolikdan oshmaydigan modelning adekvatligi sohasini ajratish mumkin. Modellarning adekvatligi sohasini aniqlash murakkab protsedura bo'lib, u tashqi parametrlar fazosi o'lchovi oshishi bilan oshib boradi.



2.1-rasm. Modellarning xususiyatlari

Universallik. Matematik model nafaqat alohida olingan hodisa yoki ob'ektlar, shuning bilan yetarlicha keng miqyosdagi masalalarni ham yechishga qodir bo'lishi kerak.

Iqtisodiy samaradorlik. Model uni amalga oshirish uchun hisoblash resurslari xarajatlari – mashina vaqti va xotira hajmi bilan tavsiflanadi.

Oddiylilik. Hisoblashda kamroq omillarni hisobga olgan holda, shuning bilan birga kerakli aniqlikda natijaga erishish.

Potensiallik (bashorat qilish). Modelni qo'llash orqali o'rganilayotgan ob'ekt haqida yangi bilimlarni olish imkoniyati. Muammoni hal qilish natijalarining yetarlicha aniqligi, modelning ishonchliligi. Modelni tubdan o'zgartirmasdan takomillashtirish qobiliyati. Hisoblash topshirig'ini bajarishda dastlabki ma'lumotlar shakllarining soddaligi va ularni to'ldirish. Ishlab chiqilayotgan model yordamida keng ko'lamli vazifalarning hal qilinishi.

Matematik modellarni qurish usullari.

Modellarni qurishda ikki xil yondashuv qo'llaniladi:

- deduktiv (umumiydan xususiyga);
- induktiv (xususiydan umumiyga).

Birinchi yondashuvda ma'lum fundamental modelning xususiy holi ko'rib chiqiladi. Bunda, jarayonga bo'lgan yondashuvlar asosida, ma'lum model modellashtirilayotgan ob'ekt sharoitlariga moslashtiriladi. Masalan, ma'lum Nyutonning ma'lum qonuni asosida jismning erkin tushish modelini qurish va kichik vaqt oralig'ida tekis tezlanuvchan harakat modelini qabul qilish mumkin.

Ikkinchi usul gipotezani oldinga surgan holda murakkab ob'ekt dekompozitsiyasi, tahlil qilish, so'ngra sintezni o'z ichiga oladi. Bu yerda sistemani o'zini tutishi haqidagi qarashlar asosida modellashtirishda keng qo'llaniladigan o'xshashlik tushunchasi keng qo'llaniladi. Masalan, shu usul bilan atom tuzilishini modellashtirish amalga oshirilgan. Bunda Tomson, Rezerford, Bor modellarini eslash kifoya.

Matematik modellarni ishlab chiqishda quyidagi asosiy yondashuvlar mavjud :

1. **Tabiatning asosiy qonunlari.** Ushbu tamoyil eng keng tarqalgan bo'lib, muayyan vaziyatga nisbatan tabiatning asosiy qonunlaridan foydalanishdan iborat. Qoida tariqasida, bunday qonunlar tan olingan, tajriba bilan tasdiqlangan va ilmiy va texnik yutuqlarning asosidir. Shu munosabat bilan ularning qo'shimcha asoslanishiga hojat yo'q. Natijada, endi eng muhimi ma'lum bir muammoni hal qilish uchun qaysi bir qonunni tanlashda bo'lib qoladi.

2. **Variatsion tamoyillar(prinsiplar).** Ushbu yondashuv qamrovligi va universalligi bo'yicha birinchi yondashuv kabi ahamiyatga ega va o'rganilayotgan ob'ekt uchun variatsion printsiplarni qo'llashdan iborat. Bunday holda, optimallik variantlarini tanlash ma'lum shartlar asosida amalga oshiriladi. Ma'lum sinf

hodisalari uchun olingan variatsion tamoyillar mos matematik modellarni yaratishga imkon beradi. Ushbu yondashuv jarayonning konkret tabiatini hisobga olmaslikka imkon beradi.

3. Modellarni qurishda analogiyalardan foydalanish. Analogiya usuli jarayon uchun asosiy qonunlar yoki variatsion tamoyillarni qo'llash mumkin bo'lmaganda qo'llaniladi. Buning sababi shundaki, bugungi kunda bunday jarayonlar uchun qonunlar mavjud bo'lmاسligi mumkin va shuning uchun ularni matematik jihatdan tavsiflash mumkin emas. Masalan, populyatsiyalar dinamikasi uchun eng oddiy model (Maltus modeli), bu orqali radioaktiv parchalanish hodisasini tushuntirish mumkin.

4. Modellarni olish uchun ierarxik yondashuv. Barcha muhim omillarni hisobga olgan holda matematik modellarni qurish har doim ham qulay va o'zini oqlamasligi mumkin. Bu holda "oddiydan murakkabgacha" yondashuvidan foydalanish afzalroqdir. Ushbu yondashuv bilan avvalgi modellarni xususiy holatlar sifatida umumlashtiradigan to'liq modellar ierarxiyasi yaratiladi. Pastki darajadagi matematik modellar juda oddiy, tipik, birlashtirish imkoni bo'lishi mumkin, bunday modellar to'plamidan foydalanish foydadan xoli emas. Murakkab tizimning umumiy modelini ierarxik ravishda tuzishda butun tizimni optimallashtirish masalasi ushbu modelni bir qator har xil darajadagi optimallashtirish masalalariga bo'linadi. Bunday holda, optimallashtirishning umumiy mezonlari har bir daraja mezonlariga bo'linadi. Shunday qilib, katta o'lchamli vazifani bir qator kichik o'lchamli vazifalarga olib kelish mumkin. Bunda elementlar va darajalarning o'zaro ta'sirini hisobga olish kerak bo'ladi.

5. Blokli printsiplari. Matematik modellarni qurishda blokli printsiplari keng qo'llaniladi. Model ko'rib chiqilayotgan jarayonning u yoki bu tomonini aks ettiruvchi alohida mantiqiy tugallangan bloklardan quriladi. Modellarni qurishning blokli printsiplari quyidagilarga imkon beradi: matematik modelni qurishning umumiy masalasini alohida kichik masalalarga ajratish va shu bilan uni yechimini olishni soddalashtirish, shuningdek ishlab chiqilgan bloklarni boshqa modellarda ishlatish, individual bloklarni modernizatsiya qilish va ularni yangilariga almashtirish. Modelning umumiy matematik tavsifi bu alohida bloklarning matematik tavsiflari to'plami. Matematik modellarni qurishning blokli printsiplari qo'llash ko'p hollarda jarayonlarni masshtablash muammosini hal qilishga imkon beradi.

Asosan, matematik modelning har bir bloki matematik tavsifning turli darajadagi tafsilotlariga ega bo'lishi mumkin. Modelning barcha bloklarining kirish va chiqish o'zgaruvchilari o'zaro muvofiq bo'lishi juda muhim, bu butun jarayonning matematik modeli tenglamalarining yopiq tizimini olishni ta'minlaydi. Ideal holda, har bir blokning matematik tavsifi parametrlari faqat moddalarning fizik-kimyoviy xossalari bo'lgan tenglamalarni o'z ichiga olishi kerak. Har bir blokning matematik tavsifida blokning printsiptan amaliy foydalanishda uning tafsilotlarining u yoki bu darajasida empirik munosabatlarni qo'llash kerak.

Matematik modellarni qurish bosqichlari.

Matematik modellarni qurish juda qiyin jarayon bo'lib, u moddiy va vaqt resurslarining katta xarajatlarini o'z ichiga oladi, shuningdek, fan sohasida ham, amaliy matematika, raqamli usullar, dasturlash, zamonaviy hisoblash tizimlari kabi sohalarida ham yuqori darajadagi mutaxassislariga ehtiyoj borligini anglatadi.

Modellarni qurish jarayonining bosqichlari orasida quyidagilarni ajratish mumkin:

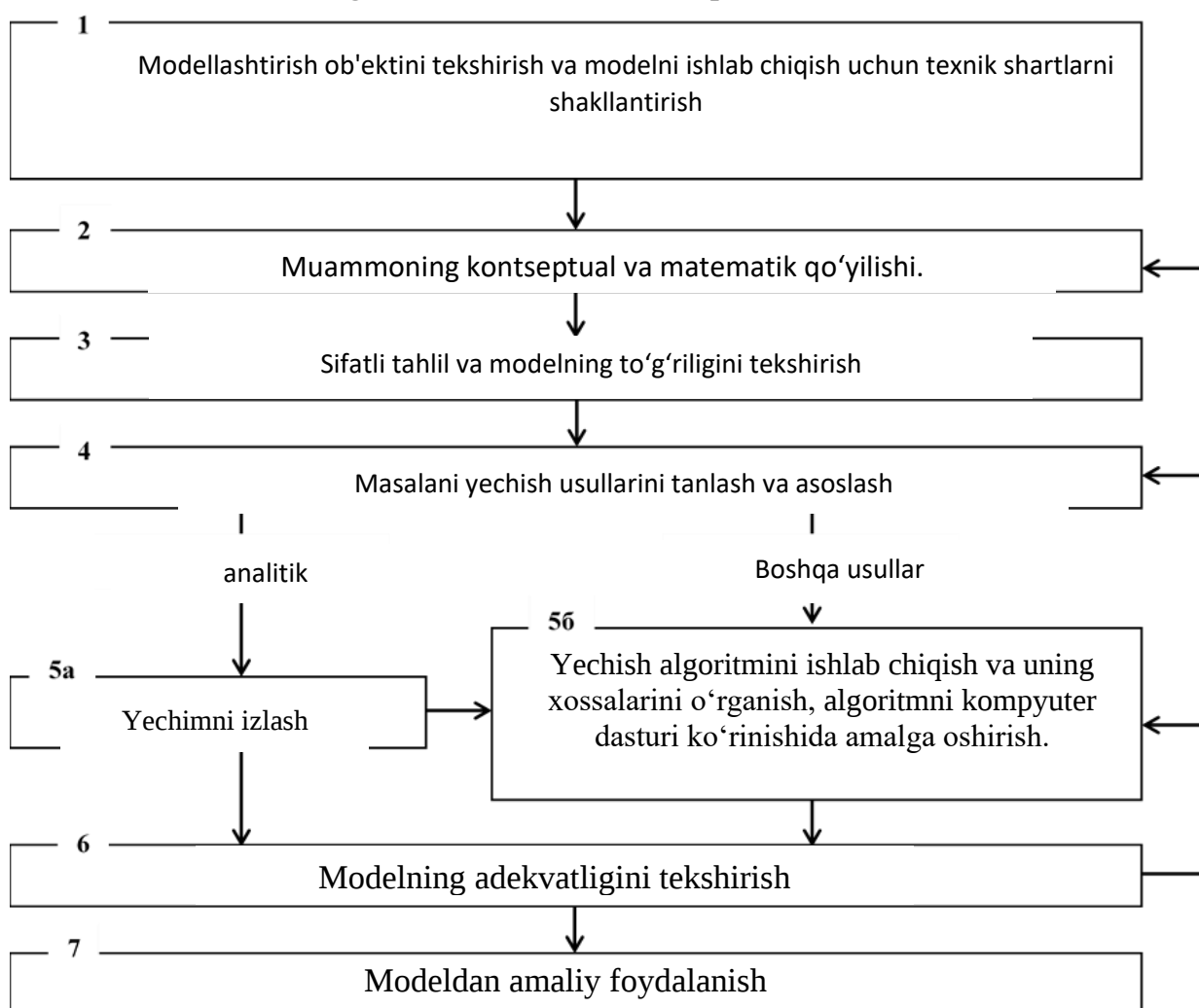
1. Modellash ob'ektini tekshirish va modelni ishlab chiqish uchun texnik shartlarni shakllantirish. Modelni loyihalash ob'ekt yoki hodisaning og'zaki-semantik tavsifidan boshlanadi. Ushbu bosqich ob'ektning tabiati, uni o'rganish maqsadlari to'g'risidagi ma'lumotlar va ba'zi mulohazalar haqida umumiy ma'lumotlardan iborat bo'ladi. Ushbu bosqichni predmetli modelning formulirovkasi deb ham atash mumkin. Bosqichning maqsadi modellash muammosining mazmunli qo'yilishini ta'minlash, ya'ni og'zaki shaklda bayon etilgan modellash ob'ekti haqidagi vazifalar to'plamini yaratish.

2. Muammoning kontseptual va matematik qo'yilishi. Ushbu bosqichda ob'ektni idealizatsiya qilish tugallanadi, muhim omillar va ta'sirlar aniqlanadi. Muammoning kontseptual qo'yilishining maqsadi modellash ob'ekti o'zini tutishidan kelib chiqib asosiy masalalarni va gipotezalarni shakllantirishdan iborat. Natijada, shakllantirilgan asosiy masalalar va gipotezalar ularning hal etilishini miqdoriy tahlil qilish uchun matematik tarzda tavsiflanadi. Matematik tavsifni tuzish bosqichida ob'ektdagi asosiy hodisalar va elementlar oldindan ajratiladi va keyin ular o'rtasida aloqalar o'rnatiladi. Bundan tashqari, har bir tanlangan element va hodisa uchun uning ishlashini aks

ettiruvchi tenglama yoziladi. Bundan tashqari, matematik tavsifda turli xil hodisalar orasidagi bog‘lanish tenglamalari qo‘shiladi. Jarayonga qarab, matematik tavsif algebraik, differentsial tenglamalar tizimi sifatida ifodalanishi mumkin. Modellash tirish ob‘ektini bir ma’noda tavsiflovchi matematik tenglamalar to‘plamini olish jarayoni modellash tirish masalasining matematik qo‘yilishi deb ataladi.

3. Sifatli tahlil va modelning to‘g‘riligini tekshirish. Olingan matematik munosabatlar tizimining to‘g‘riligini nazorat qilish uchun bir qator majburiy tekshiruvlar talab qilinadi:

- o‘lchov nazorati;
- buyurtmalarni boshqarish;
- bog‘lanish xususiyatini tekshirish;
- chegara shartlarini nazorat qilish;
- fizik ma’noni saqlanishini nazorat qilish;
- matematik bog‘lanishlarni nazorat qilish.



2.3-rasm. Matematik modelni qurish bosqichlari

"Modelning korrektiligi" tushunchasi juda muhim, ayniqsa amaliy matematikada, chunki korrekt qo'yilmagan masalalarga sonli usullarni qo'llash mumkin emas. Matematik masalaning korrektiligini aniqlash qiyin vazifadir. Matematik modelning korrektiligini ta'minlash uchun barcha nazorat tekshiruvlari o'tkazilishi kerak. Bu yerda matematik modelni yaratish bosqichi tugaydi va undan keyin "hisoblash tajribasi"ga o'tiladi.

4. Masalani yechish usullarini tanlash va asoslash. Yaratilgan model mumkin bo'lgan har qanday usul bilan, shu jumladan o'zaro tekshirish bilan o'rganiladi. Hamma modellar ham nazariy yechimga ega bo'lmaganligi sababli, so'nggi paytlarda hisoblash usullari keng qo'llanilmoqda. Ushbu holat ayniqsa chiziqli bo'lmagan ob'ektlarni tahlil qilishda muhimdir, chunki bunday ob'ektlarning jarayonda o'zini tutishi noma'lum. Masalani yechish usuliga qarab, barcha usullar quyidagilarga bo'linadi:

- **analitik.** Ushbu usullar natijalarni tahlil qilish uchun qulay hisoblanadi, ammo ularni faqat nisbatan oddiy modellarga qo'llash mumkin. Muammoning analitik echimi mavjud bo'lganda, sonli echim deyarli qo'llanilmaydi;

- **algoritmik.** Algoritmik usullar uchun kompyuter yordamida hisoblash tajribasi amalga oshiriladi. Yechish usulini tanlash va modellashtirish dasturini ishlab chiqish bosqichi mavjud usullardan eng samarali (yechimni olish tezligi va uning eng aniqligi bo'yicha) yechish usulini tanlashni, uni yechim algoritmi shaklida amalga oshirishni nazarda tutadi.

5. Kompyuter dasturlari shaklida yechim topish yoki algoritmni amalga oshirish.

Turli xil tadqiqot, loyiha-konstruktorlik masalalarini yechish uchun ishlatiladigan turli xil dasturiy ta'minot tizimlarini yaratishda, asosan, odatda matematik modellar asos bo'lib xizmat qiladi. Shu munosabat bilan modelni kompyuter dasturi shaklida amalga oshirish zarurati tug'iladi. Ishonchli va samarali dasturiy ta'minotni ishlab chiqish jarayoni murakkabligi bo'yicha matematik modelni yaratishning barcha oldingi bosqichlaridan kam emas. Ushbu muammoni muvaffaqiyatli hal qilish faqat zamonaviy algoritmik tillar va dasturlash texnologiyalarini yaxshi bilish, kompyuter texnologiyalari imkoniyatlari bilan tanish bo'lish, mavjud dasturiy

ta'minot, hisoblash matematikasi usullarini bilish bilan mumkin bo'ladi.

6. Modelning adekvatligini tekshirish. Ushbu bosqichda modelning ob'ektga va shakllangan muammolarga muvofiqligi aniqlanadi. Bunda, maqsadga erishish uchun modelni o'rganish har qanday usul bilan amalga oshiriladi, masalan, tajriba natijalari bilan taqqoslash yoki boshqa yondashuvlar bilan. Agar ularning yordami bilan olingan natija va tajriba natijalari haqiqatdan sezilarli darajada farq qiladigan bo'lsa, model bekor qilinishi yoki o'zgartirilishi kerak. Modelning ob'ektga muvofiqligi darajasini aniqlash bosqichi yakuniy hisoblanadi. Matematik modelning haqiqiy jarayonga muvofiqligini tekshirish uchun jarayon davomida ob'ektdagi tajriba o'lchov natijalari bir xil sharoitlarda olingan bo'lishi kerak.

7. Modeldan amaliy foydalanish. Yaratilgan modelning qaysi sohada qo'llanilishidan qat'iy nazar, modellashtirish natijalarini sifatli va miqdoriy tahlil qilish kerak, bu bizga quyidagicha imkoniyatlar beradi:

- ko'rib chiqilayotgan ob'ektni doimiy o'rganib borish, uning optimal xususiyatlarini aniqlab turish;
- modelning qo'llanish sohasini belgilab turish;
- Masalani matematik ishlab chiqarish bosqichida qabul qilingan farazlarning to'g'riligini tekshirish, kerakli aniqlikni saqlagan holda, uning aniqligini saqlagan holda effektivligini oshirish maqsadida uni soddalashtirish imkoniyatini baholash;
- kelajakda modelni qaysi yo'nalishda rivojlantirish kerakligini aniqlab borish.

Matematik modelning o'rganilayotgan ob'ektga muvofiqligi

Matematik modelning adekvatligi deganda ishlab chiqilgan model bo'yicha olingan natijalarning tajriba yoki test-sinov natijalari ma'lumotlariga muvofiqligi darajasi tushuniladi. Modelning adekvatligini tekshirishga o'tishdan oldin, modelning barcha algoritmlari va dasturlarining to'g'ri kompleks ishlashiga ishonch hosil qilish, barcha individual algoritmlarni mustaqil sinovdan o'tkazish kerak (masalan, ishlatilgan sonlilari usulni amalga oshiradigan dasturiy ta'minot modullarining ishlash sifatini baholash).

Modelning adekvatligini tekshirish ikkita maqsadni ko'zlaydi:

- 1) kontseptual va matematik ishlab chiqarish bosqichlarida shakllangan farazlar to'plamining korrektiligiga ishonch hosil qilish.

Gipotezani tekshirishga o'tish faqat ishlatilgan echim usullarini tekshirgandan so'ng, kompleks otladka va dasturiy ta'minot bilan bog'liq barcha xatolar va nizolarni bartaraf etgandan so'ng amalga oshirilishi kerak;

2) olingan natijalarning aniqligi texnik topshiriqda ko'rsatilgan aniqlikka mos kelishini aniqlash kerak.

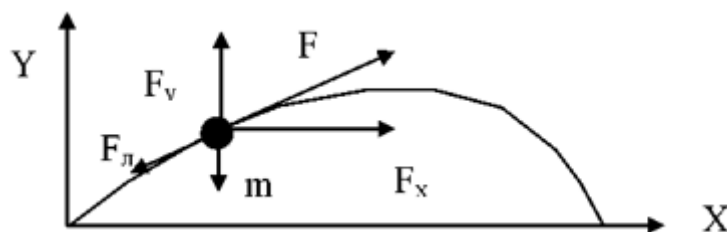
Ishlab chiqilgan matematik modelni tekshirish haqiqiy ob'ekt haqidagi mavjud tajribaviy ma'lumotlar yoki ilgari yaratilgan va yaxshi tasdiqlangan boshqa modellarning natijalari bilan taqqoslash orqali amalga oshiriladi. Birinchi holda, ular tajriba bilan taqqoslash orqali tekshirish haqida, ikkinchisida — test-sinov masalasini yechish natijalari bilan taqqoslash haqida amalga oshiriladi.

Modellashtirishning aniqligi masalasini hal qilish modelga qo'yiladigan talablarga va uning maqsadiga bog'liq. Bunday holda, tajribaviy natijalarni olishning aniqligi yoki test vazifalarini belgilashning o'ziga xos xususiyatlari hisobga olinishi kerak. Baholash va test hisob-kitoblarni amalga oshirish uchun mo'ljallangan modellarda 10-15% aniqlik qoniqarli deb hisoblanadi. Boshqarish va tekshirish tizimlarida ishlatiladigan modellarda talab qilinadigan aniqlik 1-2% yoki undan ham ko'proq bo'lishi mumkin.

Qoida tariqasida taqqoslash natijalarining sifat va miqdoriy mosligi farqlanadi. Sifatli taqqoslashda o'rganilayotgan parametrlarni taqsimlashda faqat ba'zi xarakterli xususiyatlarning mos kelishi talab qilinadi (masalan, ekstremal nuqtalarning mavjudligi, parametrning ijobiy yoki salbiy qiymati, uning ko'payishi yoki kamayishi va boshqalar). Aslida, sifatli taqqoslash bilan parametrlarni taqsimlash funktsiyasining faqat bir turi (pasayish yoki o'sish, bitta ekstremal yoki bir nechta) mos kelishi baholanadi. Miqdoriy taqqoslash masalasi natijalarning sifat jihatidan muvofiqligi haqidagi savolga qoniqarli javob berilgandan keyingina qo'yilishi mumkin. Miqdoriy taqqoslashda animatsiya uchun dastlabki ma'lumotlarning aniqligi va taqqoslanadigan parametrlarning tegishli qiymatlari katta ahamiyatga ega bo'lishi kerak.

Matematik model hech qachon ko'rib chiqilayotgan ob'ekt bilan bir xil emas, uning barcha xususiyatlari va xususiyatlarini bera olmaydi. Bu ob'ektning taqribiy tavsifi va har doim taqribiy xarakterga ega. Muvofiqlik aniqligi muvofiqlik darajasi, model va ob'ektning adekvatligi bilan belgilanadi.

Masalan, birinchi bobda ko'rib chiqilgan jism bilan modelning qo'llanilish chegaralarini belgilashimiz kerak bo'lsin. Jismga ta'sir qilish kuchlarini ko'rib chiqamiz (rasm. 2.2).



2.4-rasm. Jismga ta'sir qiluvchi kuchlarning proektsiyalari

Urinma qarshilik harakatga qarama-qarshi yo'nalishda qo'yilgan bo'ladi:

$$F_n = \xi S \rho V^2,$$

Bu yerda:

ξ - frontal (aerodinamik) qarshilik koeffitsienti; S - maydon, m^2 ; ρ - havoning zichligi, kg/m^3 ; V - jismning tezligi, m/s .

Bundan tashqari, ξ jismning shakliga va oqim jarayonining xususiyatlariga bog'liq (Re soni):

$$\xi = f(Re),$$

$$Re = \frac{V d \rho}{\mu}$$

bu yerda havoning dinamik yopishqoqligi μ , $Pa \cdot C$, d -xarakterli uzunlik, m .

Katapulta toshni 100 m gacha, traektoriya balandligi 20-30 m va tezligi 30 m/s gacha otishi mumkin. Toshning diametri 200 mm ga yetishi mumkin. Oddiy sharoitlar uchun ($t = 15^\circ C$, $\rho = 1,3 kg/m^3$, $\mu = 1,7 \cdot 10^{-5} Pa \cdot C$) Re qiymatini hisoblaymiz va baholaymiz:

$$Re = \frac{30 \cdot 0,2 \cdot 1,3}{1,7 \cdot 10^{-5}} = 4,6 \cdot 10^5.$$

Nazariy va tajribaviy tadqiqotlar asosida shar uchun $3 \cdot 10^5 < Re \leq 7 \cdot 10^2$ tortishish koeffitsienti $\xi = 0,15$ kabi qabul qilingan.

$S = \frac{\pi d^2}{4}$ deb olib, kuchni tenglama yordamida hisoblash mumkin:

$$F_n = \xi \frac{\pi}{4} d^2 \rho V^2 \text{ (tezlikka kvadratik bog'liqlik).}$$

Ushbu kuchni ko'rib chiqilayotgan vazifadagi asosiy kuch bilan - tortishish kuchi bilan taqqoslaylik:

$$P = mg = \frac{\pi d^2}{6} \rho_q g,$$

bu yerda ρ_q - jism materialining zichligi ($\rho_q = 2300 \text{ кг/м}^3$).

Yuqoridagilar asosida tenglama tuzamiz:

$$\frac{F_{\text{л}}}{P} = \frac{\xi \frac{\pi d^2}{4} \rho V^2}{\frac{\pi d^3}{6} \rho_q g} = \frac{3}{2} \xi \frac{\rho}{\rho_q} \frac{V^2}{dg}. \quad (2.1)$$

Avval (1.4) da aniqlaganimizdek $l = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (agar $\alpha = 45^\circ$, $\sin 2\alpha = 1$ bo'lsa), u holda:

$$l = \frac{V_0^2}{g} \text{ yoki } V_0^2 = lg$$

Olingan nisbatlarni 2.1 formulaga qo'yamiz:

$$\frac{F_{\text{л}}}{P} = \frac{3}{2} \xi \frac{\rho}{\rho_q} \frac{V^2}{dg} = \frac{3}{2} \xi \frac{\rho}{\rho_q} \frac{1}{d}.$$

agar $l = 100 \text{ m}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $\xi = 0,15$ bo'lsa $\frac{F}{l} = 0,03$.

Δl orqali otish masofasining absolyut xatosini belgilaymiz, u holda berilgan shartlar va diapazonda $100\text{м}\Delta l = 2 \div 3\text{м}$.

Nazorat uchun savollar:

1. Matematik modelning adekvatligi nimani anglatadi?
2. Matematik modelning ko'p qirraliligi nimani anglatadi?
3. Matematik modelni qurishning deduktiv va induktiv usullari o'rtasidagi farqlar qanday?
4. Matematik modellarni yaratishda qanday yondashuvlar mavjud?
5. Matematik modellarni yaratishning asosiy bosqichlarini sanab o'ting.
6. Reynolds sonini hisoblang $t = 30^\circ\text{C}$, $p = 1,1 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{c}$.
7. Taqqoslash natijalarining sifat va miqdoriy mosligi qanday farqlarga ega.

3-MAVZU: JARAYONLARNI MODELASHTIRISHDA ENERGIYANING SAQLANISH QONUNIDAN FOYDALANISH.

Reja:

- 1. Revolver o'qining tezligini aniqlash.**
- 2. Metall qatlamni burg'ulash jarayonini modellashtirish.**
- 3. Jarayonlarni grafiklarda aks ettirish.**

Energiyani saqlanish qonuni, boshqa tabiatni saqlanish qonunlari singari, uzoq vaqtdan beri ma'lum bo'lgan va, ehtimol, tabiatning buyuk qonunlari sifatida eng sharaflı o'rmini egallaydi. Ushbu qonundan foydalanib, jarayon modellarini yaratish mumkin. Energiyani saqlanish qonunidan foydalanib matematik modellarni olish misollarini ko'rib chiqamiz.

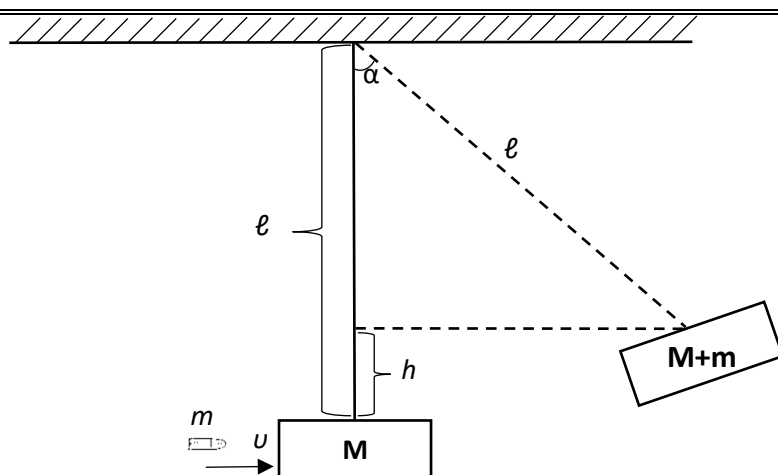
Revolver o'qining tezligini aniqlash.

Revolver o'qining tezligini tezda aniqlamoqchi bo'lgan va yaqin atrofda maxsus laboratoriyaga ega bo'lmagan ballistik mutaxassis yengil qattiq va erkin aylanadigan tayoqqa osilgan mayatnik – yuk kabi nisbatan oddiy qurilmadan foydalanishi mumkin (3.1- rasm). Mayatnik-yukga yo'naltirilgan o'q o'q-yuk tizimiga kinetik energiyasini beradi va bu o'zgarishni quyidagicha ta'riflash mumkin:

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m) \frac{V^2}{2} \quad (3.1)$$

Bu yerda $mv^2/2$ - v tezlikka ega bo'lgan m massa o'qning kinetik energiyasi, M - yukning massasi, V - to'qnashuvdan so'ng o'q-yuk tizimining olgan tezligi.

O'q-yuk tizimining bu kinetik energiyasi ipning vertikalidan eng katta burilish nuqtasida tizimning potentsial energiyasiga to'liq o'tadi:



3.1-rasm. O‘q-yuk tizimining o‘zaro ta’siri

$$(M + m) \frac{v^2}{2} = (M + m)gh \quad (3.2)$$

Bu yerda g -tortishish tezlashishi, h - to‘qnashuvdan keyin o‘q-yuk tizimining balandligi (3.1-rasm).

Yukning asl holatidan α burchakka og‘ishidan kelib chiqqan holda (3.1-rasm), noma’lum h balandlikni aniqlaymiz. Agar l -yuk osilgan ip uzunligi bo‘lsa, hosil bo‘lgan uchburchakdan $\cos \alpha = \frac{l-h}{l}$. Bu yerdan h ni topamiz

$$h = l(1 - \cos \alpha) \quad (3.3)$$

(3.3) ni (3.2) tenglamaga qo‘yish orqali biz quyidagini olamiz

$$m \frac{v^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos \alpha) \quad (3.4)$$

(3.4) dan biz o‘q tezligi v ni topamiz :

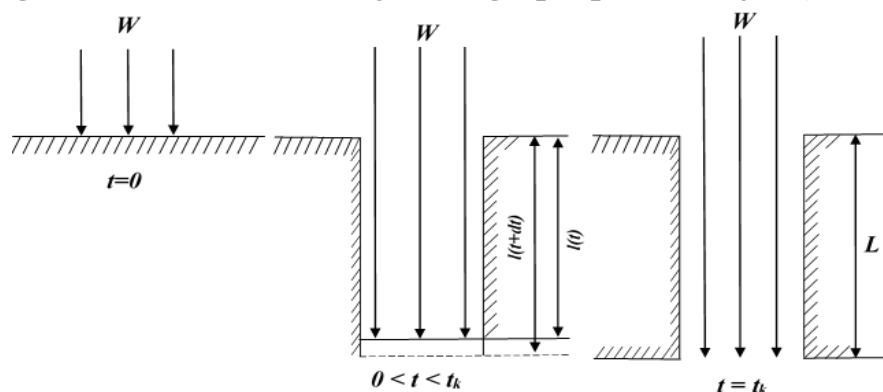
$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos \alpha)}{m}} \quad (3.5)$$

(3.5) agar o‘q va yukni isitish, havo qarshiligini yengish, ipning tezlanish olishi va boshqalar uchun energiya yo‘qotishlar hisobga olinmasa, formula aniq natija beradi. Shunday qilib, biz soddalashtirilgan jarayon modelini ko‘rib chiqdik, bu modelning aniqligini oshirish uchun keltirilgan energiya yo‘qotishlarni ham hisobga olishni talab qilinadi.

Misol tariqasida muayyan parametrlarda (3.5) ifodani hisoblashni ko‘rib chiqamiz. O‘qning massasi $m = 0,002 \text{ kg}$ bo‘lsin, yukning massasi $0,5 \text{ kg}$, ipning uzunligi $l = 1 \text{ m}$ bo‘lsin, to‘qnashuvdan keyin yukning burilish burchagi $\alpha = 60^\circ$. Ushbu kattaliklarni (3.5)

formulaga qo'yib turib quyidagiga ega bo'lamiz: $v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos \alpha)}{m}} = \sqrt{\frac{2(0,5+0,002)9,8 \cdot 1(1-\cos 60^\circ C)}{0,002}} = 156 \text{ m/c}$

Metall qatlamni burg'ulash jarayonini modellashtirish. Qalinligi L bo'lgan metallni W lazer bilan burg'ulash masalasini ko'rib chiqamiz, uning nurlanishi material yuzasiga perpendikulyar (rasm.3.2).



3.2. rasm- L qalinlikdagi metallni lazer nuri bilan burg'ulashning dastlabki, oraliq va yakuniy bosqichlari.

Agar lazer energiyasi butunlay $LS\rho$ metall ustunining burg'ulanishiga to'g'ri kelsa (L -nurlangan maydon, S -ustun hajmi, ρ -moddaning zichligi), u holda energiyaning saqlanish qonuni quyidagi tenglik bilan ifodalanadi

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho \quad (3.6)$$

Bu yerda h – birlikdagi massani burg'ulanish uchun zarur bo'lgan energiya. h qiymati quyidagi kompozitsion tuzilishga ega: $h = (T_{n\pi} - T)h_1 + h_2 + h_3$, chunki material ketma-ket $T_{n\pi}$ erish nuqtasiga qadar qizdirilishi kerak va keyin eritib, bug'ga aylantirish kerak (t - boshlang'ich harorat, h_1 - issiqlik si'g'imi, h_2 va h_3 -mos ravishda erish va bug'lanishning o'ziga xos issiqligi).

Vaqt o'tishi bilan $l(t)$ chuqurligining o'zgarishi t dan $t + \Delta t$ gacha bo'lgan vaqt oralig'ida energiyaning batafsil muvozanatidan aniqlanadi. Bu vaqt ichida bug'langan massa

$$[l(t + \Delta t) - l(t)]S\rho = dlS\rho$$

uchun energiya sarfi $dlS\rho$, undagi energiya Wdt , moddaga lazer tomonidan berilgan energiya:

$$dlhS\rho = Wdt,$$

bundan quyidagi differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\rho}$$

Oxirgi tenglamani integratsiyalash orqali (qazishning dastlabki chuqurligi nolga tengligini hisobga olgan holda) quyidagini olamiz:

$$l(t) = \frac{w}{h s \rho} t = \frac{E(t)}{h s \rho} \quad (3.7)$$

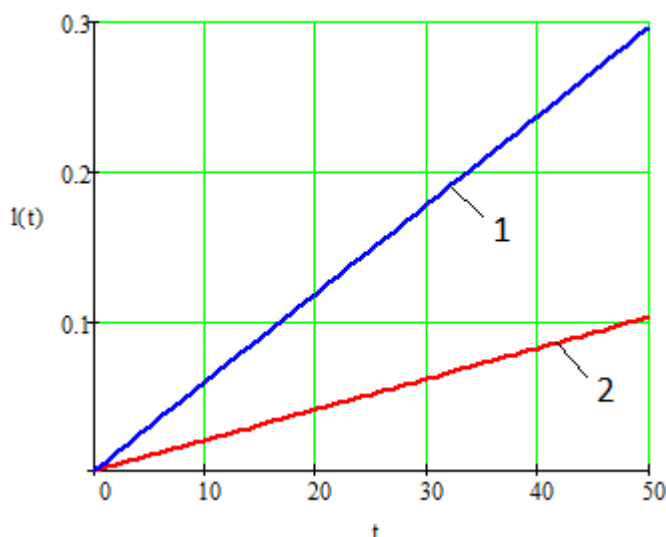
Lazer tomonidan t vaqtga ajratilgan barcha energiya $E(t)$. Shuni hisobga olgan holda qazish chuqurligi sarflangan energiyaga mutanosibdir (bundan tashqari, t_k , qiymati, $l(t_k) = L$ bo'lganda (3.6) formula bo'yicha hisoblanganga to'g'ri keladi.

Aslida, burg'ulash jarayoni ko'rib chiqilgan sxemaga qaraganda ancha murakkab-energiya moddani isitish, tartibsiz shaklga ega bo'lishi mumkin bo'lgan chuqurchadan bug'larni olib tashlash va hokazolarga sarflanadi. Ob'ekt va uning modelining muvofiqligi masalasi matematik modellashtirishda markaziy masalalardan biridir.

Muayyan misol yordamida metall va alyuminiy burg'ulashni modellashtirishni ko'rib chiqing. Metall va alyuminiydan $\rho_M = 7800 \text{ kg/m}^3$ va $\rho_a = 2700 \text{ kg/m}^3$ zichlikka ega bo'lgan moddalarni burg'ulash kerak bo'lsin. Shuningdek, uskunaning kuchi $W = 400 \text{ j/s}$, sarflangan energiya $h = 500 \text{ j}$. Burg'ulash maydoni $s = 0,05 \text{ m}^2$. (3.6) formulani qo'llaymiz

$$l(t) = \frac{W}{h s \rho} t$$

Ushbu formulani metall va alyuminiy uchun MathCADda amalga oshirish natija beradi:



3.3-rasm. Burg'ulash uzunligining vaqtga bog'liqligi. 1-alyuminiy ni burg'ilashda, 2-metallni burg'ilashda

3.3-rasmdagi grafikdan ko‘rinib turibdiki, alyuminiydan bo‘lgan materiallarni burg‘ulash metallga qaraganda osonroq.

Kalit so‘zlar:

Energiyani saqlanish qonuni, mayatnik, o‘q-yuk tizimi, kinetik energiya, potentsial energiya, erkin tushish tezlanishi, differentsial tenglama, soddalashtirilgan jarayon.

Sinov savollari:

Kinetik energiyaga ta’rif bering.

Potensial energiyaga ta’rif bering.

3. "O‘q-yuk" kinetik energiyasining o‘zgarishini yozing.

4. O‘q-yuk tizimining kinetik energiyasi qachon potentsial energiyaga aylanadi?

5. Differentsial tenglamaning echimini toping $\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hSp}$

6. Mathcadda burg‘ulash uzunligining massa birligini bug‘lash uchun zarur bo‘lgan energiyaga bog‘liqlik grafigini chizing.

4-MAVZU: DEMOGRAFIK MODELLAR.

Reja:

1. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli.

2. Maltus modeli.

3. Ferxyulst-Perl modeli.

4. Chiziqli bo‘lmagan populyatsiya modelining uch turdagi rejimi.

Tayanch so‘z va iboralar: Demografiya, Maltus modeli, cheksiz o‘shish, tug‘ilish darajasi, o‘lim darajasi, populyatsiyaning o‘shishi, Ferxyulst-Perl modeli, populyatsiya modelidagi chiziqli bo‘lmagan tur ichidagi rejim, kvadratik chiziqsizlik, turlar orasidagi ichki o‘zaro kurash.

"Demografiya" atamasi ikki yunoncha so‘zdan kelib chiqqan: "demos" — odamlar va "grafo" (grafiya) — men yozaman, tavsif. Demografiya - bu ma’lum bir hududda (dunyo, qit’alar, mamlakatlar guruhi, mamlakat, mamlakat qismlari va boshqalar) yashaydigan odamlarning yashash faoliyatidagi to‘plami sifatida olingan aholi (aholi) haqidagi fan.

"Demografiya" atamasi 1855 yilda paydo bo‘lgan, uni frantsuz olimi, statistik, demograf, tabiatshunos, Parij statistika jamiyatining

asoschilaridan biri A. Gilyard (1799-1876) "inson statistikasi elementlari yoki qiyosiy demografiya" kitobida taklif qilgan va ilmiy muomalaga kiritgan. 1872 yilda E. N. Anuchin (1831-1905) "statistikaning fan sifatida ahamiyati va xalqaro statistika Kongressi" asarida "demografiya" atamasini rus adabiyotiga kiritgan. Ushbu atama Sankt-Peterburgdagi xalqaro statistika Kongressining 8-sessiyasi ishlari bilan bog'liq holda paydo bo'ldi. "Demografiya" atamasi 1882 yilda Jeneva sessiyasida xalqaro gigiena va demografiya Kongressi nomidan rasmiy xalqaro e'tirofga sazovor bo'ldi.

Demografiya — bu ilmiy bilimlarning **ob'ekti** odamlar, aholi va **predmeti** aholining ko'payish qonunlari bo'lgan fan. Aholining tor talqinda ko'payishi faqat aholining tabiiy harakat jarayonlarini o'z ichiga oladi, ya'ni faqat tug'ilish, o'lim va ular bilan bog'liq nikoh va ajralishni o'z ichiga oladi. Aholining ko'payishi keng ma'noda migratsiya masalalarini ham o'z ichiga oladi - bu aholi soni va tarkibini o'zgartiradigan jarayon. Shunga ko'ra, demografiya haqida keng va tor tushuncha paydo bo'ldi.

Demografiyaning asosiy yo'nalishi aholining ko'payish jarayonlari, shu jumladan ularning ijtimoiy sharoitidagi tug'ilish va o'lish jarayonlari, nikoh va nikohni tugatish jarayonlari, shuningdek oilaning demografik funktsiyalari, nikoh, oila va aholining boshqa demografik tuzilmalarini tashkil qilish jarayonlari, aholining soni va tarkibidagi o'zgarish tendentsiyalarini aniqlash, demografik jarayonlarning o'zaro bog'liqligini aniqlash va demografik prognozlarni tuzish kabilardan iborat. Shu bilan birga, aholining tabiiy harakati qonuniyatlarini aniqlash demografik tadqiqotlarning asosiy vazifasidir.

Demografiya - bu jarayonning ijtimoiy-tarixiy shartlarida aholining ko'payish qonuniyatlari haqidagi fan.

Demografiyada turli xil tadqiqot usullari qo'llaniladi, ular orasida tavsiflovchi usul, statistik va matematik tahlil usullari, mavhum analitik usul, qiyosiy usul, tahlil va sintez, umumlashtirish, induksiya va deduksiya usullari, farazlarni ilgari surish va ularni tekshirish usuli, ekstrapolyatsiya va modellashtirish, demografik xulq-atvorni o'rganishning sotsiologik usullari, kartografik usullar va boshqalarni e'tirof etish mumkin. Demografiyada asosiy o'rinni statistik va matematik tahlil usullari egallaydi.

Demografik ilmiy va amaliy ishlarda eng ko'p ishlatiladigan demografik usullar orasida kogort usuli, bo'ylama va ko'ndalang demografik tahlil, potentsial demografiya usuli, demografik koeffitsientlarni standartlashtirish usullari va boshqalar mavjud. Demografik modellar ilmiy va amaliy ishlarda keng qo'llaniladi; demografik prognoz (ayniqsa, ko'pincha yoshga qarab ajratish usuli bilan amalga oshiriladi) odatda demografik mavzularda ko'p qo'llaniladi.

Maltus va Ferxyulst-Perl modellari.

Maltus modeli.

Populyatsiya sonining dinamikasi, shuningdek, jamiyat dinamikasi, ya'ni t vaqt o'tishi bilan tirik mavjudot umumiy soni $N(t)$ ning o'zgarishi populyatsiyalar rivojlanishining eng muhim masalalaridan biridir. 1798 yilda nashr etilgan populyatsiya dinamikasining birinchi modelini avstriyalik demograf va iqtisodchi Tomas Maltus (1766-1834) taklif qilgan. Maltus aholi sonining o'sishi va ishlov beriladigan maydonlar to'g'risidagi mavjud ma'lumotlardan foydalangan holda, birinchi bo'lib insoniyat sonining eksponent bo'yicha (eksponent ravishda) o'sib borishiga, oziq-ovqat ishlab chiqarish vaqt o'tishi bilan chiziqli ravishda (arifmetik progressiyada) o'sib borishiga e'tibor qaratdi, shundan u ertami-kechmi eksponenta chiziqli funktsiyani "bosib o'tadi" va ochlik paydo bo'ladi degan xulosaga keldi. Ushbu xulosalar asosida Maltus, ayniqsa, jamiyatning eng kambag'al qatlamlari uchun tug'ilish darajasiga cheklovlar qo'yish zarurligi haqida yozgan.

Alohidaolingan populyatsiyaning eng sodda "fizik"(ushbu holda biologik) modeli bu Maltus modeli bo'lib, u quyidagi cheklanishlarga asoslanadi: populyatsiya sohasi chegaralangan, uning uchun oziq-ovqat resurslari cheklanmagan va chorva mollarning o'sishi ma'lum bir vaqtda mavjud bo'lgan aholi soniga proporsionaldir.

Shunday qilib, $N(t)$ $N(t + \Delta t) - t$ va $t + \Delta t$ bir-biriga yaqin vaqtlardagi aholi soni, shunga ko'ra, $N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t$, bu yerda $r = \alpha - \beta$, $\alpha > 0$ – tug'ilish darajasi, $\beta > 0$ – o'lim darajasi. Aholining rivojlanishiga hech narsa to'sqinlik qilmaydi degan qabul qilingan taxmin bilan tug'ilish darajasi o'limdan past bo'lmaydi, shuning uchun quyidagilarni hisoblash mumkin, $r \geq 0$, bu yerda r qiymati populyatsiyaning tabiiy o'sishining tezligi deb ataladi.

Masalan, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ deb hisoblash qilish mumkin. Ushbu bosqich muammoning qo'yilishi bilan yakunlanadi: agar $t = 0$ vaqtning dastlabki momentida populyatsiya soni ma'lum bo'lsa, $t > 0$ vaqtning ixtiyoriy momentida populyatsiya sonini hisoblash kerak.

Keyinchalik, tanlangan fizik modelga mos keladigan matematik model quriladi. Albatta, $N(t)$ populyatsiyasining soni vaqtning butun sonli uzilishli funktsiyasidir. Ammo, agar populyatsiya juda katta deb hisoblasak, unda $N(t)$ uzilish funktsiyasi o'rniga uzluksiz $x(t)$ funktsiyasidan foydalanish mumkin, bunda $[x(t)]$ qiymatining butun qismi vaqtning har bir nuqtasida populyatsiya sonining $N(t)$ qiymatiga to'g'ri keladi. U holda biz quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t),$$

$x(t)$ funktsiyasi nafaqat uzluksiz, balki differensiallanadigan ham degan qo'shimcha taxmin bilan noma'lum $x(t)$ funktsiyasiga nisbatan oddiy differentsial tenglamaga o'tishimiz mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

Natijada yuqorida qurilgan eng oddiy fizik modelga mos keladigan Maltusning quyidagi matematik modeli olinadi: boshlang'ich

$$x(0) = x_0, \quad (4.2)$$

shartni qondiradigan (4.1 2.1.1) tenglamaning echimini topish talab qilinadi.

Bu yerda x_0 - populyatsiyaning boshlang'ich soni.

(4.1) Koshi masalasining (4.2) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (4.3)$$

Ushbu formuladan ko'rinib turibdiki, $\alpha = \beta$ bo'lganda aholi soni doimiy bo'lib qoladi: $x(t) \equiv x_0$ barcha $t \geq 0$ lar uchun. Biroq, r koeffitsientining kichik o'zgarishi ham, vaqt o'tishi bilan $t \rightarrow \infty$ da $x(t)$ funktsiyasining x_0 boshlang'ich qiymatidan aholi soni eksponensial ravishda cheksiz o'sib boradi. Bu holat Maltusning yer aholisining ko'payishi va undan kelib chiqadigan barcha oqibatlar haqida qo'rquviga asos bo'ldi.

Maltus modeli ekologiyada yashashning cheksiz resurslariga ega bo'lgan populyatsiyalarning hatti-harakatlarini tavsiflovchi birinchi modellardan biridir. Ushbu model $r > 0$ da populyatsiyaning cheksiz

o'sishini, $r < 0$ da uning cheksiz kamayishini va $r = 0$ da populyatsiya muvozanat holatida bo'lishini ko'rsatadi.

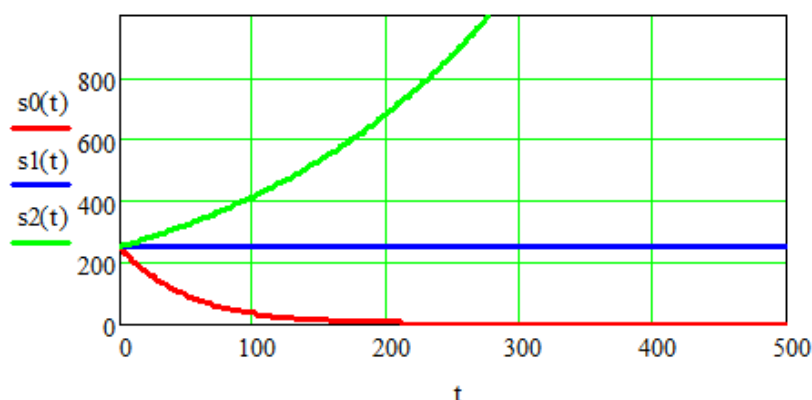
Ushbu model, o'zining soddaligiga qaramay, amaliy qiziqish uyg'otadi, chunki u ma'lum mikroorganizmlar populyatsiyasining cheklangan vaqt oralig'idagi o'zgarishini ko'rsata oladi. O'simlik va hayvonot dunyosi populyatsiyalari sonining o'zgarishini Maltusning oddiy qonuni bilan tasvirlab bo'lmaydi, o'sish dinamikasiga ko'plab o'zaro bog'liq sabablar ta'sir qiladi - xususan, har bir turning ko'payishi o'z-o'zini tartibga soladi va o'zgartiriladi, ana shuning hisobiga bu tur evolyutsiya jarayonida saqlanib qoladi.

Maltus nazariyasining zamonaviy nuqtai nazardan asosiy kamchiligi bu insoniyat sonini o'z-o'zini tartibga solish mexanizmining yo'qligi bo'lib, uni demografik o'tishga olib keladi. Demografik o'tish - tug'ilish va o'limning birgalikdagi pasayishi, natijada aholining ko'payishi avlodlarning oddiy almashishiga olib keladi. Bu jarayon yuqori tug'ilish va yuqori o'lim bilan ajralib turadigan an'anaviy jamiyatdan sanoatga o'tishning bir qismidir. Maltus davrida bu hodisa faqat ozchilik aholisi bo'lgan yirik shaharlarda kuzatilgan bo'lsa, hozirda u butun qit'alarni, shu jumladan istisnosiz barcha rivojlangan mamlakatlarni qamrab olgan.

Shu bilan birga, Maltus nazariyasi sanoatdan oldingi jamiyatlarning iqtisodiy va demografik dinamikasi qonuniyatlarini to'g'ri tavsiflaydi. Maltusning g'oyalari biologiyaning rivojlanishiga kuchli ijobiy ta'sir ko'rsatdi, birinchidan, ularning Darvinga ta'siri orqali, ikkinchidan, Gompertz va Ferxulstning logistika modelidan boshlab populyatsiya biologiyasining yanada rivojlangan matematik modellari paydo bo'ldi.

Populyatsiyaning tug'ilish va o'lish ko'efficientlari ayirmasi r noldan kichik, nolga teng va noldan katta qiymatlarni qabul qilganda Maltus modeli bo'yicha hisoblash misolini ko'rib chiqamiz. Populyatsiyaning bo'shlang'ich qiymati, ko'efficientlar qiymatlarini MathCAD tizimida kiritib turib, uchta funksiya yordamida populyatsiya o'zgarishini hisoblaymiz va grafigini chizamiz.

$$\begin{aligned} n0 &:= 250 & k0 &:= -0.02 & k1 &:= 0 & k2 &:= 0.005 & t &:= 0..500 \\ s0(t) &:= n0 \cdot e^{k0 \cdot t} & s1(t) &:= n0 \cdot e^{k1 \cdot t} & s2(t) &:= n0 \cdot e^{k2 \cdot t} \end{aligned}$$



4.1-rasm. Mathcadda Maltus modelidan foydalangan holda grafikalar

Shubhasiz, ko‘rib chiqilgan matematik model haqiqatga mos kelmaydi, chunki mavjud bo‘lgan barcha populyatsiyalarda ularning sonining cheksiz o‘shishi kuzatilmaydi. Shuning uchun yuqoridagi fizik model haqiqiy shartlar bilan o‘zgartirilishi kerak.

Ferxulst-Perl Modeli. Populyatsiya rivojlanishining haqiqatga yaqinroq tavsifi Ferxulst-Perl modelini beradi, unda joy, oziq-ovqat va boshqalar uchun turlararo raqobat tufayli izolyatsiya qilingan populyatsiyaning o‘shish tezligi pasayishi hisobga olinadi. Ichki turlar orasida kurash qanchalik ko‘p bo‘lsa, jonzotlar o‘rtasidagi uchrashuvlar soni shunchalik ko‘p bo‘ladi va uchrashuvlar soni xx ya‘ni x^2 ko‘paytmasiga proporsional bo‘ladi va populyatsiya sonining dinamikasi tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$\frac{dx}{dt} = rx - bx^2 \quad (4.4)$$

bu yerda $r = \text{const} > 0$ – populyatsiyaning tug‘ma o‘shish tezligi va $b = \text{const} > 0$ - kattaligi tur ichidagi raqobat koeffitsienti deb ataladi. (4.4) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish mumik:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (4.5)$$

Bu holda $K = r/b$ qiymati ushbu sharoitda mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soniga ega bo‘lgan barqaror statsionar holatga mos keladi va "**atrof-muhit sig‘imi**" deb nomlanadi. (4.5) differensial tenglamaning yechimi quyidagicha funksiya ko‘rinishida bo‘ladi:

$$x(t) = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{-rt}} = \frac{K \cdot x_0 e^{rt}}{K + x_0 (e^{-rt} - 1)} \quad (4.6)$$

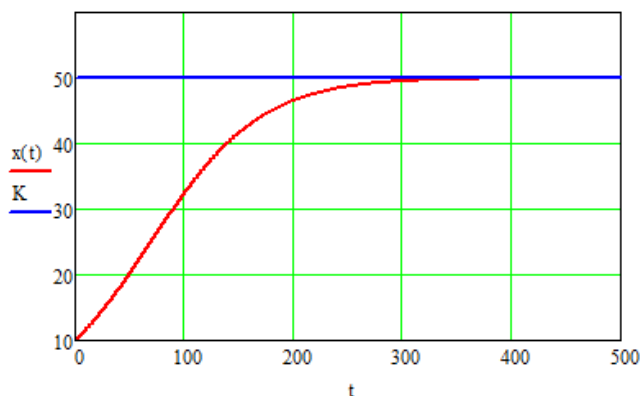
bu yerda x_0 – populyatsiyaning boshlang‘ich soni.

Logistika egri chizig‘ining tabiati r va K parametrlarining kattaligiga, shuningdek x_0 ning boshlang‘ich soniga bog‘liq.

(4.6) dan qiziqarli xulosalar chiqarish mumkin. Agar populyatsiya soni juda kichik bo‘lsa, unda raqobat populyatsiyaning o‘ziga xos o‘sish tezligiga ta‘sir qilmaydi. Agar populyatsiya soni ko‘payib, ma‘lum bir K chegara qiymatiga yaqinlashganda, o‘ziga xos o‘sish tezligi nolga tushadi. K ning chegara qiymati populyatsiyaning ekologik joy sig‘imi deb ataladi.

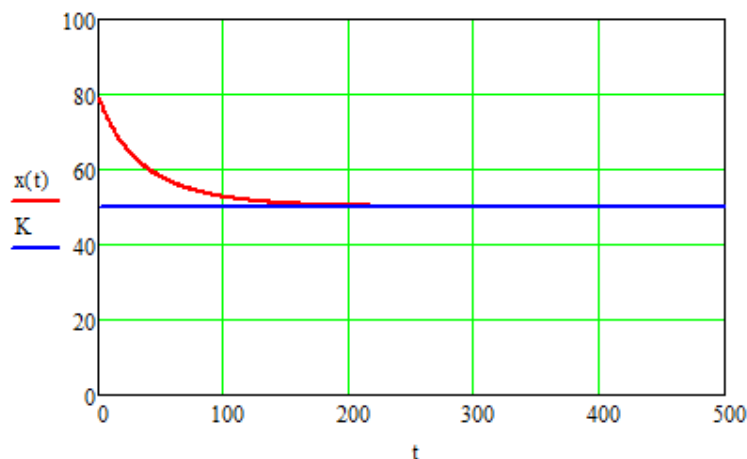
Shunday qilib, (4.6) formuladan kelib chiqadiki, $x(0) = K$ da populyatsiya soni o‘zgarmaydi: $x(t) \equiv x(0)$. Agar $x(0) < K$ bo‘lsa, unda populyatsiya soni ko‘payadi, $t \rightarrow \infty$ da K qiymatiga yaqinlashadi, lekin hech qachon unga etib bormaydi, ya‘ni aholi soni Maltus modelidagi kabi cheksiz ravishda ko‘paymaydi, ya‘ni yuqoridan cheklangan. Shuning uchun K qiymati ma‘lum bir yashash sharoitida mumkin bo‘lgan maksimal populyatsiya soni deb ataladi.

Quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz. $x(0) = 10, K = 50, r = 0,02$ bo‘lsin. Ushbu qiymatlarni (4.6) formulaga qo‘yib hisoblash 4.2- rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



4.2-rasm. Ferxulst formulasi

Ferxulst formulasi bo‘yicha aholi sonini hisoblash, bunda $x(0) < K$, ya‘ni $x_0 = 10, K = 50, r = 0,02$. $x(0) > K$ holatida populyatsiya soni kamayadi, K qiymatiga monoton ravishda yaqinlashadi. Misol uchun $x_0 = 80, K = 50, r = 0,02$ bo‘lsin. (4.6) formula bo‘yicha hisoblash 4.3-rasmda ko‘rsatilgan grafikni beradi.



4.3-rasm. Ferxulst formulasi bo'yicha aholi sonini hisoblash, bu yerda

$$x(0) > K, x_0 = 80, K = 50, r = 0,02.$$

Chiziqli bo'lmagan populyatsiya modelining uch turdagi rejimi

Yuqorida muhokama qilingan modellarning soddaligi asosan ularning chiziqliligi bilan bog'liq. Matematik nuqtai nazardan, bu muhim tushuncha superpozitsiya printsipli adolatli ekanligini anglatadi, ya'ni yechimlarning har qanday chiziqli birikmasi (masalan, ularning yig'indisi) ham masalaning echimidir. Superpozitsiya printsiptan foydalanib, har qanday alohida holatda echim topib, umumiy vaziyatda echim topish qiyin emas. Shuning uchun umumiy ishning sifat xossalarini xususiy ishning xossalari bilan baholash mumkin — ikkita echim o'rtasidagi farq faqat miqdoriy xarakterda farq qilishi mumkin. Masalan, raketa yoqilg'isining chiqish tezligining ikki baravar ko'payishi, raketa tezligining ikki baravar oshishiga olib keladi, yorug'lik nurining aks ettiruvchi yuzaga tushish burchagining pasayishi aks ettirish burchagining bir xil o'zgarishini anglatadi va hokazo. Boshqacha qilib aytganda, chiziqli modellarda ob'ektning ba'zi o'zgarishlariga munosabati ushbu o'zgarish miqdoriga proporsionalagidir.

Matematik modellari superpozitsiya printsipigiga mos kelmaydigan chiziqli bo'lmagan hodisalar uchun ob'ektning bir qismining hatti-harakati haqidagi bilim hali butun ob'ektning xatti-harakatlarini bilishni kafolatlamaydi va uning sharoit o'zgarishiga munosabati sifat jihatidan ushbu o'zgarish miqdoriga bog'liq bo'lishi mumkin.

Haqiqiy jarayonlarning aksariyati va ularga mos keladigan matematik modellar chiziqli emas. Chiziqli modellar xususiy

holatlardagina javob beradi va, qoida tariqasida, jarayonni o'rganishda faqat birinchi yaqinlashish bo'lib xizmat qiladi.

Chizisiqsizlikning Ko'plab sabablari bo'lishi mumkin. Tabiatning fundamental qonunlari - tortishish qonuni va Kulon qonuni - chiziqli emas qonunlar hisoblanadi (massalar yoki zaryadlar o'rtasidagi o'zaro ta'sir kuchining kvadratik bog'liqligi) va shuning uchun ularga asoslangan modellar, umuman aytganda, chiziqli emas. Hodisalarning yanada murakkab geometriyasi, turli xil tashqi ta'sirlar va, albatta, uning holati o'zgarganda ob'ektning o'zida o'zaro ta'sir tabiatining o'zgarishi (populyatsiya modellarida to'yinganlik ta'siri, prujinaning o'zgaruvchan qattiqligi) modellarning nochiziqliligiga sabab bo'ladi.

Aslida, haqiqiy hodisalarni faqat chiziqli bo'lmagan modellar bilan tasvirlash mumkin va chiziqli hodisalar faqat ob'ektni tavsiflovchi qiymatlarning katta bo'lmagan o'zgarishini tavsiflashda amal qiladi.

Maltus modelidan farqli o'laroq, tug'ilish koeffitsientini aholi soni $N(t)$ ga bog'liq deb hisoblaylik, ya'ni $\alpha = \alpha(N)$. O'lim darajasi β ham $N(t)$ ga bog'liq deb olganda populyatsiya dinamikasi tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N \quad (4.7)$$

Ushbu tenglama uning holati o'zgarganda populyatsiya ichidagi o'zaro ta'sir xususiyatlarining o'zgarishi tufayli chiziqli emas.

Aniqlik uchun $\beta(N) = \beta_0 = \text{const}$, $\alpha(N) = \alpha_0 N$ deb olaylik. Ya'ni tug'ilish darajasi aholi soniga proporsional (masalan, populyatsiya a'zolari uning o'sishidan manfaatdor bo'lganda). U holda (4.7) tenglama quyidagi kvadratik nochiziqlik shakliga keladi (ba'zi kimyoviy reaksiyalarga xos)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (4.8)$$

$N(t)$ funktsiyasining turli xil $N(0) = N_0$ boshlang'ich qiymatlardagi hatti-harakatlarini ko'rib chiqamiz (4.3 - rasm).

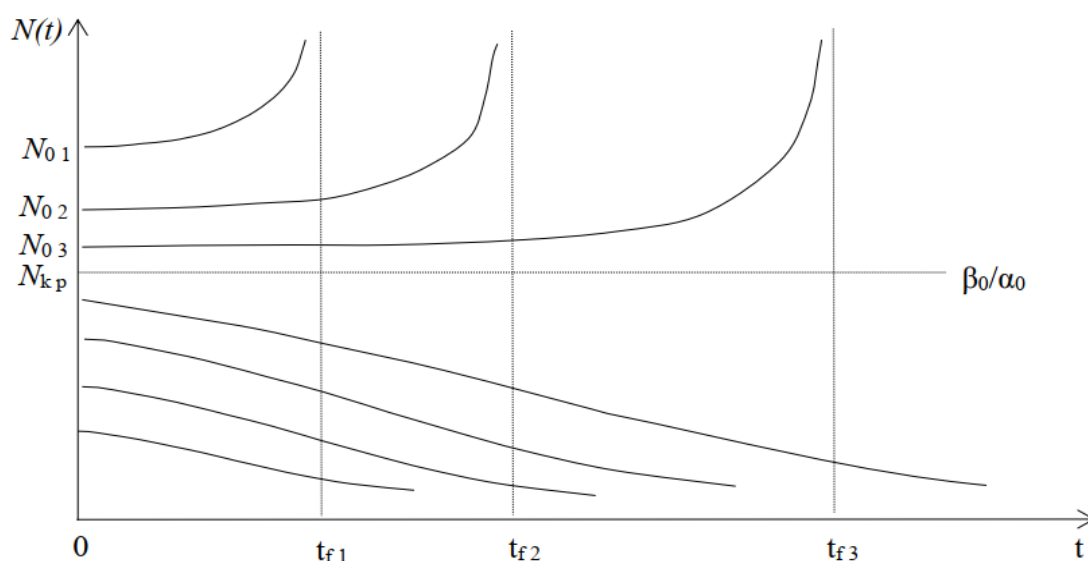
a) agar $N_0 < N_{kp} = \beta_0/\alpha_0$ bo'lsa, aholi soni vaqt o'tishi bilan monoton ravishda kamayib, $t \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

b) $N_0 = N_{kp}$, ya'ni boshlang'ich aholi soni kritik qiymatga teng bo'lganda aholi sonining o'zgarishi vaqtga bog'liq emas, o'zgarmas bo'lib qiladi.

v) $N_0 > N_{kp}$ bo'lganda yechim xarakteri a) va b) ga nisbatan o'zgaradi: aholi soni vaqt o'zgarishi bilan shunday tezlikda oshadiki,

qandaydir $t = t_f$ da cheksizlikka intiladi. N_0 qiymati qancha katta bo'lsa, t_f qiymati shuncha kichik bo'ladi.

(2) tenglamaning chiziqli emasligi, hatto eng oddiy modelda ham mavjud bo'lgan turli xil effektlarni keltirib chiqaradi: vaqt o'tishi bilan populyatsiya sonining o'zgarishi uchun uchta mumkin bo'lgan rejim; rejimning turg'un emasligi b) – populyatsiya o'zgarish sohasidagi kichik og'ishlarda a) yoki c)da echim $N_{kp} = \beta_0/\alpha_0$ chiziqdan uzoqlashadi; $N(t)$ funksiyasining dastlabki N_0 qiymatiga kuchli sezgirliги va nihoyat, $N_0 > N_{kp}$ aholi sonining qisqa vaqatda keskin o'sishi.



4.3-rasm. $N(t)$ ning turli xil boshlang'ich qiymatlarda o'zini tutishi

Shunga e'tibor berish kerakki, oxirgi model xususiy natija emas, balki quyidagi ko'rinishdagi har qanday turdagi modellar uchun o'rinli

$$\frac{dN}{dt} = F(N), t > 0, N(0) > 0, F(N) > 0,$$

agar N ning katta qiymatlarida $F(N)$ funksiyasi N ning birinchi darajali qiymatlariga qaraganda tezroq o'ssa, aniqrog'i, agar $f(N)$ uchun yuqoridagi tenglamaning to'g'ridan-to'g'ri integrallash natijasida hosil bo'luvchi ushbu mezon to'g'ri bo'lsa

$$\int_{N_0}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty$$

Nazorat uchun savollar:

1. Demografiya atamasi nimani anglatadi?
2. Maltus modeli qanday ko'rinishga ega?

3. Maltus modelining afzalliklari nimada?
4. Maltus nazariyasining qanday kamchiliklari bor?
5. Ferxyulst-Perl modelini tushuntirib bering.
6. Ferxyulst-Perl modeliga misol keltiring.
7. Chiziqli bo'lmagan populyatsiya modelining uchta rejimi haqida ma'lumot bering.

5-MAVZU: RAQOBATDAGI JARAYONLARNING TURLI MODELLARI.

Reja:

1. Yirtqich-o'lja tizimi O'rtasidagi munosabatlar modeli.
2. Ikki mamlakat o'rtasidagi qurollanish poygasi modeli
3. Ikki armiyaning jangovar harakati modeli.

Yirtqich-o'lja tizimi — yirtqich va o'lja turlari o'rtasida uzoq muddatli munosabatlar asosida amalga oshiriladigan murakkab ekotizim. Yirtqichlar va ularning o'ljalari o'rtasidagi munosabatlar neytral muvozanatning tasviri sifatida davriy ravishda rivojlanadi.

O'ljalar tomonidan yirtqichlarga qarshi kurashish uchun ishlab chiqarilgan moslashuvlar yirtqichlarda ushbu moslashuvlarni yengish mexanizmlarini topishni talab qiladi. Yirtqichlar va o'ljalarning uzoq muddatli birgalikdagi mavjudligi o'zaro ta'sir tizimining shakllanishiga olib keladi, bunda ikkala guruh ham o'rganilayotgan hududda barqaror saqlanadi. Bunday tizimning buzilishi ko'pincha salbiy ekologik oqibatlarga olib keladi.

Yirtqichlar va o'ljalar, masalan, quyonlar va bo'rilar ma'lum bir izolyatsiya qilingan hududda yashasin. Quyonlar har doim yetarli miqdorda mavjud bo'lgan o'simlik ovqatlarini iste'mol qiladilar. Bo'rilar faqat quyonlar bilan ovqatlanishi mumkin. Matematik modelni tuzish uchun quyonlar (o'lja) sonini x orqali, bo'rilar (yirtqichlar) sonini y orqali belgilaylik. Quyonlarda oziq –ovqat miqdori cheksizligi sababli, ular soniga mutanosib tezlikda ko'payadi deb taxmin qilishimiz mumkin, ya'ni Maltus modeliga mutanosib ravishda ax kabi qabul qilishimiz mumkin. Agar quyonlarning tug'ilish darajasi ularning o'limidan katta bo'lsa, u holda $a > 0$.

Quyonlarning kamayishi quyonning bo'ri bilan uchrashish ehtimoliga mutanosib bo'lsin, ya'ni xy sonining ko'paytmasiga

mutanosib cxy ga teng. Boʻrilar soni tezroq oʻsib boradi, deb taxmin qilish mumkin, chunki ular quyonlar bilan tez-tez uchrashadilar, yaʼni dxy bilan mutanosib. Bundan tashqari, boʻrilarning tabiiy oʻlim jarayoni sodir boʻladi va oʻlim darajasi ularning soniga mutanosib va βy ga teng deb hisoblaylik.

Ushbu eng sodda, yaʼni "yirtqich-oʻlja" ikki tomonlama tizimining matematik modeli quyidagi taxminlarga asoslanadi:

1) oʻlja va yirtqichlar populyatsiyalari soni x va y faqat vaqtga bogʻliq;

2) oʻzaro taʼsir boʻlmasa, turlarning soni Maltus modeliga koʻra oʻzgaradi: bu holda oʻljalar soni koʻpayadi va yirtqichlar soni kamayadi, chunki bu holda (biz boʻrilar uchun boshqa yemish yoʻq deb olgan edik) yirtqichlar hech narsa bilan ovqatlanmaydilar:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta y, \quad \alpha > 0, \beta > 0;$$

3) ikkala populyatsiyaning oʻzgarishiga tabiiy oʻlim hisobga olinmaydi;

4) ikkala populyatsiya sonining toʻyinganligi taʼsiri hisobga olinmaydi;

5) oʻlja sonining oʻsish surʼati yirtqichlar soniga mutanosib, yaʼni kattaligi cxy ga teng ravishda kamayadi, bunda $c > 0$ va yirtqichlarning oʻsish surʼati oʻlja soniga mutanosib, yaʼni kattaligi δxy , $\delta > 0$ ravishda oshadi.

(1)-(5) taxminlarni birlashtirib, biz Lotka-Volterra tenglamalar sistemasiga asoslangan matematik modelga kelimiz.

Yaʼni, ushbu mulohazalar oʻlja(quyonlar)ning x va yirtqich(boʻrilar)ning y sonlari oʻzgarishi uchun quyidagi tenglamalar sistemasiga olib keladi:

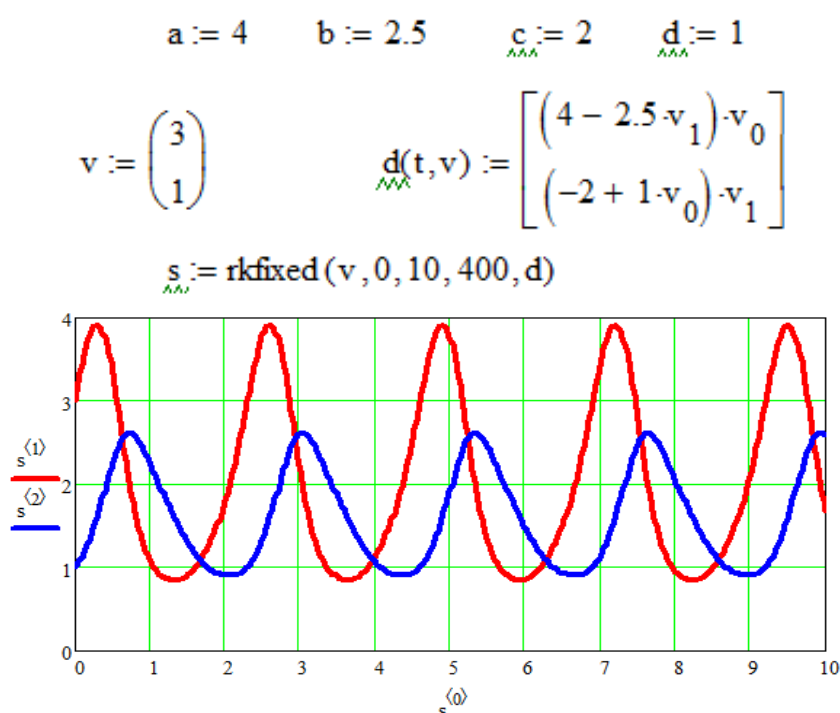
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - cxy, & \alpha > 0, c \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} = -\beta y + \delta xy, & \beta > 0, \delta \geq 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan $x(0)=x(t=0)$, $y(0)=y(t=0)$ boshlangʻich shartlari va α , c , β , δ koefitsientlarining berilgan qiymatlari boʻyicha istalgan $t > 0$ vaqtda populyatsiya sonini aniqlash mumkin.

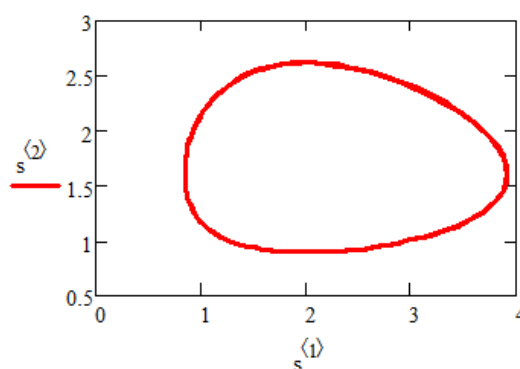
Mathcad matematik tizimida (5.1) modeli asosida koefitsientlarning $\alpha=4$, $c=2.5$, $\beta=2$, $\delta=1$ qiymatlarilari va $x(0)=3$,

$y(0)=1$ boshlang'ich shartlarida yirtqich va o'ljaning vaqt bo'yicha o'zgarishi 5.1-rasmda, fazoviy ko'rinishi 5.2-rasmda ko'rsatilgan.

Ko'rinib turibdiki, jarayon davriy tebranish xususiyatiga ega. Ikkala turlar soni uchun boshlang'ich berilgan boshlang'ich nisbati 3:1 bo'lsa, ikkala populyatsiya ham boshida o'sadi. Yirtqichlar soni $b=2$ ga yetganda, o'ljalar soni tiklanishi uchun vaqt yetmay qoladi va ular soni kamayishni boshlaydi. Bir muncha vaqt o'tgach, oziq-ovqat miqdorining kamayishi yirtqichlar populyatsiyasiga ham ta'sir qila boshlaydi va o'ljalar soni $x = \frac{c}{d} = 2$ ga yetganda, yirtqichlar soni ham kamayishni boshlaydi, ularga mos o'ljalar soni ham kamayadi.



5.1-rasm. Vaqt bo'yicha qurbonlar(qizil) va yirtqichlar(ko'k) soni



5.2-rasm. Yirtqich-o'lja hatti-harakatlarining fazaviy trayektoriyasi

Populyatsiyaning kamayishi yirtqichlar soni $a/b=1,6$ ga yetguncha sodir bo'ladi, bu nuqtada $x=0$. Shu paytdan boshlab o'ljalarning soni ko'payib boshlaydi; bir muncha vaqt o'tgach, yirtqichlarning ko'payishini ta'minlash uchun oziq-ovqat yetarli bo'ladi, ikkala populyatsiya ham o'sadi va jarayon qayta-qayta takrorlanadi. Grafikda jarayonning davriy tabiati aniq ko'rsatilgan. Yirtqichlar va o'ljalarning soni mos ravishda $x=2$, $y=1.6$ qiymatlari yaqinida o'zgarib turadi. Bu yerda kasr sonlar "bo'rinin yarmi" degani emas: bu miqdorlar yuzlab, minglab va hokazolarda o'zgarishi mumkin.

Jarayonning davriyligi faza tekisligida aniq ko'rinadi: faza egri chizig'i $(x(t), y(t))$ yopiq chiziq. Ushbu egri chiziqning eng chap nuqtasi, $y=a/b=1.6$ -o'ljalarning soni eng kichik qiymatga yetadigan nuqta. Eng o'ng nuqta, $x=4$, $y=1.6$ – o'ljalarning sonining eng yuqori nuqtasi. Ushbu nuqtalar orasida yirtqichlar soni avval faza egri chizig'ining pastki nuqtasiga, $x=c/d=2$ ga kamayadi, u yerda u eng kichik qiymatga yetadi va keyin faza egri chizig'ining yuqori nuqtasiga ko'tariladi ($x=2$, $y=2.5$). Faza egri chizig'i $x=2$, $y=1.6$ nuqtani qamrab oladi. Differensial tenglamalar tilida bu tizimning statsionar holatiga ega ekanligini anglatadi ($x=0$, $y=0$), bu $x=2$, $y=1.6$ nuqtada erishiladi.

Ikki mamlakat o'rtasidagi qurollanish poygasi modeli

Bugungi kunda qurolli to'qnashuvlarning paydo bo'lishini bashorat qilishning ko'plab usullari mavjud. Ularning ko'pligi zamonaviy dunyodagi urushlardan oldin har xil holatlar to'plami bo'lishi mumkinligi bilan izohlanadi, ularni biron bir model bilan ifodalash qiyin. Urushlarni bashorat qilishning birinchi bo'lib ingliz meteorologi Lyuis F. Richardson tomonidan amalga oshirilgan, ya'ni, agar ba'zi qarama-qarshi davlatlar o'rtasida qurollanish poygasi paydo bo'lgan yoki mavjud bo'lsa, o'zining bashorat qilish funksiyasini muvaffaqiyatli bajara oladigan matematik modelni yaratgan edi. Ushbu model yordamida qurollanish poygasining mohiyatini tahlil qilib, vaziyatni yanada rivojlantirish uchun juda aniq bashorat qilish mumkin edi. Richardson katta hajmdagi matematik bilimlar bilan urush hodisasini o'rganishda qo'llashga qaror qiladi. Richardson haqli ravishda zamonaviy urushlardan (shu jumladan birinchi jahon urushidan) oldin qurollanish poygasi bo'lgan deb taxmin qiladi, shuning uchun u qanday va qanaqa qurollanish poygasi urushning paydo bo'lishiga olib kelishini tushunish uchun ushbu hodisani ko'rib chiqadi. Richardson modeli – harbiy qarama-qarshilik modelidir.

Muallif ikki qarama-qarshi tomonni o'rganib chiqadi. Ularning har biri qurollanish darajasini ko'rsatadigan faqat bitta o'zgaruvchiga tegishli. Richardson modeli dinamik model hisoblanadi. Bu bizga fazaviy holatlarning barqarorligi va beqarorligi masalalarini batafsil ko'rib chiqishga, vaqt o'tishi bilan tomonlarning kuchlari muvozanatini o'rnatilishiga yoki buzilishiga olib keladigan yo'llarni o'rganishga imkon beradi.

Richardsonning qurollanish poygasi modelini qarab chiqamiz. Modelni tahlil qilish natijalari $x(t)$, $y(t)$ grafikalarini tuzish orqali raqamli hisob-kitoblar bilan tasdiqlanadi. Faza fazosi uchun tegishli dastlabki shartlarni belgilab, model ko'rinishini yaratishga o'tish mumkin.

Ikki urushayotgan davlat bo'lishi mumkin bo'lgan quyidagi vaziyatni ko'rib chiqamiz. Birinchi mamlakat ("sariq") qo'shni dushman mamlakat ("yashil") bilan urush xavfi paydo bo'lishidan qo'rqib qurollanadi. O'z navbatida, "Yashillar" sariqlar uchun qurol-yarog' narxining oshishini bilib, qurol-yarog' xarajatlarini ham oshiradi. Aytaylik, har bir mamlakat qurollarning o'sish (qisqarish) tezligini boshqasining xarajatlar darajasiga mutanosib ravishda o'zgartiradi. Matematik jihatdan bu holatni quyidagicha modellashirish mumkin. $X(t)$ - $t \geq 0$ momentiga qadar "sariq"larning qurollanish xarajatlari, $y(t)$ xuddi shunday, ammo "yashil"lar uchun qurollanish xarajatlari bo'lsin. U holda qurollanish poygasining eng oddiy modelini o'zgarmas koeffitsiyentli ikkita chiziqli differensial tenglamalar ko'rinishida shakllantirish mumkin:

$$\begin{cases} dx/dt = ay, \\ dy/dt = bx \end{cases} \quad (5.3)$$

Bu yerda a va b musbat doimiylardir. Ushbu tenglamalar bir-biriga teskari bo'lgan aloqani tavsiflaydi. (5.3) model quyidagi kamchilikka ega: qurol-yarog' narxining oshishi hech narsa bilan cheklanmagan. Shuning uchun mudofaa xarajatlarining hozirgi darajasi qanchalik katta bo'lsa, uning o'sish sur'ati shunchalik past bo'ladi (salbiy teskari aloqa) degan fikr haqiqatga yaqin. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx, \\ dy/dt = bx - ny, \end{cases} \quad (5.4)$$

Bu yerda a, b, m, n - musbat o'zgarmaslar. L. Richardson tomonidan modelga kiritilgan uchinchi postulatni ko'rib chiqamiz: davlat boshqa

davlatlar ushbu davlatning mavjudligiga tahdid solmasa ham, o'zining davlat da'volari va boshqa davlatlarga dushmanligi asosida qurollarog'larni ko'paytirayotgan bo'lsin. R va s ($r > 0$ va $s > 0$) orqali tegishli da'vo ko'effitsiyentlarini belgilaymiz. Bundan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} dx/dt = ay - mx + r, \\ dy/dt = bx - ny + s, \end{cases} \quad (5.5)$$

Ushbu sistemaning yechimi $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalari bo'lib, ular x_0, y_0 (qurollanish poygasining dastlabki holati) boshlang'ich shartlari bilan aniqlanadi. Modelning elementar tahlilini o'tkazamiz. Qurollanish poygasidan "oqilona" talab qilinadigan eng muhim xususiyatlardan biri bu barqarorlikdir. Ushbu talabni quyidagicha rasmiylashtiraylik: qurollanish xarajatlari darajasi doimiy bo'lishi va vaqtga bog'liq bo'lmasligi kerak:

$$dx/dt = dy/dt = 0, \quad (5.6)$$

ya'ni, tizim muvozanat holatida bo'lishi maqsadga muvofiqdir. (5.6)dan kelib chiqib (5.5) tizim uchun muvozanat shartlari quyidagi shaklda yoziladi:

$$ay - mx + r = 0, \quad (5.7)$$

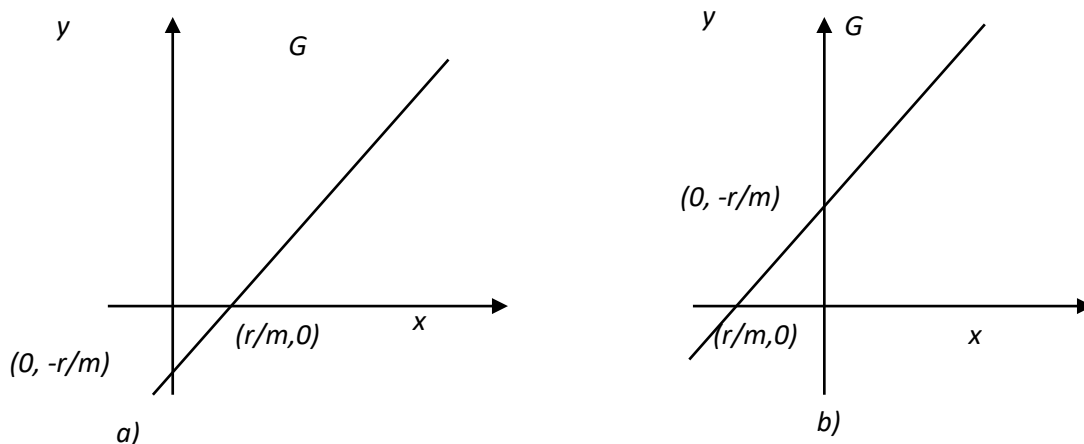
$$bx - ny + s = 0, \quad (5.8)$$

(5.7) va (5.8) dan biz quyidagini aniqlaymiz:

$$y = (m/a)x - r/a \quad (5.9)$$

$$y = (b/n)x + s/n \quad (5.10)$$

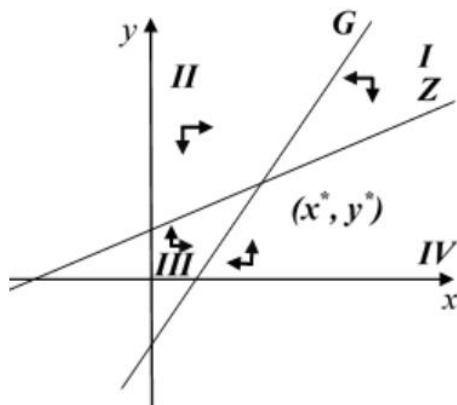
Endi (5.9) chiziqli tenglamaning geometrik talqinini (x, y) koordinatalar tekisligida ko'rib chiqaylik (5.3-rasm).



5.3–rasm. (5.9) tenglamaning geometrik talqini: $a - r > 0$ da;
 $b - r < 0$ da

G chizig'idagi barcha nuqtalar uchun bizda $dx/dt=0$ yuqoridan ma'lum. Aytishimiz mumkinki, (5.5) sistemaning birinchi tenglamasi faza tekisligidagi nuqtaning harakat tezligining gorizontalkomponentini, ikkinchi tenglama esa vertikalni belgilaydi. Agar faza tekisligining ma'lum bir nuqtasida $dx/dt>0$ bo'lsa, u holda $x(t)$ ortadi va tizimning yechimi shu nuqtadan o'ngga, agar $dx/dt<0$ bo'lsa, u holda chapga siljiydi. Xuddi shunday, agar $dy/dt>0$ bo'lsa, u holda nuqta yuqoriga (pastga) siljiydi.

Algebra kursidan ma'lumki, g to'g'ri chiziq tekislikni (x, y) ikkita yarim tekisliklarga ajratadi.



5.4-rasm. Birinchi chorakdagi muvozanat nuqtasi

Birinchi yarim tekislikning barcha nuqtalari uchun $dx/dt>0$, ikkinchi yarim tekislik uchun esa $dx/dt<0$. Shu tartibda, ushbu sistemaning ikkinchi tenglamasi Z to'g'ri chiziq uchun to'g'ri keladi (vertikal tortishish) (5.4-rasm). G va Z to'g'ri chiziqlari birinchi chorakni I, II, III, IV Rim raqamlari bilan belgilangan to'rtta sohaga ajratadi.

Richardson modelining hatti-harakatlarini $t \rightarrow \infty$ bo'lganda tahlil qilamiz. Bunda uchta holat bo'lishi mumkin:

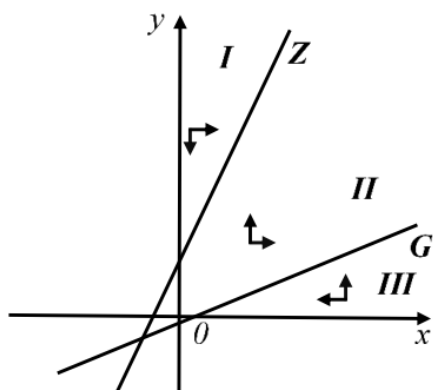
1. Cheksiz qurollanish poygasi: $x \rightarrow \infty$ va $y \rightarrow \infty$.
2. O'zaro qurolsizlanish: $x \rightarrow 0$ va $y \rightarrow 0$.
3. Qurol muvozanati: $x \rightarrow x^*$, $y \rightarrow y^*$, bu yerda $x^*, y^* > 0$.

Muvozanat nuqtasi (x^*, y^*) G [(5.7) tenglama] va Z [(5.8) tenglama] chiziqlarining kesishmasida joylashgan (5.4 - rasm). Agar $r>0$ va $s>0$ bo'lsa, unda G va Z kesishish nuqtasi birinchi(5.4 rasmga qarang) yoki uchinchi(5.5 rasm) kvadrantda joylashganligini ko'rsatish oson.

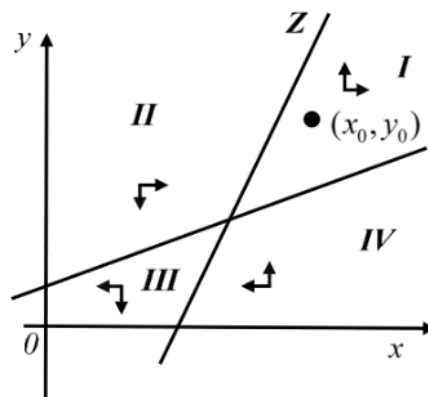
5.4-rasmdagi yo'nalishlar faza tekisligining ma'lum bir choragida joylashgan nuqta harakatining gorizontalkomponentini va vertikal tashkil

etuvchilarini ko'rsatadi. 5.4-rasmda ko'rsatilgan chizmada, har qanday boshlang'ich nuqtadan boshlab, yechim vaqt o'tishi bilan muvozanat nuqtasiga keladi, qurollanishning boshlang'ich darajasidan qat'iy nazar, "kuchlar muvozanati" ga erishiladi. 5.5 - rasmdan ko'rinadiki, agar boshlang'ich nuqta II sohaga tushgan bo'lsa, u holda $x \rightarrow \infty$ va $y \rightarrow \infty$.

r, s koeffitsiyentlaridan kamida bittasi $r, s < 0$ bo'lgan vaziyatni ko'rib chiqamiz (5.6-rasm). Agar boshlang'ich xarajatlar darajasi, ya'ni



5.5-rasm. Uchinchi kvadrantdagi muvozanat nuqtasi



5.6-rasm. $R < 0$ yoki (va) $s < 0$ da tizimning o'zini turishi.

(x_0, y_0) nuqta I sohada bo'lsa, unda qurollanish poygasi cheksiz bo'ladi. Agar boshlang'ich nuqta III mintaqada bo'lsa, u holda (5.4) tizimning yechimi ham (x^*, y^*) muvozanatdan "chiqib ketadi", lekin u $(0, 0)$ nuqtaga intiladi (o'zaro qurolsizlanish).

Shunday qilib, bir yoki hatto ikkala davlatda ham "yaxshi niyat" ning mavjudligi $r, s < 0$ qurollanish poygasining qoniqarli natijasini kafolatlamaydi. Bularning barchasi tizimning dastlabki holatiga bog'liq. Shubhasiz, Richardson modelining hatti-harakati a, b, m, n koeffitsiyentlari va r, s qiymatlarning ishorasiga bog'liq; bunda quyidagi 4 ta holatdan biri bo'lishi mumkin:

Agar $mn - ab > 0, r > 0, s > 0$ bo'lsa, unda muvozanat nuqtasi mavjud.

Agar $mn - ab < 0, r > 0, s > 0$ bo'lsa, unda modeldan mantiqan qurollanish poygasining cheksiz kuchayishi kelib chiqadi.

Agar $mn - ab > 0, r < 0, s < 0$ bo'lsa, unda to'liq o'zaro qurolsizlanish kafolatlanadi.

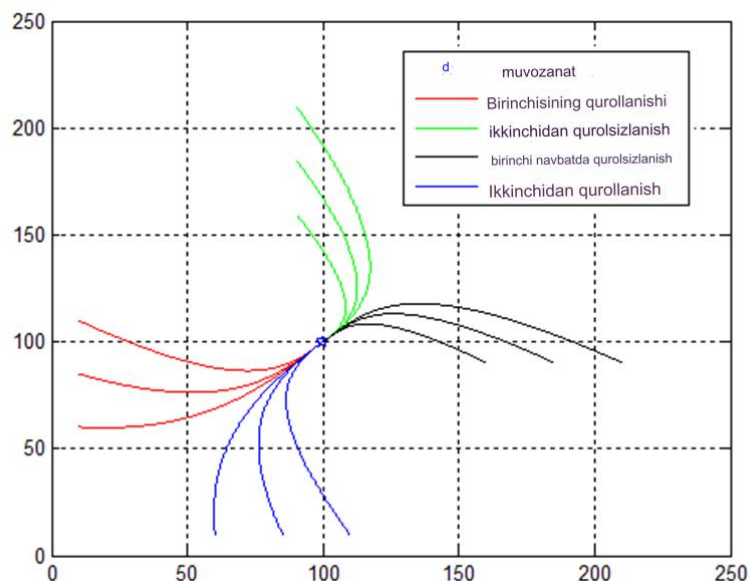
Agar $mn - ab < 0, r > 0, s > 0$ bo'lsa, unda bashoratning pessimistligi yoki optimizmi dastlabki holatga bog'liq.

Ushbu model urushlarni faqat qurollanish poygasi oldidan bashorat qilishi mumkin, ammo, davlatlar o'rtasida yadroviy urush paydo

bo'lishi uchun qurollanish poygasi umuman talab qilinmaydi: yadro quroliga ega davlatlarda yadroviy kallakli raketalar allaqachon mavjud va ularning kuchi butun yer aholisini yo'q qilish uchun yetarli. Ushbu urushlarni bashorat qilish uchun yanada murakkab matematik vositalar bilan ishlaydigan boshqa modellar kerak bo'ladi.

MATLAB muhitida qurollanish poygasi modeli:

```
clear
a1=0.1 ; a2=0.1 ;
b1=0.2 ; b2=0.2 ;
y1=10 ; y2=10 ;
M1=210; M2=90;
m1x=M1; m2x=M2;
z=1;
for i=1:0.01:100
dM1=(a1*m2x-b1*m1x+y1)*0.01;
m1x=m1x+dM1;
M1(z)=m1x;
dM2=(a2*m1x-b2*m2x+y2)*0.01;
m2x=m2x+dM2;
M2(z)=m2x;
t(z)=z;
z=z+1;
end
k1=(a1*y2+b2*y1)/(b1*b2-a1*a2);
k2=(a2*y1+b1*y2)/(b1*b2-a1*a2);
grid on
hold on
plot(M1,M2,'r');
plot(k1,k2,'p');
```



**5.7-rasm. Matlabda tuzilgan dastur natijasi grafigi
Ikki armiyaning jangovar harakati modeli.**

Harbiy va jangovar harakatlarni modellash qoʻmondonlikka qaror qabul qilish uchun haqiqatga yaqin asoslarni taqdim etishga qaratilgan eng muhim ilmiy va amaliy vazifadir.

Ikki tomon oʻzaro jangovar harakatlarda ishtirok etayotgan boʻlsin. $N_1(t)$, $N_2(t)$ orqali $t > 0$ vaqtidagi birinchi va ikkinchi tomonlarning qoʻshinlari sonini, boshlangʻich vaqtdagi sonini mos ravishda $N_1(0)$, $N_2(0)$ kabi belgilaymiz.

Koʻrib chiqilayotgan modellardagi raqiblarning asosiy xarakteristikasi $N_1(t) \geq 0$ va $N_2(t) \geq 0$ boʻlib hisoblanadi. Agar biror bir vaqtda raqamlardan biri nolga aylansa, u holda bu tomon magʻlubiyatga uchragan deb hisoblanadi (bu vaqtda boshqa tomondagi qoʻshinlar soni noldan katta boʻlishi kerak).

Muntazam qismlar orasidagi harakatlar boʻlayotgan paytda ularning soni dinamikasi uchta omil bilan belgilanadi:

1) jangovar harakatlar bilan bevosita bogʻliq boʻlmagan sabablar (kasalliklar, jarohatlar, qochish) tufayli tarkibni kamaytirishi;

2) qarama-qarshi tomonning jangovar harakatlari tufayli yoʻqotishlar tezligi (bu oʻz navbatida uning strategiyasi va taktikasining sifati, jangchilarning maʼnaviy holati va professionalligi, qurol-yarogʻ va boshqalar bilan belgilanadi);

3) Vaqtning maʼlum bir funksiyasi deb qaraladigan qoʻshinlarning toʻldirilib borish tezligi.

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda $N_1(t)$, $N_2(t)$ uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1 + \gamma_2(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ berilgan funksiyalar va $N_1(0), N_2(0)$ boshlang'ich qiymatlar uchun har qanday $t > 0$ vaqtda (5.11) yechimga ega bo'ladi. (5.11)da $\alpha_{1,2}(t) \geq 0$ koeffitsiyentlar odatdagi (jangovar bo'lmagan) sabablarga ko'ra yo'qotish tezligini tavsiflaydi, $\beta_{1,2}(t) \geq 0$ — raqibning harakatlari tufayli yo'qotish tezligi, $\gamma_{1,2}(t) \geq 0$ — zahirani mustahkamlash tezligi.

Muntazam va partizan bo'linmalari o'rtasidagi jangovar harakatlar boshqa model bilan tavsiflanadi. Asosiy farq shundaki, tartibsiz qo'shinlar armiya bilan taqqoslaganda himoyasiz, chunki ular yashirin harakat qilishadi, ko'pincha partizanlar raqibga ko'rinmas bo'lishga harakat qilib turib maydonlarni tanlashga majbur bo'ladilar. Shu sababli, ma'lum bir hududda turli joylarda o'z operatsiyalarini amalga oshiradigan partizanlarning yo'qotish darajasi nafaqat armiya qo'shinlari soni $N_1(t)$, balki partizanlarning o'zlari soni $N_2(t)$ bilan ham mutanosib deb hisoblanadi, ya'ni $\beta(t) \cdot N_1 \cdot N_2$ kabi had bilan aniqlanadi. Natijada, model chiziqli bo'lmagan ko'rinish oladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1(t)N_1 - \beta_2(t)N_2 + \gamma_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2(t)N_2 - \beta_1(t)N_1N_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

(5.12) da barcha miqdorlar (5.11) bilan bir xil ma'noga ega. Biz (5.12) (Lanchester modeli) modelini quyidagi xususiy holatda o'rganamiz: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (tomonlar qo'shimcha kuchlar olmaydi va o'z holatida qoladi); $\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}, \beta_1 = \text{const}, \beta_2 = \text{const}$, (bu shartlar quyidagini anglatadi: raqiblarda har doim jangchilar tomonidan xizmatga yaroqli ishlatilishi mumkin bo'lgan qurollar soni yetarli bo'ladi).

Ushbu shartlarni hisobga olganda (5.11) model quyidagi shaklni oladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\alpha_1 N_1 - \beta_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 - \beta_1 N_1 \end{cases} \quad (5.13)$$

(5.13) tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, bu holda tomonlar soni vaqt o‘tishi bilan faqat kamayishi mumkin. Ushbu jarayonning vaqtinchalik tabiati nima ekanligini bilish uchun biz yana bir soddalashtirishni joriy qilamiz (qisqa muddatli to‘qnashuvlar uchun to‘liq asosli): $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ deb hisoblaymiz (ya’ni jangovar bo‘lmagan holatda yo‘qotishlar yo‘q). Boshqacha qilib aytganda, tomonlarning yo‘qotishlari faqat dushmanning harakatlari bilan belgilanadi. Buni hisobga olib (5.13) sistemani soddalashtirilganda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2(t)N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1(t)N_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

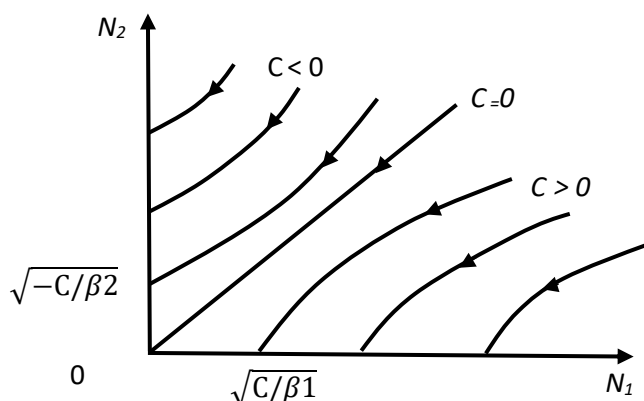
Tomonlar soni, avvalgidek, vaqt o'tishi bilan kamayadi. (5.14) sistemani birinchi tenglamasini $\beta_1 N_1$ ga, ikkinchisini $\beta_2 N_2$ ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan ikkinchi tenglamani birinchisidan ayiramiz. Natijada biz quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\beta_1}{2} N_1^2(t) - \frac{\beta_2}{2} N_2^2(t) \right] = 0$$

va uni integrallaganiizda quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 N_1^2(0) - \beta_2 N_2^2(0) = C \quad (5.15)$$

(5.15) integral yordamida (5.14) sistemaning fazaviy trayektoriyalarini o'rganish orqali quyidagi xulosalar chiqarish mumkin (5.7-rasm).



5.8-rasm. (4.) sistemaning fazali traektoriyalari

Agar $C>0$ bo'lsa, birinchi armiya g'alaba qozonadi, $C<0$ bo'lganda ikkinchisi, $C=0$ bo'lganda holatda tomonlar bir vaqtning o'zida bir-birlarini yo'q qilishadi va g'olib bo'lmaydi. Ushbu natijalarning ma'nosi (5.15) tenglamaning koeffitsiyentlaridan aniq

ko‘rinadi. G‘alaba qozonish uchun nafaqat jangovar harakatlar boshida tomonlarning soni ($N_1(0)$, $N_2(0)$) balki ularning tayyorgarligi (β_1, β_2), qurollarining sifati va boshqalar ham muhimdir. Shunday qilib, Agar $C > 0$ bo‘lsa, unda (5.15) dan

$$\beta_1 N_1^2(0) > \beta_2 N_2^2(0)$$

va g‘alabaga erishish uchun ikkinchi tomon bir vaqtning o‘zida qo‘shinning boshlang‘ich sonini ko‘paytirishi yoki jangovar harakatlar sifatini yaxshilashi kerak bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, β_2 koeffitsiyentini oshirishning ta’siri $N_2(0)$ sonining ikkinchi darajali qiymatiga (jangovar harakatlarning kvadratik qonuni deb ataladigan) teng o‘lishiga qaraganda kamroq bo‘ladi.

(5.14) dagi tenglamalarning birinchisini differensiallab va ikkinchisini hisobga olib biz $N_1(t)$ uchun quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{d^2 N_1}{dt^2} = \beta_1 \beta_2 N_1 \quad (5.16)$$

(5.16) dan $N_1(t=0) = N_1(0)$ va $dN_1/dt(t=0) = -\beta_2 N_2(0)$ boshlang‘ich shartlarini hisobga olgan holda birinchi armiya qo‘shinlarining vaqt funksiyasi ko‘rinishidagi sonini topamiz:

$$N_1(t) = N_1(0) \operatorname{ch} \sqrt{\beta_1 \beta_2} t - N_2(0) \sqrt{\beta_2 / \beta_1} \operatorname{sh} \sqrt{\beta_1 \beta_2} t \quad (5.17)$$

$N_1(t)$ ni bilgan holda $N_2(t)$ ni topish qiyin bo‘lmaydi.

Muntazam armiyaning partizanlarga qarshi harakatlarini yuqorida keltirilgan shartlarda bo‘lgani kabi soddalashtiruvchi variantlarda (ya’ni jangovar bo‘lmagan holatda yo‘qotishlar yo‘q) ko‘rib chiqaylik. Bunda (5.12) model quyidagi shaklga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\beta_2 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta_1 N_1 N_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Tomonlar soni, avvalgidek, vaqt o‘tishi bilan kamayadi, ammo boshqa qonunga ko‘ra. (5.18) sistemaning birinchi tenglamasini $\beta_1 N_2$ ga, ikkinchisini β_2 ga ko‘paytiramiz va hosil bo‘lgan ikkinchi tenglamani birinchisidan ayiramiz. Natijada biz quyidagi tenglamaga kelamiz:

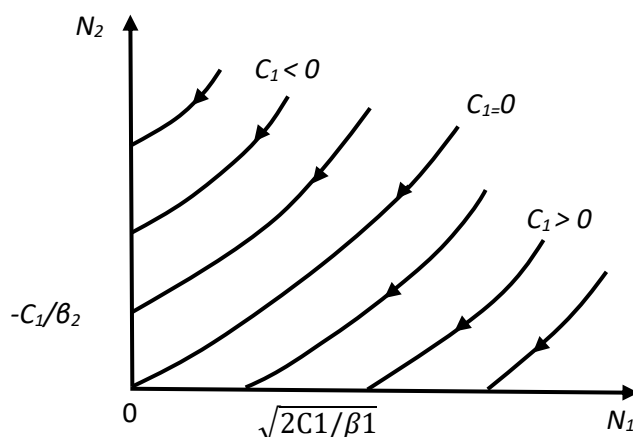
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\beta_1}{2} N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) \right] = 0,$$

ushbu tenglamani integrallaymiz:

$$\frac{\beta_1}{2} N_1^2(t) - \beta_2 N_2(t) = \frac{\beta_1}{2} N_1^2(0) - \beta_2 N_2(0) = C_1 \quad (5.19)$$

(5.19) yordamida (5.18) sistemaning fazaviy traektoriyalarini o'rganamiz. 5.8- rasmdan ko'rinib turibdiki, $C_1 > 0$ bo'lganda armiya g'alaba qozonadi, $C_1 < 0$ bo'lganda-partizanlar, $C_1 = 0$ bo'lganda esa g'olib bo'lmaydi. Muntazam qismlar harakatida bo'lgani kabi, g'alaba nafaqat boshlang'ich armiya soni, balki jangovar tayyorgarlik va qurol sifati bilan ham ta'minlanadi. Masalan, $C_1 > 0$ bo'lsin, ya'ni

$$\frac{\beta_1}{2} N_1^2(0) > \beta_2 N_2(0) \quad (5.20)$$



5.9-rasm. (8) - sistemaning fazali trayektoriyalari

Endi partizanlar β_2 koefitsiyentini oshirishni ta'minlashlari va $N_2(0)$ boshlang'ich sonini tegishli miqdorga oshirishlari kerak, aks holda ular mag'lubiyatga uchraydi. Bundan tashqari, $N_1(0)$ qiymatining o'sishi bilan bu o'sish chiziqli bo'lmaydi, balki $N_1(0)$ ning ikkinchi darajasiga mutanosib ravishda o'sishi kerak (harbiy harakatlarning parabolik qonuni). Aytishimiz mumkinki, qaysidir ma'noda muntazam qo'shinlar yanada qulayroq holatda, chunki ular uchun (5.20) tengsizlikda $N_1(0)$ kvadratda turibdi, shuning uchun ham (5.20) tengsizlik muntazam armiya boshlang'ich sonining kamroq qiymatida ham bajarilishi mumkin.

$N_1(t), N_2(t)$ funksiyalarining o'zini tutishi (5.18) dan (5.19) integraldan foydalangan holda topiladi. Shunday qilib, $N_1(t)$ uchun quyidagini olamiz:

$$\frac{dN_1}{dt} = C_1 - \frac{\beta_1}{2} N_1^2,$$

Ushbu tenglama quyidagiga ekvivalent:

$$\frac{dN_1}{C_1 - \beta_1 N_1^2 / 2} = dt \quad (5.21)$$

(5.21) ni integrallab $N_1(t)$ va undan keyin $N_2(t)$ ni vaqtning oshkormas funksiyalari sifatida topish mumkin.

Xulosa qilib shuni ta'kidlash mumkinki, bu yerda ko'rib chiqilgan eng oddiy raqobat modellari ko'plab tabiiy fanlar jarayonlarini tavsiflashda keng tarqalgan ikkinchi darajali oddiy differensial tenglamalar sistemalariga (umuman olganda chiziqli bo'lmaganda) mos keladi. Bu tabiiydir, chunki armiya shakllanishida ishlatiladigan yondashuvlar (to'yinganlik, qiymatning o'sish sur'atlari, mutanosibli va boshqalar) mexanika, fizika, kimyoda qo'llaniladigan yondashuvlarga o'xshashdir.

Kalit so'zlar:

Ekotizim, yirtqich, o'lja, yirtqich-o'lja tizimi, muvozanat, populyatsiya, Lotka-Volterra tenglamasi, faza trayektoriyasi, jarayonning davriyligi. Matematik modellashtirish, sonli usullar, harbiy mojarolar nazariyasi, differensial tenglamalar sistemasi, L.Richardson modeli, sistemaning muvozanat holati, koordinatalar tekisligi.

Jangovar harakatlar modeli, muntazam qismlar sonini aniqlash omillari, muntazam va partizan qismlari, qurollarning sifati, dastlabki sharoitlar, jangovar harakatlarning parabolik qonuni.

Nazorat savollari:

1. Demografiya atamasi nimani anglatadi?
2. Maltus modeli qanday ko'rinishga ega?
3. Maltus modelining afzalliklari nimada?
4. Maltus nazariyasining kamchiliklarini keltiring?
5. Ferxulst-Pirl modelini tasvirlab bering.
6. Ferxulst-Pirl modeliga misol keltiring.
7. Chiziqli bo'lmagan populyatsiya modellarining uchta rejimi haqida ma'lumot bering.
8. Qurolli mojaroning paydo bo'lishini bashorat qilishning qanday usullari mavjud?
9. L. F. Richardsonning qarama-qarshilik modeli haqida gapiring.
10. O'zgarmas koeffitsiyentli ikkita differentsial tenglamalar sistemasi uchun modelning kamchiliklari nimada?
11. Richardson modelining $t \rightarrow \infty$ dagi hatti-harakati(o'zini tutishi) qanday?
12. Ikki armiyaning jangovar modellarida raqiblarning asosiy xususiyatlari qanday?

13. Muntazam qismlar sonining dinamikasi qanday omillarga ega?
14. Ikki armiyaning jangovar harakatlar modeli qanday tavsiflanadi?
15. Ikki armiyaning umumiy jangovar modelida qanday alohida holatlar mavjud?
16. Partizanlarni hisobga olgan holda ikki armiyaning jangovar harakatlar modeli qanday tavsiflanadi?

6-MAVZU: BIOLOGIK MODELLAR

O‘zaro ta’sir qiluvchi populyatsiyalar sonini modellash. Modda va energiya muvozanati modeli

Reja:

1. O‘zaro ta’sirda bo‘lgan biologik populyatsiyalar.
2. V. Volterra modeli.
3. “Logistik tuzatish” modeli.
4. Holling-Tenner modeli.
5. Modda va energiya muvozanati modeli.

Tayanch so‘z va iboralar:

Modda va energiya balansi, energiya oqimi, I. A. Poletayev modeli, fotosintez, muvozanat tenglamasi, o‘simlik hajmi, energiya sarfi, ozuqa eritmasini tashish, tortishish kuchi, o‘simlik massasi, o‘simlikning o‘rtacha zichligi. Populyatsiya, raqobatning o‘zaro ta’siri, mezbon parazit, V. Volterra modeli, turlararo raqobat, populyatsiyalararo o‘zaro ta’sir, stoxastik elementlar, yirtqichlar sonining o‘lja sonining o‘zgarishiga nisbatan o‘zgarishi, turlarning o‘zaro ta’sirining biologik xususiyatlari.

Har qanday populyatsiya atrof-muhit bilan o‘zaro aloqada bo‘ladi. O‘zaro esa biologik bir xil turlari o‘zaro bir-biriga ta’sir qilishi mumkin, masalan, turli mutantlarni yetishtirishda bir xil turdagi mikroorganizmlarning o‘zaro ta’siri kabi.

Amaliyotda raqobatning o‘zaro ta’siri eng keng tarqalgan va yaxshi o‘rganilgan hisoblanadi (har bir turning soni boshqasi ishtirokida sekinroq o‘sgani kabi), simbioz (turlar bir-birining o‘sishiga yordam berganda) va yirtqich-yirtqich yoki mezbon parazit turi (yirtqich turlar mavjudligida o‘lja turlarining soni sekinroq o‘sganda va yirtqich turlar soni tezroq o‘sganda). Tabiatda o‘zaro ta’sirlar ham mavjud bo‘lib, unda turlardan biri ikkinchisining mavjudligini sezadi, ikkinchisi esa

yo‘q (amensalizm va komensalizm) yoki turlar neytral bo‘lgan hollar(bir-biriga ta’siri yo‘q).

O‘zaro ta’sir qiluvchi populyatsiyalar dinamikasi ushbu qonuniyatlarni birinchi chuqur o‘rgangan matematik olim V.Volterra “Mavjudlik uchun kurashning matematik nazariyasi” (1931) kitobida berilgan. Italiyalik matematik Vito Volterra — matematik biologiyaning asoschisi hisoblanib u turlarning o‘zaro ta’sirini statistik fizika va kimyoviy kinetikada bo‘lgani kabi tenglamalardagi multiplikativ atamalar (o‘zaro ta’sir qiluvchi turlarning sonlari hosilalari) shaklida tasvirlashni taklif qildi. U holda logistik qonunga muvofiq turlarning son bo‘yicha o‘z-o‘zini cheklashini hisobga olgan holda ikki turning o‘zaro ta’sirini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasi umumiy shaklda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2 \end{cases} \quad (6.1)$$

Bu yerda a_i parametrlari turlarning tabiiy o‘shish tezligi konstantalari, c_i turlarning o‘z - o‘zini cheklash o‘zgarmaslari (tur ichidagi raqobat), $b_{i,j}$ turlarning o‘zaro ta’sir o‘zgarmaslari, ($i,j=1,2$). Ushbu koefitsiyentlar o‘zaro ta’sirlarining har xil turlariga muvofiqligini bildiruvchi ishoralari 1-jadvalda keltirilgan.

(6.1)-tenglamalar tipida berilgan modellarning xususiyatlarini o‘rganish turlarning o‘zaro ta’siri natijasi to‘g‘risida ba’zi muhim xulosalarga olib keladi. Agar boshqa turning o‘shish tezligi ma’lum bir kritik qiymatdan kam bo‘lsa, raqobat tenglamalari ($b_{12}>0$, $b_{21}<0$) ikki turdan birining omon qolishini bashorat qiladi. Agar populyatsiyalararo o‘zaro ta’sir koefitsiyentlari ko‘paytmasi tur ichidagi raqobat koefitsiyentlari ko‘paytmasidan kichik bo‘lsa, ikkala tur ham birgalikga yashashi mumkin: $b_{12} b_{12}<c_{12}c_{21}$.

6.1-jadval. Turlarning o‘zaro ta’siri tiplari

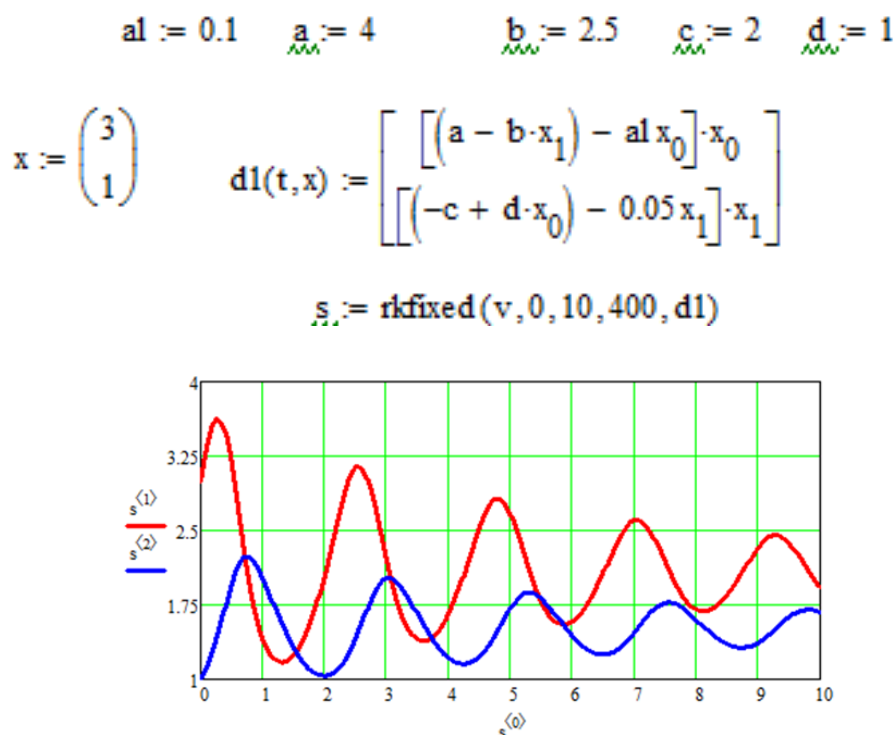
Simbioz	+	+	$b_{12}, b_{21} > 0$
Kommensalizm	+	0	$b_{12} > 0, b_{21} = 0$
Yirtqich-o‘lja	+	-	$b_{12} > 0, b_{21} < 0$
Amensalizm	0	-	$b_{12} = 0, b_{21} < 0$
Raqobat	-	-	$b_{12}, b_{21} < 0$
Neytral holat	0	0	$b_{12}, b_{21} = 0$

(6.1) -tenglamalardagi raqobat modelining kamchiliklari bor, xususan, modeldan kelib chiqadiki, agar turlarning soni turli omillar bilan cheklangan bo'lsa, ikki tur birgalikda yashashi mumkin, ammo model uzoq vaqt birga yashashni ta'minlash uchun farqlar qanchalik katta bo'lishi kerakligini ko'rsata olmaydi. Bunga stoxastik elementlarni kiritish (masalan, resursdan foydalanish funksiyasini kiritish) orqali ushbu savollarga javob berishga imkon yaratiladi.

(6.1) dan olinishi mumkin bo'lgan raqobatlashuvchi turlarning "logistik tuzatish" modelini ko'rib chiqamiz:

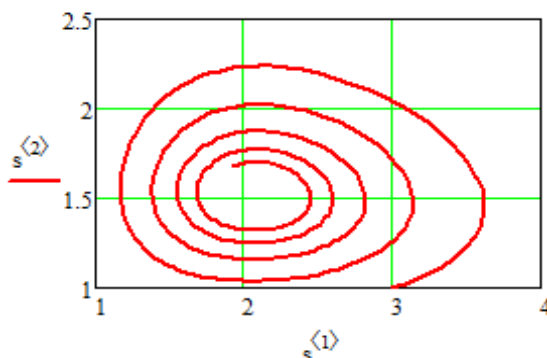
$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = (a - bx_1) \cdot x_0 - \alpha \cdot x_0^2 \\ \frac{dx_1}{dt} = (-a + bx_0) \cdot x_1 - \alpha \cdot x_1^2 \end{cases}$$

Bunday holda, yechimlarning hatti-harakati (6.1 - 6.2 rasmlar) statsionar nuqta yaqinida parametrning kattaligi va belgisiga qarab o'zgaradi. Lotka – Volterra sistemasining $x_0(0)=3, x_1(0)=1$ boshlang'ich shartdagi grafiklari va fazoviy portretini ko'rib chiqamiz (6.2- rasm). Yechim MathCAD muhitida olingan.



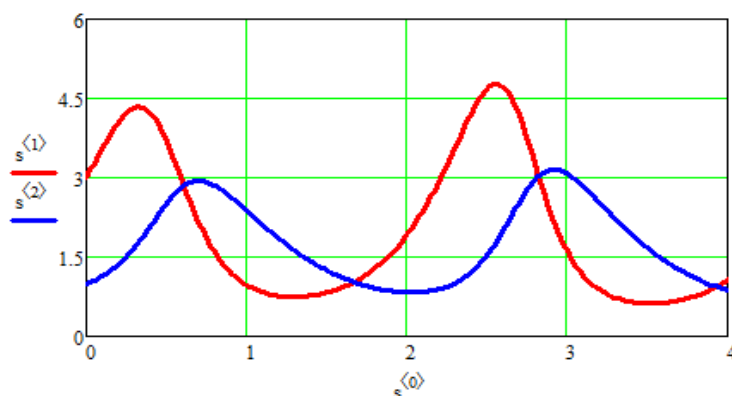
6.1-rasm. Logistika tuzatishlarini hisobga olgan holda vaqt bo'yicha o'ljalar(qizil) va yirtqichlar(ko'k) soni

Ko‘rinib turibdiki, bu holda statsionar nuqta barqaror fokusga va yechimlar sekinlashgan tebranishlarga aylanadi. Har qanday dastlabki sharoitda sistemaning holati bir muncha vaqt o‘tgach statsionar holatga yaqinlashadi va $t \rightarrow \infty$ da unga intiladi.

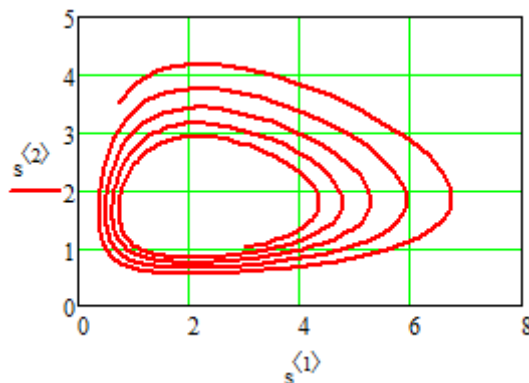


6.2-rasm. "Logistik tuzatish" sistemasining fazali portreti

6.3 va 6.4- rasmlarda logistik tuzatish parametrining salbiy qiymati $a = -0.1$ bo‘lgan yechimlarning grafiklari va faza egri chizig‘lari keltirilgan. Yechim MathCAD muhitida olingan.



6.3-rasm. Logistika tuzatishining salbiy qiymatini hisobga olgan holda vaqt bo‘yicha o‘ljalar(qizil) va yirtqichlar(ko‘k) soni



6.4-rasm. Salbiy "logistik tuzatish" bilan sistemaning fazali portreti

Ko‘rinib turibdiki, bu holda statsionar nuqta beqaror fokus bo‘lib, turlar sonining tebranish amplitudasi o‘shib bormoqda. Bunday holda, dastlabki holat statsionar holatga qanchalik yaqin bo‘lmasin, vaqt o‘tishi bilan sistemaning holati statsionar holatdan kuchli farq qiladi.

Lotka-Volterra modeli va logistik tuzatishli Lotka-Volterra modeli misolida markazlarning eng muhim sifat xususiyatlaridan biri namoyish etildi – ular o‘ng tomonning eng kichik o‘zgarishlarida ham buzilishlarga uchraydi. Aksariyat modellar voqelikni idealizatsiya qilishdir; ularda asosan ba’zi asosiy o‘zgaruvchilarga va ular orasidagi munosabatlarga e’tibor qaratiladi. Shuning uchun ham nisbatan kichik buzilishlarda ham modellarning barqaror bo‘lishi juda muhimdir. Kichik buzilishlarga sezgir bo‘lmagan modellar qo‘pol deb ataladi.

Lotka-Volterra modeli buzilishlarga nisbatan beqaror, chunki uning statsionar holati markazdir. So‘nmas tebranishlar paydo bo‘ladigan modellarning yana bir turi mavjud – bu fazaviy portretlarda chegara takrorlanishlari bo‘lgan modellar. Bunday model raqobatdosh turlar sistemasi uchun yaratilgan Holling-Tenner modelidir.

Ushbu modeldagi dx_1/dt o‘ljalari populyatsiyasining o‘shish sur'ati uchta miqdorning yig‘indisiga teng:

yirtqichlar yo‘qligida ko‘payish tezligi	rx_1
cheklangan resurslar bilan oziq-ovqat uchun turlararo raqobatning ta'siri (raqobatdosh ishlab chiqaruvchilar uchun bu cheklangan xom ashyoning ta'siri)	$r \cdot x_1 \frac{x_1}{K}$
yirtqichlarning ta'siri, yirtqich to'yinganida o'ljani ovlashni to'xtatadi degan taxminda	$w \cdot x_2 \frac{x_1}{D + x_1}$

Yirtqichlar populyatsiyasining o‘shish sur'ati dx_2/dt xuddi Lotka-Volterra modelidagi kabi qurilgan, ya’ni o‘ljalar kamdan–kam uchraydi degan ma’noda. Agar bitta yirtqichning hayotini saqlab qolish uchun J ta o‘lja kerak bo‘lsa, unda x_1 ta o‘ljaning populyatsiyasi x_1/J ta yirtqichlarni oziq-ovqat bilan ta’minlashi mumkin. Yirtqichlar populyatsiyasining o‘shish modeli, ularning soni ushbu kritik qiymatdan oshib keta olmaslik sharti quyidagi ko‘rinishga ega:

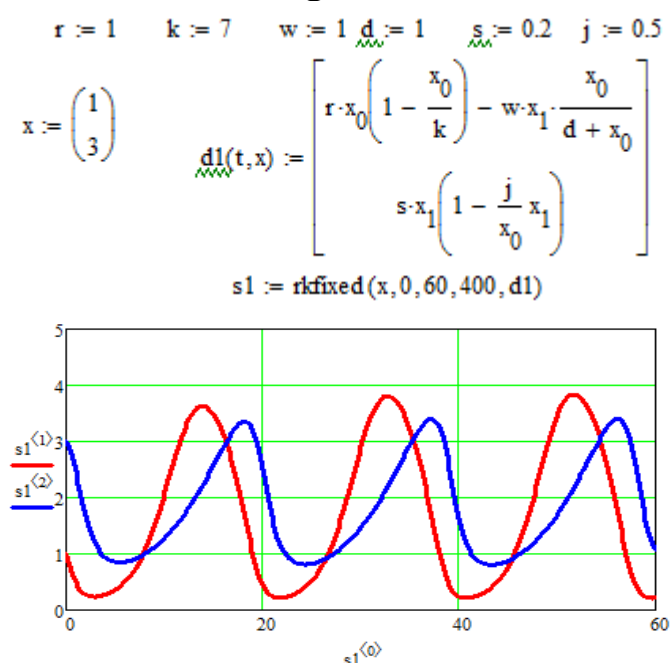
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \left(s - \frac{sJ}{x_1} x_2 \right)$$

Shunday qilib, Holling-Tanner modeli quyidagi ko‘rinishga ega:

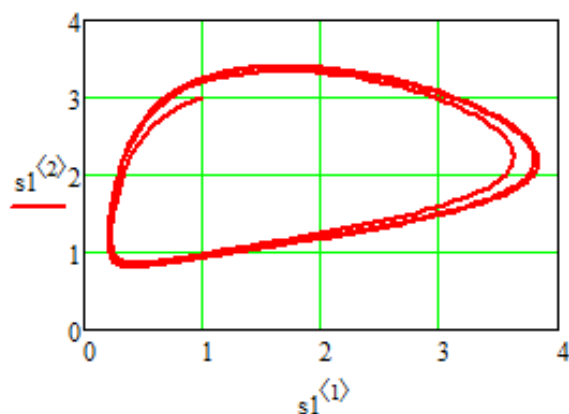
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = r \cdot x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - w \cdot x_2 \frac{x_1}{D + x_1} \\ \frac{dx_2}{dt} = s \cdot x_2 \left(1 - \frac{J}{x_1} x_2\right) \end{cases}$$

Bu yerda $r, s, K, D, J > 0$.

$s < \frac{r}{K} \cdot \frac{K-D-2}{D+1}$ da sistemaning fazaviy portretida barqaror chegara aylanishi bo'lishini ko'rsatish mumkin. 6.5-6.6-rasmda $r = 1, K = 7, w = 1, D = 1, s = 0.2, J = 0.5$ va ikki xil boshlang'ich holatlar va sistemaning fazaviy portreti uchun sistemaning yechimi berilgan. Yechim MathCAD muhitida olingan.

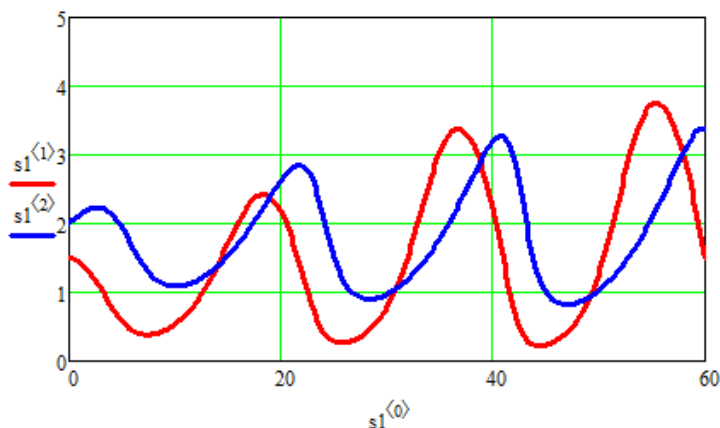


6.5-rasm. Holling–Tenner modeli bo'yicha o'ljalar(qizil) va yirtqichlar(ko'k) soni

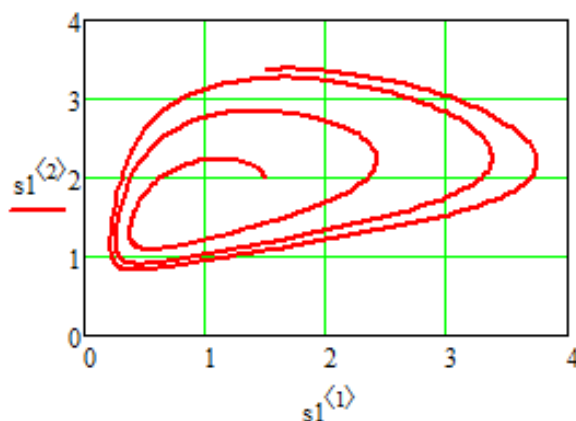


6.6-rasm. Xolling–Tenner modeli bo'yicha sistemaning fazaviy portreti

6.7 va 6.8-rasmlarda $x_1(0)=1.5$, $x_2(0)=2$ da Holling–Tenner tenglamasining yechimi va fazoviy portretini keltirilgan.



6.7-rasm. $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 2$ da Holling–Tenner modeli bo‘yicha o‘ljalar(qizil) va yirtqichlar(ko‘k) sonining o‘zgarishi



6.8-rasm. $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 2$ bo‘lganda Holling–Tenner modeli bo‘yicha sistemaning fazoviy portreti
Modda va energiya muvozanati modeli

Materiya va energiya muvozanatini hisobga olgan holda differentsial tenglamalarga asoslangan modelga misol ko‘rib chiqamiz. Ma’lumki, tabiatda, hatto eng qulay sharoitlarda ham, daraxtning o‘sishi ma’lum balandlikdan oshmaydi. Savol tug‘iladi, nima uchun barcha daraxtlar, turidan qat’iy nazar, avval tez o‘sadi va keyin o‘sish sekinlashadi va nihoyat umuman to‘xtaydi?

Intuitiv ravishda aniqki, daraxt o‘sishi bilan, bir tomondan, fotosintez tufayli energiya oqimi oshadi, boshqa tomondan, masalan, daraxtning butun hajmi bo‘ylab ozuqa moddalarini tashish bilan bog‘liq qiyinchiliklar kuchayadi va shuning uchun bunday ehtiyojlar uchun energiya sarfi ortadi. Oxir-oqibat, energiya oqimi endi ozuqa moddalarini yuqoriga ko‘tarish uchun yetarli bo‘lmay qoladi va daraxt o‘sishni to‘xtatadi.

Ushbu intuitiv mulohazalar asosida farazlarni shakllantirish va modelni yaratish, so'ngra olingan tenglamani o'rganish mumkin.

I. A. Poletayev tomonidan taklif qilingan modelni ko'rib chiqamiz. Ushbu model quyidagi soddalashtirilgan taxminlarga asoslanadi:

1. Voyaga yetgan o'simlik o'sish jarayonida geometrik o'xshashlikni saqlaydi. Bu shuni anglatadiki, o'sib borayotgan o'simlikda geometrik o'lchamlarning nisbati o'zgarmaydi, masalan, balandlikning diametriga nisbati ($h/d=const$).

2. O'simlik faqat fotosintez orqali kerakli energiya (yoki faol modda)ni oladi.

3. Energiya fotosintez, tirik to'qimalarni hosil qilish (o'sish) va kerakli eritmani tuproqdan ko'tarish uchun sarflanadi.

4. O'rta hisobda uzoq vaqt davomida o'simlik barg yuzasi birligida doimiy miqdorda yorug'lik oladi (kunlik va mavsumiy tebranishlarni hisobga olmaganida) va tuproqdagi cheksiz zahiradan kerakli moddalarni o'zlashtira oladi.

Ushbu taxminlarga asoslanib muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

x daraxtning balandligi bo'lsin; keyin 1 taxmindan barglarning sirt maydoni x^2 ga, o'simlik hajmi (masalan, magistral hajmi) x^3 ga mutanosib bo'ladi. Vaqt o'tishi bilan x o'zgarishi aniq: $x=x(t)$. Bu yerda, muvozanat tenglamasiga kiritilgan barcha miqdorlarni x orqali ifodalashga harakat qilaylik. Avval olinadigan E energiya uchun tenglama tuzamiz. Bu energiya fotosintez yordamida hosil bo'ladi. Qancha o'simlikning yashil qismi ko'p bo'lsa, shuncha energiya ko'p bo'ladi. U holda, E energiyani x^2 ga mutanosib deb hisoblash mumkin, ya'ni $E = \alpha \cdot x^2$, bu yerda α - mutanosiblik koeffitsiyenti (bu barglarning kattaligi va shakliga va ma'lum bir daraxt turi uchun doimiy deb hisoblanadigan fotosintez intensivligiga bog'liq).

2-taxmin tufayli boshqa energiya manbalari yo'q deb hisoblash va energiya sarfini kuzatish mumkin. Energiyaning bir qismi, birinchi navbatda, fotosintez jarayonini amalga oshirishga sarflanadi. Ushbu oqim tezligi ham x^2 ga mutanosib bo'lib, uni βx^2 shaklida ifodalash mumkin, bu yerda β - α dan kichikroq mutanosiblik koeffitsiyenti.

Bundan tashqari, energiya ozuqa eritmasini o'simlikning barcha qismlariga tashish uchun sarflanadi. Ushbu sarf tashish yo'llari uzunligi qanchalik katta bo'lsa, shunchalik katta bo'ladi. Bundan tashqari, bu

iste'mol tortishish kuchini yengish bilan bog'liq va shuning uchun ozuqa moddalarini qanchalik baland ko'tarish kerak bo'lsa, shuncha katta bo'ladi. Shunday qilib, bu sarf x^3 ga, va x balandligiga ham mutanosibdir va bu ularning ko'pyatmasiga mutanosib deb taxmin qilish mumkin, ya'ni $gx^3 \cdot x$.

Shuningdek, energiya o'simlik massasini oshishiga ham sarflanadi, ya'ni uning balandligining oshishiga. Ushbu sarf o'sish tezligiga mutanosib, ya'ni massaning vaqt bo'yicha hosilasi ($m=rx^3$, bu yerda r - o'simlikning o'rtacha zichligi, x^3 – hajm). Shunday qilib, oxirgi sarf bo'lish ko'rinishi quyidagicha ifodalanishi mumkin

$$\delta \frac{d}{dt}(\rho x^3),$$

bu yerda δ -mutanosiblik koeffitsiyenti.

Energiyani saqlanish qonuniga ko'ra (yuqorida keltirilgan taxminlarni hisobga olgan holda) energiya sarfi uning o'simlikdagi oqimga teng bo'lishi kerak va biz quyidagi muvozanat tenglamasini olamiz:

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$$

yoki

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \rho 3x^2 \frac{dx}{dt} \quad (6.5)$$

Bu munosabat $x(t)$ ga nisbatan differentsial tenglama.

(6.5) tenglamani nolga teng bo'lmagan $3\gamma x^2$ ifodasiga bo'lish va $a = \frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} > 0, b = \frac{\gamma}{3\delta\rho} > 0$ kabi belgilash orqali quyidagini olamiz

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, x(0) \approx 0 \quad (6.6)$$

Daraxt o'sganligi sababli, dx/dt hosilasi musbat.

Bu shuni anglatadiki, $a - bx^2 > 0$ va shuning uchun $x^2 < a/b$. Buni hisobga olganda (6.6) ifodani integrallab, quyidagini olamiz

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = 2\sqrt{ab}(t - t_0)$$

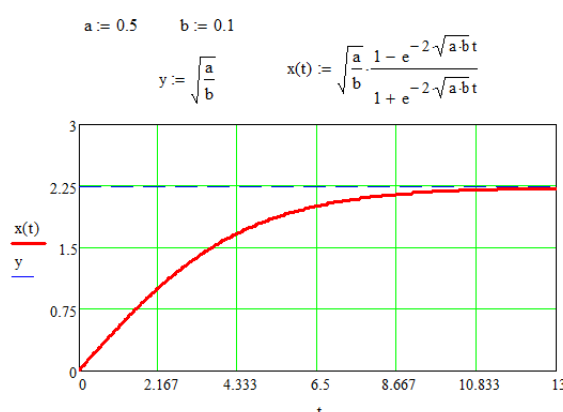
Bu yerda

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}} \quad (6.7)$$

Ushbu formula daraxtning vaqt bo'yicha o'sish chizig'ini beradi.

Agar a va b ma'lum bo'lsa (ular daraxt turiga bog'liq), unda ushbu formuladan foydalanib, yoshga qarab ushbu turdagi daraxtning o'rtacha balandligini aniqlash mumkin. Haqiqiy eksperimental vaziyatlarda modelni tekshirish uning adekvatligini tasdiqladi. Shuning uchun uning asosidagi farazlar haqiqatga zid emas.

(6.7) formulani aniq qiymatlarda hisoblaymiz. $a = 0.5$; $b = 0.1$, u holda $\sqrt{a/b} = 0.236$. Bu holda (6.7) formulaning grafigi quyida keltirilgan.



6.9-rasm. (6.7) formula bo'yicha hisoblangan chiziq grafigi.

Nuqtali chiziq $x = \sqrt{a/b}$ formula asosida olingan

Ko'rib turganingizdek, boshida daraxt $\sqrt{a/b}$ gacha o'sadi va keyin sekinlashadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Nima uchun daraxtlar birinchi navbatda tezroq o'sadi va keyin o'sish sekinlashadi degan savolga intuitiv ravishda qanday javob berish mumkin?

2. I. A. Poletayev tomonidan taklif qilingan model haqida ma'lumot bering.

3. Balans tenglamasini qanday tuzish mumkin?

4. Muayyan misol yordamida moddaning muvozanat formulasini hisoblang va grafigini chizing.

5. Populyatsiya o'zaro ta'sirining eng keng tarqalgan turlari qaysilar?

6. O'zaro ta'sir qiluvchi populyatsiyalar dinamikasi qoquniyatlarini o'rganishning asoschisi kim?

7. Ikki turning o'zaro ta'sirini tavsiflovchi differentsial tenglamalar sistemasi qanday ko'rinishga ega?

8. Ikki turning o'zaro ta'sirini tavsiflovchi differentsial tenglama koeffitsiyentlarining ta'siri haqida ma'lumot bering.

9. Raqobat modeli qanday kamchiliklarga ega?

10. Turlarning o'zaro ta'sirining biologik xususiyatlarini hisobga olganda differentsial tenglamalar sistemasi qanday ko'rinishni oladi?

7-MAVZU: EPIDEMIYA MODEL

Reja:

1. Epidemiya jarayonining rivojlanishi.
2. Epidemiyaning matematik modeli.
3. Epidemiyaning matematik modelini nazariy o'rganish.
4. Exponensial funksiya xossalari.

Tayanch so'z va iboralar:

Epidemiya, epidemiya modeli, virusni yuqtirgan va sog'lom odamlarning uchrashish ehtimoli, infeksiya, epidemiyaning rivojlanishi, infeksiya manbai, epidemiya rivojlanishining matematik modeli, bemorlarning o'sishi, sog'lom va virusni yuqtirgan odamlarning uchrashuvlari sonining mutanosiblik koeffitsiyenti, epidemiyaning rivojlanish darajasi, maksimal darajaga erishish.

Insoniyat mavjud bo'lgan ko'p yillar davomida ko'plab odamlar turli xil epidemiyalardan vafot etdilar va shifokorlar har doim epidemiya qanday rivojlanishi, uning rivojlanishiga qanday omillar ta'sir qilishi, u bilan qanday kurashish kerakligi bilan qiziqishgan. Shuning uchun epidemiya jarayonining rivojlanish modeli yoki oddiyroq qilib aytganda, bashorat maqsadlariga xizmat qiladigan epidemiya modeliga ehtiyoj tug'iladi.

Bunday modelda turli xil omillarning ta'sirini hisobga olishimiz mumkin:

- infektsiyalangan va sog'lom odamlarning bir-biri bilan uchrashish ehtimoli;
- turli odamlarning infektsiyaga sezuvchanlik darajasi;
- hujayralar faoliyatini boshqaruvchi qoidalar va boshqalar.

Avval ham aytilganidek, agar barcha omillarni hisobga olinganda, bu juda murakkab model bo'ladi, uni qurish va o'rganish ko'p vaqt va xarajatlarni talab qiladi. O'quv maqsadlari uchun epidemiyaning tabiiy

rivojlanishining oddiy modelini tuzish maqsadga muvofiq, bu bilan epidemiya rivojlanishi haqida tasavvurlar hosil qilish mumkin.

Masalaning qo'yilishi: n ta sog'lom odamlardan iborat guruh mavjud. $t = 0$ momentida bitta bemor bu guruhga kiradi, u infeksiya manbai bo'lgani uchun guruhda epidemiya boshlanadi. Infeksiyalangan odam darhol infeksiya manbaiga aylanadi, infeksiyalangan odamlarni guruhdan chiqarish sodir bo'lmaydi, ya'ni unda vafot etganlar, tuzalganlar va izolyatsiya qilinganlar yo'q va epidemiyaning rivojlanish jarayoni guruhdagi barcha odamlar kasal bo'lganda tugaydi deb hisoblaymiz. Epidemiya qancha vaqt ichida tugashini va qaysi vaqtda uning tezligi maksimal darajaga ko'tarilishini aniqlaymiz.

Epidemiyaning matematik modeli. Epidemiyaning rivojlanishining matematik modelini tuzish uchun, qo'yilgan masala shartlarini matematik tilga "tarjima qilamiz". t vaqtidagi kasal odamlar sonini $x(t)$ orqali belgilaymiz; $x(t)$, - t vaqtidagi sog'lom odamlar sonini $y(t)$ kabi belgilaymiz. Masala shartlaridan kelib chiqadiki,

$$x(t) + y(t) = N + 1 \quad (7.1)$$

$$x(0) = 1, \quad (7.2)$$

va bir muncha vaqt o'tgach, guruhdagi barcha odamlar kasal bo'lib qolishadi. Biz $[0, t]$ vaqt oralig'ini n qismga ajratamiz, ya'ni quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

Δt vaqtda bemorlarning qancha Δx ga o'sishini aniqlaylik.

Shubhasizki,

1. $\Delta x \sim \Delta t$, ya'ni Δx qiymati Δt ga proporsional,

2. $\Delta x \sim x(t) \cdot y(t)$, ya'ni Δx sog'lom ($y(t)$) va kasallangan ($x(t)$) odamlarning uchrashuvlari soniga mutanosibdir.

Yuqorida aytilganlarni matematik tarzda quyidagicha yozilishi mumkin

$$\Delta x(t) = \alpha x(t) y(t) \Delta t \quad (7.3)$$

Bu yerda α mutanosiblik(proporsionallik) koeffitsiyenti, har bir epidemiya turi uchun u har xil va empirik tarzda aniqlanadi.

(7.1) formuladan $y(t)$ sog'lom odamlar sonini ifoda etamiz

$$y(t) = N + 1 - x(t),$$

Olingan ifodani (7.3) formulaga qo'yish orqali quyidagini olamiz

$$\Delta x(t) = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \cdot \Delta t$$

oxirgi tenglamaning ikkala tomonida Δx ga bo'lib olamiz

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)]$$

Oxirgi tenglama uchun $\Delta t \rightarrow 0$ da quyidagini olish mumkin

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)]) \\ &= \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \end{aligned}$$

Oxirgi munoabatdan olamiz

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \quad (7.4)$$

Tenglama (7.4) - bu epidemiyaning rivojlanishining eng oddiy matematik modeli, u epidemiyaning dastlabki ma'lumotlarini, ya'ni eksperimental guruhdagi - N odamlar sonini, mutanosiblik koeffitsiyenti - α ni chiqish ma'lumotlari bilan, ya'ni t vaqtidagi bemorlarning soni $x(t)$ va hozirgi vaqtda epidemiyaning rivojlanish tezligi dx/dt ni o'zaro bog'laydi. Ushbu model tuzilish tamoyillariga ko'ra deterministik, modellash maqsadlariga ko'ra deskriptivdir, chunki u faqat epidemiyaning rivojlanishini tavsiflaydi.

Epidemiyaning matematik modelini nazariy o'rganish

Matematika nuqtai nazaridan, (6.11)-qurilgan model — bu 1-darajali differensial tenglama, ushbu tenglamani yechish orqali modelni o'rganamiz. Buning uchun quyidagicha yangi o'zgaruvchini kiritamiz:

$$u(t) = \frac{1}{x(t)} \quad (7.5)$$

Ushbu tenglamani differensiallab quyidagini olamiz

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{x^2(t)} \cdot \frac{dx}{dt} = -u^2(t) \frac{dx}{dt}$$

Oxirgi tenglamadan $\frac{dx}{dt}$ ni topamiz

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{u^2(t)} \frac{du}{dt}$$

Olingan ifodalarni (7.5) formulaga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$-\frac{1}{u^2(t)} \frac{du}{dt} = \alpha \frac{1}{u(t)} \left(N + 1 - \frac{1}{u(t)} \right)$$

Ushbu tenglamada ayrim qisqartirish va shakl almashtirishlarni amalga oshirib quyidagini olamiz:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(N + 1) \cdot u(t) + \alpha$$

Ushbu bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$u(t) = Ce^{-\alpha(N+1)t} + \frac{1}{1+N}$$

Bu yerda C - doimiy son. Oxirgi hadni (7.6) ga qo'yib, $x(t)$ ni topamiz:

$$x(t) = \frac{N+1}{C \cdot (N+1) \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1} \quad (7.6)$$

(7.6) - formula - bu (7.4)-modelning umumiy yechimi, xususi yechimni topish uchun biz $x(0) = 1$ boshlang'ich shart yordamida C doimiyni aniqlab olamiz:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{N+1}{C \cdot (N+1) + 1} = 1 \rightarrow N+1 = C \cdot (N+1) + 1 \rightarrow C \\ &= \frac{N}{N+1} \end{aligned}$$

U holda

$$x(t) = \frac{N+1}{N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1} \quad (7.7)$$

(7.7) formulasi bilan aniqlangan $x(t)$ funksiyasi (7.5) -matematik modelning aniq yechimidir. Bundan kelib chiqadiki, $x(t)$ virusga chalingan odamlar sonining t vaqt qiymatiga bog'liq eksponentsial funksiyadir. Biz (7.7) model yordamida o'rganishni davom ettiramiz.

1. (7.7) formuladan kelib chiqadiki, t qiymatining oshishi bilan kasrning maxraji pasayadi, ya'ni $x(t)$ bilan kasallanganlar soni ortadi. Endi bu o'sish qancha davom etishini ko'rib chiqaylik. (7.7) formulani differensiallab, biz epidemiya tarqalish tezligi uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$x'(t) = v(t) = \frac{\alpha(N+1)^2 N \cdot e^{-\alpha(N+1)t}}{(N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1)^2} \quad (7.8)$$

2. $v(t)$ epidemiyasining tezligi qanday o'zgarishini bilish uchun (7.8) formulani differensiallaymiz:

$$v'(t) = \frac{\alpha^2(N+1)^3 N [N \cdot e^{-2\alpha(N+1)t} - e^{-\alpha(N+1)t}]}{(N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1)^3} \quad (7.9)$$

(6.16) formuladan tezlik hosilasi nolga teng, ya'ni $v'(t) = 0$ bo'lishi uchun quyidagi tenglik bajarilishi kerak:

$$N \cdot e^{-2\alpha(N+1)t} - e^{-\alpha(N+1)t} = 0,$$

bu yerdan

$$N = e^{\alpha(N+1)t}$$

3. Oxirgi ifodani logarifmlaymiz:

$$\ln(N) = \alpha(N+1)t, \text{ bu yerda } t = \frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)} \quad (7.10)$$

Shunday qilib, (7.10) formulada aniqlangan t qiymatida $v'(t) = 0$ bo'ladi.

$t \in \left[0, \frac{\ln N}{\alpha(N+1)}\right]$ bo'lsin, u holda (7.10) formuladan kelib chiqadiki, ushbu oraliqda $v'(t) > 0$, ya'ni funksiya $v(t)$ bu oraliqda o'sadi.

Agar $t \in \left(\frac{\ln N}{\alpha(N+1)}, \infty\right)$ bo'lsa, u holda (7.10) formuladan $v'(t) < 0$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni bu oraliqda $v(t)$ funktsiyasi kamayadi. Yuqoridagi formulalardan xulosa qilishimiz mumkinki, epidemiya darajasi $v(t)$ birinchi navbatda ortadi, t ning $t = \frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)}$ formulasi bilan aniqlangan qiymatida maksimal qiymatga erishadi, keyin pasayishni boshlaydi. Epidemiyaning matematik modelini nazariy o'rganish natijasida olingan bu xulosa insoniyatning hayotiy tajribasi bilan tasdiqlanadi. Barcha epidemiyalar dastlab jadal rivojlanmoqda, keyin esa kamaymoqda.

(7.10) formulada belgilangan t ning ifodasini (7.8) formulaga qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz:

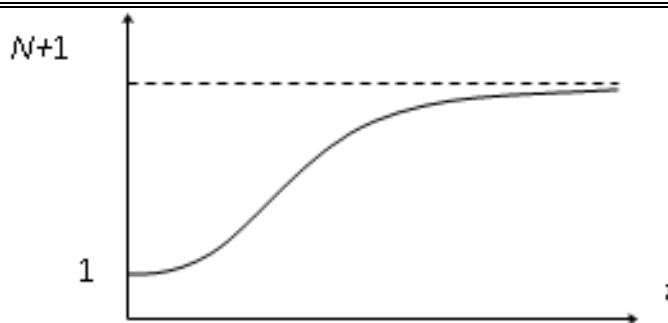
$$x(t) = \frac{N+1}{2}$$

Bundan kelib chiqadiki, epidemiya darajasi maksimal darajaga yetgan t vaqtida kuzatilayotgan guruhdagi odamlarning taxminan yarmi virusga chalinib qoladi. Vaqt

$$T = \frac{2\ln(N)}{\alpha(N+1)} \quad (7.11)$$

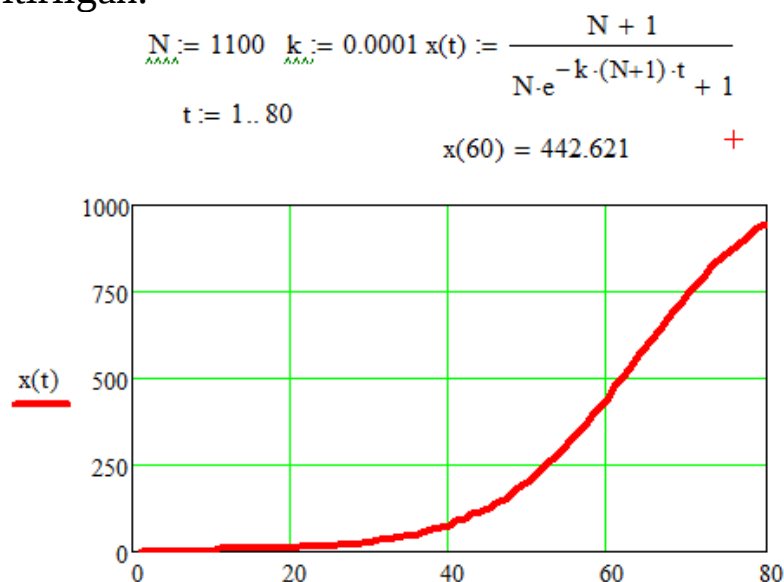
ga yetgan vaqtda esa guruhdagi barcha odamlar virusga chalinib qolishadi. (7.11) formulasi bilan aniqlangan t vaqt oralig'i "yuqumli epidemiya davri" deb nomlanadi. Uning oxirida guruhdagi barcha odamlar virusga chalinib, epidemiya tarqalishni to'xtatadi.

Yechimni grafiklarda ko'rib chiqamiz. 7.1-rasmda (7.11) tenglama bo'yicha $x(t)$ hatti-harakatlarining umumiy shakli berilgan. Ko'rib turganingizdek, bemorlarning soni ma'lum vaqt mobaynida $N+1$ ga ko'tariladi.



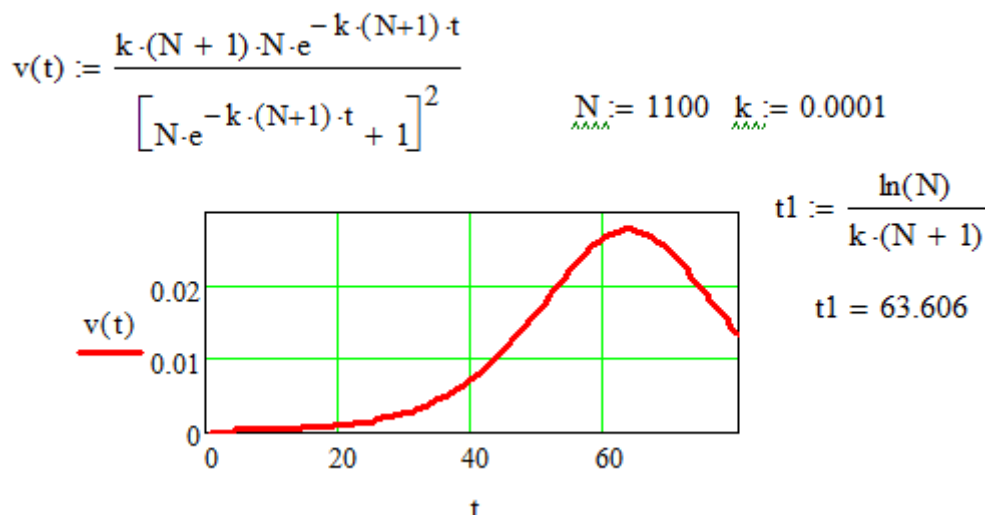
7.1-rasm. (7.8) formula bo'yicha vaqt o'tishi bilan kasallanganlar sonining ko'payishi. $\alpha=0,001$, $H+1=1101$, $t(0)=1$

(7.8) formulada $\alpha=0,001$, $H+1=1101$, $t(0)=1$ aniq qiymatlarni kiritgan holda $x(t)$ ni o'zgarish grafigini matematik paketda chizaylik. Bemorlarning sonini, masalan, 60 kundan keyin aniqlash kerak bo'lsin. Ushbu qo'yilgan shartlar asosida $x(t)$ ning o'zgarish grafigi 6.6-rasmda keltirilgan.



7.2-rasm. Aniq misol yordamida epidemiya masalasini MathCAD paketida yechish

Endi epidemiyaning tarqalish tezligini ma'lum bir misol yordamida hisoblaylik. 7.2 –rasmda aniq berilgan boshlang'ich qiymatlarda epidemiya tarqalishining o'sishi va kamayishining grafigi keltirilgan.



7.3-rasm. Aniq misolda (7.11) formula bo'yicha epidemiyaning o'sish va pasayish darajasi

Nazorat uchun savollar:

1. Epidemiya modelida qanday omillarni hisobga olish kerak?
2. Epidemiya modeli masalasining qo'yilishini aytib bering?
3. Epidemiyaning matematik modeli va boshlang'ich sharti qanday?
4. Epidemiya modeli bo'yicha tuzilgan differensial tenglama yechiladi?
5. Epidemiyaning matematik modelini yechimlari bo'yicha qanday xulosalar chiqarish mumkin?
6. Epidemiya darajasi qachon eng yuqori darajaga yetadi?

8-MAVZU: MODELLASHTIRISH ASOSLARI

Reja:

1. Model va modellash tushunchasi.
2. Modellash bosqichlari.
3. Model turlari.

Tayanch so'z va iboralar: Model, globus, modellash, iqtisod, abstrakt, biologik model.

Model va modellash tushunchasi. Model (lot. "Modulus"-o'lchov, me'yor) – biror obyekt yoki obyektlar tizimining obrazi yoki namunasi. Masalan, yerning moduli-globus, osmon va undagi

yulduzlar moduli-planetariy ekrani, pasportdagi suratni shu pasport egasining modeli deyish mumkin. Insoniyatni farovon hayot shart-sharoitlarini yaratish, tabiiy ofatlarni oldindan aniqlash muammolari qadimdan qiziqtirib kelgan. Shuning uchun ham insoniyat tashqi dunyoning turli hodisalarini o'rganishi tabiiy holdir. Aniq fan sohasi mutaxasislari u yoki bu jarayonning faqat ularni qiziqtirgan xossalarnigina o'rganadilar. Massalan geologlar yerning rivojlanish tarixini, ya'ni qachon, qayerda va qabday hayvonlar yashaganlari, o'simliklar o'sganligi, iqlim qanday o'zganganligini o'rganadi. Bu ularga foydali qazilma konlarini topishda yordam beradi. Lekin ular yerda kishilik jamiyatining rivojlanish tarixini o'rganishmaydi – bu bilan tarixchilar shug'ullanadi. Atrofimizdagi dunyoni o'rganish natijasida noaniq va to'liq bo'lmagan ma'lumotlar olish mumkin. Lekin bu koinotga uchish, atom yadrosining sirini aniqlash, jamiyatning rivojlanish qonunlarini egallash va boshqalarga xalaqit bermaydi. Ular asosida o'rganilayotgan hodisa va jarayonnig modeli yaratiladi. Model ularning xususiyatlarini mumkin qadar to'laroq akslantirishi zarur. Modelning taqribiylik xarakteri turli ko'rinishda namoyon bo'lishi mumkin. Masalan, tajriba o'tkazish mobaynida foydalaniladigan asboblarning aniqligi olinayotgan natijaning aniqligiga ta'sir etadi. Modellashtirish- bilish obyektlarini ularning modellari yordamida tadqiq qilish, mavjud predmet va hodisalarning modellarini yasash va o'rganishdir. Modellashtirish uslublaridan hozirgi zamon fanlarida keng foydalanilmoqda. U ilmiy tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba'zi hollarda esa murakkab obyektlarni o'rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavhum, olisda joylashgan obyektlar, juda kichik hajmdagi obyektlarni o'rganishda modellashtirishning ahamiyati juda katta. Modellashtirish uslubidan fizika, astronomiya, biologiya, ijtimoiy fanlarda, iqtisod fanlarida obyektlarning faqat ma'lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda ham foydalaniladi. Uslubiyat sifatidan matematik modellashtirish matematika, fizika, biologiya va boshqa ilmiy fanlar bilan almashtirib bo'lmaydi, ular bilan raqobat qilmaydi. Aksincha uning sentizlash rolini ta'kidlamasdan bo'lmaydi. Matematik modellashtirish uchligini yaratish va qo'llash turli modellar va yondashuvlar – chiziqsiz modellar sifat analizidan tortib zamonaviy dasturlash tillariga asoslanadi va fanning turli – tuman yo'nalishlarini qo'shimcha yangi rag'batlantiradi. Masalaga kengroq yondashgan holda aytish mumkinki, modellashtirish turli “mutaxasislar” ijodiy

faoliyatida uchraydi – tadqiqotchilar va tadbirkorlar, siyosatchilar va harbiy qo‘mondonlar. Bu sohalarga aniq fanlarning joriy qilinishi intuitiv “modellar” ni chegaralab, ratsional metodlar qo‘llanish maydonini kengaytiradi. Albatta, matematik modellashtirish samarali bo‘lishi uchun u yaxxsshi ma’lum bo‘lgan professional talablarga javob berishi kerak: asosiy tushuncha va farazlarni aniq formulirovkasi ishlatilayotgan modellar adekvatligining aposterior analizi, hisoblash algoritmlari to‘g‘riligining kafolatlanishi va h.k. Agar “inson faktori” ya’ni murakkab formallashgan obyektlar ishtirokida sistemalarni modellashtirish haqida gap ketganda, yuqoridagi talablardan tashqari matematik va maishiy atamalarni (bir xil eshitiluvchi, ammo turli ma’noga ega) aniq farqlash, hodisa va jarayonlarni o‘rganishga tayyor matematik apparatni ehtiyotkorlik bilan qo‘llash va boshqa bir qator talablar ham qo‘shiladi. Axborot jamiyati muammolarini hal etishda faqatgina kompyuter qudratiga va informatikaning boshqa vositalarigagina ishonib qolish unchalik ham to‘g‘ri emas. Matematik modellashtirish bosqichlarining doimiy mukammallashib borishi va uning zamonaviy axborot – modellar sistemalariga tadbiq etilishi metodologik imperativdir. Faqat uning bajarilishigina zaruriy yuqori texnologiyali, raqobatbardosh va rang-barangmoddiy va intellektual mahsulotga ega bo‘lish mumkin. Atrofimizdagi olam qonunlari o‘zgarmas va bundan tadqiqotlarda samarali foydalanish mumkin. Bu matematik modellar universalligi xossasida o‘z aksini topgan. Shunday qilib, matematik modellashtirish vositalarining imkoniyatlaridan mexanikadan tortib sotsiologiya fanlarida (ijtimoiy fanlarda) ham samarali foydalanish mumkin ekan.

Modellashtirish bosqichlari. Biror obyektни matematik modellashtirish masalasining qo‘yilishi aniq harakatlar rejasini yuzaga keltiradi. Uni shartli ravishda uch bosqichga bo‘lish mumkin: model-algoritm-dastur. Birinchi bosqichda obyektning matematik formada asosiy xossalarini u buysunuvchi qonunlarni, qismlari uchun o‘rinli bog‘liklar va h.k. larni aks ettiruvchi “ekvivalenti” tanlanadi (yoki quriladi) Matematik model (yoki uning fragmentlari) nazariy metodlar yordamida tadqiq qilinadi, natijada esa obyekt haqida dastlabki muhim ma’lumotlar olish mumkin. Ikkinchi bosqich- modelni kompyuterda amalga oshiruvchi algoritm quriladi (yoki tanlanadi). Model sonli metodlar qo‘llash uchun qulay shaklda tasvirlanadi, izlanayotgan kattaliklarni berilgan aniqlikda (shartlarda) toppish uchun zaruriy

hisoblash va mabtiqiy operatsiyalar ketma-ketligi aniqlanadi. Uchunchi bosqichda model va algoritmnı kompyuter tushunadigan tilga “o‘g‘iruvchi” dastur yaratiladi. Ular uchun ham tejamlilik va moslashuvchanlik talablari qo‘yiladi. Dasturlarni bevosita “tajriba qurilmasi” – kompyuterda sinash uchun yaroqli bo‘lgan, o‘rganilayotgan obyektning “elektron” ekvivalenti, modeli deb atash ham mumkin. “Model-algoritm-dastur” uchligi tadqiqotchi qo‘lida universal, egiluvchan va arzon vositaga aylanib, u avvalo “sinov” hisoblash tajribalarida to‘g‘irlanadi va testlanadi. Keyin modelning berilgan obyektning barcha zaruriy sonli va sifat xossalarini aniqlovchi turli-tuman va to‘la sinovlar o‘tkaziladi. Modellashtirish jarayono kerak bo‘lsa, uchlikning barcha bo‘g‘inlarini (bosqichlarini) yaxshilash va aniqlashtirish bilan birga olib boriladi.

Model turlari. Modelni tanlash vositalariga qarab uch guruhga ajratish mumkin: abstrakt, fizik va biologik modellar. Modellarning to‘laroq mazmuni bilan quyida tanishtirib o‘tiladi:

Asbtrakt modellar qatoriga matematik, matematik-mantiqiy va shu kabi modellar kiradi.

Fizik modellar qatoriga kichiklashtirilgan maketlar, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va shu kabilar kiritiladi.

Fizik model. Tekshirilayotgan jarayonning tabiati va geometrik tuzulishi asl nusxadagidek, ammo undan miqdor (o‘lchami, tezligi, ko‘lami) jihatidan farq qiladigan modellar, masalan, samolyot, kema, avtomobil, poyezd, GES va boshqalarning modellari fizik modelga misol bo‘la oladi. Fizik-kimyoviy modellar biologik tuzulish, funksiya yoki jarayonlarni fizik yoki kimyoviy vositalar bilan qaytadan hosil qilishdir.

Matematik modellar. Tirik organizmlarning tuzulishi, o‘zaro aloqasi vazifasiga oid qonuniyatlarning matematik va matematik-mantiqiy tavsifidan iborat bo‘lib , tajriba ma’lumotlariga ko‘ra yoki mantiqiy asosida tuziladi, so‘ngra tajriba yo‘li bilan tekshirib ko‘riladi. Biologik hodisalarning matematik modellarini kompyuterda o‘rganish tekshirilayotgan biologik jarayonning o‘zgarish xarakterini oldindan bilish imkonini beradi. Shuni ta’kidlash kerakki, bunday jarayonlarni tajriba yo‘li bilan tashkil qilish va o‘tkazish ba’zan juda qiyin kichadi.

Biologik model turli tirik obyektlar va ularning qismlari-molekula, hujayra, organism vas hu kabilarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellarda qo‘llaniladi. Biologiyada, asosan

fizik, biologik va matematik modellarda qo'llaniladi. Ijtimoliy-iqtisodiy modellar taxminan, 18-asrdan qo'llanila boshlandi. F. Kenening "Iqtisodiy jadvallar"ida birinchi bo'lib butun ijtimoiy takror ishlab chiqarish jarayoning shakllanishini ko'rsatishga harakat qilingan. Iqtisodiy tizimlarning turli faoliyat yo'nalishlarini o'rganish uchun har xil modellardan foydalaniladi. Iqtisodiy taraqqiyotning eng umumiy qonuniyatlari xalq xo'jaligi modelari yordamida tekshiriladi. Turli murakkab ko'rsatgichlar, jumladan, milliy daromad, ish bilan bandlike, istemol, jamg'armalar, investitsiya ko'rsatgichlarining dinamikasi va nisbatini tahlil qilish, uni oldindan aytib berish uchun katta iqtisodiy modellar qo'llaniladi. Aniq xo'jalik vaziyatlarini tekshirishda kichik iqtisodiy yizimlardan, murakkab iqtisodiy tizimlarni tekshirishda, asosan, matematik modellardan foydalaniladi.

Hayotda inson xotirasiga bog'liq bo'lmagan holda uchraydigan usullar muvoffaqiyatli va hatto, o'z-o'zini kuzatish va tajribalar mavjud bo'lib, o'z faoliyatida har xil sohalarga mos muammolari yaxshi yechimini topishga harakat qiladi. Bunday yechimlarni topish muammosi ko'p qirrali bo'lib, ularni har xil usullar bilan hal qilish kerakdir. KUtilayotgan obyektlarni chuqur va har tomonlama o'rganish maqsadida tabiatda hamda jamiyatda ro'y beradigan jarayonlarning modellari yaratiladi. Jarayon modelini tuzish modellash deb ataladi. Modellash metodlarini ishlab chiqish bevosita kibernetika fanining rivojlantirish bilan bog'liq hisoblanadi. Masalalarni yechimini topishda mashinalar, inson, murakkab holatlarda mashina inson tizimi qo'l kelib, bu esa o'z navbatida aniq yechimni topishga yo'naltiradi. Hozirgi vaqtda amaliyot sohasida matematik modellardan foydalanib natija olinmoqda. Jamiyatda uchraydigan jarayon va obyektlari miqdoriy, bog'lanishlarning matematik ifodasi matematik model deb ataladi. Modelning hayotiyligi uning modellashiladigan obyektga qanchalik mos kelishiga bog'liq. Bitta modelda obyektning hamma tomonini aks ettirish qiyin bo'lganligidan unda obyektning eng xarakteri yetarli va muhim belgilari aks ettiriladi. Binobarin, modelning to'g'riligi to'plangan ma'lumotning hajmiga, ularning aniqlik darajasiga, tadqiqotchining bilim darajasiga va modellash jarayonida aniqlanadigan masalaning ko'lamiga bog'liq. Ma'lumki, taqbiq aniq va ijtimoiy fanlar takomillashuvida xizmat qilmoqda. Matematika boshlang'ich tushunchalari, faqatgina ijtimoiy jarayonlarda emas, balki, mojaroli holatlar, o'zaro

kelishmovchiliklar, kelishuv, ijtimoiy fikrlarni aniqlashda ham muhim ahamiyatga ega. Matematik modellar ishlab chiqish va tahlil qilib, matematik usullarga tadbiq qilinmoqda.

Jarayonlarni tahlil qilish sohasi XVIII-XIX asrlarda paydo bo'lib, ishni tashkil qilish va ishlab chiqarishda qo'llanila boshlanib, sanoat korxonalaridagi ko'pgina aniq masalalarni yechimini topishda A.Smit, Charlz Bebbirt, F.Tyeylor, G.Gentlar ijobiy natijalarga erishganlar. 1840 yilda Buyuk Britaniyada Bebbirt usuli yordamida pochtdan yuboriladigan ma'lumotlarni qayta ishlab, uni ajratib, tyezgina iste'molchiga yuborish yo'llari yaratilgan. XX asr boshlarida antogonik mojarolarni matematik modellartirish artilleriyalar uchun F.Lanchester usulidan, investisiyani boshqarish nazariyasi bo'yicha F.Xarris usuli, maishiy xizmat sohasida A.Erling usullaridan foydalanilgan. Ikkinchi jahon urushi davrida Angliya harbiylari tomonidan Shimoliy Atlantikani shturm qilishda S.Blyejyet usulini qo'llagan bo'lib, bu mashhur «Blacked's Circus» opyerasiyasi dyeb nomlanib, unda matematik, fizik, biolog, geodyez, astrologik hamda harbiylar ishtirok qilganlar. Keyinchalik matematik modellartirish sohasida o'yinlar nazariyasi bilan D.Nyeyman chiziqli dasturlash sohasida D.Dansik, L.V.Kantorovichlar katta sohagi ilmiy izlanishlarni amalga oshirganlar. Shuni ham ta'kidlab, o'tish kerakki, soddalashtirilgan matematik model qo'yilgan talablarga yaxshi javob bera olmaydi, o'ta murakkab model esa masalani yechish jarayonida ancha muammolar yaratadi.

Matematik modellartirish usullari va yechish bosqichlari.

Matematik modellardan foydalanish usullari to'rt qismga bo'linadi:

1. Gidravlik modellar. Bunday modellartirish asosan suyuqlik kuchi bilan ishlaydigan apparat (idishlar) orqali hisoblanadi. Modellartirshning bunday usuli suyuqliklarni o'lchashda qo'llaniladi.

2. Elyektr tasvirlash modellari. Fizika sohasida qo'llanilib, elektr tarmog'i xarakteristikasi tarzida tasvirlanadi.

3. Qurilishlarda bajariladigan ishlarning bajarilish muddatini aniqlashga yo'naltirilgan matematik modellar dyeb ataladi.

4. Xalq xo'jaligining turli tarmoqlaridagi bajarilayotgan ishlar tengsizlik va tenglamalar sistemasiga mos matematik model olib kelinib, ular iqtisodiy-matematik modellar deb yuritiladi.

Matematik modellar o'z navbatida quyidagilardan iborat bo'ladi:

1. Statistik tahlil.

2. Imitation modellartirish.
3. Tarmoqli dasturlash.
4. Chiziqli dasturlash.
5. Ketma-ketlik nazariyasi.
6. Chiziqli bo'lmagan dasturlash.
7. Dinamik dasturlash.
8. O'yinlar nazariyasi.

Matematik modellartirishning nazariy asoslari besh bosqichga bulinib, amalga oshiriladi.

Birinchi bosqichda – jarayon sifat jihatdan tahlil qilinib, masala maqsadi o'rganilib, unga mos axborotlar to'planadi. Jarayonning mohiyatini nazariy asosda o'rganib, uning zarur ko'rsatkichlari aniqlanib, bu modellartirish negizini tashkil etadi.

Ikkinchi bosqich – jarayonning optimallik mezoni hisoblanib, unda hamma ishlar bir xil o'lchov birligiga kyeltiriladi, hamda mezon matematik funksiya ko'rinishida ifodalanib, argumyentning ma'lum qiymatlarida yagona yechimga ega bo'ladi.

Uchinchi bosqichda – matematik model matematik ifodalar ko'rinishida (tenglama va tengsizliklar sistemasi) tasvirlanib, ular chiziqli, kvadrat, chiziqli bo'lmagan, gipyerbolik va boshqa matematik ifodalarda yozilishi mumkin.

To'rtinchi bosqichda – shakllantirilgan modelning miqdoriy yechimini aniqlaydigan usul tanlanadi. Matematik ifoda yordamida model bilan ifodalangan masalani yechishda matematik modellartirish myetodlari qo'llaniladi (Iqtisodiy masalalarni yechishda simpleks), ehtimollarda (O'yinlar nazariyasi). Masalaning maqbul yechimini aniqlashda matematik dasturlash yoki boshqa usullardan foydalanish mumkin bo'ladi.

Matematik modellartirishning **beshinchi bosqichida** masalaning yagona (maqbul) yechimi miqdor va sifat jihatdan tahlil qilinib, ular o'rtasidagi nisbiy holat olinadi.

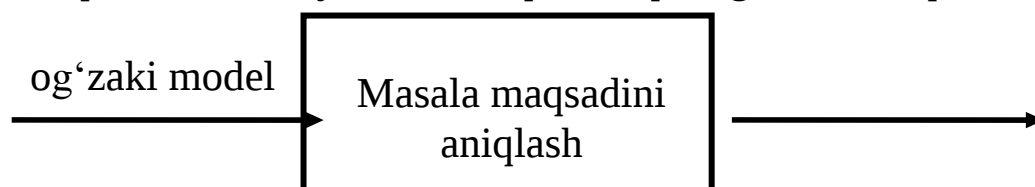
Masalalarni zamonaviy axborot texnologiyalari yordamida yechish yaxshi natijalarni byeradi, buning uchun:

- 1) matematik modelni yechish uchun maxsus dastur ishlab chiqiladi;
- 2) asosan zamonaviy axborot texnologiyalarida murakkab masalalar yechiladi.

Amaliy tajribalar shuni ko'rsatadiki, masalalarning yechimini aniqlashda quyidagi bosqichlardan foydalanishni taklif etamiz.

1- bosqich – masala maqsadini aniqlash (8.1-rasm);

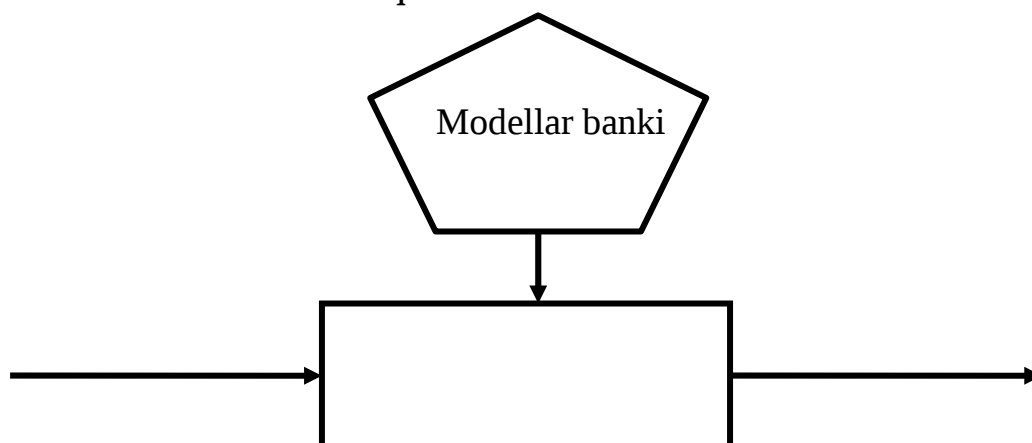
Bu bosqichda masala maqsadini aniq va to'g'riligini ko'rsatgan holda vaqt, tushuncha, yozuvlar orqali aniqlashga harakat qilinadi.



Rasm -8.1.

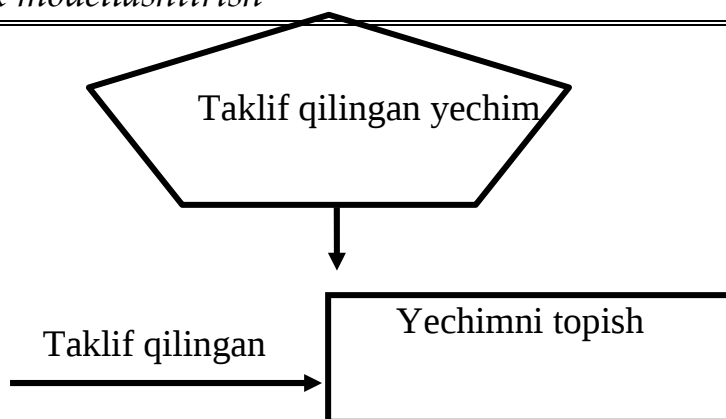
1- bosqich – masalani yechish uchun matematik model tanlash: Bunday holda masala aniq ko'rsatilsa, unda tayyor model tanlanadi,

agarda aniq model mavjud bo'lmasa, u holda ushbu masalani yechishga mos model ishlab chiqiladi.

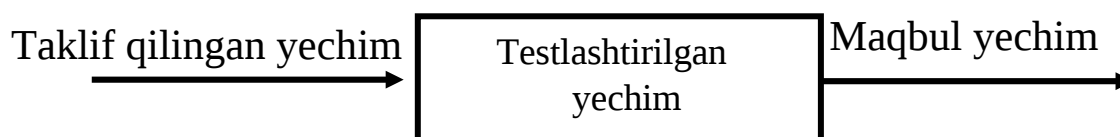


Rasm-8.2.

Modellar har xil bo'lishi mumkin fizik, analogik, matematiklar bo'lib, matematik modellar 3 guruhga bo'linadi, determinlovchi (aniqllovchi), staxostik va o'yinlar. Determinlovchi (aniqllovchi) modellar asosiy ko'rsatkichlarga bog'liq holda aniqlaydi. Masalan: optimallashtirish masalalarida ayrim miqdorlar bo'yicha (harajatni kamaytirish yoki daromadni yuksaltirish). Staxostik modellar aniq bo'lmagan yoki ehtimolli holatlarda ishlatilgan. O'z foydasi uchun nazariy o'yin modellaridan foydalaniladi. 3-bosqich yechimni aniqlashda kerakli boshlang'ich axborotlar izlanadi va tayyorlanib, aniq o'zgaruvchilar tanlanadi va og'zaki model asosida moslashadi. 4-bosqich – yechimni testlashtirish – bunda yechimni testlashtirib, testdan yaqinroq yechim o'rganilayotgan mos kelish o'rganiladi.

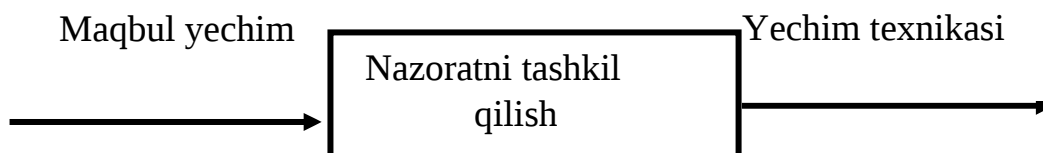


Rasm-8.3



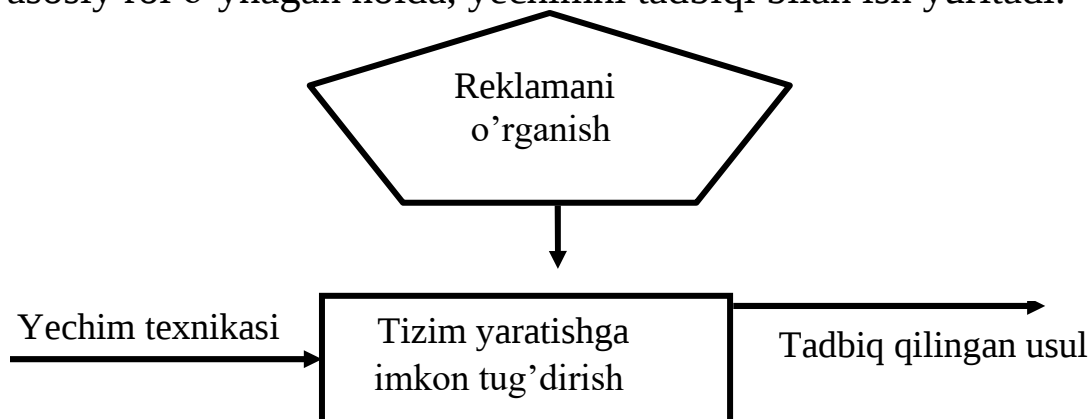
Rasm-8.4

5-bosqich – nazoratni tashkil qilish. Agar aniqlangan yechim mos bo‘lsa, uni nazoratini yo‘lga qo‘yishda to‘g‘ri modeldan foydalanish kerak, asosiy masaladagi bunday nazariy, chegaralarini tartibini saqlashga mos modellardan foydalanishi boshlang‘ich axborotlar aniqligi va olinadigan yechimga bog‘liq hisoblanadi.



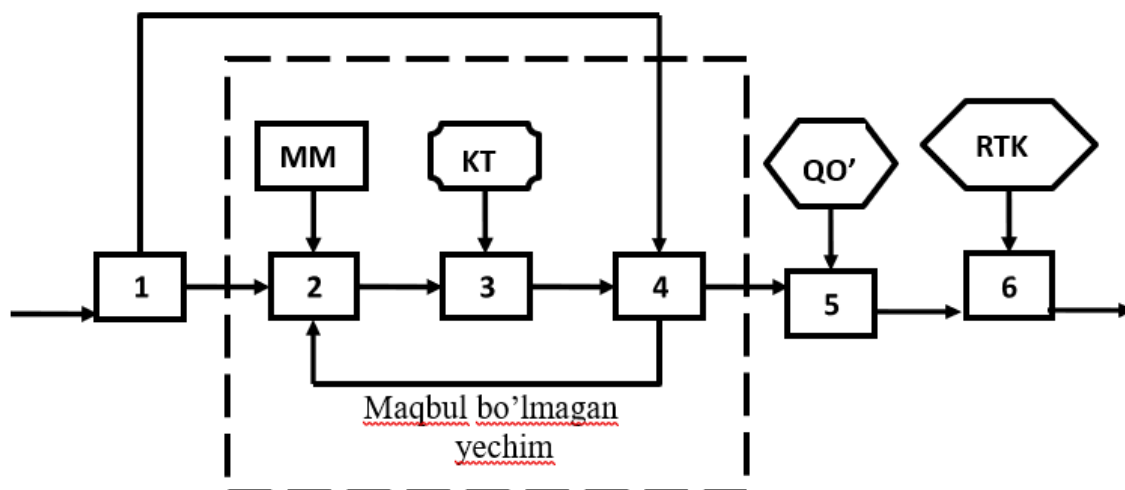
Rasm-8.5

6-bosqich – eng muhim va murakkab bo‘lib – bunda inson asosiy rol o‘ynagan holda, yechimni tadbiqi bilan ish yuritadi.



Rasm-8.6

Quyidagi sxemadagi nuqtali chiziqlar yechimni aniqlash jarayonlari qismlarini ifodalab, bu masalani yechishning matematik xususiyatlarini belgilashda asosiy rol o'ynaydi.



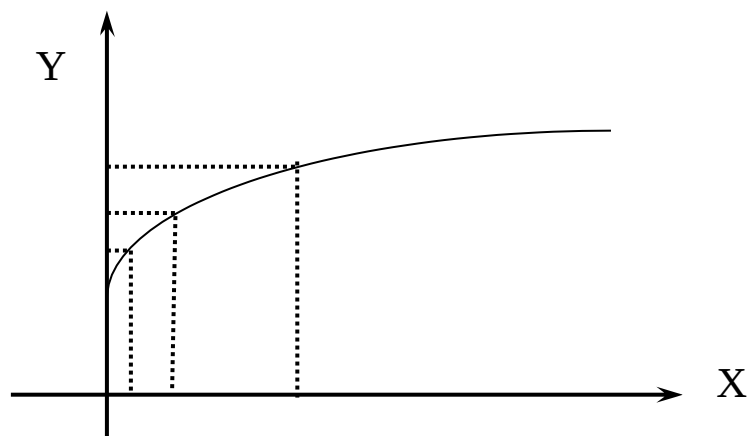
Rasm-8.7

Bunda MM – modellar majmuasi; KT – ko‘rsatkichlarni tayyorlash; KO‘ – ko‘rsatkichlarni o‘zgartirish; RTQ – reklamani tashkil qilish.

Dinamik modellar

Fizik modellar turiga birorta obyekt va tizimlarni kengaytirib yoki qisqartirib yozilishiga aytiladi. Masalan: samalyotni modeli deganda uning 1:50 proporsiya sifatida qabul qilingan modul qaralib, unda samalyotning 50 marta kichik holdagi maketi hisobga olinadi.

Analogik modellar deb – izlanayotgan obyekt, haqiqiy obyekt sifatida qaraladi. Misol: 1. Talabalarni YaN topshirishlariga mos holdagi holatni kuzatsak, unda sarflangan narsa bilan natija o‘zaro bog‘liq bo‘lib, bu analogik model hisoblanadi. Ya’ni., talaba YaN ga tayyorgarligi uchun sarflagan vaqti, uni YaN ni topshirishdagi natijasida ifodalanadi.



Misol: Agar 1 ombordan 3 ta shaharga mahsulot yuborish kerak bo'lib, bunda transport harajatlari kam bo'lishi e'tiborga olingan. Agar yuborilgan fanerlarga qoqiladigan narsalar shaharlarni o'zida tayyorlansa u holda omborni optimal masofaga joylashtirish kerak bo'ladi.

Matematik modellar

Matematik modellar biror obyekt xarakteri va xossasiga bog'liq holda matematik ifoda va metodlar orqali yozilishiga aytiladi. Agarda ayrim hollarda formula tilida ifodalashda, murakkab qoidalarga duch kelinadi. Har qanday matematik modelni yaratishda formulalar ishtirok etib, ular bosqichlarga bo'linadi. Vaqt o'tishi bilan ko'rsatkichlar o'zgarib boradi.

Aholining o'sish dinamikasini hisoblash modeli

Ayrim hollarda matematik modellar yaratish oson amalga oshiriladi. Masalan: XVIII asr o'rtalarida Markaziy Yevropada cherkovlar mavjud bo'lib, ularga uning atrofidagi qishloq aholisi qatnaganlar. Cherkov muftisi fikriga ko'ra sig'inuvchilar soni oshib borgan bo'lib, uning fikricha sig'inuvchilarning soni oshishi keyinchalik cherkovga yana qo'shimcha xona qilish yoki yangisini qurish kerakligini anglatib, qaysidir kelajakda cherkov qurish kerakligini aytadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz, n – yil oxirida cherkovga keluvchilar sonini X_n bilan belgilasak, keyingi $(n+1)$ yilda ular soni X_{n+1} bo'lib, u holda ular o'rtasidagi farq $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ (1) bilan ifodalanadi.

Bunda ikkita xolatni – aholi yo'nalishi va aholining o'limi e'tiborga olinadi. Shu sababli cherkov muftisi bu holatni quyidagicha ifodalaydi

$b_1 \dots b_n$ – aholining

tug'ilishid $d_1 \dots d_n$ –

aholining o'limi

$x_1 \dots x_n$ – cherkovga qatnashganlar soni bo'lsa, ular o'rtasida munosabat quyidagicha bo'ladi.

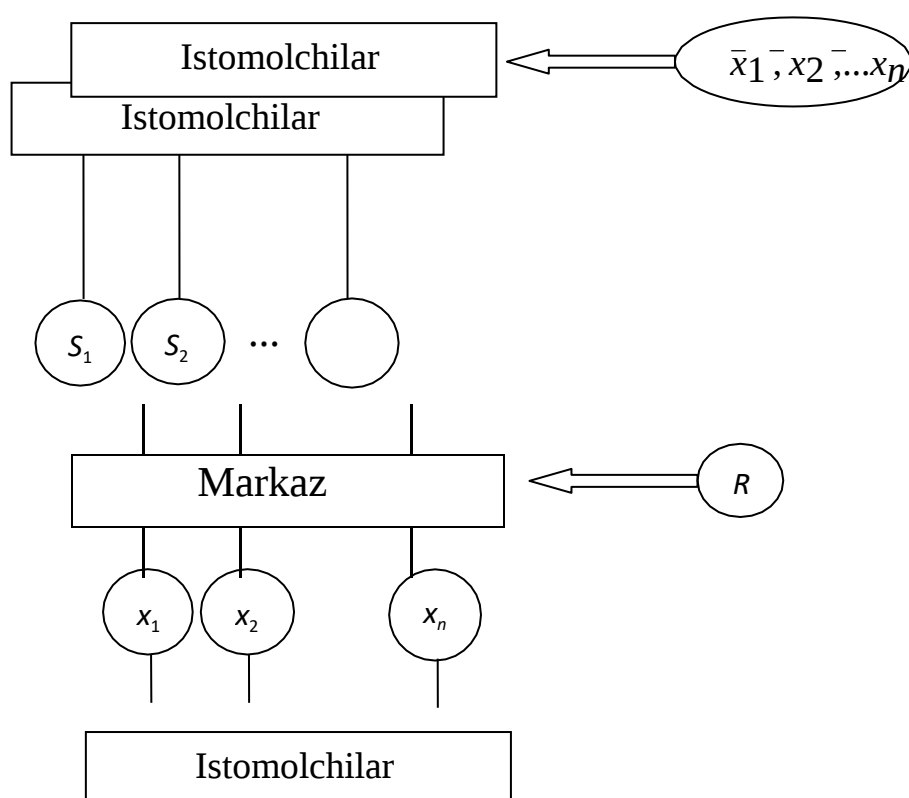
$$\frac{b_1}{x_1}, \frac{b_2}{x_2}, \dots, \dots, \frac{b_n}{x_n}$$
$$\frac{d_1}{x_1}, \frac{d_2}{x_2}, \dots, \dots, \frac{d_n}{x_n}$$

Tashkiliy tizimlarni boshqarish

Tashkiliy tizim – bu odamlar to‘plami va texnikalar hisoblanib, ular o‘zaro funksional bog‘liq hisoblanadi. Misollarda oila, firma, ta’lim muassasalari, shahar va mamlakatlar ishtirok etadi. Har qanday tizim elementlardan tashkil topadi. Bizga ma’lumki bunda 2 ta holat mavjuddir. Birinchi holatda tizim birorta aniq maqsadga yo‘naltirilgan bo‘lib, ikkinchi tomondan esa tizimda o‘z foydasiga yo‘naltirilib, bu o‘yinlar nazariyasiga mos keladi va ikki o‘lchamli modellar orqali ifodalanadi. Masalan: n – iste’molchi bo‘lib, u S_n markaz talabiga ko‘ra mahsulot yetkazish kerak bo‘ladi, agar iste’molchi R xomashyo asosida mahsulot ishlab chiqarsa, qo‘shimcha axborot asosida i – iste’molchi tomonidan talab qilinadigan xom-ashyo x_i ($i = 1, n$) bilan belgilanadi.

$\sum_{i=1}^n S_i \leq R$ bunda talab yuqori bulmasdan markazdagi masalani yechishda $S_1=X_1, S_2=X_2, \dots, S_n=X_n$ bo‘lib, har bir iste’molchi o‘z talabiga nisbatan mahsulot oladi, agarda $\sum_{i=1}^n S_i \leq R$ bo‘lsa bunda, berilgan talab asosida amalga oshiriladi.

To‘g‘ri tashkil qilish mexanizmi



$$\sum_{i=1}^n \gamma S_i \text{ bundan } \gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

Misol: 5 ta iste'molchi mahsulot uchun 5,8,12,7 va 8 holatda talabnoma bergan bo'lib, markazda esa taqsimlash uchun 32 miqdordagi mahsulot mavjud. Qanday qilib, to'g'ri tashkil qilish mexanizmi orqaliqanday taqsimlash amalga oshiriladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Matematik Modeli nima?
2. Matematik Modelini tuzishda qanday qadam qadam?
3. Matematik modelni rivojlantirishda qanday algoritmlar va usullar ishlatiladi?
4. Matematik modellarni sinovdan o'tkazishda qanday masalalar tez orqali aniqlanadi?
5. Matematik modelni amalda qanday ishlatish mumkin?
6. Matematik modelni yaratishda modellar qanday ko'rsatiladi?

9-MAVZU: MODELLARTIRISHNING STATISTIK ASOSLARI.

Reja:

1. Statistik model. Statistik modellartirishning mohiyati
2. Interval seriyasini yaratish
3. Poligon va gistogramma

Tayanch so'z va iboralar: *Statistik model, interval, seriya, polygon, gistogramma, matematik statistika, modellartirish.*

Statistik va ekonometrik modellartirish- bilim ob'ektlarini ularning statistik modellari bo'yicha o'rganish; bu hodisalarning izohlarini olish, shuningdek hodisalarni yoki tadqiqotchini qiziqtiradigan ko'rsatkichlarni bashorat qilish uchun real hayotdagi ob'ektlar, jarayonlar yoki hodisalarning modellarini qurish va o'rganish (masalan: ekonometrikadagi iqtisodiy jarayonlar). Bunday modellarning parametrlari statistik usullar yordamida baholanadi. Masalan: maksimal ehtimollik usuli, eng kichik kvadratlar usuli, momentlar usuli. $Y=b_1+b_2*X$ bu yerda Y - xarajatlar, X - daromad, b_1 va b_2 - tenglama parametrlari (parametrlar), u - stokastik xato (buzilish, xato muddati).

Matematik statistika - bu matematikaning ilmiy va amaliy xulosalar uchun statistik ma'lumotlarni tizimlashtirish, qayta ishlash va ishlatishning matematik usullariga bag'ishlangan bulimi. Bu erda

statistik ma'lumotlar - bu ma'lum xususiyatlarga ega bo'lgan ba'zi bir oz yoki kamroq hajmdagi ob'ektlar soni to'g'risidagi ma'lumotlar. Matematik statistikaning asosiy maqsadi tasodifiy tarqalgan ma'lumotlardan mazmunli, ilmiy asoslangan xulosalar chiqarishdir. Shu bilan birga, bu ma'lumotlarni ishlab chiqaradigan o'rganilayotgan hodisaning o'zi, odatda, uning tafsilotlarini to'liq aks ettira olmaydigan darajada murakkab. Shunday qilib, statistik xulosalar haqiqiy tasodifiy hodisaning ba'zi matematik ehtimollik modeli asosida tuziladi, bu uning muhim xususiyatlarini takrorlashi va ahamiyatsiz deb hisoblanganlarni istisno qilishi kerak. Matematik statistika usullari o'rganilayotgan hodisani kuzatishlar asosida ushbu hodisani tasvirlaydigan matematik modelda ishtirok etuvchi tasodifiy o'zgaruvchilarning ehtimollik xususiyatlarini aniqlashga imkon beradi. Matematik statistikaning vazifasi - ehtimollik nazariyasi metodlari yordamida statistik ma'lumotlarni, kuzatish natijalarini o'rganishga asoslangan ommaviy tasodifiy hodisalarni boshqaruvchi qonunlarni o'rnatish. Statistika - bu ko'p sonli ob'ektlar yoki hodisalarni o'rganish natijasida olingan ma'lumotlar; shuning uchun matematik statistika ommaviy hodisalar bilan shug'ullanadi.

Matematik statistikaning **birinchi vazifasi** kuzatishlar natijasida yoki maxsus o'rnatilgan tajribalar natijasida olingan statistik ma'lumotlarni to'plash va guruhlash usullarini ko'rsatishdir.

Matematik statistikaning **ikkinchi vazifasi** - tadqiqot maqsadlariga qarab, statistik ma'lumotlarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqish. Zamonaviy matematik statistika tadqiqot boshlanishidan oldin, o'qish vaqtida va boshqa ko'plab muammolarni aniqlash uchun zarur bo'lgan testlar sonini aniqlash usullarini ishlab chiqadi. **Zamonaviy matematik statistika** - bu noaniqlik sharoitida qaror qabul qilish fani. Matematik statistikaning vazifasi - ilmiy va amaliy xulosalar olish uchun statistik ma'lumotlarni yig'ish va qayta ishlash usullarini yaratish.

Statistik ma'lumotlarning umumiy va namunaviy soni Bir hil ob'ektlar to'plamini ushbu ob'ektlarni tavsiflovchi qandaydir sifat yoki miqdoriy atributga nisbatan o'rganishni talab qilaylik. Ob'ekt sifat xususiyatlariga ega yoki ega emas. Ular to'g'ridan -to'g'ri o'lchanmaydi (masalan, sportning ixtisosligi, malakasi, millati, hududiy mansubligi va boshqalar). Miqdoriy xarakteristikalar sanash yoki o'lchash natijalarini ifodalaydi. Shunga ko'ra, ular diskret va uzluksiz bo'linadi.

Ba'zida to'liq so'rov o'tkaziladi, ya'ni. aholining har bir ob'ektini ular qiziqqan atribut bo'yicha o'rganing. Amalda, doimiy so'rov nisbatan kamdan-kam qo'llaniladi. Masalan, agar populyatsiyada juda ko'p sonli ob'ektlar bo'lsa, unda to'liq tadqiqot o'tkazish jismonan imkonsizdir. Bunday hollarda cheklangan miqdordagi ob'ektlar tasodifan butun aholi orasidan tanlab olinadi va o'rganiladi. Umumiy va namunaviy populyatsiyani farqlang.

Namuna populyatsiyasi (namuna) - bu tasodifiy tanlangan ob'ektlar to'plami. Umumiy (asosiy) to'plamdan namuna olinadigan ob'ektlar to'plami deyiladi. Populyatsiya hajmi (namuna yoki umumiy) - bu populyatsiyadagi ob'ektlar soni. Masalan, agar tekshirish uchun 1000 qismdan 100 qism tanlangan bo'lsa, unda umumiy populyatsiyaning kattaligi $N = 1000$, namuna hajmi esa $n = 100$ ga teng. Umumiy populyatsiyadagi N ob'ektlar soni namunaviy o'lchamdan sezilarli darajada oshadi.

Namuna olish usullari: Namuna tayyorlashda siz ikkita narsani qilishingiz mumkin: ob'ekt tanlanganidan va uning ustida kuzatilgandan so'ng, uni umumiy guruhga qaytarish yoki qaytarmaslik mumkin. Yuqoridagilarga muvofiq namunalar takroriy va takrorlanmaganlarga bo'linadi. Takrorlangan namuna tanlangan ob'ekt (keyingisini tanlashdan oldin) umumiy guruhga qaytariladigan namuna deb ataladi. Takrorlanmaydigan namuna tanlangan ob'ekt umumiy guruhga qaytarilmaydigan namuna deb ataladi. Namunaviy ma'lumotlarning ishonchliligi uchun umumiy qiziqish uyg'otadigan odamlarning xarakteristikasini baholash mumkin, namuna ob'ektlari uni to'g'ri ko'rsatishi kerak (namuna umumiy populyatsiyaning nisbatlarini to'g'ri ko'rsatishi kerak) - namuna vakil bo'lishi kerak (vakil). Namuna vakillik qiladi, agar:

- Tanlovning har bir ob'ekti oddiy aholidan tasodifiy tanlanadi;
- Barcha ob'ektlar namunaga qo'shilish ehtimoli bir xil.
- Guruh statistikasi usullari
- Diskret variatsion qatorlar

Qoida tariqasida, olingan ma'lumotlar juda ko'p sonli raqamlardir. Ushbu raqamlar to'plamini ko'rib chiqsak, ularning o'zgarishi (o'zgarishi) ning har qanday naqshini aniqlash qiyin. Tasodifiy o'zgaruvchining qiymatlari o'zgaruvchanligini o'rganish uchun eksperimental ma'lumotlar qayta ishlanadi.

Misol 1. Raqam bo'yicha kuzatuvlar o'tkazildi NS universitet talabalari imtihonlarda olgan baholari. Bir soat davomida o'tkazilgan kuzatuvlar quyidagi natijalarni berdi: 3; 4; 3; 5; 4; 2; 2; 4; 4; 3; 5; 2; 4; 5; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 4; 2; 2; 5; 5; 4; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 4; 5; 2; 5; 5; 4; 3; 3; 4; 2; 4; 4; 5; 4; 3; 5; 3; 5; 4; 4; 5; 4; 4; 5; 4; 5; 5; 5. Mana bu raqam NS diskret tasodifiy o'zgaruvchidir va u haqida olingan ma'lumotlar statistik (kuzatiladigan) ma'lumotlardir. Har bir alohida guruhda tasodifiy o'zgaruvchining qiymatlari bir xil bo'lishi uchun yuqoridagi ma'lumotlarni kamaytirilmaydigan tartibda tartibga solish va guruhlash orqali kuzatuv ma'lumotlarining keng doirasi olinadi. 1 -misolda biz tasodifiy o'zgaruvchining quyidagi qiymatlari bo'lgan to'rtta guruhga egamiz: 2; 3; 4; 5. Guruhlangan kuzatilgan ma'lumotlarning alohida guruhiga mos keladigan tasodifiy o'zgaruvchining qiymati variant deb ataladi va bu qiymatning o'zgarishi o'zgarishdir. Variantlar lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi va indeksleri guruhning tartib raqamiga mos keladi. Bir qator kuzatuvlarda mos keladigan variant necha marta sodir bo'lishini ko'rsatuvchi raqam variantning chastotasi deb ataladi va shunga mos ravishda belgilanadi. Seriyadagi barcha chastotalarning yig'indisi namuna o'lchamidir. Variant chastotasining namuna hajmiga nisbatini $\frac{w}{n}$ nisbiy chastota deyiladi. Tanlovning statistik taqsimoti - bu variantlar ro'yxati va ularga mos keladigan chastotalar yoki nisbiy chastotalar.

Boshqaruv: Variatsiya seriyasining barcha chastotalari yig'indisi (3 -jadvalning ikkinchi qatori qiymatlari yig'indisi) namuna o'lchami (1 -misolda) $n = 60$; Variatsiya seriyasining nisbiy chastotalari yig'indisi 1 ga teng bo'lishi kerak (3 -jadvalning uchinchi qatori qiymatlari yig'indisi).

Intervalli variatsion qatorlar. Agar o'rganilayotgan tasodifiy o'zgaruvchi uzluksiz bo'lsa, kuzatilgan qiymatlarni tartiblashtirish va guruhlash ko'pincha uning qiymatlari o'zgaruvchanligining xarakterli xususiyatlarini ajratishga imkon bermaydi. Bu tasodifiy o'zgaruvchining individual qiymatlari bir -biridan xohlagancha farq qilishi mumkinligi bilan izohlanadi, shuning uchun kuzatilgan ma'lumotlarning yig'indisida miqdorning bir xil qiymatlari kamdan - kam uchraydi va variantlarning chastotalari bir -biridan unchalik farq qilmaydi. Diskret tasodifiy kattalik uchun diskret ketma -ketlikni tuzish ham amaliy emas. Bunday holda, taqsimotning intervalli

o'zgaruvchanlik seriyasini tuzish kerak. Bunday ketma -ketlikni tuzish uchun, tasodifiy o'zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari o'zgarishining butun oralig'i bir qancha qismli intervallarga bo'linadi va har bir qisman intervalda miqdor qiymatlarining paydo bo'lish chastotasi hisoblanadi.

Intervalli o'zgaruvchanlik seriyasi - mos keladigan chastotalar yoki ularning har birida miqdoriy qiymatlarning paydo bo'lishining nisbiy chastotalari bilan tasodifiy o'zgaruvchining qiymatlari o'zgarishi intervallarining tartiblangan to'plami.

Interval seriyasini yaratish uchun sizga kerak:

- qisman intervallar hajmini aniqlash;
- intervallar kengligini aniqlash;
- har bir interval uchun uning yuqori va pastki chegaralarini belgilang;
- guruh kuzatuvi natijalari.

Guruhlash intervallarining sonini va kengligini tanlash masalasi har bir aniq holatda maqsadlarga qarab hal qilinishi kerak tadqiqot, namuna hajmi va namunadagi belgining o'zgarishi darajasi. Taxminan intervallar soni k faqat namuna hajmiga qarab baholash mumkin n quyidagi usullardan birida: Formulaga muvofiq Sterjesa:

$$k = 1 + 3.32 \lg n;$$

Umuman olganda, bir xil kenglikdagi intervallarga afzallik beriladi. Intervallarning kengligini aniqlash h hisoblash:

Variantlar diapazoni R - namuna qiymatlari: $R = x_{\max} - x_{\min}$, qayerda $x_{\max}$ va $x_{\min}$ - maksimal va minimal namunaviy variantlar; Har bir intervalning kengligi h quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$h = R / k.$$

Birinchi intervalning pastki chegarasi x_{h1} minimal namuna olinadigan qilib tanlangan $x_{\min}$ taxminan shu intervalning o'rtasiga to'g'ri keldi: $x_{h1} = x_{\min} - 0,5 \text{ soat}$. Intervallar oldingi interval oxirigacha qisman interval uzunligini qo'shib olinadi h : $x_{hi} = x_{hi-1} + h$. Intervallar chegarasini hisoblashga asoslangan intervallar shkalasi qurilishi qiymatgacha davom etadi x_{hi} nisbatni qondiradi: $x_{hi} < x_{\max} + 0,5 \cdot h$.

Intervallar shkalasiga muvofiq atribut qiymatlari guruhlarga bo'linadi - har bir qisman interval uchun chastotalar yig'indisi hisoblanadi. n_i tanlangan variant men interval. Bunday holda, interval

tasodifiy o'zgaruvchining pastki chegarasidan katta yoki unga teng va intervalning yuqori chegarasidan kichik qiymatlarini o'z ichiga oladi.

Poligon va gistogramma. Aniqlik uchun statistik taqsimotning turli grafiklari tuzilgan. Diskret variatsion ketma -ketlik ma'lumotlari asosida chastotalar yoki nisbiy chastotalar ko'pburchagi quriladi. Chastotalar ko'pburchagi uzilgan chiziq deb ataladi, uning segmentlari nuqtalarni bog'laydi $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_k; n_k)$. Absissa o'qida chastotali ko'pburchak qurish uchun variantlar chiziladi x_i va ordinatada - mos keladigan chastotalar n_i ... Ballar $(x_i; n_i)$ to'g'ri chiziq segmentlari bilan bog'langan va chastotali ko'pburchak olinadi. Nisbatan chastotali ko'pburchak - bu ko'pburchak chiziq bo'lib, uning segmentlari nuqtalarni bog'laydi $(x_1; W_1), (x_2; W_2), \dots, (x_k; W_k)$. Absissa o'qida nisbiy chastotali ko'pburchak qurish uchun variantlar tuziladi x_i va ordinatada - mos keladigan nisbiy chastotalar $W_i - Fi$... Ballar $(x_i; W_i - Fi)$ to'g'ri chiziqli segmentlar bilan bog'langan va nisbiy chastotali ko'pburchak olinadi. Agar uzluksiz xususiyat bo'lsa, gistogramma tuzish maqsadga muvofiqdir.

Chastotali gistogramma - bu to'rtburchaklardan tashkil topgan pog'onali shakl, ularning asoslari qisman uzunlik intervallari h va balandliklar nisbatga teng $n_i h$ (chastota zichligi). Absissa o'qida chastotalar gistogrammasini tuzish uchun qisman intervallar chiziladi va ularning ustki qismida absissa o'qiga parallel masofalar chiziladi. $n_i h$. Kvadrat $men h n_i / h = n_i$ - chastotalar yig'indisi opsiyasi **men** - uchinchi interval; shuning uchun chastota gistogrammasining maydoni barcha chastotalar yig'indisiga teng, ya'ni. namuna hajmi.

Nisbatan chastotalar gistogrammasi - bu to'rtburchaklar, poydevorlari qisman uzunlik oralig'idan tashkil topgan pog'onali shakl. h va balandliklar nisbatga teng $W_i / soat$ (nisbiy chastota zichligi). Nisbatan chastotalar gistogrammasini tuzish uchun absissa o'qiga qisman intervallar qo'yiladi va ularning ustida absissa o'qiga parallel ravishda masofalar chiziladi. $W_i / soat$. Kvadrat **men** - qisman to'rtburchak $h W_i / h = W_i$ - ushlangan variantning nisbiy chastotasi **men** - uchinchi interval. Binobarin, nisbiy chastotalar gistogrammasining maydoni barcha nisbiy chastotalar yig'indisiga teng, ya'ni. Birlik.

Umumiy aholi parametrlarini baholash Umumiy aholining asosiy parametrlari matematik kutish (umumiy o'rtacha) $M(X)$ va standart og'ishdir s ... Bu namunaviy ma'lumotlardan taxmin qilish mumkin

bo'lgan doimiy qiymatlar. Yagona raqam sifatida ifodalangan umumiy parametrning bahosi nuqta bahosi deyiladi.

O'rtacha namuna - bu o'rtacha o'rtacha balli baho.

Namuna o'rtacha - bu tanlangan populyatsiya atributining o'rtacha arifmetik qiymati. Agar barcha qiymatlar bo'lsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ namuna olish xususiyatlari har xil (yoki ma'lumotlar guruhlanmagan bo'lsa): $x_1, x_2, \dots, x_n$ $n_1, n_2, \dots, n_k$ va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ (yoki agar namunaviy o'rtacha variantlar ketma -ketligi bo'yicha hisoblansa), keyin agar statistik ma'lumotlar intervalli o'zgaruvchan qator ko'rinishida taqdim etilsa, tanlangan o'rtacha qiymatni hisoblashda, variant intervallarning o'rta nuqtalari hisoblanadi.

O'rtacha namuna - bu pozitsiyaning asosiy xarakteristikasi, aholining tarqalish markazini ko'rsatadi, o'rganilgan populyatsiyani bitta raqam bilan tavsiflashga, rivojlanish tendentsiyasini kuzatishga, turli populyatsiyalarni taqqoslashga imkon beradi. kuzatuvlar og'ishlarining yig'indisi 0 ga teng). Baho uchun **bilan** ba'zi ko'rsatkichlarning o'rtacha qiymatidan tarqalishining (og'ishining) maksimal va minimal qiymatlari bilan bir qatorda dispersiya va standart og'ish tushunchalari qo'llaniladi. Namuna dispersiyasi yoki namuna dispersiyasi (inglizcha variatsiyadan) o'zgaruvchining o'zgaruvchanligini o'lchovidir. Bu atama birinchi marta 1918 yilda Fisher tomonidan kiritilgan.

Namunaviy dispersiya - bu xususiyatning kuzatilgan qiymatlarining o'rtacha qiymatidan chetga chiqish kvadratlarining o'rtacha arifmetik qiymati. Agar barcha qiymatlar bo'lsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ namuna hajmi atributi n farq qiladi, keyin: agar xarakteristikaning barcha qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ mos ravishda chastotalarga ega $n_1, n_2, \dots, n_k$ va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, keyin Dispersiya noldan cheksizgacha o'zgaradi. 0 ning haddan tashqari qiymati o'zgaruvchining qiymatlari o'zgarmasligini bildiradi. O'rtacha kvadrat og'ish (standart og'ish), (inglizcha standart og'ishdan) dispersiyaning kvadrat ildizi sifatida hisoblanadi.

Korrelyatsion tahlil tasodifiy o'zgaruvchilar o'rtasida statistik bog'liqlikni o'rnatishni o'z ichiga oladi. U pedagogik tadqiqotlarda ba'zi omillarning boshqalarga ta'sirini baholash va ular o'rtasida boshqa parametrlar - matematik kutishlar va standart og'ishlar bilan birgalikda aloqa o'rnatish uchun ishlatilishi mumkin. Korrelyatsion tahlilni tasodifiy jarayonlar orasidagi sabab-oqibat munosabatlarini

aniqlashda bevosita qo'llash mumkin emas. U faqat tasodifiy jarayonlarning statistik tavsiflari o'rtasidagi bog'liqlikni o'rnatadi. Matematik kutishlarga mos ravishda m_x va m_y ikkita tasodifiy X va Y o'zgaruvchilar bulsin. Korrelyatsion moment $K_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y))$ X va Y qiymatlari o'rtasidagi munosabatni tavsiflaydi. Foydalanish qulayligi uchun korrelyatsion momentlar formula bo'yicha normallashtiriladi. Bu erda y_x va y_y - X va Y qiymatlarining standart og'ishlari. K_{kk} qiymati X va Y qiymatlarining korrelyatsion koeffitsienti deyiladi.

Biz muomala qiladigan diskret tasodifiy o'zgaruvchilar uchun korrelyatsiya koeffitsientining bahosi formula bo'yicha hisoblanadi. Korrelyatsiya koeffitsientini hisoblash formulasi tasodifiy o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik chiziqli bo'lsa va bu qiymatlarning har biri normal qonunga buysunsa amal qiladi. Maktab tayyorgarligi darajasi va birinchi kurs talabalarining "Informatika" fani bo'yicha ko'rsatkichlari o'rtasidagi statistik bog'liqlikni baholash uchun maktabga tayyorgarlik universitetga qabul qilinganida test sinovlari orqali baholanadi (X qiymati). Talabalarning yutuqlari birinchi semestrda keyingi imtihon natijalariga ko'ra baholanadi (Y qiymati). Talabalar raqami N bilan belgilanadi. Hisoblash uchun dastlabki ma'lumotlar jadvalda umumlashtirilgan

Hisoblash formulalari quyidagicha: Aslida, eksperimental tarzda olingan nuqtalar to'plami taxminan analitik bog'liqlik bilan almashtiriladi $y = ax + b$. Bunday almashtirish matematik o'zgarishlarni ancha soddalashtiradi va analitik modellarni tuzishda ishlatilishi mumkin. Umuman olganda, regressiya qaramligini yaratish uchun nafaqat chiziqli funktsiyani, balki boshqa har qanday funktsiyani ham tanlash mumkin. Tabiiyki, kerakli parametrlarni hisoblash formulalari murakkablashadi.

Tajribalarni optimallashtirishning matematik usullari

Simpleks optimallashtirish usuli. Simplex - bu oddiy ko'p qirrali $n + 1$ qatorda tepada NS - jarayoniga ta'sir etuvchi omillar soni. Masalan, agar ikkita omil bo'lsa, unda oddiy uchburchak oddiy uchburchakdir. Tajribalarning dastlabki ketma -ketligi asl simpleksning tepalariga to'g'ri keladi (ball 1, 2 va 3). Bu birinchi tajribalarning shartlari optimallashtirilgan jarayonning ma'lum rejimlarining eng qulayiga mos keladigan omillar qiymatlari oralig'idan olingan. Tajribalar natijalarini 1, 2 va nuqtalarda solishtirish 3, tanlangan

maqbullik mezonini nuqtai nazaridan ular orasida "eng yomoni" ni toping. Masalan, eng "muvaqqiyatsiz" tajriba shu nuqtada bo'lib chiqdi 1. Bu tajriba ko'rib chiqilmaydi va uning o'rniga tajriba nuqtada simpleksga kiritiladi 4, nuqtalarni bog'laydigan uchburchakning qarama-qarshi tomoniga nisbatan 1-nuqtaga nosimmetrikdir 2 va 3. Keyin, yangi soddalikning tepaliklarida o'tkazilgan tajribalar natijalari bir-biri bilan taqqoslanadi, ularning eng "muvaqqiyatsizlari" tashlanadi va unga mos keladigan tepalik nuqtaga o'tkaziladi. 5. Keyin tavsiflangan protsedura butun optimallashtirish jarayonida takrorlanadi. Agar optimallik mezonining ekstremumiga erishilsa, simpleksning keyingi harakati to'xtaydi. Bu shuni anglatadiki, yangi qadam tadqiqotchini omil maydonidagi oldingi nuqtaga qaytaradi. Agar optimallik mezonining bir nechta ekstremallari mavjud bo'lsa, unda bu usul sizga asl soddalik nuqtalariga yaqinroq bo'lganini topishga imkon beradi. Shuning uchun, agar maqbullik mezonining bir nechta ekstremal mavjudligiga shubha bo'lsa, ularni har safar omillar maydonining yangi mintaqasidan optimallashtirishni boshlash kerak. Keyin siz o'zingiz topgan maqbul shartlarni solishtirishingiz va barcha variantlardan eng yaxshisini tanlashingiz kerak. Optimallashtirish ta'sir etuvchi omillar va javob funksiyalariga qo'yilgan cheklovlarni hisobga olishi kerak. Shuni ta'kidlash kerakki, oddiy usul ishlatilganda *shart emas* takroriy tajribalar. Gap shundaki, alohida tajribadagi xato optimallashtirishni biroz sekinlashtirishi mumkin. Agar keyingi tajribalar benuqson bajarilsa, u holda optimalga harakat davom etadi.

Nazorat uchun savollar.

1. Statistik modellartirish nima?
2. Statistik modellartirishda qanday ma'lumotlar ishlatiladi?
3. Statistik modellartirishda qanday statistik asoslar ishlatiladi?
4. Statistik modellartirishda qanday modellar ishlatiladi?
5. Statistik modellartirishda boshqa modellar qanday ta'sir ko'rsatadi?
6. Statistik modellartirishni sinashda qanday usullar ishlatiladi?
7. Statistik modellartirishni amaliyotda qanday qo'llab-quvvatlash mumkin?

II BOB. SONLI USULLAR HAQIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

10-MAVZU: SONLI USULLAR

Reja:

1. Funksiyalarni yaqinlashtirish usullari. Algebraik ko'phadlar bilan yaqinlashtirish.

2. Lagranj interpolatsion formulari va xatoligi. Ayirmali nisbat va ularning xossalari.

3. Nyutonning tengmas oraliqlar uchun interpolatsion formulasi.

Tayanch so'z va iboralar: *Lagranj, interpolatsion, ko'phad, Nyuton formulasi, nisbat, xossa*

Interpolyatsiyalash amaliy masalalarni hal qilishda qo'llaniladigan umumli usullardan biri hisoblanadi. Bu usulda asosan ikkita masala qo'yiladi.

1) Berilgan funktsiyani o'ziga yaqin funksiya bilan (ma'lum xatolikda) almashtiriladi.

2) Funktsiyaning jadvaldagi qiymatlariga asoslanib, uning analitik ifodasini (ma'lum xatolikda) topiladi.

Bu masalalarni hal qilish uchun bir necha usullar mavjuddir. Ko'phollarda (amaliy masalalarni hal qilishda) funktsiyani ko'phad bilan almashtirish maqsadga muvofiq bo'ladi va olingan ko'phad interpolatsiyalash ko'phadi deb yuritiladigan interpolatsiyalash ko'phadini qurish usullari bilan tanishamiz.

Aytaylik, $[a,b]$ kesma biror usul bilan n ta bulaklarga bulingan bo'lib, bulinish nuqtalari

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$$

ko'rinishda belgilangan bulsin. Bo'lish natijasida olingan $x_i, (i=0,1,2, \dots, n)$ nuqtalar tugun nuqtalar, tugun nuqtalar to'plami $\omega_n=\{x_i, i=0, 1, 2, \dots, n\}$ esa $[a;b]$ kesmada kiritilgan to'r deb yuritiladi. Agar to'rda, ya'ni tugun nuqtalarda, $f(x)$ funktsiyaning

$$f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (1)$$

qiymatlari ma'lum bo'lsa, uni $[a,b]$ kesmada darajasi n dan katta bo'lmagan

$$P_n(x)=a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

ko'phad bilan almashtirish masalasini qaraylik.

Bunda $P_n(x_i)=f(x_i)$ bo'lishini talab qilsak, (1) ni hisobga olgan holda

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

sistemaga ega bulamiz. Demak, $P_n(x)$ ko'phadning koeffitsientlari $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni (2) sistemadan aniqlash kerak ekan. Bu sistema $n+1$ noma'lumli $n+1$ ta chiziqli tenglamalar sistemasi ekanligiga va uning

aniqlovchi $\begin{vmatrix} 1x_0 \dots x_0^n \\ 1x_1 \dots x_1^n \\ \dots \dots \dots \\ 1x_n \dots x_n^n \end{vmatrix}$ Vandermond determinanti ekanligidan uning

yagona yechimi mavjudligi ravshandir. Shunday qilib, qo'yilgan masala yagona yechimga ega ekanligiga shubha yo'q. Bu yerda funksiyani interpolatsiyalash ko'phadi bilan almashtirish natijasida yo'l qo'yilgan

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x) \quad (3)$$

xatolikni baholash muhimligini va bu masala uchun keyinroq interpolatsiyalash ko'phadini qurish usullarini har biriga bog'liq holda hal qilinishini aytib o'tamiz.

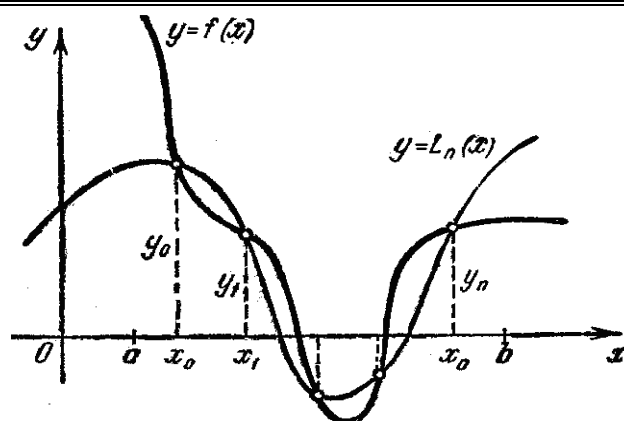
Shu bilan birga, bu o'rinda interpolatsiyalash ko'phadini qurish uchun (2) sistemani yechish bir qator noqulayliklar tug'dirishini, masalan, kompyuter xotirasidan ko'p joy va hisoblash uchun ko'p vaqt sarflanishini aytib o'tish joizdir. Quyida interpolatsiyalash ko'phadini qurish uchun ancha qulay hisoblangan usullarni keltiramiz:

Lagranj interpolatsiyalash ko'phadi

Aytaylik, $[a;b]$ kesmada ω_n to'r kiritilgan bo'lib, $y=f(x)$ funksiyaning undagi qiymatlari (1) ko'rinishda berilgan bulsin. Bu yerda interpolatsiyalash ko'phadi $L_n(x)$ ni qurishning Lagranj usuli bilan tanishamiz. Interpolatsiyalash masalasini qo'yilishiga ko'ra:

$$L_n(x_i)=y_i; \quad (i=0, 1, 2, \dots, n).$$

Bu geometrik jihatdan quyidagi rasmda tasvirlangan



Rasm-10.1

Avvalo, quyidagi oddiy masalani qaraylik, shunday ko‘phad qurilsinki, u

$$P_i(x_i)=1; P_i(x_j)=0; i \neq j \quad (4)$$

shartlarni qanoatlantirsin. Qurilishi talab qilingan $P_i(x)$ ko‘phadlik (4) shartga ko‘ra $x_i \neq j$ nuqtalarda nolga aylanishi kerakligidan

$$P_i(x) = S_i(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

ko‘rinishda olish tabiiydir. Oxirgida $x=x_i$ desak, (4) shartga ko‘ra

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_1 - x_{i+1}) \dots (x_1 - x_n)}$$

kelib chiqadi. Buni hisobga olsak, asosiy masalani, ya’ni $L_n(x)$ ko‘phadni qurish masalasini osongina hal qilish mumkin. Buning uchun $L_n(x)$ ni

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(x)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Agar oxirgida $x=x_k$ desak,

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(x_i) = \lambda_k P_i(x_k) = \lambda_k = y_k$$

ekanligidan oxirgi natija $L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i P_i(x)$

$$\text{yoki } L_i(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} y_i \quad (5)$$

kelib chiqadi va u Lagranj interpolyatsiyalash ko‘phadi deb yuritiladi.

Demak Lagranj interpolyatsiya ko‘phadi (5)ni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \prod_{i \neq j} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}, \quad (5')$$

Lagranj interpolatsiyalash ko'phadi $n=3$ bo'lganda quyidagicha yoziladi:

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Endi $[a,b]$ kesmada berilgan $f(x)$ funksiyani bu kesmada kiritilgan ω_n to'rt yordamida Langranj interpolatsiyalash ko'phadi bilan almashtirish natijasida yo'l qo'yilgan xatolikni baholaylik. Bu yerda $f(x)$ funksiya $n+1$ marta differentsiallanuvchi deb faraz qilamiz. Lagranj ko'phadining xatoligi uchun

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) \quad (6)$$

qoldiq hadni olamiz. Bu S ga bog'liq bo'lib, $[a;b]$ kesmaga tegishli biror nuqtadir. (6) ixtiyoriy va x tugun nuqtalarida ham o'rinalidir. Agar

$$M_{n+1} = \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

deb belgilasak, (6) dan Langranj ko'phadining xatoligi uchun

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|$$

bahoga ega bulamiz. Bunda $x \in [a;b]$ ekanligini takidlash lozim. Endi Langranj interpolatsiyalash ko'phadini hisoblash usulini keltiramiz. Agar x biror tugun nuqtasidan iborat bo'lsa, $L_n(x_i)=y_i$, ekanligidan x ning tugun nuqtalaridan farqli bo'lgan holni qarashimiz etarlidir. U holda $\omega_{n+1}(x) \neq 0$ bo'lishi tabiiy.

Quyidagi $D_i = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$ belgilashni kiritsak, Langranj interpolatsiyalash ko'phadligini

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{D_i} \Pi_{n+1}(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. D_i lar va $\Pi_{n+1}(x)$ ni quyidagi sxema bo'yicha hisoblash qulaydir.

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & x_0 & x_0 & - & x_1 & x_0 & - & x_2 & \dots & x_0 & - & x_n \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 x_1 - x_0x - x_1x_1 - x_2 \dots x_1 - x_n \\
 x_2 - x_0x_2 - x_1x - x_2 \dots x_2 - x_n \\
 - - - - - \\
 x_n - x_0x_n - x_1x_n - x_2 \dots x - x_n
 \end{array}$$

Birinchi qatorda joylashgan ayirmalarning ko'paytmasi D_0 dan ikkinchi satrdagi ayirmalar ko'paytmasi D_1 dan, va hokazo, $n+1$ (oxirgi) satrdagi ayirmalar ko'paytmasi D_n dan diagonalda joylashgan taglari chizilgan ayirmalarning ko'paytmasi esa $'_{n+1}(x)$ dan iborat bo'ladi. Bularni hisoblab olganimizdan so'ng $L_n(x)$ ni hisoblash qiyin emasdir.

Nyuton interpolatsiyalash ko'phadlari

Bu yerda $[a,b]$ kesmada kiritilgan teng qadamli, ya'ni yonma-yon turgan tugun nuqtalarining orasidagi masofa h o'zgarmas bo'lgan, ω_n to'rdagi qiymatlari berilgan $f(x)$ funksiya uchun interpolatsiyalash ko'phadini qurish masalasini qaraymiz. Bu ko'phadni Lagranj interpolatsiyalash ko'phadi sifatida ham qurish mumkinligi aniq. Ammo bu yerda qurish jihatidan Lagranj interpolatsiyalash ko'phadidan soddaroq bo'lgan Nyuton interpolatsiyalash ko'phadlarini qurish usulini beramiz.

Avvalo, chekli ayirmalar tushunchasini kiritamiz. Agar teng h qadamli ω_n to'rdagi $f(x)$ funksiyaning qiymatlari

$$f(x_i)=y_i (i=0,1,2,\dots, n) \quad (9)$$

berilgan bo'lsa

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i (i=0,1,2,\dots, n-1)$$

ayirmalar 1-tartibli chekli ayirmalar,

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i (i=0,1,2,\dots, n-2)$$

ayirmalar 2-tartibli chekli ayirmalar va hokazo

$$\Delta^m(y_i) = \Delta^{m-1}y_{i+1} - \Delta^{m-1}y_i (i=0,1,2,\dots, n-m), (m \leq n)$$

ayirmalar m -tartibli chekli ayirmalar deb yuritiladi. Chekli ayirmalarning ta'rifidan ko'rinadiki, ω_n to'rdagi berilgan funksiyaning $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$ chekli ayirmalari mavjud bo'lib, n -dan yuqori tartibli chekli ayirmalari yo'qdir.

Teng qadamli ω_n to'rdagi berilgan funksiyaning interpolatsiyalash ko'phadini

$P_n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$ (10) ko‘rinishda izlaylik. U holda (10) da (9) ga asosan koeffitsentlarni quyidagicha aniqlaymiz.

1-jadval

X	Koeffitsentlarni aniqlash	Koeffitsentlar
0	$y_0 = a_0$	$a_0 = y_0$
$x=1$	$y_1 = a_0 + a_1 h, a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h}$	$a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}$
$x=x_2$	$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$ $y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} 2h + a_2 2hh, y_1 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2a_2 h^2,$ $y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2a_2 h^2, \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2a_2 h^2,$ $\Delta^2 y_0 = 2a_2 h^2$	$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$
...	...	...
$x=x_n$	$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})$ $y_n = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} 2h + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} 2hh + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} 6hhh + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots n$ $a_n hh\dots h$	$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

(bu ishlarni to‘liqroq bajarishini o‘quvchiga havola qilamiz). Topilganlarni (10) ga qo‘ysak,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h} (x - x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \quad (11)$$

ni olamiz. Buni Nyutonning birinchi – interpolyatsiyalash ko‘phadi deb yuritiladi.

Agar $t = \frac{x-x_0}{h}$ deb olsak,

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = t - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 2 = t - 2$$

.....

$$\frac{x - x_k}{h} = t - k \quad (11) \text{ ni}$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)\dots(t-n+1) \quad (12)$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bu Nyutonning birinchi interpolatsiyalash ko‘phadining yakuniy ko‘rinishi bo‘lib, hisoblash uchun ancha qulaydir. Agar interpolatsiyalash ko‘phadini

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + a_n(x-x_n)\dots(x-x_1)$$

ko‘rinishda izlasak, yuqoridagi qilingan o‘xshash mulohazalar asosida

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\dots(x-x_1) \quad (13)$$

ni olamiz. Buni Nyutonning ikkinchi – interpolatsiyalash ko‘phadi deb yuritiladi.

Agar (13) da $t = \frac{x-x_n}{h}$ desak,

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t \cdot (t+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\dots(t+n-1) \quad (14)$$

ko‘phadni olamiz. Bu Nyutonning ikkinchi interpolatsiyalash ko‘phadining yakuniy ko‘rinishidir.

Nazorat uchun savollar:

1. Sonli usullar nima?
2. Sonli usullar qanday muammolarni yechishda qo‘llaniladi?
3. Sonli usullar qanday san'atlar va sohalarda qo‘llaniladi?
4. Sonli usullar tahlilida qanday matematik modellar ishlatiladi?
5. Sonli usullar qanday imkoniyatlarni cheklash uchun ishlatiladi?
6. Sonli usullar va diskretizatsiya qanday bog‘liqlikka ega?
- 7.

11-MAVZU: CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI YECHISH USULLARI

Reja:

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli.

Tayanch so‘z va iboralar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, Kramer usuli, Gauss usuli, Teskari matritsalar usuli, Matritsa tushunchasi, Matritsani rangi tushunchasi, determinant tushunchasi.

Bizga m ta tenglamadan iborat n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ , \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \quad (11.1)$$

bu yerda, $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlar. Tenglamalarni birinchi, ikkinchi, va hokazo m -tenglama deb nomerlab chiqilgan deb hisoblaymiz. $a_{i,j}$ koefitsient i -tenglamadagi x_j noma'lumning koefitsientini, b_i esa i -tenglamaning ozod hadi.

Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni m ta satr va n ta ustundan iborat matritsa ko'rinishida yozish mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

Ushbu matritsa chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Quyidagi $\tilde{A}$ matritsa esa chiziqli tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasi deyiladi:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Agar (11.1) sistemaning barcha ozod hadlari 0 ga teng bo'lsa, u holda (11.1) sistema *bir jinsli tenglamalar sistemasi* deb ataladi.

Agar (11.1) sistemada $m=n$ bo'lsa, u holda ushbu sistema n -tartibli sistema deyiladi. Yechimga ega bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi *birqalikda* deyiladi.

Masalan, ixtiyoriy bir jinsli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘ladi, chunki barcha noma’lumlarni 0 ga teng qilib olinsa, u bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k = b_i, (i = \overline{1, m})$$

Berilgan matritsaning satrlarini $u_1, u_2, \dots, u_m$, ustunlarini esa $v_1, v_2, \dots, v_n$ orqali belgilab olamiz.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli sistemadagi tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan hol uchun o'rinli bo'ladi.

[illegible]

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa determinantini d harfi bilan belgilaylik:

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantni satr yoki ustun bo'yicha yoyish xossalaridan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j}. \quad (11.4)$$

Bundan tashqari,

$$a_{1,i}A_{1,j} + a_{2,i}A_{2,j} + \dots + a_{n,i}A_{n,j} = 0, \quad i \neq j. \quad (11.5)$$

Ya'ni, determinantning birorta ustunidagi hamma elementlarini boshqa ustunning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi nolga teng.

Agar $d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{n,j}A_{n,j}$ yoyilmada j -ustunning elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo'ladigan

$$b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \dots + b_nA_{n,j} \quad (11.6)$$

ifoda d determinantning j -ustunini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladigan ushbu

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & b_2 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantning j -ustun bo'yicha yoyilmasi bo'ladi.

1-Teorema. Agar (11.3) sistemaning determinanti d noldan farqli bo'lsa, u holda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}. \quad (11.7)$$

Isbot. Aytalylik, $d \neq 0$ bo'lsin.

Bu almashtirishlarga $\frac{1}{d}$ soni barcha qo'shiluvchilarda umumiy ko'paytuvchi bo'lib kelganligi uchun uni yig'indi tashqarisiga chiqarishimiz mumkin. Bundan tashqari, qo'shish tartibi o'zgartirilgandan so'ng, b_k ko'paytuvchi ichki yig'indi belgisi tashqarisiga chiqarildi, chunki u ichki yig'indi indeksi j ga bog'liq emas.

Ma'lumki, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{k,j} = a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k,2} + \dots + a_{i,n} A_{k,n}$ ifoda $k = i$

bo'lganda d ga, qolgan barcha k larda esa 0 ga teng. Shunday qilib, k bo'yicha tashqi yig'indida faqat bitta qo'shiluvchi qoladi va u $b_i d$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Bundan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar haqiqatdan ham (13.3) tenglamalar sistemasi uchun yechim bo'lishi kelib chiqadi. $\square$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuliga *Kramer usuli* deyiladi.

Demak, Kramer usuli determinanti noldan farqli bo'lgan n ta noma'lumli n ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topish imkonini beradi.

Sistema determinanti nolga teng bo'lgan hollarda Kramer usulini qo'llash maqsadga muvofiq emas. Chunki bu holatda tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli. Bizga bir hil tartibli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (11.8)$$

va

$$\sum_{k=1}^n c_{i,k} x_k = d_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.9)$$

2-Ta'rif. Agar (11.8) sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini o'rinlari almashtirish natijasida (11.9) sistema hosil qilinsa, (11.9)

sistemani (13.8) dan I – tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

3-T-ta’rif. Agar (11.8) sistemaning biror tenglamasini biror songa ko‘paytirib, boshqa biror tenglamasiga qo‘shish natijasida (11.9) sistema hosil qilinsa, (11.9) sistema (11.8) sistemadan II – tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

I tur va II tur elementar almashtirishlarni qisqacha elementar almashtirish deb yuritiladi.

Xar bir chiziqli tenglamalar sistemasiga uning kengaytirilgan matritsasini mos qo‘ysak, u holda chiziqli tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlarga uning kengaytirilgan matritsasi ustida mos elementar almashtirishlar bajarilgan deb qarash mumkin. Aksincha, kengaytirilgan matritsa ustidagi elementar almashtirishlarga (elementar almashtirishlar ta’rifini to‘g‘ridan-to‘g‘ri matritsalar uchun ham aytishimiz mumkin) tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlar mos keladi.

4-Ta’rif. Agar (11.8) va (11.9) sistemalar bir vaqtning o‘zida birgalikda bo‘lmasa, yoki bir vaqtda birgalikda bo‘lib, bir hil yechimlarga ega bo‘lsa, (11.8) va (11.9) sistemalar teng kuchli sistemalar deyiladi.

1-Teorema. Agar (11.9) sistemaga (11.8) sistemadan elementar almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan bo‘lsa, ular teng kuchlidir.

Isbot. I tur elementar almashtirishlar uchun teoremaning isboti to‘g‘ridan to‘g‘ri ko‘rinib turibdi. Endi (11.8) sistemaga II tur elementar almashtirishlarni qo‘llaymiz, ya’ni (13.8) sistemaning biror-bir i -tenglamasini λ ga ko‘paytirib, j -tenglamaga qo‘shsak, yangi sistemaning j satrida qolganlari o‘zgarmagan holda

$$\sum_{k=1}^n (a_{j,k} + \lambda a_{i,k}) x_k = b_j + \lambda b_i$$

tenglama hosil bo‘ladi. Agar $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ sonlar (11.8) sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^n (a_{j,k} + \lambda a_{i,k}) x_k^0 = \sum_{k=1}^n a_{j,k} x_k^0 + \lambda \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k^0 = b_j + \lambda b_i$$

tenglamaning ham yechimi bo‘ladi va aksincha. Elementar almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan (11.9) tenglamalar

Hosil bo'lgan sistemaning oxirgi $a'_{n,n}x'_n = b'_n$ tenglamasidan $x_n^0 = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$ noma'lumni topib, topilgan noma'lumni bitta yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz. So'ngra, x_{n-1}^0 noma'lumni topib, uni yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijada barcha $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ noma'lumlarni aniqlaymiz.

3. Sistema zinapoyali shaklga kelib, zinapoya uchlarida turuvchi noma'lumlar soni r ta $1 \leq r \leq \min(m, n)$ bo'lsin. U holda ularni tenglamalarning chap tomonida qoldirib, qolgan $n-r$ ta noma'lumni tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkaziladi va ularni ozod o'zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi. Natijada tenglamalar sistemasi r ta noma'lumli uchburchak shaklidagi sistemaga keladi. Endi tenglamalarni o'ng tomoniga o'tgan $n-r$ ta noma'lumga qiymatlar berib, qolgan r ta noma'lumni topamiz. Demak, bu holatda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Ya'ni, bunday tenglamalar sistemasi birgalikda aniqmas sistema bo'ladi.

Bundan tashqari, qaralayotgan sistemada tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, u holda sistemani uchburchak shakliga keltirish mumkin emas, chunki Gauss metodi bo'yicha o'zgartirish jarayonida tenglamalar soni kamayishi mumkin, ammo ortishi mumkin emas. Demak, bunday holatda sistema zinapoyasimon shaklga keltiriladi va u aniqmas sistema bo'ladi.

1-Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Bu sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib, uni elementar almashtirishlar yordamida o'zgartiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

$0 = 6$ tenglamaga ega bo'lgan sistemaga keldik, demak, berilgan sistema yechimga ega emas.

2-Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasi uchun elementar almashtirishlarni qo'llab,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -5 & -4 & 23 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -10 & 19 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array} \right)$$

sistemaning matritsasini uchburchak shaklga keltiramiz. Demak, bu sistema yagona yechimga ega va quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = -11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Bu sistemada pastdan yuqoriga qarab harakat qilib, $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$ yagona yechimni topamiz.

3-Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -4. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasini qaraymiz:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 & -4 \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -6 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Natijada yuqoridagi tenglamalar sistemasi quyidagi matritsaviy tenglamaga teng kuchli bo'ladi

$$A \cdot X = B.$$

Kramer usulidan ma'lumki, agar $\det(A) \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega. Bundan tashqari, $\det(A) \neq 0$ ekanligi A matritsaning teskarilantiruvchi bo'lishini bildiradi. Yuqoridagi matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi $X = A^{-1} \cdot B$ ko'rinishida bo'ladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuli teskari matritsa usuli deb ataladi.

Matritsaning rangi

Bizga

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin. Bu matritsaning satrlarini $u_1, u_2, \dots, u_m$ kabi ustunlarini esa $v_1, v_2, \dots, v_n$ kabi belgilaymiz. Satrlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb, $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$ satrga aytiladi, bu yerda c_i koeffitsientlar berilgan maydondan olingan sonlar. Ko'rinib turibdiki, agar bu koeffitsientlar nolga teng bo'lsa, bu chiziqli kombinatsiya ham nol satrga teng bo'ladi.

Agar bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmagan $c_1, c_2, \dots, c_m$ koeffitsientlar mavjud bo'lib, $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m = 0$ bo'lsa, $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar *chiziqli bog'liq* deyiladi.

Agarda bunday koeffitsientlar mavjud bo'lmasa, ya'ni $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$ tenglikdan barcha $c_1, c_2, \dots, c_m$ koeffitsientlarning nolga tengligi kelib chiqsa, u holda $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar *chiziqli erkli* deyiladi.

4-Misol. $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 2, 1), u_3 = (1, 4, 3)$ satrlar chiziqli bog'liq. Chunki, $2u_1 + u_2 - u_3 = (0, 0, 0)$.

$u_1 = (1, 1, 1)$ va $u_2 = (-1, 2, 1)$ satrlar esa chiziqli erkli, chunki $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$ tenglikdan

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

shartlar kelib chiqadi, ya'ni $c_1 = c_2 = 0$.

1-tasdiq. Berilgan satrlarning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun bitta satrning qolgan satrlar orqali ifodalanishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar chiziqli bog'liq bo'lsin. Demak, bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmaydigan shunday $c_1, c_2, \dots, c_m$ koeffitsientlar mavjudki, $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$ bo'ladi. Aytaylik, $c_i \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$u_i = -\frac{c_1}{c_i}u_1 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i}u_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}u_{i+1} - \dots - \frac{c_m}{c_i}u_m,$$

ya'ni u_i satr qolgan satrlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $u_i = c_1u_1 + \dots + c_{i-1}u_{i-1} + c_{i+1}u_{i+1} + \dots + c_mu_m$ bo'lsin. U holda $c_1u_1 + \dots + c_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + c_{i+1}u_{i+1} + \dots + c_mu_m = 0$, ya'ni $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar chiziqli bog'liq. $\square$

Berilgan $u = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ satrni dastlabki k ta elementidan iborat $\tilde{u} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ satrga berilgan satrning uzunligi k bo'lgan kesmasi deb ataladi.

2-tasdiq. Agar $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ixtiyoriy uzunlikdagi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m$ kesmalar ham chiziqli bo'g'liqdir.

Isbot. $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m = 0$ tenglik $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_mu_m$ satrning barcha komponentalari nolga tengligini anglatadi. Bundan esa, $c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2 + \dots + c_m\tilde{u}_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\square$

$$\begin{aligned}
 &= c_1(b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \dots + b_{k+1,k}a_{k,1}) + \\
 &+ c_2(b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \dots + b_{k+1,k}a_{k,2}) + \\
 &+ \dots + \\
 &+ c_n(b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \dots + b_{k+1,k}a_{k,n}) = \\
 &= b_{k+1,1}(c_1a_{1,1} + c_2a_{1,2} + \dots + c_na_{1,n}) + \\
 &+ b_{k+1,2}(c_1a_{2,1} + c_2a_{2,2} + \dots + c_na_{2,n}) + \\
 &+ \dots + \\
 &+ b_{k+1,k}(c_1a_{k,1} + c_2a_{k,2} + \dots + c_na_{k,n}).
 \end{aligned}$$

Qavslar ichidagi ifodalar $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + \dots + c_n\tilde{v}_n$ ustunning komponentalarini beradi. Ularning barchasi nolga teng bo'lganligi uchun $c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \dots + c_na_{k+1,n} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Qolgan komponentalarining nolga tengligi ham xuddi shunday ko'rsatiladi. Demak, $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$.

4-tasdiq. Aytaylik, $u_1, u_2, \dots, u_m$ va $w_1, w_2, \dots, w_n$ satrlar jamlanmalari berilgan bo'lib, ikkinchi jamlanma satrlari birinchi jamlanma satrlarining chiziqli kombinatsiyasi bo'lsin. Agar $n > m$ bo'lsa, u holda $w_1, w_2, \dots, w_n$ satrlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Isbotni m ga nisbatan matematik induksiya usuli bilan olib boramiz. $m=1$ bo'lganda $w_1 = c_{1,1}u_1, w_2 = c_{2,1}u_1, \dots, w_n = c_{n,1}u_1$ bo'lib, $c_1 = 0$ bo'lganida ular chiziqli bo'g'liq bo'lishi ravshan. Agar $c_1 \neq 0$ bo'lsa, $(-c_2)w_1 + c_1w_2 + 0 \cdot w_3 + \dots + 0 \cdot w_n = 0$ ekanligidan ularning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi.

Tasdiqni $m-1$ uchun o'rinli deb, m uchun to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Tasdiq shartiga ko'ra,

$$\begin{aligned}
 w_1 &= c_{1,1}u_1 + c_{1,2}u_2 + \dots + c_{1,m}u_m, \\
 w_2 &= c_{2,1}u_1 + c_{2,2}u_2 + \dots + c_{2,m}u_m, \\
 &\dots, \\
 w_n &= c_{n,1}u_1 + c_{n,2}u_2 + \dots + c_{n,m}u_m.
 \end{aligned}$$

Agar $c_{1,1} = c_{2,1} = \dots = c_{k,1} = 0$ bo'lsa, tasdiq o'rinli, chunki bu holda $w_1, w_2, \dots, w_n$ satrlar $m-1$ ta $u_2, \dots, u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

Ushbu satrlar $n-1$ ta bo'lib, ular $m-1$ ta $u_2, \dots, u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. $n > m$ bo'lganligi sababli, $n-1 > m-1$, hamda induksiya faraziga ko'ra, $w'_2, \dots, w'_n$ satrlar chiziqli bog'liq. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $b_2, \dots, b_k$ koefitsientlar topilib,

Bu munosabatga $w'_2, ..., w'_n$ satrlarning $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar orqali yozilgan ifodasini olib borib qo'ysak,

kelib chiqadi, ya'ni,

$b_2, \dots, b_k$ koeffitsientning kamida bittasi noldan farqli ekanligidan, $w_1, w_2, \dots, w_n$ satrlarning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

5-natija. Uzunligi n ga teng bo'lgan n tadan ko'p satrlar chiziqli bog'liq.

Isbot. Haqiqatdan ham, uzunligi n ga teng bo'lgan ixtiyoriy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ satrni quyidagicha ifodalash mumkin

Demak, ixtiyoriy satr n ta satrning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi. Yuqorida isbotlangan 11.11-tasdiqqa ko'ra, satrlar soni n tadan ko'p bo'lsa, ular chiziqli bog'liq.

Bizga uzunlikdagi n ga teng bo'lgan satrlar berilgan bo'lsin. Bu satrlar ichida qandaydir k ta satr chiziqli erkli bo'lib, ixtiyoriy k tadan ko'p satrlar chiqizli bo'g'liq bo'lsin. Ya'ni, chiziqli erkli satrlarning maksimal soni k ga teng bo'lsin.

6-ta'rif. Berilgan satrlar jamlanmasidagi chiziqli ekrlri vektorlarning maksimal soniga bu satrlar jamlanmasining *rangi* deyiladi. Maksimal sondagi chiziqli erkli satrlar esa, satrlar jamlanmasining *bazisi* deb ataladi.

Tabiiyki, chiziqli erklilik, chiziqli bog'liqlik, rang va bazis tushunchalarini ustunlar uchun ham kiritish mumkin. U holda yuqorida keltirilgan tasdiqlar ham ustunlar jamlanmasi uchun o'rinli bo'ladi.

Demak, berilgan A matritsaning $u_1, u_2, \dots, u_m$ satrlar jamlanmasining rangini va o'z navbatida $v_1, v_2, \dots, v_n$ ustunlar jamlanmasining rangini ham aniqlash mumkin.

7-teorema. Matritsaning satrlari jamlanmasi rangi uning ustunlari jamlanmasi rangiga teng.

Isbot. Aytaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlar jamlanmasi rangi k va ustunlar jamlanmasining rangi r ga teng bo'lsin.

Satrlar rangi k ekanligidan shunday chiziqli erkli k ta satr mavjud bo'lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastlabki k ta satrni bazis deb olish mumkin.

Bu satrlardan iborat quyidagi

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari A matritsa ustun-larining uzunligi k ga teng bo'lgan kesmalaridan iborat bo'ladi.

Aytaylik, $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari jamlanmasi rangi $\tilde{r}$ bo'lsin. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari uzunliklari k ga teng ekanligidan 11.12-natijaga ko'ra, uning chiziqli erkli ustunlar soni k dan oshmaydi. Demak, $\tilde{r} \leq k$.

Ikkinchi tomondan esa, $\tilde{A}$ matritsada $\tilde{r}$ ta chiziqli erkli ustunlari mavjud bo'lib, undan ko'p sonidagi ixtiyoriy ustunlar chiziqli bog'liq. Ushbu ustunlarni A matritsaning ustunlarigacha to'ldirsak, ular ham chiziqli erkli bo'ladi. 14.3-tasdiqqa ko'ra esa, A matritsaning $\tilde{r}$ tadan ko'p ixtiyoriy ustunlari chiziqli bog'liq. Bundan A matritsaning ustunlar jamlanmasi rangi ham $\tilde{r}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $r = \tilde{r} \leq k$.

Endi ushbu mulohazalarni ustunlar va satrlarning o'rnini almashtirgan holda qo'llasak, $k \leq r$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $r = k$ kelib chiqadi.

8-ta'rif. Matritsaning satrlari (ustunlari) jamlanmasining rangi *matritsaning rangi* deyiladi.

Endi kvadrat matritsaning rangi va determinanti orasidagi bog'liqlikni beruvchi teoremani keltiramiz.

9-teorema. Kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriylik. Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lib, determinanti noldan farqli bo'lsin. $u_1, u_2, \dots, u_n$ satrlar chiziqli bog'liq ekanligidan $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik esa, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchlidir:

$$\begin{cases} a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \dots + a_{n,1}c_n = 0, \\ a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + \dots + a_{n,2}c_n = 0, \\ \dots, \\ a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \dots + a_{n,n}c_n = 0. \end{cases}$$

Matritsaning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun, ushbu bir jinsli tenglamalar sistemasi yagona nol yechimga ega. Ya'ni $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Bu esa, satrlarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Demak, $\det A = 0$.

Yetarlilik. Yetarlilik isbotini A matritsaning tartibi bo'yicha matematik induksiya usuli bilan keltiramiz. $m=1$ uchun teorema tasdig'i o'rinli, chunki $\det A = 0$ tenglik A nol elementdan iborat ekanligini bildiradi.

$n - 1$ -tartibli matritsa uchun teorema isbotlangan deb, n -tartibli matritsalar uchun isbotlaylik. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $a_{11} \neq 0$ deb olishimiz mumkin. Matritsaning $u_1, u_2, \dots, u_n$ satrlari orqali quyidagi satrlarni hosil qilamiz:

$$w_2 = u_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} u_1 = (0, a'_{2,2}, \dots, a'_{2,n}),$$

.....,

$$w_n = u_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} u_1 = (0, a'_{n,2}, \dots, a'_{n,n}).$$

Determinantlar xossasiga ko'ra

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinant nolga tengligi va $a_{1,1} \neq 0$ ekanligidan

$$\begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi. Induksiya faraziga ko'ra $(a'_{2,2}, \dots, a'_{2,n}), \dots, (a'_{n,2}, \dots, a'_{n,n})$ satrlar chiziqli bog'liq. Bu esa, $w_2, \dots, w_n$ satrlarning ham chiziqli bog'liqligini bildiradi.

Demak, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $c_2, \dots, c_n$ koeffitsientlar topilib, $c_2 w_2 + c_3 w_3 + \dots + c_n w_n$. Bundan esa,

$$-\left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}c_2 + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}c_n\right)u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$$

kelib chiqadi. Ya'ni, $u_1, u_2, \dots, u_n$ satrlar chiziqli bog'liq.

Yuqoridagi teoremadan n -tartibli kvadrat matritsaning rangi n ga teng bo'lishi uchun uning determinant noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy noldan farqli matritsadan qandaydir noldan farqli minor tanlab olish mumkin. Quyidagi teorema matritsaning rangini minorlar orqali topish imkonini beradi.

10-teorema. Matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga teng.

Isbot. Aytaylik, matritsaning rangi k ga teng bo'lsin. U holda ixtiyoriy $(k+1)$ yoki undan katta tartibli minorda chiziqli bog'liq satrlar mavjud bo'lib, 11.13-teoremaga asosan bunday minorlar nolga teng bo'ladi.

Bundan tashqari, matritsaning rangi k bo'lganligi uchun unda k ta satrdan va o'z navbatida k ta ustundan iborat bazislar mavjud. Bu ustun va satrlar elementlaridan tuzilgan minorni qaraylik.

Ushbu minor satrlari chiziqli erkli, aks holda, 11.13-tasdiqqa ko'ra avvalgi matritsaning butun satrlari chiziqli bog'liq bo'lar edi. Demak, tanlab olingan k -tartibli minor noldan farqli.

Biz chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini keltirganimizda sistema ustida elementar almashtirishlarni keltirib o'tgan edik. Matritsaning satrlari ustidagi elementar almashtirishlar ham huddi shu kabi aniqlanadi. Ya'ni, matritsaning satrlari o'rnini almashtirish, satrlarni noldan farqli songa ko'paytirish va bir satrni ikkinchi satrga proporsional satrga qo'shish elementar almashtirishlar hisoblanadi.

Ko'rinib turibdiki, elementar almashtirishlarning xar birida satrlar jamlanmasi chiziqli ekvivalent satrlar jamlanmasiga aylanadi. Shuning uchun elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Bizga ma'lumki, trapetsiyasimon matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{k,k} & c_{k,k+1} & \dots & c_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda $c_{1,1} \neq 0, c_{2,2} \neq 0, \dots, c_{k,k} \neq 0$.

Trapetsiyasimon matritsaning rangi k ga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot \dots \cdot c_{k,k}$$

minor noldan farqli. Bundan tashqari, tartibi k dan katta minorlarda kamida bitta nolga teng satr mavjudligi uchun, bu minorlarning qiymati nolga teng.

11-tasdiq. Ixtiyoriy matritsani satrlari ustidagi elementar almashtirishlar bajarish va ustunlar o'rnini almashtirish orqali trapetsiyasimon matritsa ko'rinishiga keltirish mumkin.

Isbot. Agar matritsa nol matritsa bo'lmasa, uning noldan farqli elementi mavjud. Bu elementni matritsaning satrlari va ustunlari o'rnini almashtirish orqali yuqori chap burchagiga ko'chirish mumkin.

Demak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ushbu matritsada qiyudagi almashtirishlarni bajaramiz.

Birinchi satrni $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ga ko'paytib, i -satrga qo'shamiz. Bu

almashtirishlardan keyin A matritsa quyidagi ko'rinishga keladi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Agar $\begin{pmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}$ matritsa nolga teng bo'lsa, jarayon

tugatiladi. Noldan farqli bo'lgan, holda satrlarini va ustunlarini almashtirish hisobiga $a'_{2,2} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ikkinchi satrni $-\frac{a'_{i,2}}{a'_{2,2}}$ ga ko'paytirib, qolgan satrlarga qo'shish orqali berilgan matritsani quyidagi ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m,3} & \dots & a''_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ushbu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida, matritsaning ma'lum satrlaridan tashqari qolgan satrlari nolga aylantiriladi. Natijada matritsa trapetsiyasimon shaklga ega bo'ladi.

12-MAVZU: BIR JINSLI TENGLAMALAR SISTEMASI. KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI

Reja:

1. Bir jinsli tenglamalar sistemasi
2. Kroneker-Kapelli teoremasi

Tayanch so'z va iboralar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, Kramer usuli, Gauss usuli, Teskari matritsalar usuli, Matritsa tushunchasi, determinant tushunchasi. Kroneker-Kapelli teoremasi, Matritsani rangi tushunchasi.

$$v_{r+1} = b_{r+1,1}v_1 + b_{r+1,2}v_2 + \dots + b_{r+1,r}v_r,$$

$$v_{r+2} = b_{r+2,1}v_1 + b_{r+2,2}v_2 + \dots + b_{r+2,r}v_r,$$

.....;

$$v_n = b_{n,1} v_1 + b_{n,2} v_2 + \dots + b_{n,r} v_r.$$

Bu tengliklardan quyidagi $n-r$ ta ustunning yechim ekanligini ko‘rish qiyin emas,

$$Z_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ \dots \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{r+2} = \begin{pmatrix} b_{r+2,1} \\ \dots \\ b_{r+2,r} \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Z_n = \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ \dots \\ b_{n,r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bu yechimlar chiziqli erkli ekanligi osongina kelib chiqadi, chunki bu ustunlarning oxirgi $n-r$ ta komponentalaridan tuzilgan minorni qarasak, ushbu minor noldan farqli bo‘ladi.

Endi ixtiyoriy yechim bu yechimlar orqali chiziqli ifodalanilishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $X = (x_1^*, \dots, x_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)^T$ ustun sistemaning boshqa bir yechimi bo'lsin. U holda

$$Y = X + x_{r+1}^* Z_{r+1} + \dots + x_n^* Z_n$$

ustun ham sistemaning yechimi bo‘ladi. Ma’lumki, bu yechimda $(r+1)$ -komponentadan boshlab barcha komponentalar nolga teng, ya’ni $Y = (y_1^*, \dots, y_r^*, 0, \dots, 0)^T$.

Ushbu ustun sistemaning yechimi bo‘lganligi uchun

$$y_1^* v_1 + y_2^* v_2 + \dots + y_r^* v_r = 0.$$

Ammo, $v_1, v_2, \dots, v_r$ ustunlar chiziqli erkli ekanligidan $y_1^* = y_2^* = \dots = y_r^* = 0$ kelib chiqadi. Demak, $Y = 0$, ya'ni

$$X = -x_{r+1}^* Z_{r+1} - \dots - x_n^* Z_n.$$

Shunday qilib, $Z_{r+1}, Z_{r+2}, \dots, Z_n$ chiziqli erkli yechimlar bo'lib, barcha yechimlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

ustun $v_1, v_2, \dots, v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi.

4-teorema. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi, uning biror xususiy yechimi va xuddi shu koeffitsientlardan tuzilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indisiga teng.

Isbot. Aytaylik, X_0 ustun $A \cdot X = B$ bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining biror yechimi bo'lsin. U holda $A \cdot X = B$ va $A \cdot X_0 = B$ ekanligidan, $A \cdot X = A \cdot X_0$ sistemaga ega bo'lamiz.

Demak, berilgan sistema $A \cdot (X - X_0) = 0$ bir jinsli sistemaga teng kuchli. Bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi $X^* = X - X_0$ ekanligidan $X = X^* + X_0$ kelib chiqadi. Ya'ni berilgan tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechim va bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indilaridan iborat.

13-MAVZU: TRANSPORT MASALASI VA UNING QO'YILISHI.

Reja:

1. Transport masalasining matematik modeli.
2. Transport masalasini yechish usullari.
3. Ochiq turdagi transport masalasini yechish.

Tayanch so'z va iboralar: boshlang'ich tayanch plan, yopiq model, ochiq model, shimoliy – g'arb burchak usuli, minimal harajatlar usuli

Transport masalasining matematik modeli

Yuklarni jo'natish punktlaridan berilgan qabul qilish punktlariga tashib berishning optimal planini topish masalasiga transport masalasi deyiladi va u quyidagicha formulirovka qilinadi:

Aytaylik $A_1, A_2, \dots, A_m$ punktlarida ularga mos $a_1, a_2, \dots, a_m$ miqdordagi bir jinsli yuklar joylashgan bulsin. Bu $A_1, A_2, \dots, A_m$ -larga jo'natish punktlari deymiz. Bu yuklarni n -ta $B_1, B_2, \dots, B_n$ punktlari qabul qilishi kerak bo'lib va ularning talablari mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ bulsin. Har bir x_{ij} -birlikdagi yukni i -chi jo'natish punitidan j -chi qabul qilish punitiga olib borish narxi (xarajati) c_{ij} -ma'lum bulsin. Bu yuklarni tashish planini shunday tuzishimiz kerakki talabkor punktlar

maksimal qoniqish olsun va hamma yuklarni olib borish uchun ketgan harakatlar yig'indisi minimal bulsin.

Transport masalasini shartli ravishda jadval ko'rinishda beramiz. Jadvalda quyidagilar ko'rsatiladi: qabul qilish punktlari, jo'natish punktlari, yuk zapaslari, yukka bo'lgan ehtiyoj va har bir i-chi jo'natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga yuboriladigan yuk birliklarining narxi (ya'ni tarif matritsasi) beriladi.

Jo'natish punktlari	Qabul qilish punktlari				Yuk zapastlari
	B ₁	B ₂		B _n	
A ₁	c ₁₁ x ₁₁	c ₁₂ x ₁₂		c _{1n} x _{1n}	a ₁
A ₂	c ₂₁ x ₂₁	c ₂₂ x ₂₂		c _{2n} x _{2n}	a ₂
...					...
A _m	c _{m1} x _{m1}	c _{m2} x _{m2}		c _{mn} x _{mn}	a _n
Yukka bo'lgan ehtiyoj	b ₁	b ₂		b _n	Σa _i =Σb _j

Bu yerda $C=\{c_{ij}\}$ matritsasiga tarif matritsasi yoki transport xarajatlari deyiladi. $X=\{x_{ij}\}$ matritsaga esa transport masalasining plani deyiladi. Bu yerda x_{ij} - i-chi punktdan j-chi punktga yetkaziladigan yuklar hajmi (soni). Tashish plani bilan bog'liq ketgan xarajatlarning umumiy yig'indisi quyidagi maqsad funksiyasi orqali ifodalanadi.

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}.$$

Bu yerda x_{ij} -o'zgaruvchilar yuk zapasi, yukka bo'lgan ehtiyoj va manfiy bulmaslik shartlarini (chegaralanishlarni) bajargan bo'lishi kerak.

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda transport masalasining matematik modelini quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}) (j = \overline{1, n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Transport masalasining matematik qo'yilishi quyidagicha talqin qilinadi: Chegaraviy tizimlar, manfiy bulmaslik sharti va maqsad funksiyasi berilgan deylik. Talab qilinadiki tizimning yechimlar to'plamidan shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini (planini) topish kerakki, maqsad funksiyasi minimal qiymatga erishsin.

Transport masalasi ikki turga bo'linadi, ochiq va yopiq turdagi. Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

masala yopiq turdagi masala bo'ladi

Agar yuk zapaslari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

masala ochiq turdagi masala bo'ladi.

Transport masalasini yechish usullari

Transport masalasini yechish ikki bosqichdan iborat.

1. Boshlang'ich tayanch planini topish.

2. Tayanch planlar ichidan optimal planini topish.

Tayanch planini tuzishning bir necha usullari mavjud: "Shimoliy-g'arb burchak", "Kichik elementlar", "Fogel" va boshqalar.

"Shimoliy-g'arb burchak" usuli.

Yuklarni tashishning boshlang'ich planini tuzishda "shimoliy-g'arb burchak" usulidan foydalanish quyidagicha amalga oshiriladi:

1. Tarif jadvali tuziladi.

	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}

a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots\dots$	c_{2n}
$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$	$\dots\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots\dots$	c_{mn}

2. Chap tomondagi yuqoridagi burchak, ya'ni (shimoliy-g'arb burchak) dan boshlab satr bo'yicha yoki ustun bo'yicha siljiymiz. (1,1) katakga a_1 va b_1 ning eng kichigini joylashtiramiz, ya'ni $x_{11}=\min(a_1, b_1)$.

3. Agar $a_1 > b_1$ bo'lsa $x_{11}=b_1$ ni beramiz, birinchi ustun shu bilan yopiladi, ya'ni $x_{i1}=0$ ($i=2, m$). (Birinchi qabul qiluvchining talabi to'liq qanoatlantirildi).

4. Birinchi satr bo'yicha siljiymiz (1;2) katakga, bu yerga a_1-b_1, b_2 ning eng kichigini joylashtiramiz, ya'ni $x_{12}=\min(a_1-b_1, b_2)$.

5. Agar $b_1 > a_1$ bo'lsa 1-chi satr yopiladi, ya'ni $x_{1j}=0$ ($j=2, n$).

6. Qo'shni kataklarni to'ldirishga o'tamiz (2.1), ya'ni $x_{21}=\min(a_2, b_1-a_1)$.

7. Ikkinchi satr yoki ikkinchi ustun kataklarini to'ldirishga o'tamiz va hakazo. Bu jarayon toki resurslar tugamaguncha davom etadi.

"Kichik elementlar" usuli.

"Kichik elementlar" usuli yordamida tayanch plani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1. Yuklar qabul qiluvchilarga tarif jadvalidagi eng kichik c_{ij} tashish narxiga mos katakni to'ldirishdan boshlanadi.

2. Eng kichik tarif c_{ij} katagiga a_i yoki b_j ning eng kichigi joylashtiriladi.

3. Keyin to'lig'icha yuk zapaslari sarf qilingan satr yoki qabul qilish punkti talabi qondirilgach mos ustun yo'qotiladi.

4. Agar jo'natish punktidagi yuk zapaslari to'liq taqsimlangan bo'lsa va qabul qiluvchi talabi to'liq qanoatlantirilsa ularga mos satr va ustun yo'qotiladi.

5. Qolgan satr va ustunlardan yana kichik ta'rif olinadi. Yuk zapaslarini taqsimlash jarayoni, toki yuk zapasi tugaguncha va talablar qanoatlantirilguncha davom etadi.

Potensiallar usuli.

Agar yuqoridagi usullar yordamida boshlang'ich tayanch plan topilgan bo'lsa optimal planni topish potensiallar usulida bajariladi.

Transport masalasi optimal planni topishning potensiallar usuli quyidagilardan iborat:

1. Yuqoridagi keltirilgan usullar yordamida yuklarni tashishning tayanch plani aniqlanadi.

2. Mos ravishda yuklarni qabul qiluvchi va jo'natuvchi punktlar uchun u_i va v_j potensiallari aniqlanadi.

3. Bush kataklarda potensiallar yig'indisi hisoblanadi $c'_{ij} = u_i + v_j$.

4. Bush kataklarda c_{ij} va c'_{ij} tariflar farqi hisoblanadi.

$S_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

5. Agar hamma bush kataklardagi fark $S_{ij} > 0$ bo'lsa olingan plan optimal bo'ladi.

6. Agar bush kataklardan birortasida $S_{ij} < 0$ bo'lib qolsa, bush bo'lmagan kataklarga x_{ij} o'zgaruvchi qiymati kiritiladi, ya'ni yuqoridagi farq minimal bulsin. Shu katak uchun bush bo'lmagan kataklar yordamida yopiq kontur xosil qilinadi va yuklar shu konturda qayta taqsimlanadi. Natijada yangi tashish planga ega bulamiz.

Bu jarayon toki farq $S_{ij} > 0$ bulmaguncha davom etadi va oxirgi olingan yuklarni tashish plani optimal bo'ladi.

Misol.

Quyidagi jadvalda berilgan transport masalasini yeching

$b_k \backslash a_i$	40	25	20	50
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

Yechish: Boshlang'ich tayanch planni "Shimoliy-g'arb burchak" va "Kichik elementlar" usulida topamiz. "Shimoliy-g'arb burchagi" usuli qoidasiga binoan jadvalning (1,1) katagiga $X_{1,1} = \min(60, 40) = 40$ sonini joylashtiramiz, keyingi $X_{1,2} = \min(60 - 40, 25) = 20$ sonini (1,2) katagiga joylaymiz. Shu bilan birinchi punktda yuk tugadi va keyingi kataklar (1,3) va (1,4) yopildi.

Keyingi punktdagi yuklarni taqsimlashni boshlaymiz. (2,2) katakga $X_{2,2} = \min(40, 5) = 5$ sonini joylashtiramiz. Shu bilan 1-chi va 2-

chi talabkorlar talabi qondirildi, yani 1-chi va 2-chi ustun yopildi. (2,3) katakka $X_{23}=\min(35,20)=20$ joylashtiriladi. 3-chi talabkor talabi bajarildi. qolgan yukni (2,4) katakka joylashtiramiz, ya'ni $X_{24}=\min(15,50)=15$ va ikkinchi jo'natish punktida yuk tugadi. 3-chi jo'natish punktidagi yukni taqsimlashni boshlaymiz.

(3,1),(3,2),(3,3) kataklar yopilgan, ya'ni 1,2 va 3 talabkorlar talabi qondirilgan. (3,4) katakka $X_{34}=\min(35,35)=35$ yozamiz. Shu bilan yuklar to'liq taqsimlandi, ya'ni quyidagi planga ega buldik.

$$X = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Maqsad funksiyasi qiymati $Z=595$ ni tashkil qiladi.

Qo'yilgan masalaning tayanch planini endi "Eng kichik elementlar" usuli bilan topamiz.

Yechish: Ustun yoki satr bo'yicha eng kichik xarajatni topamiz.

Satr bo'yicha bu element (1;3) katakda joylashgan, ya'ni $c_{13}=1$. Shuning uchun bu katakka $X_{13}=\min(60,20)=20$ yukni joylaymiz. Uchinchi talabkorning talabi qanoatlantirildi. Shu tufayli keyingi hisoblashlarda 3-chi ustun qaralmaydi. Keyingi eng kichik elementni topamiz. Bu element (1,4) va (2,2) kataklarda joylashgan, ya'ni $c_{14}=2$ va $c_{22}=2$. Yuklarni bu kataklarga joylaymiz. $X_{14}=\min(60-20,50)=40$, $X_{22}=\min(40,25)=25$. Ikkinchi talabkor talabi qanoatlantirildi, shu tufayli keyingi hisoblashlarda 2-chi ustun qaralmaydi.

Keyingi eng kichik elementlar (2,4) va (3,2) kataklarda joylashgan, ya'ni $c_{24}=3$ va $c_{32}=3$. Bu kataklarga yuklarni joylashtiramiz $X_{24}=\min(40-25,50-40)=10$. (3,2) katak qaralmaydi, chunki bu ustun hisobdan chiqarilgan. Keyingi eng kichik elementni izlaymiz, bu element $c_{21}=4$. Yukni bu katakka joylaymiz $X_{21}=\min(15-10, 40)=5$. Eng oxirgi kichik element $c_{31}=7$. Bu katakka ham yukni joylaymiz $X_{31}=\min(35,40-5)=35$. Natijada yuklarni taqsimlab, boshlang'ich tayanch planga ega buldik, ya'ni

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maqsad funksiyasini hisoblaymiz $Z=415$.

Endi masalaning optimal planini topamiz. Optimal planini topish uchun potentsiallar usulidan foydalanamiz. Boshlang'ich tayanch plan

"Eng kichik elementlar" usulida topilgan deylik. Uni quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz.

$a_i \backslash b_k$	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 5	- 2 25	6	3 10	1
35	- 7 35	+ 3	5	4	4
V	3	1	1	2	

Jadvalda bush bo'lmagan kataklar quyidagi shartni qanoatlantiradi.

$$r=3+4-1=6$$

Yukni jo'natuvchi va talabkorlar potensialini aniqlaymiz va quyidagi tenglamalarga ega bulamiz.

$$u_1+v_3=1; \quad u_1+v_4=2; \quad u_2+v_1=4; \quad u_2+v_2=2; \quad u_2+v_4=3; \quad u_3+v_1=7$$

Ma'lumki tenglamalar soni noma'lumlar sonidan 1 ta kam, ya'ni noma'lumlar 1 tasi ozod va u istalgan qiymat olishi mumkin. Misol uchun aytaylik $u_1=0$. U holda qolgan potentsiallar quyidagicha aniqlanadi

$$u_1=0, \quad v_3=1, \quad v_4=2, \quad u_2=1, \quad v_2=1, \quad v_1=3, \quad u_3=4.$$

Bush kataklarda s_{ij} qiymatini quyidagi formula bilan aniqlaymiz

$$S_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j).$$

U holda

$$S_{11}=5-(0+3)=2; \quad S_{12}=4-(0+1)=3; \quad S_{23}=6-(1+1)=4;$$

$$S_{32}=3-(4+1)=-2; \quad S_{11}=5-(4+1)=0; \quad S_{34}=4-(4+2)=-2.$$

Olingan plan optimal bula olmaydi, chunki s_{ij} lar ichida manfiylari ham mavjud $S_{32}=S_{34}=-2$. Bu kataklar uchun yopiq kontur (sikl) hosil qilamiz. (3,2) katak uchun kontur (3,2),(3,1),(2,1),(2,2). Konturni soat strelkasi bo'yicha yoki unga teskari yo'nalishda (3,2) katakdan boshlab ketma-ket + va - ishoralarini qo'yib chiqamiz. Manfiy kataklardan eng kichigini tanlaymiz $\min(25;35)=25$, ya'ni $x_{22}=25$. Kataklarda yuklarni qayta taqsimlaymiz. Taqsimlanishda umumiy balans bu kataklarda buzilmasin va xarajatlar minimal bulsin. Minusli katak (2,2) dagi yukni keyingi musbat katakdagi yukga qo'shamiz. U holda (2,1) katakda yuk $5+25=30$ bo'ladi. Balans buzilmaslik uchun (3,1) katakdagi yukdan 25

birligini (3,2) katakga yuklaymiz. Shunday qilib yangi planga ega buldik. Bu jadval uchun potentsiallarni aniqlaymiz va bosh kataklarda s_{ij} larni hisoblaymiz:

$$S_{11}=5-(0+3)=2; \quad S_{12}=4-(0+1)=3; \quad S_{23}=6-(1+1)=4; \\ S_{22}=2-(2+1)=0; \quad S_{33}=5-(4+1)=0; \quad S_{34}=4-(4+2)=-2;$$

$a_i \backslash b_k$	40	25	20	50
60	5	4	1 20	2 40
60	5	4	1 20	2 40
40	+ 4 30	2 0	6	- 3 10
35	- 7 10	3 25	5	+ 4
v	3	1	1	2

Yangi olingan plan ham optimal emas, chunki $S_{34}=-2$. Yopiq kontur tuzamiz va yuklarni bu kontur ichida qayta taqsimlaymiz va natijada quyidagi planga ega bulamiz.

$a_i \backslash b_k$	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 0	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
V	3	1	1	2	

Olingan plan optimal plan, chunki barcha bosh kataklarda S_{ij} lar musbat. Demak, optimal plan quyidagicha bo'ladi.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Maqsad funksiyasining qiymati $z_{\min}=375$.

Ochiq turdagi transport masalasini yechish

Ba'zi transport masalalarida yuk zapaslari talablar yig'indisidan kichik yoki katta bo'lishi mumkin. Bunday masalalar ochiq turdagi transport masalasi deyiladi. Bunday hollarda soxta (fiktiv) $m+1$ jo'natish yoki $n+1$ qabul (iste'mol) qiluvchi punktlari kiritiladi, ya'ni

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i > 0 \text{ yoki}$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j > 0$$

Bu punktlarda transport xarajatlari nolga teng qilib olinadi, ya'ni $c_{m+1,j}=0$ ёки $c_{i,n+1}=0$.

Misol. Quyidagi ochiq modeli transport masalasini yeching.

b_k a_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Bu masalada

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 16 > \sum_{j=1}^5 b_j = 13$$

Shuning uchun oltinchi soxta talabkorni kiritamiz, uning talabi $b_6=16-13=3$ bo'ladi. Bu soxta punktni kiritib, masalani quyidagicha yozamiz.

b_k a_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Bu masalani yechib 7-siklda optimal yechimni topamiz, ya'ni

$$x_{12}=1, x_{13}=3, x_{24}=2, x_{25}=2, x_{26}=1, x_{31}=3, x_{32}=2, x_{36}=2,$$

$$y_{\min}=1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 13$$

Nazorat uchun savollar:

1. Transport masalasining matematik modelini ta'riflab bering.
2. Transport masalasini yechish usullari qaysilar?

3. Ochiq turdagi transport masalasini yechish usullari qaysilar?

$a_1=290$	$b_1=200$	$d =$	$\begin{matrix} 6 & 14 & 18 & 14 \\ 13 & 7 & 5 & 15 \\ 16 & 10 & 16 & 9 \end{matrix}$
$a_2=310$	$b_2=180$		
$a_3=240$	$b_3=220$		

transport masalasini ishleng.

14-MAVZU: SONLI DIFFERENSIALLASH

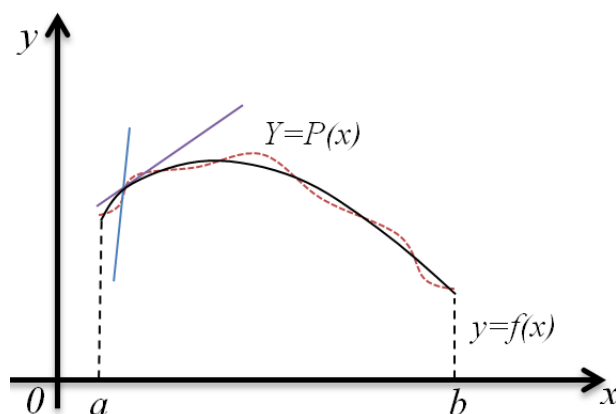
Reja:

1. Sonli differensiallash tushunchasi va usullari.
2. Nyutonning interpolyasiyon ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi va xatoliklarini baholash.
3. Logranj interpolyasiyon ko'phadi asosida sonli differensiallash formulasi va xatoliklarini baholash.

Tayanch so'z va iboralar. Differensiallash, sonli differensiallash, sonli differensiallashda xatoliklar, xatoliklar, interpolyasiya, Interpolyasiyon ko'phad, xatoliklarning baholanishi.

Amaliy masalalarni yechishda, ko'pgina hollarda $y = f(x)$

funksiyaning berilgan nuqtalardagi ko'rsatilgan tartibli hosilasini topish talab etiladi. Keltirilgan talablarda $f(x)$ funksiyaning berilgan nuqtalardagi differensialini analitik yo'l bilan hisoblash bir qancha qiyinchiliklarni tug'diradi. Bunday hollarda odatda sonli differensiallash usulidan foydalaniladi.



Chizma-15.1.

Sonli differensiallash formulasini kiritish uchun, berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi interpolyasiyasi $P(x)$ ko'phad bilan almashtiriladi va quyidagicha hisoblanadi:

O'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli. Giperbolik turdagi tenglama

Uchlari $x=0$ va $x=l$ nuqtalarda mahkamlangan tor tebranishi tenglamasi masalasi uchun Furye yoki o'zgaruvchilarni ajratish usulini bayon qilamiz. Bu masala quyidagi tenglamaga keladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Boshlang'ich shartlar:

$$u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad (2)$$

Chegaraviy shartlar:

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

Dastlab, (1) tenglamaning xususiy yechimlarini quyidagi korinishda qidiramiz:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (4)$$

bu funktsiyar aynan nolga teng emas va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

(4) funktsiyani (1) tenglama qo'yib quyidagi oddiy differensial tenglamalarga kelimiz:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (6)$$

bu yerda $\lambda = \text{const}$.

Chegaraviy shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (7)$$

Natijada biz Shturm-Liuvill (6)-(7) masalasiga kelimiz.

Bu masalaning xos sonlari:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad k = 1, 2, \dots$$

Va bu xos sonlarga quyidagi xos funktsiyaar mos keladi:

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$\lambda = \lambda_k$ bo'lganda (5) tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l},$$

shuning uchun

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

funktsiya har qanday a_k va b_k uchun (1) masalani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(2)-(3) shartlarni qanoatlantiruvchi (1) masalaning yechimini qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi at}{l} + b_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (8)$$

Agar bu qator tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uni hadma-had ikki marta differensiallash mumkin bo'lsa, u vaqtda qator yig'indisi (1) tenglamani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

a_k va b_k doimiy koeffitsiyentlarni shunday aniqlaymizki (8) qator yig'indisi (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin, quyidagi tengliklarga kelimiz:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (9)$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (10)$$

(9) va (10) formulalar $u_0(x)$ va $u_1(x)$ funksiyaarning $(0, l)$ intervalda sinuslar bo'yicha Furye yoyilmasini beradi. Bu yoyilmalarning koeffitsiyentlari quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Masala: Quyidagi masalani Furye usulida yeching.

$$u_{tt} = u_{xx} + u, \quad (0 < x < l); \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{x}{l}.$$

Chegaraviy shartlar noldan farqli bo'lgani uchun, yechimni $u = v + w$ ko'rinishda qidaramiz, bu yerda $w = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = t$. U holda $w(x, t) = \frac{xt}{l}$, yechim esa $u(x, t) = v(x, t) + \frac{xt}{l}$ (*) ko'rinishda bo'ladi. Yechimdagi $v(x, t)$ funksiya quyidagi masalani qanoatlantiradi:

$$v_{tt} = v_{xx} + v + \frac{xt}{l}, \quad (0 < x < l); \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

Berilgan tenglamaning $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1$ - xos sonlarini va $\sin \frac{\pi n}{l} x$ xos funksiyaarini aniqlaymiz. Shunga asosan yechimni quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12)$$

Tenglamaning ozod hadi $f(x, t) = \frac{xt}{l}$ funksiyaning Furye qatoriga yoyamiz:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (13)$$

$f_n(t)$ - Furiye koeffitsiyentlarini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\xi t}{l} \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Integralni bo'laklab integralymiz. Natijada

$$f_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2t}{\pi n}. \quad (14)$$

(12) va (13) funksiyaarni (14) ni hisobga olgan holda (11) masalaga etib qo'yamiz, natijada noma'lum $g_n(t)$ funksiya uchun quyidagi Koshi masalasini olamiz:

$$\begin{cases} g''_n(t) + \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1 \right) g_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2t}{\pi n}, \\ g'_n(t) = 0, \quad g_n(t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

(15) masalani yechishda, dastlab, tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda qidiring: $g_n(t) = \bar{g}_n(t) + g * _n(t)$, bu yerda $\bar{g}_n(t)$ - berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi, $g * _n(t)$ - berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'lib, o'ng tomonga qarab tanlanishi mumkin, bizning holimizda, $g * _n(t) = at + b$ ko'rinishda qidirish mumkin.

(15) masalani yechib, natijada (11) masalaning yechimini aniqlaymiz:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{\pi n \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1 \right)} \left(t - \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1} t}{\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1}} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (16)$$

(16) funksiyaning (*) ga etib qo'yib, berilgan masalaning yechimini olamiz, ya'ni:

$$u(x, t) = \frac{xt}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{\pi n \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1 \right)} \left(t - \frac{\sin \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1} t}{\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - 1}} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Parabolik turdagi tenglama

Qisqacha bir jinsli ingichka sterjenda issiqlik tarqalish masalasini ko'rib chiqamiz, uning yon sirti issiqlik o'tkazmaydi, $x=0$ va $x=l$ chegaralarida esa nollik temperatura. Shu masala uchun Furiye yoki o'zgaruvchilarni ajratish usulini bayon qilamiz. Bu masala quyidagi tenglamaga keladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Boshlang'ich shartlar:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

Chegaraviy shartlar:

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Dastlab, (1) tenglamaning xususiy yechimlarini quyidagi korinishda qidiramiz:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

bu funksiyar aynan nolga teng emas va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

(4) funksiyani (1) tenglama qo'yib quyidagi oddiy differensial tenglamalarga kelimiz:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (5)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (6)$$

bu yerda $\lambda = const$.

Chegaraviy shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (7)$$

Natijada biz Shturm-Liuvill (6)-(7) masalasiga kelimiz.

Bu masalaning xos sonlari:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad k = 1, 2, \dots$$

Va bu xos sonlarga quyidagi xos funksiyaar mos keladi:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

$\lambda = \lambda_k$ bo'lganda (5) tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t},$$

shuning uchun

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = a_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l}$$

funksiya har qanday a_k uchun (1) masalani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(2)-(3) shartlarni qanoatlantiruvchi (1) masalaning yechimini qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l} \quad (8)$$

Agar bu qator tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uni t had bo'yicha bir marta x bo'yicha ikki marta differensiallash mumkin bo'lsa, u vaqtda qator yig'indisi (1) tenglamani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

a_k doimiy koeffitsiyentlarni shunday aniqlaymizki (8) qator yig'indisi (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin, quyidagi tengliklarga kelimiz:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (9)$$

(9) formula $u_0(x)$ funksiyaning $(0, l)$ intervalda sinuslar bo'yicha Furiye yoyilmasini beradi. Bu yoyilmaning koeffitsiyentlari quyidagi formula bilan topiladi:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Masala: Quyidagi masalani Furiye usulida yeching.

$$u_t = u_{xx} + u, \quad 0 < x < l, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 13x. \quad (10)$$

Dastlab, (1) tenglamaning xususiy yechimlarini quyidagi korinishda qidiramiz:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (4)$$

bu funksiyalar aynan nolga teng emas va chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin.

(4) funksiyaning (10) masaladagi tenglamaga qo'yib quyidagi oddiy differensial tenglamalarga kelimiz:

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (5)$$

$$X''(x) + (\lambda + 1)X(x) = 0, \quad (6')$$

bu yerda $\lambda = \text{const}$.

Chegaraviy shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (7)$$

Natijada biz Shturm-Liuvill (6')-(7) masalasiga kelimiz.

Bu masalaning xos sonlari:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1$$

Va bu xos sonlarga quyidagi xos funksiya mos keladi:

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

$\lambda = \lambda_n$ bo'lganda (5) tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1\right)t},$$

shuning uchun

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1\right)t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

funksiya har qanday a_n uchun berilgan masalani qanoatlantiradi.

Berilgan masalaning yechimini qator ko'rinishida qidiramiz:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1\right)t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

a_n doimiy koeffitsiyentlarni shunday aniqlaymizki qator yig'indisi boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin, quyidagi tenglikga kelimiz:

$$13 \cdot x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

bu tenglik $u_0(x) = 13x$ funksiyaning $(0, l)$ intervalda sinuslar bo'yicha Furiye yoyilmasini beradi. Bu yoyilmaning koeffitsiyentlari quyidagi formula bilan topiladi:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l 13 \cdot x \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

koeffitsiyentlarni aniqlash uchun integralni bo'laklab integrallaymiz, natijada: $a_n = \frac{26 \cdot l}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1}$. U vaqtda izlanayotgan yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u(x, t) = \frac{26 \cdot l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - 1\right)t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Nazorat uchun savollar.

1. Sonli differensiallash deganda nimani tushunasiz?
2. Sonli differensiallashning qanday usullari mavjud?
3. Nyutonning birinchi interpolatsion ko'phadi orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
4. Nyutonning ikkinchi interpolatsion ko'phadi orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
5. Logranj interpolatsion ko'phad orqali sonli differensiallashni tushuntirib bering
6. Sonli differensiallashda xatoliklar haqida tushuntirib bering
7. Logranj va Nyuton ko'phadi orqali sonli differensiallashda qoldiq hadini keltirib chiqaring.

15-MAVZU: ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBAN YECHISH

Reja:

1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni chekli ayirmalari usuli bilan taqribiy yechish.
2. Oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechishning Eyler usuli.
3. Oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechishning Runge-Kutta usuli.

Tayanch soʻz va iboralar: Oddiy differensial tenglamalar, Chikli ayirmali sxemalar, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli.

Masalani yechish:

Hosilaga nisbatan yechilgan quyidagi birinchi tartibli differensial tenglama

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

va uning boshlangʻich sharti

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

berilgan bulsin.

Bu yerda x oʻzgaruvchi $[a:b]$ oraliqda kesmani x_i nuqtalar yordamida teng uzoqlikdagi kesmalarga boʻlib chiqamiz, yaʼni oddiy tekis toʻr olamiz:

$$w_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, 3, \dots, N - 1\}$$

Kesmalarning uzunliklari h bulsin, yaʼni

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$$

$$\text{Demak, } h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Berilgan masalani chekli ayirmali masala koʻrinishiga keltirish uchun quyidagi chekli ayirmali sxemadan foydalanishimiz mumkin:

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \text{ o'ng chekli ayirmali sxema.}$$

Qoʻyilgan masalaga mos chekli ayirmali masalani yozamiz:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \quad y(x_0) = y_0$$

Bu yerda $f_i = f(x_i, y_i)$.

Biz foydalangan chekli ayirmali sxemada qoʻyilgan masala (1 ni 0(h) aniqlikda approksimatsiyalaydi. (2.1.3) dan koʻrinib turibdiki, bizsa N ta tenglamalar tizimi hosil boʻladi :

$$y_{i+1} = y_i + hf_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \quad y(x_0) = y_0$$

Yuqoridagi keltirib chiqarilgan rekurrent formula (1) masalani yechimini SHEHM larda hisoblash algoritmidan iborat bo'ladi. Bunday algoritm yordamida (1) masalani $O(h)$ aniqlikdagi $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda taqribiy yechimini topish mumkin. Haqiqatdan, shu shartni bajarilishini (1) masala aniq yechimini sinash funksiyasi yordamida ko'rish bilan tekshirish mumkin. Sinov funksiyasi tariqasida S.Akbarova, A.Qodirov, Differensial tenglamalardan masalalar to'plami" №264 $xy' - 2y = 2x^4$ ni olishimiz mumkin. Ushbu tenglamani (.1) masalaga qo'yib, quyidagilarga esa bo'lamiz: $xy' - 2y = 2x^4$ ni o'zgarmasni variatsiyalash usulida har ikkala tomonni x ga bo'lib, ushbu tenglikka keltiramiz:

$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$ va bu tenglamani chap tomonini 0 ga tenglab, bir jinsli ko'rinishga keltirib olamiz:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = 2 \ln x + \ln c = \ln x^2 + \ln c = \ln c x^2$$

$$\ln y = \ln c x^2$$

$y_{b.j.} = cx^2$ bir jinsli qism yechildi. $y = c(x)x^2$ ni tenglamaga qo'yamiz:

$$y' = c'(x)x^2 + c(x)2x$$

$$c'(x)x^2 + c(x)2x - 2\frac{c(x)x^2}{x} = 2x^3$$

$$c'(x)x^2 + c(x)2x - c(x)2x = 2x^3$$

$$c'(x)x^2 = 2x^3$$

$$c'(x) = 2x$$

$$c(x) = x^2$$

$$y_{\text{bir jinsli bo'lmagan}} = x^4$$

$$y_{\text{umumiy}} = y_{\text{bir jinsli}} + y_{\text{bir jinsli bo'lmagan}}$$

$$y = cx^2 + x^4$$

$$f(x) = cx^2 + x^4; \quad x_0 = 1, y_0 = 2$$

$$y(1) = 2$$

$$f(1) = c + 1 = 2$$

$$c = 1$$

Eyler usuli. Yuqorida ko‘rilgan usullar taqribiy analitik usullar bo‘lib, bu hollarda yechimlar analitik (formula) ko‘rinishlarida olindi. Bu usullar bilan topilgan yechimning aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo‘ladi. Masalan, ketma – ket differensiallash usulini qo‘llaganda qatorning juda ko‘p hadlarini hisoblashga to‘g‘ri keladi va ko‘p hollarda bu qatorning umumiy hadini aniqlab bo‘lmaydi. Pikar algoritmini qo‘llaganimizda esa, juda ko‘p murakkab integrallarni hisoblashga to‘g‘ri keladi va ko‘p hollarda integral ostidagi funksiyalar elementar funksiya orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni yechishda yechimlarni formula ko‘rinishida emas, balki jadval ko‘rinishida olish qulay bo‘ladi. Differensial tenglamalarni raqamli usullar bilan yechganda yechimlar jadval ko‘rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko‘p qo‘llaniladigan Eyler va Runge – Kutta usullarini ko‘rib chiqamiz.

Eyler usuli. $[a,b]$ kesmada

$$y' = f(x,y)$$

differentsial tenglamaning

$$y(a) = x_0$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin. Eyler usulining mohiyati $[a,b]$ kesmani n ta oraliqqa ajratamiz, ya‘ni

$$x_i = a + i \cdot h = x_{i-1} + h, \quad (x_0 = a)$$

nuqtalarni hosil qilamiz, bu yerda $h = (b-a)/n$

Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini ushbu formula

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (1)$$

bilan hisoblanadi.

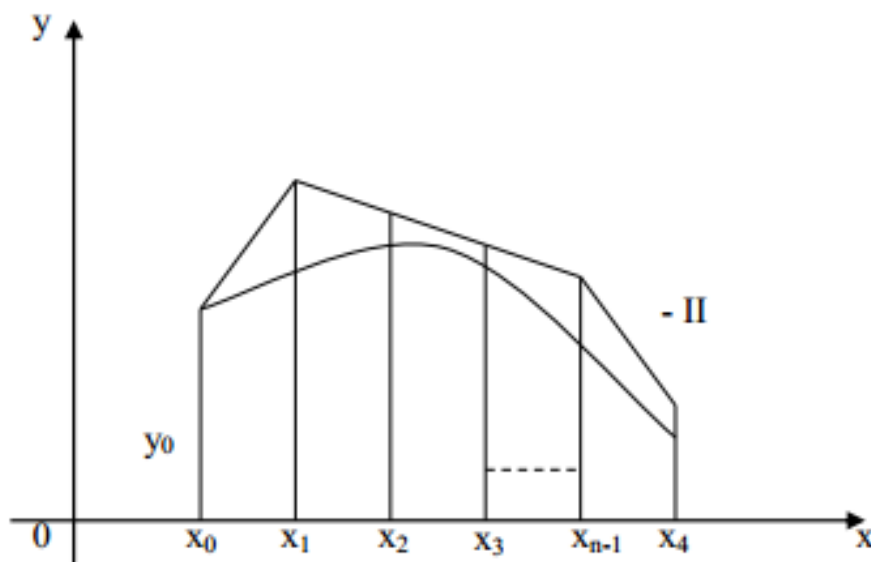
Misol. $y' = \frac{1}{2}xy$ tenglamaning $[0,1]$ kesmada $u(0)=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimining taqribiy qiymatlar jadvalini tuzing. Yechish. $n=10, h=0,1$ bulsin. Ushbu formuladan $y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}$,
 y_i ning qiymatlari topiladi, $i=1,10$.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)h$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

Aniq yechim: $y' = \frac{1}{2}xy$, $\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}xdx$, $\ln y = \frac{1}{4}x^2 + C$, $y = e^{\frac{1}{4}x^2} C$,

$u(0)=1$, $S=1$, $y = e^{\frac{x^2}{4}}$, $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1,2840$.

Ushbu jarayonni $[a,b]$ ga tegishli bo'lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (1) ning yechimini ifodalovchi jadvalini to'zimiz. Eyer usulining geometrik ma'nosi shundayki, bunda (1) ning yechimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (16.1 - rasm).



Rasm-16.1.

Runge-Kutta usuli. Runge - Kutta usuli ko'p jihatdan Eyer usuliga o'xshash, ammo aniqlik darajasi Eyer usuliga nisbatan yuqori bo'lgan usullardan biridir. Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish

juda qulay. Chunki, bu usul orqali noma'lum funksiyaning $x_i + 1$ dagi qiymatini topish uchun uning x_i dagi qiymati aniq bo'lishi yetarlidir. Runge-Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko'ra bir necha turlarga bo'linadi. Shulardan amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigani to'rtinchi daraja aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir. Ushbu

[illegible]

oddiy differentsial tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lib, uning $[a, b]$ oraliqdagi

$$y_1(x_0)=y_{10}, y_2(x_0)=y_{20}, \dots, y_n(x_0)=y_{n0} \quad (3)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin($x_0=a$).

Agar $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ va $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ belgilashlar kiritsak, (1) va (2) ni

quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$Y' = F(x, Y) \quad (4)$$

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (5)$$

Bu yerda $Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$.

(5) tenglamalar sistemasining (5) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini Runge-Kutta usuli yordamida topamiz. Buning uchun $x_i = a + ih$, $Y_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ belgilashlarni kiritib, quyidagi hisoblashlar ketma-ketligi bajaramiz:

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih; \\ k_1 &= F(x_i, Y_i) * h; \\ k_2 &= F(x_i + h/2, Y_i + k_1/2) * h; \\ k_3 &= F(x_i + h/2, Y_i + k_2/2) * h; \\ k_4 &= F(x_i + h, Y_i + k_3) * h; \\ Y_{i+1} &= Y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \end{aligned} \quad (6)$$

Bu yerda $h=(b-a)/n$.

Bu hisoblashlar ketmaketligi $i=1$ dan $n-1$ gacha takroriy ravishda hisoblanadi, va (5) tenglikda differentsial tenglamaning $u=u(x)$ taqribiy yechimlari hosil bo'ladi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) + 4x - 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

differentsial tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini Runge-Kutta usulidan foydalanib toping ($a=0$, $b=1$, $n=10$ deb oling). Yechish. Berilgan Koshi masalasi ushbu

$$\begin{cases} y_1(x) = x^2 - x - 1 \\ y_2(x) = -x^2 - x + 1 \end{cases}$$

aniq yechimga ega. Masalaning aniq va Runge-Kutta usuliga tuzilgan dastur yordamida topilgan taqribiy yechimlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

x	$y_1(x)$		$y_2(x)$	
	aniq yechim	taqribiy yechim	aniq yechim	taqribiy yechim
0,0	-1.000000000	-1.000000000	1.000000000	1.000000000
0,1	-1.090000000	-1.090000000	0.890000000	0.889999166
0,2	-1.160000000	-1.160000084	0.760000000	0.759998408
0,3	-1.210000000	-1.210000253	0.610000000	0.609997710
0,4	-1.240000000	-1.240000511	0.440000000	0.439997058
0,5	-1.250000000	-1.250000862	0.250000000	0.249996438
0,6	-1.240000000	-1.240001315	0.040000000	0.039995840
0,7	-1.210000000	-1.210001877	-0.190000000	-0.190004750
0,8	-1.160000000	-1.160002561	-0.440000000	-0.440005343
0,9	-1.090000000	-1.090003380	-0.710000000	-0.710005952
1,0	-1.000000000	-1.000004350	-1.000000000	-1.000006587

Nazorat uchun savollar:

1. Differentsial tenglamaga ta'rif bering.
2. Differentsial tenglamaga tartibi qanday aniqlanadi?
3. Differentsial tenglama uchun boshlang'ich shartlar qanday beriladi?
4. Koshi masalasi qanday masala?

16-MAVZU: ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH FORMULALARI.

Reja:

1. To'g'ri to'rtburchaklar usuli.
2. Trapetsiyalar formulasi.
3. Parabolalar (Simpson) formulasi.

Tayanch ibora va iboralar: Egri chiziqli trapetsiya, parabolik trapetsiya, trapetsiyalar formulasi, Simpson formulasi

Berilgan $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiyani topish mumkin bo'lsa, Nyuton Leybnits formulasi bo'yicha $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblagan edik. Lekin har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini hamma vaqt topish qiyin, bazi hollarda esa boshlang'ich funksiyani elementar funksiya orqali ifodalab bo'lmaydi.

Masalan.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\ln x},$$

Bunday hollarda Nyuton Leybnits formulasidan foydalana olmaymiz. Shuning uchun ularni taqriban bo'lsa ham hisoblashga to'g'ri keladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblaydigan bir qancha usullar mavjud. Ushbu paragrafda ulardan uchtasini: to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar hamda parabola (Simpson) usullarini keltiramiz.

To'g'ri to'rtburchaklar usuli

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz. Hisoblashlarda aniq integralni yuzini ifodalovchi yig'indi limiti deb, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

ko'rinishda mulohaza yuritiladi. $[a, b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'lamiz. Har birining uzunligini $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih (i = 0, n)$ deb olamiz. $x = x_i$ bo'lganda $f(x)$ funksiya qiymatlarini

$$y_i = f(x_i) = f(a + ih) \quad (2)$$

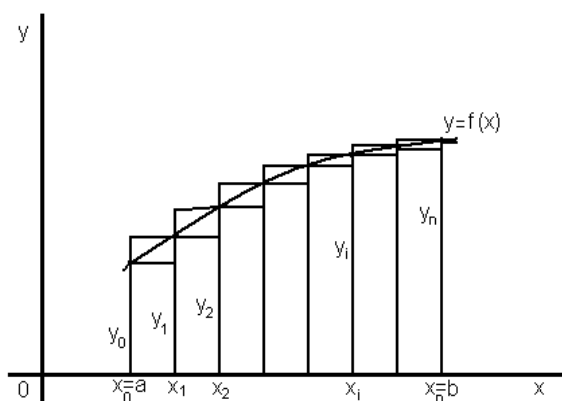
deb belgilaymiz. (1) fomulaning o'ng tomonidagi yig'indini

$\xi_i = x_{i-1}$ yoki x_i deb, quyidagi ikkita formulani hosil qilamiz:

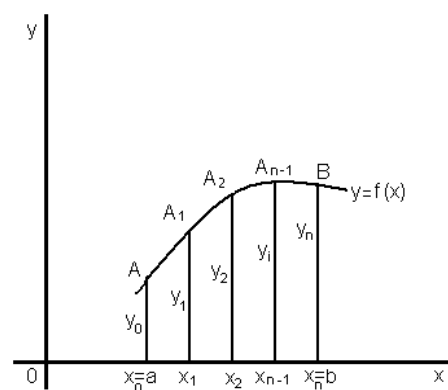
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}], \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n], \quad (4)$$

(3) va (4) formulalarga aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.



16.1-chizma



16.2-chizma

15.1-chizmada quyidagilar tasvirlangan: agar $f(x)$ musbat va o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda (3) formula "ichki" to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklning yuzini tasvirlaydi. (4) formula esa "tashqi" to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklining yuzini tasvirlaydi. Integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bilan hisoblashda qilingan xato n son qancha katta (ya'ni bo'linish qadami h qancha kichik) bo'la borishi bilan (3) va (4) formulalar aniqroq bo'la boradi, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da va $h \rightarrow 0$ da ular aniq integralning haqiqiy qiymatini beradi.

Trapetsiyalar formulasi. Agar ordinatalar chizig'ining egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini zinapoyali siniq chiziqlar bilan emas, balki ichki chizilgan siniq chiziqlar bilan tutashtirsak (4) va (5) formulalarga nisbatan xatosi kamroq bo'lgan taqribiy formulani keltirib chiqaramiz: (17.1-chizma).

Bu holda egri chiziqli ab trapetsiyaning yuzi yuqoridan $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ vatarlar bilan chegaralangan to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Natijada trapetsiyalar formulasini hosil qilamiz.

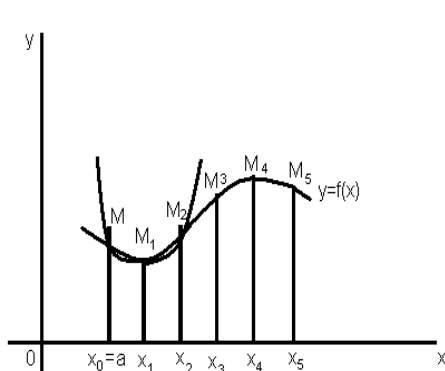
$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] =$$

$$\int_a^b h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] (5),$$

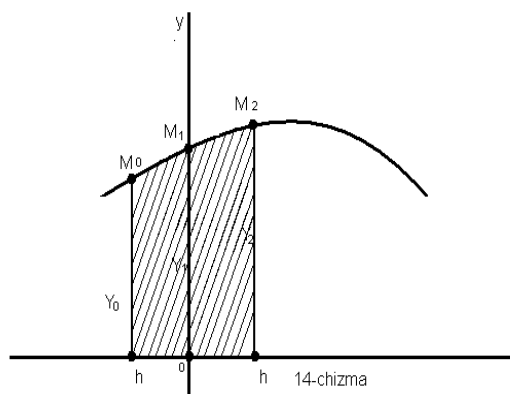
bunda $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_{i-1} + h$, ($i = \overline{1, n}$), $x_0 = a$, $x_n = b$. (5) ga

trapetsiyalar formulasi deyiladi.

Parabolalar (Simpson) formulasi. $[a, b]$ kesmani juft sonda $n=2m$ bo'laklarga ajratamiz. $[x_0, x_1]$ va $[x_1, x_2]$ kesmalarga mos va berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, uchta nuqtadan o'tuvchi va o'qi oy o'qi parallel bo'lgan ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtiramiz. (16.2-chizma).



16.3-chizma



16.4-chizma

Bunday egri chiziqli trapetsiyaning parabolik trapetsiya deb ataymiz. O'qi Oy o'qqa parallel bo'lgan parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2 + Bx + C (6)$$

ko'rinishda bo'ladi. A, B va C koeffitsientlar parabolaning berilgan uch nuqta orqali o'tish shartidan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Shunga o'xshagan parabolalarni kesmalarning boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi integralning taqribiy qiymatini beradi (15.3-chizma).

Lemma. Agar egri chiziqli trapetsiya (6) parabola, Ox o'q va oralig'i $2h$ ga teng bo'lgan ikkita ordinata bilan chegaralangan bo'lsa, u holda uning yuzi $S = \frac{h}{3}(y_0 + y_1 + y_2)$ (7) ga teng, bunday y_0 va y_2

chetdagi ordinatalar y_1 esa egri chiziqning kesma o'rtasidagi ordinatasi. (7) formuladan foydalanib, quyidagi taqribiy qiymatlarni yozamiz.

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_{2(m-1)}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2(m-1)} + 4y_{2(m-1)} + y_{2m})$$

Yuqoridagi taqribiy qiymatlarning chap va o'ng tomonlarini qo'shib, chapda izlanayotgan integralni, o'ngda esa uning taqribiy qiymatini xosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2(m-1)} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (8)$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \quad (9)$$

(9) formulaga **Simpson formulasi** deyiladi. Bu yerda bo'linish nuqtalarining soni $2m$ ixtiyoriy, lekin bu son qancha katta bo'lsa, (9) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi integral qiymatini shuncha aniq ifodalaydi.

Misol. $\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x}$ integralni to'g'ri to'rtburchaklar trapetsiya va Simpson taqribiy formulalardan foydalanib 0.0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. [2;10] kesmani teng $n=8$ ta bo'lakka bo'lamiz. U holda bo'ladi. Integral ostidagi funksiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

1-jadval

X	$y = \frac{1}{\lg x}$	X	$y = \frac{1}{\lg x}$
$x_0 = 2$	$y_0 = \frac{1}{0.3010} \approx 3.3211$	$x_5 = 7$	$y_5 = \frac{1}{0.8451} \approx 1.1833$
$x_1 = 3$	$y_1 = \frac{1}{0.4771} \approx 2.0960$	$x_6 = 8$	$y_6 = \frac{1}{0.9031} \approx 1.1073$

$x_2 = 4$	$y_2 = \frac{1}{0.6021} \approx 1.6608$	$x_7 = 9$	$y_7 = \frac{1}{0.9442} \approx 1.0591$
$x_3 = 5$	$y_3 = \frac{1}{0.6990} \approx 1.4304$	$x_8 = 10$	$y_8 = 1$
$x_4 = 6$	$y_4 = \frac{1}{0.7781} \approx 1.2852$	$y_0 + y_1 + \dots + y_7 = 13.1432$ $y_1 + y_2 + \dots + y_8 = 10.8221$	

1-usul. To'g'ri to'rtburchaklar usuli. (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1 \cdot [y_0 + y_1 + \dots + y_7] = 1 \cdot 13.1432 = 13.1432$$

(3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1[y_0 + y_1 + \dots + y_8] = 10.8221$$

2-usul. Trapetsiyalar usuli, (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx h \left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_7 \right] =$$

$$\frac{3.3211 + 1}{2} + 9.8221 = 2.1605 + 9.8221 = 11.9826$$

3-misol. Parabolalar (Simpson) usuli. $2m=8$ deb olib,

$$\frac{h}{3} = \frac{b-a}{6m} = \frac{10-2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3} \text{ ekanligini e'tiborga olsak, (9) formulaga}$$

asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \frac{1}{3} [3.3211 +$$

$$+ 1 + 4(2.0960 + 1.4304 + 1.1833 + 1.0591) + 2(1.6608 + 1.2852 + 1.1073)] =$$

$$= \frac{1}{3} [4.3211 + 23.0752 + 8.1066] = 11.8343$$

Shunday qilib, berilgan integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida hisoblab 13.1432 va 10.8221, trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblab 11.9826, parabolalar formulasi yordamida hisoblab 11.8343 bo'lishini topdik.

Nazorat uchun savollar:

1. Matematik modellartirishda obyektning qanday xossalari integral ko'rinishda ifodalanadi?
2. Integral tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi? Misollar keltiring.

3. Volterra tipidagi 1-tur integral tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
4. Volterra tipidagi 2-tur integral tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
5. Fredgolm tipidagi 1-tur integral tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
6. Fredgolm tipidagi 2-tur integral tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
7. Volterra tipidagi integral tenglamalarni yechish algortimini keltiring.
8. Fredgolm tipidagi integral tenglamalarni yechish algortimini keltiring.

17-MAVZU: REKLAMA KOMPANIYASINI TASHKILLASHTIRISH

Reja:

1. Reklama kompaniyasini tashkil etish.
2. Korxonalar o'zaro qarzlarini bartaraf etish.
3. Bozor iqtisodiyotining muvozanat makromodeli.
4. Bozor iqtisodiyotining muvozanat makromodeli.

Reklama uzoq vaqtdan beri jamiyatning madaniy, siyosiy va iqtisodiy hayotida omil bo'lib kelgan. Ishlab chiqaruvchi va iste'molchi o'rtasidagi muhim bog'liqlik sifatida reklama jamiyatning rivojlanishiga yordam berdi. U har doim ishlab chiqarish jarayonini, ishlab chiqarilgan tovarlarni takomillashtirishni rag'batlantiradigan muhim vositalardan biri bo'lib kelgan va bu jihatdan u nafaqat "savdo dvigateli", balki o'ziga xos "taraqqiyot dvigateli" vazifasini ham bajaradi.

Reklama aloqa vositasidir. Madaniy va sivilizatsiya mezonlariga tayanib, u ijtimoiy aloqalarning rivojlanishiga ta'sir qiladi. Hamma reklama nima ekanligini bilaman deb o'ylaydi. Reklama uchun zamonaviy ta'riflarni turli mamlakatlarning reklama qonunchiligida, xalqaro reklama kodeksida topamiz. Reklama-bu biznes. Yuz yildan beri u doimiy ravishda o'sib, gullab-yashnamoqda va kengayib bormoqda. Va shunga qaramay, g'alati va hayratlanarli haqiqat bor: reklama nima va qanday amalga oshirilishini tushuntirib beradigan

umumiy iqtisodiy nazariya hali ham mavjud emas. “Iqtisodchilar reklamaga shubha bilan qarashadi”, deb yozadi reklama asoschilaridan biri, noyob savdo takliflari nazariyasining asoschisi Rosser Rivs. Zamonaviy marketingning taniqli nazariyotchisi va amaliyotchisi Filipp Kotler reklamani baholashda yanada oqilona yondashuv bilan ajralib turadi. Uning nuqtai nazaridan, vakolatli reklama rassom yoki dizaynerning ilhomidan kelib chiqmaydi, ehtimol bu aniq belgilangan marketing yo‘nalishlari va ushbu mahsulotni iste‘mol bozorida joylashtirish xususiyatlariga asoslangan aniq hisoblangan dizaynning natijasidir. Reklamasiz mahsulotni bozorga chiqarish bu bema‘nilik bo‘lgan bo‘lar edi. Reklama -bu kompaniyaning marketing siyosatidan kelib chiqadigan tabiiy hodisadir. Agar reklama yo‘q bo‘lsa, unda reklama kompaniyasi samarasiz bo‘ladi.

Reklamani biznes, aloqa shakli, san'at turi sifatida ko‘rish mumkin. Ba’zi bir xususiy maqsadlarda (ilmiy, siyosiy, iqtisodiy, ijtimoiy, shaxsiy va boshqa) uni reklama bilan bevosita bog‘liq bo‘lgan turli xil faoliyat sohalariga bog‘lash mumkin. Insoniyat hamjamiyatiga xos bo‘lgan hodisa sifatida u hali ham o‘ziga xos xususiyatga ega va uning individual jihatlari birgalikda madaniyatning ajralmas qismidir. Reklama, shakllanishi bilan, tarixning turli davrlarida madaniyatning o‘ziga xos xususiyatlarini idrok etdi va aks ettirdi, shu bilan birga uning yangi va yangi shakllari va o‘ziga xos funksiyalarini qabul qilib bordi.

Biroq, reklama asosan iqtisodiy hodisadir. U tovar va xizmatlarni ishlab chiqaruvchi yoki sotuvchi oldida turgan iqtisodiy vazifalarni bajaradi, iste‘molchi tomonidan qabul qilingan iqtisodiy qarorlarga ta’sir qiladi va iqtisodiy sistemaning ajralmas qismidir. Reklama nafaqat bozor munosabatlarining vositasi, balki sanoatlashgan mamlakatlar iqtisodiyotining muhim qismidir. Uning iqtisodiy funksiyasi mahsulot yoki xizmat haqida ma’lumot berish, ularni ommalashtirish, talab va tovar ayirboshlashni oshirishda namoyon bo‘ladi. Reklama iste‘molchilarning asosiy guruhlarining reklama qilayotgan mahsulotga bo‘lgan e’tiborini va qiziqishini oshirib, iste‘mol darajasining o‘shishiga yordam beradi.

Reklama reklama beruvchilar, ommaviy axborot vositalari, tovarlar va xizmatlar iste‘molchilari kabi aloqalarning barcha ishtirokchilariga ma’lum iqtisodiy foyda keltiradi.

Reklama:

- 1) iste'molchi uchun foydali va zarur bo'lgan ma'lumotlarni ishlab chiqarish va savdo sohalari ta'minlaydi;
- 2) brendning hayotiyliigi va tan olinishini qo'llab-quvvatlaydi;
- 3) ommaviy axborot vositalarini mavjud bo'lishining eng muhim manbalaridan biridir;
- 4) ish o'rinlari yaratish orqali bandlik va ish bilan ta'minlashga yordam beradi;
- 5) yangi mahsulotlar va yangi bilimlarni joriy etishni rag'batlantiradi.

Reklama o'z ishtirokchilariga katta daromad keltiradigan biznes bo'lib, unda yuz minglab professional mutaxassislar ishlaydi. Erkin tadbirkorlikning moddiy, ijtimoiy va madaniy imkoniyatlarini ommalashtirish orqali reklama barcha toifadagi ishchilarning mehnat unumdorligining o'sishini rag'batlantiradi, ularning yuqori turmush darajasiga bo'lgan istagini rivojlantiradi. Reklama tijorat ommaviy axborot vositalarining iqtisodiy farovonligi manbai hisoblanadi. U ularga moliyaviy yordam va savdo-iqtisodiy va ijtimoiy hayotning boshqa sohalari bilan o'zaro manfaatli aloqalarni ta'minlaydi. Ya'ni, reklama iqtisodiyotni rivojlantiradi va oxir-oqibat odamlarning turmush darajasiga ta'sir qiladi.

Firma yangi mahsulot yoki xizmatni reklama qilishni boshlasin. Albatta, kelajakdagi sotishdan olinadigan foyda kompaniyaning qimmatli xarajatlarini qoplashdan ko'proq bo'lishi kerak. Avvaliga xarajatlar foydadan oshib ketishi aniq, chunki potensial xaridorlarning faqat kichik bir qismi yangilik haqida xabardor qilinadi. Keyin, sotuvlar sonining ko'payishi bilan, sezilarli daromadga ishonish mumkin va nihoyat, bozor to'yingan va mahsulotni reklama qilish ma'nosiz bo'lib qoladigan vaqt keladi.

Reklama kompaniyasining modeli quyidagi asosiy taxminlarga asoslanadi. dN/dt qiymat-mahsulot haqida bilib olgan va uni sotib olishga tayyor bo'lgan iste'molchilar sonining vaqt o'tishi bilan o'zgarishi tezligi (t -reklama kompaniyasi boshlanganidan beri o'tgan vaqt, $N(t)$ - allaqachon xabardor bo'lgan mijozlar soni) - bu haqda hali bilmagan xaridorlar soniga mutanosib, ya'ni $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ qiymatiga, bu yerda N_0 -umumiy potensial to'lov qobiliyatiga ega xaridorlar soni reklama kompaniyasining intensivligini tavsiflaydi (aslida ma'lum bir vaqtda reklama xarajatlari bilan belgilanadi).

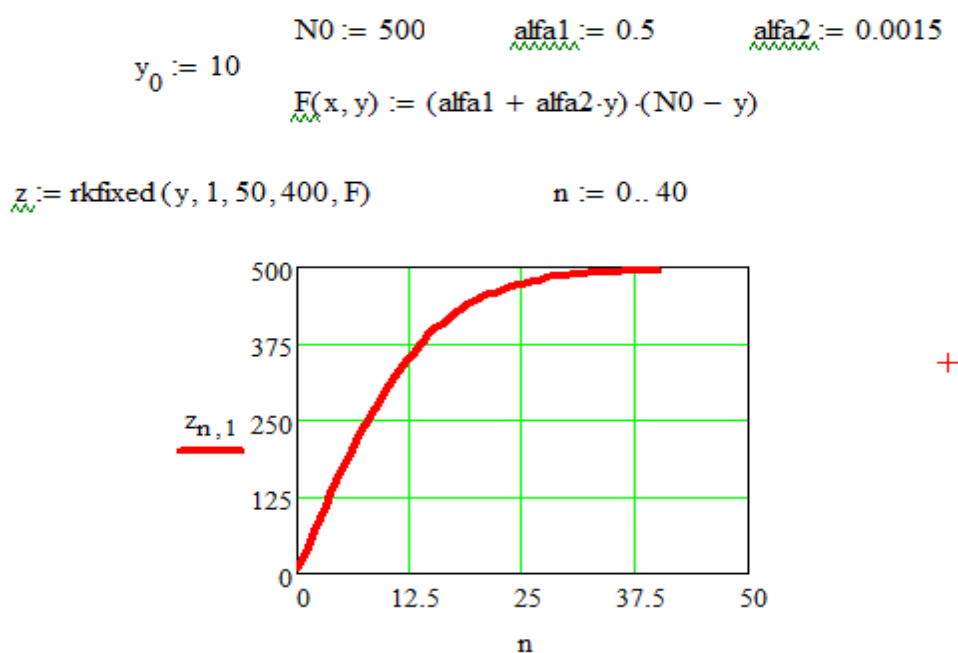
Shuningdek, mahsulot haqida bilib olgan iste'molchilar olingan ma'lumotlarni u yoki bu tarzda xabardor bo'lmaganlar orasida tarqatishadi, go'yo kompaniyaning qo'shimcha reklama "agentlari" sifatida harakat qilishadi. Ularning hissasi $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ kattalikka teng va agentlar soni qancha ko'p bo'lsa shuncha katta bo'ladi. $\alpha_2(t) > 0$ qiymat xaridorlarning bir-biri bilan aloqa darajasini tavsiflaydi (masalan, so'rovnomalar yordamida o'rnatilishi mumkin).

Natijada biz quyidagi tenglamani olamiz

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \quad (1)$$

(7.1) $\alpha_1(t) \gg \alpha_2 N(t)$ dan Maltus modeli turidagi modelga kelimiz, aks holda, ya'ni $\alpha_1(t) \ll \alpha_2 N(t)$ bo'lganda -logistik egri chiziq tenglamasini olamiz.

$\alpha_1(t) \gg \alpha_2 N(t)$ holi uchu mahsulot haqida bilib olgan iste'molchilar sonini hisoblash uchun misol ko'ramiz. Yechish uchun biz Mathcad matematik to'plamining rkfixed funksiyasidan foydalanamiz, natija 1-rasmda keltirilgan.



17.1-rasm. Vaqt o'tishi bilan mahsulot haqida bilib olgan iste'molchilar sonini hisoblash misoli $\alpha_1(t) \gg \alpha_2 N(t)$ holi uchun

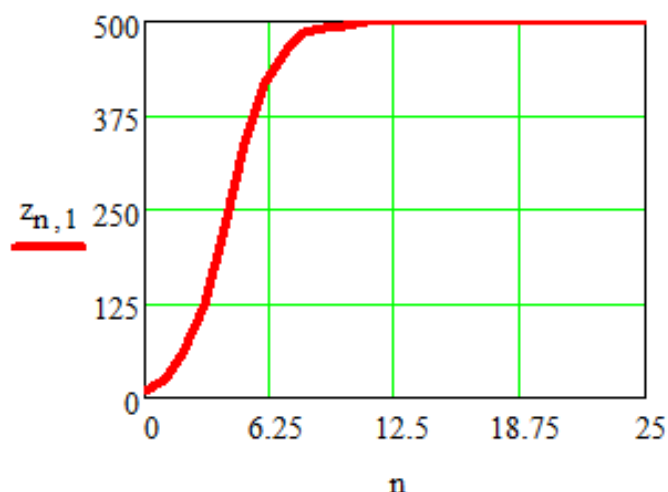
Endi $\alpha_1(t) \ll \alpha_2 N(t)$ holi uchu mahsulot haqida bilib olgan iste'molchilar sonini hisoblash uchun misol ko'ramiz. Bunda ham biz Mathcad matematik to'plamining rkfixed funksiyasidan foydalanamiz, natija 7.2-rasmda keltirilgan.

```

N0 := 500      alfa1 := 0.005      alfa2 := 0.015
y0 := 10
F(x, y) := (alfa1 + alfa2 * y) * (N0 - y)

z := rkfixed(y, 1, 50, 400, F)      n := 0..40

```



17.2-rasm. Vaqt o'tishi bilan mahsulot haqida bilib olgan iste'molchilar sonini hisoblash misoli $\alpha_1(t) \ll \alpha_2 N(t)$

Olingan o'xshashlik juda tushunarli, chunki ushbu model va populyatsiya sonining o'sish modelini tuzishda bir xil "to'yinganlik" g'oyasi ishlatilgan: vaqt o'tishi bilan o'sish tezligi ushbu qiymatning hozirgi qiymati $n(t)$ ning $N_0 - n(t)$ farqiga mutanosibdir.

Ikkala jarayon o'rtasidagi o'xshashlik, agar biron bir vaqtda $\alpha_1 + \alpha_2 N$ qiymat nolga yoki hatto manfiy qiymatga aylansa tugaydi (buning uchun $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$, koeffitsiyentlardan biri yoki ikkalasi ham manfiy bo'lishi kerak). Bunday manfiy ta'sir turli xil reklama kompaniyalarida tez-tez uchraydi va ularning tashkilotchilarini reklama tabiatini o'zgartirishga yoki keyingi targ'ibotdan butunlay voz kechishga undashi kerak. Tovarlarning xaridorlarga ma'lum bo'lishini oshirish choralari, $\alpha_1(t), \alpha_2(t), N(t)$ qiymatlarning qiymatlariga qarab, to'g'ridan-to'g'ri (α_1 parametr) va bilvosita (parametr) reklama natijalarini yaxshilashga yo'naltirilishi mumkin.

(1) - model logistika tenglamasiga xos bo'lgan aniq kamchiliklardan xoli emas. Haqiqatan ham, u vaqtning oxirgi qiymatlarida nolga aylanadigan yechimlarga ega emas. Reklamaga kelsak, bu shuni anglatadiki, ba'zi xaridorlar kompaniya

boshlanishidan oldin ham yangi mahsulot haqida bilishadi. Agar (1) modelni nuqta yaqinida ko'rib chiqsak $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ - kompaniyaning boshlanish momenti), (7.1) $N \ll N_0, \alpha_2(t)N \leq \alpha_1(t)$ tenglama quyidagi shaklni oladi

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

va undan quyidagi yechimni olamiz

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (2)$$

(2) $t=0$ da tabiiy boshlang'ich shartni qondiradi.

(2) dan kompaniyaning boshida reklama xarajatlari va foyda o'rtasidagi nisbatni olish nisbatan oson. ρ bilan reklama xarajatlarisiz qanday bo'lishidan qat'iy nazar, bitta sotishdan tushgan foyda miqdorini belgilaylik. Oddiylik uchun har bir xaridor faqat bitta mahsulot sotib oladi deb hisoblaymiz. $\alpha_1(t)$ koeffitsient -vaqt birligiga teng tarqalgan reklama harakatlarining soni (masalan, bir xil plakatlarni joylashtirish). S orqali oddiy reklama aktining narxini belgilaylik. Unda umumiy foyda quyidagicha bo'ladi:

$$P = \rho N(t) = \rho N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt, \quad (3)$$

va bunda qilingan xarajatlar

$$S = s \int_0^t \alpha_1(t) dt.$$

$\rho N_0 > s$ bo'lganda foyda reklama xarajatlaridan oshadi, va agar reklama arzon bo'lsa va bozor yetarlicha sig'imli bo'lsa, unda foydaga kompaniyaning birinchi daqiqalaridan boshlab erishiladi (aslida reklama uchun to'lov, reklama harakati va keyingi sotib olish o'rtasida kechikish deb ataladigan narsa mavjud). Agar reklama juda samarali bo'lmasa yoki qimmat bo'lsa, kompaniya birinchi bosqichlarda zarar ko'ra boshlaydi. Biroq, bu holat, umuman olganda, reklamani to'xtatish uchun asos bo'la olmaydi. Darhaqiqat, (3) va uning yordami bilan olingan $\rho N_0 > s$ shart $N(t)$ ning faqat kichik qiymatlarida, p va S funksiyalari vaqt o'tishi bilan bir xil qonunlarga muvofiq o'sganda to'g'ri bo'ladi.

$N(t)$ ning oshishi bilan (1) dagi hadlar sezilarli bo'ladi, xususan, bilvosita reklama ta'siri kuchayadi. Shuning uchun $N(t)$ funksiyasi (3) formulaga qaraganda "tezroq" vaqt funksiyasiga aylanishi mumkin. ushbu chiziqli bo'lmagan effekt ta'sir xarajatlarning o'zgarmas tezlikda

o'sishi bilan $N(t)$ qiymatining o'zgarishida kompaniyaning dastlabki bosqichidagi moliyaviy muvaffaqiyatsizlikni qoplashga imkon beradi.

Ushbu jarayonni (1) tenglamaning doimiy α_1, α_2 koeffitsiyentli alohida holatida ko'raylik. Quyidagicha almashtirish bajaramiz

$$\bar{N} = \alpha_1/\alpha_2 + N$$

Bu almashtirish (1)ni quyidagi logistik tenglamaga olib keladi

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}(\bar{N}_0 - \bar{N}), \quad \bar{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0, \quad (4)$$

Ui integrallab quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_0 [1 + (\bar{N}_0 \alpha_2 / \alpha_1 - 1) \exp(-\bar{N}_0 \alpha_2 t)]^{-1}. \quad (5)$$

Bunda $\bar{N}(0) = \alpha_1/\alpha_2$, shuning uchun $N(0) = 0$ boshlang'ich shart bajariladi. (4) dan ko'rinib turibdiki, $\bar{N}(t)$ funksiyasining hosilasi va shuningdek $N(t)$ funksiyasi $t > 0$ da o'zining boshlang'ich qiymatidan katta bo'lishi mumkin ($\bar{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ yoki $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$ sharti bilan). Hosilaning maksimumi $\bar{N} = \bar{N}_0/2$ $N = \alpha_1/\alpha_2 + N_0/2$ bo'lganda erishiladi:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt} \right)_m = \left(\frac{dN}{dt} \right)_m = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Bu davrda joriy, ya'ni vaqt birligida olingan foyda uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_m = p \frac{dN}{dt} = p \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}$$

P_m -dan dastlabki joriy foyda $P_0 = p(aN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ni olib tashlab (2-ga qarang), quyidagini hosil qilamiz:

$$P_m - P_0 = p \frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2} N_0)^2}{4},$$

ya'ni boshlang'ich va maksimal joriy foyda o'rtasidagi farq juda katta bo'lishi mumkin. Kompaniyaning umumiy iqtisodiy samarasi (uning zaruriy sharti, shubhasiz, $P_m = p(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2} N_0)^2/4 > \alpha_1 s$) tengsizlikning bajarilishi) uning butun jarayondagi harakati bilan belgilanadi, uning xususiyatlari (4), (5) dan kvadratura yordamida hisoblanadi.

(4) dan ko'rinib turibdiki, bir muncha vaqtdan boshlab reklamani davom ettirish foydasiz bo'lib qoladi. Darhaqiqat, $\bar{N}(t)$ $\bar{N}_0$ ga yaqin bo'lsa, (4) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}_0 (\bar{N}_0 - \bar{N}) \quad (6)$$

Uning yechimi $t \rightarrow \infty$ da qandaydir $\bar{N}_0$ chegara qiymatiga sekin eksponensial qonunga muvofiq intiladi ($N(t)$ funksiyasi esa N_0 ga intiladi). Vaqt birligida juda oz miqdordagi yangi xaridorlar paydo bo'ladi va har qanday sharoitda keladigan foyda doimiy xarajatlarni qoplay olmaydi.

Shunga o'xshash xususiyatlar (1) tenglama va uning turli xil umumlashmalari uchun hisoblab chiqiladi, ular texnologik va boshqa yangiliklarni joriy etishni tavsiflash uchun ham keng qo'llaniladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1.Хайдаров А.Т., Жумаев Ж., Шафиев Т.Р. Основы математического моделирования. Учебник. Бухара: “Sadriddin Salim Buxoriy”, Durdona, 2022. -216 с.

2. I.U.Shadmanov., Sh.N.Nasirova. Sonli usullar. O'quv qo'llanma. Buxoro: “Sadriddin Salim Buxoriy”, 2023.-132 b.

3. J.Jumayev., T.R. Shafiyev, I.U. Shadmonov. Matematik modellashtirish. Darslik. “Buxoro:Sadriddin Salim Buxoriy”, 2023. - 219 b.

4. F.S.Narzullayeva. Matematik modellashtirish. Darslik. Buxoro: "Sadriddin Salim Buxoriy", 2024. -165 b.

5. N.S.Sayidova. Gazlangan yopiq simmetrik sohadagi harakatini matematik modellashtirish, Monografiya. “Fan va ta'lim”, 2022. -116 b.

6. Н.К.Равшанов., И.У.Шадманов. Математическое моделирование процессов тепло-и влагопереноса в пористых средах, Монография. Бухоро: “Sadriddin Salim Buxoriy”, 2023. -112 с.

**G'.G'.QURBONOV
Z.Sh.OCHILOVA**

MATEMATIK MODELASHTIRISH

O'quv qo'llanma

<i>Muharrir:</i>	<i>A. Qalandarov</i>
<i>Texnik muharrir:</i>	<i>G. Samiyeva</i>
<i>Musahhih:</i>	<i>Sh. Qahhorov</i>
<i>Sahifalovchi:</i>	<i>M. Bafoyeva</i>

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 28.10.2025. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog'ozi. Bosma tobog'i 10,0. Adadi 100. Buyurtma №703.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45