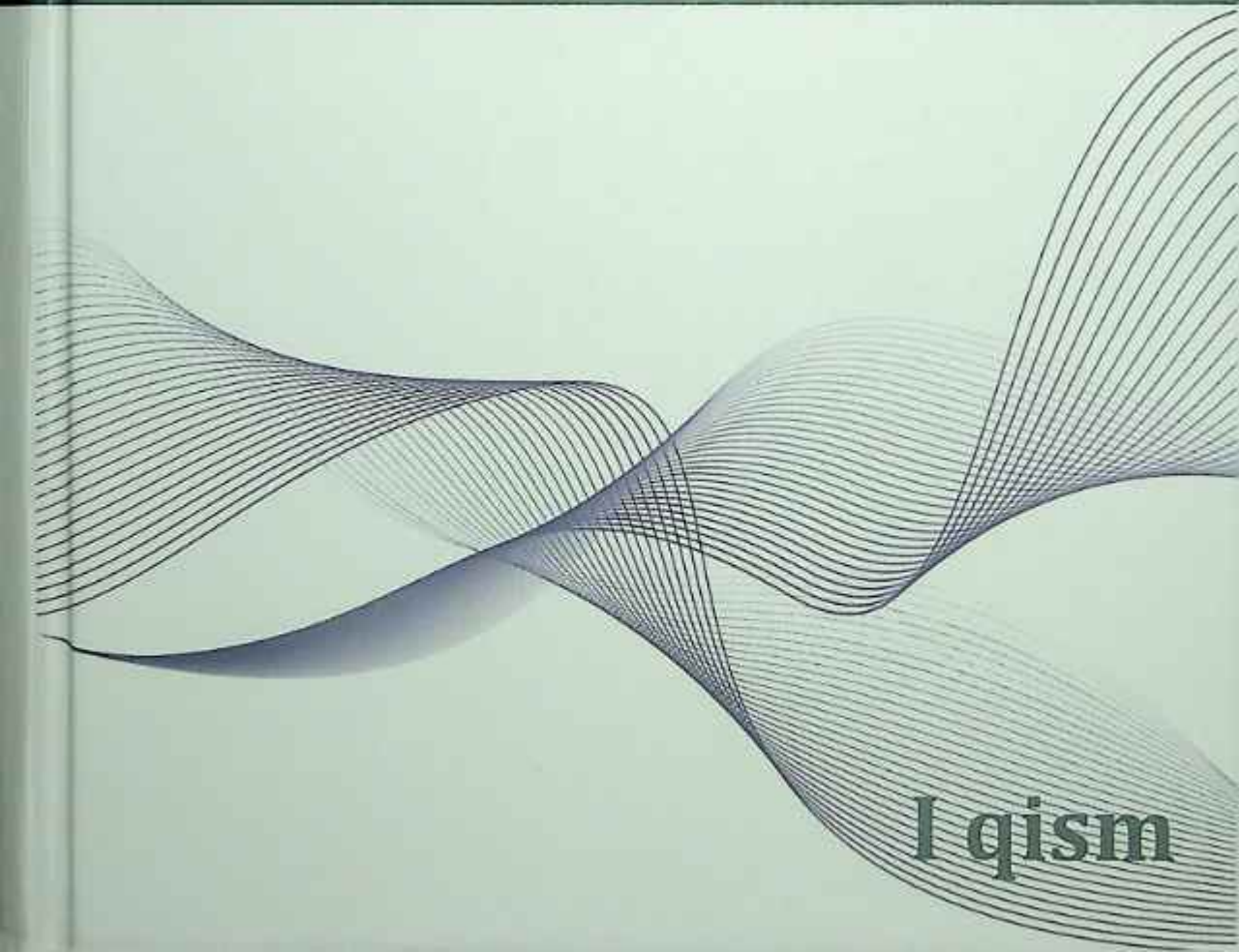


Hisoblash metodlari

M. Isroilov



I qism



M.I. ISROILOV

HISOBLASH METODLARI

I qism

(Qayta ishlangan ikkinchi nashri)

O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim,
fan va innovatsiyalar vazirligi oliy o'quv yurtlari
talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT - 2025

UO'K 519.6(075.8)
KBK 22.19ya73
I-82

Isroilov, M.I. Hisoblash metodlari I qism [Matn] / M.I. Isroilov. – Tashkent: O'qituvchi nashriyoti, 2025. - 520 b.

Taqrizchilar:

M.M. Aripov – Fizika-matematika fanlari doktori, professor, O'zbekiston Respublikasida xizmat ko'rsatgan ta'lim xodimi.

A.R. Hayotov – O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Hisoblash matematikasi laboratoriyasi mudiri, fizika-matematika fanlari doktori, professor.

Mundarija

M.Isroilovning "Hisoblash metodlari" nomli kitobiga so'zboshi	9
So'zboshi	11
Kirish	13
0.1 Hisoblash matematikasining qisqacha tarixi, predmeti va metodi	13
0.1.1 Hisoblash matematikasining predmeti	16
0.1.2 Hisoblash matematikasining metodi	17
0.2 Hozirgi zamon hisoblash mashinalari va sonli metodlar nazariyasi, ularning o'zaro aloqasi va ta'siri	18
0.2.1 Analogli yoki modellovchi hisoblash mashinalari . . .	18
0.2.2 Raqamli hisoblash mashinalari	19
1 MASALALARNI SONLI YECHISHDAGI NATIJANING XATOSI	24
1.1 Xatolar manbayi	24
1.2 Hisoblash xatosi	27
1.3 Yo'qotilmas xato	28
1.3.1 Absolyut va nisbiy xatolar	28
1.3.2 Funksiyaning yo'qotilmas xatosi	31
1.3.3 Arifmetik amallar va logarifmlashning xatosi	32
1.3.4 Ishonchli raqamlar sonini hisoblash qoidasi	35
Mashqlar	37
2 TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH	39
2.1 Ildizlarni ajratish	39
2.1.1 Umumiy mulohazalar	39
2.1.2 Algebraik tenglamalarning haqiqiy ildizlarini ajratish	43

2.2	Ko'phad va uning hosilalari qiymatlarini hisoblash hamda ko'phadni kvadratik uchhadga bo'lish	49
2.2.1	Gorner sxemasi	50
2.2.2	Ko'phad hosilalarining qiymatini hisoblash	51
2.2.3	Ko'phadni kvadratik uchhadga bo'lgandagi bo'linma va qoldiqni topish	53
2.3	Tenglamalarni yechishda iteratsiya metodi	54
2.3.1	Oddiy iteratsiya metodi	54
2.3.2	Vegsteyn metodi	62
2.3.3	Hisoblash xatosining iteratsion jarayonning yaqinlashishiga ta'siri	65
2.4	Qisqartirib aks ettirish prinsipi. Iteratsiya metodining umumiy nazariyasi haqida tushuncha	68
2.4.1	Metrik fazo haqida tushuncha	68
2.4.2	Qisqartirib aks ettirish prinsipi	72
2.4.3	Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini iteratsiya metodi bilan yechish	74
2.5	Tenglamalarni yechishning yuqori tartibli iteratsion metodlari	80
2.5.1	Umumiy mulohazalar	80
2.5.2	Chebyshev metodi	81
2.5.3	Eytken metodi	84
2.6	Nyuton metodi	86
2.6.1	Bitta sonli tenglama bo'lgan hol	86
2.6.2	Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi teoremlar	88
2.6.3	Karrali ildizlar uchun Nyuton metodi	99
2.6.4	Modifikatsiyalangan Nyuton metodi	100
2.6.5	Vatarlar metodi	102
2.6.6	Kompleks ildiz	105
2.6.7	Tenglamalar sistemasi uchun Nyuton metodi	107
	Mashqlar	111

3	CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH	113
3.1	Dastlabki ma'lumotlar	113
3.2	Noma'lumlarni yo'qotish	115
3.2.1	Gauss metodi	115
3.2.2	Bosh elementlar metodi	122
3.2.3	Optimal yo'qotish metodi	123
3.2.4	Determinantni hisoblash	127

3.2.5	Matritsalarining teskarisini topish	128
3.3	Kvadrat ildizlar metodi	131
3.4	Aylantirishlar metodi	137
3.5	Ortogonalashtirish metodi	142
3.6	Akslantirishlar metodi	147
3.7	Chiziqli algebradan ayrim ma'lumotlar	154
3.7.1	Vektor va matritsalarining normalari	155
3.7.2	Vektorlar va matritsalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari	162
3.7.3	Matritsali geometrik progressiyaning yaqinlashishi	165
3.8	Iteratsion metodlar	170
3.8.1	Iteratsion jarayonni qurish prinsiplari	171
3.8.2	Oddiy iteratsiya metodi	172
3.8.3	Zeydel metodi	180
3.9	Gradiyentlar (eng tez tushish) metodi	187
3.10	Qo'shma gradiyentlar metodi	194
3.11	Minimal farqlar metodi	200
	Mashqlar	202

4 MATRITSALARNING XOS SON VA XOS VEKTORLARI 205

4.1	Umumiy mulohazalar	205
4.2	Krilov metodi	208
4.2.1	Matritsalarining minimal ko'phadlari	209
4.2.2	Minimal ko'phadni topish	210
4.2.3	Matritsaning xos vektorlarini topish	213
4.3	Lansosh metodi	216
4.3.1	Xos ko'phadni topish	216
4.3.2	Xos vektorlarni topish	222
4.4	Danilevskiy metodi	224
4.4.1	Danilevskiy metodidagi noregulyar hol	228
4.4.2	Danilevskiy metodi bilan xos vektorni hisoblash	230
4.5	Lever'e metodi	234
4.6	Faddeyev metodi	238
4.7	Noaniq koeffitsiyentlar metodi	240
4.8	Hoshiyalash metodi	243
4.9	Xos sonlarning qisman muammosini yechishning iteratsion metodlari	246
4.9.1	Eng katta xos son va unga mos keladigan xos vektorni topishda darajali metod	247

4.9.2	Ikkinchi xos son va unga mos keladigan xos vektorni topish	255
4.10	Musbat aniqlangan simmetrik matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini aniqlash	256
4.11	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechishda iteratsiya metodining yaqinlashishini tezlashtirish	261
4.12	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi taqribiy yechimi-ning xatosini baholash va matritsalarining shartlanganligi	265
4.12.1	Matritsa va sistemaning shartlanganligi tushunchasi	266
4.12.2	Xatoliklar vektori $\bar{\epsilon}$ ni baholash	269
	Mashqlar	271
5	FUNKSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH	273
5.1	Masalaning qo'yilishi	273
5.2	Interpolyatsion ko'phadlarning mavjudligi va yagonaligi. Lagranj interpolyatsion formulasi	274
5.3	Eytken sxemasi	278
5.4	Lagranj interpolyatsion formulasining qoldiq hadini baholash	280
5.5	Interpolyatsion formulalar qoldiq hadlarini minimal- lashtirish va Chebishev ko'phadlari	281
5.6	Bo'lingan ayirmalar va ularning xossalari	284
5.7	Nyutonning bo'lingan ayirmali interpolyatsion formulasi	286
5.8	Chekli ayirmalar va ularning xossalari	289
5.9	Tugunlar teng uzoqlikda joylashgan hol uchun Nyuton in- terpolyatsion formulalari	297
5.10	Gauss, Stirling, Bessel va Everett interpolyatsion formulalar	300
5.11	Teng qadamli interpolyatsion formulalarni qo'llash uchun tavsiyalar	308
5.12	Interpolyatsion jarayonning yaqinlashishi	310
5.13	Karrali tugunlar bo'yicha interpolyatsiyalash. Ermit formu- lasi	313
5.14	Jadval tuzishda interpolyatsiyani qo'llash	320
5.15	Teskari interpolyatsiya. Tenglamalarni yechish	324
5.16	Sonli differensiallash	329
5.16.1	Umumiy mulohazalar	329
5.16.2	Lagranj interpolyatsion ko'phadi yordamida sonli differensiallash	332
5.16.3	Nyuton formulasi yordamida sonli differensiallash	334
5.16.4	Aniqmas koeffitsiyentlar metodi	336
	Mashqlar	337

6	FUNKSIYALARNING YAQINLASHISHI	340
6.1	Masalaning qo'yilishi	340
6.2	Oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish	344
6.3	Ortogonal ko'phadlar sistemasi	349
6.4	Ortogonal ko'phadlarning asosiy xossalari	353
6.4.1	Ortogonal ko'phadlar uchun rekurrent munosabatlar	353
6.4.2	Kristofel-Darbu ayniyati	354
6.4.3	Ortogonal ko'phadlar nollarining xossalari	355
6.5	Eng ko'p qo'llaniladigan orthogonal ko'phadlar sistemalari	356
6.5.1	Yakobi ko'phadlari	356
6.5.2	Lejandr ko'phadlari	357
6.5.3	Chebisevning birinchi tur ko'phadlari	359
6.5.4	Chebisevning ikkinchi tur ko'phadlari	361
6.5.5	Lagerr ko'phadlari	364
6.5.6	Ermit ko'phadlari	365
6.6	Trigonometrik ko'phadlar bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish	366
6.7	Jadval bilan berilgan funksiyalarni o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish	368
6.7.1	Darajali ko'phad bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish	368
6.7.2	Trigonometrik ko'phadlar yordamida o'rta kvadratik yaqinlashish	373
6.8	Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko'phadlar	376
6.9	Splayn-funksiyalar bilan yaqinlashish	386
6.9.1	Splayn-funksiyaning ta'rifi	386
6.9.2	Interpolyatsion kubik splaynlarni qurish	387
	Mashqlar	391
7	INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH	394
7.1	Aniq integrallarni taqribiy hisoblash masalasi	394
7.2	Interpolyatsion kvadratur formulalar	398
7.2.1	Eng sodda kvadratur formulalar: to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari	398
7.2.2	To'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalarining qoldiq hadlari	401
7.2.3	Interpolyatsion kvadratur formulalar	403
7.2.4	Nyuton - Kotes kvadratur formulalari	408
7.2.5	Umumlashgan kvadratur formulalar	410

7.3	Algebraik aniqlik darajasi eng yuqori bo'lgan formulalar . . .	414
7.3.1	Gauss tipidagi kvadratur formulalar	414
7.3.2	Gauss tipidagi kvadratur formula koeffitsiyentlari- ning xossasi	416
7.3.3	Gauss tipidagi kvadratur formulalarning qoldiq hadi	417
7.3.4	Gauss tipidagi kvadratur formulalarning yaqinlashishi	418
7.4	Davriy funksiyalarni integrallash	420
7.5	Gauss tipidagi kvadratur formulaning xususiy hollari	423
7.5.1	Gauss kvadratur formulasi	423
7.5.2	Meler kvadratur formulasi	430
7.6	Chebisev kvadratur formulasi	433
7.7	Optimal kvadratur formulalar	437
7.8	Kvadratur formulalarning aniqligini orttirish	446
7.8.1	Bernulli sonlari va ko'phadlari	447
7.8.2	Ixtiyoriy funksiyalarni Bernulli ko'phadlari orqali tasvirlash	454
7.8.3	Eyler-Makloren formulasi	457
7.9	Kvadratur formulalarni qo'llash to'g'risida ayrim muloha- zalar. Runge qoidasi	462
7.10	Integrallanuvchi funksiyaning maxsusligini susaytirish . . .	468
7.10.1	Vazn funksiyasini ajratish	469
7.10.2	Additiv usul	470
7.10.3	Bo'laklab integrallash	472
7.11	Chekli-ayirmali tenglamalar	473
7.12	Aniqmas integrallarni hisoblash	483
7.12.1	Masalaning qo'yilishi	483
7.12.2	Hisoblash xatosi va yaqinlashish	485
7.12.3	Jadval ko'rinishida berilgan funksiyalarni integrallash	493
7.13	Kubatur formulalar	496
7.13.1	Kvadratur formulalarni ketma-ket qo'llash	496
7.13.2	Interpolyatsion kubatur formulalar	502
7.14	Statistik sinov metodi (Monte-Karlo metodi)	503
7.15	Singulyar integrallarni taqribiy hisoblash	507
7.15.1	Singulyar integral tushunchasi	507
7.15.2	Gilbert yadroli singulyar integrallarni taqribiy hisoblash	510
	Mashqlar	513

M.ISROILOVNING "HISOBLASH METODLARI" NOMLI KITOBIGA SO'ZBOSHI

Hurmatli kitobxon,

Siz vaqt sinovidan o'tgan va oliy ta'lim muassasalari uchun hisoblash metodlari bo'yicha klassik darslikka aylangan kitobning navbatdagi qayta nashri bilan tanishib turibsiz.

Hozirgi vaqtda fizika, texnika, tibbiyot, iqtisodiyot va xalq xo'jaligining matematik fizika tenglamalari bilan tavsiflangan ko'plab masalalarini sonli yechishda hisoblash matematikasining zamonaviy metodlari, ilg'or dasturiy ta'minot va yuqori samaradorlikka ega hisoblash texnikalaridan foydalanilmoqda. Bu jarayonda zamonaviy hisoblash metodlarini chuqur egallash muhim rol o'ynaydi. Malakali mutaxassislarni tarbiyalab yetkazishda ustozlarning o'rni beqiyosdir.

Bu borada respublikamizda sonlar nazariyasi va hisoblash matematikasining rivojiga va bu sohalarida malakali kadrlar yetkazishga katta hissa qo'shgan atoqli olimlardan biri professor Ma'ruf Isroilov bo'lgan. Uning ilmiy ishlari keng ko'lamda ma'lumdir hamda chet el mutaxassislari tomonidan tan olingan. U O'zbekistonda sonlar nazariyasi va hisoblash matematikasi maktablarining tashkilotchisi va rahbarlaridan biri bo'lgan.

M.Isroilovning ilmiy izlanishlari keng qamrovlidir. Jumladan, Gilbert fazolarida arifmetik xarakterga ega bo'lgan umumiy ortogonal va biortogonal tizimlar qurish, additiv masalalar, Diofant tenglamalarining har xil sinflari uchun yechimlar sonini topish, trigonometrik yig'indilarni baholash, turli funksional fazolarda optimal kvadratur va kubatur formulalar qurish, regulyar va singulyar yadrolik integral tenglamalarni taqribiy yechish sohalaridagi chuqur izlanishlari sonlar nazariyasi va hisoblash matematikasiga muhim hissa qo'shdi.

Respublikamizning oliy o'quv yurtlarida va ilmiy tadqiqot institutlarida ishlagan chog'ida M.Isroilov o'nlab shogirdlar tayyorlagan va ular bugungi kunda respublika iqtisodiyotining turli tarmoq va sohalarida, oliy o'quv yurtlarida, shuningdek xorijiy mamlakatlarda muvaffaqiyatli faoliyat yuritmoqdalar.

Professor M.Isroilov ko'plab ilmiy va ilmiy-ommabop ishlar bilan birga sonlar nazariyasi va hisoblash matematikasi bo'yicha ham darsliklar muallifidir.

M.Isroilovning "Hisoblash metodlari" nomli ikki qismli ushbu kitobi hisoblash matematikasining metodlariga bag'ishlangan bo'lib, muallif tavalludining 90 yilligi arafasida lotin grafikasida qayta nashr qilinmoqda. Bu darslik muallifning ko'p yillar mobaynida Toshkent davlat universiteti (hozirgi O'zbekiston Milliy universiteti) va Samarqand davlat universitetining matematika, amaliy matematika va mexanika mutaxassisliklariga "Hisoblash metodlari" kursi bo'yicha o'qigan ma'ruzalar asosida yozilgan. Muallif sonli metodlarning oliy ta'lim muassasalariga mo'ljallangan kursini katta mahorat va yuksak matematika madaniyati bilan o'quvchilarga taqdim etadi.

Ushbu kitobning birinchi qismi kirish va yettita bobdan iborat. Uning birinchi bobida hisoblash xatoligini baholash masalasi qaralgan. Ikkinchi bob esa algebraik va transcendent tenglamalar va ularni sonli yechishga bag'ishlangan. Uchinchi bobda chiziqli algebraik sistemalarni yechishning aniq va iteratsion metodlari bayon qilingan. Matritsalarining xos son va xos vektorlarini sonli hisoblash masalalari to'rtinchi bobda yoritilgan. Funksiyalarning interpolatsiyasi va ularni yaqinlashtirish hamda ularning turli masalalarni yechishga tatbiqlari beshinchi va oltinchi boblarda keltirilgan. Yettinchi bobda integrallarni taqribiy hisoblash usullari keng berilgan.

Darslikning ikkinchi qismi beshta bobdan iborat. Unda oddiy differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasini sonli yechish usullari, oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning qo'yilishi va ularni taqribiy yechish usullari, xususiyl hosilali differensial tenglamalarni taqribiy yechish metodlari, differensial tenglamalarni yechishning variatsion usullari berilgan. Ikkinchi qismning oxirgi bobida integral tenglamalar nazariyasi va ularni taqribiy yechish masalalari keng yoritib berilgan.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, kitobda keltirilgan hisoblash metodlarini o'quvchilar yaxshi o'zlashtirishi uchun undagi mavzular mos misollar bilan to'ldirilgan va har bir bobning oxirida shu mavzuga doir mashqlar keltirilgan. Ushbu kitob oliy o'quv yurtlarining "matematika", "amaliy matematika", "mexanika", "statistika" hamda "axborot texnologiyalari" yo'nalishlarining bakalavr va magistrilariga mo'ljallangan, bu kitobdan tayanish doktorant va ilmiy izlanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Kitobning ushbu ikkinchi nashri O'zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Hisoblash matematikasi laboratoriyasi ilmiy xodimlari tomonidan tayyorlandi.

O'zbekiston Qahramoni
Akademik Shavkat Ayupov

SO'ZBOSHI

"Hisoblash metodlari" kursiga bag'ishlangan kitoblar xorijiy tillarda ko'plab chop etilgan bo'lishiga qaramay, bunday kitoblar o'zbek tilida shu damgacha yaratilmagan. Shuning uchun hozirgi zamon fan va texnikasi-ning taraqqiyotini aks ettiruvchi o'zbek tilidagi hisoblash metodlari kursiga doir darsliklarning yaratilishi muhimdir. Chunki respublikamiz oliy o'quv yurtlarida hozirgi zamon talablariga to'la javob beradigan yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash, ayniqsa tayyorlanadigan mutaxassislarning hisoblash matematikasidan oladigan bilim darajasi tobora yuqori va puxta bo'lishi alohida ahamiyatga egadir. Bu esa talabalarimizni ona tilida yozilgan darsliklar bilan ta'minlashga bevosita bog'liqdir.

Mazkur kitob muallifning uzoq yillar davomida O'zbekiston Milliy universitetining matematika, amaliy matematika va mexanika, Samarqand davlat universitetining informatika va informatsion texnologiya fakultetlarida hamda Milliy universitet qoshidagi malaka oshirish fakultetida "Hisoblash metodlari" kursi bo'yicha o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan bo'lib, universitetlarning 5A460100-5A460107 va 5A5219O1-5A5219OZ matematika hamda informatika va axborotlashtirish texnologiyasi bo'yicha magistratura mutaxassisliklari uchun "Hisoblash metodlari" kursi dasturining birinchi qismiga mos keladi va bu dasturlarda o'qitilishi mo'ljallangan barcha materiallarni o'z ichiga oladi.

Kitobni yozishda chet el olimlari tomonidan yaratilgan, shu jumladan N.S. Baxvalov, I.S. Beryozin va N.P. Jidkov, V.I. Krilov, V.V. Bobkov va P.N. Monastirniy, G.I. Marchuk, I.P. Misovskix, G.A. Mixaylov, A.A. Samarskiy, A.N. Tixonov, D.K. Faddeyev va V.N. Faddeyeva, J.X. Uilkinson darsliklari va monografiyalaridan foydalanildi. Darslikda birinchidan, oldingi nashrda uchragan barcha matbaa nuqsonlari tuzatildi. Ikkinchidan, universitetlarning amaldagi dasturiga moslashtir-

gan holda ayrim joylari uslubiy tomondan soddaroq qilib qayta yozildi, ayrim joylariga esa qo'shimcha material kiritildi. Bulardan ayrimlarini keltiramiz: o'rta osiyolik olimlarning hisoblash matematikasiga qo'shgan hissalar ko'rsatildi; 2-bob, 3-paragrafda Vegsteyn metodi, 3-bob, 5- va 6-paragraflar hamda 5-bob, 13-paragrafda Ermit interpolatsion ko'phadi qaytadan soddaroq qilib yozildi; 2-bob, 6-paragrafga kompleks ildizlar uchun Nyuton metodi to'g'risida yangi band kiritildi.

O'zbek tilida bungacha hisoblash metodlaridan darslik hamda misol va masalalarga doir qo'llanmalar bo'lmaganligini hisobga olib, asosiy g'oyalar yanada tushunarli bo'lishi uchun kitobda bayon etilgan barcha metodlarga sodda bo'lsa-da, misollar keltirildi.

Kitobning taqrizchilari: fizika-matematika fanlar doktori, professor N. Muxitdinov va fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent M.M. Suyarshoyev kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib chiqib, fikr-mulohazalarini bildirishdi. Shuningdek, fizika-matematika fanlari nomzodi Z.K. Eshquvvatov va O'zFA V.I. Romanovskiy nomidagi matematika institutining ilmiy xodimi S.A. Baxromov qo'lyozmani nashrga tayyorlashga va kitob korrekturasini ko'rib chiqishda o'z hissalarini qo'shishdi. Fursatdan foydalanib, N. Muxitdinov, M.M. Suyarshoyev, Z.K. Eshquvvatov, S.A. Baxromov va "O'zbekiston" nashriyotining muharriri A. Hakimjonovalarga o'z minnatdorchiligimni bildiraman. "Hisoblash metodlari" darsligi bu sohada o'zbek tilida ilk tajribadir, tabiiyki, u kamchiliklardan xoli bo'lmasa kerak. Shuning uchun ham kitob haqidagi fikr va mulohazalarni mamnuniyat bilan qabul qilaman.

Muallif

KIRISH

0.1-§. Hisoblash matematikasining qisqacha tarixi, predmeti va metodi

Matematika turmush masalalarini yechishga bo'lgan ehtiyoj (yuzalar va hajmlarni o'lchash, kema harakatini boshqarish, yulduzlar harakatini kuza-tish va boshqalar) tufayli vujudga kelganligi uchun ham u sonli matema-tika, ya'ni hisoblash matematikasi bo'lib, uning maqsadi esa masala yechi-mini son shaklida topishdan iborat edi. Bu fikrga ishonch hosil qilish uchun matematika tarixiga nazar tashlash kifoya.

Bobil olimlarining asosiy faoliyati matematik jadvallar tuzishdan ibo-rat bo'lgan. Shu jadvallardan bizgacha yetib kelganlaridan biri miloddan 2000 yil avval tuzilgan bo'lib, unda 1 dan 60 gacha bo'lgan sonlarning kvadratlari keltirilgan. Miloddan avvalgi 747-yilda tuzilgan boshqa bir jadvalda Oy va Quyoshning tutilish vaqtlari keltirilgan. Qadimiy misrlik-lar ham faol hisobchilar bo'lganlar. Ular murakkab kasrlarni (aliquvotta yoki misr kasrlari deb ataluvchi) surati birga teng bo'lgan oddiy kasrlar yig'indisi (masalan: $\frac{3}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$) shaklida ifodalovchi jadvallar tuzish-gan va chiziqli bo'lmagan algebraik tenglamalarni yechish uchun vatar-lar usulini yaratishgan. Yunon matematiklariga kelsak, miloddan avval 220-yillar atrofida Arximed π soni uchun $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ tengsizlikni ko'rsatdi. Geronning miloddan avvalgi 100-yillar atrofida ushbu $\sqrt{a} \approx \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ iteratsion metodidan foydalanganligi ma'lum. Diofant III asrda aniqmas tenglamalarni yechishdan tashqari kvadrat tenglamalarni sonli yechish usulini yaratgan.

IX-X asrlarda O'rta Osiyoda matematika, astronomiya va boshqa tabiiy fanlar rivojlana boshladi. Bu yerda al-Xorazmiydek buyuk alloma dunyoga keldi.

Hisoblash matematikasining mutaxassisi, ingliz matematigi E.But o'zini "Sonli metodlar"(q. Andrew D. Booth, D. Sc. Numerical Method,

second edition, London, Butterworths Scientific publication, 1957) kitobining kirish qismida "Hisoblash metodlarini sistemaga solganligi uchun birinchi arab matematigi Muhammad ibn-Muso al-Xorazmiydan minnatdormiz", - deb yozgan edi. Al-Xorazmiy ijodiga biroz to'xtalib o'tamiz. Abu Abdullo Muhammad ibn-Muso al-Xorazmiy (780-yilda Xivada tug'ilib, 850-yilda Bog'dodda olamdan o'tgan) yoshligidanoq ilm-fanga qiziqqan. O'sha davrda katta ilmiy va madaniy markaz hisoblangan Xalifatning poytaxti - Bog'dodga taklif qilingan. U Sharqning birinchi akademiyasi - Bog'doddagi "Bayt-ul hikma" ("Donishmandlar uyi")da faol ish olib borgan. U "Donishmandlar uyi"ning kutubxonasini boshqargan. Bu yerda uning rahbarligida arablar va boshqa xalqlar bilan bir qatorda Ahmad Farg'oniy va Ahmad ibn Marvaziy kabi O'rta osiyolik olimlar tadqiqot olib borishgan. Al-Xorazmiy O'rta Osiyoning islomdan oldingi o'ziga xos ilmiy merosiga, qo'shni Hindiston va Yaqin Sharqning ellinistik davlatlaridagi ilmiy g'oyalarga tayanib ishladi.

Al-Xorazmiy "Hind sanog'i to'g'risida"gi arifmetik risolasida o'nlik sanoq sistemasini va bu sistemada to'rtta arifmetik amallarni bajarish qoidalarini birinchi bo'lib bayon qilgan. Bu risola XII asrda lotin tiliga tarjima qilingan va u Osiyoda ham, Yevropada ham o'nlik sanoq sistemasini qo'llanilishiga va tarqalishiga poydevor bo'lgan.

Yevropada bunday qoidalar al-Xorazmiy nomi bilan atalib, "Algorizmi" deyilgan. Al-Xorazmiy risolasining birinchi so'zlari lotin tiliga "Dixit Algorizmi" (Dediki al-Xorazmiy) deb tarjima qilingan. Bunda al-Xorazmiy buzilib, Algorizmi deb yozilgan. Keyinchalik u Algorithmi va Algorithmus ko'rinishlarini olib, oxirida "algoritm" so'ziga aylangan.

Hozirgi vaqtda **algoritm** *deb ma'lum bir tipga oid hamma masalalarni yechishda qo'llaniladigan barcha amallar sistemasining muayyan tartibda bajarilishi haqidagi aniq qoidaga aytiladi.*

Al-Xorazmiyning "Kitob al-muxtasar fi hisob aljabr va muqobala" ("Tiklash va qarama-qarshi qo'yish haqida kitob") nomli algebraik risolasida birinchi marta algebra matematikaning mustaqil bo'limi sifatida qaraladi. Unda algebraik miqdorlar ustida amallar bajarish qoidalari, 1- va 2-darajali algebraik tenglamalarni yechish usullari va bunday tenglamalarga keladigan hayotiy masalalar keltirilgan. Risola lotinchaga tarjima qilinganda "val-muqobala" tushirib qoldirilgan va "algebra" nomi bilan jahonga tarqalgan (shuning uchun bo'lsa kerak o'rta asrlarda Yevropa davlatlarida singan qo'l-oyoqni tiklaydigan tabib (kostoprav)ni algebrist deb atashgan).

Xorazmiyning bizgacha yetib kelgan ilmiy merosi, shu davrda Yaqin va O'rta Sharqda xalqaro til vazifasini bajargan arab tilida yozilgan. Shuning

uchun ham Yaqin va O'rta Sharqdagi olimlarni Yevropada arab olimlari deb bilishgan. Ingliz matematigi E.But al-Xorazmiyni arab matematigi va Yevropada hind raqamlari 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ni arab raqamlari deyishga ham sabab shu.

Aytilganlardan tashqari, al-Xorazmiy $\pi \approx 3,1416$ qiymatni aniqladi, matematik jadvallar tuzishda faol qatnashdi.

Abul Vafo al-Buzjoniy 960-yilda sinuslar jadvalini hisoblash metodini ishlab chiqdi, $\sin(\frac{1}{2})$ ning qiymatini to'qqizta ishonchli raqam bilan berdi. Bundan tashqari, u "tg" funksiyasidan foydalandi va uning qiymatlari jadvalini tuzdi.

XV asrda Amir Temur saltanatining markazi – Samarqandda ilmfan, madaniyat yuqori darajada rivojlandi. Shu paytda Ulug'bekning madrasa-yu rasadxonasi barpo etildi. Bu yerda Ulug'bek bilan bir qatorda Ulug'bekning ustozlari – zamonasining mashhur matematigi va astronomi Qozizoda Rumiy hamda G'iyosiddin Jamshid Koshiy, Mansur Koshiy, Muhammad Birjondiy va Ulug'bekning shogirdi Ali Qushchilar madrasada dars berib, rasadxonada yulduzlarni kuzatish va ilmiy izlanishlar olib borishgan. Ayrim tadqiqotchilar Ulug'bek madrasasi bilan rasadxonasini birgalikda *Ulug'bek akademiyasi* deyishsa, avstriyalik matematika tarixchisi X.Zemanek buni *Hisoblash markazi* (HM) deydi. U aytadiki, HM bo'lishi uchun ikkita shart: 1) olimlarning jamoa bo'lib birgalikda ishlashlari va 2) hisoblashning yuqori darajadagi aniqlikda olib borilishi zarur. Bu yerda har ikkala shart bajariladi. Shunday qilib, jahonda birinchi **Hisoblash markazi** (HM) Ulug'bek rahbarligida Samarqandda barpo etildi. Bu HMda qilingan ishlar to'g'risida qisqacha to'xtalib o'tamiz:

1. G'iyosiddin Koshiy o'nli kasrlar arifmetikasini yaratdi. 2. $ax^3+bx+c=0$ ko'rinishidagi uchinchi darajali algebraik tenglamani yechishning iteratsion usuli ishlab chiqildi. 3. Trigonometrik funksiyalar jadvali 17 xona aniqlikda tuzildi. 4. G'iyosiddin Koshiy π sonining qiymatini 17 xona aniqlik bilan topdi, ya'ni

$$\pi \approx 3,14159265358927932.$$

XVI-XVII asrlarda Yevropada matematika, mexanika, astronomiya rivojlana boshladi va XIX asrga kelib hozirgi zamon matematikasining asosi yaratildi. Matematika bilan bir paytda hisoblash matematikasi ham rivojlandi. Hisoblash matematikasining tarixida logarifmik jadvalarining tuzilishi katta ahamiyatga ega edi. Ingliz matematigi U. Neper (1614,1619), shveysariyalik Y. Byurgi (1620), ingliz Brige (1617), gollandiyalik Vlakk (1628) va boshqalar tomonidan yaratilgan logarifmik jadvallar buyuk fransuz matematigi va mexanigi P.S. Laplasning so'zi bilan aytganda: "...hisoblashlarni soddalashtirib, astronomlarning umrini uzay-

tirdi". Laplas hozirgi zamon kompyuterlarining ishlashini ko'rganda nima der ekan?

1845-yilda Adams va 1846-yilda Leverelar hisoblashlar natijasida Neptun sayyorasining mavjudligi va fazodagi o'rnini oldindan aytishlari hisoblash matematikasining buyuk g'alabasi edi. Shuning uchun Neptunni "qalam uchida topilgan sayyora" ham deyishadi.

Tatbiqiy masalalarni sonli yechish matematiklar e'tiborini doim o'ziga tortar edi. Shuning uchun ham o'tgan zamonning buyuk matematiklari o'z tadqiqotlarida tabiat jarayonlarini o'rganish, ularning modellarini tuzish, modellarni tadqiq etish ishlarini birga qo'shib olib borishgan. Ular bu modellarni tekshirish uchun maxsus hisoblash metodlarini yaratishgan. Bu metodlarning ayrimlari Nyuton, Eyler, Lobachevskiy, Gauss, Chebishev, Ermit nomlari bilan bog'liqdir. Bu shundan dalolat beradiki, hisoblash metodlarini yaratish bilan o'z zamonasining buyuk matematiklari shug'ullanishgan.

Shuni ham aytish kerakki, limitlar nazariyasi yaratilgandan so'ng matematiklarning asosiy diqqat-e'tibori matematik metodlarga qat'iy mantiqiy zamin tayyorlashga, bu metod qo'llaniladigan obyektlar sonini orttirishga, matematik obyektlarni sifat jihatidan o'rganishga qaratilgan edi. Natijada matematikaning juda muhim va ayni paytda ko'pincha qiyinchilik tug'diradigan sohasi: matematik tadqiqotlarni so'nggi sonli natijalargacha yetkazish, ya'ni hisoblash metodlari yaratishga kam e'tibor berilar edi, bu soha esa matematikaning tatbiqlari uchun juda zarurdir.

0.1.1 Hisoblash matematikasining predmeti

Matematikaning hozirgi zamon fan va texnikasining xilma-xil sohalari-dagi tatbiqlaridan, odatda, shunday tipik matematik masalalarga duch kelinadiki, ularni klassik metodlar bilan yechish mumkin emas yoki yechish mumkin bo'lgan taqdirda ham yechim shunday murakkab ko'rinishda bo'ladiki, undan samarali foydalanishning iloji bo'lmaydi. Bunday tipik matematik masalalarga algebra (odatda, tartibi juda katta bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish, matritsalarining teskarisini topish, matritsalarining xos sonlarini topish, algebraik va transcendent tenglamalar hamda bunday tenglamalar sistemasini yechish) matematik analiz (sonli integrallash va differensiallash, funksiyani yaqinlashtirish masalalari) hamda oddiy va xususiy hosilaviy differensial tenglamalarni yechish masalalari va boshqalar kiradi.

Fan va texnikaning jadal ravishda rivojlanishi atom yadrosidan foydalanish, uchuvchi apparatlar (samolyot, raketa)ni loyihalash, kosmik

uchish dinamikasi, boshqariladigan termoyadro sintezi muammosi munosabati bilan plazma fizikasini o'rganish va shunga o'xshash ko'p masalalarni yechishni taqozo qilmoqda. Bunday masalalar, o'z navbatida matematiklar oldiga yangidan yangi hisoblash metodlarini yaratish vazifasini qo'yadi. Ikkinchi tomondan, fan va texnika yutuqlari matematiklar ixtiyoriga kuchli hisoblash vositalarini bermoqda. Buning natijasida esa mavjud metodlarni yangi mashinalarda qo'llash uchun qaytadan ko'rib chiqish ehtiyoji tug'ilmoqda.

Matematikada tipik matematik masalalarning yechimlarini yetarlicha aniqlikda hisoblash imkonini beruvchi metodlar yaratishga va shu maqsadda hozirgi zamon hisoblash vositalaridan foydalanish yo'llarini ishlab chiqishga bag'ishlangan soha *hisoblash matematikasi* deyiladi.

Hozirgi zamon hisoblash matematikasi jadal rivojlanib bormoqda. Hisoblash matematikasi qamragan masalalar turi juda ko'p. Tabiiyki, bu masalalarning yechish metodlari ham xilma-xildir, shunga qaramay, bu metodlarning umumiy g'oyasi haqida so'z yuritish mumkin. Buning uchun avval funksional analizga tegishli bo'lgan ayrim tushunchalarni keltiramiz. Agar biror to'plamda u yoki bu yo'l bilan limit tushunchasi kiritilgan bo'lsa, u holda bu to'plam abstrakt fazo deyiladi.

Elementlari ketma-ketliklardan yoki funksiyalardan iborat bo'lgan fazo funksional fazo deyiladi. Biror R_1 funksional fazoni ikkinchi bir R_2 funksional fazoga akslantiradigan A amal *operator* deyiladi. Agar operatorning qiymatlari tashkil etgan R_2 fazo sonli fazo bo'lsa, u holda bunday operator *funksional* deyiladi.

0.1.2 Hisoblash matematikasining metodi

Hisoblash matematikasida uchraydigan ko'p masalalarni

$$y = Ax \quad (1)$$

shaklida yozish mumkin, bu yerda x va y berilgan R_1 va R_2 funksional fazolarning elementlari bo'lib, A - operator yoki xususiy holda funksionaldir. Agar A operator va x element haqida ma'lumot berilgan bo'lib, y ni topish lozim bo'lsa, bunday masala **to'g'ri masala** deyiladi. Aksincha, A va y haqida ma'lumot berilgan bo'lib, x ni topish kerak bo'lsa, bunday masala **teskari masala** deyiladi. Odatda, teskari masalani yechish ancha murakkabdir. Bu masalalar har doim ham aniq yechilavermaydi. Bunday hollarda hisoblash matematikasiga murojaat qilinadi.

Ba'zan masalani aniq yechish ham mumkin, lekin klassik matematika metodlari bilan kerakli sonli qiymat olish uchun juda ko'p hisoblashlar

talab qilinadi. Shuning uchun ham hisoblash matematikasi zimmasiga konkret masalalarni yechish uchun oqilona va tejamkor metodlar ishlab chiqish yuklanadi (masalan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer formulalariga nisbatan Gauss metodi ancha tejamkor metoddir).

Hisoblash matematikasida yuqoridagi masalalarni hal qilishning asosiy mohiyati R_1, R_2 fazolarni va A operatorni hisoblash uchun qulay bo'lgan mos ravishda boshqa $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ fazolar va $\bar{A}$ operator bilan almashtirishdan iboratdir. Ba'zan faqat R_1 va R_2 fazolar yoki faqatgina ulardan birortasini, ba'zan esa faqat A operatorni almashtirish kifoyadir. Bu almashtirishlar shunday bajarilishi kerakki, natijada hosil bo'lgan yangi

$$\bar{y} = \bar{A}\bar{x} \quad (\bar{x} \in \bar{R}_1, \bar{y} \in \bar{R}_2)$$

masalaning yechimi biror ma'noda berilgan (1) masalaning yechimiga yaqin bo'lsin va bu yechimni nisbatan ko'p mehnat sarflamasdan topish mumkin bo'lsin.

Bunga misol sifatida shuni ko'rsatish mumkinki, odatda, matematik fizika tenglamalari u yoki bu strukturaga ega bo'lgan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilib yechiladi.

Demak, hisoblash matematikasi oldidagi asosiy masala funksional fazolarda to'plamlarni va ularda aniqlangan operatorlar (funksionallar)ni yaqinlashtirish hamda hozirgi zamon hisoblash mashinalari qo'llaniladigan sharoitda masalalarni yechish uchun oqilona va tejamkor algoritim va metodlar ishlab chiqishdan iboratdir.

0.2-§. Hozirgi zamon hisoblash mashinalari va sonli metodlar nazariyasi, ularning o'zaro aloqasi va ta'siri

Konkret matematik masalani u yoki bu hisoblash metodi bilan yechish uchun hisoblovchi ixtiyorida bo'lgan hisoblash mashinalarining imkoniyatlari e'tiborga olinishi kerak. Hozirgi zamon hisoblash mashinalari informatiyaning tasvirlash usuliga va ishlash prinsipiga ko'ra ikki sinfga bo'linadi:

0.2.1 Analogli yoki modellovchi hisoblash mashinalari

Bu mashinalarda informatsiya uzluksiz ravishda o'zgaradigan fizik miqdorlar (chiziqning uzunligi, valning aylanish burchagi, elektr tokining quvvati, kuchlanishi va h.k.) yordamida tasvirlanadi. Ular, odatda biron fizik

jarayon yordamida u yoki bu matematik masalani modellaydi. Bunday mashinaga hozirgacha keng tarqalgan logarifmik lineyka misol bo'la oladi.

EHMda analogli mashinalardan planimetrlar, integrallar, garmonik va differensial analizatorlar, elektro- va gidro-analizatorlar ishlatiladi. Analogli mashinalarning aniqligi odatda katta bo'lmaydi va ular tor sinfdagi maxsus masalalarni yechish uchun mo'ljallanadi.

0.2.2 Raqamli hisoblash mashinalari

Bularda informatsiya biror fizik miqdorning diskret qiymatlari yordamida tasvirlanadi va bu mashinalar biror sanoq sistemasi (ikkilik, uchlik, o'nlik va h.k.)da tasvirlangan sonlar ustida amallar bajaradi; hisob natijasi yana biror sanoq sistemasida yoziladi. Hisobning aniqligi mashina so'zi razryadlarining miqdorlariga bog'liq. Tarixda birinchi raqamli hisoblash vositasi oddiy cho'tdir.

Eng sodda raqamli hisoblash mashinalariga hisoblash jarayoni qo'l bilan boshqariladigan mashinalar – arifmometr, klavishli yarim avtomat va avtomat mashinalar kiradi. Bu mashinalar dastlab elektromexanik elementlarda qurilgan bo'lsa, so'nggi vaqtda ular elektron elementlarda quriladigan bo'ldi. Bu mashinalarda arifmetik amallar nisbatan tez bajarilishiga qaramasdan, hisoblash jarayoni mexanik prinsipga asoslangani sababli hisoblash tezligi uncha katta bo'lmaydi. Shuningdek, turli statistik, buxgalterlik va moliya-bank hisoblashlari uchun hisob-analitik mashinalari ishlatiladi. Bunday mashinalar o'zida doimiy joylashtirilgan ma'lumotlar orqali hisoblashlarni avtomatik ravishda bajaradi.

Hozirgi vaqtda keng qo'llaniladigan raqamli hisoblash mashinalari – bu universal elektron-hisoblash mashinalari (qisqacha EHM)dir. Bu mashinalarda hisoblash jarayoni boshqarish programmi yordamida avtomatik ravishda olib boriladi. EHMLar insonning ilmiy faoliyatidagi katta mehnat talab qiladigan jarayonlarni avtomatlashtirishning eng mukammal namunasidir. EHM jarayonlarni turli arifmetik va mantiqiy amallarda, katta tezlikda va katta aniqlikda bajaradi. Programmashtirish va avtomatlashtirish uchun bu mashinalarda katta imkoniyatlar mavjud bo'lib, dastlabki ma'lumotlarni, programmalarini, oraliq va oxirgi natijalarni saqlash uchun katta hajmdagi xotira qurilmasi ham bor.

EHMLarning rivojlanishi elektron texnikaning muvaffaqiyatlari bilan chambarchas bog'liqdir. Birinchi EHMLar elektron lampalar yordamida qurilgan bo'lib, ular birinchi avlod hisoblash mashinalari deyiladi.

Radioelektronikaning rivojlanishi tufayli asosan yarim o'tkazgichli elementlar (tranzistorlar)dan qurilgan ikkinchi avlod hisoblash mashinalari

bunyodga kelib, ular birinchi avlod mashinalaridan har tomonlama ustundir. Uchinchi avlod mashinalari esa integral sxemalarda qurilgan bo'lib, bunday mashinalarning har bir moduli o'nlab tranzistorlardan iboratdir. Ularning qurilish texnologiyasi avvalgilardan katta farq qiladi.

Bu EHMLar programmadan programmaga o'tish jarayonini operatsion sistema yordamida, insonning ishtirokisiz, uzluksiz ravishda bajara oladi.

To'rtinchi avlod EHMLari katta integral sxemalarning qo'llanishiga asoslangan, bu sxemalar bitta massivda yarim o'tkazgichli materialdan qurilgan o'nlab elektr zanjirlar birlashmasi ko'rinishida bo'lgan va ichki bog'lanishlar bilan birlashtirilgan yagona funksional blokdir. Ularni hisoblash tezligi bir sekundda bir necha o'n million amallar bajarilishiga mo'ljallangan.

Beshinchi avlod EHMLari ultra katta integral sxemalar va optik elektron elementlarga asoslangan bo'lib, ularning hisoblash tezligi bir sekundda bir milliarddan ko'proq amallar bajarilishiga mo'ljallangan. Bu avlod mashinalarini ko'p hollarda super EHM (super kompyuterlar) va ko'p protsessorli (multiprotsessorli) hisoblash sistemalari (KHS) sinfiga kiritadilar. Super kompyuterlarga misol tariqasida AQShning Cray Research firmasi (hozirgi paytda u Silicon Graphics firmasi tarkibida) kompyuterlarini keltirish mumkin. Ulardan Origin-2000 KXCI 45 GB (Giga byte- Giga-bayt) ichki xotira va 128 ta $R - 10000$ turdagi protsessor elementlarga ega bo'lib, har bir protsessor 64 MIPS (Million Instruction Per Second - Bir sekundda million komandani bajarish) tezkorlikka ega.

Bu super kompyuterning eng yuqori umumiy samaradorligi 25 GFHOP sec (Giga Floating point Operation Per Second) ga tengdir, ya'ni bir sekund ichida 25 milliard amalni 64 bitli suzuvchan nuqtali sonlar ustida bajarish demakdir.

Katta va ultrakatta integral sxemalarining rivojlanishi mikroprotsessorlarni (MP) paydo bo'lishiga olib keldi. MP katta integral sxema bo'lib, markaziy protsessor funksiyasini bajaradi. Mikroprotsessorlar majmui asosida hisoblash mashinalarining yangi sinfi - shaxsiy EHM (ShEHM, shaxsiy kompyuterlar) ishlab chiqarildi.

Shaxsiy kompyuterlar boshqa EHMLardan o'zining arzonligi, ixchamligi, elektr energiyasini kam sarflashi, qo'shimcha qurilmalarga juda oson bog'lanishi va ishlashga qulayligi bilan farq qiladi.

Hozirgi paytda 64-razryadli 1-1,5 Ggs (giga gers) shakli chastotasiga va 512 Mb (mega bayt)dan ko'p tezkor xotiraga ega bo'lgan ShEHMLarning paydo bo'lishi ularni super kompyuterlarga yaqinlashtirdi. Bularga misol qilib, IBM PC oilasiga mansub (o'rindosh) shaxsiy kompyuterlar va SUN firmasining ishchi stansiyalarini keltirish mumkin. Shuning uchun

ShEHMLar fan va texnikaning turli sohalarida qo'llanilmoqda.

Yuqorida ta'kidlanganidek, matematiklar ixtiyoridagi bunday hisoblash mashinalari yechilishi kerak bo'lgan masalalar sinfini va ularni yechish uchun hisoblash metodlarini tanlashni taqozo etadi. Ma'lumki, raqamli hisoblash mashinalari arifmetik va mantiqiy amallarni bajaradi. Demak, har bir matematik masalani yechish uchun shunday metod tanlashimiz kerakki, u berilgan masalani biz ega bo'lgan mashina bajara oladigan amallar ketma-ketligiga keltirilsin. Bundan tashqari, mashinaning tezligi va xotirasining sig'imiga qarab, amallar bajarilishi mumkin bo'lgan hisoblashlar hajmini ham aniqlash mumkin. Hisoblash mashinasi qanchalik mukammal bo'lsa, u shunchalik murakkab masalani yechishga imkon beradi. Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, EHMLarning taraqqiyoti bilan hisoblash matematikasi juda tez rivojlanmoqda. Uning yangi bo'limlari, masalan, o'yinlar nazariyasi, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasi, kombinatorika, mantiqiy funksiyalarni minimallashtirishga doir hisoblash metodlari vujudga kelmoqda. Bular esa o'z navbatida, yanada mukammalroq hisoblash mashinalarini loyihalash uchun xizmat qilmoqda.

Yangi va mukammal EHMLarni loyihalashda faqat hisoblash qurilmalarining tezkorligini oshirish, o'lchovlarini ixchamlash va signal o'tishi tezligini kuchaytirish asosida ish ko'rsak prinsipial muammolarga duch kelamiz. Buni quyidagicha tushuntirish mumkin.

EHMning o'tgan asrning 40-yillarida paydo bo'lishida protsessor bir amalni 10^{-1} sekundda bajargan bo'lsa, hozirgi paytda 10^{-1} sekunddan kamroq vaqtda ijro etadi. Elektr signali 10^{-1} sekundda 30 smga tarqaladi. Ammo bu tezlikni yanada kuchaytirish, signallarni uzatishning fizik jarayoni va texnologiyasi bilan chegaralanadi va murakkablashadi.

Shuning uchun EHM tezkorligini oshirishning asosiy yo'llaridan biri hisoblash qurilmalarining (protsessorlarning) sonini ko'paytirish va multi-protsessorli hisoblash sistemalarini yaratish va ularda parallel hisoblashni tashkil qilishdir. Bu sistemalar tuzilishi EHMning Fon Neyman, ya'ni klassik arxitekturasidan quyidagilar bilan farq qiladi:

- bir yoki bir nechta bir jinsli (bir jinsli emas) protsessorlar mavjudligi;
- hamma protsessorlar uchun umumiy va har bir protsessor bilan bog'liq tezkor xotira ishlatilishi;
- yagona integrallashgan operatsion sistema boshqaruvida bo'lishi;
- protsessorlarni parallel ishini hisoblash jarayonini maxsus programma yordamida paralellashtirish asosida tashkil qilinishi.

Multi-protsessorli hisoblash sistemalarining paydo bo'lishi matematiklardan parallel hisoblash metodlarini ishlab chiqishni, parallel algoritm-

larni yaratishni talab qildi, parallel tillar va programmalarni tuzishni yanada rivojlantirdi.

Masalani EHMLarda yechishning o'ziga xos tomonlari bor. Shuning uchun ularga biroz to'xtalib o'tamiz. Har bir hisoblash ishi puxta planlashtirishni talab qiladi, ya'ni hisoblash jarayonining shunday sxemasini tuzish kerakki, u oraliqdagi va oxirgi natijalarni nazorat qilish uchun imkon bersin. Aks holda turli xatolarga yo'l qo'yilishi mumkin, hozirgi EHM-lar soatiga o'n milliardlab amal bajaradi va bu hisoblashlar avtomatik ravishda, hisoblovchining ishtirokisiz bajariladi. Shuning uchun ham hisoblovchi hisoblash mashinasining barcha ishini shunday planlashtirishi kerakki, masalani yechish jarayonida uchraydigan har bir maxsus hollarga mashina e'tibor beradigan bo'lsin. U kerakli algoritmnining bajarilishini ta'minlashi kerak, ya'ni masalani yechishning programmasini tuzishi kerak. Hatto elementar amallarni qaysi tartibda bajarilishi katta ahamiyatga ega. Bunga izoh berib o'tamiz. Hisoblash jarayonida, odatda, yaxlitlash amali bajariladi, uning natijasida hisoblash xatosi vujudga keladi. Raqamli hisoblash mashinalarida, umuman aytganda, ko'paytirish va bo'lish amallari faqat olingan natijaning yaxlitlanishi bilan birga o'rinli bo'ladi. Shuning uchun ham, aslidagi $x \cdot y$ ko'paytirish va x/y bo'lish amallari "pseudoko'paytirish" $x \cdot y$ va "psevbo'lish" $x : y$ amali bilan almashtiriladi. Bunday "pseudoomallar" uchun assotsiativlik va distributivlik qonunlari bajarilmaydi.

Masalan, verguldan keyin uch xona aniqlikda hisoblaydigan bo'lsak, $(0,642 + 0,439) \cdot 0,275 = 0,297$ bo'lib, shu bilan birga $0,642 \cdot 0,275 + 0,439 \cdot 0,275 = 0,298$ bo'ladi, ya'ni har xil natijaga ega bo'lamiz.

EHMLarning murakkab masalalarni yechishga qo'llanilishi algoritm-larning turg'unligini talab qiladi. Buning ma'nosi shundan iboratki, odatda biror natijani olish uchun ko'rsatilgan metod bilan ketma-ket hisoblashlarni bajarish kerak, agar aniqlikni orttirsak, bu hisoblashlar ketma-ketligi yanada kattalashadi. Hisoblashning biror qadamida yo'l qo'yilgan xato keyingi qadamlarda ham o'z ta'sirini ko'rsatadi. Bu ta'sir turli algoritm uchun turlichadir.

Agar hisoblashning dastlabki qadamlarida yo'l qo'yilgan xato, keyingi qadamlarda hisoblash aniq bajarilganda ortmasa yoki hech bo'lmaganda bir xil tartibda bo'lsa, u holda hisoblash algoritmi **dastlabki xatoga nisbatan turg'un** deyiladi. Agarda qadamdan qadamga o'tganda xato ortib borsa, u vaqtda algoritm **noturg'un** deyiladi. Masalan, hisoblash quyidagi

$$y_{n+1} = -10y_n + 2y_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

rekurrent formula yordamida olib borilsin. Faraz qilaylik, y_{n-1} hisoblana-yotganda ε xatoga yo'l qo'yilgan bo'lib (bu yaxlitlash hisobidan bo'lishi mumkin), y_n aniq topilgan bo'lsin. Keyingi hisoblashlar aniq olib borilgan deb faraz qilsak, ε xatoning ta'siri natijasida y_{n+1} 2ε xato bilan, y_{n+2} -20ε xato bilan, y_{n+3} esa 204ε xato bilan aniqlanadi va bundan keyingi qadamlarda xato tez o'sib boradi. Demak, (2) formula bilan bo'ladigan hisoblash jarayoni noturg'un ekan, bunday **formula bilan hisoblash qat'iy man qilinadi**.

Turg'un bo'lmagan algoritmg'a olib keladigan hisoblash metodlari masalani taqribiy yechish uchun yaroqsizdir. Hozirgi vaqtda, hisoblash metodlari va algoritmlarining turli xatolarga, shu jumladan, yaxlitlash xatosiga nisbatan turg'unligini tekshirish hisoblash matematikasining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib qoldi. Ikkinchidan, EHMLarda yechiladigan masalalarning algoritmlari shunday bir jinsli va siklik jarayonlarning ketma-ketligi shaklida yozilishi kerakki, unda natija soddaroq algoritmi ko'p marta qo'llash yo'li bilan hosil bo'lsin.

Har bir konkret mashina tilida programma tuzish juda ko'p mehnat talab qiladi. Shuning uchun ham odam bilan konkret mashina o'rtasida vositachi vazifasini bajaradigan tillar yaratish katta ahamiyat kasb etadi. Bu tillarda yozilgan programmalarni maxsus translyatorlar konkret mashina tiliga o'tkazadi. Hozirgi vaqtda keng tarqalgan programmalash tillaridan Fortran, Paskal, C va Java hisoblanadi.

KHS programmalash bu tillardan ba'zilarining parallel variantlari va maxsus parallel tillar, masalan, IVTRAN, Lucid, Okkam va jarayonli tillar (data-flow languages) ishlatiladi. Bu masalalar bilan informatikaning maxsus bo'limi – programmalash nazariyasi va texnologiyasi shug'ullanadi.

Ushbu kitob asosan hisoblash matematikasining hisoblash metodlari bo'limiga oid materiallarni o'z ichiga oladi. Kitob universitetlar uchun mo'ljallangan "Hisoblash metodlari" programmasiga mos keladi. Undan hisoblash matematikasi ixtisosi bo'yicha ta'lim olayotgan boshqa oliy o'quv yurtlarining talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Kitobning 1-bobi hisoblash xatosini baholash masalasiga, 2-bobi algebrak va transsendent tenglamalar hamda ularni yechishga bag'ishlangan. 3- va 4-boblarda chiziqli algebra masalalari, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish va xos son hamda xos vektorlarni topish, 5-bobda interpolatsiyalash masalasi, 6-bobda funksiyalarning har xil yaqinlashishlari: o'rta kvadratik, tekis yaqinlashish va splayn funksiyalar bilan yaqinlashish masalalari yoritilgan. Nihoyat, 7-bob taqribiy integrallash masalasiga bag'ishlangan. Kitobda keltirilgan metodlar qat'iy asoslangan holda berilgan bo'lib, ularning g'oyalari sodda misollarda tushuntiriladi.

1-BOB. MASALALARNI SONLI YECHISHDAGI NATIJANING XATOSI

1.1-§. Xatolar manbayi

Ko'pincha matematik masalalarni sonli yechishda biz doimo aniq yechimga ega bo'la olmasdan, balki yechimni u yoki bu darajadagi aniqlikda topamiz. Demak, aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi xatolik qanday qilib kelib qoladi degan savol tug'ilishi tabiiydir. Bu savolga javob berish uchun xatoliklarning hosil bo'lish sabablarini o'rganish lozim.

1. Matematikada tabiat hodisalarining miqdoriy nisbati u yoki bu funksiyalarni bir-birlari bilan bog'laydigan tenglamalar yordamida tasvirlanadi va bu funksiyalarning bir qismi ma'lum bo'lib (*dastlabki ma'lumotlar*), boshqalarni topishga to'g'ri keladi. Tabiiyki, topilishi kerak bo'lgan miqdorlar (masalaning yechimi) dastlabki ma'lumotlarning funksiyasi bo'ladi. Kerakli yechimni ajratib olish uchun dastlabki ma'lumotlarga konkret qiymatlar berish kerak. Bu dastlabki ma'lumotlar, odatda, tajribadan olinadi (masalan, yorug'lik tezligi, Plank doimiysi, Avogadro soni va h.k.) yoki boshqa biror masalani yechishdan hosil bo'ladi. Har ikkala holda ham biz dastlabki ma'lumotlarning aniq qiymatiga emas, balki uning taqribiy qiymatiga ega bo'lamiz. Shuning uchun agar dastlabki ma'lumotlarning har bir qiymati uchun tenglamani aniq yechganimizda ham, baribir (dastlabki ma'lumotlardagi qiymatlar taqribiy bo'lganligi uchun) taqribiy natijaga ega bo'lamiz va natijaning aniqligi dastlabki ma'lumotlarning aniqligiga bog'liq bo'ladi.

Aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi farq *xato* deyiladi. Dastlabki ma'lumotlarning noaniqligi natijasida hosil bo'lgan xato *yo'qotilmas xato* deyiladi. Bu xato masalani yechayotgan matematikka bog'liq bo'lmasdan, unga berilgan ma'lumotlarning aniqligiga bog'liqdir. Lekin matematik dastlabki ma'lumotlar xatosining kattaligini bilishi va shunga

qarab natijaning yo'qotilmas xatosini baholashi kerak. Agar dastlabki ma'lumotlarning aniqligi katta bo'lmasa, aniqligi juda katta bo'lgan metodni qo'llash o'rinsizdir. Chunki aniqligi katta bo'lgan metod ko'p mehnatni (hisoblashni) talab qiladi, lekin natijaning xatosi baribir yo'qotilmas xatodan kam bo'lmaydi.

2. Ba'zi matematik ifodalar tabiat hodisasining ozmi-ko'pmi idealashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun tabiat hodisalarining aniq matematik ifodasini (formulasini, tenglamasini) berib bo'lmaydi, buning natijasida xato kelib chiqadi. Yoki biror masala aniq matematik formada yozilgan bo'lsa va uni shu ko'rinishda yechish mumkin bo'lmasa, bunday holda bu masala unga yaqinroq va yechish mumkin bo'lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato *metod xatosi* deyiladi.

3. Biz doimo π , e , $\ln 2$ va shunga o'xshash irratsional sonlarning taqribiy qiymatlarini olamiz, bundan tashqari, hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko'p xonali sonlar hosil bo'ladi, ularni yaxlitlab olishga to'g'ri keladi. Ya'ni masalalarni yechishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo'l qo'yamiz, bu xato *hisoblash xatosi* deyiladi.

Shunday qilib, *to'liq xato* yuqorida aytilgan yo'qotilmas xato, metod xatosi va hisoblash xatolarining yig'indisidan iboratdir. Ravshanki, biror konkret masalani yechayotganda yuqorida aytilgan xatolarning ayrimlari qatnashmasligi yoki uning ta'siri deyarli bo'lmasligi mumkin. Lekin, umuman olganda, xato to'liq analiz qilinishi uchun bu xatolarning hammasi hisobga olinishi kerak.

Yuqorida keltirilgan ta'riflarni to'laroq tushuntirish uchun quyidagi misolni qaraylik.

Misol 1.1. *Yon tomonlari a ga va ular orasidagi burchak α ga teng bo'lgan teng yonli ABC uchburchak bilan uning asosini diametri deb olib chizilgan yarim doiradan tashkil topgan figuraning yuzi S ni hisoblang, a va α ni o'lchash natijasida topilgan deb oling.*

Yechish: Chizma 1.1.1 dan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S = \frac{a^2}{2} \left[\sin \alpha + \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha) \right].$$

Agar a^* va α^* bilan mos ravishda a va α larning o'lchash natijasida topilgan qiymatlarini belgilab olsak, u holda

$$S^* = \frac{a^{*2}}{2} \left[\sin \alpha^* + \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha^*) \right]$$

bo'ladi. Bundan yo'qotilmas xato $\rho_1 = S - S^*$ kelib chiqadi. Agar qo'limizda trigonometrik funksiyalar jadvali bo'lmasa, biz bu formulani jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lgan boshqa

$$\bar{S} = \frac{a^{*2}}{2} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha^{*2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\alpha^{*2k}}{(2k)!} \right]$$

formula bilan almashtiramiz. Natijada $\rho_2 = S^* - \bar{S}$ metod xatosi kelib chiqadi. Agar biz bu yerda $\sin \alpha^*$ va $\cos \alpha^*$ ning Teylor qatoridagi yoyilmasining chekli yig'indisini emas, balki uzluksiz kasrlardagi yoyilmasining n -tartibli mos kasrini olganimizda metod xatosi boshqacha bo'lar edi.

$\bar{S}$ ni hisoblashda π ning taqribiy qiymati bilan almashtirish va oraliqdagi natijalarni yaxlitlashga to'g'ri keladi. Natijada biz $\bar{S}$ o'rniga $\tilde{S}$ ga ega bo'lamiz, shu bilan birga $\rho_3 = \bar{S} - \tilde{S}$ hisoblash xatosi kelib chiqadi. Demak, to'liq xato: $\rho = S - \tilde{S}$ yo'qotilmas xato, metod xatosi va hisoblash xatosining yig'indisiga tengdir:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \quad (1.1.1)$$

Odatda, yuqorida keltirilgan xatolarning ishoralari noma'lum, shuning uchun ham biz bu xatolarni asbolyut qiymatlari bilan olishimiz kerak:

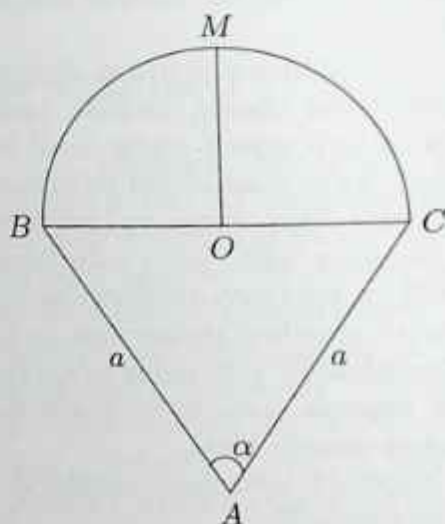
$$\rho_1 = |S - S^*|, \quad \rho_2 = |S^* - \bar{S}|, \quad \rho_3 = |\bar{S} - \tilde{S}|, \quad \rho = |S - \tilde{S}|$$

bu holda biz (1.1.1) tenglik o'rnida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\rho \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \quad \blacksquare$$

Bu misolda π ni yetarlicha katta qilib olib, metod xatosini yetarlicha kichik qilib olish mumkin. π sonining taqribiy qiymatini katta aniqlik bilan olib va hisoblashni ham katta aniqlik bilan bajarib hisoblash xatosini ham kamaytirishimiz mumkin. Lekin yo'qotilmas xatoni kamaytirish bizning ixtiyorimizda emas. Buning uchun a va α larni qaytadan kattaroq aniqlik bilan o'lchashga to'g'ri keladi.

Agar bizga a va α larni o'lchashdagi xatolarning kattaliklari berilgan bo'lsa, biz bu xatoning natijaga qanchalik ta'siri borligini ko'rsata olamiz.



Chizma 1.1.1

1.2-§. Hisoblash xatosi

Masalani qo'lda yoki hisoblash mashinasida yechayotganda biz barcha haqiqiy sonlar bilan ish ko'rmasdan, sonlarning ma'lum diskret to'plami bilan ish ko'ramizki, u yoki bu sanoq sistemasida ma'lum miqdordagi xonalar bilan olingan sonlar shu to'plamda yotadi. Bu to'plam

$$\pm (\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1}) \quad (1.2.1)$$

ko'rinishdagi sonlardan iborat bo'lib, bu yerda natural son q — sanoq sistemasining asosidir; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — butun sonlar bo'lib, $0 \leq \alpha_i \leq q-1$ shartni qanoatlantiradi; m — bu to'plamdagi sonlar xonasining miqdori, butun n son esa $|n| \leq n_0$ shartni qanoatlantiradi. Qo'lda hisoblayotganda, asosan, o'nlik sanoq sistemasi ($q = 10$) bilan ish ko'riladi. Ko'p EHM larda esa ikkilik sanoq sistemasi ($q = 2$) va ayrimlari uchun uchlik sanoq sistemasi ($q = 3$) ishlatiladi.

EHM larning ko'pchiligi shunday tuzilganki, ularda $q = 2, m = 35, n_0 = 63$ yoki $q^{-m} = 2^{-35} \approx 3 \cdot 10^{-11}$, $2^{n_0} + 2^{63} \approx 3,5 \cdot 10^{19}$ bo'ladi.

Odatda, arifmetik amallarni bajarayotganda ko'p xonali sonlar hosil bo'ladi (masalan, ko'paytirishda xonalarning soni ikkilanadi, bo'lishda esa xonalarning soni nihoyatda kattalashib ketishi ham mumkin). Natijada hosil bo'lgan son qaralayotgan to'plamdan chiqib ketmasligi uchun m — xonasigacha yaxlitlanadi, ya'ni shu to'plamdagi boshqa son bilan almashtiriladi, tabiiyki yaxlitlanadigan son unga eng yaqin son bilan almashtirilishi, ya'ni yaxlitlash xatosi eng kichik bo'lishi kerak. Bu quyidagicha bajariladi.

Hisoblash natijasida

$$\pm (\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1} + \alpha_{m+1} q^{n-m}) \quad (1.2.2)$$

son hosil bo'lsin. U holda, agar $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} q^{-1} + \dots < \frac{1}{2}q$ bo'lsa, (1.2.2) sonni (1.2.1) son bilan almashtiramiz, agarda $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} \times q^{-1} + \dots > \frac{1}{2}q$ bo'lsa, (1.2.2) sonni

$$\pm [\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + (\alpha_m + 1) q^{n-m+1}] \quad (1.2.3)$$

ga almashtiramiz. Endi shubhali hol

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} q^{-1} + \dots = \frac{1}{2}q$$

qoldi. Bu holda (1.2.2) sonni biz shunday almashtiramizki, keyingi amallarni bajarish qulay bo'lsin. Ayrim EHMlar shunday qurilganki, shubhali holda (1.2.2) sonni (1.2.3) songa almashtiradi. Qo'lda hisoblayotganda keyingi amallarni bajarish qulay bo'lishi uchun shubhali holda juft

raqam qoidasi ishlatiladi. Bu qoida quyidagidan iboratdir. Agar α_m juft bo'lsa, natija (1.2.1) ga almashtiriladi va α_m toq bo'lsa, natija (1.2.3) ga almashtiriladi. Agar biz juft raqam qoidasini qo'llab 5,780475 sonini ketma-ket yaxlitlasak, quyidagi 5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 sonlar kelib chiqadi.

Ko'pincha biror natijani olish uchun berilgan metodda ko'rsatilgan bir qator amallarni bajarishga to'g'ri keladi. Agar natijani katta aniqlik bilan topish talab qilinsa, bu qator yanada uzayib ketadi.

1.3-§. Yo'qotilmas xato

1.3.1 Absolyut va nisbiy xatolar

Ishonchli raqamlar va taqribiy sonlarni yozish tartibi. Agar a - biror miqdorning aniq qiymati bo'lib, a^* uning ma'lum taqribiy qiymati bo'lsa, u vaqtda taqribiy a^* sonning *absolyut xatosi* deb $\Delta a^* = |a - a^*|$ ga aytiladi. Absolyut xato sonning aniqligini tavsiflovchi belgilaridan biridir. Absolyut xato faqat nazariy ahamiyatga egadir, chunki biz ko'pincha a ning aniq qiymatini bilmaymiz, shuning uchun Δa^* ni ham bilmaymiz. Lekin biz absolyut xatoning o'zgarish chegaralarini ko'rsatishimiz mumkin. Bu chegaralar taqribiy a^* sonni topish usuli bilan aniqlanadi. Masalan, biz o'lchashni oddiy chizg'ich bilan bajarsak, absolyut xato 0,5 mm dan ortmaydi, agarda shtangensirkul bilan bajargan bo'lsak, absolyut xato 0,1 mm dan ortmaydi. Irratsional sonni ratsional son bilan almashtirilganda ham biz absolyut xatoni baholay olishimiz mumkin. Shuning uchun bizga noma'lum bo'lgan absolyut xato o'rniga yangi tushuncha kiritamiz.

Absolyut xatodan kichik bo'lmagan har qanday songa taqribiy a^* sonning *limit absolyut xatosi* $\Delta(a^*)$ deb aytiladi. Bu ta'rifdan $|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$, bundan esa $a^* - \Delta(a^*) \leq a \leq a^* + \Delta(a^*)$ kelib chiqadi. Bu esa qisqacha $a = a^* \pm \Delta(a^*)$ kabi yoziladi.

Misol 1.2. π sonini almashtiradigan taqribiy $\pi^* = 3,14$ sonning limit absolyut xatosi topilsin.

Yechish: Ma'lumki, $3,14 < \pi < 3,15$ shuning uchun ham $|\pi - \pi^*| < 0,01$. Demak, $\Delta(\pi^*) = 0,01$ deb olishimiz mumkin. Agar $3,14 < \pi < 3,142$ tengsizliklarni nazarga olsak, u vaqtda biz yaxshiroq baho $\Delta(\pi^*) = 0,002$ ga ega bo'lamiz. Limit absolyut xato $\Delta(a^*)$ sifatida $|a - a^*| \leq \Delta(a^*)$ ni qanoatlantiradigan har qanday sonni olish mumkin. Bunday sonlar cheksiz ko'p. Shuning uchun ham, bular orasidan kichigini tanlab olish ma'quldir. ■

Absolyut xato va limit absolyut xato hisoblash aniqligini baholash uchun yetarli emas. Masalan, ikkita uzunlik o'lchanganda $l_1 = 500,2\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$ va $l_2 = 10,8\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$ natijalar hosil bo'lsin, bu yerda har ikkalasida limit absolyut xatolar bir xil bo'lishidan qat'i nazar birinchi o'lchash ikkinchisiga nisbatan ancha aniqdir. Shuning uchun ham aniqlikni yaxshiroq baholaydigan yangi tushuncha nisbiy xato tushunchasini kiritamiz.

Absolyut xatoning taqribiy miqdorining absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning *nisbiy xatosi* δa^* deb aytiladi:

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a^*|}.$$

Xuddi shunga o'xshash *limit nisbiy xato* $\delta(a^*)$ tushunchasi kiritiladi:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}.$$

Bu yerdan $\Delta(a^*) = |a^*|\delta(a^*)$ kelib chiqadi.

Limit nisbiy xato yordamida aniq a son quyidagicha yoziladi:

$$a = a^*(1 \pm \delta(a^*)).$$

Bundan keyin biz limit absolyut xato va limit nisbiy xatoni qisqacha absolyut va nisbiy xato deymiz. Absolyut xato ismli miqdor bo'lib, nisbiy xato ismsiz miqdordir. Nisbiy xato odatda protsent (%) va promillya (‰) larda yoziladi. (Bir promillya protsentning o'ndan bir qismiga teng.)

Sonning yozilishidagi, chap tomondan birinchi noldan farqli raqamidan boshlab, hamma raqamlari *ma'noli raqamlar* deyiladi. Masalan, $a^* = 0,403$ sonning ma'noli raqamlari uchta, ularning ostiga chizilgan. Kasr qismning oxirgi xonalariga qo'shimcha nollar yozib yoki nollarni tashlab sonning ma'noli raqamlarini ko'paytirish yoki kamaytirish mumkin. Bu bilan berilgan son o'zgarmaydi. Ma'noli raqamlarning sonidagi noaniqlikdan shunday foydalanish mumkinki, uning oxirgi ma'noli raqamiga qarab bu sonning absolyut xatosi nimaga tengligi ko'rinib tursin. Bu quyidagicha bajariladi. Biror ω ($\frac{1}{2} \leq \omega \leq 1$) sonni tanlaymiz. Agar $\Delta(a^*) \leq \omega q^{n-k+1}$ tengsizlik bajarilsa, u holda taqribiy

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1} + \dots \quad (1.3.1)$$

sonda α_k raqam *ishonchli raqam*, aks holda α_k *shubhali raqam* deyiladi. Ko'rinib turibdiki, agar α_k ishonchli raqam bo'lsa, undan oldingi raqamlarning barchasi ham ishonchli bo'ladi. Demak, ishonchli raqamlar orasida har doim oxirgisi mavjud.

Taqribiy sonni yozish qoidasi shundan iboratki, uning oxirgi ma'noli raqami har doim ishonchli bo'lsin. Buning uchun shubhali raqamlar tashlanadi, kerak bo'lgan holda uning o'ng tomoniga ko'paytuvchi q^t (t -butun son) yozib qo'yiladi.

Masalan, o'nli sanoq sistemasida $\Delta(a^*) \leq \omega \cdot 10^{-2}$ bo'lganda $a^* = 3,14$ yozuv to'g'ri bo'lib, $a^* = 3,140$ yozuv esa noto'g'ridir; $\Delta(b^*) \leq \omega \leq 1$ bo'lganda $b^* = 2500$ yozuv to'g'ri bo'lib, $\Delta(b^*) \leq \omega \cdot 10$ bo'lganda esa yozuv noto'g'ridir. Agar $c^* = 302448$ sonning ikkita ishonchli raqami bo'lsa, uni $c^* = 30 \cdot 10^4$ ko'rinishda yozish kerak; $d^* = 0,007143$ sonda ishonchli raqamlarning soni uchta bo'lsa, uni $d^* = 7,14 \cdot 10^{-3}$ ko'rinishda yozish kerak.

Ayrim hollarda hisoblash jarayonida taqribiy sonlarda bitta yoki ikkita shubhali raqamlarni saqlab qolish maqsadga muvofiqdir (lekin bu raqamlarni biror belgi bilan ifodalash kerak, masalan, kichikroq qilib yozish kerak). Chunki, odatda, natijaning xatosini baholashda eng yomon hol olinadi, aslida esa xato maksimal nazariy xatodan ancha kam bo'lishi mumkin. Demak, ko'p hollarda shubhali deb qaralgan raqamlar haqiqatda ishonchli ham bo'lishi mumkin.

Ishonchli raqam tushunchasi jiddiy ravishda ω ning tanlanishiga bog'liqdir. Eski jadvallarda $\omega = \frac{1}{2}$ deb olinar edi, keyingi vaqtlarda $\omega > \frac{1}{2}$ bo'lgan jadvallar ham uchrab turibdi, tajriba asosida tuzilgan jadvallarda odatda $\omega = 1$ deb olinadi. Bu yerda $\omega > \frac{1}{2}$ deb tanlanishi taqribiy sonlarni yaxlitlayotganda ishonchli raqamlarni saqlashga olib kelar ekan. Haqiqatan ham, (1.3.1) taqribiy sonni yaxlitlash natijasida absolyut xato

$$\Delta(a^*) + \Delta'$$

ga teng bo'lib, bu yerda $\Delta(a^*)$ taqribiy a^* sonning absolyut xatosi, Δ' esa yaxlitlash paytida a^* sondagi kichik xonalarni tashlab yuborishdan kelib chiqqan xatodir. Yaxlitlashdan keyin α_m raqam ishonchli bo'lishi uchun

$$\Delta(a^*) + \Delta' \leq \omega q^{n-m+1} \quad (1.3.2)$$

tengsizlik bajarilishi kerak. Lekin shubhali holda $\Delta' = \frac{1}{2}q^{n-m+1}$ va $\Delta(a^*) \neq 0$ bo'lsa, u vaqtda (1.3.2) tengsizlik $\omega = \frac{1}{2}$ bo'lganda bajarilmaydi, $\omega > \frac{1}{2}$ bo'lganda esa bajarilishi mumkin. Masalan, $a^* = 0,9445 \pm 0,00005$ bo'lsin. Bu yerda $\omega = \frac{1}{2}$ bo'lganda ham, $\omega = 1$ bo'lganda ham oxirgi ma'noli raqam 5 ishonchlidir. Bir marta yaxlitlash natijasida $a^* = 0,945 \pm 0,00055$ bo'lib, oxirgi 5 raqami $\omega = \frac{1}{2}$ bo'lganda ishonchli bo'lmayli, $\omega = 1$ da esa ishonchli bo'ladi.

Bundan keyin $\omega = 1$ bo'lgan holda raqamlar keng ma'noda ishonchli deymiz.

1.3.2 Funksiyaning yo'qotilmas xatosi

Endi argumentlarning taqribiy qiymatlari ma'lum bo'lganda funksiya-ning yo'qotilmas xatosini topish masalasini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

funksiyaning qiymatini hisoblash kerak bo'lsin, bunda argumentlarning aniq qiymatlari ma'lum bo'lmasdan, faqat taqribiy qiymatlari $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ va ularning mos ravishdagi absolyut xatolari $\Delta(x_1^*), \Delta(x_2^*), \dots, \Delta(x_n^*)$ ma'lum bo'lsin. Qat'iy qilib aytganda, y^* ning yo'qotilmas xatosini topish argumentlarning o'zgarish sohasi $|x_i - x_i^*| \leq \Delta(x_i^*)$ ($i = \overline{1, n}$) berilganda funksiyaning o'zgarish sohasi $y^* - \Delta(y^*) \leq y \leq y^* + \Delta(y^*)$ ni topishdan iboratdir. Bu masala matematik analiz masalasi bo'lib, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nihoyatda murakkab masaladir. Shuning uchun ham ko'proq bo'lsa-da, bu masalani yechishda elementar hal qiladigan usullarni qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Bu masalani yechish uchun qaralayotgan funksiya va argumentlarning xatolariga nisbatan biz quyidagi shartlarni qo'yamiz:

a) qaralayotgan sohada f uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, xususiy hosilalari sekin o'zgaradi;

b) argumentlarning nisbiy xatolari $\delta(x_1^*), \delta(x_2^*), \dots, \delta(x_n^*)$ yetarlicha kichik.

U holda Lagranj formulasiga ko'ra quyidagi o'rinli:

$$y - y^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(\xi)(x_i - x_i^*), \quad (1.3.3)$$

bu yerda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ esa $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesmaning qandaydir nuqtasi.

Funksiyaga qo'yilgan 1) shartga ko'ra $f'_{x_i}(\xi)$ ni $f'_{x_i}(x^*)$ bilan almashtirish mumkin:

$$y - y^* = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^*)(x_i - x_i^*),$$

bundan esa,

$$|y - y^*| \leq \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(x^*)| \Delta(x_i^*).$$

Demak, funksiyaning absolyut xatosi uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\Delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |f'_{x_i}(x^*)| \Delta(x_i^*). \quad (1.3.4)$$

Endi funksiyaning nisbiy xatosini topish qiyin emas, u quyidagiga teng:

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f(x^*)|} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{f'_{x_i}(x^*)}{f(x^*)} \right| \Delta(x_i^*)$$

yoki

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |\{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \Delta(x_i^*). \quad (1.3.5)$$

Agar biz funksiyaning nisbiy xatosini argumentning nisbiy xatosi orqali ifolalaydigan bo'lsak, (1.3.5) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \frac{\Delta(x_i^*)}{|x_i^*|}.$$

Bu yerdan esa

$$\delta(y^*) = \sum_{i=1}^n |x_i^* \{\ln f(x^*)\}'_{x_i}| \delta(x_i^*). \quad (1.3.6)$$

Shunday qilib, funksiyaning absolyut va nisbiy xatolarini topish uchun biz umumiy (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) formulalarga ega bo'ldik. Endi shu formulalarning ayrim tatbiqlarini ko'raylik.

1.3.3 Arifmetik amallar va logarifmlashning xatosi

n ta musbat taqribiy sonlar yig'indisi

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

ning absolyut va nisbiy xatolarini topish talab qilinsin. Bu holda $f'_{x_i}(x^*)$ lar birga teng bo'lib, $\{\ln f(x^*)\}'_{x_i} = \frac{1}{x_i^*}$. Bu qiymatlarni (1.3.4) va (1.3.6) formulalarga qo'yib,

$$\Delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \Delta(x_i^*), \quad (1.3.7)$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{u^*} \delta(x_i^*) \quad (1.3.8)$$

larni hosil qilamiz. Shuni ham eslatib o'tish kerakki, (1.3.7) tenglik yuqorida aytilgan shartlarga bog'liq emas. (1.3.7) tenglikni quyidagi teorema shaklida ta'riflashimiz mumkin.

Teorema 1.1. *Bir xil ishorali qo'shiluvchilar yig'indisining absolyut xatosi qo'shiluvchilar absolyut xatolarining yig'indisiga teng.*

Isbot. Aytaylik, $M = \max_i \delta(x_i^*)$ va $m = \min_i \delta(x_i^*)$ bo'lsin, u holda (1.3.8) tenglikdan quyidagi

$$\delta(u^*) \leq M \frac{x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*}{u^*} = M$$

va

$$\delta(u^*) \geq m \frac{x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*}{u^*} = m$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbot bo'ldi. ■

Teorema 1.2. *Bir xil ishorali taqribiy sonlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan yig'indining nisbiy xatosi qo'shiluvchilarning eng katta va eng kichik nisbiy xatolari orasida yotadi.*

Teorema 1.1 dan ko'rinib turibdiki, yig'indining absolyut xatosi aniqligi eng kichik bo'lgan qo'shiluvchining absolyut xatosidan kam emas. Demak, boshqa qo'shiluvchilarni qanday aniqlikda olmaylik, yig'indining aniqligini orttira olmaymiz. Shuning uchun ham aniqligi katta bo'lgan sonlarda ortiqcha raqamlarni saqlash ma'noga ega emas.

Aytilganlardan qo'lda yoki avtomatik bo'lmagan mashinalarda hisoblashlarda odatda qo'llaniladigan quyidagi qoida kelib chiqadi.

Qoida. Har xil aniqlikdagi sonlarni qo'shish uchun:

- o'nli raqamlari boshqalaridagiga nisbatan eng kam bo'lgani ajratilib, ularni o'zgarishsiz qoldirish kerak;
- qolgan sonlarda esa bitta yoki ikkita ortiqcha raqamlar qoldirib, ajratilgan sonlarga nisbatan yaxlitlash kerak;
- hamma saqlangan xonalarni hisobga olgan holda berilgan sonlarni qo'shish kerak;
- hosil bo'lgan natijani bitta yoki ikkita xonaga yaxlitlash kerak.

Endi ayirmaning xatolarini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, $x_1 > x_2 > 0$ bo'lib, $u = x_1 - x_2$ bo'lsin. U holda umumiy formuladan

$$\Delta(u^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*), \quad (1.3.9)$$

$$\delta(u^*) = \frac{x_1^* \delta(x_1^*) + x_2^* \delta(x_2^*)}{u^*} \quad (1.3.10)$$

kelib chiqadi. Bu yerda ham ayirmaning absolyut xatosi kamayuvchi bilan ayriluvchi absolyut xatolarining yig'indisiga teng. Lekin natijaning nisbiy xatosi bu nisbiy xatolarning har biridan katta bo'ladi.

Agar kamayuvchi ayriluvchidan ancha katta bo'lsa, u vaqtda (1.3.10) ning maxraji x_1^* ga yaqin bo'lib, kasrning o'zi esa $\delta(x_1^*)$ ga yaqin bo'ladi. Bu hol qo'shishdagiga o'xshaydi va qo'shishdagidek ish tutish kerak. Agar kamayuvchi bilan ayriluvchi o'zaro yaqin bo'lsa, u holda ahvol tamoman boshqacha bo'ladi. Bu yerda maxraj juda kichik bo'lib, kasr juda katta bo'lib ketadi. Bu holda ko'p ishonchli raqamlar yo'qoladi. Shuning uchun imkoni boricha o'zaro yaqin sonlarni ayirmaslik kerak. Ayrim hollarda formulalar ustida turli o'zgartirishlar bajarib, bundan qutulish mumkin bo'ladi. Masalan, bizdan $x^2 - 138x + 2 = 0$ tenglamaning kichik ildizini topish talab qilingan bo'lib, natijada 4 ta ma'noli raqam saqlansin. Bu tenglamaning kichik ildizi

$$x = 69 - \sqrt{4759}$$

ga teng bo'lib, bu yerda $\sqrt{4759} = 68,985\dots$ yaxlitlashdan keyin

$$\sqrt{4759} = 68,99, \quad x^* = 69 - 68,99 = 0,01$$

ga ega bo'lamiz. Suratda irratsionallikdan qutulib, x ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x = \frac{2}{69 + \sqrt{4759}}, \quad 69 + 68,99 = 137,99.$$

Yaxlitlashdan keyin esa $69 + 68,99 = 138,0$. Natijada $x^* = \frac{2}{138,0} = 0,0144927$ va yana yaxlitlasak, $x^* = 0,01449$. Qo'shimcha xonalar ustida amallar bajarib tekshirib ko'rishimiz mumkinki, har ikkala holda ham ostiga chizilgan raqamlar ishonchli raqamlardir. Lekin ikkinchi holda natijaning aniqligi ancha yuqoridir.

Endi taqribiy sonlarning ko'paytmasini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, $u = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ ($x_i > 0$) bo'lsin. U vaqtda (1.3.4) va (1.3.6) formulalarga ko'ra

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \frac{u^*}{x_i^*} \delta(x_i^*), \quad (1.3.11)$$

$$\delta(u^*) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i^*). \quad (1.3.12)$$

Oxirgi tenglikni quyidagi teorema sifatida ta'riflashimiz mumkin.

Teorema 1.3. *Taqribiy sonlar ko'paytmasining nisbiy xatosi ko'payuvchilar nisbiy xatolarining yig'indisiga tengdir.*

Bo'linma uchun ham biz shunday xulosalarga kelamiz. Masalan,

$$u = \frac{x_1}{x_2} \quad (x_1, x_2 > 0)$$

uchun (1.3.4) va (1.3.6) formulalarga ko'ra

$$\Delta(u^*) = \frac{1}{x_2^{*2}} [x_2^* \Delta(x_1^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)],$$

$$\delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*).$$

Nihoyat, logarifmlashning xatosini ko'rib chiqaylik. Bizga natural logarifm $y = \ln x$ berilgan bo'lsa, (1.3.4) formulaga ko'ra

$$\Delta(y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \delta(x^*),$$

ya'ni natural logarifmning absolyut xatosi argumentning nisbiy xatosiga tengdir. O'nli logarifm uchun

$$\lg x = M \ln x,$$

bu yerda $M = \lg e \cong 0,434294$ - o'tish moduli,

$$\Delta(\ln x^*) = M \delta(x^*) = 0,434294 \delta(x^*).$$

Qo'pol qilib aytganda, o'nli logarifmning absolyut xatosi argument nisbiy xatosining yarmiga teng.

1.3.4 Ishonchli raqamlar sonini hisoblash qoidasi

Biz yuqorida taqribiy sonning absolyut xatosi $\Delta(a^*)$ va uning oxirgi ishonchli raqami bir-birlari orqali ifodalanishini ko'rgan edik. Shunga o'xshagan munosabatni taqribiy son ishonchli raqamlarining miqdori bilan uning nisbiy xatosi $\delta(a^*)$ orasida ham o'rnatish mumkin. Faraz qilaylik,

$$a^* = \alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1} \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

taqribiy sonda hamma raqamlari ishonchli bo'lsin. Demak, $\Delta(a^*) \leq \omega q^{n-m+1}$. Bu tengsizlikning har ikkala tomonini a^* ga bo'lib,

$$\delta(a^*) \leq \frac{\omega q^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n + \alpha_2 q^{n-1} + \dots + \alpha_m q^{n-m+1}} \leq \frac{\omega q^{n-m+1}}{\alpha_1 q^n},$$

ya'ni

$$\delta(a^*) \leq \frac{\omega}{\alpha_1 q^{m-1}} \quad (1.3.13)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda α_1 - birinchi ma'noli raqam bo'lib, m - ishonchli raqamlar soni.

Agar ishonchli raqamlar soni m ma'lum bo'lsa, u holda (1.3.13) tengsizlik nisbiy xatoni aniqlaydi.

Faraz qilaylik, taqribiy sonning nisbiy xatosi $\delta(a^*)$ berilgan bo'lsin.

Agar m

$$\delta(a^*) \leq \frac{\omega}{(\alpha_1 + 1)q^{m-1}} \quad (1.3.14)$$

tengsizlikning butun sonidagi yechimi bo'lsa, u holda birinchi ishonchli raqami α_1 ga teng bo'lgan taqribiy a^* son hech bo'lmaganda m ta ishonchli raqamga ega bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\Delta(a^*) = a^* \delta(a^*) \leq \delta(a^*)(\alpha_1 + 1)q^n \leq \omega q^{n-m+1}.$$

Bu esa α_m raqamning ishonchli ekanligini ko'rsatadi.

Endi biz (1.3.13) - (1.3.14) tengsizliklarning bir tatbiqini ko'ramiz, boshqa tatbiqlari esa mashqlarda keltiriladi.

Teorema 1.4. *O'nli sanoq sistemasida $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ($n \leq 10$) taqribiy sonlarning har birining ishonchli raqamlari soni k_0 dan kam bo'lmasin. U vaqtda $u^* = x_1^* \cdot x_2^* \dots x_n^*$ ko'paytma eng kamida $k_0 - 2$ ta ishonchli raqamga ega bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ mos ravishda $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ larning birinchi ma'noli raqamlari bo'lsin. U vaqtda (1.3.13) tengsizlikka ko'ra

$$\delta(x_i^*) \leq \frac{\omega}{\beta_i 10^{k_0-1}}.$$

Teorema 1.3 ga ko'ra

$$\delta(u^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*) + \dots + \delta(x_n^*) \leq \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\beta_n} \right) \frac{\omega}{10^{k_0-1}}.$$

Bundan $n \leq 10$ da

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\beta_n} \leq 10$$

bo'lganligi uchun

$$\delta(u^*) \leq \frac{\omega}{10^{k_0-2}}.$$

Shu bilan teorema isbot bo'ladi. ■

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, bizning baho nihoyat darajada qo'poldir, amalda ko'paytmada ishonchli raqamlarning soni $k_0 - 1$ yoki ayrim holda k_0 ga teng bo'lishi ham mumkin. Bu teoremadan shunday xulosaga kelamiz.

Qo'lda yoki avtomat bo'lmagan mashinada ikkita sonni o'zaro ko'paytirish uchun vaqtni tejash va yozuvni qisqartirish maqsadida aniqroq sonni shunday yaxlitlash kerakki, uning ishonchli raqamlar soni aniqligi kamroq bo'lgan sondagiga ko'ra bittaga ortsin.

Mashqlar

Quyidagi mashqlarda $\omega = \frac{1}{2}$ deb olamiz.

1. e sonini to'rtta ishonchli raqam bilan yozing va uning absolyut hamda nisbiy xatolarini aniqlang.
2. Kesik konus asoslarining radiuslari R va r , hamda tashkil etuvchisi l quyidagicha: $R = 33,85 \text{ cm} \pm 0,005 \text{ cm}$, $r = 14,68 \text{ cm} \pm 0,001 \text{ cm}$, $l = 12,34 \text{ cm} \pm 0,003 \text{ cm}$ aniqlangan bo'lsa, bu konusning to'la sirtini aniqlashda yo'l qo'yiladigan absolyut va nisbiy xatolarni toping.
3. Faraz qilaylik, $h = 0,02$ - aniq son bo'lib, $x = 0,2638 \pm 0,25 \cdot 10^{-4}$, $y = 0,4276 \pm 0,42 \cdot 10^{-4}$, $z = 0,4270 \pm 0,4 \cdot 10^{-4}$ bo'lsin. Quyidagi ifodalarning absolyut va nisbiy xatolarini toping:
a) $x + y - z$, b) $\frac{yz}{x}$, c) $(x + h)^3 - x^3$.
4. Quyidagi

$$f(x, y, \pi) = \frac{\sqrt{x + \pi} + \sqrt{y + \pi}}{xy + \pi^3}$$

formulada x va y taqribiy sonlardir: $x = 0,2764 \pm 0,5 \cdot 10^{-4}$, $y = 0,8322 \pm 0,5 \cdot 10^{-4}$. $f(x, y, \pi)$ ning absolyut xatosi π sonini aniq deb olingan holdagi xatoga nisbatan ikki martadan ko'pga ortmasligi uchun π ni qanday aniqlik bilan olish kerak?

5. $x^2 - 4x + \pi = 0$ tenglamaning ildizlarini to'rtta ishonchli raqam bilan topish kerak. Buning uchun tenglamaning ozod hadini nechta raqam bilan olish kerak?
6. Jism bo'shliqda 20 m balandlikdan tushayotgan bo'lsin. Agar tezlanish $g \cong 9,8094 \text{ m/s}^2$ beshta ishonchli raqam bilan berilgan bo'lib, balandlikni o'lchashdagi aniqlik 1 cm ga teng bo'lsa, tushish vaqtini qanday nisbiy xato bilan aniqlash mumkin?

7. Quyidagi a^x , x^k (k - haqiqiy son), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ elementar funksiyalarning absolyut va nisbiy xatolarini topish uchun formulalar chiqaring.
8. Quyidagi teoremani isbotlang: Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \leq 10$) larda ishonchli raqamlar soni k tadan kam bo'lmasin. U holda $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ yig'indida ishonchli raqamlar soni hech bo'lmaganda $k - 1$ ga teng.

2-BOB. TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

Algebraik va transendent tenglamalarni hamda bunday tenglamalar sistemasini yechish analizning muhim masalalaridan biridir. Fizika, mexanika, texnika va umuman tabiatshunoslikning xilma-xil masalalari algebraik va transendent tenglamalarni yechishga olib keladi. Masalan, mexanik sistema tebranishi chastotalarining kvadratlari matritsalar xarakteristik tenglamalarining ildizlari bo'ladi, bunday tenglama esa n - darajali algebraik tenglamadir. Matematikaning ehtiyojlari ham bunday tenglamalarni yechishni taqozo etadi. Masalan, noma'lumlarni yo'qotish yo'li bilan murakkab algebraik va geometrik munosabatlar ikkinchi yoki yuqori darajali algebraik tenglamalarga keltiriladi.

Ma'lumki, darajasi to'rttdan yuqori bo'lgan algebraik hamda transendent tenglamalarni yechish uchun aniq metodlar mavjud emas. Shuning uchun ham bunday tenglamalarning taqribiy yechimlarini yetarlicha aniqlik bilan topish imkonini beradigan metodlar kerak. Biz bu bobda shu metodlarning keng qo'llanadiganlarini va tajribada sinalganlarini keltiramiz.

2.1-§. Ildizlarni ajratish

2.1.1 Umumiy mulohazalar

Faraz qilaylik,

$$f(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

tenglamani yechish talab qilingan bo'lsin, bu yerda $f(x)$ - algebraik yoki transendent funksiya bo'lishi mumkin. Tenglamalarni taqribiy yechish uchun qo'llaniladigan ko'p metodlarda uning ildizlari ajratilgan, ya'ni shunday yetarli kichik atrofchalar topilganki, bu atrofchalarda tenglamaning bittagina ildizi joylashadi deb faraz qilinadi.

Bu atrofning biror nuqtasini dastlabki yaqinlashish sifatida qabul qilib, mazkur metodlar yordamida izlanayotgan yechimni berilgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. Demak, (2.1.1) tenglamaning ildizlarini taqribiy hisoblash ikki qismdan iborat: 1) ildizlarni ajratish va 2) dastlabki yaqinlashish ma'lum bo'lsa, ildizlarni berilgan aniqlik bilan hisoblash.

Masalaning birinchi qismi ikkinchisiga nisbatan ancha murakkabdir. Chunki umumiy holda ildizlarni ajratish uchun effektiv metodlar mavjud emas. Xususan, bir necha noma'lumli

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

tenglamalar sistemasi uchun ildizlarni ajratish masalasi katta qiyinchiliklar bilan bog'liqdir.

Matematik analizdan ma'lum bo'lgan quyidagi teoremlar (2.1.1) tenglamaning ildizlari yotgan oraliqlarni ajratishga yordam qiladi.

Teorema 2.1. Agar uzluksiz $f(x)$ funksiya biror $[a, b]$ oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda bu oraliqda (2.1.1) tenglamaning hech bo'lmaganda bitta ildizi mavjuddir. Agar, shu bilan birga, birinchi tartibli hosila $f'(x)$ mavjud bo'lib, u o'z ishorasini shu oraliqda saqlasa, u vaqtda bu oraliqda ildiz yagonadir.

Teorema 2.2. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda analitik funksiya bo'lsin. Agar oraliqning chetki nuqtalarida $f(x)$ har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda (2.1.1) tenglamaning a va b nuqtalar orasida yotadigan ildizlarining soni toqdir.

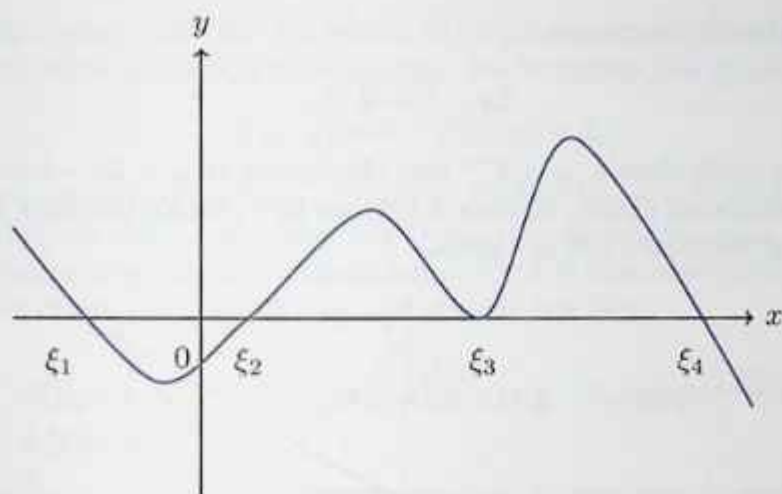
Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning chetki nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda (2.1.1) tenglamaning ildizlari $[a, b]$ oraliqda yotmaydi yoki ularning soni juftdir (karraliligini hisobga olgan holda).

Ko'pincha (2.1.1) tenglamaning haqiqiy ildizlarini ajratishga grafik usuli katta yordam beradi. Buning uchun $y = f(x)$ funksiyaning grafigini taqribiy ravishda chizib, bu grafikning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtalarining absissalari ildizning taqribiy qiymatlari deb olinadi (chizma 2.1.1).

Agar (2.1.1) tenglamaning ildizlari bir-biriga yaqin joylashgan bo'lmasa, u vaqtda bu usul bilan uning ildizlari osongina ajratiladi.

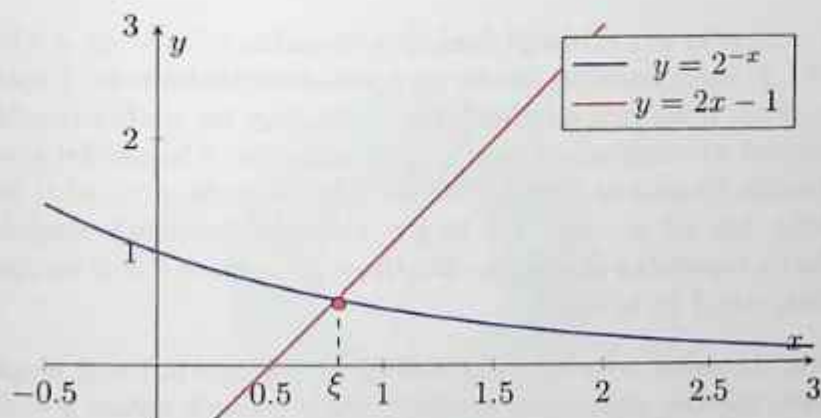
Agar $f(x)$ ning ko'rinishi murakkab bo'lib, uning grafigini chizish qiyin bo'lsa, u vaqtda grafik usulini boshqacha tarzda qo'llash kerak, ya'ni (2.1.1) tenglama unga teng kuchli bo'lgan tenglama

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad (2.1.2)$$



Chizma 2.1.1

ko'rinishida yozib olinadi. Endi $y = \varphi(x)$ va $y = \psi(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, bu grafiklarning kesishish nuqtalarining absissalari taqribiy ildizlardan iborat bo'ladi.



Chizma 2.1.2

Misol 2.1. Grafik usuli bilan

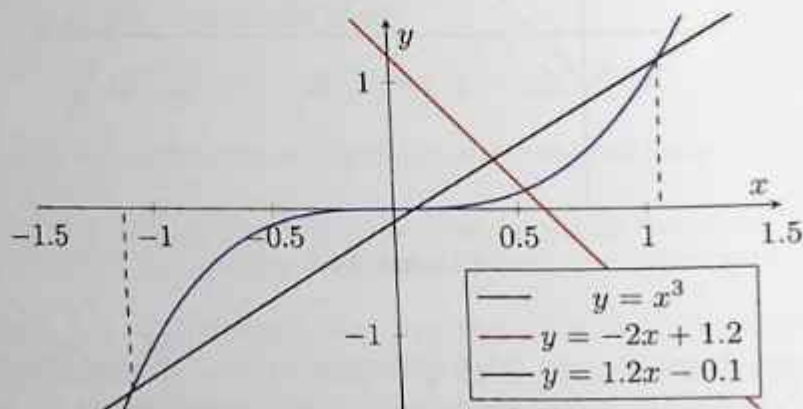
$$(2x - 1)2^x - 1 = 0$$

tenglamaning ildizi taqribiy topilsin.

Yechish: Bu tenglamani

$$2x - 1 = 2^{-x}.$$

ko'rinishda yozib olamiz. $y = 2^{-x}$ egri chiziqlarning va $y = 2x - 1$ to'g'ri chiziqlarning grafiklarini chizib, chizma 2.1.2 dan ko'ramizki, ularning kesishish nuqtasining abssissasi $\xi \cong 0,7$ ekan. ■



Chizma 2.1.3: Grafik tavsifi

Agar $\varphi(x)$ yoki $\psi(x)$ chiziqli funksiya, masalan $\psi(x) = ax + b$ bo'lsa, u vaqtda (2.1.2) tenglamaning ildizlarini ajratish soddalashadi. Faqat a va b koeffitsiyentlari bilan farq qiladigan bir xil tipdagi bir nechta tenglamalarning ildizlarini ajratish uchun grafik usuli qulaydir. Chunki bu yerda ildizlarni ajratish (ildizlarni taqribiy topish) bitta tayin $y = \psi(x)$ funksiya grafigi bilan har xil $y = ax + b$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtalarining abssissalarini topishdan iboratdir. Bu tipga $x^n + ax + b = 0$ ko'rinishdagi tenglamalar misol bo'la oladi.

Misol 2.2. Masalan, $x^3 + 2x - 1.2 = 0$ va $x^3 - 1.2x + 0.1 = 0$ tenglamalar ildizlarining taqribiy qiymatlari topilsin. Buni yechish uchun $y = x^3$ kubik parabolaning chizamiz. So'ngra $y = -2x + 1.2$ va $y = 1.2x - 0.1$ to'g'ri chiziqlarning parabola bilan kesishish nuqtalarining abssissalarini topamiz.

Yechish: Chizma 2.1.3 dan ko'rinib turiblikli, birinchi tenglama faqat bitta $\xi \cong 0,6$ haqiqiy ildizga ega bo'lib, ikkinchi tenglama esa uchta $\xi_1 \cong -1,1$, $\xi_2 \cong 0,1$ va $\xi_3 \cong 1$ haqiqiy ildizlarga egadir. Agar $f(z) = 0$ tenglamaning kompleks ildizlarini topish kerak bo'lsa, $z = x + iy$ deb olib, bu tenglamani

$$f_1(x, y) + if_2(x, y) = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $f_1(x, y)$ va $f_2(x, y)$ haqiqiy x va y o'zgaruvchilarning haqiqiy funksiyalari. Bu tenglama esa quyidagi ikkita

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0$$

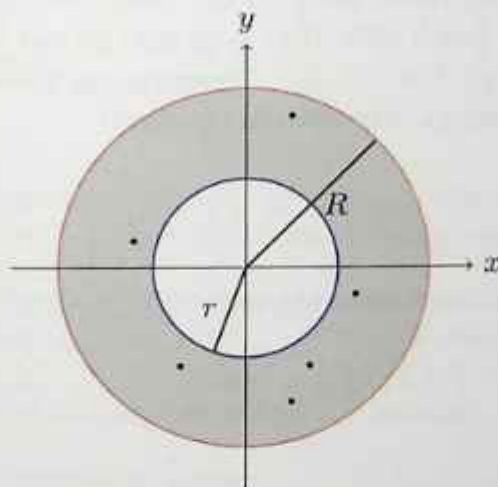
tenglamalar sistemasiga teng kuchlidir. Endi $f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ egri chiziqlarni chizib, ularning kesishgan nuqtalarini topamiz. Kesishish nuqtalarining abssissa va ordinatalari $f(z) = 0$ tenglama yechimlarining mos ravishda haqiqiy va mavhum qismlarini beradi. ■

2.1.2 Algebraik tenglamalarning haqiqiy ildizlarini ajratish

Algebraik

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2.1.3)$$

tenglamaning ildizlarini ajratish masalasi yaxshi o'rganilgan va ancha osondir. Quyidagi teoremlarning birinchisi boshqalariga nisbatan umumiyroqdir, chunki u kompleks ildizlarning ham chegaralarini beradi. Biz har doim (2.1.3) tenglamada koeffitsiyentlar haqiqiy deb olamiz.



Chizma 2.1.4

Teorema 2.3. Agar

$$A = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right|, \quad A_1 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

bo'lsa, u holda (2.1.3) tenglamaning barcha ildizlari

$$r = \frac{1}{1+A_1} < |x| < 1+A = R$$

halqa ichida yotadi (chizma 2.1.4).

Isbot. Faraz qilaylik, $|x| > 1$ bo'lsin. Modulning xossalari ga ko'ra

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} \right) \right| \geq \\ &\geq |a_0 x^n| \left[1 - A \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{1}{|x|^n} \right) \right] > |a_0 x^n| \left(1 - \frac{A}{|x| - 1} \right) = \\ &= |a_0 x^n| \frac{|x| - 1 - A}{|x| - 1}. \end{aligned}$$

Agar biz bu yerda $|x| \geq 1+A$ deb olsak, u holda $|f(x)| > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Boshqacha qilib aytganda, x ning bu qiymatlarida $f(x)$ ko'phad nolga aylanmaydi, ya'ni (2.1.3) tenglama ildizga ega bo'lmaydi. Shu bilan teoremaning yarmi isbot bo'ldi. Teoremaning ikkinchi yarmini isbotlash uchun $x = \frac{1}{y}$ deb olib, $f(x) = \frac{1}{y^n} g(y)$ ga ega bo'lamiz, bu yerda $g(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0$. Teoremaning isbot qilingan qismiga ko'ra $g(y)$ ko'phadning $y_k = \frac{1}{x_k}$ ildizlari (nollari)

$$|y_k| = \frac{1}{|x_k|} < 1 + A_1$$

tengsizlikni qanoatlantiradi, bundan esa

$$|x_k| > \frac{1}{1+A_1}$$

kelib chiqadi. ■

Eslatma 2.1.1. Bu teoremadagi r va R sonlar (2.1.3) tenglama musbat ildizlarining quyi va yuqori chegaralari bo'ladi. Shunga o'xshash R va r sonlar manfiy ildizlarining mos ravishda $-R$ va $-r$ quyi va yuqori chegarasi bo'ladi. Ildizlarning chegaralari uchun bu teoremadagi baho ancha qo'poldir. Quyidagi teoremlar bunga nisbatan ancha yaxshiroq baholarni beradi.

Teorema 2.4. (Lagranj teoremasi). Agar (2.1.3) tenglamaning manfiy koeffitsiyentlaridan eng birinchi (chapdan o'ngga tomon hisoblaganda) a_k bo'lib, B manfiy koeffitsiyentlarning absolyut qiymatlari bo'yicha eng kattasi bo'lsa, u holda musbat ildizlarning yuqori chegarasi

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} \quad (2.1.4)$$

son bilan ifodalanadi.

Isbot. Bu yerda ham $x > 1$ deb olamiz. Agar $f(x)$ ko'phadda manfiy bo'lmagan barcha $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ koeffitsiyentlarini nol bilan almashtirib, qolgan barcha $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ koeffitsiyentlarini esa $-B$ manfiy son bilan almashtirsak, ko'phadning qiymati faqat kamayishi mumkin, shuning uchun ham

$$f(x) \geq a_0 x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + 1) = a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan esa $x > 1$ bo'lganda

$$f(x) \geq a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1}}{x-1} = \frac{x^{n-k+1}}{x-1} [a_0 x^{k-1}(x-1) - B] > \frac{x^{n-k+1}}{x-1} [a_0(x-1)^k - B]$$

kelib chiqadi. Demak,

$$x \geq 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = R$$

bo'lganda $f(x) > 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni (2.1.3) tenglamaning barcha x^+ musbat ildizlari $x^+ < R$ tengsizlikni qanoatlantirar ekan. ■

Teorema 2.5. (Nyuton teoremasi). Agar $x = c > 0$ uchun $f(x)$ ko'phad va uning barcha $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ hosilalari nomanfiy bo'lsa: $f^{(k)}(c) \geq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), u holda $R = c$ ni (2.1.3) tenglamaning musbat ildizlari uchun yuqori chegara deb hisoblash mumkin.

Isbot. Teylor formulasiga ko'ra

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Teorema shartiga ko'ra $x > c$ bo'lganda bu tenglikning o'ng tomoni musbatdir. Demak, (2.1.3) tenglamaning barcha x^+ musbat ildizlari $x^+ \leq c$ tengsizlikni qanoatlantiradi. ■

Bu teoremlar faqat musbat ildizlarning yuqori chegarasini aniqlaydi. Quyidagi:

$$f_1(x) = (-1)^n f(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n,$$

$$f_2(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$f_3(x) = (-x)^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$$

ko'phadlarga yuqoridagi teoremlarni qo'llab, $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ lar musbat ildizlarning yuqori chegaralari R_0 , R_1 , R_2 va R_3 larni mos ravishda topgan bo'lsak, u vaqtda (2.1.3) tenglamaning hamma x^+ musbat ildizlari $\frac{1}{R_2} \leq x^+ \leq R$ va hamma x^- manfiy ildizlari esa $-R_1 \leq x^- \leq -\frac{1}{R_3}$ tengsizliklarni qanoatlantirar ekan.

Quyidagi misolda biz yuqorida keltirilgan metodlarni qo'llab ularning natijalarini solishtiramiz.

Misol 2.3. *Quyidagi tenglamada haqiqiy ildizlarning chegarasi topilsin:*

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0. \quad (2.1.5)$$

Yechish: Teorema 2.1 ni qo'llaymiz, bu yerda $a_0 = 1$, $A = 8$. Demak, $R = 1 + 8 = 9$, ya'ni (2.1.5) tenglamaning ildizlari $(-9, 9)$ oraliqda yotar ekan.

Endi Lagranj teoremasini qo'llaymiz: $a_0 = 1$, $k = 2$, $B = 8$. Bu qiymatlarni (2.1.4) formulaga qo'yib, musbat ildizlarning yuqori chegarasi uchun

$$R = 1 + \sqrt{\frac{8}{1}} = 1 + 2\sqrt{2} < 3,84$$

ni hosil qilamiz. Keyin (2.1.5) tenglamada x ni $-x$ ga almashtirsak,

$$f_1(x) \equiv x^4 - 5x^2 - 8x - 8 = 0 \quad (2.1.6)$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama musbat ildizining yuqori chegarasi uchun ham $R < 3,84$ tengsizlik kelib chiqadi. Ya'ni Lagranj teoremasiga ko'ra (2.1.5) tenglamaning ildizlari $(-3,84; 3,84)$ oraliqda joylashgan ekan.

Nyuton metodini qo'llaylik. Bu yerda $f(x) = x^4 - 5x^2 - 8x - 8$, $f'(x) = 4x^3 - 10x - 8$, $f''(x) = 12x^2 - 10$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV}(x) = 24$. Ko'rinib turibdiki, $x > 2$ uchun $f^{IV}(x) > 0$, $f'''(x) > 0$, $f''(x) > 0$ va $f'(x) > 0$. Osongina payqash mumkinki, $x > 2$ bo'lsa, $f(x)$ ham faqat musbat qiymat qabul qiladi, ya'ni $c = 2$ musbat ildizlarning yuqori chegarasi ekan. Xuddi

shuningdek, $f_1(x) = 0$ tenglama musbat ildizlarining yuqori chegarasi $c = 3$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, (2.1.5) tenglamaning ildizlari $(-3; 2)$ oraliqda yotar ekan. ■

Har uchala metod natijalarini solishtirsak, Nyuton metodi garchi ko'proq mehnat talab qilsada, ildizlar chegaralari uchun yaxshiroq natija berishi yaqqol ko'rinadi.

Endi oliy algebradan ma'lum bo'lgan ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema 2.6. (Dekart teoremasi.) (2.1.3) tenglama koeffitsiyentlaridan tuzilgan sistemada ishora almashtirishlar soni qancha bo'lsa (sanashda nolga teng koeffitsiyentlarga e'tibor qilmaymiz), tenglamaning shuncha musbat ildizi mavjud yoki musbat ildizlar soni ishora almashtirishlar sonidan juft songa kamdir.

Misol 2.4. $f(x)$ ning koeffitsiyentlari

$$1, 0, -5, 8, -8$$

sonlardan tuzilgan sistemada ishora almashtirishlar soni 3 ta. Demak, (2.1.5) tenglamada musbat nollarning soni 3 ta, 1 ta $f_1(x)$ ning koeffitsiyentlaridan tuzilgan sistemada esa ishora almashtirishlar soni 1 ta. Demak, (2.1.5) tenglama 1 ta manfiy ildizga ega ekan.

Faraz qilaylik, (2.1.3) tenglama karrali ildizga ega bo'lmasin. Biz $f_1(x)$ orqali $f'(x)$ hosilani, $f_2(x)$ orqali $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqning teskari ishora bilan olinganini, $f_3(x)$ orqali $f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiqning teskari ishora bilan olinganini va h.k. belgilaymiz va bu jarayonni qoldiqda o'zgarmas son hosil bo'lguncha davom ettiramiz. Natijada Shturm qatori deb ataluvchi

$$f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$$

funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Teorema 2.7. (Shturm teoremasi.) $f(x)$ ko'phadning ildizlaridan farqli a va b ($a < b$) sonlarni olib, x ni a dan b gacha o'zgartirganda $f(x)$ uchun tuzilgan Shturm qatorida nechta ishora almashinishlar yo'qolsa, $f(x)$ ning (a, b) oraliqda xuddi shuncha haqiqiy ildizlari mavjud bo'ladi.

Shturm teoremasi ildizlarni ajratish masalasini to'la hal qiladi, lekin Shturm qatorini tuzish bilan bog'liq bo'lgan hisoblashlar ko'p vaqt talab qiladi.

Shturm teoremasining qo'llanilishi quyidagichadir. Avval (2.1.3) tenglamaning barcha ildizlari yotgan oraliqning chegaralari aniqlanadi. Topilgan $[a, b]$ oraliq α_i nuqtalar bilan kichik oraliqchalarga bo'linadi. Shturm teoremasi yordamida tenglamaning $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ oraliqdagi ildizlarining soni aniqlanadi. Agar bu oraliqda ildizlarning soni bittadan ko'p bo'lsa, oraliq bo'linadi va har bir oraliq uchun Shturm teoremasi qo'llaniladi. Bu jarayonni shungacha davom ettiramizki, toki har bir oraliqchalardagi ildizlar soni bittadan ortmasin. Shuni ham eslatib o'tish kerakki, Shturm qatoridagi $f_i(x)$ funksiyalarni musbat sonlarga ko'paytirish yoki bo'lish mumkin, bundan ishora almashtirishlar soni o'zgarmaydi.

Misol 2.5. *Shturm metodi yordamida*

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 1 = 0$$

tenglamaning ildizlari ajratilsin.

Yechish: Shturm qatorini tuzamiz, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12$, buni 4 ga qisqartirib, $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ ga ega bo'lamiz; $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 12x + 1 & x^3 - 3x^2 + 3 \\ x^4 - 3x^3 + 3x & x - 1 \\ \hline -x^3 + 9x + 1 & \\ -x^3 + 3x^2 - 3 & \\ \hline -3x^2 + 9x + 4 & \end{array}$$

Demak, $f_2(x) = 3x^2 - 9x - 4$. Endi $f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo'lamiz, buning uchun $f_1(x)$ ni avval 3 ga ko'paytirib olamiz:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 9x^2 + 9 & 3x^2 - 9x - 4 \\ 3x^3 - 9x^2 - 4x & x \\ \hline 4x + 9 & \end{array}$$

bu yerdan $f_3(x) = -4x - 9$. Nihoyat, $16f_2(x)$ ni $f_3(x)$ ga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} 48x^2 - 144x - 64 & -4x - 9 \\ 48x^2 + 108x & -12x + 63 \\ \hline -252x - 64 & \\ -252x - 567 & \\ \hline +503 & \end{array}$$

Hosil bo'lgan qoldiqni 503 ga bo'lib teskari ishora bilan olsak, $f_4(x) = -1$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, Shturm qatorining elementlari quyidagi funksiyalardan iborat: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 1$, $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, $f_2(x) = 3x^2 - 9x - 4$, $f_3(x) = -4x - 9$, $f_4(x) = -1$. Bu Shturm qatoridagi ishora almashinishlar 1-jadvalda keltirilgan.

x	$-\infty$	0	-1	-2	$+\infty$
$\text{sign} f(x)$	+	+	-	+	+
$\text{sign} f_1(x)$	-	+	-	-	+
$\text{sign} f_2(x)$	+	-	+	+	+
$\text{sign} f_3(x)$	+	-	-	-	-
$\text{sign} f_4(x)$	-	-	-	-	-
ishora almashinishlar soni	3	1	2	3	1

Jadval 2.1: Shturm qatoridagi ishora almashinishlar

Bu jadvalning ikkinchi va oxirgi ustunlarini solishtirib ko'rsak, berilgan tenglama ikkita haqiqiy ildizga ega ekanligiga ishonch hosil qilamiz. 2-va 3-ustunlardan esa bu ildizlar manfiy ekanligi kelib chiqadi. 5-ustun bilan 4-ustun va 4-ustun bilan 3-ustunni solishtirish natijasida bu ildizlarning $(-2, -1)$ va $(-1, 0)$ oraliqlarda yotishini ko'ramiz. ■

2.2-§. Ko'phad va uning hosilalari qiymatlarini hisoblash hamda ko'phadni kvadratik uchhadga bo'lish

Algebraik tenglamalarning ildizlarini topish bilan bog'liq masalalarda ko'phadlar va ularning hosilalari qiymatlarini ko'p nuqtalarda hisoblashga to'g'ri keladi, bunday hisoblashlarni biz oldingi paragrafda ham uchratgan edik. Ayrim metodlarda esa ko'phadni ko'phadga bo'lganda hosil bo'lgan bo'linma va qoldiqning qiymatini topish kerak bo'ladi. Biz bu paragrafda mana shu amallarning effektiv usullarini ko'rib chiqamiz.

2.2.1 Gorner sxemasi

Faraz qilaylik, koeffitsientlari $a_0, a_1, \dots, a_n$ haqiqiy sonlardan iborat

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

ko'phadning $x = \xi$ nuqtadagi qiymatini hisoblash talab qilinsin. $P_n(x)$ ni $x - \xi$ ga bo'lamiz, u vaqtda

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1})(x - \xi) + b_n \quad (2.2.1)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglikda x o'rniga ξ ni qo'ysak,

$$b_n = P_n(\xi)$$

kelib chiqadi, demak $P_n(\xi)$ ni hisoblash uchun b_n ni topish kifoyadir. (2.2.1) tenglikda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - b_0\xi, \\ a_2 = b_2 - b_1\xi, \\ \vdots \\ a_n = b_n - b_{n-1}\xi \end{cases}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bu tengliklardan ketma-ket $b_0, b_1, \dots, b_n$ larni topamiz:

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_1 + b_0\xi, \\ b_2 = a_2 + b_1\xi, \\ \vdots \\ b_n = a_n + b_{n-1}\xi. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Qo'lda yoki klavishli mashinada hisoblanganda (2.2.2) tengliklarni quyidagi

a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
$b_0\xi$	$b_1\xi$	$b_2\xi$	$\dots$	$b_{n-2}\xi$	$b_{n-1}\xi$	
b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	$b_n = P_n(\xi)$

sxema shaklida joylashtirish ma'quldir, bu yerda $b_0 = a_0$ bo'lib, oxirgi qatorda boshqa sonlarning har biri uning ustida turgan ikkita sonning yig'indisiga teng. Keltirilgan sxema Gorner sxemasi deb ataladi, u Gorner tomonidan 1819 y. e'lon qilingan edi. Agar biz (2.2.1) tenglikda $x =$

1 deb olsak, hisoblashning to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirish imkonini beradigan

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = b_n + (1 - \xi)(b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1})$$

munosabatga ega bo'lamiz. Agar faqat $b_n = P_n(\xi)$ ni hisoblash talab qilinsa, u holda Gerner sxemasini quyidagicha

$$P_n(\xi) = (\dots((a_0\xi + a_1)\xi + a_2) + \dots + a_{n-1})\xi + a_n \quad (2.2.3)$$

yozi olamiz. Bu usul ko'phad qiymatini hisoblash uchun haqiqatan ham effektiv usuldir. Chunki (2.2.3) formula yordamida $P_n(\xi)$ ni hisoblayotganda biz faqat n marta ko'paytirish amalini bajaramiz. Oddiy yo'l bilan hisoblaganda esa $\xi^2, \xi^3, \dots, \xi^n$ darajalarni hisoblash uchun $n - 1$ marta ko'paytirish amalini va $a_0\xi^n, a_1\xi^{n-1}, \dots, a_{n-1}\xi$ ko'paytmalarni hosil qilayotganda yana n ta ko'paytirish amalini, hammasi bo'lib $2n - 1$ ta ko'paytirish amalini bajarishga to'g'ri kelar edi.

Misol 2.6. Quyidagi

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x + 1$$

ko'phadning $x = 1,5$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

2	-5	0	3	1	1,5
	3	-3	-4,5	-2,25	
2	-2	-3	-1,5	-1,25	

Demak, $P_4(1,5) = -1,25$.

2.2.2 Ko'phad hosilalarining qiymatini hisoblash

Endi $P_n(x)$ ko'phad hosilalarining $x = \xi$ nuqtadagi qiymatlarini topish masalasini ko'rib chiqaylik.

Agar $P_n(x)$ ni $(x - \xi)$ ga bo'linganda hosil bo'lgan bo'linmani

$$P_{n-1}(x) = b_0^{(0)}x^{n-1} + b_1^{(0)}x^{n-2} + \dots + b_{n-1}^{(0)}$$

orqali belgilab olsak, u holda

$$P_n(x) = (x - \xi)P_{n-1}(x) + b_n^{(0)} \quad (2.2.4)$$

tenglik kelib chiqadi. $P_{n-1}(x)$ ni $(x - \xi)$ ga bo'linganda hosil bo'lgan bo'linmani

$$P_{n-2}(x) = b_0^{(1)}x^{n-2} + b_1^{(1)}x^{n-3} + \dots + b_{n-2}^{(1)}$$

desak,

$$P_{n-1}(x) = (x - \xi)P_{n-2}(x) + b_{n-1}^{(1)}$$

tenglikka ega bo'lamiz va h.k. $(j+1)$ - qadamda $P_{n-j}(x)$ ni $(x - \xi)$ ga bo'linganda hosil bo'lgan bo'linmani

$$P_{n-j-1}(x) = b_0^{(j)}x^{n-j-1} + b_1^{(j)}x^{n-j-2} + \dots + b_{n-j-1}^{(j)}$$

deb belgilab,

$$P_{n-j}(x) = (x - \xi)P_{n-j-1}(x) + b_{n-j}^{(j)} \quad (2.2.5)$$

tenglikni yozamiz. Natijada

$$P_n(x), P_{n-1}(x), P_{n-2}(x), \dots, P_1(x), P_0(x)$$

ko'phadlar ketma-ketligini va ko'phadlarning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & \dots & b_{n-2}^{(0)} & b_{n-1}^{(0)} & b_n^{(0)} \\ b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & \dots & b_{n-2}^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} & \\ b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & \dots & b_{n-2}^{(2)} & & \\ \vdots & & & & & \\ b_0^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} & & & & \\ b_0^{(n)} & & & & & \end{array} \quad (2.2.6)$$

uchburchakli matritsani hosil qilamiz. Agar $b_i^{(-1)} = a_i$ ($i = \overline{0, n}$) deb olsak, u holda Gerner sxemasini ketma-ket qo'llab, quyidagi

$$b_0^{(j)} = b_0^{(j-1)}, b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} + b_{i-1}^{(j-1)}\xi, \quad (i = \overline{1, n-j}; j = \overline{0, n}) \quad (2.2.7)$$

rekurrent formulalarni hosil qilamiz. Endi (2.2.4) ayniyatni hamda (2.2.5) ayniyatni $j = 1, 2, \dots, n-1$ uchun yozib, keyingilarini oldingilariga olib borib qo'yib,

$$P_n(x) = b_n^{(0)} + b_{n-1}^{(1)}(x - \xi) + \dots + b_0^{(n)}(x - \xi)^n \quad (2.2.8)$$

ga ega bo'lamiz. (2.2.8) tenglikdan va Teylor qatoridagi yoyilmaning yagonaligidan

$$P_n(\xi) = b_n^{(0)}, \frac{P_n'(\xi)}{1!} = b_{n-1}^{(1)}, \dots, \frac{P_n^{(n)}(\xi)}{n!} = b_0^{(n)} \quad (2.2.9)$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, $P_n(x)$ ko'phad hosilalarining ξ nuqtadagi qiymatlarini topish uchun biz (2.2.7) rekurrent formulalardan foydalanib (2.2.6) uchburchakli matritsani tuzishimiz kerak.

Misol 2.7. Quyidagi

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x + 1$$

ko'phad va uning hosilalarining $x = 1,5$ nuqtadagi qiymatini topamiz. Buning uchun (2.2.6) matritsani tuzamiz:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -1,5 & -1,25 \\ 2 & 1 & -1,5 & -3,75 & \\ 2 & 4 & 4,5 & & \\ 2 & 7 & & & \\ 2 & & & & \end{array}$$

(2.2.9) formulalardan esa hosilalarning qiymatlarini topamiz: $P_4(1,5) = -1,25$; $P_4'(1,5) = -3,75$; $P_4''(1,5) = 2! \cdot 4,5 = 9$; $P_4'''(1,5) = 3! \cdot 7 = 42$; $P_4^{IV}(1,5) = 4! \cdot 2 = 48$. ■

2.2.3 Ko'phadni kvadratik uchhadga bo'lgandagi bo'linma va qoldiqni topish

Ma'lumki, $P_n(x)$ ko'phadni kvadratik $x^2 + px + q$ uchhadga bo'lganda hosil bo'lgan qoldiq chiziqli funksiya $ax + b$ bo'ladi, lekin qulaylik uchun biz bu chiziqli funksiyanı maxsus $b_{n-1}(x+p) + b_n$ formada yozamiz:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n =$$

$$= (b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2})(x^2 + px + q) + b_{n-1}(x+p) + b_n. \quad (2.2.10)$$

Bu munosabatda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 + pb_0, \\ a_2 &= b_2 + pb_1 + qb_0, \\ \vdots & \\ a_{n-1} &= b_{n-1} + pb_{n-2} + qb_{n-3}, \\ a_n &= b_n + pb_{n-1} + qb_{n-2} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bu yerdan $b_0, b_1, \dots, b_n$ larni topish uchun, quyidagi rekurrent munosabatlar hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_1 - pb_0, \\ b_2 &= a_2 - pb_1 - qb_0, \\ \vdots & \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3}, \\ b_n &= a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2}. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Hisoblashda oson bo'lishi uchun bu munosabatlarni quyilagi sxema shaklida yozishimiz mumkin:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -p & & -pb_0 & -pb_1 & -pb_2 & \dots & -pb_{n-2} & -pb_{n-1} \\ -q & & & -qb_0 & -qb_1 & \dots & -qb_{n-3} & -qb_{n-2} \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

Bu sxemala oxirgi satrdagi sonlar uchta oldingi satrlardagi sonlarning yig'indisidan iboratdir. Demak, (2.2.12) yordamida yoki yuqoridagi sxemadan foydalanib, b_i ($i = \overline{1, n}$) larni topamiz va natijada bo'linma $Q_{n-2}(x) = b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2}$ va qoldiq $r_1(x) = b_{n-1}(x+p) + b_n$ bo'ladi.

2.3-§. Tenglamalarni yechishda iteratsiya metodi

2.3.1 Oddiy iteratsiya metodi

Biz hozir oddiy iteratsiya (yoki ketma-ket yaqinlashish) metodi bilan bitta sonli tenglama misolida tanishamiz. Bu metodning umumiy nazariyasi bilan keyingi paragrafda tanishib chiqamiz. Iteratsiya metodini qo'llash uchun $f(x) = 0$ tenglama unga teng kuchli bo'lgan quyidagi

$$x = \varphi(x) \quad (2.3.1)$$

kanonik shaklga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo'lishi kerak. (2.3.1) tenglamaning ildizi yotgan atrofning biror x_0 nuqtasini izlanayotgan ildizning nolinchisi yaqinlashishi deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishini topish

uchun (2.3.1) ning o'ng tomoniga x_0 ni qo'yamiz va hosil bo'lgan $\varphi(x_0)$ qiymatini x_1 bilan belgilaymiz, ya'ni

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (2.3.2)$$

Topilgan x_1 sonni (2.3.1) ning o'ng tomoniga qo'yib, yangi son $x_2 = \varphi(x_1)$ ni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, n - yaqinlashish x_n ni $(n-1)$ - yaqinlashish x_{n-1} yordamida topamiz:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.3.3)$$

Bu formula yordamida topilgan sonlar ketma-ketligining limiti, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad (2.3.4)$$

mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, (2.3.3) tenglikning har ikkala tomonida limitga o'tib,

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \varphi(\xi),$$

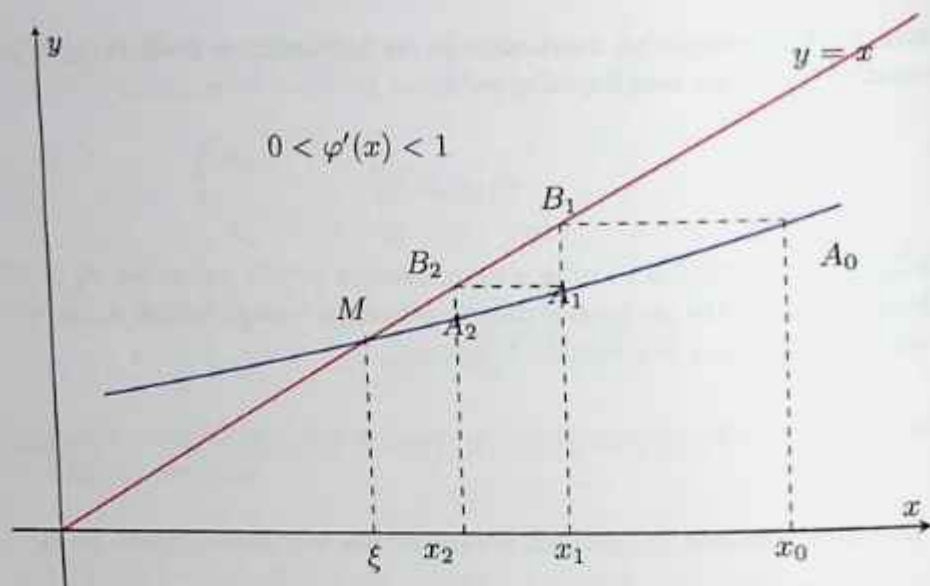
ya'ni

$$\xi = \varphi(\xi)$$

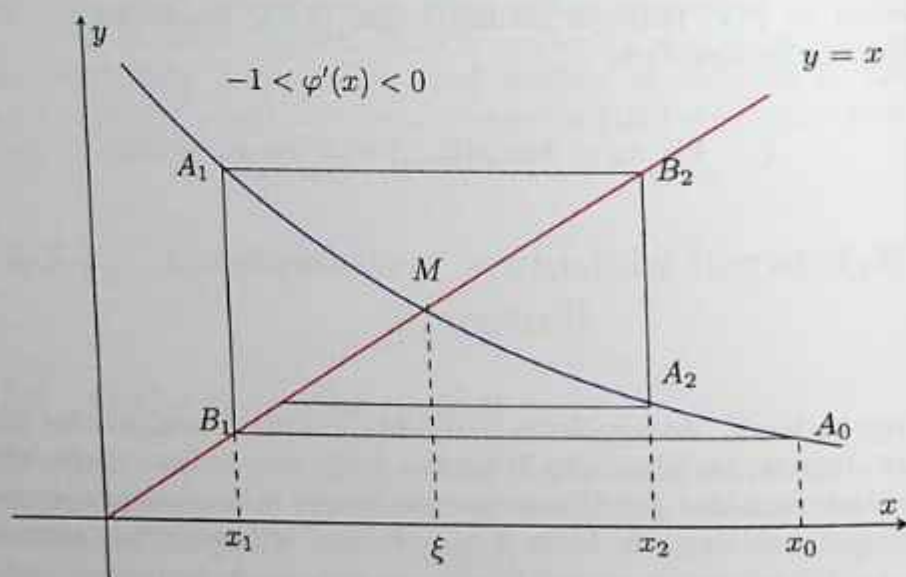
ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan ko'rinadiki, ξ berilgan tenglamaning ildizi ekan. Demak, bu ildizni (2.3.3) formula yordamida istalgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. (2.3.4) limit mavjud bo'lgan holda iteratsiya jarayoni *yaqinlashuvchi* deyiladi. Lekin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjud bo'lmasligi ham mumkin, bunday holda oddiy iteratsiya usuli maqsadga muvofiq bo'lmaydi.

Iteratsiya metodi sodda geometrik ma'noga ega. Buni tushunish uchun $y = \varphi(x)$ va $y = x$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklarning kesishgan M nuqtasining abssissasi (2.3.1) tenglamaning $x = \xi$ ildizidir.

Faraz qilaylik, x_0 nolinchii yaqinlashish bo'lsin, u vaqtda $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqta $y = \varphi(x)$ egri chiziqda yotadi (chizma 2.3.1).



Chizma 2.3.1

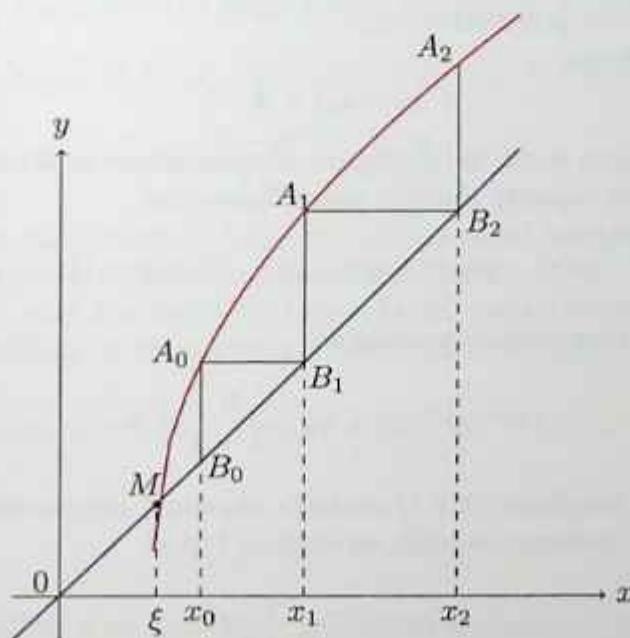


Chizma 2.3.2

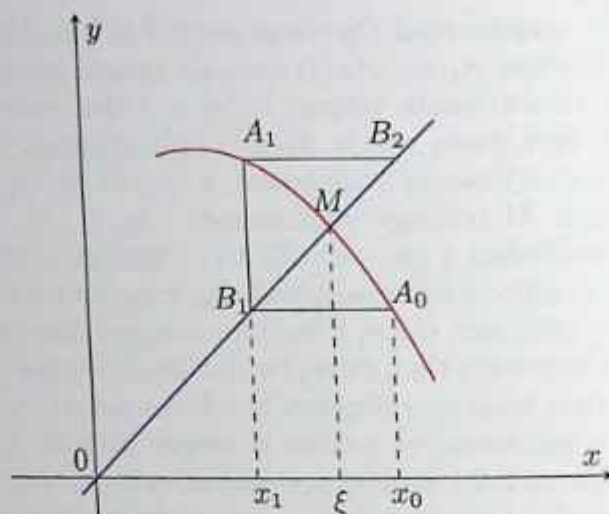
Bu nuqtadan gorizontaal (Ox o'qiga parallel) chiziq o'tkazamiz. Bu chiziq $y = x$ bissektisani $B_1(\varphi(x_0), \varphi(x_0))$ nuqtada kesadi. $\varphi(x_0)$ ni x_1 bilan belgilab olsak, B_1 nuqtaning koordinatalari (x_1, x_1) ko'rinishga

ega bo'ladi. B_1 nuqta orqali Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u $y = \varphi(x)$ egri chiziqni $A_1(x_1, \varphi(x_1))$ nuqtada kesadi. Bu jarayonni davom ettirib, $y = x$ bissektisada yotgan $B_2(x_2, x_2)$ (bu yerda $x_2 = \varphi(x_1)$), so'ng $y = \varphi(x)$ egri chiziq ustida $A_2(x_2, \varphi(x_2))$ nuqtaga ega bo'lamiz va h.k. Agar iteratsiya jarayoni yaqinlashsa, u vaqtda $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ nuqtalar izlanayotgan M nuqtaga yaqinlashadi. $A_0, A_1, A_2, \dots$ nuqtalarning $x_0, x_1, x_2, \dots$ abssissalari ξ ga, ya'ni (2.3.1) tenglamaning ildiziga yaqinlashadi. Shunday qilib, iteratsiya metodining geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: $y = \varphi(x)$ egri chiziq bilan koordinatalar burchagi bissektisasining kesishish nuqtasiga siniq chiziq bo'ylab harakat qilamiz, siniq chiziqning uchlari navbat bilan egri chiziq va bissektisa ustida yotadi, tomonlari esa navbat bilan gorizontaal va vertikal yo'nalgan bo'ladi. Agar egri chiziq va bissektisa chizma 2.3.1 dagidek joylashgan bo'lsa, u vaqtda siniq chiziq zinapoyani eslatadi. Agar egri chiziq va bissektisa chizma 2.3.2 dagidek bo'lsa, unda siniq chiziq spiralni eslatadi.

Iteratsion jarayon uzoqlashishi ham mumkin. Buning geometrik ma'nosi shundan iboratki, zinapoyaning pog'onalari (yoki spiralning bo'g'inlari) borgan sari kattalashadi, shuning uchun ham $A_0, A_1, A_2, \dots$ nuqtalar M ga yaqinlashmaydi, balki uzoqlashadi (chizma 2.3.3 va chizma 2.3.4).



Chizma 2.3.3



Chizma 2.3.4

Modomiki, iteratsiya jarayoni har doim yaqinlashavermas ekan, demak, bu jarayon yaqinlashishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerakligini aniqlash katta ahamiyatga ega. Bu shartlar ushbu teoremda ko'rsatiladi.

Teorema 2.8. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \leq \delta \quad (2.3.5)$$

oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalar uchun $\varphi(x)$ Lipshtits shartini qanoatlantirsin:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad (0 < q < 1); \quad (2.3.6)$$

2) quyidagi tengsizliklar bajarilsin:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq \eta, \quad \frac{\eta}{1 - q} \leq \delta. \quad (2.3.7)$$

U holda (2.3.1) tenglama (2.3.5) oraliqda yagona ξ ildizga ega bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\eta}{1 - q} q^n \quad (2.3.8)$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Isbot. Avval induksiya metodini qo'llab, ixtiyoriy n uchun x_n ni qurish mumkinligini, x_n ning (2.3.5) oraliqda yotishligi va

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \eta q^n \quad (2.3.9)$$

tengsizlikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Agar $n = 0$ bo'lsa, $x_1 = \varphi(x_0)$ bo'lgani uchun (2.3.9) tengsizlik (2.3.7) dan kelib chiqadi.

Bundan tashqari, $\eta < \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$ bo'lgani uchun $|x_1 - x_0| < \delta$ tengsizlik bajarilib, x_1 (2.3.5) oraliqda yotadi. Endi faraz qilaylik, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar qurilgan bo'lib, ular (2.3.5) oraliqda yotsin va

$$|x_{k+1} - x_n| \leq \eta q^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

tengsizliklar bajarilsin. Induksiya shartiga ko'ra x_n (2.3.5) da yotadi, $\varphi(x)$ (2.3.5) da aniqlangan, shuning uchun ham $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ni qurish mumkin. Teoremaning 1-shartidan

$$|x_{k+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|$$

kelib chiqadi. Lekin x_{n-1} va x_n uchun induksiya shartiga ko'ra $|x_n - x_{n-1}| \leq \eta q^{n-1}$ o'rinli, demak, $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta q^n$. Bu esa x_{n+1} va x_n uchun (2.3.9) tengsizlikning bajarilishini ko'rsatadi. Nihoyat,

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_0| &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \dots + |x_1 - x_0| \leq \eta q^n + \eta q^{n-1} + \dots + \eta = \\ &= \eta \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} < \frac{\eta}{1 - q} \leq \delta \end{aligned}$$

munosabatlar x_{n+1} ning (2.3.5) oraliqda yotishini ko'rsatadi. Shu bilan isbot qilinishi talab etilgan mulohaza tasdiqlandi.

Endi $\{x_n\}$ ning fundamental ketma-ketlik tashkil etishini ko'rsatamiz. (2.3.9) tengsizlikka ko'ra ixtiyoriy p natural son uchun

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \eta q^{n+p-1} + \dots + \eta q^n < \frac{\eta}{1-q} q^n$$

yoki

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{\eta}{1-q} q^n. \quad (2.3.10)$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni p ga bog'liq bo'lmaganligi va $0 < q < 1$ bo'lganidan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligi va uning limiti $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjudligi kelib chiqadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik (2.3.5) oraliqda

yotgani uchun ξ ham shu oraliqda yotadi. (2.3.6) shartdan $\varphi(x)$ ning uzluksizligi kelib chiqadi, shuning uchun ham $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ tenglikda limitga o'tib, ξ (2.3.1) tenglamaning ildizi ekanini isbot qilamiz.

Endi $\{x_n\}$ ildizning (2.3.5) oraliqda yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $\tilde{\xi}$ (2.3.1) tenglamaning (2.3.5) oraliqdagi boshqa biror ildizi bo'lsin, $\xi = \tilde{\xi}$ ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham (2.3.6) ga ko'ra

$$|\tilde{\xi} - \xi| = |\varphi(\tilde{\xi}) - \varphi(\xi)| \leq q|\tilde{\xi} - \xi|,$$

$0 < q < 1$ bo'lgani uchun bu munosabat faqat $\xi = \tilde{\xi}$ bo'lgandagina bajari-ladi.

Yaqinlashish tezligini ko'rsatuvchi (2.3.8) tengsizlikni keltirib chiqarish uchun (2.3.10) tengsizlikda $p \rightarrow \infty$ limitga o'tish kifoyadir. Teorema isbot bo'ldi. ■

Izoh. Odatda, iteratsiya metodini qo'llayotganda ikkita: x_{n-1} va x_n ketma-ket yaqinlashishlar berilgan aniqlik bilan ustma-ust tushsa, shu aniqlik bilan $\xi \cong x_n$ deb olinadi. Umuman olganla, bu fikr noto'g'ridir. Masalan, $x = 0,999x$ tenglamani ko'raylik. Bu yerda $\varphi(x) = 0,999x$, $q = 0,999$. Dastlabki yaqinlashish x_0 ni 1 ga teng deb olib, bu tenglamani iteratsiya metodi bilan yechamiz. U holda $x_1 = 0,999$ va $x_0 - x_1 = 0,001$ bo'ladi. Bu tenglamaning aniq ildizi $\xi = 0$ esa x_1 dan 0,999 ga farq qiladi.

Yuqorida aytilgan fikrni faqat $|\varphi'(x)| \leq q$ bo'lib, q birdan ancha kichik bo'lgandagina qo'llash mumkin. Buning to'g'riligini $q \leq \frac{1}{2}$ bo'lganda quyidagicha ko'rsatish mumkin. Buning uchun $f(x) = x - \varphi(x)$ deb olamiz, u holda $f(\xi) = 0$ va $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$ bo'ladi. Shuning uchun ham

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi| |f'(\xi_n)| \geq (1 - q) |x_n - \xi| (\xi_n \in (x_n, \xi)),$$

demak,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1 - q}$$

va (2.3.6) ga ko'ra

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Bu tengsizliklardan esa,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|$$

hosil bo'ladi. Agar, xususiyl holda, $q \leq \frac{1}{2}$ deb olsak,

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

bo'ladi, ya'ni bu holda $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ dan $|\xi - x_n| < \varepsilon$ kelib chiqadi.

Misol 2.8. *Iteratsiya usuli bilan*

$$f(x) = x^3 - 80x + 32 = 0 \quad (2.3.11)$$

tenglamaning musbat ildizlari 5 ta ishonchli raqam bilan topilsin.

Yechish: Shturm metodini qo'llab, bu tenglamaning musbat ildizlari ξ_1 va ξ_2 larning mos ravishda (0; 0.5) va (8.5; 9) oraliqlarda yotishini ko'ramiz. Iteratsiya metodini qo'llash uchun (2.3.11) tenglamani kanonik ko'rinishda yozish kerak. Buni ko'p usullar bilan bajarish mumkin. Lekin har doim ham kanonik ko'rinishdagi $\varphi(x)$ funksiya teorema shartini qanoatlantiravermaydi. (2.3.11) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan, masalan, quyidagi uch xil ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = x^3 - 79x + 32 \equiv \varphi_1(x) \quad (2.3.12)$$

yoki

$$x = \frac{x^3 + 32}{80} \equiv \varphi_2(x) \quad (2.3.13)$$

yoki

$$x = \sqrt[3]{80x - 32} \equiv \varphi_3(x). \quad (2.3.14)$$

Har ikkala ildiz atrofida ham $\varphi_i(x)$ lar hosilaga ega bo'lgani uchun teoremadagi (2.3.6) shartni $|\varphi'_i(x)| \leq q < 1$ shart bilan almashtirish mumkin. Endi $\varphi_i(x)$ larning qaysi biri teorema shartini qanoatlashtirishini ko'raylik. $\varphi'_1(x) = 3x^2 - 79$ bo'lgani uchun har ikkala ildiz atrofida ham $|\varphi'_1(x)| > 1$, demak, (2.3.12) tenglama uchun iteratsiya jarayoni uzoqlashadi. Endi (2.3.13) tenglamani tekshiraylik, $\varphi'_2(x) = \frac{3x^2}{80}$. Bundan (0; 0.5) oraliqda $\varphi'_2(x) \leq \frac{3}{320} = q < \frac{1}{100}$ ekanligini ko'ramiz, ya'ni ξ_1 ni topish uchun (2.3.13) tenglamaga iteratsiya metodini qo'llash mumkin. Dastlabki yaqinlashishni $x_0 = 0,5$ deb olib, keyingi to'rtta yaqinlashishni hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{(0,5)^3 + 32}{80} = 0,4015625; \quad x_2 = 0,4008094; \quad x_3 = 0,40080487; \\ x_4 = 0,40080483.$$

Demak, 5 ta ishonchli raqami bilan $\xi_1 = 0,40080$ deb olishimiz mumkin.

Tabiiyki, (2.3.13) tenglamada ikkinchi ildizni ham iteratsiya metodi bilan topishga harakat qilamiz. Lekin bu mumkin emas, chunki (8,5; 9)

oraliq uchun $|\varphi'_2(x)| \leq q < 1$ shart bajarilmaydi. Shuning uchun ham (2.3.14) tenglamani tekshirib ko'raylik:

$$\varphi'_3(x) = \frac{80}{3\sqrt[3]{(80x-32)^2}}.$$

Bundan ko'ramizki, $(8,5; 9)$ oraliqda $|\varphi'_3(x)| \leq \frac{10}{27} < \frac{1}{2}$, shu sababli (2.3.14) tenglamadan ξ_2 ni topishimiz mumkin.

Nolinchi yaqinlashishni $x_0 = 9$ deb olamiz, keyingi yaqinlashishlar jadval 2.2 da keltirilgan. Demak, 5 ta ishonchli raqami bilan olingan qiymat $\xi_2 = 8,7371$ ga teng bo'ladi.

n	x_n
0	9.0000
1	8.8280
2	8.7688
3	8.7483
4	8.7412
5	8.7386
6	8.7376
7	8.7373
8	8.7372
9	8.7371
10	8.7371

Jadval 2.2: Turli n lar uchun x_n ning qiymatlari.

2.3.2 Vegsteyn metodi

Iteratsiya metodining yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ξ ildizning kichik atrofida $\varphi'(x)$ hosilaning qiymatiga bog'liq ekanligini yuqorida ko'rgan edik. Lekin J.X.Vegsteyn 1958-yilda [51], geometrik mulohazalar asosida iteratsiya metodini shunday o'zgartirishni taklif etdiki, buni qo'llaganda $\varphi'(x)$ ning qiymati har qanday bo'lganda ham iteratsiya jarayoni yaqinlashadi. Mabodo $|\varphi'(x)| < 1$ tengsizlik bajarilsa, u vaqtda oddiy iteratsiya jarayoniga nisbatan Vegsteyn jarayoni tezroq yaqinlashadi.

Vegsteyn metodida

$$x = \varphi(x) \quad (2.3.15)$$

tenglamaning aniq yechimi ξ ning dastlabki yaqinlashishi x_0 orqali,

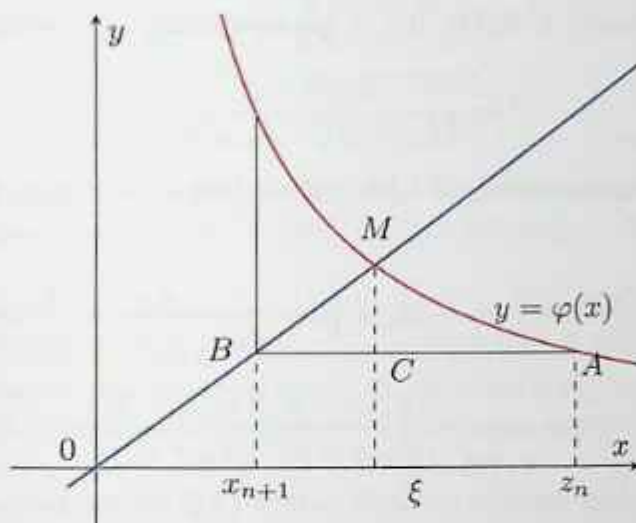
$$z_0 = x_0, \quad z_1 = x_1 = \varphi(x_0) \quad (2.3.16)$$

deb olib, ikkita $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketlikni quramiz:

$$x_{n+1} = \varphi(z_n), \quad (2.3.17)$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - z_n)}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n+1}}. \quad (2.3.18)$$

Oxirgi munosabatning ma'nosini anglash va uni hosil qilish usulini tushuntirishimiz uchun chizma 2.3.5 ga murojaat qilamiz.



Chizma 2.3.5

Ushbu

$$qz_n + (1 - q)x_{n+1}$$

chiziqli kombinatsiyani tuzamiz va q parametрни shunday tanlaymizki, bu ifoda ildizning aniq qiymati ξ ni bersin:

$$\xi = qz_n + (1 - q)x_{n+1}. \quad (2.3.19)$$

Bu ifodani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\xi - x_{n+1} = q(z_n - \xi) + q(\xi - x_{n+1})$$

yoki

$$(1 - q)(\xi - x_{n+1}) = q(z_n - \xi). \quad (2.3.20)$$

Endi chizma 2.3.5 dan ko'ramizki (2.3.20) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$(1 - q)DC = qCB,$$

ya'ni

$$\frac{q}{1-q} = \frac{DC}{CB} = \frac{CM}{CB} = -\frac{\varphi(z_n) - \varphi(\xi)}{z_n - \xi}. \quad (2.3.21)$$

Agar (2.3.21) da noma'lum nisbat $\frac{CM}{CB}$ ni

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\varphi(z_{n-1}) - \varphi(z_n)}{z_n - z_{n-1}} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{z_n - z_{n-1}}$$

bilan almashtirsak, u holda biz q parametrning q^* taqribiy qiymatini topamiz:

$$q^* = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n-1}}.$$

Endi q^* ning qiymatini (2.3.19) - ifodadagi q ni o'rniga qo'ysak, z_{n+1} ni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n-1}} z_n + \left(1 - \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n-1}}\right) x_{n+1} = \\ &= x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - z_n)}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n-1}} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Vegsteyn metodini amalda qo'llash uchun (2.3.16) ga ko'ra ildizning nol-inchi yaqinlashishi x_0 ga bir marta (2.3.15) oddiy iteratsiya metodini qo'llash kerak. Birinchi qadamdan so'ng x_{n+1} ni topish uchun esa (2.3.17) - (2.3.18) formulalarni qo'llaymiz. Biz bu yerda bu jarayonning oddiy iteratsiya jarayoniga nisbatan tezroq yaqinlashishini qat'iy ravishda isbotlab o'tirmasdan misol keltirish bilan chegaralanamiz.

Misol 2.9. Ushbu

$$f(x) = x^3 + x - 1000 = 0$$

tenglamaning eng katta musbat ildizi 10^{-10} aniqlik bilan topilsin.

Yechim: Izlanayotgan ildizning nol-inchi yaqinlashishi sifatida $x_0 = 10$ ni olishimiz mumkin. Bu tenglamani

$$x = 1000 - x^3 \quad (2.3.23)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu holda $\varphi'(x) = -3x^2$ va $\varphi'(10) = -300$ bo'ladi. Demak, (2.3.23) tenglamaga oddiy iteratsiyani qo'llab bo'lmaydi. Bu tenglamaning yechimini Vegsteyn usuli bilan topilgan ketma-ket yaqinlashishlari 10^{-10} aniqlik bilan jadval 2.3 da keltirilgan.

n	$x_{n+1} = \varphi(z_n)$	z_n	$x_{n+1} = \varphi(x_n)$
0	10	*10	10
1	0	*0	0
2	1000	9,9	-1000
3	29,7	10,1	-999000
4	-30,3010	9,9658	-978, 10 ¹⁵
5	10,2310	9,966655	
6	9,97016	9,66667791	
7	9,966666	9,966666790	
8	9,9666667906	9,96666679061	
9	9,9666667906	9,96666679061	

Jadval 2.3: (2.3.23) tenglama yechimining Vegsteyn usuli bilan topilgan ketma-ket yaqinlashishlari 10^{-10} aniqlik bilan keltirilgan.

Bu jadvalning uchinchi ustunida (2.3.22) formula yordamida topilgan z_n lar keltirilgan, oxirgi ustun esa oddiy iteratsiya usulining uzoqlashishini ko'rsatish uchun keltirilgan. Yulduzcha bilan belgilangan qiymatlar ikkinchi ustundagi mos qiymatlar bilan ustma-ust tushadi, chunki Vegsteyn usulini qo'llash uchun $n \geq 2$ bo'lishi kerak. ■

2.3.3 Hisoblash xatosining iteratsion jarayonning yaqinlashishiga ta'siri

Biz oldingi punktlarda iteratsion jarayonning ideal modelini ko'rib chiqqan edik. Bu modelda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari absolyut aniq hisoblangan deb faraz qilingan edi. Aslida esa qo'lda hisoblanayotganda ham, mashinada hisoblanayotganda ham, biz amallarni chekli miqdordagi raqamlar ustida bajaramiz. Buning natijasida, ya'ni yaxlitlash hisobidan, hisoblash xatosi kelib chiqadi. Iteratsiyaning birinchi qadamida $x_1 = \varphi(x_0)$ o'rniga unga yaqinroq bo'lgan $\tilde{x}_1$ ni hosil qilamiz. Bu yerda $\tilde{x}_1 - \varphi(x_0) = \gamma_0$ hisoblash xatosi hosil bo'ladi. Ikkinchi qadamda esa xato ikki sababga ko'ra hosil bo'ladi: birinchidan $\varphi(x)$ funksiyada x_1 o'rniga $\tilde{x}_1$ qo'yiladi, ikkinchidan $\varphi(\tilde{x}_1)$ yaxlitlash xatosi bilan hisoblanadi. Demak, topilgan $\tilde{x}_2$ qiymat faqat taqribiy ravishda $\varphi(\tilde{x}_1)$ ga teng: $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1) + \gamma_1$, γ_1 - hisoblash xatosidir.

Shunday qilib, iteratsiya metodini qo'llayotganda $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) ketma-ketlik o'rniga

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(x_n) + \gamma_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlikka ega bo'lamiz, bu yerda γ_n - hisoblash xatosi.

Yuqorida isbot qilingan teoremaning xulosasi $\{x_n\}$ ketma-ketlikka taalluqli bo'lgani uchun, agar biz qo'shimcha shart qo'ymasak, bu xulosa $\{\tilde{x}_n\}$ ketma-ketlik uchun o'rinli bo'lmaydi, hatto bu ketma-ketlik ξ ildizga yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun quyidagi teoremani isbot qilamiz.

Teorema 2.9. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ dastlabki yaqinlashish x_0 va

$$\tilde{x}_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) + \gamma_n, \quad \tilde{x}_0 = x_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.24)$$

tengliklar bilan aniqlangan $\{\tilde{x}_n\}$ ketma-ketlik quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \leq \delta \quad (2.3.25)$$

oraligida aniqlangan bo'lib, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalar uchun

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad (0 < q < 1) \quad (2.3.26)$$

tengsizlikni qanoatlantirsin;

2) γ_n sonlar uchun

$$|\gamma_n| \leq \gamma q_1^n \quad (0 < q_1 \leq 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.27)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsin;

3) quyidagi

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq \eta, \quad \frac{\eta + \gamma}{1 - q} \leq \delta \quad (2.3.28)$$

tengsizliklar bajarilsin. U holda

1) $x = \varphi(x)$ tenglama (2.3.25) oraligida yagona ξ yechimga ega,

2) agar $0 < q_1 < 1$ bo'lsa, $\{\tilde{x}_n\}$ ketma-ketlik ξ ga yaqinlashadi,

3) agar $q_1 = 1$ bo'lsa, $\tilde{x}_n$ miqdorlar

$$|\tilde{x}_n - \xi| \leq \frac{1}{1 - q} (\gamma + \eta q^n) \quad (2.3.29)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Teoremaning birinchi tasdig'i teorema 2.8 dan kelib chiqadi. Qolgan tasdiqlarni isbotlash uchun biz

$$|\tilde{x}_m - x_m| \leq \gamma \sum_{i=1}^m q^{m-i} q_1^{i-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.3.30)$$

tengsizliklarning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Avval shuni ta'kidlab o'tish kerakki, agar x_m (2.3.30) tengsizlikni qanoatlantirsa, u (2.3.25) oraliqda yotadi.

Haqiqatan ham (2.3.30) dan $0 < q_1 \leq 1$ ni hisobga olib,

$$|\tilde{x}_m - x_m| \leq \gamma \sum_{i=1}^m q^{m-i} < \frac{\gamma}{1-q} \quad (2.3.31)$$

ga ega bo'lamiz. Teorema 2.8 ni isbot qilish jarayonida

$$|x_m - x_0| < \frac{\eta}{1-q} \quad (2.3.32)$$

ni keltirib chiqargan edik. Keyin bu tengsizliklardan va (2.3.28) dan

$$|\tilde{x}_m - x_0| \leq |\tilde{x}_m - x_m| + |x_m - x_0| < \frac{\gamma}{1-q} + \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$$

kelib chiqadi.

Endi biz (2.3.30) tengsizlikni isbot qilishga o'tamiz. Buning uchun matematik induksiya metodini qo'llaymiz. (2.3.24) va (2.3.27) dan $n = 0$ bo'lganda

$$|\tilde{x}_1 - x_1| = |\gamma_0| \leq \gamma$$

kelib chiqadi, bu esa (2.3.30) ning $m = 1$ bo'lganda o'rinli ekanligini ko'rsatadi. Endi faraz qilaylik, (2.3.30) $m = n$ bo'lganda o'rinli bo'lsin, uning $m = n+1$ bo'lganda ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (2.3.24) dan $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ni ayirib,

$$\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = \varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n) + \gamma_n$$

ni hosil qilamiz. $\tilde{x}_n$ va x_n lar (2.3.25) oraliqda yotadi, shuning uchun ham (2.3.26) tengsizlikni nazarda tutib hamda (2.3.27) va (2.3.30) tengsizliklarda $m = n$ deb olib,

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| &\leq |\varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(x_n)| + |\gamma_n| \leq q|\tilde{x}_n - x_n| + \gamma q_1^n \\ &< \gamma q \sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} + \gamma q_1^n = \gamma \sum_{i=1}^{n+1} q^{n+1-i} q_1^{i-1} \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz.

Demak, (2.3.30) $m = n+1$ uchun to'g'ri ekan. Endi teoremaning 2), 3) - tasdiqlarini isbot qilamiz. (2.3.8) va (2.3.30) tengsizliklarga ko'ra

$$|\tilde{x}_n - \xi| \leq |\tilde{x}_n - x_n| + |x_n - \xi| \leq \gamma \sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} + \frac{\eta}{1-q} q^n. \quad (2.3.33)$$

Agar $0 < q_1 < 1$ bo'lsa, u holda $n \rightarrow \infty$ da

$$\sum_{i=1}^n q^{n-i} q_1^{i-1} \leq n[\max(q, q_1)]^{n-1} \rightarrow 0$$

bo'lgani uchun, (2.3.33) dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = \xi$$

kelib chiqadi. Agar $q_1 = 1$ bo'lsa, (2.3.33) dan (2.3.29) kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Izoh. 1) γ_n sonlarni iteratsiya metodining $(n+1)$ -qadamidagi yaxlitlash xatosi deb qarash mumkin.

Teorema 2.9 dan γ_n cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadek nolga intilgandagina $\tilde{x}_n$ ning ξ ildizga yaqinlashishi kelib chiqadi. Agar $|\gamma_n| \leq \gamma$ bo'lsa, bu teorema faqat $\tilde{x}_n$ bilan ξ orasidagi ayirmaning bahosini beradi.

2) $\gamma = 0$ bo'lganda biz iteratsiya metodining ideal holiga kelamiz. Umuuman olganda, yaqinlashish haqidagi teoremlarni teorema 2.9 dek ta'riflash kerak edi. Lekin shunga qaramasdan bundan keyin biz faqat ideal holni ko'rib chiqamiz.

2.4-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi. Iteratsiya metodining umumiy nazariyasi haqida tushuncha

2.4.1 Metrik fazo haqida tushuncha

Faraz qilaylik, X ixtiyoriy elementlarning to'plami bo'lsin. Agar X dan olingan ixtiyoriy ikkita x va y elementlar uchun shunday $\rho(x, y)$ funksiya mavjud bo'lib, u quyidagi shartlarni (metrik aksiomalarni) qanoatlantirsa, u holda X to'plam metrik fazoni tashkil etadi deyiladi:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$ va $\rho(x, y) = 0$ munosabat $x = y$ bo'lgandagina bajariladi,
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi),
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (uchburchak aksiomasi).

$\rho(x, y)$ funksiya esa metrika (yoki x va y elementlar orasidagi masofa) deyiladi. Metrik fazoning elementlari odatda uning nuqtalari deyiladi. X to'plamda masofani har xil usullar bilan kiritish mumkin, u holda X har xil metrik fazolarni hosil qiladi.

Faraz qilaylik, X n o'lchovli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorlar to'plami bo'lsin. Bu to'plamda biz uch xil masofa kiritamiz.

1. Kubik yoki m masofa. Bu quyidagi

$$\rho_m(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad (2.4.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. 1- va 2-aksiomalarining bajarilishi o'z-o'zidan ravshan. Uchinchi aksioma esa quyidagicha tekshiriladi:

$$\begin{aligned} \rho_m(x, y) &= \max_i |x_i - y_i| = \max_i |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq \\ &\leq \max_i (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_i |x_i - z_i| + \max_i |z_i - y_i| = \rho_m(x, z) + \rho_m(z, y). \end{aligned}$$

2. Oktaedrik yoki s masofa. Bu quyidagi

$$\rho_s(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (2.4.2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda ham uchinchi aksiomaning bajarilishini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} \rho_s(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| = \rho_s(\bar{x}, \bar{z}) + \rho_s(\bar{z}, \bar{y}). \end{aligned}$$

3. Sferik yoki l masofa. Bu masofa quyidagi

$$\rho_l(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.3)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda uchinchi aksiomani tekshirishda Koshi - Bunyakovskiy tengsizligi

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

dan foydalanamiz:

$$\rho_l^2(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \\ + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \leq \rho_i^2(\bar{x}, \bar{z}) + 2\rho_i(\bar{x}, \bar{z})\rho_i(\bar{z}, \bar{y}) + \rho_i^2(\bar{z}, \bar{y}) = [\rho_i(\bar{x}, \bar{z}) + \rho_i(\bar{z}, \bar{y})]^2,$$

ya'ni

$$\rho_i(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho_i(\bar{x}, \bar{z}) + \rho_i(\bar{z}, \bar{y}).$$

X to'plamda bu metrikalar yordamida kiritilgan fazolar o'zaro farqli metrik fazolardir.

m metrika bilan aniqlangan fazo odatda m_n orqali belgilanadi. Uchinchi metrika bilan aniqlangan fazo n o'lchovli Yevklid fazosidir.

X metrik fazoning

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_0) \leq \delta$$

shartni qanoatlantiradigan nuqtalarining to'plami markazi x_0 da va radiusi δ ga teng bo'lgan *yopiq shar* deyiladi.

Biror metrik fazodagi shar boshqa fazoda tamoman boshqa figurani tashkil etadi. Masalan, m_n fazodagi

$$\rho_m(\bar{x}, \bar{x}_0) \leq \delta$$

shar n o'lchovli Yevklid fazosida markazi $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ nuqtadagi n o'lchovli kubdan iboratdir. Xuddi shunga o'xshash

$$\rho_s(\bar{x}, \bar{x}_0) \leq \delta$$

shar esa markazi x_0 nuqtadagi oktaedrdan iboratdir.

Bizga keyinchalik uchburchak tengsizligining quyidagi natijasi kerak bo'ladi. Ixtiyoriy $x, y, z, u \in X$ nuqtalar uchun

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (2.4.4)$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham, uchburchak tengsizligiga ko'ra

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \quad (2.4.5)$$

tengsizliklarni yozishimiz mumkin. Bundan

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u), \quad (2.4.6)$$

bu tengsizlikda x, y lar bilan z, u larning mos ravishda o'rinlarini almashtir-sak,

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (2.4.7)$$

kelib chiqadi. Endi (2.4.4) tengsizlik (2.4.6) va (2.4.7) dan kelib chiqadi. Masofa metrik fazoda tabiiy ravishda yaqinlashish tushunchasiga olib keladi. X metrik fazoda biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik X fazoning x nuqtasiga yaqinlashadi deyiladi va $x_n \rightarrow x$ yoki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ kabi yoziladi. $\rho(x, y)$ masofa x va y elementlarning uzluksiz funksiyasi, ya'ni agar $x_n \rightarrow x$ va $y_n \rightarrow y$ bo'lsa, u holda:

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$$

ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, (2.4.4) tengsizlikda z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirsak:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y).$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni nolga intiladi. Demak,

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

Metrik fazoda har bir yaqinlashuvchi ketma-ketlik birgina limit nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Haqiqatan ham, $x_n \rightarrow x$ va $x_n \rightarrow y$, ya'ni limit nuqtalar ikkita x va y bo'lsin. U holda uchburchak tengsizligiga ko'ra

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Bu tengsizliklarning o'ng tomoni $n \rightarrow \infty$ da nolga intilganligi uchun $\rho(x, y) = 0$, ya'ni $x = y$.

X metrik fazodagi har qanday yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik Bolsano-Koshi alomatini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$, u holda berilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mavjudki, har qanday $n > n_0$ uchun $\rho(x_n, x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan $n > n_0$ va $m > n_0$ uchun

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

bo'ladi.

Teskarisi, umuman aytganda, noto'g'ridir, chunki shunday metrik fazolar mavjudki ularda ketma-ketlik uchun Bolsano-Koshi belgisining bajarilishidan bu ketma-ketlikning shu fazoda yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, ratsional sonlar to'plami Q da masofani $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ formula bilan kiritsak bu to'plam, ravshanki, metrik fazoga aylanadi, ammo bu fazoda $\left\{r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlik ratsional sonlar

ketma-ketligi bo'lib, ratsional songa yaqinlashmaydi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ -transsendent sonidir. Shuning uchun ham biz quyidagi ta'rifni kiritamiz.

Agar X metrik fazoda Bolsano-Koshi alomatini qanoatlantiruvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'liq metrik fazo deyiladi. To'liq metrik fazolar uchun yaqinlashish haqidagi teorema o'rinlidir: $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun bu ketma-ketlik Bolsano-Koshi alomatini qanoatlantirishi zarur va yetarlidir.

2.4.2 Qisqartirib aks ettirish prinsipi

Faraz qilaylik, X to'liq metrik fazo bo'lib, $\varphi(x)$ esa shu fazoda aniqlangan operator bo'lsin. Agar shunday birdan kichik musbat son mavjud bo'lib, ixtiyoriy ikki $x, y \in X$ elementlar uchun

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q\rho(x, y) \quad (2.4.8)$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni φ operator X fazo elementlarini yaqinlashtirsa, bu operator X fazoni o'ziga qisqartirib aks ettiradi deyiladi.

Biz endi

$$x = \varphi(x) \quad (2.4.9)$$

operatorli tenglamani yechish masalasini ko'rib chiqamiz.

Teorema 2.10. Agar $\varphi(x)$ operator va dastlabki yaqinlashish x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: 1)

$$\rho(x, x_0) \leq \delta \quad (2.4.10)$$

shardan olingan ixtiyoriy ikki x va y element uchun

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q\rho(x, y) \quad (0 < q < 1); \quad (2.4.11)$$

2) quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'lsa:

$$\rho(\varphi(x_0), x_0) < \eta, \quad \frac{\eta}{1-q} \leq \delta, \quad (2.4.12)$$

u holda (2.4.9) tenglama (2.4.10) sharda yagona ξ ildizga ega bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ket yaqinlashishlar bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$\rho(x_n, \xi) \leq \frac{\eta}{1-q} q^n \quad (2.4.13)$$

bilan aniqlanadi.

Isbot. Avvalo $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qurish mumkinligini, uning elementlari (2.4.10) sharda yotishini va

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \eta q^n \quad (2.4.14)$$

tengsizlik o'rinli ekanligini induksiya metodi bilan ko'rsatamiz. Shartga ko'ra x_0 (2.4.10) sharda yotadi va unda $\varphi(x)$ aniqlangan, shuning uchun $x_1 = \varphi(x_0)$ ni qurish mumkin. Keyin (2.4.12) dan $\rho(x_1, x_0) = \rho(\varphi(x_0), x_0) \leq \eta$ kelib chiqadi. Demak, (2.4.14) tengsizlik $n = 0$ da o'rinli ekan. Bundan tashqari, (2.4.12) ga ko'ra $\eta \leq \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$, demak, x_1 (2.4.10) sharda yotadi. Endi $x_1, x_2, \dots, x_n$ qurilgan, (2.4.10) sharda yotadi va ular uchun

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leq \eta q^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.4.15)$$

tengsizliklar o'rinli deb faraz qilamiz. Induksiya shartiga ko'ra x_n (2.4.10) sharda yotadi, $\varphi(x)$ operator (2.4.10) da aniqlangan, shuning uchun ham $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ni qurish mumkin. So'ngra, (2.4.11) ga ko'ra

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Endi (2.4.15) da $k = n-1$ deb olib, bundan

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \eta q^n$$

ni hosil qilamiz. Nihoyat, x_{n+1} ning (2.4.10) da yotishini ko'rsatish qoldi. Buning uchun $\rho(x_{n+1}, x_0)$ masofaga bir necha marta uchburchak tengsizligini qo'llaymiz va (2.4.15) dan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+1}, x_0) &\leq \rho(x_{n+1}, x_n) + \rho(x_n, x_{n-1}) + \dots + \rho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq \eta q^n + \eta q^{n-1} + \dots + \eta q^0 \leq \frac{\eta}{1-q} \leq \delta. \end{aligned}$$

Endi $\{x_n\}$ ning fundamental ketma-ketlik tashkil etishligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy p natural son uchun (2.4.14) ga ko'ra

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq \eta q^{n+p-1} + \dots + \eta q^n = \frac{\eta q^n (1 - q^p)}{1 - q} \leq \frac{\eta}{1 - q} \cdot q^n \end{aligned}$$

yoki

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\eta}{1-q} \cdot q^n. \quad (2.4.16)$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lib, X fazo yopiq bo'lgani uchun uning limiti $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjud.

Masofaning uzluksizligidan foydalanib $\rho(x_n, x_0) \leq \delta$ tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $\rho(\xi, x_0) \leq \delta$ kelib chiqadi, ya'ni ξ ham (2.4.10) da yotar ekan. Keyin, $\rho(\varphi(x_n), \varphi(\xi)) \leq q\rho(x_n, \xi)$ tengsizlikning o'ng tomoni nolga intilganligi sababli $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(\xi)$. Endi $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ tenglikda limitga o'tsak $\xi = \varphi(\xi)$ kelib chiqadi, demak, ξ (2.4.9) tenglamaning yechimi ekan. Endi bu ildizning yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, ξ_1 (2.4.9) tenglamaning (2.4.10) sferadagi biror yechimi bo'lsin, $\xi_1 = \xi$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham (2.4.11) ga ko'ra

$$\rho(\xi_1, \xi) = \rho(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi)) \leq q\rho(\xi_1, \xi),$$

$0 < q < 1$ bo'lganligi uchun bu munosabatlar faqat $\xi_1 = \xi$ bo'lgandagina bajariladi.

Nihoyat, (2.4.13) tengsizlikning bajarilishini ko'rsatish qoldi. Uni ko'rsatish uchun (2.4.16) tengsizlikda $p \rightarrow \infty$ da limitga o'tish kifoyadir. ■

2.4.3 Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini iteratsiya metodi bilan yechish

Biz endi iteratsiya metodi bilan

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.4.17)$$

tenglamalar sistemasini yechish masalasiga o'tamiz. Buning uchun avvalo (2.4.17) sistemani biror usul bilan quyidagi kanonik shaklga keltirib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Faraz qilaylik, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ dastlabki yaqinlashish topil-

gan bo'lsin, u holda keyingi yaqinlashishlar quyidagicha topiladi:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{cases} \quad (2.4.19)$$

Bu iteratsion jarayon yaqinlashishining yetarli shartlarini aniqlash uchun qisqartirib aks ettirish prinsipini qo'llaymiz. Shu maqsadda n o'lchovli vektorlar fazosi R_n da $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor va (2.4.18) sistemaning o'ng tomonidagi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ funksiyalarning qiymatlaridan tuzilgan $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ vektorni olib $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ operatorni aniqlaymiz. Bu operator R_n ni R_n ga yoki R_n ning biror qismiga akslantiradi deb faraz qilamiz. Bu operator yordamida (2.4.18) sistema

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}), \quad (2.4.20)$$

(2.4.19) iteratsion jarayon esa

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\varphi}(\bar{x}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4.21)$$

ko'rinishida yoziladi. Endi (2.4.20) tenglamaga 1-teoremani qo'llash uchun teoremaning (2.4.11) shartida qatnashadigan q ni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ lar orqali ifodalash kerak. Bunday ifoda masofaga bog'liqdir. Biz yuqorida R_n fazoda uch xil masofa tushunchasini kiritgan edik. Har bir masofada q ning ifodasini topamiz.

I. m masofada: $\rho_m(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) \leq \delta$ shardan ixtiyoriy ikkita $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektor olib va $\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x})$ funksiyalar bu sharda uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb faraz qilib, bu nuqtalar tasvirlarining $\varphi_i(\bar{x})$ va $\varphi_i(\bar{y})$ koordinatalarini ko'ramiz:

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(\bar{y})| &= |\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j} (x_j - y_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right| \right) \rho_m(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Bu yerda hosilaning qiymati $\bar{x}$ va $\bar{y}$ nuqtalarni birlashtiradigan to'g'ri chiziqning $\bar{x}$ nuqtasida hisoblangan. Bu nuqta $\bar{x}, \bar{y}$ va i ga bog'liqdir.

Yuqoridagi baho $\bar{x}, \bar{y}$ va i ga bog'liq bo'lmasligi uchun

$$\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right| \text{ ni } \max_i \max_{\bar{x}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$$

ga almashtiramiz, bu yerda $\bar{x}$ bo'yicha maksimum $\rho_m(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) \leq \delta$ shardagi eng katta qiymatni bildiradi.

Natijada biz

$$\rho_m(\bar{\varphi}(\bar{x}), \bar{\varphi}(\bar{y})) \leq \max_i \max_{\bar{x}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \rho_m(\bar{x}, \bar{y})$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ko'rinadiki, teorema 2.10 ning (2.4.11) shartidagi q sifatida

$$q_m = \max_i \max_{\bar{x}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \quad (2.4.22)$$

ni olishimiz mumkin.

II. *s masofada*. Yuqoridagiga o'xshash ishlarni $\rho_s(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) \leq \delta$ sharda bajarib quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(\bar{y})| \leq \sum_{i=1}^n \max_i \max_{\bar{x}} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right| \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

Bundan esa

$$\rho_s(\bar{\varphi}(\bar{x}), \bar{\varphi}(\bar{y})) \leq q_s \rho_s(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$q_s = \sum_{i=1}^n \max_i \max_{\bar{x}} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right|$$

kelib chiqadi.

III. *l masofada*. Qaralayotgan $\rho_l(\bar{x}, \bar{x}^{(0)}) \leq \delta$ shar Yevklid fazosidagi

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \delta$$

shardan iboratdir. Bu shardan ixtiyoriy ikkita $\bar{x}$ va $\bar{y}$ nuqtalarni olib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$|\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(\bar{y})|^2 = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(\bar{x})}{\partial x_j} (x_j - y_j) \right|^2 \leq \max_{\bar{x}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2 \cdot \rho_s^2(\bar{x}, \bar{y});$$

$$\rho_i^2(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) = \sum_{i=1}^n [\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(\bar{y})]^2 \leq q_i^2 \rho_i^2(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$q_i^2 = \sum_{i=1}^n \max_x \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)^2.$$

Shunday qilib, uchala masofada ham q ning ifodasini topdik. Endi teorema 2.10 dan foydalanib, iteratsiya jarayoni yaqinlashishining yetarli shartini berish mumkin. Biz buni faqat m masofa uchun ta'riflaymiz, qolgan ikkita masofa uchun teoremani ta'riflashni o'quvchilarga havola qilamiz.

Teorema 2.11. *Faraz qilaylik:*

1) $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, n}$) funksiyalar

$$\max_i |x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta \quad (2.4.23)$$

sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin;

2) bu sohada

$$\max_{\bar{x}} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \leq q < 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.4.24)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin;

3) dastlabki yaqinlashish $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ uchun

$$|x_i^{(0)} - \varphi_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \leq \eta \quad (i = \overline{1, n}), \quad \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$$

shartlar bajarilsin. U holda (2.4.18) tenglamalar sistemasi (2.4.23) sohada yagona $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ yechimga ega bo'lib, (2.4.19) tengliklar bilan aniqlanadigan ketma-ket yaqinlashishlar bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$|\xi_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\eta}{1-q} q^n \quad (i = \overline{1, n})$$

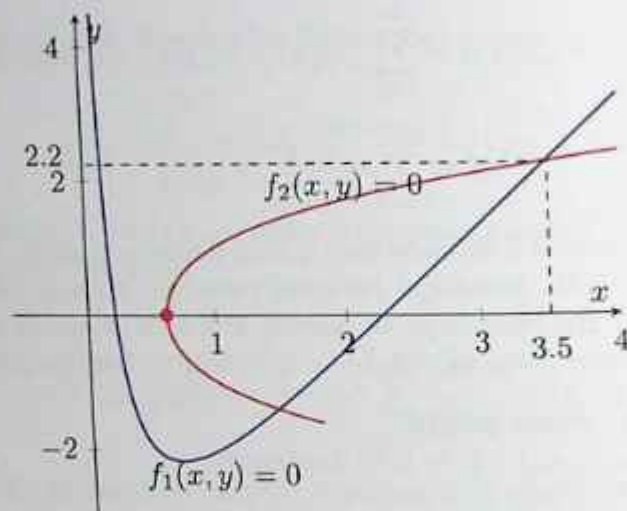
tengsizliklar bilan baholanadi.

Endi oddiy iteratsiya metodi yordamida misol yechishni ko'rsatamiz.

Misol 2.10. *Quyidagi*

$$f_1(x, y) \equiv 2x^2 - x(y + 5) + 1 = 0, \quad f_2(x, y) = x + 3 \lg x - y^2 = 0$$

sistemaning musbat ildizlari to'rtta ma'noli raqam bilan topilsin.



Chizma 2.4.1

Yechish: $f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz (chizma 2.4.1).

Bizni qiziqtiradigan ildizning taqribiy qiymati $x_0 = 3,5$; $y_0 = 2,2$ dir. Iteratsiya metodini qo'llash uchun bu sistemani quyidagi

$$x = \sqrt{0,5[x(y+5) - 1]} \equiv \varphi_1(x, y),$$

$$y = \sqrt{x + 3 \lg x} \equiv \varphi_2(x, y)$$

kanonik shaklga keltiramiz. Endi teorema 2.11 ning shartlarini tekshiraylik. Buning uchun dastlabki yaqinlashishning

$$|x - 3,5| \leq 0,1; \quad |y - 2,2| \leq 0,1$$

atrofida (2.4.24) shartni tekshirib ko'ramiz:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3M}{x}}{2\sqrt{x + 3 \lg x}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0,$$

bu yerda $M = 0,43429$ - o'tish moduli.

Quyidagi bahoga ega bo'lamiz:

$$\max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| \leq \frac{(2,3+5)\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4(2,1+5)}} < 0,54;$$

$$\max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq \frac{3,6\sqrt{2}}{4\sqrt{3,4(2,1+5)}-1} < 0,27;$$

$$\max_{x,y} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq \frac{1 + \frac{3,0,434}{3,4}}{2\sqrt{3,4 + 2\lg 3,4}} < 0,42; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Bundan

$$\max_{x,y} \left(\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \right) \leq 0,81; \quad \max_{x,y} \left(\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \right) \leq 0,42.$$

k	x_k	y_k
0	3,5	2,2
1	3,479	2,259
2	3,481	2,260
3	3,484	2,261
4	3,486	2,261
5	3,487	2,262
6	3,487	2,262

Jadval 2.4: x_k va y_k ketma-ket yaqinlashishlarning qiymatlari.

Demak, $q = 0,81$ va iterasiya jarayoni yaqinlashadi. Ketma-ket yaqinlashishlarni

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{x_k(y_k + 5) - 1}{2}}, \quad y_{k+1} = \sqrt{x_k + 3 \lg x_k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

formulalar yordamida olib boramiz. x_k va y_k ketma-ket yaqinlashishlarning qiymatlari jadval 2.4 da keltirilgan. Shunday qilib, taqribiy yechim sifatida

$$\xi_1 = 3,487; \quad \xi_2 = 2,262$$

ni olishimiz mumkin. ■

2.5-§. Tenglamalarni yechishning yuqori tartibli iteratsion metodlari

2.5.1 Umumiy mulohazalar

Avval oddiy iteratsiya metodi bilan tanishganimizda ko'rgan edikki, x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) taqribiy qiymatlar ketma-ketligi ξ yechimga yaqin bo'lsa, xato $\varepsilon_n = \xi - x_n$ umuman aytganda,

$$\varepsilon_n = \varphi'(\xi)\varepsilon_{n-1}$$

qonun bilan o'zgaradi, ya'ni n -qadamdagi xato $(n-1)$ -qadamdagi xatoga proporsionaldir. Agar $|\varphi'(\xi)| < 1$ bo'lsa, u vaqtda ε_n xato maxraji $\varphi'(\xi)$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya qonuni bo'yicha o'zgaradi. Shunday metodlar ham mavjudki, ularda n -qadamdagi xato $(n-1)$ -qadamdagi xatoning m -darajasiga proporsionaldir ($m \geq 2$), ya'ni $\varepsilon_n = \bar{\Phi}(\xi)\varepsilon_{n-1}^m$. Masalan, Nyuton metodida xatoning o'zgarish qonuni (6-§ ga q.)

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \varepsilon_{n-1}^2$$

kabi bo'ladi. Bu yerda n -qadamdagi xato $(n-1)$ -qadamdagi xatoning kvadratiga proporsionaldir. Shuning uchun ham bu yerda *xato kvadratik qonun bilan o'zgaradi* deb aytiladi.

Endi *iteratsiya tartibi* degan tushunchani umumiy holda kiritamiz. Agar

$$\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\xi) = 0, \quad \varphi^{(p)}(\xi) \neq 0$$

bo'lsa, u holda

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

iteratsion jarayon p -tartibga ega yoki uning yaqinlashish tartibi p ga teng deyiladi. Agar ξ ildiz atrofidan $\varphi(x)$ funksiya p -tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda Teylor formulasiga ko'ra

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\varphi^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k + \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!} (x - \xi)^p,$$

bu yerda $\eta \in (x, \xi)$.

Bundan iteratsiyaning tartibi p bo'lganda

$$\varphi(x) - \xi = \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!} (x - \xi)^p,$$

o'z navbatida

$$x_n - \xi = \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{p!} (x_{n-1} - \xi)^p$$

kelib chiqadi.

Bu paragrafda $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlarini topish uchun yuqori tartibli iteratsion metodni qurishning ikkitasini ko'rib o'tamiz.

2.5.2 Chebishev metodi

P.L. Chebishev 1838-yilda berilgan $f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $g(y)$ funksiyani Teylor formulasi yordamida tasvirlash yo'li bilan yuqori tartibli iteratsiyani qurish metodini taklif etdi.

Faraz qilaylik, $f(x) = 0$ tenglamaning $x = \xi$ ildizi $[a, b]$ oraliqda yotsin va $f(x)$ funksiya hamda uning yetarlicha yuqori tartibli hosilalari uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari bu oraliqning barcha nuqtalarida $f(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda $f'(x)$ bu oraliqda o'z ishorasini saqlaydi va $f(x)$ monoton funksiya bo'lib, $x = g(y)$ teskari funksiyaga ega bo'ladi. Teskari funksiya $g(y)$ $f(x)$ ning o'zgarish sohasi $[c, d]$ da aniqlangan bo'lib, $f(x)$ qancha uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u ham shuncha uzluksiz hosilalarga ega bo'ladi. Teskari funksiyaning ta'rifiga ko'ra

$$x \equiv g(f(x)) \quad (x \in [a, b]), \quad y \equiv f(g(y)) \quad (y \in (c, d)). \quad (2.5.1)$$

Demak,

$$\xi = g(0). \quad (2.5.2)$$

Agar $y \in [c, d]$ bo'lsa, u holda Teylor formulasidan

$$\xi = g(0) = g(y - y) = g(y) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(y)}{k!} y^k + (-1)^p \frac{g^{(p)}(\eta)}{p!} y^p, \quad (2.5.3)$$

bu yerda η soni 0 va y orasida yotadi. Yoki y o'rniga $f(x)$ ni qo'yib va $g(y) = x$ ni nazarda tutib,

$$\xi = x + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} f^k(x) + (-1)^p \frac{g^{(p)}(\eta)}{p!} f^p(x) \quad (2.5.4)$$

ni hosil qilamiz. Agar

$$\varphi_p(x) = x + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(x))}{k!} f^k(x)$$

deb belgilab olsak, u holda

$$x = \varphi_p(x) \quad (2.5.5)$$

tenglama uchun $x = \xi$ yechim bo'ladi, chunki

$$\varphi_p(\xi) = \xi + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \frac{g^{(k)}(f(\xi))}{k!} f^k(\xi) = \xi.$$

Bundan

$$\varphi_p^{(j)}(\xi) = 0, \quad j = \overline{1, p-1}$$

bo'lganligi sababli

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x_0 \in [a, b]) \quad (2.5.6)$$

iteratsion jarayon p -tartibli bo'ladi. Agar x_0 ξ ga yaqin bo'lsa, u holda (2.5.6) bilan aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik ξ ga yaqinlashadi. Haqiqatan ham, $\varphi'_p(\xi) = 0$ bo'lganligi uchun ξ ning shunday atrofi topiladiki, u yerda $|\varphi'_p(x)| \leq q < 1$ bo'ladi. Bundan esa x_0 ξ ga yetarlicha yaqin bo'lsa $\{x_n\}$ iteratsion ketma-ketlikning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Endi $\varphi_p(x)$ ning $f(x)$ va uning hosilalari orqali oshkor ifodasini topamiz. Buning uchun (2.5.1) ayniyatdan ketma-ket hosilalar olamiz:

$$\begin{cases} g'(f(x))f'(x) = 1, \\ g''(f(x))f'^2(x) + g'(f(x))f''(x) = 0, \\ g'''(f(x))f'^3(x) + 3g''(f(x))f'(x)f''(x) + g'(f(x))f'''(x) = 0, \\ \vdots \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Bu yerdan biz ketma-ket $g'(f(x)), g''(f(x)), \dots, g^{(p-1)}(f(x))$ larni va shu bilan birga $\varphi_p(x)$ ni aniqlaymiz. (2.5.6) iteratsiya jarayonini p ning bir nechta konkret qiymatlarida oshkor ko'rinishga keltiramiz. $p = 2$ bo'lganda

$$\varphi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{va} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.5.8)$$

Biz keyinchalik ko'ramizki, bu jarayon Nyuton jarayoni bilan ustma-ust tushadi. $p = 3$ bo'lganda (2.5.5) va (2.5.7) dan

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x)]^3}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

kelib chiqadi. $p = 4$ uchun

$$\varphi_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)f^2(x)}{2[f'(x)]^3} - \frac{f^3(x)}{12} \cdot \frac{3f''^2(x) - f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

va

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} - \frac{f^3(x_n)}{12} \cdot \frac{3f''^2(x_n) - f'(x_n)f'''(x_n)}{[f'(x_n)]^5} \quad (2.5.10)$$

ni hosil qilamiz. Bu iteratsion jarayonlar mos ravishda 2, 3 va 4-tartibli iteratsiyalar bo'ladi.

Endi $\varepsilon_n = \xi - x_n$ xatoning nolga intilish tezligini baholaymiz. Buning uchun (2.5.4) tenglikda $x = x_n$ deb olib, (2.5.6) ni nazarda tutib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\xi - x_{n+1} = \frac{(-1)^p g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!} f^p(x_n), \quad (2.5.11)$$

bu yerda $\tilde{x}$ bu ξ bilan x_n orasida yotadi, $f(\xi) = 0$ bo'lganligi uchun

$$f(x_n) = -[f(\xi) - f(x_n)] = -(\xi - x_n)f'(\tilde{x}) \quad (2.5.12)$$

($\tilde{x}$ ham ξ bilan x_n orasida yotadi). (2.5.12) ni (2.5.11) ga qo'yamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!} [f'(\tilde{x})]^p \varepsilon_n^p. \quad (2.5.13)$$

Quyidagi

$$q = \max_{\tilde{x}, \tilde{x} \in [a, b]} \left| \frac{g^{(p)}(f(\tilde{x}))}{p!} [f'(\tilde{x})]^p \right|$$

belgilashni kiritib, (2.5.13) dan

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq q |\varepsilon_n|^p \quad (2.5.14)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikni ketma-ket qo'llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$|\varepsilon_n| \leq q^{1+p+\dots+p^{n-1}} |\varepsilon_0|^{p^n} = (q|\varepsilon_0|)^{\frac{p^n-1}{p-1}} |\varepsilon_0|^{\frac{p^n(p-1)}{p-1}}.$$

Agar $|\varepsilon_0| < 1$ va $q|\varepsilon_0| = \omega < 1$ bo'lsa, u holda

$$|\varepsilon_n| < \omega^{\frac{p^n-1}{p-1}} \quad (2.5.15)$$

bo'ladi, bu esa (2.5.6) iteratsiyaning nihoyatda tez yaqinlashishini ko'rsatadi. Xususiyl holda $\omega \leq 10^{-1}$ va $|\varepsilon_0| < 1$ bo'lsa, yuqoridagi (2.5.8), (2.5.9) va (2.5.10) iteratsiyalar uchun mos ravishda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$p = 2$ uchun

$$|\varepsilon_1| \leq 10^{-1}, \quad |\varepsilon_2| \leq 10^{-3}, \quad |\varepsilon_3| \leq 10^{-7}, \quad |\varepsilon_4| \leq 10^{-15}, \dots$$

$p = 3$ uchun

$$|\varepsilon_1| \leq 10^{-1}, \quad |\varepsilon_2| \leq 10^{-4}, \quad |\varepsilon_3| \leq 10^{-13}, \quad |\varepsilon_4| \leq 10^{-40}, \dots$$

$p = 4$ uchun

$$|\varepsilon_1| \leq 10^{-1}, \quad |\varepsilon_2| \leq 10^{-5}, \quad |\varepsilon_3| \leq 10^{-18}, \quad |\varepsilon_4| \leq 10^{-85}, \dots$$

Demak, $\omega \leq 0,1$ bo'lganda uchinchi iteratsiyaning o'zi bizga kerakli aniqlikni beradi.

2.5.3 Eytken metodi

A. Eytken 1937-yilda xos son va xos vektorlarni topishdagi iteratsion jarayonni yaxshilash metodini taklif qilgan edi. Umuman olganda, Eytken metodini har qanday iteratsion jarayonga ham qo'llash mumkin. Biz hozir ana shu metodni ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga $x = \xi$ ga yaqinlashuvchi p -tartibli jarayon

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

berilgan bo'lsin. $\varphi(x)$ funksiya yordamida

$$\Phi(x) = \frac{x \cdot \varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} \quad (2.5.16)$$

funksiyani tuzamiz.

Agar $\varphi'(\xi) \neq 1$ va $p = 1$ bo'lsa, u holda

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad (2.5.17)$$

iteratsion jarayonning tartibi 2 dan kichik bo'lmaydi, $p > 1$ bo'lganda esa $2p - 1$ dan kichik bo'lmaydi. Bu tasdiqlarni isbot qilamiz.

Umumiylikka zarar yetkazmasdan, $\xi = 0$ deb olishimiz mumkin. Agar $\xi \neq 0$ bo'lsa, $x = \xi + z$, $\varphi(x) - \xi = \varphi(\xi + z) - \xi = \omega(z)$ belgilashlarni

kiritamiz. U holda $x = \varphi(x)$ tenglama $z = \omega(z)$ tenglamaga o'tadi, $\omega(z)$ uchun qurilgan (2.5.16) funksiya

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \frac{z\omega(\omega(z)) - \omega^2(z)}{z - 2\omega(z) + \omega(\omega(z))} = \frac{(x - \xi)\omega(\varphi(x) - \xi) - (\varphi(x) - \xi)^2}{x - \xi - 2(\varphi(x) - \xi) + \omega(\varphi(x) - \xi)} = \\ &= \frac{(x - \xi)[\varphi(\varphi(x)) - \xi] - (\varphi(x) - \xi)^2}{x - \xi - 2(\varphi(x) - \xi) + \varphi(\varphi(x)) - \xi} = \\ &= \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x) - \xi[x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))]}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))} = \Phi(x) - \xi\end{aligned}$$

ga o'tadi. Demak, $\xi = 0$ deb olishimiz mumkin, $x_n = \varphi(x_{n-1})$ p -tartibli iteratsiya bo'lganligi uchun $\varphi(x)$ ning $x = 0$ nuqta atrofidagi yoyilmasi quyidagi

$$\varphi(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yoyilmani (2.5.16) ga qo'ysak,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{x[\alpha_p(\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots)^p + \dots] - (\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots)^2}{x - 2(\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots) + [\alpha_p(\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots)^p + \dots]} = \\ &= \frac{x(\alpha_p^{p+1} x^{p^2} + \dots) - (\alpha_p^2 x^{2p} + 2\alpha_p \alpha_{p+1} x^{2p+1} + \dots)}{x - 2\alpha_p x^p + \alpha_p^{p+1} x^{p^2} - 2\alpha_p \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots}\end{aligned}\quad (2.5.18)$$

hosil bo'ladi. Bu ifodani $p = 1$ va $p > 1$ hollar uchun alohida-alohida tekshiramiz. Agar $p = 1$ bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ ning suratida x ning darajasi uchdan kichik emas (chunki ikkinchi darajali hadlari o'zaro bir-birlarini yo'qotishadi), maxrajida esa x oldidagi koeffitsiyent

$$1 - 2\alpha_p + \alpha_p^2 = 1 - 2\alpha_1 + \alpha_1^2 = (1 - \varphi'(0))^2 \neq 0.$$

Demak, maxrajda x ning birinchi darajasi mavjud va $\Phi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo'lmaganda x^2 dan boshlanadi. Shuning uchun ham $\Phi'(\xi) = 0$ va (2.5.17) iteratsiyaning tartibi 2 dan kichik emas.

Agar $p > 1$ bo'lsa, (2.5.18) ning suratida x ning eng kichik darajasi $2p$ ga teng bo'lib, maxrajda x ning 1-darajasi qatnashadi. Demak, $\Phi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo'lmaganda x^{2p-1} dan boshlanadi. Ya'ni hech bo'lmaganda $j = 1, 2, \dots, 2p - 2$ lar uchun $\Phi(\xi) = 0$. Bu esa (2.5.17) iteratsiyaning tartibi hech bo'lmaganda $2p - 1$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

1-izoh. Agar dastlabki yaqinlashish x_0 ξ ga har qancha yaqin bo'lganda ham, $\varphi(x)$ bilan aniqlangan iteratsiya yaqinlashmasa (masalan,

$|\varphi'(\xi)| > 1$ bo'lganda) ham (2.5.17) iteratsiya, x_0 ξ ga yetarlicha yaqin bo'lganda yaqinlashadi. Chunki $\Phi'(\xi) = 0$ bo'lganligi uchun $x = \xi$ ning shunday atrofi topiladiki, u yerda $|\Phi''(\xi)| \leq q < 1$ bo'ladi. Bu esa, x_0 shu atrofdan olingan bo'lsa, $x_n = \Phi(x_{n-1})$ iteratsiyaning yaqinlashishi uchun yetarli shartdir.

2-izoh. (2.5.16) bilan aniqlangan $\Phi(x)$ ning oshkor ko'rinishi ma'lum bo'lmasa ham (2.5.17) formula bilan iteratsiyani qurish mumkin. Buni quyidagi usul bilan bajarish mumkin. x_0 dan boshlab avvalo

$$x_1 = \varphi(x_0) \text{ va } x_2 = \varphi(x_1)$$

quriladi. Keyin esa x_3 ni

$$x_3 = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

formula yordamida aniqlaymiz.

Agar $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta^2 x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i$ deb belgilab olsak, x_3 ni quyidagicha yozishimiz ham mumkin:

$$x_3 = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0}.$$

Navbatdagi iteratsiyalarni

$$x_4 = \varphi(x_3), \quad x_5 = \varphi(x_4), \quad x_6 = x_5 - \frac{(\Delta x_3)^2}{\Delta^2 x_3}$$

formulalar yordamida quramiz va h.k.

Shunday qilib, biz quyidagi iteratsion jarayonga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_{3i+1} &= \varphi(x_{3i}), \\ x_{3i+2} &= \varphi(x_{3i+1}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \\ x_{3i+3} &= x_{3i} - \frac{(\Delta x_{3i})^2}{\Delta^2 x_{3i}}. \end{aligned}$$

Oxirgi formulaning ko'rinishiga qarab, odatda Eytken metodi *Eytkenning* δ^2 -jarayoni deyiladi.

2.6-§. Nyuton metodi

2.6.1 Bitta sonli tenglama bo'lgan hol

Nyuton metodi sonli tenglamalarni yechishning juda ham effektiv metodidir. Bu metodning afzalligi shundan iboratki, hisoblash sxemasi murakkab bo'lmagan holda ketma-ket yaqinlashishlar ildizga tez yaqinlashadi.

Nyuton metodi iteratsiya metodi kabi universal metoddir. Bu metod yordamida sonli tenglamalarning haqiqiy va kompleks ildizlarini topish hamda keng sinfdagi chiziqli bo'lmagan funksional tenglamalarni yechish mumkin. Formal nuqtayi nazardan qaralganda, Nyuton metodi iteratsiya metodining xususiy holidir, aslida esa bu metodning g'oyasi iteratsiya metodining g'oyasidan tamoman farqlidir. Bu metod chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechish masalasini chiziqli masalalarning ketma-ketligini yechishga olib keladi. Buning uchun berilgan tenglamadan uning bosh chiziqli qismi ajratib olinadi. Biz avval bitta sonli tenglama uchun Nyuton metodini ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga

$$f(x) = 0 \quad (2.6.1)$$

tenglama va uning ildiziga dastlabki yaqinlashish qiymati x_0 berilgan bo'lsin. Bu yerda $f(x)$ ni yetarlicha silliq funksiya deb olamiz. Odatdagidek, (2.6.1) tenglamaning aniq ildizini ξ orqali belgilaymiz. Endi $\xi = x_0 + h$ deb olib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqta atrofidagi Teylor qatori yoyilmasidagi dastlabki ikkita hadini olib nolga tenglashtirsak, h ga nisbatan quyidagi

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani yechib, h xatoning taqribiy qiymatini topamiz:

$$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Bu tuzatmani $\xi = x_0 + h$ ga keltirib qo'yib, navbatdagi yaqinlashish

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ni topamiz. Xuddi shunga o'xshash

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6.2)$$

ketma-ket yaqinlashishlarni hosil qilamiz. Bu formulalar yordamida Nyuton ketma-ketligini hosil qilish uchun x_n lar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida yotishi va ular uchun $f'(x_n) \neq 0$ bo'lishi kerak.

Nyuton metodi juda ham sodda geometrik ma'noga ega. Haqiqatan ham, $y = f(x)$ funksiyaning

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \quad (2.6.3)$$

to'g'ri chiziq bilan almashtiramiz, bu to'g'ri chiziq esa $M_n(x_n, f(x_n))$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinmadir (2.6.1-chizma). Bu urinmaning abssissa o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_{n+1} bilan belgilasak, (2.6.3) dan (2.6.2) kelib chiqadi. Shuning uchun, Nyuton metodi *urinmalar metodi* deb ham yuritiladi. Nyuton metodini iteratsiya metodidan keltirib chiqarish ham mumkin, buning uchun (2.6.1) tenglamaning $x = \varphi(x)$ kanonik ko'rinishida

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

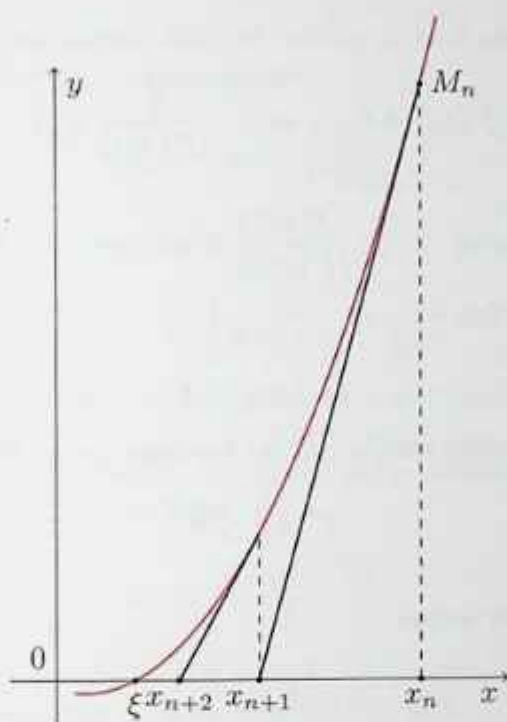
deb olish kifoyadir.

2.6.2 Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi teoremlar

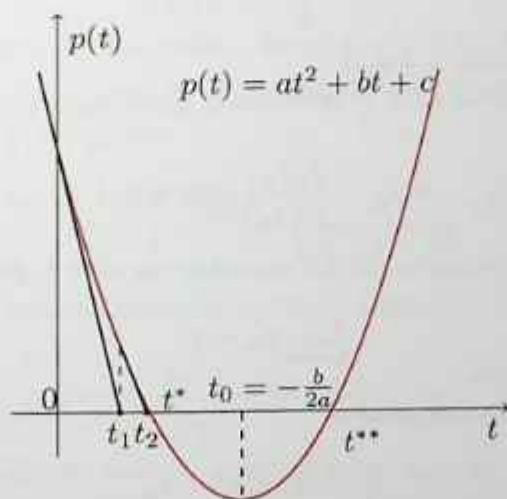
Biz yuqorida aytganimizdek, Nyuton metodidan umumiy ko'rinishdagi funksional tenglamalarni yechishda ham foydalanish mumkin. Bunday tadqiqotlar L.V. Kantorovich tomonidan olib borilgan. Quyida keltirilgan teoremlar ham L.V. Kantorovichga tegishlidir. Bu teoremlarni isbotlashda

$$P(t) = at^2 + bt + c = 0 \quad (2.6.4)$$

kvadrat tenglama uchun tuzilgan $\{t_n\}$ Nyuton ketma-ketligining yaqinlashishi muhim ahamiyatga egadir, bu yerda a, b, c lar haqiqiy sonlar bo'lib, $b^2 - 4ac \geq 0$. Bu tenglama haqiqiy ildizlarga ega. Ularning kichigini t^* va kattasini t^{**} bilan belgilab olamiz (2.6.2-chizma). Dastlabki yaqinlashish sifatida ixtiyoriy $t_0 \neq -\frac{b}{2a}$ ni olamiz. Chizmadan ko'rinishidagi, $t_0 \in (t^*, t^{**})$ da yotsa, hisoblashning bir qadamidan keyin u bu oraliqdan chiqib ketadi va t_0 bu oraliqdan tashqarida yotsa, Nyutonning $\{t_n\}$ ketma-ketligi t_0 ga yaqin ildizga monoton yaqinlashadi.



Chizma 2.6.1



Chizma 2.6.2

Teorema 2.12. Agar $f(x)$ va dastlabki qiymat x_0 quyidagi shartlarni

qanoatlantirsa;

1.

$$f'(x_0) \neq 0 \quad \text{va} \quad \frac{1}{|f'(x_0)|} \leq B; \quad (2.6.5)$$

2.

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta \quad (2.6.6)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa;

3. $f(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \leq \delta \quad (2.6.7)$$

oraligda ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega va bu oraligning barcha nuqtalarida

$$|f''(x)| \leq K \quad (2.6.8)$$

bo'lsa;

4. B, K, η sonlar uchun

$$h = BK\eta \leq \frac{1}{2} \quad (2.6.9)$$

shart bajarilsa;

5. Hamda

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta \quad (2.6.10)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda:

1) (2.6.1) tenglama (2.6.7) oraligda ξ yechimga ega bo'ladi;

2)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6.11)$$

ketma-ket yaqinlashishlarni qurish mumkin va ular ξ ga yaqinlashadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi;$$

3) yaqinlashish tezligi uchun

$$|\xi - x_n| \leq t^* - t_n \quad (2.6.12)$$

baho o'rinli bo'lib, bu yerda t_n esa

$$P(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{B} + \frac{\eta}{B} = 0 \quad (2.6.13)$$

kvadrat tenglamaning kichik ildizi t^* uchun $t_0 = 0$ dan boshlab qurilgan Nyuton ketma-kegligining n -elementidir:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{P(t_n)}{P'(t_n)}.$$

Isbot. (2.6.9) shartga ko'ra $0 < h \leq \frac{1}{2}$ bo'lganligi uchun $P(t)$ ko'phadning

$$\frac{1}{B^2} - 4 \cdot \frac{1}{2} K \cdot \frac{\eta}{B} = \frac{1 - 2h}{B^2}$$

diskriminanti manfiy emas, shuning uchun ham tenglamaning har ikkala ildizi haqiqiy va

osonlik bilan ko'rish mumkinki, ular musbatdir. Dastlabki yaqinlashish t_0 (2.6.13) tenglamaning kichik ildizi

$$t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$$

ga yaqin turganligi uchun t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ketma-ketligi t^* ga yaqinlashadi va shu bilan birga $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ bo'ladi.

Induksiya metodini qo'llab, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qurish mumkinligini, uning barcha elementlarining (2.6.7) oraliqda yotishini va

$$|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n \quad (2.6.14)$$

baho o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Avval $n = 0$ holni ko'raylik, x_0 (2.6.7) oraliqla yotganligi va $f'(x_0) \neq 0$ bo'lganligi uchun $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ni topamiz. $0 < h \leq \frac{1}{2}$ bo'lganda

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2h}}$$

kasrning (1, 2] da yotishi ko'rinib turibdi. Demak, (2.6.6) va (2.6.10) ga ko'ra

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta,$$

ya'ni x_1 (2.6.7) oraliqda yotadi. Shartga ko'ra $t_0 = 0$,

$$t_1 = t_0 - \frac{P(t_0)}{P'(t_0)} = \frac{\frac{\eta}{B}}{\frac{1}{B}} = \eta, \quad t_1 - t_0 = \eta$$

va $|x_1 - x_0| \leq \eta$ bo'lganligi uchun, (2.6.14) tengsizlik $n = 0$ uchun o'rinlidir.

Faraz qilaylik, $x_0, x_1, \dots, x_n$ lar qurilgan bo'lib, (2.6.7) oralig'ida yotsin va ular uchun

$$|x_{k+1} - x_k| \leq t_{k+1} - t_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2.6.15)$$

tengsizliklar bajarilsin.

Farazga ko'ra, x_n (2.6.7) da yotadi va $f(x_n), f'(x_n)$ ma'noga ega. Faqat $f'(x_n) \neq 0$ ekanligini ko'rsatish kerak. Chizma 2.6.2 dan ko'rinib turibdiki, $-P'(t_n) > 0$. Buni nazarda tutib quyidagi

$$\begin{aligned} |f'(x_n)| &= \left| f'(x_0) + \int_{x_0}^{x_n} f''(t) dt \right| \geq \frac{1}{B} - K|x_n - x_0| = \\ &= \frac{1}{B} - K|(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0)| \geq \\ &\geq \frac{1}{B} - K[(t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}) + \dots + (t_1 - t_0)] = \\ &= \frac{1}{B} - K(t_n - t_0) = \frac{1}{B} - Kt_n = -P'(t_n) \end{aligned}$$

munosabatlardan $|f'(x_n)| \geq -P'(t_n) > 0$ ni hosil qilamiz.

Endi $f(x_n)$ ni baholaymiz. Buning uchun $f(x_n)$ ning x_{n-1} atrofida Teylor qatori yoyilmasidan foydalanamiz:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(c)(x_n - x_{n-1})^2 \quad (c \in [x_{n-1}, x_n]).$$

Bundan esa, (2.6.11) ga ko'ra

$$f(x_n) = \frac{1}{2}f''(c)(x_n - x_{n-1})^2.$$

Endi (2.6.8) va induksiya sharti (2.6.15) dan

$$|f(x_n)| \leq \frac{K}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \frac{K}{2}(t_n - t_{n-1})^2 \quad (2.6.16)$$

kelib chiqadi.

Shunga o'xshash hisoblashlarni $P(t_n)$ uchun bajarsak:

$$P(t_n) = \frac{1}{2}P''(c)(t_n - t_{n-1})^2 = \frac{K}{2}(t_n - t_{n-1})^2 \quad (2.6.17)$$

hosil bo'ladi.

(2.6.16) - (2.6.17) lardan

$$|f(x_n)| \leq P(t_n)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak,

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq -\frac{P(t_n)}{P'(t_n)} = t_{n+1} - t_n,$$

ya'ni (2.6.15) baho $k = n + 1$ uchun o'rinli ekanligini ko'ramiz. Endi faqat x_{n+1} ning (2.6.7) oraliqda yotishligini ko'rsatsak kifoya. Bu esa quyidagi tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |(x_{n+1} - x_n) + \dots + (x_1 - x_0)| \leq \\ &\leq (t_{n+1} - t_n) + \dots + (t_1 - t_0) = t_{n+1} - t_0 = t_{n+1} < t^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq \delta. \end{aligned}$$

$\{t_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun u fundamental ketma-ketlikni tashkil etadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligi quyidagi

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\ &\leq (t_{n+p} - t_{n+p-1}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) = t_{n+p} - t_n \end{aligned}$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud, bu limitni ξ orqali belgilaymiz: $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Agar $|x_{n+p} - x_n| \leq t_{n+p} - t_n$ tengsizlikda $p \rightarrow \infty$ limitga o'tsak, x_n ning ξ ga intilish tezligi uchun (2.6.12) bahoga ega bo'lamiz.

Nihoyat, (2.6.11) tenglikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib, $\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ni hosil qilamiz, bundan esa $f'(\xi)$ ning chegaralanganligini hisobga olsak, $f(\xi) = 0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, teorema to'la isbot bo'ldi. ■

Izoh. Teoremadagi (2.6.12) baho aniq bahodir, chunki u (2.6.13) kvadrat tenglama $P(t) = 0$ uchun aniq tenglikka aylanadi.

Yuqoridagi (2.6.12) bahodan foydalanish uchun $P(t) = 0$ tenglamaning yechimini topish va bu tenglama uchun $\{t_n\}$ Nyuton ketma-ketligini qurish kerak. Qulaylik uchun kvadrat tenglamada $t = \eta\tau$ deb olib, yangi τ o'zgaruvchini kiritamiz. Natijada

$$P(\eta\tau) = \frac{\eta}{B} \left(\frac{1}{2} h \tau^2 - \tau + 1 \right)$$

bo'ladi. Endi

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2}h\tau^2 - \tau + 1 = 0 \quad (2.6.18)$$

kvadrat tenglama uchun Nyuton ketma-ketligini tuzamiz: $\tau_0 = 0$.

$$\tau_{n+1} = \tau_n - \frac{\varphi(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.6.19)$$

Bu tenglamaning kichik ildizi $\tau^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}$ bo'lib, $\{\tau_n\}$ ketma-ketlik unga yaqinlashadi. Osongina ko'rish mumkinki $t_n = \eta\tau_n$.

Teorema 2.13. Agar teorema 2.12 ning shartlari bajarilsa, $\xi - x_n$ ayirma uchun

$$|\xi - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^{n-1}} \cdot \eta$$

baho o'rinlidir.

Isbot. τ_n ning ta'rifidan kelib chiqadigan

$$\varphi(\tau_{n-1}) + (\tau_n - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1}) = 0$$

tenglikni nazarda tutib, Teylor formulasidan

$$\varphi(\tau_n) = \varphi(\tau_{n-1}) + (\tau_n - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1}) + \frac{1}{2}\varphi''(\tau)(\tau_n - \tau_{n-1})^2 = \frac{h}{2}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \quad (2.6.20)$$

ni hosil qilamiz. Bundan tashqari

$$\varphi'(\tau) = h\tau - 1, \quad \tau_{n+1} - \tau_n = \frac{-\varphi(\tau_n)}{\varphi'(\tau_n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{1 - h\tau_n}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \quad (2.6.21)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Endi $n = 1, 2, \dots$ lar uchun

$$\tau_n \leq 2(1 - 2^{-n}) \quad \text{va} \quad \tau_n - \tau_{n-1} \leq 2^{1-n} \quad (2.6.22)$$

ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun induksiya metodidan foydalanamiz. $\tau_0 = 0$ va $\tau_1 = 1$ bo'lganligi sababli $n = 1$ uchun (2.6.22) o'rinlidir. Endi faraz qilaylik, $k = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$\tau_k \leq 2(1 - 2^{-k}), \quad \tau_k - \tau_{k-1} \leq 2^{1-k}$$

bajarilsin. U holda $0 < h \leq \frac{1}{2}$ ekanligini nazarda tutib, (2.6.21) dan

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{1 - h\tau_n}(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot 2^{2-2n}}{1 - 2h(1 - 2^{1-n})} \leq 2^{-n}$$

va

$$\tau_{n+1} = \tau_n + (\tau_{n+1} - \tau_n) \leq 2(1 - 2^{-n}) + 2^{-n} = 2(1 - 2^{-n-1})$$

larni hosil qilamiz. So'ngra (2.6.19) va $\varphi(\tau^*) = 0$ dan

$$\tau^* - \tau_n = \tau^* - \tau_{n-1} + \frac{\varphi(\tau_{n-1})}{\varphi'(\tau_{n-1})} = -\frac{1}{\varphi'(\tau_{n-1})} [\varphi(\tau^*) - \varphi(\tau_{n-1}) - (\tau^* - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1})]$$

kelib chiqadi. Teylor formulasidan esa

$$\varphi(\tau^*) - \varphi(\tau_{n-1}) - (\tau^* - \tau_{n-1})\varphi'(\tau_{n-1}) = \frac{1}{2}\varphi''(\tilde{\tau})(\tau^* - \tau_{n-1})^2 = \frac{1}{2}h(\tau^* - \tau_{n-1})^2,$$

$$\varphi'(\tau_{n-1}) = h\tau_{n-1} - 1$$

larga ega bo'lamiz. Demak,

$$\tau^* - \tau_n = \frac{h}{2} \cdot \frac{(\tau^* - \tau_{n-1})^2}{1 - h\tau_{n-1}}$$

(2.6.22) tengsizlikka ko'ra

$$1 - h\tau_{n-1} \geq 1 - \frac{1}{2} \cdot 2(1 - 2^{1-n}) = 2^{1-n}.$$

Shuning uchun ham

$$\tau^* - \tau_n \leq 2^{n-2}h(\tau^* - \tau_{n-1})^2. \quad (2.6.23)$$

Bu tengsizlikni $n = 1, 2, \dots$ lar uchun ketma-ket qo'llaymiz. Yuqorida $\tau^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \leq 2$ ekanligini aytib o'tgan edik, shuning uchun ham (2.6.23) dan $n = 1$ bo'lganda

$$\tau^* - \tau_1 \leq 2^{-1}h(\tau^* - \tau_0)^2 \leq 2h$$

kelib chiqadi, $n = 2$ bo'lganda esa

$$\tau^* - \tau_2 \leq h(\tau^* - \tau_1)^2 \leq h(2h)^2 = \frac{1}{2}(2h)^3.$$

Bu baholashlarni davom ettirib, n -qadamda

$$\tau^* - \tau_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}$$

ga ega bo'lamiz. Shu bilan teorema isbot bo'ldi, chunki

$$|x^* - x_n| \leq t^* - t_n = \eta(t^* - \tau_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\eta. \quad \blacksquare$$

Izoh. Bu teoremdan ko'ramizki, $2h < 1$ bo'lganda $\tau^* - \tau_n$ juda tez nolga intiladi, qo'pol qilib aytganda n dan $n+1$ ga o'tganda xato o'zining kvadratiga o'zgaradi, ya'ni yaqinlashish kvadratik qonunga bo'ysunadi.

Amalda qo'llashga qulay bo'lishi uchun $\tau^* - \tau_n$ ning n va h ga bog'liq bo'lgan jadvalini tuzish mumkin. Bunday jadval quyida (jadval 2.5) $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ va $n = 1, 5$ lar uchun keltirilgan.

h/n	0	1	2	3	4	5
0,05	1,026	$2,63 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-5}$	$8,77 \cdot 10^{-12}$	$2,03 \cdot 10^{-24}$	
0,10	1,056	$5,57 \cdot 10^{-2}$	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$1,66 \cdot 10^{-9}$	$1,55 \cdot 10^{-19}$	
0,15	1,089	$8,89 \cdot 10^{-2}$	$6,98 \cdot 10^{-4}$	$4,36 \cdot 10^{-8}$	$1,77 \cdot 10^{-16}$	
0,20	1,127	$1,27 \cdot 10^{-1}$	$2,02 \cdot 10^{-3}$	$5,25 \cdot 10^{-7}$	$3,56 \cdot 10^{-14}$	
0,25	1,172	$7,20 \cdot 10^{-1}$	$4,91 \cdot 10^{-3}$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$3,19 \cdot 10^{-12}$	$1,80 \cdot 10^{-24}$
0,30	1,225	$2,25 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$2,78 \cdot 10^{-5}$	$1,84 \cdot 10^{-10}$	$8,02 \cdot 10^{-21}$
0,35	1,292	$2,92 \cdot 10^{-1}$	$2,30 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-4}$	$8,85 \cdot 10^{-9}$	$2,50 \cdot 10^{-17}$
0,40	1,382	$3,82 \cdot 10^{-1}$	$4,96 \cdot 10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$4,59 \cdot 10^{-7}$	$9,42 \cdot 10^{-14}$
0,45	1,519	$5,19 \cdot 10^{-1}$	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$7,49 \cdot 10^{-3}$	$3,95 \cdot 10^{-5}$	$1,11 \cdot 10^{-9}$
0,50	2	1	$5,0 \cdot 10^{-1}$	$2,50 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$

Jadval 2.5: $\tau^* - \tau_n$ ning n va h ga bog'liq bo'lgan jadvali.

Teorema 2.14. (Ildizning yagonaligi haqida). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya uchun teorema 2.10 ning shartlari bajarilsin. Agar $h \leq \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $f(x) = 0$ tenglama

$$|x - x_0| \leq \delta < t^{**} = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \quad (2.6.24)$$

oraligida yagona ξ yechimga ega bo'ladi. Agar $h = \frac{1}{2}$ bo'lsa, ξ yechim

$$|x - x_0| \leq \delta = t^{**} = 2\eta \quad (2.6.25)$$

oraligida yagona bo'ladi.

Isbot. Teorema 2.12 ning shartlari bajarilganligi uchun $f(x) = 0$ tenglama (2.6.24) oraligida ξ yechimga ega (chunki (2.6.24) oralig (2.6.7) oraligning qismidir). Biz bu yerda $f(x) = 0$ tenglamaning har qanday boshqa ξ yechimi ξ bilan ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik,

$h < \frac{1}{2}$ bo'lsin. Bu holda (2.6.13) kvadrat tenglama ikkita har xil t^* va t^{**} ildizlarga ega. Endi $\tilde{\xi}$ (2.6.1) tenglamaning (2.6.7) oraliqdagi biror ildizi bo'lsin. (2.6.24) tengsizlikka ko'ra

$$|\tilde{\xi} - x_0| = \theta t^{**} \quad (0 \leq \theta < 1) \quad (2.6.26)$$

bo'ladi. $f(\tilde{\xi}) = 0$ bo'lganligi uchun

$$x_1 - \tilde{\xi} = \frac{1}{f'(x_0)} [f(\tilde{\xi}) - f(x_0) - f'(x_0)(\tilde{\xi} - x_0)].$$

Taylor formulasiga ko'ra

$$x_1 - \tilde{\xi} = \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f''(c)}{2} (\tilde{\xi} - x_0)^2 \quad (c \in (\tilde{\xi}, x_0)).$$

Teorema 2.12 ni isbot qilish jarayonida hosil bo'lgan $|f'(x_n)| \geq |P'(t_n)|$ tengsizlikni nazarda tutib, (2.6.8) va (2.6.25) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|x_1 - \tilde{\xi}| \leq \frac{1}{|f'(x_0)|} \cdot \frac{1}{2} K |\tilde{\xi} - x_0|^2 \leq \frac{K}{2|P'(t_0)|} \theta^2 t^{**2}.$$

Osonlik bilan ko'rish mumkinki,

$$P(t) = \frac{1}{2} K t^2 + P'(t_0)(t - t_0) + P(t_0).$$

Bundan esa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2P'(t_0)} K t^{**2} &= \frac{1}{P'(t_0)} [P(t^{**}) - P(t_0) - (t^{**} - t_0)P'(t_0)] = \\ &= -t^{**} + t_0 - \frac{P(t_0)}{P'(t_0)} = t_1 - t^{**}. \end{aligned}$$

Buni oldingi tengsizlikka qo'yib, kerakli bahoni chiqaramiz:

$$|\tilde{\xi} - x_1| \leq \theta^2 (t^{**} - t_1).$$

Bu mulohazalarni n marta qo'llab

$$|\tilde{\xi} - x_n| \leq \theta^{2n} (t^{**} - t_n) < \theta^{2n} t^{**} \quad (2.6.27)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $\theta < 1$ miqdor n ga bog'liq bo'lmaganligi sababli $x_n \rightarrow \tilde{\xi}$. Endi $|\tilde{\xi} - \xi| \leq |\tilde{\xi} - x_n| + |x_n - \xi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ munosabatdan $\tilde{\xi} = \xi$ kelib chiqadi.

Agar $h = \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda (2.6.25) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\theta = 1$, $P(t)$ ning har ikkala ildizi ustma-ust tushadi: $t^{**} = t^*$ va $t_n \rightarrow t^*$. Shuning uchun ham, (2.6.27) tengsizlikdan biz yana $|\tilde{\xi} - x_n| \rightarrow 0$ ga ega bo'lamiz. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Misol 2.11. $f(x) \equiv x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15 = 0$ tenglamaning musbat ildizi 10^{-8} aniqlik bilan topilsin.

Yechish: $f(1,5) = -0,9375$ va $f(2) = 1$ bo'lganligi uchun dastlabki yaqinlashish x_0 sifatida shu oraliqning o'rtasini olamiz: $x_0 = 1,75$. Bu nuqtada

$$f(1,75) = 0,066406; \quad f'(1,75) = 3,68725; \quad \frac{f(1,75)}{f'(1,75)} = 0,0180084;$$

$$\frac{1}{f'(1,75)} = 0,2712.$$

Demak, $\eta = 0,018084$ va $B = 0,2712$ deb olishimiz mumkin, $0 < h < \frac{1}{2}$ bo'lganda, $1 \leq \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h} \leq 2$ bo'ladi, shuning uchun ham $\delta = 2\eta$ deb olib $f''(x)$ ni $|x - 1,75| \leq 2\eta$ oraliqda baholaymiz. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $1,714 \leq x < 1,786$ oraliqda $f''(x) = 12x^2 - 24x + 4$ monoton o'suvchi funksiya, shuning uchun ham $f''(x)$ ni $x = 1,786$ nuqtada hisoblaymiz: $f''(1,786) = -0,5867$. Demak, $K = 0,5867$ deb olishimiz mumkin, $h = BK\eta = 0,011095 \leq 0,05$. Bundan ko'ramizki teorema 2.14 ning hamma shartlari bajariladi, ya'ni qaralayotgan oraliqda yagona yechim mavjud va x_n ketma-ketlik bu yechimga yaqinlashadi. Xatoni baholash uchun jadval 2.5 dan foydalanamiz, $h = 0,05$ bo'lganda $\tau^* - \tau_3 = 0,877 \cdot 10^{-11}$ bo'lganligi uchun

$$|x_3 - \xi| < 0,018009 \cdot 0,877 \cdot 10^{-11} < 0,2 \cdot 10^{-12}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, uchinchi qadamda ildizni 12 xona aniqlikda topgan bo'lamiz. Bizga 8 xona aniqlik yetarli edi, bu aniqlikka erishish uchun $n = 3$ deb olish kifoyadir. $h = 0,0012$ uchun jadval 2.5 da $\tau^* - \tau_2$ ning qiymati ko'rsatilmagan, shuning uchun biz teorema 2.13 dan foydalanamiz:

$$|x_2 - \xi| \leq \frac{1}{2^{2-1}} (2 \cdot 0,0012)^{2^2-1} \cdot 0,0294 < 2,1 \cdot 10^{-10}.$$

Hisoblashlar natijasida quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$x_0 = 1,75; \quad x_1 = 1,75 - \frac{f(1,75)}{f'(1,75)} = 1,731991525;$$

$$x_2 = 1,731991525 - \frac{f(1,731991525)}{f'(1,731991525)} = 1,732050805; \quad x_3 = 1,732050808;$$

$$x_4 = 1,732050808.$$

2.6.3 Karrali ildizlar uchun Nyuton metodi

Nyuton metodi tenglamalarni yechish metodlari orasida eng dastlabkilaridan biridir. Shuning uchun ham yaqinlashish tezligini orttirish yoki hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida bu metodni o'zgartirish yo'lida juda ko'p urinishlar bo'lgan. Shularning ayrimlariga to'xtalib o'tamiz.

Shu vaqtgacha x_n ketma-ket yaqinlashishlar yotgan oraliqda $f'(x) \neq 0$ deb faraz qilingan edi, bundan tashqari $f'(\xi) \neq 0$, ya'ni ξ tub ildiz bo'lgan hol qaralgan edi. 1870-y. E. Shreder ξ ildiz p - karrali bo'lgan holni tekshirib chiqdi. Biz hozir ana shu holni ko'rib chiqamiz. Biz avvalo $p > 1$ bo'lganda Nyuton ketma-ketligi kerakli ravishda o'zgartirilganda uning tez yaqinlashishini ko'rsatamiz. ξ soni $f(x)$ ning p - karrali ildizi bo'lgani uchun, ξ yechim atrofidagi $f(x)$ ning Teylor qatoridagi yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = c_p(x - \xi)^p + c_{p+1}(x - \xi)^{p+1} + \dots + c_m(x - \xi)^m + R_m(x),$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \quad (k = p, p+1, \dots, m). \quad (2.6.28)$$

Faraz qilaylik, x_n lar ξ ga yaqin bo'lsin, u holda $\varepsilon_n = \xi - x_n$ kichik miqdor bo'ladi. Nyuton qoidasidan ε_n bilan ε_{n+1} orasidagi munosabatni chiqaramiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)}. \quad (2.6.29)$$

(2.6.28) yoyilmada faqat ikkita bosh hadlarini saqlab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} f(\xi - \varepsilon_n) &= (-1)^p [c_p \varepsilon_n^p - c_{p+1} \varepsilon_n^{p+1} + \dots], \\ f'(\xi - \varepsilon_n) &= (-1)^{p-1} [p c_p \varepsilon_n^{p-1} - (p+1) c_{p+1} \varepsilon_n^p + \dots], \\ \frac{1}{f'(\xi - \varepsilon_n)} &= \frac{(-1)^{p-1}}{p c_p \varepsilon_n^{p-1}} \left[1 - \frac{(p+1)}{p c_p} c_{p+1} \varepsilon_n + \dots \right], \\ \frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)} &= -\frac{\varepsilon_n}{p} \left[1 + \frac{c_{p+1}}{c_p} \varepsilon_n + \dots \right]. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikni (2.6.29) ga olib borib qo'yamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{p} \right) \varepsilon_n - \frac{c_{p+1}}{p^2 c_p} \varepsilon_n^2 + \dots$$

Bunda faqat bitta bosh hadni qoldirib, quyidagi taqribiy tenglikka ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} \approx \left(1 - \frac{1}{p}\right) \varepsilon_n.$$

Bu tenglik shuni ko'rsatadiki, ε_n taqriban maxraji $q = 1 - \frac{1}{p}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya bo'yicha kamayadi. Buni $f'(\xi) \neq 0$ bo'lgan hol bilan solishtirib ko'rsak, $p > 1$ bo'lganda yaqinlashish tezligining sustlashishini ko'ramiz. Haqiqatan ham,

$$0 = f(\xi) = f(\xi - \varepsilon_n) + \varepsilon_n f'(\xi - \varepsilon_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\xi - \theta \varepsilon_n) \quad (0 < \theta < 1)$$

tenglikdan va (2.6.29) dan

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi - \theta \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)} \varepsilon_n^2 \quad (2.6.30)$$

ni hosil qilamiz, bunda ε_n ni yetarlicha kichik deb olib, ε_{n+1} bilan ε_n orasidagi

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \varepsilon_n^2 \quad (2.6.31)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda ε_n kvadratik qonun bilan kamayadi. $p > 1$ bo'lganda yaqinlashish tezligini oshirish uchun Nyuton qoidasini

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.6.32)$$

ga almashtiramiz. U holda (2.6.30) dan ε_{n+1} bilan ε_n orasidagi quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{c_{p+1}}{p c_p} \varepsilon_n^2 = -\frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p(p+1)f^{(p)}(\xi)} \varepsilon_n^2. \quad (2.6.33)$$

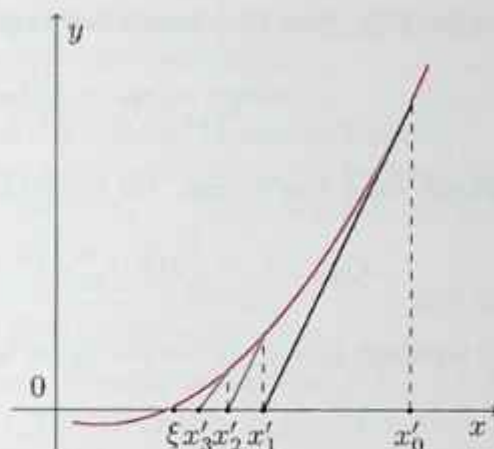
Bundan ko'ramizki, ξ ildiz p karrali bo'lganda (2.6.32) qoida uchun yaqinlashish taqriban Nyuton qoidasining yaqinlashishiga teng.

2.6.4 Modifikatsiyalangan Nyuton metodi

Agar $f(x)$ ning hosilasi juda murakkab funksiya bo'lib, $f'(x_n)$ ni hisoblash katta qiyinchiliklar tug'dirsa, u vaqtda Nyuton metodining quyidagi modifikatsiyasi ishlatiladi:

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}, \quad x'_0 = x_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.6.34)$$

Bu qoida bo'yicha hisoblash ancha qulay, chunki $f'(x)$ faqat bir marta hisoblanadi. Lekin modifikatsiyalangan metod Nyutonning asosiy metodiga nisbatan sekin yaqinlashadi. Modifikatsiyalangan metodning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: x'_{n+1} taqribiy yaqinlashish bu $(x'_n, f(x'_n))$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koefitsiyenti $f'(x_0)$ ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasidir. Bu to'g'ri chiziq faqat birinchi qadamdagina $y = f(x)$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinma bilan ustma-ust tushadi (chizma 2.6.3).



Chizma 2.6.3

Bu yerda ham (teorema 2.12 ga o'xshash) yaqinlashish haqidagi teoremani isbot qilish mumkin.

Teorema 2.15. Agar $f(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 1-teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_0)}, \quad x'_0 = x_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ketma-ket yaqinlashishlar (2.6.1) tenglamaning ξ ildiziga yaqinlashadi, shu bilan birga xato uchun quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|x'_n - \xi| \leq t^* - t'_n, \quad (2.6.35)$$

bu yerda t'_n (2.6.13) kvadrat tenglama uchun qurilgan Nyutonning modifikatsiyalangan ketma-ketligi, $t'_0 = 0$, t^* esa (2.6.13) tenglamaning kichik musbat ildizi.

Isbot. Bu teoremaning isbotini [4] va [17] dan qarash mumkin. Bu yerdagi (2.6.35) baho yuzaki qaraganda Teorema 2.12 dagi (2.6.12) bahoga o'xshash, lekin uning nolga intilish tezligi ancha sekindir. Biz hozir ana shu bahoni keltiramiz. Faraz qilaylik, $h < \frac{1}{2}$ bo'lsin. (2.6.13) tenglamadan ko'rinadiki, aniq yechim

$$t^* = \eta + \frac{1}{2}BKt^{*2}$$

bo'lib, $\{t'_{n+1}\}$ va $\{t'_n\}$ ketma-ket yaqinlashishlar

$$t'_{n+1} = t'_n - \frac{P(t'_n)}{P'(t'_0)} = \eta + \frac{1}{2}BKt'^2_n$$

tenglik bilan bog'langan. Bu tengliklardan

$$t'_{n+1} - t^* = \frac{1}{2}BK(t'^2_n - t^{*2}) = \frac{1}{2}BK(t'_n - t^*)(t'_n + t^*)$$

ni topamiz, $t'_n < t^* = \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$ bo'lganligi sababli

$$t^* - t'_{n+1} < BKt^*(t^* - t'_n) = (1 - \sqrt{1-2h})(t^* - t'_n).$$

Bu tengsizlikni ketma-ket qo'llab, $t^* - t'_n < q^n(t^* - t')$ ga ega bo'lamiz, bu yerda $q = 1 - \sqrt{1-2h} < 1$. Oxirgi baho shuni ko'rsatadiki, $\{t'_n\}$ ketma-ketlik t^* ga cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tezligida intilar ekan. ■

2.6.5 Vatarlar metodi

Endi Nyuton metodidagi hisoblashlarni soddalashtirishning yana bir usulini ko'ramiz. Nyuton metodida mehnatning asosiy qismi $f(x_n)$ va $f'(x_n)$ larni hisoblash uchun sarflanadi. Shularning birortasi, masalan, $f'(x_n)$ ni hisoblashdan qutulish mumkin emasmikin degan savol tug'iladi. Bu bizni vatarlar usuliga olib keladi, ya'ni agar $f'(x_n)$ ni taqribiy ravishda almashtirsak:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

u holda navbatdagi yaqinlashishni topish qoidasi quyidagicha bo'ladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (2.6.36)$$

Bu qoidaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: $y = f(x)$ funksiya-ning grafigida ikkita $M_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ va $M_n(x_n, f(x_n))$ nuqtalardan vatar o'tkazamiz. Vatar tenglamasi esa quyidagicha:

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Agar bu vatarning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasini x_{n+1} deb olsak, (2.6.36) qoida kelib chiqadi.

Vatarlar metodi ikki qadamli metod bo'lib x_{n+1} ni topish uchun x_{n-1} va x_n ni bilishimiz kerak. (2.6.36) qoidani qo'llash uchun:

- 1) barcha x_n lar $f(x)$ ning aniqlanish sohasida yotishi va
- 2) $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) shartlar bajarilishi kerak.

Avval $f(x_n) - f(x_{n-1}) = 0$ bo'lgan holni ko'rib chiqaylik, bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin: a) $x_n \neq x_{n-1}$ va b) $x_n = x_{n-1}$. Agar $x_n \neq x_{n-1}$ bo'lsa,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} \quad (2.6.37)$$

tenglikdan $f(x_{n-1}) \neq 0$ ligini ko'ramiz. Shuning uchun ham $f(x_n) \neq 0$ va navbatdagi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

yaqinlashishni qurish mumkin bo'lmaydi. Jarayon shu yerda uziladi va yechimga olib kelmaydi.

Agar $x_n = x_{n-1}$ bo'lsa, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ larni qurish mumkin, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ lar o'zaro farqli va $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0$ ($k = 1, n-1$) deb hisoblaymiz. (2.6.37) tenglikdan ko'ramizki, $f(x_{n-1}) = 0$ va x_{n-1} berilgan tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Bu holda ketma-ket yaqinlashishlarni x_n gacha bajarish mumkin, shu bilan birga ikkita ustma-ust tushadigan x_{n-1} va x_n qiymatlar berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Ildiz ratsional son bo'lganda, shunday hol bo'lishi mumkin.

Endi biz yuqoridagi 1), 2) shartlar bajarilgan deb faraz qilib, vatarlar metodining yaqinlashishiga to'xtab o'tamiz. Xato $\varepsilon_n = \xi - x_n$ uchun (2.6.36) dan

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)f(\xi - \varepsilon_n)}{f(\xi - \varepsilon_n) - f(\xi - \varepsilon_{n-1})}$$

munosabatni chiqaramiz. Agar biz bu yerda $f(\xi - \varepsilon_n)$ va $f(\xi - \varepsilon_{n-1})$ larning xatolar darajalariga nisbatan yoyilmalari

$$f(\xi - \varepsilon_n) = -f'(\xi)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_n^2 + \dots,$$

$$f(\xi - \varepsilon_{n-1}) = -f'(\xi)\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{2}f''(\xi)\varepsilon_{n-1}^2 + \dots$$

ni qo'yib, tegishli amallarni bajarsak, quyidagi taqribiy

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n \quad (2.6.38)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar bu tenglikni Nyuton metodi uchun chiqarilgan (2.6.31) tenglik bilan solishtirsak, vatarlar metodida xatoning o'zgarish qonuni Nyuton qoidasidagi qonunga yaqinligini ko'ramiz.

Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi teorema 2.12 ga o'xshash quyidagi teorema ham o'rinlidir.

Teorema 2.16. Agar $f(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 teorema 2.12 shartlarini qanoatlantirsa va bundan tashqari x_1 uchun

$$|x_1 - x_0| < \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta = t^* \text{ va } |f(x_1)| \leq P(|x_1 - x_0|) = P(t_1)$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda:

1) (2.6.36) qoida bilan aniqlangan x_n yaqinlashishlar chekli qadamdan keyin yechimga olib keladi, yoki x_n larni barcha n lar uchun qurish mumkin bo'lib, ular yaqinlashuvchi ketma-ketlikni tashkil etadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi;$$

2) limitdagi qiymat ξ son $f(x) = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi;

3) yaqinlashish tezligi $|\xi - x_n| \leq t^* - t_n$ tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda t_n (2.6.13) tenglamaning kichik ildizi uchun $t_0 = 0$ va $t_1 = |x_1 - x_0|$ dan boshlab vatarlar usuli bilan qurilgan ketma-ket yaqinlashishlardir.

Bu teoremaning isbotini [24] dan qarash mumkin. Endi bu metodni misol yechishga tatbiq qilamiz.

Misol 2.12.

$$f(x) \equiv x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 15 = 0$$

tenglamaning musbat ildizi 10^{-6} aniqlik bilan topilsin.

Yechish: Biz yuqorida ko'rgan edikki, izlanayotgan ildiz (1,5; 1,75) oraliqda yotadi va $x_0 = 1,75$ nuqtaning yaqin atrofida teorema 2.16 ning barcha shartlari bajariladi. Bu yerda $x_1 = 1,72$ deb olamiz. U vaqtda $|x_1 - x_0| = 0,03 < 2\eta = 0,588$ va $f(1,72) \leq P(0,03)$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib teorema 2.16 ning hamma shartlari bajariladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ξ ildizga intiladi. (2.6.36) qoidaga asosan x_2 ni topamiz:

$$x_2 = 1,75 - \frac{f(1,72)(1,72 - 1,75)}{f(1,72) - f(1,75)} = 1,7288829.$$

Yana uchta yaqinlashishlari quyidagilardan iborat:

$$x_3 = 1,7320622; \quad x_4 = 1,7320508; \quad x_5 = 1,7320508.$$

2.6.6 Kompleks ildiz

Faraz qilaylik $f(z)$ kompleks o'zgaruvchi $z = x + iy$ ning funksiyasi bo'lsin va $\zeta = \xi + i\eta$ kompleks son $f(z)$ ning oddiy ildizi bo'lsin. Bundan tashqari $f(z)$ ni ζ ning biror atrofida analitik deb qaraymiz. U holda

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.6.39)$$

Nyuton metodini qurish mumkin.

Yaqinlashish haqidagi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 2.17. *Aytaylik, ζ son $f(z) = 0$ tenglamaning oddiy ildizi bo'lsin va $f(z)$*

$$U_r(\zeta) = \{z : |z - \zeta| < r\}$$

doira ichida analitik bo'lsin.

Faraz qilaylik

$$\inf_{z \in U_r(\zeta)} |f'(z)| = m_1 > 0, \quad \sup_{z \in U_r(\zeta)} |f''(z)| = M_2 \quad (2.6.40)$$

bo'lsin va

$$q = \frac{M_2|z_0 - \zeta|}{2m_1} < 1 \quad (2.6.41)$$

tengsizlik bajarilsin. U holda, agar $z_0 \in U_r(\zeta)$ bo'lsa, (2.6.39) - Nyuton metodi yaqinlashadi va xato uchun quyidagi baho o'rinli bo'ladi,

$$|z_k - \zeta| < q^{2^k - 1} |z_0 - \zeta|. \quad (2.6.42)$$

Isbot. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, (2.6.39)-metodning xatosini quyidagicha yozish mumkin

$$z_{k+1} - \zeta = \frac{F(z_k)}{f'(z_k)} \quad (2.6.43)$$

bu yerda

$$F(z) = (z - \zeta)f'(z) - f(z), \quad F'(z) = (z - \zeta)f''(z).$$

Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$F(z_k) = F(\zeta) + \int_{\zeta}^{z_k} F'(z) dz$$

yoki

$$F(z_k) = \int_{\zeta}^{z_k} (z - \zeta) f''(z) dz$$

ga ega bo'lamiz.

Endi (2.6.42)- bahoni induksiya metodi bilan isbot qilamiz, $k = 0$ bo'lganda (2.6.43) dan

$$z_1 - \zeta = \frac{F(z_0)}{f'(z_0)} \quad (2.6.44)$$

hosil bo'ladi. $z_0 \in U_r(\zeta)$ bo'lganligi uchun, (2.6.40) ga ko'ra, $|f'(z)| \geq m_1 > 0$ kelib chiqadi. Endi

$$F(z_0) = \int_{\zeta}^{z_0} (z - \zeta) f''(z) dz \quad (2.6.45)$$

ni baholaymiz. Buning uchun (2.6.45) da $z - \zeta = t(z_0 - \zeta)$ almashtirish bajaramiz, natijada

$$F(z_0) = (z_0 - \zeta)^2 \int_0^1 t f''(\zeta + t(z_0 - \zeta)) dt \quad (2.6.46)$$

ga ega bo'lamiz. Ko'rinib turibdiki $z - \zeta = t(z_0 - \zeta)$, $|z - \zeta| \leq |z_0 - \zeta| < r$, ya'ni $z \in U_r(\zeta)$. Shuning uchun ham, (2.6.40) ga ko'ra

$$|f''(\zeta + t(z_0 - \zeta))| \leq M_2.$$

Bu va (2.6.46) dan ushbu

$$|F(z_0)| \leq M_2 |z_0 - \zeta|^2 \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} M_2 |z_0 - \zeta|^2$$

baho kelib chiqadi. (2.6.41) ni hisobga olib, (2.6.44) dan ushbu

$$|z_1 - \zeta| \leq \frac{M_2 |z_0 - \zeta|^2}{2m_1}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, bu esa $k = 1$ bo'lganda (2.6.42) bilan ustma-ust tushadi.

Faraz qilaylik, (2.6.42) baho $k = l \geq 1$ bo'lganda bajarilsin, uning $k = l + 1$ bo'lganda ham bajarilishini ko'rsatamiz. Ta'kidlab o'tish kerakki, (2.6.42) dan $k = l$ bo'lganda $z_1 \in U_r(\zeta)$ kelib chiqadi. Shuning uchun ham (2.6.40) shartga ko'ra $|f'(z)| \geq m_1 > 0$. Endi

$$F(z_1) = \int_{\zeta}^{z_1} (z - \zeta) f''(z) dz$$

ni baholaymiz. $z_1 \in U_r(\zeta)$ bo'lganini hisobga olib, bu integralni $F(z_0)$ ni baholagandek bo'lamiz:

$$|F(z_1)| \leq \frac{M_2}{2} |z_1 - \zeta|^2.$$

Endi (2.6.43) dan $k = l$ uchun

$$|z_{l+1} - \zeta| \leq \frac{M_2 |z_l - \zeta|^2}{2m_1}$$

bahoga ega bo'lamiz. Endi (2.6.43) ni nazarda tutib, (2.6.42) ni $k = l + 1$ uchun o'rinli ekanligini ko'ramiz. Shu bilan teorema isbotlandi. ■

2.6.7 Tenglamalar sistemasi uchun Nyuton metodi

Bu yerda n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumli n ta

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.6.47)$$

tenglamalar sistemasini yechish uchun Nyuton metodini ko'rib chiqamiz. Yozuvni qisqaroq qilish maqsadida $\bar{x}$ orqali $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorni va $f(\bar{x})$ orqali

$$\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

vektor-funksiyani belgilaymiz. U holda, (2.6.47) sistemani bitta

$$\bar{f}(\bar{x}) = 0$$

vektor-tenglama shaklida yozish mumkin. (2.6.47) sistemani yechish uchun Nyuton metodi, tabiiyki bitta sonli tenglama uchun yuqorida

ko'rib o'tilgan metodning umumlashganidir. Yuqoridagidek bu yerda ham metodning asosiy g'oyasi chiziqli bo'lmagan (2.6.47) sistemani ketma-ket chiziqli sistemaga keltirishdan iboratdir. Agar aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi xato yetarlicha kichik bo'lsa, ajratib olingan chiziqli qism tenglamalar sistemasining bosh qismi bo'ladi.

Faraz qilaylik, bizga (2.6.47) sistemaning taqribiy yechimi $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ma'lum bo'lsin, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ orqali $\bar{\xi} - \bar{x}^{(0)} = (\xi_1 - x_1^{(0)}, \xi_2 - x_2^{(0)}, \dots, \xi_n - x_n^{(0)})$ vektor-xatoni belgilaymiz. (2.6.47) sistemada $\bar{x}$ o'rniga $\bar{x}^{(0)} + \bar{\varepsilon}$ ni qo'yib, hosil bo'lgan sistemaning chap tomonini $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ larning darajalariga nisbatan Teylor qatoriga yoyib, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ga nisbatan chiziqli qismini saqlab, quyidagi taqribiy sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_n} \varepsilon_n \approx -f_1(\bar{x}^{(0)}), \\ \frac{\partial f_2(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_2(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_n} \varepsilon_n \approx -f_2(\bar{x}^{(0)}), \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \dots + \frac{\partial f_n(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_n} \varepsilon_n \approx -f_n(\bar{x}^{(0)}). \end{cases} \quad (2.6.48)$$

Bu sistemani yechib, xatoning taqribiy qiymati $\bar{\varepsilon}^{(0)} = (\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \dots, \varepsilon_n^{(0)})$ ni topamiz. $\bar{\varepsilon}^{(0)}$ ni $\bar{x}^{(0)}$ ga qo'shib, navbatdagi yaqinlashish vektorini hosil qilamiz:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \bar{\varepsilon}^{(0)} = (x_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}).$$

O'z navbatida $\bar{x}^{(1)}$ ni yaxshilashimiz mumkin, buning uchun $\bar{x}^{(0)}$ o'rniga $\bar{x}^{(1)}$ ni qo'yib, (2.6.48) ko'rinishdagi sistemani tuzish kerak. Shunday qilib, agar (2.6.48) ko'rinishdagi sistemalar yechimga ega bo'lsa, biz ketma-ket yaqinlashishlar vektorlarini topamiz.

Qulaylik uchun Yakobi matritsasini kiritamiz:

$$\bar{f}_x(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (2.6.49)$$

Bu matritsa yordamida (2.6.48) sistemani quyilagi bitta vektor-sistema shaklida yozishimiz mumkin:

$$\bar{f}_x(\bar{x}^{(0)})\bar{\varepsilon}^{(0)} \approx -\bar{f}(\bar{x}^{(0)}).$$

Faraz qilaylik, $\bar{x} = \bar{\xi}$ nuqtada $\bar{f}_x(\bar{\xi})$ maxsusmas matritsa bo'lsin. Determinant o'z elementlarining uzluksiz funksiyalari bo'lganligi uchun $\bar{x} = \bar{\xi}$ nuqtaning biror G atrofida (2.6.48) maxsusmas matritsa bo'lib, uning teskarisi $\bar{f}_x^{-1}(\bar{x})$ mavjud bo'ladi.

Faraz qilaylik, $x^{(0)} \in G$, u vaqtda (2.6.49) ning har ikkala tomonini $\tilde{f}_x^{-1}(\bar{x}^{(0)})$ ga ko'paytirib,

$$\bar{\varepsilon}^{(0)} = -\tilde{f}_x^{-1}(\bar{x}^{(0)})\tilde{f}(\bar{x}^{(0)})$$

yoki

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = -\tilde{f}_x^{-1}(\bar{x}^{(0)})\tilde{f}(\bar{x}^{(0)})$$

ni hosil qilamiz. Agar $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ lar G atrofida yotsa, u holda $\bar{x}^{(k+1)}$ ni

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \tilde{f}_x^{-1}(\bar{x}^{(k)})\tilde{f}(\bar{x}^{(k)}) \quad (2.6.50)$$

tenglikdan topamiz. Bu $\bar{x}^{(k)}$ ketma-ket yaqinlashishlarni topish uchun Nyuton qoidasidir. Bu qoidaning amalga oshishi uchun $\bar{x}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) lar $\tilde{f}(\bar{x})$ ning aniqlanish sohasida yotishi va $\tilde{f}_x(\bar{x}^{(k)})$ matritsalar maxsusmas bo'lishi kerak.

Biz hozir L.V. Kantarovichning (2.6.50) Nyuton jarayonining yaqinlashishi haqidagi teoremasini isbotsiz keltiramiz.

Teorema 2.18. Agar $\tilde{f}(\bar{x})$ vektor-funksiya va dastlabki yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(0)}$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\bar{x}^{(0)}$ nuqtada $\tilde{f}_x(\bar{x}^{(0)})$ Yakobi matritsasining determinanti $\Delta = \Delta(\tilde{f}_x(\bar{x}^{(0)}))$ noldan farqli va $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi Δ_{jk} bo'lib va

$$\frac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^n |\Delta_{jk}| \leq B \quad (k = \overline{1, n})$$

baho o'rinli bo'lsa;

$$2) |f_i(\bar{x}^{(0)})| \leq \eta \quad (i = \overline{1, n});$$

3) $\bar{x}^{(0)}$ ning

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq 2B\eta \quad (i = \overline{1, n})$$

atrofidagi barcha nuqtalar uchun

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq L \quad (i = \overline{1, n})$$

tengsizliklar bajarilsa;

4) B, η, L miqdorlar

$$h = B^2\eta L \leq \frac{1}{2}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $x^{(0)}$ nuqtaning

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B\eta \quad (i = \overline{1, n})$$

atrofida (2.6.47) sistema yagona $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ yechimga ega bo'lib, (2.6.50) bilan aniqlangan $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ Nyuton ketma-ketligi yaqinlashadi va shu bilan birga, yaqinlashish tezligi

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - \xi_i| \leq \frac{1}{2^{k-1}} (2h)^{2^{k-1}-1} B\eta$$

tengsizlik bilan baholanadi.

Shunga o'xshash teoremani Nyutonning modifikatsiyalangan metodi uchun ta'riflash va isbot qilish mumkin.

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, (2.6.48) sistemada tenglamalar soni ikkita bo'lganda bu sistemani determinantlar yordamida yechish kerak. Tenglamalarning soni ikkitadan ko'p bo'lsa, bunday sistemalarni keyingi bobda keltiriladigan metodlarning birortasi bilan yechish ma'quldir. Agar bizga ikkita

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda (2.6.50) qoida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \left(\frac{g_y f - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \right) \Big|_{x=x_k, y=y_k}, \\ y_{k+1} &= y_k - \left(\frac{f_x g - g_x f}{f_x g_y - f_y g_x} \right) \Big|_{x=x_k, y=y_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Misol 2.13. Quyidagi

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + 2y^2 - 1 = 0, \\ g(x, y) = 5y^3 + x^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases}$$

sistemaning ildizi 10^{-5} aniqlik bilan topilsin.

Yechish: Bu funksiyalarning grafiklarini chizib ko'rsatish mumkinki, ξ va η mos ravishda $(-0, 7; -0, 6)$ va $(0, 7; 0, 8)$ oraliqlarda yotadi. Shuning

uchun ham $x^{(0)} = -0,6$ va $y^{(0)} = 0,8$ deb olishimiz mumkin. Berilgan funksiyalarning hosilalari quyidagilardan iborat:

$$f_x = 3x^2, \quad f_y = 4y, \quad g_x = 2x - 2y, \quad g_y = 15y^2 - 2x.$$

Hisoblashlar natijasini keltiramiz:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= -0,6; \quad y^{(0)} = 0,8; \quad f^{(0)} = 0,064; \quad g^{(0)} = -0,12; \quad f_x^{(0)} = 1,08; \\ f_y^{(0)} &= 3,2; \quad g_x^{(0)} = -2,8; \quad g_y^{(0)} = 10,8; \quad x^{(1)} = -0,65213; \quad y^{(1)} = 0,79760; \\ f^{(1)} &= -0,00502; \quad g^{(1)} = 0,00254; \quad f_x^{(1)} = 1,27583; \quad f_y^{(1)} = 3,19038; \\ g_x^{(1)} &= -2,89946; \quad g_y^{(1)} = 10,84663; \quad x^{(2)} = -0,64942; \quad y^{(2)} = 0,79809; \\ f^{(2)} &= -0,00001; \quad g^{(2)} = -0,00001; \quad f_x^{(2)} = 1,26525; \quad f_y^{(2)} = 3,19234; \\ g_x^{(2)} &= -2,89502; \quad g_y^{(2)} = 10,85296; \quad x^{(3)} = -0,64942; \quad y^{(3)} = 0,79809. \end{aligned}$$

Demak, $\xi = -0,64942$ va $\eta = 0,79809$. ■

Mashqlar

1. $P(x)$ ko'phadni $(x - \alpha)$ ($\alpha > 0$) ga bo'lganda Gorner sxemasidagi b_i lar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$b_0 = a_0 > 0, \quad b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

U holda $P(x)$ ning barcha ildizlari α dan kichik ekanligini ko'rsating.

2. Faraz qilaylik, ρ - ixtiyoriy musbat son bo'lsin, u holda

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'phadning barcha ildizlari modullari bo'yicha

$$\rho + \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{n-1}} \right|$$

dan ortmasligini ko'rsating.

3. Koeffitsiyentlari haqiqiy bo'lgan $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 > 0$) ko'phadning haqiqiy ildizlari

$$\rho + \sqrt[k]{\max_j \left| \frac{a_j}{a_0 \rho^{j-1}} \right|}$$

dan ortmasligini ko'rsating, bu yerda ρ - ixtiyoriy musbat son, k - birinchi manfiy koeffitsiyentning nomeri, a_j - manfiy koeffitsiyentlar.

4. Faraz qilaylik, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ning barcha koeffitsiyentlari musbat bo'lsin. Quyidagilarni ko'rsating:

- a) agar $a_0 > a_1 > \dots > a_n$ shart bajarilsa, u holda $P(x)$ ning barcha ildizlari birlik doira $|x| > 1$ dan tashqarida yotadi;
 b) agar $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ shart bajarilsa, u holda $P(x)$ ning barcha ildizlari $|x| < 1$ birlik doira ichida yotadi.

5. Agar $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlari musbat va

$$m = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{a_{k-1}}, \quad M = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

bo'lsa, u holda $P(x)$ ning barcha ildizlari $m < |x| < M$ tengsizliklarni qanoatlantirishini ko'rsating.

6. Faraz qilaylik, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ va $x_{n+1} = \psi(x_n)$ lar mos ravishda r va p - tartibli iteratsiya bo'lsin. U holda

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = \frac{x_n(\varphi[\psi(x_n)] - \varphi(x_n)\psi(x_n))}{x_n - \varphi(x_n) - \psi(x_n) + \varphi[\psi(x_n)]}$$

iteratsiyaning tartibi $r + p - 1$ dan kam emasligini ko'rsating.

7. Chebishev metodidan foydalanib, $\sqrt{N}$ va $\sqrt[3]{N}$ larni hisoblash uchun ikkinchi va uchinchi tartibli iteratsion jarayon tuzing.

8. Quyidagi

$$\begin{cases} \sin(x+y) - y = 0, \\ \cos(x-y) - y = 0 \end{cases}$$

sistemaning yechimini besh xona aniqlikda Nyuton metodi bilan toping.

3-BOB. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

3.1-§. Dastlabki ma'lumotlar

Nazariy va tatbiqiy matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi. Masalan, funksiyani uning $n + 1$ ta nuqtada berilgan qiymatlari yordamida n -darajali ko'phad bilan interpolatsiyalash yoki funksiyani o'rta kvadratlar metodi yordamida yaqinlashtirish masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishning asosiy manbai uzluksiz funksional tenglamalarni chekli-ayirmali tenglamalar bilan yaqinlashtirishdir. Masalan, Laplas differensial operatori uchun Dirixle masalasini tartibi yuqori bo'lgan oddiy chekli-ayirmali tenglamalar sistemasini bilan almashtirish mumkin. EHMLar yaratilishi bilan bunday masalalar yana ham ko'payib bormoqda.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasi bilan matritsalarining teskarisini topish va determinantlarni hisoblash masalalari uzviy ravishda bog'langandir. Bu masalalar nazariy jihatdan osongina yechiladi. Lekin matritsalarining tartibi ortgan sari bu masalalarni amalda yechish juda katta hisoblashlarni talab qiladi. Hozirgi vaqtda bu masalalarni yechish uchun juda ko'p metodlar yaratilgan va ularni takomillashtirish ustida jadal ishlar olib borilmoqda.

Chiziqli algebraik tenglamalarni yechish asosan ikki - *aniq va iteration metodlarga* bo'linadi. Aniq metod deganda shunday metod tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq yechimini topish mumkin. Hammaga ma'lum bo'lgan Kramer qoidasi aniq metodga misol bo'la oladi. Lekin Kramer qoidasi, odatda, amalda ishlatilmaydi, chunki bu metod bilan n -

tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun $n^2 \cdot n!$ tartibdagi arifmetik amallarni bajarish kerak. Bu nihoyatda katta son bo'lib, bu qoida bilan hatto $n = 30$ tartibli sistemasini yechish uchun ham hozirda mavjud bo'lgan EHMLar ham o'zlaslik qiladi.

Biz bu bobda hisoblash uchun tejamli bo'lgan bir nechta aniq metodlarni ko'rib chiqamiz. Bularning ko'pchiligi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish g'oyasiga asoslangan.

Iteratsion metodlar shu bilan xarakterlanadiki, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion metodlarni qo'llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta ahamiyatga egadir.

Bu ma'noda har bir iteratsion metod universal bo'lavermaydi.

Bu metodlar ayrim sistemalar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa sistemalar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion metodlarni qo'llayotganda sistemani avval tayyorlab olish kerak. Buning ma'nosi shundan iboratki berilgan sistemani unga teng kuchli bo'lgan shunday sistemaga almashtirish kerakki, hosil bo'lgan sistema uchun taulangan metod tez yaqinlashsin.

Hozirgi zamon EHMLari yordamida aniq metodlar bilan tartibi 10^3 dan katta bo'lmagan. iteratsion metodlar bilan esa tartibi 10^6 dan ortmaydigan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Avval aniq metodlarning umumiy g'oyasini ko'rib chiqaylik. Bu metodlar asosan uch sinfga bo'linadi: 1) noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodlari; 2) matritsalarini ajratishga asoslangan metodlar; 3) biror metrikada ortogonal bo'lgan yordamchi vektorlar sistemasini tuzishga asoslangan metodlar.

Sistemadagi tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodi qadimiy metodlardandir. Bu metodni ikki yo'l bilan amalga oshirish mumkin:

- a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;
- b) almashtirishning har bir qadamida sistema matritsasining biror elementini yoki bir ustunda barcha elementlarini nonga aylantirish maqsadida bu matritsani maxsus ravishda, tanlab olingan matritsaga ko'paytirishdan iboratdir. Har ikkala holda ham diqqat-e'tibor shunga yo'naltiriladiki, almashtirishlar natijasida berilgan sistema unga teng kuchli bo'lgan sistemaga o'tishi va so'nggi sistema sodda ko'rinishga ega bo'lishi kerak.

Matritsalarini ajratishga asoslangan metodlar g'oyaviy jihatdan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodlariga juda yaqin turadi. Bu yerda sistemaning matritsasi asosan uchburchak, diagonal yoki akslantirish matritsalarining ko'paytmalariga ajratiladi.

Uchinchi sinfga kiradigan metodlar hozirgi vaqtda keng tarqalgan metodlardir. Bu metodlarda izlanayotgan yechim maxsus ravishda qurilgan yordamchi vektorlar sistemasidagi oxirgi vektordan iborat. Bu guruhdagi metodlarning eng birinchisi ortogonallashtirish metodidir.

Yuqorida aytilgan barcha metodlarning umumiy mohiyatini quyidagi sxemada bayon qilish mumkin. Faraz qilaylik, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini chapdan, ketma-ket shunday $L_1, L_2, \dots, L_k$ matritsalariga ko'paytiramizki, natijada hosil bo'lgan yangi

$$L_k L_{k-1} \dots L_1 A \bar{x} = L_k L_{k-1} \dots L_1 \bar{b}$$

sistema avvalgisiga ekvivalent bo'lib, soddaroq yechilsin. Buning uchun $B = L_k L_{k-1} \dots L_1 A$ matritsaning uchburchak, diagonal yoki ortogonal (agar $BB' = B'B = E$ bo'lsa, B matritsa ortogonal deyiladi) bo'lishi kifoyadir. Agar shu bilan birga L_i matritsalar maxsusmas bo'lsa, teskari matritsa A^{-1} va determinant $\det A$ ni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = B^{-1} L_k L_{k-1} \dots L_1,$$

$$\det A = \frac{\det B}{\prod_{i=1}^n \det L_i}.$$

3.2-§. Noma'lumlarni yo'qotish

Biz bu paragrafda Gauss metodi va optimal yo'qotish metodini ko'rib chiqamiz. Optimal yo'qotish metodi o'z strukturasi jihatidan Gauss metodiga yaqin bo'lishiga qaramasdan u mashina xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi va shuning uchun ham bu metod yordamida tartibi ikki marta katta bo'lgan sistemani yechish mumkin.

3.2.1 Gauss metodi

Bu metod bir necha hisoblash sxemalariga ega. Shulardan biri - Gaussning kompakt sxemasini ko'rib chiqamiz. Ushbu sistema berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Faraz qilaylik, $a_{11} \neq 0$ (yetakchi element) bo'lsin, aks holda tenglamalarning o'rinlarini almashtirib, x_1 oldidagi koeffitsiyenti noldan farqli bo'lgan tenglamani birinchi o'ringa ko'chiramiz. Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffitsiyentlarini a_{11} ga bo'lib,

$$x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \quad (3.2.2)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j \geq 2).$$

(3.2.2) tenglamadan foydalanib, (3.2.1) sistemaning qolgan tenglamalarida x_1 ni yo'qotish mumkin. Buning uchun (3.2.2) tenglamani ketma-ket $a_{21}, a_{31}, \dots$ larga ko'paytirib, mos ravishda sistemaning ikkinchi, uchinchi va h.k. tenglamalaridan ayiramiz. Natijada quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ koeffitsiyentlar

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}^{(1)} \quad (i, j \geq 2)$$

formula yordamida hisoblanali. Endi (3.2.3) sistema ustida ham shunga o'xshash almashtirishlar bajaramiz.

Buning uchun (3.2.3) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffitsiyentlarini yetakchi element $a_{22}^{(1)}$ ga bo'lib,

$$x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)} \quad (3.2.4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j \geq 3)$$

(3.2.4) tenglama yordamida (3.2.3) sistemaning keyingi tenglamalarida yuqoridagidek x_2 ni yo'qotib,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

sistemaga kelamiz, bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(2)} \quad (i, j \geq 3).$$

Noma'lumlarni yo'qotish jarayonini davom ettirib va bu jarayonni m - qadamgacha bajarish mumkin deb faraz qilib, m - qadamda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m,n+1}^{(m)}, \\ \vdots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{nn}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

bu yerda

$$b_{mj}^{(m)} = \frac{a_{mj}^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}, \quad a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}b_{mj}^{(m)} \quad (i, j \geq m+1).$$

Faraz qilaylik, m mumkin bo'lgan oxirgi qadamning nomeri bo'lsin. Ikki hol bo'lishi mumkin: $m = n$ yoki $m < n$. Agar $m = n$ bo'lsa, u vaqtda biz uchburchak matritsali va (3.2.1) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \vdots \\ x_n = b_{n,n+1}^{(n)} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

sistemaga ega bo'lamiz. Oxirgi sistemadan ketma-ket $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ larni topish mumkin:

$$\begin{cases} x_n = b_{n,n+1}^{(n)}, \\ x_{n-1} = b_{n-1,n+1}^{(n-1)} - b_{n-1,n}^{(n-1)}x_n, \\ \vdots \\ x_1 = b_{1,n+1}^{(1)} - b_{12}^{(1)}x_2 - \dots - b_{1n}^{(1)}x_n. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

(3.2.6) uchburchak sistemaning koeffitsiyentlarini topish Gauss metodining *to'g'ri yurishi*, (3.2.7) sistemadan yechimni topish jarayoni *teskari yurishi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $m < n$ bo'lsin va sistemaning m - va undan keyingi tenglamalari (3.2.5) ko'rinishga keltirilgan bo'lsin. Biz m - qadamni bajarilishi mumkin bo'lgan qadam deb hisoblagan edik, bu shuni bildiradiki (3.2.5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab yetakchi elementni ajratish mumkin emas, barcha $a_{ij}^{(m)}$ ($i, j = m+1, \dots, n$) lar nolga teng va (3.2.5) sistema quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{cases} x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + b_{m,n}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ 0 = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \vdots \\ 0 = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Agar bunda barcha ozod hadlar $a_{i,n+1}^{(m)}$ ($i = m+1, \dots, n$) nolga teng bo'lsa, u holda biz faqat yagona birinchi tenglamaga ega bo'lamiz.

Barcha qadamdagi birinchi tenglamalarni birlashtirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)}, \\ \vdots \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + b_{m,n}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Bu sistemadan biz $x_1, x_2, \dots, x_m$ noma'lumlarni $x_{m+1}, \dots, x_n$ noma'lumlar va ozod hadlar yordamida ifodalab olishimiz mumkin. Bu holda (3.2.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Agar $m < n$ bo'lib, hech bo'lmaganla birorta $a_{i,m+1}^{(m)} \neq 0$ ($m+1 \leq i \leq n$) bo'lsa, u holda (3.2.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Qo'lda hisoblayotganda xatoga yo'l qo'ymaslik uchun, hisoblash jarayonini kontrol qilish ma'quldir. Buning uchun biz (3.2.1) matritsa satrlaridagi elementlar va ozod hadning yig'indisidan tuzilgan kontrol

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.2.8)$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar $a_{i,n+2}$ larni (3.2.1) sistemaning ozod hadlari deb qabul qilsak, u holda almashtirilgan

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j^* = a_{i,n+2} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.2.8)$$

sistemaning yechimi $\overline{x_j^*}$ (3.2.1) sistemaning yechimi x_j orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\overline{x_j^*} = x_j + 1 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.2.9)$$

Haqiqatan ham, (3.2.9) ni (3.2.8) sistemaga qo'ysak, (3.2.1) sistema va (3.2.8) formulaga ko'ra

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} = a_{i,n+2} \quad (i = \overline{1, n})$$

ayniyatga ega bo'lamiz.

Agar satr elementlar ustida bajarilgan amallarni har bir satrdagi kontrol yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo'lsa, u holda kontrol yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi mos ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bu hol esa to'g'ri yurishni kontrol qilish uchun xizmat qiladi. Teskari yurishda esa, kontrol $\overline{x_j}$ larni topish uchun bajariladi.

Tenglamalar sistemasi qo'lda yechilganda hisoblashlarni *jadval 3.1* da ko'rsatilgan Gaussning kompakt sxemasi bo'yicha olib borish ma'quldir. Soddalik uchun jadvalda to'rtta noma'lumli to'rtta tenglamalar sistemasini yechish sxemasi keltirilgan.

Gauss metodi bilan n ta noma'lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun bajariladigan arifmetik amallarning miqdori quyidagidan iborat: $\frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 - n)$ ta ko'paytirish va bo'lish, $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$ ta qo'shish.

Misol 3.1. Gauss metodi bilan quyidagi sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4, 2x_2 + 1, 6x_3 - 3x_4 = 3, 2, \\ -0, 4x_1 + 3x_2 - 2, 4x_3 = -1, 6, \\ 1, 6x_1 - 0, 8x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1, 5x_4 = 0. \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Sistemani yechish jarayoni *jadval 3.3* da keltirilgan.

x_1	x_2	x_3	x_4	ozod had- lar	Σ	sxema qismlari
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	A
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	
...	...	...	...	...	...	
1	$b_{12}^{(1)}$	$b_{13}^{(1)}$	$b_{14}^{(1)}$	$b_{15}^{(1)}$	$b_{16}^{(1)}$	A_1
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	1	$b_{23}^{(2)}$	$b_{24}^{(2)}$	$b_{25}^{(2)}$	$b_{26}^{(2)}$	A_2
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	
...	...	...	...	...	...	
		1	$b_{34}^{(3)}$	$b_{35}^{(3)}$	$b_{36}^{(3)}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	A_3
...	...	...	...	...	...	
			1	$b_{45}^{(4)}$	$b_{46}^{(4)}$	
		1	1	x_4	$\overline{x_4}$	
	1			x_3	$\overline{x_3}$	
				x_2	$\overline{x_2}$	B
1				x_1	$\overline{x_1}$	

Jadval 3.1: Gaussning kompakt sxemasi.

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod hadlar	Σ	sxema qismlari
2	4,2	1,6	-3	3,2	8	A
-0,4	3	-2,4	0	-1,6	-1,4	
1,6	-0,8	1	-1	-1	-0,2	
1	-2	-1	1,5	0	-0,5	
...	...	...	...	...	...	
1	2,1	0,8	-1,5	1,6	4	A ₁
	3,84	-2,08	-0,6	-0,96	0,2	
	4,16	0,28	-1,4	3,56	6,6	
	4,1	1,8	-3	1,6	4,5	
...	...	...	...	...	...	
	1	-0,54166	-0,15625	-0,25	0,05208	A ₂
		-2,53331	0,75	-4,6	-6,38331	
		-4,02081	2,35937	-2,62500	-4,28644	
...	...	...	...	...	...	
		1	-0,29606	1,81581	2,51198	A ₃
			1,16897	4,67603	5,84500	
			1	4,00013	5,00013	B
		1		3,00009	4,00009	
	1			2,00005	3,00005	
1				1,00002	2,00001	

Jadval 3.2: (3.2.11) sistemani yechish jarayoni.

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod hadlar	Σ	Sxema qismlari
2	4,2	1,6	-3	3,2	8	A
-0,4	3	-2,4	0	-1,6	-1,4	
1,6	-0,8	1	-1	-1	-0,2	
1	-2	-1	1,5	0	-0,5	
...	...	...	...	...	...	
1	2,1	0,8	-1,5	1,6	4	A ₁
	3,84	-2,08	-0,6	-0,96	0,2	
	4,16	0,28	-1,4	3,56	6,6	
	4,1	1,8	-3	1,6	4,5	
...	...	...	...	...	...	
	1	-0,54166	-0,15625	-0,25	0,05208	A ₂
		-2,53331	0,75	-4,6	-6,38331	
		-4,02081	2,35937	-2,62500	-4,28644	
...	...	...	...	...	...	
		1	-0,29606	1,81581	2,51198	
			1,16897	4,67603	5,84500	A ₃
			1	4,00013	5,00013	B
		1		3,0009	4,00009	
	1			2,00005	3,00005	
1				1,00002	2,00001	

Jadval 3.3: (3.2.11) sistemani yechish jarayoni.

Shunday qilib, quyidagi $x_1 = 1,00002$; $x_2 = 2,00005$; $x_3 = 3,00009$; $x_4 = 4,00013$ taqribiy yechimga ega bo'ldik.

Sistemaning aniq yechimi $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$ ekanligiga bevosita ishonch hosil qilish mumkin. ■

3.2.2 Bosh elementlar metodi

Gauss metodida yetakchi elementlar doim noldan farqli bo'lavermaydi. Yoki ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin; bunday sonlarga bo'lganda katta absolyut xatoga ega bo'lgan sonlar hosil bo'ladi. Buning natijasida

taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblash xatosining bunday halokatli ta'siridan qutulish uchun Gauss metodi bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Buning Gauss metodining kompakt sxemasidan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma'lumlarni yo'qotish jarayonida quyidagi sistemaga ega bo'lgan bo'laylik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \vdots \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + b_{mn}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(m)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{m+1,n}^{(m)}x_n = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \vdots \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + \dots + a_{nn}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endi $|a_{m+1,k}^{(m)}| = \max_j |a_{m+1,j}^{(m)}|$ tenglikni qanoatlantiradigan k nomerni topib, o'zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1} = x_k$ va $x_k = x_{m+1}$ so'ngra $(m+2)$ - tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma'lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatosini kamaytirishga xizmat qiladi.

3.2.3 Optimal yo'qotish metodi

Bu metodning dastlabki qadamlari Gauss metodiga o'xshashdir. Yetakchi element $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilib, (3.2.1) sistemaning birinchi tenglamasini

$$x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + \dots + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \quad (3.2.11)$$

ko'rinishga keltiramiz. So'ngra (3.2.1) sistemaning faqat ikkinchi tenglamasidan x_1 ni yo'qotamiz:

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)}.$$

Endi $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib, bu tenglamani (3.2.2) ko'rinishga keltiramiz:

$$x_2 + b_{23}^{(2)}x_3 + \dots + b_{2n}^{(2)}x_n = b_{2,n+1}^{(2)}.$$

Bu tenglama yordamida (3.2.2) tenglamadan x_2 ni yo'qotamiz. Natijada

$$x_1 + c_{13}^{(2)}x_3 + \dots + c_{1n}^{(2)}x_n = c_{1,n+1}^{(2)}.$$

$$x_2 + c_{23}^{(2)} x_3 + \dots + c_{2n}^{(2)} x_n = c_{2,n+1}^{(2)}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_{1j}^{(2)} = b_{1j}^{(1)} - b_{12}^{(1)} b_{2j}^{(2)}, c_{2j}^{(2)} = b_{2j}^{(2)} \quad (j \geq 3).$$

Faraz qilaylik, avvalgi k ta tenglamalar ustida almashtirishlar bajarish natijasida (3.2.1) sistema quyidagi teng kuchli sistemaga keltirilgan bo'lsin:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{1,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + c_{1n}^{(k)} x_n = c_{1,n+1}^{(k)}, \\ \vdots \\ x_k + c_{k,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots + c_{kn}^{(k)} x_n = c_{k,n+1}^{(k)}, \\ a_{k+1,1} x_1 + \dots + a_{k+1,k+1} x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n} x_n = a_{k+1,n+1}, \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{n,k+1} x_{k+1} + \dots + a_{nn} x_n = a_{n,n+1}. \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

Bu sistemaning avvalgi k ta tenglamasini mos ravishda $a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, \dots, a_{k+1,k}$ larga ko'paytirib, natijalarni $(k+1)$ - tenglamadan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_{k+1} noma'lum oldidagi koeffitsiyentga bo'lamiz. Natijada $(k+1)$ - tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x_{k+1} + c_{k+1,k+2}^{(k+1)} x_{k+2} + \dots + c_{k+1,n}^{(k+1)} x_n = c_{k+1,n+1}^{(k+1)}.$$

Endi bu tenglama yordamida (3.2.12) sistemaning avvalgi k ta tenglamasidan x_{k+1} ni yo'qotsak, u holda yana (3.2.12) ko'rinishdagi sistemaga, faqat k ning $(k+1)$ ga almashgan holiga, ega bo'lamiz.

Shu bilan birga, agar

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^k c_{r,k+1}^{(k)} a_{k+1,r} \neq 0$$

bo'lsa, quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$c_{k+1,p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1,p} - \sum_{r=1}^k a_{k+1,r} c_{r,p}^{(k)}}{a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^k a_{k+1,r} c_{r,k+1}^{(k)}},$$

$$c_{ip}^{(k+1)} = c_{ip}^{(k)} - c_{i,k+1}^{(k)} c_{k+1,p}^{(k+1)},$$

$$(i = 1, 2, \dots, k; p = k+2, k+3, \dots, n+1).$$

Almashtirishlarning n - qadami ham bajarilgandan so'ng (3.2.1) sistemaning yechimi uchun quyidagi formulalar hosil bo'ladi:

$$x_i = c_{i,n+1}^{(n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bu yerda ham hisoblash jarayonini kontrol qilish Gauss metodidagiga o'xshashdir. Optimal yo'qotish metodida ham barcha yetakchi elementlar noldan farqli bo'lishi zarurdir. Agar bu fakt oldindan ma'lum bo'lmasa, u holda hisoblash sxemasini o'zgartirib, bosh elementlarni satr bo'yicha tanlash yo'li bilan noma'lumlarni yo'qotish maqsadga muvofiqdir. Buning uchun, agar $(k+1)$ - tenglamada $x_1, x_2, \dots, x_k$ noma'lumlarni yo'qotgandan keyin,

$$a_{k+1,k+1} - \sum_{s=1}^k a_{k+1,s} c_{sp}^{(k+1)} \quad (p > k+1)$$

moduli bo'yicha eng katta element bo'lsa, u holda o'zgaruvchilarni qaytadan belgilab: $x_{k+1} = x_p$ va $x_p = x_{k+1}$, so'ngra optimal yo'qotish qoidasiga ko'ra noma'lumlarni yo'qotishni davom ettirish kerak.

Optimal yo'qotish metodining ustunligi shundan iboratki n - tartibli sistemani yechish uchun zarur bo'lgan arifmetik amallarning soni Gauss metodidagidek bo'lsa ham, bu metod EHMLar xotirasidan effektiv ravishda foydalanishga imkon beradi, ya'ni sistemaning tartibini ikki marta orttirish mumkin.

(3.2.12) sistemadan ko'rinib turibdiki, optimal yo'qotishning k -qadami bajarilgach, berilgan sistemaning oxirgi $(n-k)$ ta tenglamasi o'zgarishsiz qoladi. Buni hisobga olgan holda xotiraga matritsaning barcha elementlarini to'la kiritmasdan, har bir qadamdan oldin bittadan satrni kiritamiz. U holda $(k+1)$ - qadamni amalga oshirish uchun xotiraning

$$f(k) = k(n-k+1) + n + 1$$

ta yacheykasi yetarli bo'ladi, bular

$$\begin{bmatrix} c_{1,k+1}^{(k)} & \cdots & c_{1,n+1}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & c_{k,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

matritsani va (3.2.12) sistemadagi $(k+1)$ - tenglama koeffitsiyentlarini joylashtirish uchun xizmat qiladi. Endi $f(k)$ ning maksimumini topib, n - tartibli sistemani yechish uchun $\frac{(n+1)(n+5)}{4}$ ta yacheykaga ega bo'lgan

maydon yetarli ekanligiga ishonch qosil qilamiz. Masalan, operativ xotirasi 4095 yacheykalan iborat bo'lgan EHM da tashqi qurilmalardan foydalanmasdan 122- tartibli tenglamalar sistemasini yechish yoki shu tartibli ixtiyoriy matritsaning determinantini hisoblash mumkin.

Misol 3.2. *Misol tariqasida*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4,2x_2 + 1,6x_3 - 3x_4 = 3,2, \\ -0,4x_1 + 3x_2 - 2,4x_3 = -1,6, \\ 1,6x_1 - 0,8x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 1,5x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemani optimal yo'qotish metodi bilan yechaylik.

Yechish: Birinchi tenglamadan

$$x_1 + 2,1x_2 + 0,8x_3 - 1,5x_4 = 1,6 \quad (3.2.13)$$

ni hosil qilamiz va buni $-0,4$ ga ko'paytirib, sistemaning ikkinchi tenglamasidan ayiramiz:

$$3,84x_2 - 2,08x_3 - 0,60x_4 = -0,96.$$

Buni 3,84 ga bo'lib, kerakli tenglamani hosil qilamiz:

$$x_2 - 0,54167x_3 - 0,15625x_4 = -0,2500. \quad (3.2.14)$$

Endi (3.2.13) dan x_2 ni yo'qotsak,

$$x_1 + 1,93750x_2 - 1,17182x_4 = 2,12501. \quad (3.2.15)$$

(3.2.15) ni 1,6 ga va (3.2.14) ni $-0,8$ ga ko'paytirib, sistemaning uchinchi tenglamasidan ayiramiz va hosil bo'lgan tenglamani x_3 oldidagi koeffitsiyentga bo'lsak,

$$x_3 - 0,29611x_4 = 1,81556 \quad (3.2.16)$$

kelib chiqadi.

Bu tenglama yordamida (3.2.14) va (3.2.15) dan x_3 ni yo'qotsak.

$$\begin{cases} x_1 - 0,59811x_4 = -1,39322, \\ x_2 - 0,31664x_4 = 0,73343 \end{cases} \quad (3.2.17)$$

hosil bo'ladi.

Endi (3.2.16) - (3.2.17) tenglamalar yordamida sistemaning to'rtinchi tenglamasidan x_1, x_2, x_3 ni yo'qotamiz: $0,41894x_4 = 1,67564$. Bundan va (3.2.16) - (3.2.17) dan noma'lumlarni ketma-ket topamiz: $x_4 = 4,00065; x_3 = 3,00019; x_2 = 1,99999; x_1 = 0,99922$. ■

3.2.4 Determinantni hisoblash

Gauss metodini ham, optimal yo'qotish metodini ham determinantni hisoblash uchun qo'llash mumkin. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matritsaning determinantini topish talab qilinsin. Buning uchun, bir jinsli, chiziqli

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (3.2.18)$$

sistemani yechishga Gauss metodini qo'llaymiz. Natijada A matritsa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12}^{(1)} & b_{13}^{(1)} & \cdots & b_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & b_{23}^{(2)} & \cdots & b_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

uchburchak matritsaga almashtiriladi, (3.2.18) sistema esa unga ekvivalent bo'lgan

$$B\bar{x} = \bar{0}$$

sistemaga o'tadi.

Agar diqqat qilinsa, B matritsaning elementlari A matritsa va keyingi yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ matritsalaridan quyidagi ikkita elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan:

1. Noldan farqli deb faraz qilingan $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$ yetakchi elementlarga bo'lish;
2. A matritsa va yordamchi $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ larning satrlaridan mos ravishdagi yetakchi satrlarga proporsional bo'lgan satrlarni ayirish.

Birinchi almashtirish natijasida matritsaning determinanti ham mos ravishdagi yetakchi elementga bo'linadi, ikkinchi almashtirish esa determinantni o'zgarishsiz qoldiradi. Shuning uchun ham

$$1 = \det B = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n-1)'}}$$

bu yerdan esa

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (3.2.19)$$

Demak, determinant Gaussning kompakt sxemasidagi yetakchi elementlarning ko'paytmasiga teng ekan.

Matritsa determinantini optimal yo'qotish metodi yordamida ham hisoblash mumkin. Bu yerda ham determinant barcha yetakchi

$$\alpha_k = a_{k+1,k+1} - \sum_{r=1}^k a_{k+1,r} c_{r,k+1}^{(k)}$$

elementlarning ko'paytmasiga teng:

$$\det A = \prod_{k=1}^n \alpha_k. \quad (3.2.20)$$

Agar yetakchi elementlarning birortasi nolga teng bo'lsa, u holda satr bo'yicha bosh elementni tanlash sxemasidan foydalanish kerak. Lekin bu holda determinantning ishorasini saqlash uchun a_k elementlarni $(-1)^{l_k+1}$ ga ko'paytirish kerak bo'ladi. Bu yerda l_k soni, agar avvalgi k -qadamda yo'qotilmagan barcha noma'lumlar chapdan o'ngga qarab ketma-ket $1, 2, \dots, n-k$ lar bilan nomerlangan bo'lsa, $(k+1)$ - qadamda yo'qotilgan noma'lumlarning nomerini bildiradi. Lekin hisoblash odatdagicha (3.2.19) yoki (3.2.20) formulalar bilan bajarilganda $\det A$ aytarli kichik (katta) bo'lmasada biror $i < n$ uchun avvalgi i ta ko'payuvchilarning ko'paytmasi mashina nolga teng bo'lishi yoki to'lib ortib ketishi mumkin.

Bunday nuqsandan qutulish uchun (3.2.19) formula bo'yicha $\det A$ ni quyidagicha hisoblash kerak:

$$\det A = (q \prod_j (-1)^{l_j+1} \alpha_j) (r \prod_k (-1)^{l_k+1} \alpha_k).$$

Bu yerda q EHM dagi mumkin bo'lgan eng katta songa yaqin bo'lib, r eng kichik songa yaqin va shu bilan birga $q \cdot r = 1$; a_j yetakchi elementlar orasidagi moduli bo'yicha birdan kichik bo'lganlari, a_k esa qolgan yetakchi elementlar.

3.2.5 Matritsalarining teskarisini topish

Agar bir xil matritsaga ega bo'lib, faqat ozod hadlari bilan farq qiladigan bir qancha sistemani yechishga to'g'ri kelsa, u holda matritsaning teskarisini topish maqsadga muvofiqdir. Ikkinchi tomondan statistik

hisoblashlarda ayrim statistik parametrlarni baholash uchun teskari matritsalar katta ahamiyatga ega.

Faraz qilaylik, bizga maxsusmas matritsa $A = [a_{ij}]$ ($i, j = \overline{1, n}$) berilgan bo'lsin. Unga teskari bo'lgan $A^{-1} = [x_{ij}]$ magrisani topish uchun asosiy $AA^{-1} = E$ munosabatdan foydalanamiz, bu yerda E birlik matritsa. A va A^{-1} matritsalarini o'zaro ko'paytirsak, n^2 ta x_{ij} noma'lumlarga nisbatan asosiy matritsasi bir xil va faqat ozod hadlari bilangina farq qiladigan n ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 1 & 0 \dots 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 & 1 \dots 0, \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 & 0 \dots 1, \end{cases}$$

Bunday sistemani Gauss metodi bilan birdaniga yechish mumkin.

Misol 3.3. *Misol uchun (3.2.11) sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4,2 & 1,6 & -3 \\ -0,4 & 3 & -2 & 0 \\ 1,6 & -0,8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1,5 \end{bmatrix}$$

matritsasining teskarisini topaylik.

Yechish: Gaussning kompakt sxemasini qo'llaymiz. Bu holda to'rtta ozod hadlar ustuniga ega bo'lamiz (jalval 3.4).

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	Σ
2	4,2	1,6	-3	1	0	0	0	5,8
-0,4	3	-2	0	0	1	0	0	1,6
1,6	-0,8	1	-1	0	0	1	0	1,8
1	-2	-1	1,5	0	0	0	1	2,5
1	-2,1	-0,08	-1,5	0,5	0	0	0	2,9
	3,84	-1,68	-0,6	0,6	1	0	0	2,76
	-4,16	-0,28	1,4	-0,8	0	1	0	-2,84
	-4,1	-1,8	3	-0,5	0	0	1	-2,4
	1	-0,43750	-0,15625	-0,052008	0,26042	0	0	0,71875
		-2,1000	0,75000	-0,58335	1,08334	1	0	0,14999
		-3,593752	3,5937	-0,28647	1,06772	0	1	-3,52085
	1		-0,35714	0,27779	-0,515288	-0,47619	0	0,07142
			1,07590	0,71184	-0,78622	-1,71131	1	0,29022
				0,66162	-0,73076	-1,59058	0,92945	-0,73027
				0,51408	-0,77686	-1,04425	0,33195	-0,97508
				0,38037	-0,19364	-0,70539	0,29046	-0,22820
				0,28239	-0,06801	-0,06915	0,51865	0,66388

Jadval 3.4: (3.2.11) sistema uchun Gaussning kompakt sxemasi.

Shuni ham eslatib o'tamizki, teskari matritsaning ustun elementlari teskari tartibda hosil bo'ladi. Jadval 3.4 natijasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,28239 & -0,06801 & -0,06915 & 0,51865 \\ 0,38037 & -0,19364 & -1,70539 & 0,29046 \\ 0,51408 & -0,77686 & -1,04425 & 0,33195 \\ 0,66162 & -0,73076 & -1,59058 & 0,92945 \end{bmatrix}$$

Tekshirish uchun AA^{-1} ko'paytmani tuzaylik:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4,2 & -1,6 & -3 \\ -0,4 & 3 & -2 & 0 \\ 1,6 & -0,8 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,28239 & -0,06801 & -0,06915 & 0,51865 \\ 0,38037 & -0,19364 & -1,70539 & 0,29046 \\ 0,51408 & -0,77686 & -1,04425 & 0,33195 \\ 0,66162 & -0,73076 & -1,59058 & 0,92945 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00001 & 0,00001 & 0,00001 \\ 0,00001 & 1,0000 & -0,00001 & -0,00002 \\ -0,00003 & -0,00001 & 1,00000 & -0,00003 \\ 0,00000 & -0,00001 & 0,00001 & 0,99996 \end{bmatrix} = \\ = E + 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bu yerdan ko'rinadiki, AA^{-1} ko'paytma matritsa elementlari E birlik matritsaning mos elementlaridan faqatgina verguldan keyingi beshinchi xona raqamlari bilangina farq qiladi, demak aniqlik qoniqarlidir. ■

3.3-§. Kvadrat ildizlar metodi

Ushbu va keyingi paragraflarlagi metodlarda maxsus xossalarga ega bo'lgan matritsalaran foydalanishga to'g'ri keladi, shuning uchun avvalo shu matritsalarini ta'riflab o'tamiz.

Agar barcha i va j lar uchun $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ bo'lsa (bu yerda a_{ji} ustidagi chiziqli qo'shma kompleks sonni bildiradi) elementlari a_{ij}^* dan iborat bo'lgan A^* matritsa berilgan $A = [a_{ij}]$ matritsaga nisbatan qo'shma matritsa deyiladi.

Agar A kvadrat matritsa o'zining qo'shmasi A^* bilan ustma-ust tushsa, ya'ni $A^* = A$ bo'lsa, u *Ermit matritsasi* yoki *o'z-o'ziga qo'shma matritsa*

deyiladi. Elementlari haqiqiy sondan iborat bo'lgan Ermit matritsasi *simmetrik matritsa* deyiladi. Bu matritsa $A' = A$ tenglik bilan aniqlanadi.

Agar

$$AA^* = E \quad (3.3.1)$$

bajarilsa, u holda A *unitar matritsa* deyiladi, bu yerda E - birlik matritsa. Unitar matritsa quyidagi xossalarga ega:

1. Agar A unitar matritsa bo'lsa, u holda uni determinanti moduli 1 ga teng bo'lgan kompleks sonidir. Haqiqatan ham, (3.3.1) ga ko'ra

$$\det AA^* = \det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \det \bar{A} = |\det A|^2 = 1$$

2. Agar A unitar matritsa bo'lsa, u holda $A^{-1} = A^*$. Buni isbotlash uchun (3.3.1) ni chapdan A^{-1} ga ko'paytirish kifoyadir.
3. Agar A unitar matritsa bo'lsa, u holda A^* ham unitardir.
4. Ikki unitar matritsalarining ko'paytmasi unitar matritsadir. Haqiqatan ham, A va B unitar matritsalar bo'lsin, u holda

$$(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AEA^* = AA^* = E$$

Endi kvadrat ildizlar metodini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, A Ermit matritsasi bo'lsin. Kvadrat ildizlar metodining g'oyasi A matritsani uchburchak va diagonal matritsalar ko'paytmasi shaklida tasvirlashdan iboratdir:

$$A = T^*DT \quad (3.3.2)$$

bu yerda

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

yuqori uchburchak matritsa bo'lib, D esa d_{ii} elementlari $+1$ yoki -1 dan iborat bo'lgan

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal matritsadir. T matritsa elementlarini topish uchun (3.3.2) tenglikdan, matritsalarini ko'paytirish qoidasiga asoslanib, t_{ij} larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \overline{t_{1i}}d_{11}t_{1j} + \dots + \overline{t_{ii}}d_{ii}t_{ij} = a_{ij} \quad (i < j), \\ |t_{11}|^2d_{11} + \dots + |t_{ii}|^2d_{ii} = a_{ii}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Bu yerda $\overline{t_{ij}}$ lar t_{ij} bilan o'zaro qo'shma kompleks sonlardir. (3.3.3) sistemada tenglamalarning soni noma'lumlarning sonidan n taga kam. (3.3.3) sistemadan $\overline{t_{ij}}$ lar yagona ravishda topilishi uchun d_{ij} larni shunday tanlab olamiz, t_{ij} lar haqiqiy va musbat bo'lsin. U vaqtda (3.3.3) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $i = 1$ bo'lganda

$$|t_{11}|^2d_{11} = a_{11}$$

ga ega bo'lamiz. Endi $d_{11} = \text{sign}(a_{11})$ deb olib t_{11} uchun $t_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$ hosil qilamiz. (3.3.3) sistemaning birinchi tenglamasidan $i = 1$ bo'lganda $t_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}t_{11}}$ ($j = 2, 3, \dots, n$) kelib chiqadi. Shunga o'xshash (3.3.3) sistemada $i = 2$ bo'lganda avval ikkinchi tenglamadan t_{22} ni, so'ng'ra birinchi tenglamadan t_{2j} ni topamiz:

$$\begin{aligned} d_{22} &= \text{sign}(a_{22} - |t_{12}|^2d_{11}), \quad t_{22} = \sqrt{|a_{22} - |t_{12}|^2d_{11}|}, \\ t_{2j} &= a_{2j} - \frac{\overline{t_{12}}d_{11}t_{1j}}{d_{22}t_{22}} \quad (j = \overline{3, n}). \end{aligned}$$

Shunday qilib, T ning avvalgi ikkita satr elementlarini topish uchun formulalar chiqardik. Shunga o'xshash, T matritsaning qolgan elementlarini ham topamiz. Umumiy holda hisoblashlar quyidagi formulalar yordamida olib boriladi:

$$\begin{cases} d_{11} = \text{sign}a_{11}, t_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{11}t_{11}}, \\ d_{ii} = \text{sign}(a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} |t_{si}|^2d_{ss}), \\ t_{ii} = \sqrt{|a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} |t_{si}|^2d_{ss}|} \quad (i > 1) \\ t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} \overline{t_{si}}d_{ss}t_{sj}}{d_{ii}t_{ii}} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Shunday qilib, (3.3.2) yoyilma mavjud va (3.3.4) formulalar yordamida aniqlanadi. Nihoyat,

$$Ax = \bar{b}$$

sistemani yechish uchun uni $A = T^*DT$ yoyilmalan foydalanib, quyidagi ikkita uchburchak matritsali sistemalar shaklida yozib olamiz:

$$T^*D\bar{y} = \bar{b}, \quad T\bar{x} = \bar{y}.$$

Bu sistemalarni yoyib yozsak,

$$\begin{cases} t_{11}d_{11}y_1 = b_1, \\ \overline{t_{12}}d_{11}y_1 + t_{22}d_{22}y_2 = b_2, \\ \vdots \\ \overline{t_{1n}}d_{11}y_1 + \overline{t_{2n}}d_{22}y_2 + \dots + t_{nn}d_{nn}y_n = b_n \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n = y_1, \\ t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ t_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan esa, ketma-ket quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}d_{11}}, y_i = \frac{b_i - \sum_{s=1}^{i-1} \overline{t_{si}}y_s d_{ss}}{t_{ii}d_{ii}} \quad (i > 1) \quad (3.3.5)$$

va

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, x_i = \frac{y_i - \sum_{s=i+1}^n t_{is}x_s}{t_{is}} \quad (i < n). \quad (3.3.6)$$

Agar A haqiqiy va simmetrik matritsa bo'lsa, bu matritsani bir-biriga nisbatan o'zaro transponirlangan ikkita matritsalar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin:

$$A = T'T$$

bu yerda T - yuqori uchburchak matritsa. Bu holda (3.3.4) formulalar biroz soddalashib, ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} t_{si}^2} \quad (i > 1), \\ t_{ij} = \frac{\sqrt{a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} t_{si}t_{sj}}}{t_{ii}} \quad (j = \overline{i+1, n}). \end{cases} \quad (3.3.7)$$

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, faqat A matritsa musbat aniqlangan bo'lgandagina T matritsaning diagonal elementlari haqiqiy va musbat

bo'lishi mumkin. Aks holda, T matritsa elementlari orasida komplekslari ham uchrab qolishi mumkin.

Uchburchak matritsaning determinanti diagonal elementlari ko'paytmasiga teng ekanligini e'tiborga olib, (3.3.2) yoyilmadan $\det A$ ni topish uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\det A = \prod_{i=1}^n d_{ii} t_{ii}^2$$

yoki

$$\det A = \left(p \prod d_{i_r i_r} |t_{i_r i_r}|^2 \right) \left(q \prod d_{i_s i_s} |t_{i_s i_s}|^2 \right).$$

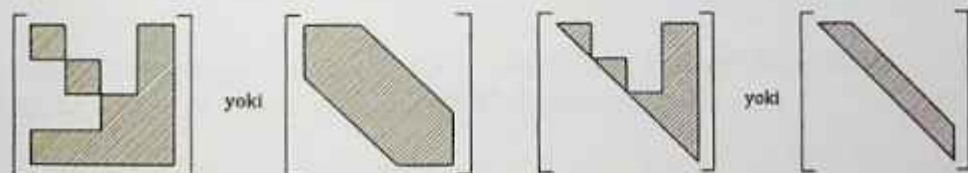
Bu yerda q son EHM dagi mumkin bo'lgan eng katta songa, p esa eng kichigiga yaqin bo'lib, $pq = 1$; $t_{i_r i_r}$ lar T matritsaning absolyut qiymatlari bo'yicha birdan ortmaydigan elementlari, $t_{i_s i_s}$ lar esa qolgan elementlari-dir.

Bu metod yordamida xotirasi 4095 ta icheykadan iborat EHMlarda matritsasi haqiqiy va simmetrik bo'lgan 88 - tartibli sistemani yechish mumkin.

Kvadrat ildizlar metodi ko'pincha kuzatishlar natijasini eng kichik kvadratlar metodi bilan ishlab chiqqanda hosil bo'ladigan tenglamalar-ni normal sistemasini yechish uchun qo'llaniladi. Bunday sistema ma-tritsasining bosh minorlari musbat bo'lgan Ermit matritsasi bo'ladi.

Bunday sistemalarning tartiblari odatda bir necha yuz, hatto minglarga teng bo'lishi mumkin.

Odatda yuqori tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish nihoyatda murakkab masala. Shuning uchun ham har bir konkret masalaning ichki xususiyatlaridan foydalanish kerak. Masalan, ko'p masalalar, shu jumladan, eng kichik kvadratlar



Chizma 3.3.1

Chizma 3.3.2

metodi bilan transport masalasini yechish matritsasi chizma 3.3.1 dagi ko'rinishga ega bo'lgan yuqori darajali algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi. Bunday sistemalarni kvadrat ildizlar metodi bilan yechish qulaydir.

Haqiqatan ham, faraz qilaylik, A Ermit matritsasining elementlari biror j va barcha $1 \leq i \leq m_j < j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ shartni qanoatlantirsin. U holda, (3.3.4) formuladan ko'rinadiki, ularga mos bo'lgan t_{ij} elementlar ham nolga aylanadi. Shuning uchun ham T matritsaning ko'rinishi A matritsaning o'ng yarmidek, ya'ni 3.3.2-chizmadagidek bo'ladi.

Nol elementlar ustida amal bajarmasak, u holda hisoblash ishlari faqat tezlashibgina qolmasdan, balki yechiladigan masalaning tartibini orttirish ham mumkin.

Misol 3.4. Sodda uchun simmetrik matritsaga ega bo'lgan quyidagi:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

sistemani kavadrat ildizlar metodi bilan yechaylik.

Yechish: Sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlari va b_j ozod hadlarini jadval 3.5 ning A qismiga joylashtirib, $\sum$ ustunni hisoblab chiqamiz. (3.3.7) va (3.3.5) formulalar yordamida ketma-ket t_{ij} elementlarni va yangi ozod had y_i larni hisoblab, jadvalning A_1 qismini to'ldiramiz. Kontrol uchun har gal $\sum$ ustunni hisoblab turamiz. Masalan, t_{34} va y_3 quyidagicha topiladi:

$$t_{34} = \frac{a_{34} - t_{13}t_{14} - t_{23}t_{24}}{t_{33}} = \frac{3 - 2,82843 \cdot 0,70711 - 7,07138 \cdot 4,94995}{7,550103i} =$$

$$= 4,50363i,$$

$$y_3 = \frac{b_3 - t_{13}y_2 - t_{23}y_2}{t_{33}} = \frac{1 - 2,82843 \cdot 7,77819 - 7,07138 \cdot 30,40691}{7,550103i} =$$

$$= 28,61122i$$

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	y_i	$\sum$	sxema qismlari
2	-3	4	1	11	15	A
-3	5	-1	2	-6	-3	
4	-1	1	3	1	8	
1	2	3	2	1	9	
t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	y_i	$\sum$	
1,41421	-2,12133	2,82843	0,70711	7,77819	10,60661	A_1
	0,70708	7,07138	4,94995	30,40691	43,13538	
		7,55013	4,50363i	28,61122i	40,66504i	
			1,64904i	4,94718	6,59622i	
2,99958	1,99975	2,00002	3,00004	x_i		A_2
3,99970	2,99980	3,00004	4,00004		$\overline{x_i}$	

Jadval 3.5: Sistemani kavadrat ildizlar metodi bilan yechish.

Jadvaldagi yechimni verguldan keyin uch xonasigacha yaxlitlab olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1 = 3,000; x_2 = 2,000; x_3 = 2,000; x_4 = 3,000$$

Bu esa aniq yechimni beradi. ■

3.4-§. Aylantirishlar metodi

Analitik geometriyadan ma'lumki, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini o'qlar atrofida φ burchakka aylantirish ushbu

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

matritsa orqali bajariladi. Aylantirishdan foydalanib, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Buning uchun ortogonal matritsaning xususiy holi bo'lgan

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \cos \varphi & \dots & \sin \varphi \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\sin \varphi & \dots & \cos \varphi & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (j) \end{matrix}$$

elementar aylantirish matritsasidan foydalanamiz. Bu matritsa birlik matritsadan faqatgina i -va j -satr hamda shu nomerli ustunlarning kesishgan joylaridagi to'rtta elementlari bilangina farq qiladi.

Ravshanki, $A = [a_{ij}]$ matritsani chapdan T_{ij} ga ko'paytirsak, A matritsaning faqat i -va j -satrlari o'zgaradi, chunki $A^{(1)} = T_{ij}A$ matritsa uchun:

$$\begin{aligned} a_{il}^{(1)} &= a_{il} \cos \varphi - a_{jl} \sin \varphi, \\ a_{jl}^{(1)} &= a_{il} \sin \varphi + a_{jl} \cos \varphi \end{aligned} \quad (l = \overline{1, n}) \quad (3.4.1)$$

larga ega bo'lamiz.

Shunga o'xshash $A = [a_{ij}]$ matritsani T_{ij} ga o'ngdan ko'paytirsak, uning faqatgina i -va j -ustunlarigina ushbu formulalar

$$\begin{aligned} a_{ki}^{(1)} &= a_{ki} \cos \varphi + a_{kj} \sin \varphi, \\ a_{pj}^{(1)} &= -a_{ki} \sin \varphi + a_{kj} \cos \varphi \end{aligned} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (3.4.2)$$

bo'yicha o'zgaradi xolos.

Ravshanki, agar a_{il} yoki a_{jl} elementlar noldan farqli bo'lsa, u holda shunday φ ni topish mumkinki, natijada $a_{jl}^{(1)} = 0$ bo'lsin.

Buning uchun:

$$\sin \varphi = -\frac{a_{il}}{\sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a_{jl}}{\sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2}} \quad (3.4.3)$$

kabi olish kerak. Bu holda

$$\begin{cases} a_{il}^{(1)} = \sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2} > 0, \\ a_{jl}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

bo'ladi. Demak, φ ni tanlash evaziga ko'paytma matritsaning ixtiyoriy elementini nolga aylantirish mumkin. Bu uchun quyidagi teoremaning o'rinli ekanligini ko'rsatish kifoyadir.

Teorema 3.1. *Ixtiyoriy haqiqiy maxsusmas $A = [a_{ij}]$ matritsani chapdan ketma-ket elementar aylantirish matritsalariga ko'paytirish bilan uni diagonal elementlarining oxirgisidan boshqalari musbat bo'lgan o'ng uchburchak matritsaga keltirish mumkin.*

Isbot. Fraz qilaylik,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

maxsusmas haqiqiy matritsa bo'lsin.

Avval $a_{11} \neq 0$ deb hisoblaymiz. A matritsani ketma-ket $T_{12}, T_{13}, \dots, T_{1n}$ larda ko'paytiramiz. Bu matritsalarini shunday tanlab olamizki, birinchi ustunning eng yuqoridagi elementidan boshqa hamma elementlari nolga aylansin.

Agarda $a_{11} = 0$ bo'lsa, u holda almashtirishni T_{1j_0} ga ko'paytirishdan boshlaymiz, bu yerda j_0 bu $a_{j_0 1} \neq 0$ shartni qanoatlantiradigan nomerlarning eng kichigi. Matritsa maxsusmas bo'lganligi uchun birinchi ustunning kamida bitta elementi noldan farqlidir, demak, shunday j_0 nomer topiladi.

Yuqoridagi almashtirishlarni bajarish natijasida

$$A^{(1)} = T_{1n} T_{1,n-1} \cdots T_{12} A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

matritsaga kelimiz va bunda $a_{11}^{(1)} > 0$.

Bu yerda $A^{(1)}$ matritsa maxsusmas bo'lganligi uchun $a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(1)}$ elementlarning kamida birortasi noldan farqlidir. Endi elementar aylantirish matritsalarini $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}$ ni shunday tanlab olamizki, bularga ketma-ket ko'paytirish natijasida $A^{(2)}$ matritsa ikkinchi ustunining diagonal ostidagi barcha elementlari nolga aylansin. Shu jarayonni davom ettirib, nihoyat

$$A^{(n-1)} = T_{n-1,n} \cdots T_{12} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

matritsaga kelimiz. Shu bilan teoremaning isboti nihoyasiga yetdi. ■

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, $A^{(n-1)}$ ni hosil qilish uchun matritsalarini ko'paytirishlar soni diagonal ostidagi elementlarning soni $\frac{n(n-1)}{2}$ dan ortmaydi.

Bu teoremadan shunday natija kelib chiqadi.

Natija. Ixtiyoriy maxsusmas haqiqiy matritsani ortogonal va o'ng uchburchak matritsalarining ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin.

Haqiqatan ham, (3.4.5) tenglikdan $A = PA^{(n-1)}$, bu yerda $P = (T_{n-1,n} \dots T_{12})^{-1}$ ortogonal matritsadir.

Isbot qilingan teoremani $A\bar{x} = \bar{b}$ tenglamani yechishga qo'llaymiz. (3.4.5) tenglikdan ko'ramizki, bu tenglama

$$A^{(n-1)}\bar{x} = \bar{c}$$

tenglamaga teng kuchlidir, bu yerda $\bar{c} = T_{n-1,n} \dots T_{12}\bar{b}$. (3.4.6) sistema uchburchakli sistema bo'lganligi uchun uni yechish qiyin emas.

Noma'lumlarni yo'qotishni

$$R_{ij}(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\varphi & \dots & -e^{i\psi}\sin\varphi & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & -e^{i\psi}\sin\varphi & \dots & \cos\varphi & & \\ & & & & & 1 & \ddots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ \\ \\ (j) \\ (j) \end{matrix}$$

ko'rinishdagi unitar matritsalar yordamida ham bajarish mumkin. Haqiqatan ham, agar A - ixtiyoriy maxsusmas kompleks matritsa bo'lsa, u holda uni chapdan $R_{ij}(\varphi, \psi)$ ga ko'paytirib, yangi B matritsani hosil qilamizki, uning i - va j - satr elementlari

$$\begin{aligned} b_{ip} &= a_{ip} \cos \varphi - a_{jp} e^{i\psi} \sin \varphi, \\ b_{jp} &= a_{ip} e^{-i\psi} \sin \varphi + a_{jp} \cos \varphi \quad (p = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

formulalar bilan aniqlanib, qolgan elementlari A matritsaning mos elementlari bilan ustma-ust tushadi. Agar biz B matritsaning b_{js} elementlarini

nolga aylantirmoqchi bo'lsak (bu esa j - tenglamadan $R_{ij}A\bar{x} = R_{ij}\bar{b}$ amal yordamida x_s ni yo'qotish bilan teng kuchlidir), u holda (3.4.7) formulalarda

$$\sqrt{|a_{is}|^2 + |a_{js}|^2} > 0$$

bo'lsa, $p = s$ bo'lganda

$$= \arg a_{is} - \arg a_{js},$$

$$\cos \varphi = \frac{|a_{is}|}{\sqrt{|a_{is}|^2 + |a_{js}|^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{-|a_{js}|}{\sqrt{|a_{is}|^2 + |a_{js}|^2}}$$

deb olish kerak. Aks holda $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$ kabi olish kerak.

$R_{ij}(\varphi, \psi)$ matritsaning bu xossasi quyidagi teoremani isbotlashga imkon beradi.

Teorema 3.2. *Har qanday A kompleks matritsani unga $R_{ij}(\varphi, \psi)$ matritsalarini bir necha marta chapdan ko'paytirish natijasida yuqori uchburchak matritsaga keltirish mumkin.*

Isbot. $R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1n}$ matritsalarini shunday tanlaymizki, ularni chapdan A ga ketma-ket ko'paytirilganda birinchi ustunning barcha diagonal osti elementlari nolga aylansin:

$$A_1 = R_{1n}R_{1,n-1} \cdots R_{12}A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ikkinchi qadamda A_1 ni mos ravishda tanlab olingan $R_{23}, R_{24}, \dots, R_{2n}$ larga, uchinchi qadamda esa $R_{34}, R_{35}, \dots, R_{3n}$ larga va h.k. ko'paytiramiz. Bu jarayonning oxirida yuqori uchburchak A_{n-1} matritsani

$$A_{n-1,n} = R_{n-1,n}R_{n-2,n} \cdots R_{12}A$$

ko'rinishda hosil qilamiz. Shu bilan teoremaning isboti nihoyasiga yetdi. ■

3.5-§. Ortogonallashtirish metodi

Ortogonalashtirish metodining bir necha variantlari mavjud. Bu paragrafda shulardan birini ko'rib chiqamiz.

Masalaning mohiyatiga o'tishdan avval ayrim tushunchalarni kiritamiz.

Koordinatalari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan ikkita $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ushbu $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ yig'indiga aytiladi va $(\bar{x}, \bar{y})$ kabi belgilanadi, demak $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Bu ta'rifdan skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalari osonlik bilan ko'rinadi.

- a) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
- b) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;
- c) $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y})$, λ - o'zgarmas son;
- d) barcha $\bar{x} \neq 0$ vektorlar uchun $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ bo'lib, faqat va faqat nol vektor uchun esa $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ dir.

Keyinchalik biz komponentalari kompleks sonlardan iborat bo'lgan $\bar{x}$ va $\bar{y}$ vektorlarni ham qaraymiz. Ular uchun skalyar ko'paytma $(\bar{x}, \bar{y})$ quyidagicha aniqlanadi:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*,$$

bu yerda y_i^* son u_i ga qo'shma kompleks sonidir. Bu skalyar ko'paytma umuman kompleks son bo'lib, b), c), d) xossalar o'rinli bo'ladi, a) xossa esa quyidagicha o'zgartirilgan holda bo'ladi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})^*$. Buning natijasi sifatida $(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y})$ kelib chiqadi.

Agar $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ bo'lsa, u holda $\bar{x}$ va $\bar{y}$ vektorlar o'zaro ortogonal deyiladi va $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ songa vektorning normasi deyiladi. Agar $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ vektorlar sistemasining istalgan ikkitasi o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda bunday sistema *ortogonal vektorlar sistemasi* deyiladi va shu bilan birga bu vektorlarning normasi birga teng bo'lsa, bu sistema *ortonormal vektorlar sistemasi* deyiladi.

Endi maqsadimizga o'tsak. Bizga maxsusmas matritsali, chiziqli algebralik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1} = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Ushbu $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ($i = \overline{1, n}$), $\bar{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)'$ belgilashlarni kiritib, (3.5.1) - sistemani

$$\begin{cases} (\bar{a}_1, \bar{y}) = 0, \\ (\bar{a}_2, \bar{y}) = 0, \\ \vdots \\ (\bar{a}_n, \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan ko'rinadiki, (3.5.1) - sistemani yechish, oxirgi komponentasi birga teng bo'lib, o'zi barcha $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ vektorlarga ortogonal bo'lgan $(n+1)$ o'lchovli $\bar{y}$ vektorni topish bilan teng kuchlidir. Bu vektorlar sistemasiga yana bir vektor $\bar{a}_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ ni qo'shamiz. Yangidan hosil bo'lgan sistema $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n+1}$ chiziqli erklidir, chunki satrlari shu vektorlardan iborat bo'lgan A matritsaning determinanti (3.5.1) sistema matritsasining determinantiga tengdir, shuning uchun ham u noldan farqlidir.

Endi $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n+1}$ vektorlar sistemasiga *ortogonallashtirish* jarayonini qo'llaymiz.

Ortogonallashtirish jarayonining birinchi qadami quyidagidan iborat:

$$\bar{u}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} \quad (3.5.2)$$

deb olamiz.

Faraz qilaylik, biror $k \geq 1$ uchun $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ ortogonal vektorlar sistemasi va $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ ortonormal vektorlar sistemasi qurilgan bo'lsin. Endi $\bar{u}_{k+1}$ vektorni $\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida, ya'ni

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} + \sum_{j=1}^k \lambda_{kj} \bar{v}_j \quad (3.5.3)$$

ko'rinishda izlaymiz va $\bar{u}_{k+1}$ ning $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ vektorlarga, ya'ni $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ vektorlarga ortogonal bo'lishini talab qilamiz:

$$0 = (\bar{u}_{k+1}, \bar{v}_i) = (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) + \sum_{j=1}^k \lambda_{kj} (\bar{v}_j, \bar{v}_i) = (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) + \lambda_{ki}.$$

Bundan

$$\lambda_{ki} = -(\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) \quad (3.5.4)$$

ni topib, (3.5.3) ga qo'ysak:

$$\bar{u}_{k+1} = \bar{a}_{k+1} - \sum_{i=1}^k (\bar{a}_{k+1}, \bar{v}_i) \bar{v}_i \quad (3.5.5)$$

kelib chiqadi. So'ngra

$$\bar{v}_{k+1} = \frac{\bar{u}_{k+1}}{\|\bar{u}_{k+1}\|} \quad (3.5.6)$$

deb olamiz. Shunday qilib, (3.5.2), (3.5.5) va (3.5.6) formulalar yordamida $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n+1}$ ortogonal va $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}$ ortonormal sistemani ketma-ket quramiz.

Oxirgi $\bar{u}_{n+1} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ vektorning $(n+1)$ -koordinatasi z_{n+1} ning noldan farqli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilaylik. U holda

$$(\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_1) = 0, (\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_2) = 0, \dots, (\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_n) = 0$$

shartlar

$$(\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_1) = 0, (\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_2) = 0, \dots, (\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_n) = 0$$

shartlarga teng kuchli bo'lib (chunki $\bar{v}_i$ lar $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_i$ larning chiziqli kombinatsiyasidir), ular noldan farqli yechimga ega bo'lgan

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} z_j = 0, \sum_{j=1}^n a_{2j} z_j = 0, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} z_j = 0 \quad (3.5.7)$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Demak, bu sistemasining determinanti nolga teng. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki (3.5.1) va (3.5.7) larning determinantlari bir xil edi. Shartga ko'ra, bu determinant noldan farqli. Bu qarama-qarshilik $z_{n+1} \neq 0$ ekanligini ko'rsatadi. Shunday qilib $(\bar{u}_{n+1}, \bar{a}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, shartlarni quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$a_{i1} \frac{z_1}{z_{n+1}} + a_{i2} \frac{z_2}{z_{n+1}} + \dots + a_{in} \frac{z_n}{z_{n+1}} + a_{i,n+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Buni (3.5.1) sistema bilan solishtirsak, berilgan sistemasining yechimi

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yechimni topish uchun $n^3 + n^2$ ta ko'paytirish, $\frac{1}{2}(2n^3 - n^2 - n)$ ta qo'shish, n ta bo'lish, n ta ildiz chiqarish amallarini bajarishga to'g'ri keladi.

Yuqorida keltirilgan jarayon barcha matritsalar uchun ham qoniqarli yechimni topish uchun imkon beravermaydi. Buning asosiy sababi (3.5.5) rekurrent munosabatning turg'un emasligi bo'lib, bu narsa $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}$ vektorlar sistemasining ortogonalligini buzadi. Aniqroq natijaga erishish uchun quyidagicha yo'l tutamiz: $(\bar{a}_i, \bar{y}) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, shartni qanoatlantiradigan $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n, 1)'$ vektorni

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{n+1} d_j \bar{v}_j \quad (3.5.8)$$

ko'rinishda izlaymiz. Ushbu $(\bar{a}_i, \bar{y}) = 0$ ($i = \overline{1, n}$) ortogonallik shartlaridan d_i larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\sum_{j=1}^{n+1} d_j (\bar{a}_j, \bar{v}_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.5.9)$$

Bundan tashqari $\bar{y}$ vektorning $(n+1)$ -koordinatasining birga tengligi yana bir

$$\sum_{j=1}^{n+1} d_j v_{j,n+1} = 1 \quad (3.5.10)$$

tenglamani beradi. Bu tenglama (3.5.8) vektor tenglikning koordinatalarda yozilgan oxirgi tenglamasidir.

Agar hisoblashlar yaxlitlanmasdan olib borilsa, u holda $i < j$ bo'lganda $(\bar{a}_i, \bar{v}_j) = 0$ bo'lganligi uchun (3.5.9) - (3.5.10) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} d_1 (\bar{a}_1, \bar{v}_1) = 0, \\ d_1 (\bar{a}_2, \bar{v}_1) + d_2 (\bar{a}_2, \bar{v}_2) = 0, \\ \dots \\ d_1 (\bar{a}_n, \bar{v}_1) + d_2 (\bar{a}_n, \bar{v}_2) + \dots + d_n (\bar{a}_n, \bar{v}_n) = 0, \\ d_1 v_{1,n+1} + d_2 v_{2,n+1} + \dots + d_{n+1} v_{n+1,n+1} = 1. \end{cases} \quad (3.5.11)$$

Ko'rinish turibdiki, bu sistemaning yechimi $\bar{d}^{(0)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, v_{n+1,n+1}^{-1})'$

vektordan iboratdir.

Agar hisoblashlar yaxlitlash bilan olib borilgan bo'lsa, u holda (3.5.11) sistemaning matritsasi kichik bo'lsa-da, lekin noldan farqli elementlarga ham ega bo'ladi. Hosil bo'lgan sistemani

$$C\bar{d} + D\bar{d} = \bar{g} \quad (3.5.12)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $\bar{g} = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1)'$ va C (3.5.11) sistemaning matritsasi hamda

$$D = \begin{bmatrix} 0 & (\bar{a}_1, \bar{v}_2) & (\bar{a}_1, \bar{v}_3) & \dots & (\bar{a}_1, \bar{v}_{n+1}) \\ 0 & 0 & (\bar{a}_2, \bar{v}_3) & \dots & (\bar{a}_2, \bar{v}_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (\bar{a}_n, \bar{v}_{n+1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dastlabki yaqinlashishni $\bar{d}^{(0)}$ deb olib, navbatdagi $\bar{d}^{(k+1)}$ yaqinlashishlarni

$$C\bar{d}^{(k+1)} + D\bar{d}^{(k)} = \bar{g} \quad (3.5.13)$$

iteratsion jarayondan aniqlaymiz. Bu munosabatni quyidagi

$$\bar{d}^{(k+1)} = -C^{-1}D\bar{d}^{(k)} + C^{-1}\bar{g} \quad (3.5.14)$$

ko'rinishda yozish qulayroqdir. D matritsaning normasi kichik bo'lganligi uchun $C^{-1}D$ matritsaning normasi ham kichik buladi. Shuning uchun ham bu iteratsion jarayondan (8-§ ga q.) topilgan ketma-ket yaqinlashishlar tez yaqinlashadi. Bu usul yordamida hisoblash xatosining ta'sirini kamaytirish mumkin.

Misol 3.5. Quyidagi tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 = -1, \\ -0,2x_1 + 0,7x_2 - 0,2x_3 = 0, \\ 0,1x_1 - x_2 + 0,4x_3 = 1,5 \end{cases}$$

ortogonallashtirish metodi bilan yechilsin.

Yechish: (3.5.2) formulaga ko'ra

$$\bar{u}_1 = (0,6; 0,3; 0,4; 1)';$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{\bar{u}_1}{\sqrt{(\bar{u}_1, \bar{u}_1)}} = \frac{u_1}{\sqrt{0,36 + 0,09 + 0,16 + 1}} = \frac{\bar{u}_1}{\sqrt{1,26886}} = \\ &= (0,47287; 0,23643; 0,31524; 0,78811)'. \end{aligned}$$

Endi (3.5.4) formula yordamida

$$\lambda_{21} = -(\bar{a}_2, \bar{v}_1) = -0,00788$$

ni topamiz, keyin (3.5.5) dan $k = 1$ bo'lganda

$$\bar{u}_2 = \bar{a}_2 - (\bar{a}_2, \bar{v}_1) \bar{v}_1^- = (-0, 20373; 0, 69814; -0, 20248; -0, 00621)'$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{0,75495}} = (-0, 26896; 0, 92475; -0, 20248; -0, 00823)'$$

Endi skalyar ko'paytmalarni hisoblaymiz:

$$(\bar{a}_3, \bar{v}_1) = -1, 24521; (\bar{a}_3, \bar{v}_2) = -1, 04667.$$

(3.5.5) formulada $k = 2$ deb olib $\bar{u}_3$ va $\bar{v}_3$ lar uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\bar{u}_3 = \bar{a}_3 - (\bar{a}_3, \bar{v}_1) \bar{v}_1^- - (\bar{a}_3, \bar{v}_2) \bar{v}_2 = (0, 40600; 0, 26232; 0, 51152; -0, 52725)',$$

$$\bar{v}_3 = \frac{\bar{u}_3}{\|\bar{u}_3\|} = \frac{\bar{u}_3}{0, 87954} = (0, 46160; 0, 29825; 0, 58192; -0, 59946)'$$

Xuddi shu tarzda quyidagilarni topamiz:

$$(\bar{a}_4, \bar{v}_1) = 0, 78811; (\bar{a}_4, \bar{v}_2) = -0, 00823; (\bar{a}_4, \bar{v}_3) = -0, 59947,$$

$$\bar{u}_4 = (-0, 09817; -0, 00007; 0, 09819; 0, 01944)', \|\bar{u}_4\| = 0, 10479.$$

Nihoyat,

$$\bar{v}_4 = (-0, 93683; 0, 00066; 0, 93702; 0, 18551)'$$

Bu vektor komponentalarining oxirgisini 0,18551 ga bo'lib, quyidagi taqribiy yechimni olamiz

$$x_1 = -5, 05002; x_2 = 0, 00356; x_3 = 5, 05105.$$

Buni aniq yechim $x_1^* = -5, x_2^* = 0, x_3^* = 5$ bilan solishtirsak, ortogonal-lashtirish metodi bilan topilgan yechimning aniqligi nisbatan katta emasligi ko'rinib turibdi.

Bu yechimning aniqligini yuqorida aytilgan usul bilan orttirish mumkin, lekin biz bunga to'xtalmaymiz. ■

3.6-§. Akslantirishlar metodi

Bu metodning g'oyasi $A\bar{x} = \bar{b}$ sistema matritsasini unitar (3-§ ga qarang) va yuqori uchburchak matritsalar ko'paytmasiga ajratishga

asoslangan. Shuning bilan birga, bu yerda unitar matritsa bir nechta *akslantirish matritsalar* deb ataluvchi kvadrat matritsalarining ko'paytmasidan tashkil topgandir. Bu matritsalar vektorlarini berilgan tekislikka nisbatan aks ettirish qoidasiga asosan vektorlar fazosini almashtirish xossasiga ko'ra shu nom bilan ataladi.

P - ixtiyoriy tekislik bo'lsin, $\bar{W}$ orqali P tekislikka ortogonal va uzunligi birga teng bo'lgan vektor ustunini belgilaymiz. Endi ixtiyoriy

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad (3.6.1)$$

vektorni olamiz, bu yerda $\bar{x}$ vektor $\bar{w}$ vektorga ortogonal, ya'ni $(\bar{x}, \bar{w}) = 0$ bo'lib, $\bar{y}$ esa $\bar{w}$ ga proporsionaldir: $\bar{y} = \alpha \bar{w}$, (α - ixtiyoriy son). $\bar{z}$ ni P tekisligiga nisbatan akslantirish natijasida hosil bo'lgan $\bar{z}_1$ vektor $\bar{z}_1 = \bar{x} - \bar{y}$ ko'rinishiga egadir. $\bar{z}$ ni $\bar{z}_1$ ga o'tkazadigan akslantirish matritsasini U deb belgilasak, u holda $U\bar{z} = \bar{z}_1$ bo'ladi. Bu matritsaning ko'rinishi

$$U = E - 2\bar{w}\bar{w}^* \quad (3.6.2)$$

formulasi bilan aniqlanadi. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} U\bar{z} &= (E - 2\bar{w}\bar{w}^*)\bar{z} = \bar{z} - 2\bar{w}\bar{w}^*(\bar{x} + \alpha\bar{w}) = \bar{z} - 2\bar{w}\bar{w}^*\bar{x} - 2\alpha\bar{w}\bar{w}^*\bar{w} = \bar{z} - 2\alpha\bar{w} = \\ &= \bar{x} + \alpha\bar{w} - 2\alpha\bar{w} = \bar{x} - \alpha\bar{w} = \bar{z}_1. \end{aligned}$$

Chunki $\bar{w}\bar{w}^*\bar{x} = \bar{w}(\bar{x}, \bar{w}) = 0$ va $\bar{w}\bar{w}^*\bar{w} = \bar{w}(\bar{w}, \bar{w}) = \bar{w}$ dir. Uning unitar ekanligi ham osongina tekshiriladi:

$$\begin{aligned} UU^* &= (E - 2\bar{w}\bar{w}^*)(E - 2\bar{w}\bar{w}^*) = E - 4\bar{w}\bar{w}^* + 4\bar{w}\bar{w}^*\bar{w}\bar{w}^* = \\ &= E - 4\bar{w}\bar{w}^* + 4\bar{w}(\bar{w}^*\bar{w})\bar{w}^* = E - 4\bar{w}\bar{w}^* + 4\bar{w}\bar{w}^* = E. \end{aligned}$$

Berilgan matritsani o'ng uchburak matritsaga keltirish uchun akslantirish matritsasi U dan effektiv ravishda foydalanish mumkin. Buni ko'rsatish uchun, avvalo, U matritsa yordamida ixtiyoriy $\bar{a}$ vektorni birlik $\bar{e}$ vektorga o'tkazishni, ya'ni U matritsa va α ni

$$U\bar{a} = \alpha\bar{e}$$

tenglik bajariladigan qilib, aniqlashni ko'rib chiqaylik. (3.6.2) ni quyidagi

$$2(\bar{a}, \bar{w})\bar{w} = \bar{a} - \alpha\bar{e} \quad (3.6.3)$$

yoki ushbu

$$\bar{w} = \lambda(\bar{a} - \alpha\bar{e}) \quad (3.6.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\lambda = \frac{1}{2(\bar{a}, \bar{w})}$, (3.6.4) ni (3.6.3) ga qo'yib,

$$2(\bar{a}, \lambda(\bar{a} - \alpha\bar{e}))\lambda(\bar{a} - \alpha\bar{e}) = \bar{a} - \alpha\bar{e}$$

yoki

$$[2|\lambda|^2(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e}) - 1](\bar{a} - \alpha\bar{e}) = 0$$

ga ega bo'lamiz. λ ni kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga aylanadigan qilib tanlaymiz. Bu esa $|\lambda|^2 = \frac{1}{2(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e})}$ ni beradi. Bu yerda α sonni ham topish kerak. Uni shunday tanlaymizki, $(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e}) > 0$ bo'lsin. $|\alpha| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ deb olsak,

$$(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e}) = (\bar{a}, \bar{a}) - \alpha(\bar{a}, \bar{e}) = |\alpha|^2 - \alpha(\bar{a}, \bar{e}) =$$

$$= |\alpha|^2 - |\alpha|e^{-i \arg \alpha}(\bar{a}, \bar{e})e^{i \arg(\bar{a}, \bar{e})} = |\alpha|^2 - |\alpha||(\bar{a}, \bar{e})|e^{i(-\arg \alpha + \arg(\bar{a}, \bar{e}))}$$

kelib chiqadi. Agar

$$-e^{i(-\arg \alpha + \arg(\bar{a}, \bar{e}))} = 1$$

deb olsak, $(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e})$ albatta musbat bo'ladi. Buning uchun $-\arg \alpha + \arg(\bar{a}, \bar{e}) = \pi$, ya'ni $\arg \alpha = -\pi + \arg(\bar{a}, \bar{e})$ deb olish kerak. Natijada biz quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$(\bar{a}, \bar{a} - \alpha\bar{e}) = |\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{a}, \bar{e})|$$

va

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{2[|\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{a}, \bar{e})|]}.$$

Shunday qilib, $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $U = E - 2\bar{w}\bar{w}^*$ matritsa $U\bar{a} = \alpha\bar{e}$ shartni qanoatlantirishi uchun

$$\bar{w} = \lambda(\bar{a} - \alpha\bar{e}), |\alpha| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}, \arg \alpha = \arg(\bar{a}, \bar{e}) - \pi,$$

$$\lambda = \frac{1}{2[|\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{a}, \bar{e})|]} \quad (3.6.5)$$

deb olish kerak. Agar trigonometrik funksiyalar bilan ish ko'rish maqsadga muvofiq bo'lmasa, α ni quyidagicha aniqlash ma'quldir:

$$\alpha = |\alpha|e^{i \arg \alpha} = -|\alpha|e^{i \arg(\bar{a}, \bar{e})} = -|\alpha|\frac{(\bar{a}, \bar{e})}{|(\bar{a}, \bar{e})|}.$$

Endi ixtiyoriy maxsusmas kompleks qiymatli A matritsani unitar va yuqori uchburchak matritsalar ko'paytmasiga ajratish masalasi quyidagicha hal qilinadi.

Birinchi qadamda $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlarni

$$\bar{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n1})', \quad \bar{e} = (1, 0, \dots, 0)'$$

kabi olib, $\alpha, \lambda, \bar{w}$ larni yuqoridagi formulalar yordamida topamiz va U_1 matritsani hosil qilamiz.

A matritsani chapdan U_1 ga ko'paytirsak

$$A_1 = U_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

kelib chiqadi. Ko'rinib turibdiki, bu yerda $a_{11}^{(1)} = \alpha$ dir. Ikkinchi qadamda

$$\bar{a} = (0, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(1)}); \bar{e} = (0, 1, 0, \dots, 0)'$$

Vektorlar yordamida U_2 matritsa hosil qilamiz va A_1 matritsasini U_2 bilan ko'paytirib,

$$A_2 = U_2 A_1 = U_2 U_1 A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

matritsani keltirib chiqaramiz. U_2 matritsa

$$U_2 = E - 2\bar{w}\bar{w}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22}^{(2)} & u_{23}^{(2)} & \dots & u_{2n}^{(2)} \\ 0 & u_{32}^{(2)} & u_{33}^{(2)} & \dots & u_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & u_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lganligi uchun A_2 va A_1 matritsalarining birinchi satrlari ustma-ust tushadi. Bu jarayonni davom ettirib, $(n-1)$ -qadamda

$$A_{n-1} = U_{n-1} \dots U_2 U_1 A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(n-1)} & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ko'rinishdagi matritsaga ega bo'lamiz. $U_{n-1}, \dots, U_2, U_1$ ko'paytmani U bilan belgilab, $A_{n-1} = UA$ ni hosil qilamiz, bu esa bizga kerakli ajratishni beradi, ya'ni A matritsa U^* unitar matritsa bilan A_{n-1} yuqori uchburchak matritsalarining ko'paytmasiga tengdir: $A = U^* A_{n-1}$.

Yuqoridagi nazariyaga suyanib, akslantirishlar metodining hisoblash sxemasini beramiz. Faraz qilaylik, maxsusmas kompleks matritsali quyidagi

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

sistemani yechish talab qilinsin. Bu sistemaning $\bar{a}_1^{(0)}, \dots, \bar{a}_n^{(0)}, \bar{a}_{n+1}^{(0)}$ ustunli kengaytirilgan matritsasini A_0 orqali belgilab olamiz:

$$A_0 = (\bar{a}_1^{(0)}, \bar{a}_2^{(0)}, \dots, \bar{a}_n^{(0)}, \bar{a}_{n+1}^{(0)}),$$

bu yerda $\bar{a}_k^{(0)} = (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ ($k = \overline{1, n+1}$); $\bar{a}_{n+1}^{(0)} = \bar{b}_0$.

A matritsani

$$A_{k+1} = U_{k+1} A_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-2) \quad (3.6.6)$$

qoidaga ko'ra almashtiraveramiz, bu yerda $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ akslantirish matritsalaridir.

(3.6.6) dan

$$\bar{a}_i^{(k+1)} = U_{k+1} \bar{a}_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6.7)$$

kelib chiqadi. U_1 matritsani tuzayotganda $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlar sifatida

$$\bar{a} = \bar{a}_1^{(0)} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})', \bar{e} = (1, 0, \dots, 0)'$$

larni olishni ko'rgan edik, $\bar{a}$ va $\bar{e}$ vektorlarning tanlanishiga ko'ra

$$\bar{a}_i^{(1)} = U_1 \bar{a}_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

va $\bar{a}_1^{(1)}$ vektor $\bar{a}_1^{(1)} = (a_{11}^{(1)}, 0, \dots, 0)'$ ko'rinishga ega bo'lib, $i > 1$ bo'lganda boshqa $\bar{a}_i^{(1)}$ lar umumiy ko'rinishdagi vektorlardir. Faraz qilaylik,

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad (i > j, j = 1, 2, \dots, k)$$

elementlarga ega bo'lgan A_k matritsa tuzilgan bo'lsin. U vaqtda A_{k+1} ni tuzayotganda

$$\bar{a} = (0, \dots, 0, a_{k+1, k+1}^{(k)}, a_{k+2, k+1}^{(k)}, \dots, a_{n, k+1}^{(k)})'$$

va

$$\bar{e} = (0, \dots, 0, 1_{(k+1)}, 0, \dots, 0)'$$

deb olish kerak. Bundan keyin tuzilgan $A_{k+1} = U_{k+1} A_k$ shunday xossaga egaki, uning elementlari $i > j, j = 1, 2, \dots, k+1$ lar uchun $a_{ij}^{(k+1)} = 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, $(n-1)$ -qadamdan keyin hosil bo'lgan matritsaning dastlabki n ustuni yuqori uchburchak matritsani tashkil etadi. Shu bilan birga, $A\bar{x} = \bar{b}$ sistema unga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistemaga keladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(n-1)} x_1 + a_{12}^{(n-1)} x_2 + \dots + a_{1n}^{(n-1)} x_n = a_{1,n+1}^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)} x_2 + \dots + a_{2n}^{(n-1)} x_n = a_{2,n+1}^{(n-1)}, \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)} x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-1)}, \\ a_{nn}^{(n-1)} x_n = a_{n,n+1}^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

Bundan esa

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ x_k = \frac{a_{k,n+1}^{(n-1)} - \sum_{p=k+1}^n a_{kp}^{(n-1)} x_p}{a_{kk}^{(n-1)}} \\ (k = n-1, n-2, \dots, 1) \end{array} \right. \quad (3.6.8)$$

sistemaga ega bo'lamiz.

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, navbatdagi qadamning bajarilmasligi navbatdagi $\bar{a}$ vektorning nolga aylanishiga bog'liq, chunki bu paytda $\alpha = 0$ bo'lib, λ ni hisoblash mumkin emas. Lekin $\bar{a}$ vektor nolga aylanmaydi, chunki A matritsa maxsusmas matritsa bo'lib, unitar matritsa yordamida almashtirilmogda.

Hisoblashning umumiy hajmini kamaytirish maqsadida (3.6.7) formulani quyidagi

$$\bar{a}_i^{(k+1)} = \bar{a}_i^{(k)} - 2 \left(\bar{a}_i^{(k)}, \bar{w} \right) \bar{w} \quad (3.6.9)$$

ko'rinishda qo'llash ma'quldir. Agar $(\bar{w}\bar{w}^*)\bar{a}_i^{(k)} = \left(\bar{a}_i^{(k)}, \bar{w} \right) \bar{w}$ ni hisobga olsak, (3.6.9) formula (3.6.7) dan kelib chiqadi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini akslantirishlar metodi yordamida yechish uchun $\frac{1}{6}(4n^3 + 15n^2 + 11n)$ ta ko'paytirish, $\frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 + 5n)$ ta qo'shish, $(2n-1)$ ta bo'lish, $(n-1)$ ta ildiz chiqarish amallarini bajarish kerak.

Misol 3.6. Quyidagi kompleks matritsani chiziqli adgebraik tenglamalar sistemasi yechilshi:

$$\begin{cases} (5+3i)x_1 - 2x_2 - (2+i)x_3 = -10+3i, \\ -x_1 + (4-i)x_2 + 2x_3 = 13-2i, \\ -(2+2i)x_1 - x_2 + (3+4i)x_3 = 14+16i. \end{cases}$$

Yechish: Kengaytirilgan matritsaning ustunlarini quyidagicha

$$\bar{a}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 5+3i \\ -1 \\ -2-2i \end{bmatrix}, \bar{a}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4-i \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{a}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} -2-i \\ 2 \\ 3+4i \end{bmatrix}, \bar{a}_4^{(0)} = \begin{bmatrix} -10+3i \\ 13-2i \\ 14+16i \end{bmatrix}$$

belgilab va $\bar{a} = \bar{a}_1^{(0)}$, $\bar{e} = (1, 0, 0)'$ deb olib, (3.6.5) formula yoramida α , λ , $\bar{w}$ larni topamiz:

$$\alpha = -|\alpha| \frac{(\bar{a}, \bar{e})}{|(\bar{a}, \bar{e})|} = -\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} \cdot \frac{(\bar{a}, \bar{e})}{|(\bar{a}, \bar{e})|} = -\sqrt{43} \cdot \frac{5+3i}{\sqrt{34}} = -5,62296 - 3,37378i,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2[|\alpha|^2 + |\alpha| |(\bar{a}, \bar{e})|]}} = \frac{1}{\sqrt{2(43 + \sqrt{43}\sqrt{34})}} = 0,07845,$$

$$\bar{w} = \lambda(\bar{a} - \overline{\alpha\bar{e}}) = 0,07845(\bar{a} - \overline{\alpha\bar{e}}) = \begin{bmatrix} 0,83337 + 0,50002i \\ -0,07845 \\ -0,15690 - 0,15690i \end{bmatrix}.$$

Bundan

$$w^* = (0,83337 - 0,50002i; -0,07845; -0,15690 + 0,15690i)'$$

Keyin $U_1 = E - 2\bar{w}w^*$ formula yordamida

$$\begin{bmatrix} -0,88906 & 0,13076 + 0,07846i & 0,41842 - 0,10462i \\ 0,13076 - 0,07846i & 0,98755 & -0,02462 + 0,02462i \\ 0,41842 + 0,10462i & -0,02462 - 0,02462i & 0,90152 \end{bmatrix}$$

ni hosil qilamiz va nihoyat,

$$A_1 = U_1 A =$$

$$= \begin{bmatrix} -5,62214 - 3,37324i & 1,96120 + 0,28770i & 3,71338 + 2,40580i \\ 0,00000 - 0,00005i & 3,71334 - 0,85526i & 1,46280 + 0,00154i \\ -0,00018 - 0,00004i & -1,86146 - 0,28310i & 1,03310 + 2,92918i \end{bmatrix}$$

ni topamiz. Bu matritsada a_{21} va a_{31} lar aslida nolga teng bo'lishi kerak edi. Ularning o'rnida kichik bo'lsada, lekin noldan farqli sonlar hosil

bo'ldi, bu oraliq natijalardagi yaxlitlash hisobigadir. Ikkinchi qadamdagi hisoblashlar quyidagilardan iborat:

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,71334 - 0,85526i \\ -1,86146 - 0,28310i \end{bmatrix}, \bar{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = -4,14192 + 0,95397i; \lambda = 0,12080;$$

$$\bar{w}^* = (0; 0,94892 + 0,21855i; -0,22486 + 0,03420i),$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,89642 & 0,41180 - 0,16320i \\ 0 & 0,41180 + 0,16320i & 0,89654 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -5,62214 - 3,37324i & 1,96120 + 0,28770i & 3,71380 + 2,40580i \\ -0,00016 + 0,00001i & -4,14146 + 0,95318i & -0,04131 + 0,89101i \\ -0,00009 - 0,00003i & -0,00014 + 0,00001i & 2,32627 + 2,86549i \end{bmatrix}.$$

Endi (3.6.7) ga ko'ra ozod hadlar vektori $\bar{a}_4^{(0)}$ ustida

$$\bar{a}_4^{(1)} = U_1 \bar{a}_4^{(0)}, \bar{a}_4^{(2)} = U_2 \bar{a}_4^{(1)}$$

almashtirishlarni bajarsak,

$$\bar{a}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} 18,24740 + 3,32132i \\ 11,02746 - 0,84748i \\ 7,75392 + 14,36256i \end{bmatrix}, \bar{a}_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 18,24740 + 3,32132i \\ -4,34182 + 5,40876i \\ 11,63049 + 14,32730i \end{bmatrix}$$

hosil bo'ladi. Nihoyat, (3.6.8) dan yechimni topamiz:

$$x_1 = 0,99978 + 1,00008i; x_2 = 0,99935 + 0,00014i;$$

$$x_3 = 4,99982 + 0,00003i.$$

Aniq yechim esa $x_1^* = 1 + i, x_2^* = 1, x_3^* = 5$.

3.7-§. Chiziqli algebradan ayrim ma'lumotlar

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsion metodlar yordamida yechish jarayonida birinchi navbatda vektorlar va matritsalarining normalari hamda limitlari tushunchalariga ehtiyoj tug'iladi. Shuning uchun ham bu masalalarga alohida to'xtalib o'tamiz.

3.7.1 Vektor va matritsalarining normalari

Avvalo vektor uzunligi tushunchasini umumlashtiruvchi vektor normasi tushunchasini kiritamiz. $\bar{x}$ vektorning normasi deb quyidagi uch shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy $\|\bar{x}\|$ songa aytiladi:

- 1) $\|\bar{x}\| \geq 0$ va $\bar{x} = 0$ bo'lgandagina $\|\bar{x}\| = 0$;
- 2) har qanday α son uchun $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$;
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ — *uchburchak tengsizligi*.

Bu ta'rifdan normaning quyidagi xossasi kelib chiqadi:

$$\|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|. \quad (3.7.1)$$

Haqiqatan ham, 3)-shartga ko'ra

$$\|\bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y}\|,$$

ya'ni

$$\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|. \quad (3.7.2)$$

Shunga o'xshash,

$$\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{y} - \bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

yoki

$$-(\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|. \quad (3.7.3)$$

(3.7.2) va (3.7.3) dan esa (3.7.1) kelib chiqadi.

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ vektorning normasi tushunchasini faqat yuqoridagi uchta shartni qanoatlantiradigan qilib, turli xil usullar bilan kiritish mumkin. Shulardan ko'p uchratiladigan uchta soni ko'rib o'taylik.

1. Birinchi - kubik norma:

$$\|\bar{x}\|_1 = \max_i |x_i| \quad (3.7.4)$$

Haqiqiy vektorlar fazosidagi, normasi birdan ortmaydigan vektorlarning to'plami:

$$-1 \leq x_1 \leq 1, \dots, -1 \leq x_n \leq 1$$

birlik kursdan iboratdir, shuning uchun $\|\bar{x}\|_1$ ni kubik norma ham deyiladi.

2. Ikkinchi - oktaedrik norma:

$$\|\bar{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \quad (3.7.5)$$

Ikkinchi normasi 1 dan ortmaydigan haqiqiy vektorlarning to'plami oktaedrning n - o'lchovli analogidan iboratdir, shuning uchun $\|\bar{x}\|_2$ ni oktaedrik norma deyiladi.

3. Uchinchi - sferik norma:

$$\|\bar{x}\|_3 = \|\bar{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}. \quad (3.7.6)$$

Bu norma vektor uzunligining o'zginasi bo'lib, $\|\bar{x}\| \leq 1$ shartni qanoatlantiradigan vektorlar to'plami birlik yopiq shardan iboratdir.

Bu normalar uchun 1)-3)- shartlarning bajarilishini tekshiramiz. Birinchi va ikkinchi shartlarning bajarilishi bevosita ko'rinib turibdi. Endi ushbu

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

shartni tekshiraylik:

Birinchi norma uchun:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_1 = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1.$$

Ikkinchi norma uchun

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\bar{x}\|_2 + \|\bar{y}\|_2.$$

Nihoyat, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\|_3 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \\ &= \|\bar{x}\|_3 + \|\bar{y}\|_3 \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Umumiy holda l_p fazoda vektorlarning normasini quyidagicha kiritish mumkin:

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

bu yerda $p \in [1, \infty]$ -ixtiyoriy son. Ko'rsatish mumkinki $\|\bar{x}\|_p$ miqdor normaning uchala shartini qanoatlantiradi (bobning oxiridagi mashqlarga qarang). $\|\bar{x}\|_p$ ifoda $p = \infty, 1$ va 2 bo'lganda mos ravishda kubik, oktaedrik va sferik normalarga aylanadi.

Faraz qilaylik, B - ixtiyoriy berilgan musbat aniqlangan matritsa bo'lsin. U holda

$$\|\bar{x}\| = (\bar{x}' B \bar{x})^{1/2}$$

ifoda muhim normalar sinfini *elliptik normalar* deb ataluvchi sinfini tashkil etadi. Bundan $B = E$ - birlik matritsa bo'lganda sferik norma kelib chiqadi.

Elliptik normalar matritsalar nazariyasida markaziy rol o'ynaydi. Bu shu bilan bog'liqlik ularni skalyar ko'paytma yordamida kiritish mumkin. Biz keyinchalik ko'ramizki skalyar ko'paytma o'z navbatida, vektorlarning ortogonallik tushunchasini aniqlaydi.

Endi matritsa normasini ko'rib chiqamiz. *A kvadrat matritsaning normasi* deb quyidagi to'rt shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy songa aytiladi:

- 1) $\|A\| \geq 0$ va $A = 0$ bo'lgandagina $\|A\| = 0$;
- 2) ixtiyoriy α son uchun $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (*uchburchak tengsizligi*);
- 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Bu matritsa normasi uchun ham (3.7.1) tengsizlikka o'xshash

$$\left| \|A\| - \|B\| \right| \leq \|A - B\| \quad (3.7.7)$$

tengsizlikni keltirib chiqarish mumkin. Matritsa normasini turli usullar bilan aniqlash mumkin. Ammo chiziqli algebraning ko'p masalalarida matritsa va vektorlarning normalari tushunchalari parallel holda qatnashadi. Shuning uchun ham matritsa va vektor normalari tushunchalarini bir-biriga bog'langan holda kiritish maqsadga muvofiqdir.

Agar har qanday kvadrat A matritsa uchun va o'lchami matritsa tartibiga teng bo'lgan ixtiyoriy $\bar{x}$ vektor uchun ushbu

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\| \quad (3.7.8)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda *matritsa normasi vektorning berilgan normasi bilan moslangan* deyiladi.

Vektorlarning berilgan normasiga matritsaning moslangan normalari-dan eng kichigini tanlaymiz. Shu maqsadda A matritsaning normasini $A\bar{x}$ vektor normasi yordamida quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|A\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\|. \quad (3.7.9)$$

Bu yerda $\bar{x}$ vektor normasi birga teng bo'lgan barcha vektorlarning to'plamidan olinadi.

Biz keyinroq vektorlar va matritsalarining limiti tushunchasini kiritib, ular yordamida normaning uzluksizligini ko'rsatamiz. Lekin hozircha shu tushunchadan foydalanishga to'g'ri keladi.

Har qanday A matritsa uchun $A\bar{x}$ vektor normasining uzluksizligiga ko'ra (3.7.9) tenglikda maksimumga erishiladi, ya'ni shunday $\bar{x}^{(0)}$ vektor

topiladiki $\|\bar{x}^{(0)}\| = 1$ va $\|A\bar{x}^{(0)}\| = \|A\|$ tengliklar bajariladi. (3.7.9) tenglik bilan kiritilgan *matritsa normasi vektorning berilgan normasiga buysungan* deyiladi.

Teorema 3.3. *Matritsaning bo'ysungan normasi:*

a) *norma ta'rifining 1) - 4) shartlarini qanoatlantiradi;*

b) *vektorning berilgan normasi bilan moslangan;*

v) *vektorning berilgan normasiga moslangan boshqa har qanday normasidan katta emas.*

Isbot. Norma ta'rifining 1) shartini tekshiramiz. Faraz qilaylik, $A \neq 0$ bo'lsin. U holda, doimo $A\bar{y} \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{y}$ vektor topiladi. Endi $\bar{y}$ vektorga ko'ra $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ vektorni qaraymiz. Vektor normasi ta'rifining 2) shartidan $\|\bar{x}\| = \left\| \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right\| = \frac{1}{\|\bar{y}\|} \cdot \|\bar{y}\| = 1$ kelib chiqadi, $A\bar{x} \neq 0$ bo'lganligidan 1) shartga ko'ra $\|A\bar{x}\| > 0$ demak,

$$\|A\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\| > 0$$

bo'ladi. Agar $A = 0$ bo'lsa, u holda $\|A\| = \max \|0 \cdot \bar{x}\| = 0$ bo'ladi.

2) shart ham osongina tekshiriladi:

$$\|\alpha A\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|\alpha A\bar{x}\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} |\alpha| \|A\bar{x}\| = |\alpha| \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\| = |\alpha| \|A\|.$$

Endi 3) shartni tekshiramiz. Yuqorida aytganimizdek, har qanday $A + B$ matritsa uchun har doim shunday $\bar{x}^{(0)}$ vektor topiladiki uning uchun $\|\bar{x}^{(0)}\| = 1$ va

$$\|A + B\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|(A + B)\bar{x}\| = \|(A + B)\bar{x}^{(0)}\|$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. U holda

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \|A\bar{x}^{(0)} + B\bar{x}^{(0)}\| \leq \|A\bar{x}^{(0)}\| + \|B\bar{x}^{(0)}\| \leq \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\| + \\ &+ \max_{\|\bar{x}\|=1} \|B\bar{x}\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Norma ta'rifining 4) shartini tekshirishdan avval, moslanganlik sharti (3.7.8) ni tekshiramiz.

Agar $\bar{x} = \bar{0}$ bo'lsa, (3.7.8) ning bajarilishi ko'rinib turibdi.

Faraz qilaylik, $\bar{x} \neq \bar{0}$ bo'lsin. U xolda $\bar{y}^{(0)} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ vektorni olamiz. $\|\bar{y}^{(0)}\| = 1$ bo'lganligi uchun

$$\|A\bar{x}\| = \|A(\|\bar{x}\|\bar{y}^{(0)})\| = \|\bar{x}\| \cdot \|A\bar{y}^{(0)}\| \leq \|\bar{x}\| \max_{\|\bar{y}\|=1} \|A\bar{y}\| = \|A\| \cdot \|\bar{x}\|.$$

Endi 4) shadtni tekshiraylik. Xuddi avvalgidek AB matritsa uchun shunday $\bar{x}^{(0)}$ topiladiki, u quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$\|\bar{x}^{(0)}\| = 1 \text{ va } \|AB\bar{x}^{(0)}\| = \|AB\|$$

u holda

$$\|AB\| = \|A(B\bar{x}^{(0)})\| \leq \|A\| \cdot \|B\bar{x}^{(0)}\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\bar{x}^{(0)}\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Nihoyat, teoremaning oxirgi shartinigina tekshirish qoldi. Faraz qilaylik, $\|A\|$ matritsaning vektorlarning berilgan normasiga bo'ysungan normasi bo'lsin, $\|A\|^*$ - vektorlarning shu normasi bilan moslangan ixtiyoriy normasi bo'lsin. U vaqtda, ma'lumki, A matritsa uchun

$$\|\bar{x}^{(0)}\| = 1, \|A\| = \|A\bar{x}^{(0)}\|$$

tengliklarni qanoatlantiradigan $\bar{x}^{(0)}$ vektor topiladi.

Lekin

$$\|A\bar{x}^{(0)}\| \leq \|A\|^* \|\bar{x}^{(0)}\| = \|A\|^*,$$

demak,

$$\|A\| \leq \|A\|^*.$$

Shu bilan teorema to'liq isbotlandi. ■

Endi matritsaning vektorlarning yuqorida kiritilgan normalariga bo'ysungan normasi ko'rinishlarini keltiramiz. Ular mos ravishda quyidagilardan iboratdir:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{kubik norma}), \quad (3.7.10)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad (\text{oktaedrik norma}), \quad (3.7.11)$$

$$\|A\|_3 = \|A\|^* = \sqrt{\lambda_1} \quad (\text{sferik norma}). \quad (3.7.12)$$

Bu yerda λ_1 soni $A'A$ matritsaning eng katta xos soni.

Endi (3.7.10) - (3.7.12) normalarning mos ravishda (3.7.4) - (3.7.6) normalarga bo'ysungan normalar ekanini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, $A\bar{x}$ vektor quyidagi

$$A\bar{x} = \left(\sum_{k=1}^n a_{1k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k \right)'$$

ko'rinishga ega bo'lganligi uchun vektor normasining ta'rifiga ko'ra

$$\|A\|_1 = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x_k|$$

va agar $\|\bar{x}\|_1 = 1$ bo'lsa, u holda

$$\|A\|_1 = \max_{\|\bar{x}\|_1=1} \|A\bar{x}\|_1 \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|. \quad (3.7.13)$$

Faraz qilaylik, $\sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ maksimumga $i = j$ bo'lganda erishilsin.

U holda

$$\bar{x}^{(0)} = (\text{sign } a_{j1}, \text{sign } a_{j2}, \dots, \text{sign } a_{jn})'$$

vektor uchun $\|\bar{x}^{(0)}\|_1 = 1$ va shu bilan birga $i \neq j$ bo'lganda

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^{(0)} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

tengsizliklar bajarilib, $i = j$ bo'lganda esa

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k^{(0)} \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} \text{sign } a_{jk} \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

tenglik bajariladi.

Bu yerdan

$$\|A\bar{x}^{(0)}\|_1 = \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^{(0)} \right| = \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|. \quad (3.7.14)$$

Demak,

$$\|A\|_1 = \max_{\|\bar{x}\|_1=1} \|A\bar{x}\|_1 \geq \|A\bar{x}^{(0)}\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Quyidagi

$$\|A\|_1 \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad \text{va} \quad \|A\|_1 \geq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

tengsizliklarni taqqoslash aytilgan tasdiqni isbotlaydi.

Endi (3.7.11) tenglikning to'g'riligini ko'rsatamiz. $\|\bar{x}\|_2 = 1$ deb olaylik, u holda

$$\begin{aligned} \|A\bar{x}\|_2 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \cdot |x_k| \leq \max_k \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right) \sum_{k=1}^n |x_k| = \\ &= \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Faraz qilaylik, $\max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$ ga $k = j$ bo'lganda erishilsin.

Bu yerda $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ vektorni shunday tanlaymizki $k \neq j$ bo'lganda $x_k^{(0)} = 0$ bo'lib, $x_j^{(0)} = 1$ bo'lsin.

Ko'rinib turibdiki, $\|\bar{x}^{(0)}\|_2 = 1$ va shu bilan birga

$$\|A\bar{x}^{(0)}\|_2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{(0)} \right| = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Demak,

$$\max_{\|\bar{x}\|_2=1} \|A\bar{x}\|_2 = \|A\bar{x}^{(0)}\|_2 = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|,$$

ya'ni

$$\|A\|_2 = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

Nihoyat, (3.7.12) formulaning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\|\bar{x}\|_3 = 1$ bo'lsin. Sferik normaning kvadrati skalyar ko'paytma bilan ustma-ust tushganligi uchun va skalyar ko'paytmaning xossasiga ko'ra

$$\|A\bar{x}\|_3^2 = (A\bar{x}, A\bar{x}) = (\bar{x}, A'A\bar{x}).$$

$A'A$ - manfiy bo'lmagan simmetrik matritsadir (agar barcha $\bar{x}$ lar uchun $(B\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$ bo'la, B simmetrik matritsa *manfiy bo'lmagan matritsa* deyiladi). Chiziqli algebra kursidan ma'lumki, bunday matritsalarining barcha xos sonlari manfiy emas. Faraz qilaylik, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ lar $A'A$

matritsaning xos sonlari bo'lib, $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)}$ ularga mos keladigan haqiqiy ortonormal xos vektor bo'lsin. Agar $\|\bar{x}\|_3 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{x}$ vektorni xos vektorlar bo'yicha yoysak,

$$\bar{x} = c_1 \bar{x}^{(1)} + c_2 \bar{x}^{(2)} + \dots + c_n \bar{x}^{(n)},$$

u holda $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi va

$$\|A\bar{x}\|_3^2 = (\bar{x}, AA'x) = (c_1 \bar{x}^{(1)} + \dots + c_n \bar{x}^{(n)}, \lambda_1 c_1 \bar{x}^{(1)} + \dots + \lambda_n c_n \bar{x}^{(n)}) = \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_n c_n^2 \leq \lambda_1 (c_1^2 + \dots + c_n^2) = \lambda_1.$$

Endi $\bar{x} = \bar{x}^{(1)}$ deb olsak,

$$\|A\bar{x}^{(1)}\|_3^2 = (\bar{x}^{(1)}, A' A \bar{x}^{(1)}) = (\bar{x}^{(1)}, \lambda_1 \bar{x}^{(1)}) = \lambda_1.$$

Shu bilan uchinchi tasdiq ham isbotlandi. ■

3.7.2 Vektorlar va matritsalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari

Faraz qilaylik,

$$\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})' \quad (k = 1, 2, \dots)$$

vektorlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Arar n ta chekli

$$x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} \quad (i = \overline{1, n})$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ vektor $\{\bar{x}^{(k)}\}$ vektorlar ketma-ketligining limiti deyiladi va bu ketma-ketlikning o'zi $\bar{x}$ vektorga yaqinlashadi deyiladi.

Shu kabi

$$A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \quad (i, j = \overline{1, n}; k = 1, 2, \dots)$$

matritsalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, n^2 ta $a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)}$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda $A = [a_{ij}]$ matritsa $\{A^{(k)}\}$ matritsalar ketma-ketligining limiti deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra, agar matritsalaridan tuzilgan cheksiz qator qismi yig'indilari ketma-ketligining limiti mavjud bo'lsa, u holda bu qator yaqinlashuvchi deyiladi. Bu limit berilgan qatorning yig'indisi deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, matritsali qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun matritsaning mos ravishdagi elementlaridan tuzilgan barcha n^2 ta qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir. Shu bilan birga bu qatorlarning yig'indilari berilgan matritsali qator yig'indisining elementlari bo'ladi.

Vektorning normasi tushunchasi asosida vektorlar ketma-ketligini yaqinlashishini boshqacha ta'riflash ham mumkin.

Ta'rif 3.1. Agar

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

bo'lsa, $\{\bar{x}^{(k)}\}$ vektorlar ketma-ketligi $\bar{x}$ vektorga yaqinlashadi deyiladi.

Bu ta'rif yaqinlashishning avvalgi ta'rifiga ekvivalent ekanligini isbotlash mumkin.

Teorema 3.4. Ushbu

$$\bar{x}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}$$

o'rinli bo'lishi uchun,

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Boshqa so'z bilan aytganda chekli o'lchovli chiziqli fazoda norma bo'yicha yaqinlashish koordinatalar bo'yicha yaqinlashishga teng kuchlidir.

Isbot. (Zarurligi). Faraz qilaylik, $\bar{x}^{(k)} \rightarrow \bar{x}$, ya'ni barcha $i = 1, 2, \dots, n$ uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$ bo'lsin. Quyidagi $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ bazis-vektorlarni tanlab $\bar{x} - \bar{x}^{(k)}$ ni shu vektorlar bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{x} - \bar{x}^{(k)} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(k)}) \bar{e}_i \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Agar $L = \max_{1 \leq i \leq n} \|\bar{e}_i\|$ kabi belgilasak, u holda

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| \leq L \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(k)}|.$$

Shuning uchun ham

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| = 0$$

bo'lsin. U holda

$$\|\bar{x}^{(k)}\| = \|\bar{x} + (\bar{x}^{(k)} - \bar{x})\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}\|$$

bo'lganligi sababli, $\|\bar{x}^{(k)}\|$ barcha $k = 1, 2, \dots$ lar uchun chegaralangan, ya'ni $\|\bar{x}^{(k)}\| \leq M$ ($k = 1, 2, \dots$) bo'ladi. Endi ixtiyoriy $k = 1, 2, \dots$ uchun $a_k = |x_1^{(k)}| + \dots + |x_n^{(k)}|$ ning ham chegaralanganligini, ya'ni $a_k \leq N$ ($k = 1, 2, \dots$) ekanligini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni shunday $k_1, k_2, \dots$ indekslar ketma-ketligi mavjud bo'lsinki: $a_{k_m} \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} \infty$ bo'lsin. Yozuvni qisqartirish maqsadida $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ deb hisoblaylik. Berilgan vektorlar ketma-ketligi $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ga ko'ra yangi vektorlar ketma-ketligi

$$\bar{y}_i^{(k)} = \frac{\bar{x}^{(k)}}{a_k} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})'$$

ni ko'ramiz. Bu yerda $y_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k)}}{a_k}$ ekanligini hisobga olsak,

$$|y_1^{(k)}| + |y_2^{(k)}| + \dots + |y_n^{(k)}| = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ekanligi va $\bar{y}^{(k)}$ larning barchasi chegaralanganligi kelib chiqadi. Shuning uchun ham shunday indekslar ketma-ketligini tanlash mumkinki, chekli limitlar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^{(k)} = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mavjud bo'ladi va $|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| = 1$ bo'lganligi uchun limit vektor

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$$

noldan farqlidir.

Ikkinchi tomondan $\|\bar{x}^{(k)}\| \leq M$ va farazga ko'ra $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ ekanligini hisobga olib,

$$\begin{aligned} \|\bar{y}\| &= \|\bar{y}^{(k)} + (\bar{y} - \bar{y}^{(k)})\| \leq \|\bar{y}^{(k)}\| + \|\bar{y} - \bar{y}^{(k)}\| = \frac{\|\bar{x}^{(k)}\|}{a_k} + \\ &+ \|\bar{y} - \bar{y}^{(k)}\| \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

tengsizlikdan $\|\bar{y}\| = 0$, ya'ni $\bar{y} = \vec{0}$ ni hosil qilamiz. Bu qarama-qarshilik $a_k \leq N$ ($k = 1, 2, \dots$) ekanligini, ya'ni $\bar{x}^{(k)}$ vektorlar koordinatalarining barchasi chegaralanganligini ko'rsatadi. Bundan esa shunday indekslar ketma-ketligini tanlash mumkinligi va bu indekslar uchun $\xi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) chekli limitlarning mavjudligi kelib chiqadi. Limitdagi $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektorning $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor bilan ustma-ust tushishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, teorema shartiga ko'ra $\|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ va teorema-ning zaruriy qismidan $\|\bar{\xi} - \bar{x}^{(k)}\| \rightarrow 0$ ekanligi ko'rinib, barcha $k = 1, 2, \dots$ lar uchun

$$\|\bar{x} - \bar{\xi}\| = \|(\bar{x} - \bar{x}^{(k)}) + (\bar{x}^{(k)} - \bar{\xi})\| \leq \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\| + \|\bar{x}^{(k)} - \bar{\xi}\|$$

tengsizliklar bajariladi. Demak, $\|\bar{x} - \bar{\xi}\| = 0$, ya'ni $\bar{\xi} = \bar{x}$. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Bu teoremadan normaning uzluksizligi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash matritsalar uchun ham $A^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$ bo'lishi uchun $\|A - A^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ning bajarilishi zarur va kifoyaliligini ko'rsatish mumkin. Buning yordamida matritsalar ketma-ketligining yaqinlashishini boshqacha ta'riflash mumkin.

Endi (3.7.7) tengsizlikdan quyidagi kelib chiqadi: agar

$$A^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \text{ bo'lsa, u holda } \|A^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|A\|.$$

3.7.3 Matritsali geometrik progressiyaning yaqinlashishi

Bizga analizdan ma'lumki, $1 + x + x^2 + \dots + x^k + \dots$ sonli geometrik progressiyaning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lishi zarur va kifoya bo'lib, shu bilan birga uning yig'indisi $(1 - x)^{-1}$ ga tengdir.

Endi bu tasdiqlarning quyidagi

$$E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots \quad (3.7.15)$$

matritsali geometrik progressiya uchun ham o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun avval quyidagi bir necha yordamchi tasdiqlarni ko'rib chiqaylik.

Lemma 3.7.1. *Ushbu*

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

o'rinli bo'lishi uchun, A matritsaning barcha xos sonlarining modullari birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isbot. Isbotni boshlashdan avval algebradan ayrim tushunchalarni eslatib o'tamiz. Agar shunday maxsusmas B matritsa mavjud bo'lib,

$$A_1 = B^{-1}AB$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda A_1 matritsa A matritsaga o'xshash deyiladi. Ko'rinib turibdiki, agar A_1 matritsa A ga o'xshash bo'lsa, u holda A ham A_1 ga o'xshash bo'ladi. O'xshash matritsalar bir xil xos sonlarga ega. Haqiqatdan ham,

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det B^{-1} \cdot \det B = \det(B^{-1}B) = 1$$

bo'lganligi uchun:

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda E) &= \det(B^{-1}AB - B^{-1}\lambda B) = \det(B^{-1}(A - \lambda E)B) = \\ &= \det B^{-1} \det(A - \lambda E) \det B = \det(A - \lambda E), \end{aligned}$$

ya'ni bu matritsalar bir xil xarakteristik determinantlarga ega.

Yana ma'lumki, o'xshash almashtirishlar yordamida, ixtiyoriy n -tartibli A matritsani uning *Jordan formasidagi kanonik shakliga keltirish* mumkin:

$$I = B^{-1}AB \quad (3.7.16)$$

Bu yerda

$$I = [I_{m_1}(\lambda_1), I_{m_2}(\lambda_2), \dots, I_{m_r}(\lambda_r)] \quad (3.7.17)$$

kvazidiagonal matritsadir va r bir tomondan

$$I_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan kataklarining sonini bildirsa, ikkinchi tomondan u A matritsaning chiziqli erkli xos vektorlarining sonidir, shu bilan birga $m_1 + m_2 + \dots + m_r =$

n bo'lib, m_i soni $I_{m_i}(\lambda_i)$ ning tartibidir. (3.7.16) dan quyidagilarni yoza olamiz:

$$A = BI \cdot B^{-1},$$

$$A^k = BI \cdot B^{-1} BI \cdot B^{-1} \dots BI \cdot B^{-1} = BI^k B^{-1}.$$

Demak, $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lishi uchun $I^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. (3.7.17) dan ko'ramizki,

$$I^k = [I_{m_1}^k(\lambda_1), I_{m_2}^k(\lambda_2), \dots, I_{m_r}^k(\lambda_r)].$$

Shuning uchun ham $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lishi uchun barcha $i = 1, 2, \dots, r$ larda $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ ning nol matritsaga intilishi zarur va yetarlidir. Matritsalarini ko'paytirish qoidasiga ko'ra:

$$\begin{aligned} I_{m_i}^2(\lambda_i) &= \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matematik induksiya yordamida $k > m_i$ bo'lganda quyidagini hosil qilamiz:

$$I_{m_i}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & C_k^2 \lambda_i^{k-2} & \dots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{m_i-2} \lambda_i^{k-m_i+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

yoki

$$I_{m_i}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \frac{(\lambda_i^k)'}{1!} & \frac{(\lambda_i^k)''}{2!} & \dots & \frac{(\lambda_i^k)^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!} \\ 0 & \lambda_i^k & \frac{(\lambda_i^k)'}{1!} & \dots & \frac{(\lambda_i^k)^{(m_i-2)}}{(m_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{bmatrix}.$$

Bu yerda qulaylik uchun differensiallash amalini kiritdik. $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ matritsaning diagonal elementlari λ_i^k dan iborat. Shuning uchun ham $I_m^k(\lambda_i)$ ning nol matritsaga intilishi uchun $|\lambda_i| < 1$ bo'lishi zarurdir. Lekin bu shartning bajarilishi $I_{m_i}^k(\lambda_i)$ ning nol matritsaga intilishi uchun yetarli hamdir, chunki ixtiyoriy $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ uchun

$$\frac{(\lambda^k)^{(j)}}{j!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Shunday qilib, lemma isbotlandi. ■

Lemmadan yaqinlashish belgisi amaliy masalalarda noqulaylik tug'dirishi mumkin, chunki u A matritsaning xos sonlari haqida aniq ma'lumot talab qiladi. Quyidagi belgi ancha qulaydir.

Lemma 3.7.2.

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

o'rindi bo'lishi uchun A matritsaning kamida biror normasining birdan kichik bo'lishi yetarlidir.

Isbot. Yuqorida ta'kidlanganidek $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ning bajarilishi uchun biror normada

$\|A^k - 0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ning bajarilishi yetarlidir. Ammo

$$\|A^k - 0\| = \|A^k\| = \|A \cdot A^{k-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{k-1}\| \leq \dots \leq \|A\|^k.$$

Demak, biror normada $\|A\| < 1$ bo'lsa, u holda $\|A^k\| \rightarrow 0$, ya'ni $A^k \rightarrow 0$ bo'ladi. ■

Nihoyat, ushbu jumlanı isbotlaylik.

Lemma 3.7.3. *Matritsaning barcha xos sonlarining moduli uning ixtiyoriy normasidan ortmaydi.*

Isbot. Xos son ta'rifiga ko'ra shunday $\bar{x} \neq 0$ vektor mavjudki,

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

bo'ladi. Bundan esa $\|A\bar{x}\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$. Lekin $\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$, shuning uchun ham $|\lambda| \leq \|A\|$. Lemma isbotlandi. ■

Endi (3.7.15) matritsali geometrik progressiyaning yaqinlashishiga doir teoremlarni isbotlashga o'tamiz.

Teorema 3.5. (3.7.15) qatorning yaqinlashishi uchun

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

ning bajarilishi zarur va yetarlidir. Bu holda $E - A$ matritsaning teskarisi mavjud bo'lib,

$$E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (E - A)^{-1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu shartning zaruriyligi ko'rinib turibdi, chunki sonli qatorlar uchun shunga o'xshash shart zarur bo'lib, n -tartibli kvadrat matritsaning yaqinlashishi matritsa elementlaridan mos ravishda tuzilgan n^2 ta sonli qatorlarning yaqinlashishiga teng kuchlidir. Yetarliligini ko'rsatamiz va (3.7.15) qatorning yig'indisini topamiz. Agar $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lsa, u holda lemma 3.7.1 ga ko'ra A matritsaning barcha xos sonlari λ_i lar modullari bo'yicha birdan kichik. Demak, $E - A$ matritsaning xos sonlari $1 - \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bo'lib, noldan farqlidir. Shuning uchun ham $\det(E - A) \neq 0$. Bundan esa $E - A$ matritsaning maxsusmasligi va $(E - A)^{-1}$ ning mavjudligi kelib chiqadi. Endi

$$(E + A + A^2 + \dots + A^k)(E - A) = E - A^{k+1}$$

ayniyatni o'ng tomondan $(E - A)^{-1}$ ga ko'paytirib,

$$E + A + A^2 + \dots + A^k = (E - A)^{-1} - A^{k+1}(E - A)^{-1}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda $A^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ bo'lganligi uchun

$$E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = (E - A)^{-1}$$

kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Lemma 3.7.1 ni hisobga olsak, bu yaqinlashish belgisini quyidagicha ta'riflash mumkin.

Teorema 3.6. (3.7.15) qator yaqinlashishi uchun A matritsaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

Lemma 3.7.2 dan foydalanib, yaqinlashishning yetarli shartini berish mumkin. Bu shart tekshirishlarda ancha qulaydir.

Teorema 3.7. Agar A matritsaning biror normasi birdan kichik bo'lsa, u holda (3.7.15) matritsali progressiya yaqinlashadi.

Quyidagi teorema (3.7.15) qatorning yaqinlashish tezligini aniqlaydi.

Teorema 3.8. Agar $\|A\| < 1$ bo'lsa, u holda

$$\|(E - A)^{-1} - (E + A + A^2 + \dots + A^k)\| \leq \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|}.$$

Isbot. $\|A\| < 1$ shart bajarilganda (3.7.15) qator $(E - A)^{-1}$ matritsaga yaqinlashadi, shuning uchun ham

$$(E - A)^{-1} - (E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots) = A^{k+1} + A^{k+2} + \dots$$

va

$$\begin{aligned} \|(E - A)^{-1} - (E + A + A^2 + \dots + A^k)\| &\leq \|A^{k+1}\| + \|A^{k+2}\| + \dots \leq \\ &\leq \|A\|^{k+1} + \|A\|^{k+2} + \dots = \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|}. \end{aligned}$$

Demak, teorema isbotlandi. ■

3.8-§. Iteratsion metodlar

Endi iteratsion metodlarni bayon qilishga o'tamiz. Bobning boshida aytib o'tilganidek, bu yerda aniq yechim cheksiz ketma-ketliklarning limiti sifatida topiladi.

Hozirgi vaqtda har xil prinsiplarga asoslangan holda juda ko'p iteratsion metodlar yaratilgan. Umuman, bu metodlarning o'ziga xos tomonlaridan yana biri shundan iboratki, ular o'z xatosini o'zi tuzatib boradi. Agar aniq metodlar bilan ishlayotganda biror qadamda xatoga yo'l qo'yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta'sir qiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo'l qo'yilgan xato esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishgagina olib keladi xolos. Biror qadamda yo'l qo'yilgan xato keyingi qadamlarda tuzatib boriladi. Metodlarning hisoblash sxemalari sodda bo'lib, ularni EHMlarda realizatsiya qilish qulaydir. Lekin har bir iteratsion metodning qo'llanish sohasi chegaralangandir. Chunki iteratsiya jarayoni berilgan sistema uchun uzoqlashishi yoki, shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo'lmaydi.

Shuning uchun ham, iteratsion metodlarda faqat yaqinlashish masalasiga emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga

egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham bog'liqdir.

Bu paragrafda avval iteratsion jarayon qurishning umumiy prinsipini ko'rib chiqamiz, so'ngra esa hisoblash amaliyotida keng qo'llaniladigan iteratsion metodlarni keltiramiz.

3.8.1 Iteratsion jarayonni qurish prinsiplari

Faraz qilaylik, maxsusmas matritsali

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (3.8.1)$$

sistema berilgan bo'lsin. Iteratsion metodlarni qurayotganda biror ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(0)}$ olinib, keyingi yaqinlashishlar $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ quyidagi

$$\bar{x}^{(k+1)} = f_k(\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}) \quad (3.8.2)$$

rekurrent formula yordamida topiladi, bu yerda f_k umuman olganda A matritsaga, ozod hadlar vektori $\bar{b}$ ga, yaqinlashish nomeri k ga va dastlabki yaqinlashishlar $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ ga bog'liq bo'lgan qandaydir funksiyadir.

Agar f_k faqat $\bar{x}^{(k)}$ ga bog'liq bo'lib, $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k-1)}$ larga bog'liq bo'lmasa, u holda iteratsiya metodi birinchi tartibga ega deyiladi. Agar f_k funksiyasi k ga bog'liq bo'lmasa, iteratsiya metodi statsionar deyiladi. Albatta, f_k funksiyaning eng soddasi chiziqli funksiyadir. Ketma-ket yaqinlashishlarning birinchi tartibli eng umumiy chiziqli metodi quyidagi

$$\bar{x}^{(k+1)} = B_k \bar{x}^{(k)} + \bar{c}^{(k)} \quad (3.8.3)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda B_k - kvadrat matritsa va $\bar{c}^{(k)}$ - vektor. Biz (3.8.2) va (3.8.3) iteratsion metodlarga tabiiy ravishda (3.8.1) ning aniq yechimi $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$ qo'zg'almas nuqta bo'lishi kerak, ya'ni $\bar{x}^{(0)}$ sifatida aniq yechim $\bar{x}^*$ olinganda keyingi yaqinlashishlar ham $\bar{x}^*$ ga teng bo'lishi kerak degan talabni qo'yishimiz kerak. Bu esa birinchi tartibli chiziqli metod uchun ushbu

$$A^{-1}\bar{b} = B_k A^{-1}\bar{b} + \bar{c}^{(k)} \quad (3.8.4)$$

yoki

$$\bar{c}^{(k)} = (E - B_k) A^{-1}\bar{b} = C_k \bar{b} \quad (3.8.5)$$

tengliklarga olib keladi. O'z navbatida (3.8.5) dan

$$B_k + C_k A = E \quad (3.8.6)$$

tenglik kelib chiqadi. (3.8.5) dan foydalanib, (3.8.3) iteratsion jarayonni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\bar{x}^{(k+1)} = B_k \bar{x}^{(k)} + C_k \bar{b}. \quad (3.8.7)$$

Bu yerda B_k va C_k matritsalar $\bar{b}$ ga bog'liq emas. Endi (3.8.6) ni (3.8.7) ga keltirib qo'ysak,

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - C_k (A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}) \quad (3.8.8)$$

hosil bo'ladi.

Agar C_k^{-1} matritsa mavjud bo'lsa, u holda (3.8.7) ning ikkala tomonini chapdan C_k^{-1} ga ko'paytirib,

$$D_k \bar{x}^{(k+1)} + F_k \bar{x}^{(k)} = \bar{b} \quad (3.8.9)$$

ni hosil qilamiz. Tabiiyki, bu yerda

$$D_k + F_k = A \quad (3.8.10)$$

tenglik bajarilishi kerak. (3.8.9) tenglik $\bar{x}^{(k+1)}$ ni oshkormas ko'rinishda aniqlaydi. Shuning uchun ham D_k shunday matritsa bo'lishi kerakki, D_k^{-1} ni topish qiyin bo'lmasin. Odatda D_k sifatida diagonal yoki uchburchak matritsa olinadi. Birinchi holda *metod to'liq qadamli*, ikkinchi holda esa *bir qadamli* deyiladi.

Ketma-ket yaqinlashishlar, birinchi tartibli chiziqli metodlarning turli ko'rinishlari asosan (3.8.7) - (3.8.10) formulalar yordamida amalga oshiriladi. Juda ko'p chiziqli va chiziqli bo'lmagan ketma-ket yaqinlashish metodlarini

$$f(\bar{x}) = \|A\bar{x} - \bar{b}\|^2$$

funksionalni eng kichik kvadratlar metodi yoki boshqa metodlar bilan minimallashtirish natijasida hosil qilish mumkin.

3.8.2 Oddiy iteratsiya metodi

Faraz qilaylik,

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (3.8.11)$$

sistema biror usul bilan

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b} \quad (3.8.12)$$

ko'inishga keltirilgan bo'lsin, qanday keltirish kerakligini keyinchalik ko'rib o'tamiz va dastlabki yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(0)}$ biror usul bilan (masalan, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ kabi) topilgan bo'lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$\bar{x}^{(k)} = B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.8.13)$$

rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod *oddiy iteratsiya metodi* deyiladi. (3.8.12) dan ko'ramizki, oddiy iteratsiya metodi bu birinchi tartibli to'liq qadamli iteratsion metoddir. Agar (3.8.13) ketma-ketlikning limiti $\bar{x}^*$ mavjud bo'lsa, bu limit (3.8.13) sistemaning (shu bilan (3.8.11) sistemaning ham) yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham, (3.8.13) tenglikda limitga o'tsak, $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$ kelib chiqadi.

Oddiy iteratsiya metodining yaqinlashish shartini aniqlaylik.

Teorema 3.9. (3.8.13) *oddiy iteratsiya jarayoni o'zining ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish vektori - $\bar{x}^{(0)}$ da yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matritsaning barcha xos sonlari birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.*

Isbot. (Zarurligi.) Faraz qilaylik, ixtiyoriy dastlabki vektor uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^k = \bar{x}^*$ limit mavjud bo'lsin. u holda $\bar{x}^* = B\bar{x}^* + \bar{c}$. (3.8.13) ni bu tenglikdan ayirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-1)}) = B^2(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k-2)}) = \dots = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$$

Endi $\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)}$ vektor k ga bog'liq bo'lmaganligi uchun

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B^k(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$$

tenglikda $k \rightarrow \infty$ limitga o'tsak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$$

kelib chiqadi, bundan esa 3.7-§ dagi lemma 3.7.1 ga ko'ra B matritsaning barcha xos sonlarining modullari birdan kichikligi ko'rinadi.

Kifoyaligi. (3.8.13) orqali aniqlanadigan barcha yaqinlashishlarni dastlabki vektor $\bar{x}^{(0)}$ va $\bar{c}$ orqali ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(k)} &= B\bar{x}^{(k-1)} + \bar{c} = B(B\bar{x}^{(k-2)} + \bar{c}) + \bar{c} = B^2\bar{x}^{(k-2)} + (E + B)\bar{c} = \\ &= \dots = B^k\bar{x}^{(0)} + (E + B + \dots + B^{k-1})\bar{c}. \end{aligned}$$

Endi, faraz qilaylik, B ning barcha xos sonlari birdan kichik bo'lsin. U holda 3.7-§ dagi lemma 3.7.1 va teorema 3.6 ga ko'ra

$$B^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, E + B + B^2 + \dots + B^{k-1} \rightarrow (E - B)^{-1}.$$

Demak, $\bar{x}^{(0)}$ qanday bo'lishidan qati nazar $\bar{x}^{(k)}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir. ■

Isbot qilingan teorema nazariy jihatdan foydali, chunki u mavjud haqiqatni aniq ifodalaydi. Lekin amaliy ishlar uchun yaramaydi. Endi B matritsaning elementlari orqali ifodalanadigan kifoyalilik belgisini keltiramiz.

Teorema 3.10. (3.8.13) *oddiy iteratsiya jarayonining yaqinlashuvchi bo'lishi uchun B matritsaning biror normasi birdan kichik bo'lishi kifoyadir.*

Isbot. Haqiqatan ham, agar $\|B\| < 1$ bo'lsa, 3.7-§ dagi lemma 3.7.3 ga ko'ra bu matritsaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lib, bundan teorema 3.9 ga asosan oddiy iteratsion jarayonning yaqinlashishligi kelib chiqadi. ■

Teorema 3.10 bir necha qulay kifoyalilik belgilarini keltirishga imkon beradi.

Teorema 3.11. (3.8.13) *oddiy iteratsiya jarayoni yaqinlashishi uchun B matritsaning elementlari quyidagi*

$$\max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (3.8.14)$$

$$\max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1, \quad (3.8.15)$$

$$\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \leq \mu < 1 \quad (3.8.16)$$

tengsizliklarning birortasini qanoatlantirishi kifoyadir.

Agar biz

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|, \|B\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$$

normalarni eslasak, teoremadagi avvalgi ikkita shart teorema 3.10 dan kelib chiqadi. Oxirgi shartdagi tengsizlik esa $\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1}$ ning birdan kichik ekanligini ko'rsatadi. Haqiqatan ham, bu yerda λ_1 bu $B'B$ matritsaning eng katta xos soni bo'lganligi va $B'B$ ning barcha xos sonlari manfiy bo'lmaganligi uchun

$$\lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Lekin bu tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda $B'B$ ning iziga (ya'ni $B'B$ matritsa diagonal elementlarining yig'indisiga) teng bo'lib, u esa $\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2$ ga tengdir.

Endi yaqinlashish tezligini baholaydigan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 3.12. *Agar B matritsaning, $\bar{x}$ vektorning berilgan normasiga moslangan biror normasi birdan kichik bo'lsa, u holda (3.8.13) oddiy iteratsiya metodining xatosi quyidagicha baholanadi:*

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + \frac{\|B\|^k \|\bar{c}\|}{1 - \|B\|}.$$

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\|B\| < 1$, shuning uchun ham

$$\bar{x}^* = (E + B + B^2 + \dots + B^{n-1} + \dots) \bar{c}. \quad (3.8.17)$$

Bu tenglikni (3.8.15) dan ayirsak,

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} = B^k \bar{x}^{(0)} + (B^k + B^{k+1} + \dots) \bar{c}. \quad (3.8.18)$$

Bundan esa

$$\begin{aligned} \|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| &\leq \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + (\|B\|^k + \|B\|^{k+1} + \dots) \|\bar{c}\| = \|B\|^k \|\bar{x}^{(0)}\| + \\ &+ \frac{\|B\|^k \|\bar{c}\|}{1 - \|B\|}. \end{aligned}$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, agar $\bar{x}^{(0)}$ sifatida ozod hadlar ustuni $\bar{c}$ olingan bo'lsa, u holda iteratsiyaning xatosi quyidagicha baholanadi:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|B^{k+1}\| \|\bar{c}\|}{1 - \|B\|}. \quad (3.8.19)$$

Haqiqatan ham, $\bar{x}^{(0)} = \bar{c}$ deb olsak, u holda (3.8.18) o'rniga

$$\bar{x}^* - \bar{x}^k = (B^{k+1} + B^{k+2} + \dots) \bar{c}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundan esa (3.8.19) kelib chiqadi.

Endi (3.8.11) sistemani (3.8.12) ko'rinishga keltirish va oddiy iteratsiyaning amalida qo'llanishi ustida to'xtalib o'tamiz. Shu maqsadda ixtiyoriy maxsusmas P matritsa olib, iteratsiyaning quyidagi

$$\bar{x}^{(k+1)} = (E - PA)\bar{x}^{(k)} + P\bar{c} \quad (3.8.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Albatta, P matritsa shunday tanlangan bo'lishi kerakki,

$$B = E - PA$$

matritsa uchun yaqinlashish sharti bajarilsin. Quyidagi ikkita xususiy holni ko'rib chiqamiz.

1. $P = D^{-1}$, bu yerda D diagonal matritsa bo'lib, diagonal elementlari A matritsaning diagonal elementlari bilan ustma-ust tushsin. Bu holda (3.8.20) iteratsiya jarayonini tuzish

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

sistema tenglamalarini mos ravishda $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ larga bo'lib, hosil bo'lgan tenglamalarda $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni mos ravishda chap tomonda qoldirib, qolganlarini o'ng tomonga o'tkazishdan iboratdir. Natijada

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \end{aligned}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Albatta bu usulni qo'llash mumkin bo'lishi uchun barcha a_{ii} lar noldan farqli bo'lishi kerak. Bundan tashqari diagonal elementlarning modullari boshqa elementlarining modullaridan ancha

katta bo'lishi kerak. Aniqrog'i quyidagi tengsizliklarning birortasi bajarilishi lozim:

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (3.8.21)$$

$$\max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad (3.8.22)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{|a_{jj}|^2} \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|^2 < 1. \quad (3.8.23)$$

Bu tengsizliklar bajarilsa, u holda mos ravishda (3.8.14) - (3.8.16) tengsizliklar ham bajariladi.

2. $P = A^{-1} - \varepsilon$, bu yerda $\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]$ elementlarining modullari yetarlicha kichik bo'lgan matritsadir. Bu holda (3.8.20) tenglik

$$\bar{x}^{(k+1)} = \varepsilon A \bar{x}^{(k)} + (A^{-1} - \varepsilon) \bar{b}$$

ko'rinishga ega bo'lib, εA matritsa yaqinlashish shartini qanoatlantiradi. (3.8.11) sistemani P ga ko'paytirish sistema tenglamalari ustida elementar almashtirish bajarish bilan teng kuchlidir.

Odatda P ni 2 -ko'rinishda olinganda misol yechish uchun quyidagicha ish tutiladi. Berilgan sistemadan shunday tengla malarni ajratib olinadiki, bu tenglamalarda biror noma'lum oldidagi koeffitsiyent moduli bo'yicha shu tenglamaning qolgan barcha koeffitsiyentlari modullarining yig'indisidan katta bo'lsin. Ajratilgan tenglamalar shunday joylashtiriladiki, ularning eng katta koeffitsiyentlari diagonal koeffitsiyentlari bo'lsin. Tenglamalarning qolganlaridan va ajratilganlaridan yuqoridagi prinsip saqlanadigan, ya'ni eng katta koeffitsiyent diagonal koeffitsiyent bo'ladigan qilib o'zaro chiziqli erkli bo'lgan chiziqli kombinatsiyalar tuziladi va barcha bo'sh satrlar to'ldiriladi. Shu bilan birga dastlabki sistemaning har bir tenglamasi yangi sistema tenglamalarini tuzayotganda qatnashishi kerak.

Bu yerda ko'rsatilgan usullarni misollarda tushuntiramiz.

Misol 3.7. *Quyidagi sistema odiy iteratsiya metodi bilan yechidsin:*

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ -x_1 + 25x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19, \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 20x_5 = -32. \end{cases} \quad (3.8.24)$$

3.8.3 Zeydel metodi

Zeydel metodi chiziqli bir qadamli birinchi tartibli iteratsion metod-dir. Bu metod oddiy iteratsiya metodidan shu bilan farq qiladiki, dastlabki yaqinlashish $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})'$ ga ko'ra $x_1^{(1)}$ ni topamiz. So'ngra $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})'$ ga ko'ra $x_2^{(1)}$ topiladi va h. k. Barcha $x_i^{(1)}$ lar aniqlanganidan keyin $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots$ lar topiladi. Aniqroq aytganda, hisoblashlar quyidagi sxema bo'yicha olib boriladi:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^n \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}, \\ &\vdots \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}, \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Endi Zeydel metodining yaqinlashish shartini ko'rib chiqaylik. Bu shart quyidagi teorema bilan beriladi.

Teorema 3.13. *Zeydel metodining yaqinlashishi uchun*

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8.26)$$

tenglamaning barcha ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isbot. Berilgan A matritsani ikkita

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matritsalar yig'indisi $A = C + D$ shaklida yozib olamiz. U holda $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemani

$$C\bar{x} = -D\bar{x} + \bar{b}$$

shaklda yozish mumkin. Zeydel metodi esa

$$C\bar{x}^{(k+1)} = -D\bar{x}^{(k)} + \bar{b} \quad (3.8.27)$$

ko'rinishdagi iteratsiyadan isoratdir. Bu tenglikni $\bar{x}^{(k+1)}$ ga nisbatan yechsak:

$$\bar{x}^{(k+1)} = -C^{-1}D\bar{x}^{(k)} + C^{-1}\bar{b}. \quad (3.8.28)$$

Bu esa, Zeydel metodining matritsasi $-C^{-1}D$ bo'lgan oddiy iteratsiyaga teng kuchli ekanligini ko'rsatadi. Demak, teorema 3.9 ga ko'ra Zeydel metodining yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $-C^{-1}D$ matritsaning barcha xos sonlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi zarur va kifoyadir. Shuning uchun ham

$$\det(\lambda E + C^{-1}D) = 0 \quad (3.8.29)$$

tenglamaning barcha ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi kerak. Agar bu tenglama ildizlarining ushbu

$$\det(\lambda C + D) = 0 \quad (3.8.30)$$

tenglama ildizlari bilan ustma-ust tushishini ko'rsatsak; teorema isbot bo'ladi. Bu esa quyidagicha ko'rsatiladi:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E + C^{-1}D) &= \det[C^{-1}C(\lambda E + C^{-1}D)] = \det[C^{-1}(\lambda C + D)] = \\ &= \det C^{-1} \cdot \det(\lambda C + D). \end{aligned}$$

Bu yerda $\det C^{-1} \neq 0$ bo'lganligi uchun (3.8.29) va (3.8.30) bir xil ildizlarga ega.

Agar biz (3.8.28) ni $\bar{x}^{(k+1)} = \tilde{B}\bar{x}^{(k)} + \tilde{c}$ deb olib, oddiy iteratsiya metodi bilan yechadigan bo'lsak, u holda (3.8.28) jarayonning yaqinlashishi uchun

$$\begin{vmatrix} -\gamma & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21} & -\gamma & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \dots & -\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8.31)$$

tenglamaning barcha $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ildizlari modullari bo'yicha birdan kichik bo'lishi kerak.

(3.8.26) va (3.8.31) tenglamalarni solishtirib ko'rsak, oddiy iteratsiya metodi bilan Zeydel metodining yaqinlashish sohalari, umuman, farqli degan fikrga kelamiz. Haqiqatan ham, shunday sistemalar mavjudki, ular uchun oddiy iteratsiya metodi yaqinlashadi, Zeydel metodi esa uzoqlashadi va aksincha shunday sistemalarni keltirish mumkinki, ular uchun Zeydel metodi yaqinlaluvi bo'lib, oddiy iteratsiya metodi uzoqlashadi. ■

Lekin (3.8.21) yoki (3.8.22) shartlarning birortasi bajarilsa, oddiy iteratsiyaga nisbatan Zeydel metodi tezroq yaqinlashadi. Bu quyidagi teorema yanada aniqroq ifodalangan.

Teorema 3.14. *Agar quyidagi*

$$\max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

shartlarning birortasi bajarilsa, u holda ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish $\bar{x}^{(0)}$ uchun Zeydel metodi yaqinlashadi va bu yaqinlashish birinchi shart bajarilganda oddiy iteratsiya metodining yaqinlashishidan sekin emas.

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \mu = \max_i \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}|. \quad (3.8.32)$$

Faraz qilaylik, birinchi shart bajarilsin u holda $\mu < 1$ bo'ladi. Bu belgilashlarda Zeydel metodi ushbu

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \quad (3.8.33)$$

sxema bo'yicha olib boriladi. Bundan tashqari teoremaning birinchi sharti bajarilganda $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$ sistema yagona yechimga ega, bu yechimni masalan, oddiy iteratsiya bilan topish mumkin. Demak,

$$x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i. \quad (3.8.34)$$

(3.8.34) dan (3.8.33) ni ayirib modullarga o'tsak,

$$\begin{aligned} |x_i - x_i^{(k+1)}| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k+1)}| + \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k)}| \leq \max_i |x_j - \\ &- x_j^{(k)}| \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| + \max_j |x_j - x_j^{(k)}| \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}| = \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| + \\ &+ \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}| \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Quyidagi

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|, q_i = \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}|$$

belgilashlarni kiritsak,

$$|x_i - x_i^{(k+1)}| \leq p_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 + q_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \quad (3.8.35)$$

bo'ladi. Faraz qilaylik, $\max_i |x_i - x_i^{(k+1)}|$ ga $i = s = s(k)$ bo'lganda erishilsin:

$$|x_s - x_s^{(k+1)}| = \max_i |x_i - x_i^{(k+1)}| = \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1.$$

U vaqtda (3.8.35) da $i = s$ deb olib,

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leq p_s \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 + q_s \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1$$

yoki

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leq \frac{q_s}{1 - p_s} \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar

$$\mu_1 = \max_i \frac{q_i}{1 - p_i}$$

deb olsak, u holda

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leq \mu_1 \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \quad (3.8.36)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi $\mu_1 \leq \mu$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, (3.8.32) ga ko'ra

$$p_i + q_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}| \leq \mu < 1$$

bo'lganligi uchun

$$q_i \leq \mu - p_i.$$

Demak,

$$\frac{q_i}{1 - p_i} \leq \frac{\mu - p_i}{1 - p_i} \leq \frac{\mu - \mu p_i}{1 - p_i} = \mu.$$

Bundan esa

$$\mu_1 \leq \mu \quad (3.8.37)$$

kelib chiqadi. (3.8.36) tengsizlikdan

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\| \leq \mu_1^{k+1} \|\bar{x} - \bar{x}^{(0)}\|_1$$

ni hosil qilamiz. Bu esa teoremaning birinchi sharti bajarilganda Zeydel metodining yaqinlashishligini bildiradi. (3.8.37) tengsizlik esa Zeydel metodining yaqinlashishi oddiy iteratsiya metodiga nisbatan sekin emasligini ko'rsatadi.

Endi teoremaning ikkinchi sharti bajarilganda Zeydel metodining yaqinlashishligini ko'rsatamiz. Biz bu yerda $\mu' = \sum_{i=1, i \neq j}^n |\alpha_{ij}|$ deb olamiz.

Faraz qilaylik, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ va $\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})'$ mos ravishda $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$ sistemaning yechimi va Zeydel jarayonining k -yaqinlashishi bo'lsin. U holda

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i$$

va

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Bulardan

$$\left| x_i - x_i^{(k+1)} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k+1)} \right| + \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k)} \right|$$

kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni barcha $i = 1, 2, \dots, n$ lar bo'yicha yig'amiz:

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i - x_i^{(k+1)} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k+1)} \right| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k)} \right|$$

hamda yig'ish tartibini o'zgartirsak,

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i - x_i^{(k+1)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \left| x_j - x_j^{(k+1)} \right| \sum_{i=j+1}^n |\alpha_{ij}| + \sum_{j=1}^n \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \sum_{i=1}^{j-1} |\alpha_{ij}|. \quad (3.8.38)$$

Endi

$$S_j = \sum_{i=j+1}^n |\alpha_{ij}|, t_j = \sum_{i=1}^{j-1} |\alpha_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

va

$$S_n = 0, t_n = \sum_{i=1, i \neq j}^n |\alpha_{ij}|$$

deb olamiz. Ko'rinib turibdiki,

$$S_j + t_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n |\alpha_{ij}| = \mu' < 1.$$

Bundan esa, $S_j < 1$ kelib chiqadi. (3.8.38) tengsizlik quyidagi

$$\sum_{i=1}^n \left| x_i - x_i^{(k+1)} \right| \leq \sum_{j=1}^n S_j \left| x_j - x_j^{(k+1)} \right| + \sum_{j=1}^n t_j \left| x_j - x_j^{(k)} \right|$$

yoki

$$\sum_{j=1}^n (1 - S_j) \left| x_j - x_j^{(k+1)} \right| \leq \sum_{j=1}^n t_j \left| x_j - x_j^{(k)} \right|$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi $t_j \leq \mu' - S_j \leq \mu' - S_j \mu' = \mu' (1 - S_j)$ bo'lganligi uchun

$$\sum_{j=1}^n (1 - S_j) |x_j - x_j^{(k+1)}| \leq \mu' \sum_{j=1}^n (1 - S_j) |x_j - x_j^{(k)}| \leq (\mu')^k$$

$$\sum_{j=1}^n (1 - S_j) |x_j - x_j^{(0)}|$$

kelib chiqadi. Bundan esa, $\mu' < 1$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (1 - S_j) |x_j - x_j^{(k)}| = 0$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

hosil bo'lib, shu bilan teorema to'liq isbot qilindi.

Endi misol ko'ramiz.

Misol 3.9. Zeydel metodi bilan (3.8.24) sistemaning yechimi 5 xona aniqlikda topilsin.

Yechish: (3.8.24) sistemani (3.8.25) ko'rinishda yozib olamiz va dastlabki yaqinlashish $\bar{x}^{(0)}$ sifatida oddiy iteratsiya metodidagidek $\bar{x}^{(0)} = (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6)'$ deb olamiz. Bu yerda iteratsiyaning faqat bir qadamini keltiramiz:

$$x_1^{(1)} = 0,6 - 0,1x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} - 0,1x_5^{(0)} = 0,6 - 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1,6 = 0,881;$$

$$x_2^{(1)} = 0,44 + 0,04 \cdot x_1^{(1)} - 0,04x_3^{(0)} + 0,2x_4^{(0)} + 0,08x_5^{(0)} = 0,44 + 0,04 \cdot 0,881 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1,6 = 0,771;$$

$$x_3^{(1)} = 0,95 + 0,1x_1^{(1)} + 0,05x_2^{(1)} + 0,1x_4^{(0)} - 0,15x_5^{(0)} = 0,95 + 0,1 \cdot 0,881 + 0,05 \cdot 0,771 + 0,1 \cdot 1 - 0,15 \cdot 1,6 = 0,937;$$

$$x_4^{(1)} = 1 - 0,1x_2^{(1)} + 0,1x_3^{(1)} + 0,5x_5^{(0)} - 1,817;$$

$$x_5^{(1)} = 1,6 + 0,05x_1^{(1)} + 0,1x_2^{(1)} + 0,05x_3^{(1)} + 0,1x_4^{(1)} = 1,948.$$

Keyingi yaqinlashishlar jadval 3.7 da keltirilgan.

Bu yerda teorema 3.14 ning sharti o'rinli bo'lganligi uchun oddiy iteratsiyaga nisbatan Zeydel iteratsiyasi tezroq yaqinlashmoqda.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0,881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1,974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1,99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2,00000

Jadval 3.7

3.9-§. Gradiyentlar (eng tez tushish) metodi

Bu metod haqiqiy simmetrik musbat aniqlangan matritsali, chiziqli algebraik tenglamalar

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (3.9.1)$$

sistemasini yechish uchun mo'ljallangan.

Gradiyentlar metodini bayon qilishdan avval funksional gradiyenti tushunchasiga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Faraz qilaylik, $f(\bar{x})$ bu n o'lchovli $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorning biror funksionali bo'lib, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uzunligi birga teng bo'lgan vektor bo'lsin.

Funksiyaning o'sish yoki kamayish tezligini uning hosilasi xarakterlaganidek, f funksionalning $\bar{x}$ "argumenti" $\bar{y}$ yo'nalishi bo'yicha o'zgarganda, uning o'zgarish tezligini funksionalning hosilasi aniqlaydi. $\bar{f}$ funksionalning $\bar{x}$ nuqtada $\bar{y}$ yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb ushbu

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) - f(\bar{x})}{\alpha} = \left. \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) \right|_{\alpha=0}$$

ifodaga aytiladi. Bu ta'rifdan

$$f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) = f(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \dots, x_n + \alpha y_n)$$

bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} &= \frac{d}{d\alpha} f(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \dots, x_n + \alpha y_n)_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} y_n = (\bar{z}, \bar{y})\end{aligned}\quad (3.9.2)$$

bu yerda

$$\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)', z_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$$

$\bar{z}$ vektor $f(\bar{x})$ funksionalning gradiyenti deyiladi. (3.9.2) tenglikda $\|\bar{y}\| = 1$ bo'lganligi uchun

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \|\bar{z}\| \cos(\bar{z}; \bar{y})$$

kelib chiqadi, bundan esa

$$-\|\bar{z}\| \leq \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} \leq \|\bar{z}\|.$$

Shu bilan birga agar $\bar{y}$ ning yo'nalishi gradiyent yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \|\bar{z}\|$ va $\bar{y}$ ning yo'nalishi gradiyent yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = -\|\bar{z}\|$. Shunday qilib, gradiyent yo'nalishi bo'ylab $f(\bar{x})$ funksional katta tezlik bilan o'sar ekan va gradiyent yo'nalishiga teskari bo'lgan yo'nalish bo'yicha u katta tezlik bilan kamayar ekan.

Endi gradiyentlar metodiga o'tamiz.

Gradiyentlar metodida (3.9.1) sistemani yechish uchun

$$f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) \quad (3.9.3)$$

funksional qaraladi. Bu funksional $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga nisbatan ikkinchi tartibli ko'phaddir. $\bar{x}^*$ orqali (3.9.1) sistemaning yechimini, ya'ni $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$ ni belgilaymiz. A matritsa simmetrik va musbat aniqlangan bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) &= (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(\bar{b}, \bar{x}^*) = \\ &= (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(A\bar{x}^*, \bar{x}^*) = (A\bar{x}, \bar{x}) - \\ &- (A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}) + (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) = (A(\bar{x} - \bar{x}^*), \bar{x} - \bar{x}^*) \geq 0.\end{aligned}$$

Shu bilan birga so'nggi ifodada $\bar{x} = \bar{x}^*$ bo'lgandagina, tenglik ishorasi o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, (3.9.1) sistemani yechish masalasi (3.9.3)

funksionalni minimumga aylantiradigan $\bar{x}^*$ vektorni topishga keltiriladi. Bunday vektorni topish uchun quyidagicha ish ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $\bar{x}^{(0)}$ ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish vektori bo'lsin. (3.9.3) funksionalning gradiyentini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} &= \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} (A(\bar{x} + \alpha \bar{y}) - 2(\bar{b}, \bar{x} + \alpha \bar{y})) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 (A\bar{y}, \bar{y}) - 2\alpha (\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x})]_{\alpha=0} = \\ &= -2(\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) = 2(A\bar{x} - \bar{b}, \bar{y}).\end{aligned}$$

Buni (3.9.2) bilan solishtirib, $f(\bar{x})$ ning gradiyenti $2(A\bar{x} - \bar{b})$ ga teng ekanligini ko'ramiz. Keyingi tekshirishlarda faqat gradiyentning yo'nalishigina kerak bo'lganligi uchun gradiyent o'rniga musbat ko'paytuvchi 2 ni tashlab, $A\bar{x} - \bar{b}$ vektorni qaraymiz. $\bar{x}^{(0)}$ nuqtada yo'nalishi gradiyent yo'nalishiga teskari bo'lgan vektorni $\bar{r}^{(0)}$ orqali belgilaymiz:

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}. \quad (3.9.4)$$

Bu vektor (3.9.1) sistemaning xatolik vektori deyiladi. $\bar{r}^{(0)}$ vektorning yo'nalishida $f(\bar{x})$ funksionalning $\bar{x}^{(0)}$ nuqtadagi kamayish tezligi eng katta bo'ladi. $\bar{x}^{(0)}$ nuqtadan boshlab $\bar{r}^{(0)}$ yo'nalish bo'yicha $f(\bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)})$ minimal qiymatiga erishgunga qadar harakatni davom ettiramiz. Bu nuqtani

$$\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)}) \equiv 2\alpha (A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - 2(\bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = 0$$

tenglamadan topamiz:

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}. \quad (3.9.5)$$

A matritsa musbat aniqlangan bo'lganligi sababli barcha $\bar{r}^{(0)} \neq 0$ uchun $(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) > 0$. Agar $\bar{r}^{(0)} = 0$ bo'lsa, u holda (3.9.4) dan ko'ramizki, $\bar{x}^{(0)}$ (3.9.1) sistemaning yechimini beradi va shu bilan jarayon to'xtaydi. Agar $\bar{r}^{(0)} \neq 0$ bo'lsa, u holda navbatdagi yaqinlashish sifatida

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)} \quad (3.9.6)$$

vektorni olamiz.

So'ngra $\bar{r}_1 = \bar{b} - A\bar{x}^{(1)}$ ni hisoblaymiz. Keyingi yaqinlashish vektori $\bar{x}^{(1)}$ ni $f(\bar{x}^{(1)} + \alpha \bar{r}^{(1)})$ funksionalning minimumga erishish shartidan

aniqlaymiz:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}{(A\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}, \quad \bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \alpha_1 \bar{r}^{(1)}$$

Bu jarayonni davom ettirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}, \quad (3.9.7)$$

$$\alpha_k = \frac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}{(A\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}, \quad (3.9.8)$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{r}^{(k)}.$$

Bu metodning yaqinlashishi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 3.15. Agar A musbat aniqlangan simmetrik matritsa bo'lsa, u holda gradiyent metodi bilan qurilgan $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ ketma-ket yaqinlashishlar $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning yechimi $\bar{x}^*$ ga geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi. Aniqrog'i agar A matritsaning λ_i xos sonlari $0 < m < \lambda_i < M$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ketma-ketlikning $\bar{x}^*$ yechimga yaqinlashish tezligi uchinchi normada quyidagicha baholanadi:

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 \leq \frac{1}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{2k} (f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)).$$

Isbot. A matritsaning xos sonlarini quyidagicha

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

belgilaymiz, bularga mos keladigan ortonormallashtirilgan xos vektorlarni $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ orqali belgilaymiz. U holda ixtiyoriy

$$\bar{x} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \dots + c_n \bar{u}_n$$

vektor uchun

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_n^2 \lambda_n$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan esa

$$\begin{aligned} \lambda_n(\bar{x}, \bar{x}) &= \lambda_n (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq \lambda_1 (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = \\ &= \lambda_1(\bar{x}, \bar{x}) \end{aligned}$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, A matritsa musbat aniqlangan bo'lganligi uchun shunday o'zgarmas $m < 0$ va $M > 0$ sonlar topiladiki,

$$m(\bar{x}, \bar{x}) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq M(\bar{x}, \bar{x})$$

tengsizliklar bajariladi.

Ushbu $f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)})$ ayirmani qaraylik. (3.9.3) va (3.9.6)-(3.9.8) formulalarga ko'ra, murakkab bo'lmagan hisoblashlardan keyin quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)}) = \alpha_0^2 (\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) - 2\alpha_0 (\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = - \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} \quad (3.9.9)$$

A - simmetrik matritsa, $A\bar{x}^* = \bar{b}$ va $\bar{r}^{(0)} = A(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$ bo'lganligi uchun

$$f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = \left((\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*), A(\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*) \right) = (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}).$$

Demak, (3.9.9) ga ko'ra

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}.$$

Endi $\bar{r}^{(0)}$ ni A matritsaning xos vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{u}_i.$$

U vaqtda

$$A\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \bar{u}_i, \quad A^{-1}\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i \bar{u}_i$$

va

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2, \quad (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2.$$

Demak,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2}.$$

Quyidagicha

$$d_i = \frac{a_i^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \left(d_i \geq 0, \sum_{i=1}^n d_i = 1 \right),$$

aniqlaymiz:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}{(A\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}, \quad \bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \alpha_1 \bar{r}^{(1)}$$

Bu jarayonni davom ettirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}, \quad (3.9.7)$$

$$\alpha_k = \frac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}{(A\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}, \quad (3.9.8)$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{r}^{(k)}.$$

Bu metodning yaqinlashishi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 3.15. Agar A musbat aniqlangan simmetrik matritsa bo'lsa, u holda gradiyent metodi bilan qurilgan $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ ketma-ket yaqinlashishlar $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning yechimi $\bar{x}^*$ ga geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi. Aniqliq: agar A matritsaning λ_i xos sonlari $0 < m < \lambda_1 < M$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ketma-ketlikning $\bar{x}^*$ yechimga yaqinlashish tezligi uchinchi normada quyidagicha baholanadi:

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 \leq \frac{1}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{2k} \left(f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) \right).$$

Isbot. A matritsaning xos sonlarini quyidagicha

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

belgilaymiz, bularga mos keladigan ortonormalashtirilgan xos vektorlarni $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ orqali belgilaymiz. U holda ixtiyoriy

$$\bar{x} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \dots + c_n \bar{u}_n$$

vektor uchun

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_n^2 \lambda_n$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan esa

$$\begin{aligned} \lambda_n (\bar{x}, \bar{x}) &= \lambda_n (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq \lambda_1 (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = \\ &= \lambda_1 (\bar{x}, \bar{x}) \end{aligned}$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, A matritsa musbat aniqlangan bo'lganligi uchun shunday o'zgarma $m < 0$ va $M > 0$ sonlar topiladiki,

$$m(\bar{x}, \bar{x}) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq M(\bar{x}, \bar{x})$$

tengsizliklar bajariladi.

Ushbu $f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)})$ ayirmani qaraylik. (3.9.3) va (3.9.6)-(3.9.8) formulalarga ko'ra, murakkab bo'lmagan hisoblashlardan keyin quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)}) = \alpha_0^2 (\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) - 2\alpha_0 (\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = -\frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} \quad (3.9.9)$$

A -simmetrik matritsa, $A\bar{x}^* = \bar{b}$ va $\bar{r}^{(0)} = A(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$ bo'lganligi uchun

$$f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = \left((\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*), A(\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*) \right) = (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}).$$

Demak, (3.9.9) ga ko'ra

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}.$$

Endi $\bar{r}^{(0)}$ ni A matritsaning xos vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{u}_i.$$

U vaqtda

$$A\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \bar{u}_i, \quad A^{-1}\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i \bar{u}_i$$

va

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2, \quad (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2.$$

Demak,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2}.$$

Quyidagicha

$$d_i = \frac{a_i^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \left(d_i \geq 0, \sum_{i=1}^n d_i = 1 \right),$$

belgilashni kiritib,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \quad (3.9.10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Quyidagini isbotlaylik: agar $0 < m < \lambda_i < M$ ($i = \overline{1, n}$) bo'lsa, u holda ixtiyoriy haqiqiy $d_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), $\sum_{i=1}^n d_i = 1$ sonlar uchun

$$\sum_{k=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \leq \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \quad (3.9.11)$$

tengsizlik o'rinlidir. Buni isbotlash uchun λ_i o'rniga $\xi_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{mM}}$ sonlarni olamiz, u vaqtda

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \leq \xi_i \leq \sqrt{\frac{M}{m}}$$

bo'lib,

$$\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} = \sum_{i=1}^n d_i \xi_i \sum_{j=1}^n d_j \xi_j^{-1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi ifodaga ikki son o'rta geometrigi uning o'rta arifmetigidan ortmasligi haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\sum_{i=1}^n d_i \xi_i \sum_{i=1}^n d_i \xi_i^{-1} \leq \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^n d_i (\xi_i + \xi_i^{-1}) \right\}^2. \quad (3.9.12)$$

Ushbu

$$\varphi(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi}$$

funksiya $\xi > 0$ bo'lganda $(0, 1)$ oraliqda kamayib, $(1, \infty)$ oraliqda o'sadi va o'zining eng kichik qiymatini $\xi = 1$ nuqtada qabul qiladi; $\left[\sqrt{\frac{m}{M}}, \sqrt{\frac{M}{m}} \right]$ oraliqda esa $\xi = \sqrt{\frac{m}{M}}$ va $\xi = \sqrt{\frac{M}{m}}$ nuqtalarda o'zining eng katta qiymatini qabul qiladi, bu qiymat

$$\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (3.9.13)$$

ga tengdir. (3.9.12) ifodada har bir $\xi_i + \xi_i^{-1}$ ni uning eng katta qiymati (3.9.13) bilan almashtiramiz, u holda

$$\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \leq \frac{1}{4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right) \sum_{i=1}^n d_i \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2,$$

shu bilan (3.9.11) isbotlandi. (3.9.11) ni (3.9.10) ga qo'llab,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 = \frac{1}{q}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $0 < q < 1$. Bundan $f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = c$ deb belgilab olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^*) \leq (1 - q) [f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)] = (1 - q)c.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy k uchun

$$f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*) \leq (1 - q)^k c$$

ni hosil qilamiz. Endi $\bar{x}^{(k)}$ ning $\bar{x}^*$ ga intilish tezligini uchinchi normada baholaylik, $(A\bar{x}, \bar{x}) \geq m(\bar{x}, \bar{x})$ bo'lganligi uchun

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 = (\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*) \leq \frac{1}{m} (A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*).$$

Ravshanki

$$(A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*) = f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*).$$

Oxirgi ikki ifodadan

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 \leq \frac{1}{m} [f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*)] \leq \frac{c}{m} (1 - q)^k = \frac{c}{m} \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^{2k}.$$

Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Misol 3.10. Ushbu sistemani

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$$

gradiyentlar usuli bilan yechaylik.

Yechish: Iteratsion metodda xato o'z-o'zidan tuzatiladigan bo'lganligi uchun, dastlabki qadamdagi hisoblashlarni katta aniqlikda olib borish shart emas. Dastlabki yaqinlashish sifatida $\bar{x}^{(0)} = (1; 1; 1; 1)'$ vektorni olamiz, u holda

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)} = (9; 10; 12; 8)', A\bar{r}^{(0)} = (12; 22; 115; 57),$$

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} = \frac{207}{1776} = 0,117;$$

$$\bar{x}^{(1)} = (0,767; 1,117; 2,282; 2,049)'.$$

Navbatdagi qadamlarni (3.9.5) - (3.9.7) formulalar yordamida davom ettiramiz:

$$\bar{x}^{(2)} = (0,008; 0,767; 2,006; 2,575)',$$

$$\bar{x}^{(3)} = (0,105; 0,974; 2,124; 2,794)',$$

$$\bar{x}^{(4)} = (0,023; 0,980; 1,986; 2,898)',$$

$$\bar{x}^{(5)} = (0,028; 1,005; 2,027; 2,955)',$$

$$\bar{x}^{(6)} = (0,007; 0,994; 2,002; 2,970)',$$

$$\bar{x}^{(3)} = (0,00786; 1,00133; 2,00838; 2,98671)',$$

$$\bar{x}^{(b)} = (0,002131; 0,998390; 2,000618; 2,990963)'.$$

Aniq yechim $\bar{x}^* = (0; 1; 2; 3)'$ bilan taqribiy yechim orasidagi farq quyidagicha ekan

$$\begin{aligned} \|\bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*\|_3 &= \sqrt{(\bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*) \cdot (\bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*)} = \\ &= \sqrt{(0,002131)^2 + (0,001910)^2 + (0,000618)^2 + (0,009032)^2} < 0,0095. \end{aligned}$$

3.10-§. Qo'shma gradiyentlar metodi

Bu metodning ham asosiy g'oyasi gradiyentlar metodi kabi

$$f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(b, \bar{x}) \quad (3.10.1)$$

funksionalni minimallashtirishdan iboratdir. Xuddi o'tgan paragrafdagi kabi, bu yerda ham $f(\bar{x})$ ga minimumni ta'minlovchi vektor $\bar{x}^*$ simmetrik

va musbat aniqlangan A matritsali $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning yechimi bo'ladi. Bu metod o'zida aniq va iteratsion metodlarning ijobiy xususiyatlarini mujassamlashtirgan. Bu metod iteratsion metod sifatida har doim yaqinlashadi va o'z xatosini o'zi tuzatib boradi. Ikkinchi tomondan biror dastlabki yaqinlashish tanlangandan keyin, n - qadamda (undan o'tmasdan) iteratsiya jarayoni uzilib, aniq yechimni beradi.

Qo'shma gradiyentlar metodini nol elementlari ko'p bo'lgan tenglamalar sistemasini yechishda qo'llash ma'quldir, sistemani bu metod bilan yechganda matritsa elementlari faqat vektorga ko'paytirishdagina qatnashadi, EHM larda esa matritsani vektorga ko'paytirishni shunday tashkil etish mumkinki, arifmetik amallarda noldan farqli elementlar qatnashsin.

Gradiyentlar metodidagidek biror dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ni tanlab olib, navbatdagi yaqinlashish vektorini

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha_0 \bar{r}^{(0)} \quad (3.10.2)$$

formula yordamida hosil qilamiz, bu yerda

$$\bar{r}^{(0)} = (r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, \dots, r_n^{(0)}) = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \quad (3.10.3)$$

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{A(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}.$$

Navbatdagi yaqinlashishni quyidagicha topamiz. $\bar{x}^{(0)}$ nuqtadan $(n-1)$ o'lchovli

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{x} - \bar{x}^{(0)}) \quad (3.10.4)$$

T_{n-1} gipertekislik o'tkazamiz va yangidan hosil bo'lgan xatolikni $\bar{r}^{(1)}$ orqali belgilaymiz:

$$\bar{r}^{(1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(1)} = \bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{r}^{(0)}. \quad (3.10.5)$$

$\bar{r}^{(1)}$ vektor $f\bar{x} = f\bar{x}^{(1)}$ sirtning $\bar{x}^{(1)}$ nuqtasidagi normal bo'yicha yo'naltirilgan (chunki $f(\bar{x})$ ning biror nuqtadagi eng tez o'zgarish yo'nalishi shu nuqtadan o'tkazilgan normal yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi), $\bar{r}^{(0)}$ vektor esa shu nuqtadan o'tadigan urinma tekislikka paralleldir. Shuning uchun ham $\bar{r}^{(0)}$ va $\bar{r}^{(1)}$ lar o'zaro ortogonaldir:

$$(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(1)}) = 0. \quad (3.10.6)$$

T_{n-1} gipertekislik $\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$ nuqtadan o'tadi, chunki

$$(A\bar{r}^{(0)}, A^{-1}\bar{b} - \bar{x}^{(1)}) = (\bar{r}^{(0)}, \bar{b} - A\bar{x}^{(1)}) = (\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(1)}) = 0.$$

Demak, (3.10.1) sistemaning yechimi $\bar{r}^{(1)}$ nuqtadan o'tuvchi T_{n-1} gipertekislikda yotar ekan. Lekin $\bar{x}^{(1)}$ nuqtadan $\bar{x}^*$ ga kelish uchun T_{n-1} tekislikda qaysi yo'nalish bo'yicha harakat qilishni bilmaymiz. Bu yo'nalishni aniqlash uchun bizda yetarli ma'lumot yo'q. Shuning uchun ham T_{n-1} da yotuvchi biror $\bar{p}^{(1)}$ vektorni aniqlab olib, $\bar{x}^{(1)}$ nuqtadan shu yo'nalish bo'yicha $f(\bar{x}^{(1)} + \alpha\bar{p}^{(1)})$ minimumga erishgunga qadar harakat qilamiz. Ixtiyoriy β uchun $\bar{r}^{(1)} + \beta\bar{r}^{(0)}$ vektor $f(\bar{x}) = f(\bar{x}^{(1)})$ sirtning $\bar{x}^{(1)}$ nuqtasida o'tkazilgan biror normal tekislikka paralleldir. Endi β ni shunday tanlaymizki, $\bar{r}^{(1)} + \beta\bar{r}^{(0)}$ vektor T_{n-1} tekislikda yotsin, ya'ni $A\bar{r}^{(0)}$ ga ortogonal bo'lsin:

$$(\bar{r}^{(1)} + \beta_0\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) = (\bar{r}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) + \beta_0(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) = 0. \quad (3.10.7)$$

Bundan esa

$$\beta_0 = -\frac{(\bar{r}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}. \quad (3.10.8)$$

Shunday qilib, $\bar{p}^{(1)}$ vektor sifatida T_{n-1} gipertekislikda yotuvchi $\bar{r}^{(1)} + \beta\bar{r}^{(0)}$ vektorni olishimiz mumkin:

$$\bar{p}^{(1)} = \bar{r}^{(1)} + \beta\bar{r}^{(0)}. \quad (3.10.9)$$

Keyin $\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(1)} + \alpha\bar{p}^{(1)}) = 0$ tenglikdan

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{r}^{(1)}, \bar{p}^{(1)})}{(\bar{r}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)})} \quad (3.10.10)$$

ni hosil qilamiz. $\bar{x}^*$ yechimga ikkinchi yaqinlashish sifatida $\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \alpha_1\bar{p}^{(1)}$ vektorni olamiz. Xatolik vektori

$$\bar{r}^{(2)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(2)} = \bar{r}^{(1)} - \alpha_1 A\bar{p}^{(1)} \quad (3.10.11)$$

$\bar{x}^{(2)}$ nuqtada $f(\bar{x}) = f(\bar{x}^{(2)})$ sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalishga ega. Endi $\bar{r}^{(2)}$ vektorning $\bar{r}^{(0)}$ va $\bar{r}^{(1)}$ ga ortogonalligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, (3.10.6)-(3.10.11) ga ko'ra

$$\begin{aligned} (\bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(0)}) &= (\bar{r}^{(1)} - \alpha_1 A\bar{p}^{(1)}, \bar{r}^{(0)}) = -\alpha_1 (A\bar{p}^{(1)}, \bar{r}^{(0)}) = \\ &= -\alpha_1 (\bar{p}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) = -\alpha_1 (\bar{r}^{(1)} + \beta_0\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) = 0, \\ (\bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(1)}) &= (\bar{r}^{(1)} - \alpha_1 A\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(1)} - \beta_0\bar{r}^{(0)}) = \\ &= (\bar{r}^{(1)}, \bar{p}^{(1)}) - \alpha_1 (A\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(1)}) = 0. \end{aligned}$$

$\bar{x}^{(2)}$ nuqtadan o'tuvchi

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{x} - \bar{x}^{(1)}) = 0, (A\bar{p}^{(1)}, \bar{x} - \bar{x}^{(2)}) = 0$$

$(n-2)$ o'lchovli gipertekislikni T_{n-2} orqali belgilaymiz. $\bar{x}^*$ nuqta T_{n-2} da yotadi, chunki $\bar{x}^* \in T_{n-1}$ bo'lganligi uchun $(A\bar{r}^{(0)}, \bar{x}^* - \bar{x}^{(1)}) = 0$ bo'lib, ikkinchi tomondan

$$(A\bar{p}^{(1)}, \bar{x}^* - \bar{x}^{(2)}) = (\bar{p}^{(1)}, A \cdot A^{-1}\bar{b} - A\bar{x}^{(2)}) = (\bar{p}^{(1)}, \bar{b} - A\bar{x}^{(2)}) = (\bar{r}^{(1)} + \beta_0\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(2)}) = 0.$$

Hozir yana $\bar{x}^{(2)}$ topilayotgan paytdagi holatga kelib qoldik, ya'ni bizga $\bar{x}^{(2)}$ yaqinlashish va $\bar{x}^{(2)}$ hamda $\bar{x}^*$ lardan o'tuvchi T_{n-2} gipertekislik ma'lum. Shuning uchun ham biz xuddi avvalgilek ish tutamiz. Ixtiyoriy β uchun $\bar{r}^{(2)} + \beta\bar{p}^{(1)}$ vektor T_{n-1} ga parallel, chunki

$$\begin{aligned} (\bar{r}^{(2)} + \beta\bar{p}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) &= (\bar{r}^{(2)}, A\bar{r}^{(0)}) + \beta(\bar{p}^{(1)}, A\bar{r}^{(0)}) = (\bar{r}^{(2)}, A\bar{r}^{(0)}) = \\ &= (\bar{r}^{(2)}, \frac{1}{\alpha_0}(\bar{r}^{(0)} - \bar{r}^{(1)})) = 0. \end{aligned}$$

Endi β ni shunday tanlaymizki, $\bar{r}^{(2)} + \beta\bar{p}^{(1)}$ vektor T_{n-2} ga parallel bo'lsin, ya'ni bu vektorning $A\bar{p}^{(1)}$ vektorga ortogonal bo'lishligini talab qilamiz:

$$(\bar{r}^{(2)} + \beta_1\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)}) = (\bar{r}^{(2)}, A\bar{p}^{(1)}) + \beta_1(\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)}) = 0$$

Bundan esa

$$\beta_1 = -\frac{(\bar{r}^{(2)}, A\bar{p}^{(1)})}{(\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(1)})}. \quad (3.10.12)$$

Endi $\bar{x}^{(2)}$ nuqtadan $\bar{r}^{(2)} + \beta_1\bar{p}^{(1)}$ vektor yo'nalishi tomon $f(\bar{x}^{(2)} + \alpha\bar{p}^{(2)})$ minimumga erishgunga qadar harakat qilamiz. Minimum shartidan

$$\alpha_2 = \frac{(\bar{r}^{(2)}, \bar{p}^{(2)})}{(\bar{p}^{(1)}, A\bar{p}^{(2)})}$$

ni topamiz. $\bar{x}^*$ yechimning uchinchi yaqinlashishi sifatida $\bar{x}^{(3)} = \bar{x}^{(2)} + \alpha_2\bar{p}^{(2)}$ ni olamiz. Navbatdagi xatolik vektori

$$\bar{r}^{(3)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(3)} = \bar{r}^{(2)} - \alpha_2 A\bar{p}^{(2)}$$

dan iborat. Bu jarayonni davom ettirib quyidagi rekurrent munosabatlar yordamida

$\{\bar{x}^{(k)}\}$, $\{\bar{r}^{(k)}\}$, $\{\bar{p}^{(k)}\}$ vektorlar va α_k , β_k sonlar ketma-ketligini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \bar{p}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \alpha_k = \frac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{p}^{(k)})}{(\bar{p}^{(k)}, A\bar{p}^{(k)})}, \\ \bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{p}^{(k)}, \bar{r}^{(k+1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k+1)} = \bar{r}^{(k)} - \alpha_k A\bar{p}^{(k)}, \\ \beta_k = -\frac{(\bar{r}^{(k+1)}, A\bar{p}^{(k)})}{(\bar{p}^{(k)}, A\bar{p}^{(k)})}, \bar{p}^{(k+1)} = \bar{r}^{(k+1)} + \beta_k \bar{p}^{(k)} \end{cases} \quad (3.10.13)$$

Bu vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = 0, \text{ agar } i > j \text{ bo'lsa,} \quad (3.10.14)$$

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{r}^{(j)}) = 0, \text{ agar } i \neq j \text{ bo'lsa.} \quad (3.10.15)$$

Haqiqatan ham, $\bar{p}^{(i)}$ vektorlarning hosil qilinishiga ko'ra $i \neq j$ bo'lganda

$$(\bar{p}^{(i)}, A\bar{p}^{(j)}) = (A\bar{p}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = 0.$$

Bundan tashqari

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)} - \alpha_{i-1} A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) - \alpha_{i-1} (A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}).$$

Agar $i = j + 1$ bo'lsa, u holda α_{i-1} ning ta'rifiga ko'ra oxirgi tenglik nolga teng; agar $i > j + 1$ bo'lsa, u holda $(A\bar{p}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)}) = 0$ va isbotlanganga ko'ra: $(\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i-1)}, \bar{p}^{(j)})$. $\bar{r}^{(i)}$ ning indeksini ketma-ket kamaytirib, bir necha qadamdan so'ng (α_j ning ta'rifiga ko'ra) $(\bar{r}^{(j+1)}, \bar{p}^{(j)}) = (\bar{r}^{(j)}, \bar{p}^{(j)}) - \alpha_j (A\bar{p}^{(j)}, \bar{p}^{(j)}) = 0$ skalyar ko'paytmaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, (3.10.14) isbot bo'ldi. (3.10.15) ni isbotlash uchun $i > j$ deb olamiz (chunki i va j indekslar teng huquqlidir).

U holda

$$(\bar{r}^{(i)}, \bar{r}^{(j)}) = (\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)} - \beta_{j-1} \bar{p}^{(j-1)}) = (\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j)}) - \beta_{j-1} (\bar{r}^{(i)}, \bar{p}^{(j-1)}) = 0$$

n o'lchovli vektorlar fazosida o'zaro ortogonal vektorlarning soni n tadan oshmasligi sababli biror $k \leq n$ qadamda $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $\bar{x}^{(k)}$ (3.10.1) sistemaning yechimi bo'ladi.

Qo'shma gradiyentlar metodi ham ba'zi kamchiliklardan xoli emas. Bu metoddagi ortogonallashtirish jarayoni yaxlitlash xatosiga nisbatan noturg'un bo'lishi ham mumkin. (3.10.13) formulada $\bar{r}^{(k-1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} =$

$\bar{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A\bar{p}^{(k-1)}$ deb oldik. Ammo yaxlitlash hisobiga bu yerda tenglik bajarilmasligi ham mumkin. Noturg'unlikni susaytirish maqsadida, $\bar{r}^{(k)}$ vektorni $\bar{r}^{(k)} = \bar{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1} \cdot A\bar{p}^{(k-1)}$ formula bo'yicha hisoblab, yo'l-yo'lakay $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}$ formula bilan ham hisoblab borish va natijalarni solishtirib turish kerak. Agar bular bir-biridan farq qilsa, $\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)}$ deb olish lozimdir.

Misol 3.11. Quyidagi sistema qo'shma gradiyentlar metodi bilan yechilsin

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_3 + 8x_4 = 2. \end{cases}$$

Yechish: Sistemaning

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

matritsasi simmetrik va bosh minorlari musbat, shuning uchun u musbat aniqlangan hamdir. $\bar{x}^{(0)}$ sifatida $(1; 0; 0; 0)'$ vektorni olamiz. Barcha hisoblashlarni (3.10.13) formulalar yordamida olib boramiz:

$$\bar{p}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A\bar{p}^{(0)} = (-9, -20, 17, 10)',$$

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{p}^{(0)})}{(\bar{p}^{(0)}, A\bar{p}^{(0)})} = \frac{4 + 16 + 16 + 1}{18 + 80 + 68 + 10} = \frac{37}{176} = 0,210227;$$

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{p}^{(0)} = (-0,107957; -0,840908; 0,840908; 0,210227);$$

$$\bar{r}^{(1)} = \bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{p}^{(0)} = (-0,107957; 0,204590; 0,426141; -1,102270)';$$

$$\beta_0 = -\frac{(\bar{r}^{(1)}, A\bar{p}^{(0)})}{(\bar{p}^{(0)}, A\bar{p}^{(0)})} = \frac{6,897490}{176} = 0,039190,$$

$$\bar{p}^{(1)} = \bar{r}^{(1)} + \beta_0 \bar{p}^{(0)} = (-0,186337; 0,047780; 0,582901; -1,063080)'.$$

k	$\bar{x}^{(k)}$	$\bar{r}^{(k)}$	$\bar{p}^{(k)}$	$A\bar{p}^{(k)}$	α_k	β_k
0	1	-2	-2	-9	0,210227	0,039190
	0	-4	-4	-20		
	0	4	4	17		
	0	1	1	10		
1	0,579546	-0,107957	-0,186337	-1,153857	0,146091	-1,683324
	-0,840908	0,204540	0,047780	0,449127		
	0,840908	0,426141	0,582901	1,899205		
	0,210227	-1,102270	-1,063080	-8,108076		
2	0,607103	-0,118554	-0,432221	0,284914	-0,187983	0,011951
	-0,833433	0,027893	-0,052534	-2,089427		
	0,927116	0,018901	-0,962313	0,192645		
	1,197136	-0,967309	0,822203	5,183090		
3	0,683354	-0,064995	-0,071220	-0,128009	0,195565	
	-0,823967	-0,036488	-0,037116	-1,028142		
	1,108367	-0,740066	-0,752182	-3,781174		
	0,024576	0,007025	0,016851	-0,688591		
4	0,674426					
	-0,831226					
	0,960914					
	0,027871					

Jadval 3.8: Misol 3.11 ning hisoblashlari davomi.

Hisoblash davomining natijasi jadval 3.8 da keltirilgan.

Demak,

$$x_1 = 0,674426; \quad x_2 = -0,831226;$$

$$x_3 = 0,960914; \quad x_4 = 0,027871.$$

3.11-§. Minimal farqlar metodi

Bu metod M.A. Krasnoseliskiy va S.G. Kreyn tomonidan 1952-yilda yaratilgan edi. Faraz qilaylik, A musbat aniqlangan matritsa bo'lib, $\bar{x}^{(0)}$ esa $A\bar{x} = \bar{b}$ sistema yechimining dastlabki yaqinlashishi bo'lsin. Odatdagidek, $\bar{r}^{(0)}$ orqali farqlar vektorini, ya'ni $\bar{b} - A\bar{x}^{(0)}$ ni belgilaymiz. Navbatdagi yaqinlashish $\bar{x}^{(1)}$ ni gradiyentlar metodidagidek $\bar{x}^{(0)} + \alpha_0 \bar{r}^{(0)}$

ko'rinishda izlaymiz va α_0 parametrni shunday tanlab olamizki, $\|\bar{r}^{(1)}\|^2 = (\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})$ funksional minimumga aylansin. Bu yerda $\bar{r}^{(1)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(1)} = \bar{r}^{(0)} - A(\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}) = \bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{r}^{(0)}$. Shunday qilib, α_0 ni ushbu

$$\begin{aligned} (\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)}) &= (\bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{r}^{(0)}) = \\ &= (\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - 2\alpha_0 (\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) + \alpha_0^2 (A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) = \\ &= (\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} + \\ &+ (A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) \left[\alpha_0 - \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} \right]^2 \end{aligned}$$

ifodaning minimumga aylanish shartidan topamiz. Bu ifoda esa o'zining minimal qiymati $(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}$ ga $\alpha_0 = \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}$ bo'lganda erishadi. Demak, birinchi qadamda quyidagiga ega bo'ldik:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha_0 \bar{r}^{(0)}, \quad \alpha_0 = \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})}.$$

Ikkinchi qadamda esa

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(1)} &= \bar{b} - A\bar{x}^{(1)} = \bar{r}^{(0)} - \alpha_0 A\bar{r}^{(0)}, \\ \alpha_1 &= \frac{(A\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}{(A\bar{r}^{(1)}, A\bar{r}^{(1)})}, \quad \bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \alpha_1 \bar{r}^{(1)}. \end{aligned}$$

Xuddi shunga o'xshash k - qadamda quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(k)} &= \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} = \bar{r}^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A\bar{r}^{(k-1)}, \\ \alpha_k &= \frac{(A\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}{(A\bar{r}^{(k)}, A\bar{r}^{(k)})}, \quad \bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{r}^{(k)}. \end{aligned}$$

Yaqinlashish haqida gradiyentlar metodidagi kabi quyidagi teorema o'rinalidir.

Teorema 3.16. $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)} \dots$ ketma-ket yaqinlashishlar $A\bar{x} = \bar{b}$ sistema yechimiga geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi.

Misol 3.12. Ushbu sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$$

minimal farqlar metodi bilan yechilsin.

Yechish. Dastlabki yaqinlashish sifatida $\bar{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)'$ vektorni olamiz, u holda

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)} = (-3, 0, 9, 5)', A\bar{r}^{(0)} = (-1, 8, 79, 35)',$$

$$\alpha_0 = \frac{(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(A\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} = \frac{889}{7531} = 0,1180454:$$

$$\bar{x}^{(1)} = (-0,354136; 0; 1,062408; 1,590227)'.$$

Shunga o'xshash navbatdagi yaqinlashishlarni topishimiz mumkin:

$$\bar{x}^{(2)} = (0,008460; 0,767495; 2,005787; 2,574838)',$$

$$\bar{x}^{(3)} = (0,105047; 0,973666; 2,123706; 2,799272)',$$

$$\bar{x}^{(4)} = (0,023240; 0,979935; 1,986107; 2,898334)',$$

$$\bar{x}^{(5)} = (0,028442; 1,004896; 2,027116; 2,955150)',$$

$$\bar{x}^{(6)} = (0,007439; 0,994176; 2,001999; 2,969578)',$$

$$\bar{x}^{(7)} = (0,007863; 1,001331; 2,008379; 2,986709)',$$

$$\bar{x}^{(8)} = (0,002131; 0,998390; 2,000618; 2,990963)'.$$

Aniq yechim $x^* = (0,1,2,3)'$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. ■

Mashqlar

1. Quyidagi tenglamalar sistemasi yuqoridagi barcha metodlar bilan yechilsin:

$$\begin{cases} 2,91121x_1 + 0,52112x_2 + 0,67563x_3 + 0,12144x_4 = -0,9964, \\ 0,52111x_1 + 4,00152x_2 + 0,81613x_3 + 0,72184x_4 = 0,8683, \\ 0,67561x_1 + 0,81612x_2 + 5,55163x_3 + 0,41404x_4 = 2,8520, \\ 0,12141x_1 + 0,72182x_2 + 0,41403x_3 + 6,75504x_4 = 6,9013, \end{cases}$$

2. Agar barcha

$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

determinantlar noldan farqli bo'lsa, u holda $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemani yechish uchun Gauss metodini qo'llash mumkinligini ko'rsating.

3. Qo'shma gradiyentlar metodida musbat aniqlan-gan simmetrik A matritsa uchun barcha $\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(1)}, \dots, \bar{r}^{(n-1)}$ vektorlar noldan farqli bo'lsa, u holda

$$\det A = (\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1})^{-1}$$

ekanligini ko'rsating.

4. 3.7-§ da kiritilgan vektorlar normasi quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirishligini ko'rsating:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_1 &\leq \|\bar{x}\|_2 \leq n\|\bar{x}\|_1, \\ \|\bar{x}\|_1 &\leq \|\bar{x}\|_3 \leq \sqrt{n}\|\bar{x}\|_1 \\ n^{-\frac{1}{2}}\|\bar{x}\|_2 &\leq \|\bar{x}\|_3 \leq \|\bar{x}\|_2 \end{aligned}$$

5. Faraz qilaylik, $p \in [1, \infty)$ -ixtiyoriy son bo'lsin, u holda

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ifoda vektorlar normasining uchala shartini qanoatlantiradi. Bundan kubik, oktaedr va sferik normalarni keltirib chiqaring.

6. Faraz qilaylik, ixtiyoriy A matritsa uchun $M(A)$ va $N(A)$ quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$M(A) = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|, N(A) = \sqrt{\text{tr } A^* A},$$

bu yerda $\text{tr } A^* A = |a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 + \dots + |a_{nn}|^2$ bo'lib, A matritsaning izi deb aytiladi (keyingi bobga qarang). Quyidatilarni ko'rsating:

- 1) $M(A)$ va $N(A)$ matritsaning normasi;
- 2) Bu normalar vektorlarning yuqorida ko'rib o'tilgan normalarining birortasiga bo'ysunmaydi.

7. Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

$$n^{-1}M(A) \leq \|A\|_k \leq M(A) \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$n^{-1}M(A) \leq N(A) < M(A),$$

$$n^{-\frac{1}{2}}N(A) \leq \|A\|_3 \leq N(A),$$

$$n^{-\frac{1}{2}}N(A) \leq \|A\|_k \leq \sqrt{n}N(A) \quad (k = 1, 2),$$

$$n^{-\frac{1}{2}}\|A\|_3 \leq \|A\|_k \leq \sqrt{n}\|A\|_3 \quad (k = 1, 2),$$

$$n^{-1}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq n\|A\|_1.$$

4-BOB. MATRITSALARNING XOS SON VA XOS VEKTORLARINI HISOBLASH

4.1-§. Umumiy mulohazalar

Bu bobda matritsalarining xos son va xos vektorlarini hisoblash bilan shug'ullanamiz.

Agar biror noldan farqli $\bar{x}$ vektor uchun

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (4.1.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda λ son A kvadrat matritsaning *xos soni* yoki *xarakteristik soni* deyiladi. Bu tenglikni qanoatlantiradigan har qanday noldan farqli $\bar{x}$ vektor A matritsaning λ xos soniga mos keladigan *xos vektori* deyiladi. Ko'rinib turibdiki, agar $\bar{x}$ xos vektor bo'lsa, u holda $a\bar{x}$ (a – ixtiyoriy son) vektor ham xos vektor bo'ladi.

Matritsaning xos soni va xos vektori haqidagi ma'lumotlar matematikada va uning boshqa sohalaridagi tatbiqlarida ham keng qo'llaniladi. Oldingi bobda biz buni

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsion metod bilan yechish misolida ko'rgan edik. Bu yerda iteratsion jarayonning yaqinlashishi va yaqinlashish tezligi B matritsaning moduli bo'yicha eng katta xos sonining miqdoriga bog'liq edi.

Astronomiya, mexanika, fizika, ximiyaning qator masalalarida ayrim matritsalarining barcha xos sonlarini va ularga mos keladigan xos vektorlarini topish talab qilinadi. Bunday masala *xos sonlarning to'liq muammosi* deyiladi.

Ayrim masalalarda esa, masalan, yadro masalasida, matritsaning moduli bo'yicha eng katta yoki eng kichik xos sonini topish talab qilinadi.

Tebranuvchi jarayonlarda esa matritsa xos sonlarining modullari bo'yicha ikkita eng kattasini aniqlashga zaruriyat tug'iladi. Matritsalarining bitta yoki bir nechta xos son va xos vektorlarini topish *xos sonlarining qisman muammosi* deyiladi.

Bir jinsli (4.1.1) sistemaning noldan farkdi yechimi mavjud bo'lishi uchun

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1.2)$$

shart bajarilishi kerak. Bu tenglama odatda *A* matritsaning asriy (bu termin astronomiyadan kirib qolgan) yoki *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. (4.1.2) tenglamaning chap tomoni

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) \quad (4.1.3)$$

n - darajali ko'phad bo'lib, u *A* matritsaning xarakteristik ko'phadi deyiladi. Ayrim hollarda (4.1.3) ko'phad o'rnida *A* matritsaning xos ko'phadi deb ataluvchi

$$p(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n \quad (4.1.4)$$

ko'phad bilan ish ko'riladi. Matritsaning xos sonlari uning xos ko'phadining ildizlari bo'ladi. (4.1.4) ko'phad n - darajali bo'lganligi uchun u n ta ildizga ega. *A* matritsaning λ_i xos soniga mos kelaligan xos vektorlarini topish uchun

$$(A - \lambda_i E) \bar{x} = \bar{0} \quad (4.1.5)$$

bir jinsli tenglamalar sistemasining noldan farqli yechimini topish kerak. Shunday qilib, xos son va xos vektorlarni topish masalasi uch bosqichdan iborat: 1) $P(\lambda)$ ni qurish, 2) $P(\lambda) = 0$ tenglamani yechib, barcha λ_i ($i = \overline{1, n}$) xos sonlarni topish, 3) barcha λ_i larga mos kelgan xos vektorlarni (4.1.5) dan topish. Bu bosqichlarning har biri yetarlicha murakkab hisoblash masalalaridan iboratdir. Haqiqatan ham, λ (4.1.2) determinantning har bir satri va har bir ustunida qatnashganligi uchun, bunday determinantni λ ning darajalariga nisbatan yoyib chiqish, ya'ni (4.1.3) tenglikni hosil qilish katta qiyinchilik tug'diradi. Algebradan ma'lumki, umumiy holda, $P(\lambda)$ ning koeffitsiyentlarini *A* matritsaning $(-1)^{i-1}$ ishora bilan

olingan i -tartibli bosh minorlari p_i ning yig'indisiga teng:

$$p_1 = \sum_{j=1}^n a_{jj}, \quad p_2 = \sum_{j < k} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \sum_{j < k < l} \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix} \quad (4.1.6)$$

va hokazo. Demak,

$$p_n = (-1)^{n-1} \det A. \quad (4.1.7)$$

Ravshanki, A matritsaning i -tartibli diagonal minoralarining soni C_n^i ga teng. Demak, n -tartibli matritsani xos ko'phadi $P(\lambda)$ ning koef-fitsiyentlarini bevosita hisoblash uchun

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

ta har xil tartibli determinantlarni hisoblash kerak. Yetarlicha katta n uchun bu masala katta hisoblashlarni talab qiladi.

Viyet teoremasidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= p_1, \\ &\vdots \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n &= (-1)^{n-1} p_n. \end{aligned}$$

Bu tengliklarni (4.1.6) tengliklarning birinchisi va (4.1.7) tenglik bilan solishtirsak,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr} A, \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n &= \det A \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, matritsaning barcha xos sonlarining yig'indisi uning izi tr ga (inglizcha trace — iz so'zidan) teng bo'lib, ularning ko'paytmasi shu matritsaning determinantiga teng. Bu yerdan xususiy holda quyidagi kelib chiqadi: A matritsaning hech bo'lmaganda birorta xos soni nolga teng bo'lishi uchun $\det A = 0$ bo'lishi zarur va kifoyadir.

Xos sonlar muammosining ikkinchi va uchinchi bosqichlari, ya'ni yuqori darajali algebraik tenglamalarni yechish va bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining trivial bo'lmagan yechimini topish yetarlicha katta n lar uchun qanchalik ko'p mehnat talab qilishini biz 2- va 3-boblarda ko'rgan edik. Hozirgi vaqtda xos son va xos vektorlarni topish metodlari

ikki gruppaga bo'linadi: *aniq yoki to'g'ri metodlar* va *itsratsion metodlar*. Birinchi gruppaga kiradigan metodlar bo'yicha matritsaning xos ko'phadi topiladi (ya'ni $p_1, p_2, \dots, p_n$ koeffitsiyentlar hisoblanadi), keyin uning ildizlarini topib xos sonlar hosil qilinadi va nihoyat, xos sonlardan foydalanib xos vektorlar quriladi. Bu metodlarning aniq metodlar deyilishiga sabab shundan iboratki, agar matritsa elementlari aniq berilgan bo'lsa va hisoblashlar aniq olib borilsa, natijada xarakteristik ko'phad koeffitsiyentlarining qiymatlari ham aniq topiladi va xos vektorlarning komponentlari xos sonlar orqali aniq formulalar bilan ifodalanadi. Aniq metodlar, odatda, xos sonlarning to'liq muammosini yechish uchun qo'llaniladi.

Iteratsion metodlarda xarakteristik sonlar xarakteristik ko'phad koeffitsiyentlarini aniqlamasdan turib, bevosita hisoblanadi. Bu esa hisoblash masalasini juda soddalashtiradi, chunonchi yuqori darajali algebraik tenglamalarni yechishdan ozod qiladi. Iteratsion metodlarda xos sonlarni hisoblash bilan bir vaqtda xos vektorlar ham topiladi. Bu metodlarning sxemasi iteratsion xarakterga ega. Bu metodlar xos son va xos vektorlar sonli va vektorlar ketma-ketligining limiti sifatida topiladi.

Odatda, iteratsion metodlar xos sonlarning qisman muammosini yechish uchun, ya'ni matritsalarining bitta yoki bir nechta xos sonlari va ularga mos keladigan xos vektorlarni topish uchun qo'llaniladi. Hozirgi vaqtda to'liq muammo ayrim hollarda, maxsus iteratsion metodlar bilan ham yechiladi. Lekin bu metodlar ko'p mehnat talab qiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish qadimiy tarixga ega. Hindlar VI asrdan boshlab chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yecha boshlaganlar. Lekin Lever'e (1840-y.) va Yakobi (1846-y.) metodlarini hisobga olmaganda, xos son va xos vektorlarni topish metodlari asrimizning o'ttizinchi yillaridan boshlab yaratilgan.

4.2-§. Krilov metodi

Akademik A.N.Krilov 1931-yilda xos sonlar muammosini yechishning qulay metodini yaratdi. U o'z metodining g'oyasini tushuntirish uchun berilgan matritsa bilan bog'liq bo'lgan oddiy differensial tenglamalar sistemasini kiritadi va uning ustida almashtirish olib boradi. Bu almashtirishlarning algebraik mohiyatini aniqlash bilan N.N.Luzin, I.N.Xladovskiy, F.R.Gantmaxer, D.K.Faddeyevlar shug'ullanishgan. Biz bu yerda A.N.Krilov metodining mana shu algebraik interpretatsiyasini ko'rib chiqamiz.

4.2.1 Matritsalarining minimal ko'phadlari

Avval chiziqli algebradan ayrim ta'rif va teoremlarni keltiramiz. Agar A kvadrat matritsa uchun

$$f(A) \equiv a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m E = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$$

ko'phad A matritsa uchun *nolga aylantiruvchi ko'phad* deyiladi. Faqat *keltirilgan*, ya'ni bosh koeffitsiyenti birga teng bo'lgan ko'phadlarni qaraymiz. Bunday ko'phadlarning to'plami bo'sh emas, Gamilton-Keli teoremasiga ko'ra A matritsaning xos ko'phadi $P(\lambda)$ uning nolga aylantiruvchi ko'phadidir: $P(A) = 0$. Demak, n — tartibli ixtiyoriy kvadrat matritsa uchun n — darajali nolga aylantiruvchi ko'phad mavjud. Bunday ko'phad yagona emas, chunki agar $P(\lambda)$ A matritsa uchun nolga aylantiruvchi ko'phad bo'lsa, u hodda $P(\lambda)$ ga bo'linadigan har qanday boshqa ko'phad ham nolga aylantiruvchi ko'phad bo'ladi. A matritsani nolga aylantiruvchi ko'phadlar orasida eng kichik darajaga ega bo'lgan yagona $\varphi(\lambda)$ ko'phad mavjud. Bu ko'phad A matritsaning *minimal ko'phadi* deyiladi. Har qanday nolga aylantiruvchi ko'phad, shu jumladan, A matritsaning xos ko'phadi $P(\lambda)$ ham minimal ko'phadga bo'linadi. Minimal ko'phadning ildizlari xos ko'phadning barcha bir-biridan farqli ildizlaridan iboratdir.

Yana quyidagi tushunchani kiritamiz. Faraz qilaylik, $\bar{c}$ biror vektor bo'lsin. Ma'lumki, n o'lchovli fazoda n tadan ortiq chiziqli erkli vektor bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun

$$\bar{c}, A\bar{c}, A^2\bar{c}, \dots, A^n\bar{c} \quad (4.2.1)$$

vektorlar orasida chiziqli bog'lanish mavjuddir. Hattoki, ixtiyoriy $\bar{c}$ vektor uchun ham

$$\varphi(A)\bar{c} = \bar{0} \quad (4.2.2)$$

chiziqli bog'lanish mavjud. Demak, A matritsaning $\varphi(\lambda)$ minimal ko'phadining darajasi n dan kichik bo'lsa, (4.2.1) sistemada chiziqli erkli vektorlarning soni n dan kichikdir. Berilgan $\bar{c}$ vektor uchun

$$(A)\bar{c} = \bar{0} \quad (4.2.3)$$

tenglikni qanoatlantiradigan $\psi(\lambda)$ ko'phadlar orasida bosh koeffitsiyenti birga teng bo'lgan eng kichik darajali yagona $\varphi_{\bar{c}}(\lambda)$ ko'phad mavjudki, uning uchun

$$\varphi_{\bar{c}}(\lambda) \bar{c} = \bar{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunday ko'phad $\bar{c}$ vektorning minimal ko'phadi deyiladi va u (4.2.3) tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi(\lambda)$ ko'phadning bo'luvchisi bo'ladi. Xususiyl holda, ixtiyoriy $\bar{c}$ vektorning minimal ko'phadi $\varphi_{\bar{c}}(\lambda)$ A matritsa minimal ko'phadi $\varphi(\lambda)$ ning bo'luvchisi bo'ladi. Agar (4.2.1) sistemada $\bar{c}, A\bar{c}, A^2\bar{c}, \dots, A^{m-1}\bar{c}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lib, $A^m\bar{c}$ ularga chiziqli bog'liq bo'lsa,

$$A^m\bar{c} = q_m\bar{c} + q_{m-1}A\bar{c} + \dots + q_1A^{m-1}\bar{c},$$

u holda

$$\lambda^m - q_1\lambda^{m-1} - q_2\lambda^{m-2} - \dots - q_{m-1}\lambda - q_m = 0$$

ko'phad A matritsaning minimal ko'phadi $\varphi(\lambda)$ ga yoki uning bo'luvchisi $\varphi_{\bar{c}}(\lambda)$ ga teng.

4.2.2 Minimal ko'phadni topish

Endi A.N.Krilov metodini ko'rib chiqamiz. Ixtiyoriy noldan farqli $\bar{c}^{(0)} = (c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n})'$ vektorni olib,

$$\bar{c}^{(i)} = A\bar{c}^{(i-1)} = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})' \quad (i = \overline{1, n}) \quad (4.2.4)$$

vektorlar ketma-ketligini tuzamiz. Yuqorida aytganimizdek, bu vektorlar orasida

$$q_1\bar{c}^{(n-1)} + q_2\bar{c}^{(n-2)} + \dots + q_n\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)} \quad (4.2.5)$$

chiziqli kombinatsiya mavjuddir. Agar buni koordinatalarda yozib olsak, $q_1, q_2, \dots, q_n$ larni topish uchun quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} q_1c_{n-1,1} + q_2c_{n-2,1} + \dots + q_nc_{01} = c_{n1}, \\ q_1c_{n-1,2} + q_2c_{n-2,2} + \dots + q_nc_{02} = c_{n2}, \\ \vdots \\ q_1c_{n-1,n} + q_2c_{n-2,n} + \dots + q_nc_{0n} = c_{nn}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Bu sistemaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{n-1,1} & \dots & c_{01} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,n} & \dots & c_{0n} \end{vmatrix}$$

faqat $\bar{c}^{(n-1)}, \bar{c}^{(n-2)}, \dots, \bar{c}^{(0)}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgandagina noldan farqlidir, chunki bu determinantning ustunlari shu vektorlar koordinatalaridan tuzilgan.

Agar Gauss metodining to'g'ri yurishidagi barcha n qadam bajarilib, (4.2.6) sistema quyidagi

$$\begin{cases} q_1 + b_{12}q_2 + b_{13}q_3 + \dots + b_{1n}q_n = d_1, \\ q_2 + b_{23}q_3 + \dots + b_{2n}q_n = d_2, \\ \vdots \\ q_n = d_n \end{cases} \quad (4.2.7)$$

uchburchak shakliga keltirilsa, u holda $\Delta \neq 0$ bo'lib, $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(n-1)}$ vektorlar chiziqli erkli. U vaqtda (4.2.7) sistemadan qaralayotgan kombinatsiyaning koeffitsiyentlari $q_n, q_{n-1}, \dots, q_1$ ni topa olamiz.

Agar Gauss metodidagi to'g'ri yurishning faqat m ta qadami bajarilsa, u holda faqat avvalgi m ta $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(m-1)}$ vektorlar chiziqli erkli bo'ladi. Kerakli

$$q_1\bar{c}^{(m-1)} + q_2\bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}$$

chiziqli kombinatsiyani koordinatalarda yozib olamiz:

$$\begin{cases} q_1c_{m-1,1} + q_2c_{m-2,1} + \dots + q_m c_{01} = c_{m1}, \\ q_1c_{m-1,2} + q_2c_{m-2,2} + \dots + q_m c_{02} = c_{m2}, \\ \vdots \\ q_1c_{m-1,n} + q_2c_{m-2,n} + \dots + q_m c_{0n} = c_{mn}. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

Bu sistemadan Gauss metodi yordamida m ta chiziqli erkli tenglamalarni ajratib olib, $q_m, q_{m-1}, \dots, q_1$ koeffitsiyentlarni topamiz.

Shunday qilib, biz $m = n$ bo'lganda A matritsaning xos ko'phadini va $m < n$ bo'lganda uning bo'luvchisini topishimiz mumkin. Avval $m = n$ bo'lgan holni ko'raylik. Bu holda (4.2.5) chiziqli kombinatsiyaning $q_1, q_2, \dots, q_n$ koeffitsiyentlari

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \dots - p_n$$

xos ko'phadning mos ravishda $p_1, p_2, \dots, p_n$ koeffitsiyentlariga teng:

$$q_i = p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Haqiqatan ham, Gamilton-Keli teoremasiga ko'ra

$$P(A) = A^n - p_1 A^{n-1} - \dots - p_n E = 0.$$

Bu tenglikni $\bar{c}^{(0)}$ vektorga ko'paytirib va

$$A^i \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

larni hisobga olib,

$$p_1 \bar{c}^{(n-1)} + p_2 \bar{c}^{(n-2)} + \dots + p_n \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglikni (4.2.5) dan ayirib,

$$(q_1 - p_1) \bar{c}^{(n-1)} + (q_2 - p_2) \bar{c}^{(n-2)} + \dots + (q_n - p_n) \bar{c}^{(0)} = 0 \quad (4.2.9)$$

ni hosil qilamiz.

$\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(n-1)}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi uchun (4.2.9) tenglik faqat $p_i = q_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ bo'lgandagina bajariladi.

Demak, $m = n$ bo'lganda qurilgan chiziqli kombinatsiyaning ko'rinishiga qarab, A matritsaning $P(\lambda)$ xos ko'phadini yozish mumkin.

$P(\lambda) = 0$ tenglamani yechib matritsaning barcha xos sonlarini topamiz. Agar $m < n$ bo'lsa, qurilgan chiziqli kombinatsiya

$$q_1 \bar{c}^{(m-1)} + q_2 \bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)} \quad (4.2.10)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Endi $\bar{c}^{(i)} = A^i \bar{c}^{(0)} (i = 1, 2, \dots, m)$ larni hisobga olib (4.2.10) tenglikni

$$(A^m - q_1 A^{m-1} - q_2 A^{m-2} - \dots - q_m E) \bar{c}^{(0)} = 0$$

yoki

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(A) \bar{c}^{(0)} = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda) = \lambda^m - q_1 \lambda^{m-1} - q_2 \lambda^{m-2} - \dots - q_m.$$

Demak, izlanayotgan kombinatsiyaning koeffitsiyentlari $q_1, q_2, \dots, q_m$ lar $\bar{c}^{(0)}$ vektorning minimal ko'phadi $\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ ning koeffitsiyentlaridir. Bunday ko'phad $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(m-1)}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi uchun yagonadir.

Shunday qilib, $m < n$ bo'lganda biz $P(\lambda)$ ning $\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ bo'luvchisini topamiz va $\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda) = 0$ tenglamani yechib, matritsaning bir qism xos sonlarini topamiz. Dastlabki $\bar{c}^{(0)}$ vektorni boshqacha tanlab, qolgan xos sonlarni ham topish mumkin. Shu bilan birga yangi tanlangan vektor oldin aniqlangan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi bo'lmasligi kerak.

4.2.3 Matritsaning xos vektorlarini topish

Endi xos vektorlarni topish masalasiga o'tamiz. Faraz qilaylik, λ_i

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda) = \lambda^m - q_1\lambda^{m-1} - q_2\lambda^{m-2} - \dots - q_m$$

minimal ko'phadning ildizi bo'lsin (keyingi mulohazalar $m = n$ va $m < n$ hollar uchun bir xil). A matritsaning λ_i xos soniga mos keladigan xos vektorini oldingi punktda topilgan $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(m-1)}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida izlaymiz:

$$\bar{x}^{(i)} = \beta_{i1}\bar{c}^{(0)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(1)} + \dots + \beta_{im}\bar{c}^{(m-1)}. \quad (4.2.11)$$

Bu tenglikni A ga ko'paytirib va $\bar{c}^{(j)} = A\bar{c}^{(j-1)}$ hamda $A\bar{x}^{(i)} = \lambda_i\bar{x}^{(i)}$ tengliklarni hisobga olib,

$$\begin{aligned} \lambda_i \left(\beta_{i1}\bar{c}^{(0)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(1)} + \dots + \beta_{im}\bar{c}^{(m-1)} \right) = \\ = \beta_{i1}\bar{c}^{(1)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(2)} + \dots + \beta_{im}\bar{c}^{(m)} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

ga ega bo'lamiz. Bundan tashqari, yana

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(A)\bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)} - q_1\bar{c}^{(m-1)} - q_2\bar{c}^{(m-2)} - \dots - q_m\bar{c}^{(0)} = 0$$

ni hisobga olsak, u holda (4.2.12) ni

$$\begin{aligned} \lambda_i \left(\beta_{i1}\bar{c}^{(0)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(1)} + \dots + \beta_{im}\bar{c}^{(m-1)} \right) = \\ = \beta_{i1}\bar{c}^{(1)} + \beta_{i2}\bar{c}^{(2)} + \dots + \beta_{i,m-1}\bar{c}^{(m-1)} + \\ + \beta_{im} \left(q_1\bar{c}^{(m-1)} + q_2\bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_{m-1}\bar{c}^{(1)} + q_m\bar{c}^{(0)} \right) \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned} (\lambda_i\beta_{i1} - \beta_{im}q_m)\bar{c}^{(0)} + (\lambda_i\beta_{i2} - \beta_{i1} - \beta_{im}q_{m-1})\bar{c}^{(1)} + \\ + \dots + (\lambda_i\beta_{i,m-1} - \beta_{i,m-2} - q_2\beta_{im})\bar{c}^{(m-2)} + \\ + (\lambda_i\beta_{im} - \beta_{i,m-1} - q_1\beta_{im})\bar{c}^{(m-1)} = 0 \end{aligned}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bundan $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(m-1)}$ vektorlarning chiziqli erkliligini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} \lambda_i\beta_{i1} - \beta_{im}q_m &= 0, \\ \lambda_i\beta_{i2} - \beta_{i1} - \beta_{im}q_{m-1} &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_i\beta_{i,m-1} - \beta_{i,m-2} - \beta_{im}q_2 &= 0, \\ \lambda_i\beta_{im} - \beta_{i,m-1} - \beta_{im}q_1 &= 0 \end{aligned}$$

tengliklar kelib chiqadi. Oxirgi tenglikdan boshlab, ketma-ket β_{ik} larni topamiz:

$$\begin{aligned}\beta_{i,m-1} &= (\lambda_i - q_1) \beta_{im}, \\ \beta_{i,m-2} &= (\lambda_i^2 - q_1 \lambda_i - q_2) \beta_{im}, \\ &\vdots \\ \beta_{i1} &= (\lambda_i^{m-1} - q_1 \lambda_i^{m-2} - \dots - q_{m-1}) \beta_{im}, \\ (\lambda_i^m - q_1 \lambda_i^{m-1} - \dots - q_m) \beta_{im} &= 0.\end{aligned}$$

Oxirgi tenglik barcha β_{im} lar uchun o'rinlidir, chunki

$$\varphi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda_i) = \lambda_i^m - q_1 \lambda_i^{m-1} - \dots - q_m = 0.$$

Bu tenglikdan hisoblashni nazorat qilish uchun foydalanish mumkin. Hisoblashni soddalashtirish maqsadida $\beta_{im} = 1$ deb olishimiz mumkin. Unda qolganlari quyidagicha topiladi:

$$\begin{cases} \beta_{im} = 1, \\ \beta_{i,m-1} = \lambda_i - q_1, \\ \beta_{i,m-2} = \lambda_i^2 - q_1 \lambda_i - q_2, \\ \vdots \\ \beta_{i1} = \lambda_i^{m-1} - q_1 \lambda_i^{m-2} - \dots - q_{m-1}. \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Bularni hisoblashda Gerner sxemasidan foydalanish ma'quldir. Agar berilgan λ_i xos songa A matritsaning bir necha xos vektori mos kelsa, u holda ularni izlash uchun boshqa dastlabki vektorni tanlab olib, shu hisoblash jarayonini takrorlash mumkin.

Misol 4.1. *A.N.Krilov metodi bilan quyidagi*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matritsaning xarakteristik ko'phadini toping.

Yechish: Dastlabki $\bar{c}^{(0)}$ vektor sifatida $(1, 0, 0, 0)'$ ni olib, $\bar{c}^{(1)}$, $\bar{c}^{(2)}$, $\bar{c}^{(3)}$, $\bar{c}^{(4)}$ larni topamiz:

$$\bar{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 36 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(4)} = \begin{bmatrix} 129 \\ 132 \\ 30 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Bu vektorlar yordamida (4.2.6) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} 3q_1 + 9q_2 - q_3 + q_4 = 129, \\ 36q_1 + 6q_2 + 2q_3 = 132, \\ 30q_1 + 2q_3 = 30, \\ 6q_2 = 102. \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss metodi bilan yechamiz:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 17, \quad q_3 = 15, \quad q_4 = -9.$$

Demak, A matritsaning xarakteristik ko'phadi

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 17\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

ekan. ■

Misol 4.2. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos sonlari va xos vektorlari topilsin.

Yechish: Misol 4.1 dagidek, $\bar{c}^{(i)}$ vektorlarni topamiz:

$$\bar{c}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(2)} = \begin{bmatrix} -29 \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}^{(3)} = \begin{bmatrix} 125 \\ 63 \\ 63 \end{bmatrix}.$$

(4.2.6) sistema quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} -29q_1 + 5q_2 + q_3 = 125, \\ -15q_1 + 3q_2 = 63, \\ -15q_1 + 3q_2 = 63. \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss metodi bilan yechganda to'g'ri yurishning uchinchi qadami bajarilmaydi, chunki uchinchi tenglama ikkinchi bilan bir xil. Shuning uchun ham (4.2.8) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} 5q_1 + q_2 = -29, \\ 3q_1 = -15. \end{cases}$$

Bundan $q_1 = -5$, $q_2 = -4$ va $\varphi_{\bar{c}}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$ Shunday qilib, $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$. Endi uchinchi xos sonni topish uchun $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ tenglikdan foydalanamiz: $5 + 14 - 25 = -1 - 4 + \lambda_3$. Demak, $\lambda_3 = -1$, Shunday qilib, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ekan. Endi bu xos sonlarga mos keladigan xos vektorlarni topamiz. Buning uchun (4.2.11)–(4.2.13) va $\beta_{i1} = 1$ dan foydalanib, quyidagilarni yoza olamiz:

$$\bar{x}^{(i)} = \beta_{i1} \bar{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5(\lambda_i - q_1) + 1 \\ 3(\lambda_i - q_1) \\ 3(\lambda_i - q_1) \end{bmatrix}.$$

Bundan esa

$$\bar{x}^{(1)} = (6, 3, 3)', \quad \bar{x}^{(2)} = (21, 12, 12)'$$

ni topamiz. Uchinchi vektorni topish uchun dastlabki vektorni boshqacha tanlash kerak. ■

4.3-§. Lansosh metodi

Bu, ya'ni K. Lansosh metodi ham Krilov metodiga o'xshashdir. Faqat bu yerda xos ko'phad koeffitsiyentlarini aniqlaydigan vektor formada yozilgan ushbu

$$q_1 \bar{c}^{(n-1)} + q_2 \bar{c}^{(n-2)} + \dots + q_n \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(n)}$$

sistemani yoki minimal ko'phad koeffitsiyentlarini aniqlaydigan

$$q_1 \bar{c}^{(m-1)} + q_2 \bar{c}^{(m-2)} + \dots + q_m \bar{c}^{(0)} = \bar{c}^{(m)}$$

sistemani yechish uchun ortogonallashtirish metodi qo'llaniladi.

4.3.1 Xos ko'phadni topish

O'zaro ortogonal bo'lgan vektorlar sistemasi ketma-ket quriladi. Berilgan dastlabki vektor $\bar{c}^{(0)} \neq \bar{0}$ va uning iteratsiyasi $A\bar{c}^{(0)}$ ga ko'ra $\bar{c}^{(0)}$ ga ortogonal bo'lgan $\bar{c}^{(1)} = A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}$ vektorni quramiz. Bu har doim mumkin va $(\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$ ortogonallik sharti g_{10} ni topishga imkon beradi:

$$g_{10} = \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})}.$$

Agar $\bar{c}^{(1)} = \bar{0}$ bo'lsa, u holda $\bar{c}^{(0)}$ va $A\bar{c}^{(0)}$ vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi hamda $Q_1(\lambda) = \lambda - g_{10}$ ko'phad A matritsa minimal ko'phadining

bo'luvchisi bo'lib, bu ko'phadning ildizi $\lambda = g_{10}$ matritsaning xos soni bo'ladi. Bundan keyin $\bar{c}^{(0)}$ ustida boshqa amal bajarilmaydi. Agar $\bar{c}^{(0)} \neq \bar{0}$ bo'lsa, u holda $A\bar{c}^{(1)}$ vektorni tuzamiz va $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$ larga ortogonal bo'lgan

$$\bar{c}^{(2)} = A\bar{c}^{(1)} - g_{21}\bar{c}^{(1)} - g_{20}\bar{c}^{(0)}$$

vektorni quramiz. Ushbu $(\bar{c}^{(2)}, \bar{c}^{(1)}) = 0$ va $(\bar{c}^{(2)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$ ortogonallik shartlari g_{21} va g_{20} ni topishga imkon beradi:

$$g_{21} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(1)})}, \quad g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{c}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})}.$$

Agar $\bar{c}^{(2)} = \bar{0}$ bo'lsa, u holda

$$A(A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}) - g_{21}(A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}) - g_{20}\bar{c}^{(0)} = 0$$

tenglik $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, $A^2\bar{c}^{(0)}$ vektorlar orasidagi chiziqli bog'lanishni beradi va

$$Q_2(\lambda) = (\lambda - g_{21})(\lambda - g_{20}) - g_{20} = (\lambda - g_{21})Q_1(\lambda) - g_{20}$$

ko'phad esa A matritsa minimal ko'phadining bo'luvchisi bo'ladi. Agar $\bar{c}^{(2)} \neq \bar{0}$ bo'lsa, u holda bu jarayon davom ettiriladi.

Faraz qilaylik, $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(m-1)}$ vektorlar topilgan bo'lib, barcha $i \neq j$ ($i, j = \overline{0, m-1}$) uchun $(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(j)}) = 0$ ortogonallik shartini qanoatlantirsin. U holda

$$\bar{c}^{(m)} = A\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-1}\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-2}\bar{c}^{(m-2)} - \dots - g_{m0}\bar{c}^{(0)}, \quad (4.3.1)$$

vektorni tuzamiz va $g_{m,m-1}$, $g_{m,m-2}$, ..., g_{m0} koeffitsiyentlarni shunday tanlaymizki, bu vektor $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(m-1)}$ vektorlarning har biri bilan ortogonal bo'lsin. Ortogonallik sharti $(\bar{c}^{(m)}, \bar{c}^{(i)}) = 0$ ($i = \overline{0, m-1}$) dan g_{mi} koeffitsiyentlarni topamiz:

$$g_{mi} = \frac{(A\bar{c}^{(m-1)}, \bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(i)})}, \quad (i = \overline{0, m-1}).$$

Biz $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(m)}$ vektorlarni qurish bilan bir paytda

$$Q_0(\lambda) = 1,$$

$$Q_1(\lambda) = (\lambda - g_{10})Q_0(\lambda),$$

$$Q_2(\lambda) = (\lambda - g_{21})Q_1(\lambda) - g_{20}Q_0(\lambda),$$

$$\vdots$$

$$Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda) - \dots - g_{m0}Q_0(\lambda)$$

ko'phadlar ketma-ketligini ham tuzamiz. Ma'lumki, n o'lchovli fazoda chiziqli erkli vektorlarning soni n dan ortmaydi. Shuning uchun ham, ortogonallashtirish jarayonining biror k ($k \leq n$) — qalamda $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ ga ega bo'lamiz. U holda

$$A\bar{c}^{(k-1)} - g_{k,k-1}\bar{c}^{(k-1)} - g_{k,k-2}\bar{c}^{(k-2)} - \dots - g_{k0}\bar{c}^{(0)} = \bar{0}$$

tenglik $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, $A^2\bar{c}^{(0)}$, ..., $A^k\bar{c}^{(0)}$ vektorlarning chiziqli bog'langanligini ko'rsatadi. Shuning uchun ham $Q_k(\lambda)$ ko'phad A matritsa minimal ko'phadining bo'luvchisi bo'ladi. Agar $k = n$ bo'lsa, $Q_n(\lambda)$ ko'phad A matritsaning xos ko'phadi $P(\lambda)$ bilan ustma-ust tushadi. Agar $k < n$ bo'lsa, $Q_k(\lambda)$ ko'phad xos ko'phad $P(\lambda)$ ning bo'luvchisi bo'ladi va biz faqat xos sonlarning biror qismini aniqlash imkoniga ega bo'lamiz. Qolgan xos sonlarni topish uchun ishni yana boshqa dastlabki vektor $\bar{c}_1^{(0)}$ dan boshlash kerak va bu vektorni shunday tanlash lozimki, u $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{c}^{(1)}$, ..., $\bar{c}^{(k-1)}$ vektorlarga ortogonal bo'lsin.

Simmetrik A matritsa uchun (4.3.1) tenglik soddalashadi. Haqiqatan ham, bu holda

$$\begin{aligned} g_{mi} &= \frac{(A\bar{c}^{(m-1)}, \bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(i)})} = \frac{(\bar{c}^{(m-1)}, A\bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(i)})} = \\ &= \frac{(\bar{c}^{(m-1)}, \bar{c}^{(i+1)}) + g_{i+1,i}\bar{c}^{(i)} + \dots + g_{i+1,0}\bar{c}^{(0)}}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{c}^{(i)})} \end{aligned}$$

bo'lib, $i+1 < m-1$ bo'lsa, $g_{mi} = 0$ bo'ladi. Demak, matritsa simmetrik bo'lganda (4.3.1) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\bar{c}^{(m)} = A\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-1}\bar{c}^{(m-1)} - g_{m,m-2}\bar{c}^{(m-2)}. \quad (4.3.2)$$

Shu bilan birga

$$Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda) - \dots - g_{m0}Q_0(\lambda)$$

ko'phad ham soddalashadi:

$$Q_m(\lambda) = (\lambda - g_{m,m-1})Q_{m-1}(\lambda) - g_{m,m-1}Q_{m-2}(\lambda).$$

Bu esa metodning hisoblash sxemasini soddalashtiradi. Shuning uchun ham Lansosh metodining simmetrik matritsa holi odatda *minimal iteratsiya metodi* deb ataladi.

Bunday soddalashtirishga simmetrik bo'lmagan matritsa uchun ham erishish mumkin, faqat bu yerda ortogonallashtirish jarayonini biortogonallashtirish jarayoni bilan almashtirish kerak.

Ikkita $\bar{c}^{(0)}$ va $\bar{b}^{(0)}$ dastlabki vektorlarni tanlab olamiz. Bularga ko'ra $A\bar{c}^{(0)}$ va $A'\bar{b}^{(0)}$ larni topib,

$$\bar{c}^{(1)} = A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}, \quad \bar{b}^{(1)} = A'\bar{b}^{(0)} - h_{10}\bar{b}^{(0)}$$

chiziqli kombinatsiyalarni tuzamiz. Bu yerda g_{10} va h_{10} koeffitsiyentlarni $(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(0)}) = (\bar{b}^{(1)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$ biortogonallik shartidan tanlaymiz. Agar dastlabki vektorlar $\bar{c}^{(0)}$ va $\bar{b}^{(0)}$ ortogonal bo'lmasa, u holda g_{10} va h_{10} ni topish mumkin:

$$g_{10} = \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(0)}, A'\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = h_{10}.$$

Biz $(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)}) \neq 0$ shart bajarilgan deb faraz qilamiz. Topilgan vektorlar $\bar{c}^{(1)}$ va $\bar{b}^{(1)}$ ga ko'ra shunday

$$\bar{c}^{(2)} = A\bar{c}^{(1)} - g_{21}\bar{c}^{(1)} - g_{20}\bar{c}^{(0)}, \quad \bar{b}^{(2)} = A'\bar{b}^{(1)} - h_{21}\bar{b}^{(1)} - h_{20}\bar{b}^{(0)}$$

chiziqli kombinatsiyalarni tuzamizki, natijada

$$(\bar{c}^{(2)}, \bar{b}^{(1)}) = (\bar{c}^{(2)}, \bar{b}^{(0)}) = (\bar{b}^{(2)}, \bar{c}^{(1)}) = (\bar{b}^{(2)}, \bar{c}^{(0)}) = 0$$

bo'lsin. Agar $(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)}) \neq 0$ va $(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)}) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu shartlardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$g_{21} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})} = h_{21},$$

$$g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)} + h_{10}\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} =$$

$$\frac{(A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = \frac{(\bar{c}^{(1)}, A'\bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = h_{20}.$$

Faraz qilaylik, shunday

$$\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(k)}; \bar{b}^{(0)}, \bar{b}^{(1)}, \dots, \bar{b}^{(k)}$$

vektorlarni tuzgan bo'laylikki, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1) $(\bar{b}^{(i)}, \bar{c}^{(j)}) = 0 \quad (i \neq j);$
- 2) $(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)}) \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$

U holda shunday

$$\begin{cases} \bar{c}^{(k+1)} = A\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k}\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k-1}\bar{c}^{(k-1)} - \dots - g_{k+1,0}\bar{c}^{(0)}, \\ \bar{b}^{(k+1)} = A'\bar{b}^{(k)} - h_{k+1,k}\bar{b}^{(k)} - h_{k+1,k-1}\bar{b}^{(k-1)} - \dots - h_{k+1,0}\bar{b}^{(0)} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

vektorlarni tuzamizki, ular

$$(\bar{c}^{(k+1)}, \bar{b}^{(i)}) = (\bar{b}^{(k+1)}, \bar{c}^{(i)}) = 0 \quad (i = \overline{0, k})$$

shartlarni qanoatlantirsin. Bu shartlardan esa

$$\begin{aligned} g_{k+1,i} &= \frac{(\bar{c}^{(k+1)}, \bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \frac{(\bar{c}^{(k)}, A'\bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i+1)} + h_{i+1,i}\bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \\ &= \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i+1)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} + h_{i+1,i} \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \\ &= \begin{cases} h_{i+1,i}, & \text{agar } i = k \text{ bo'lsa,} \\ \frac{(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = g_{k+1,k-1}, & \text{agar } i = k-1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i < k-1 \text{ bo'lsa;} \end{cases} \\ h_{k+1,i} &= \frac{(A'\bar{b}^{(k)}, \bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \frac{(\bar{b}^{(k)}, A\bar{c}^{(i)})}{(\bar{c}^{(i)}, \bar{b}^{(i)})} = \\ &= \begin{cases} g_{k+1,i}, & \text{agar } i = k \text{ bo'lsa,} \\ g_{k+1,k-1}, & \text{agar } i = k-1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i < k-1 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \end{aligned}$$

Shunday qilib, (4.3.3) tengliklar ko'rinishga keladi:

$$\bar{c}^{(k+1)} = A\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k}\bar{c}^{(k)} - g_{k+1,k-1}\bar{c}^{(k-1)},$$

$$\bar{b}^{(k+1)} = A'\bar{b}^{(k)} - g_{k+1,k}\bar{b}^{(k)} - g_{k+1,k-1}\bar{b}^{(k-1)}.$$

Bu jarayonlar mumkin bo'lishligi uchun oldingi topilgan $\bar{c}^{(k)}$ va $\bar{b}^{(k)}$ vektorlar $(\bar{c}^{(k)}, \bar{b}^{(k)}) \neq 0$ shartni qanoatlantirishlari kerak. Bu shart quyidagi uch holda buzilishi mumkin:

- 1) $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ va $\bar{b}^{(k)} = \bar{0}$,
- 2) $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ yoki $\bar{b}^{(k)} = \bar{0}$,
- 3) $\bar{c}^{(k)} \neq \bar{0}$, $\bar{b}^{(k)} \neq \bar{0}$, lekin $\bar{c}^{(k)} \perp \bar{b}^{(k)}$.

Oxirgi hol $\bar{c}^{(0)}$, $\bar{b}^{(0)}$ dastlabki vektorlarni noqulay tanlash natijasida kelib chiqadi. Bunday holda, dastlabki vektorlarni boshqacha tanlash kerak.

Agar A matritsa minimal ko'phadining darajasi m bo'lsa, u holda (A va A' matritsalar bir xil minimal ko'phadga ega bo'lganliklari uchun) $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, ..., $A^m\bar{c}^{(0)}$ va $\bar{b}^{(0)}$, $A'\bar{b}^{(0)}$, ..., $A^m\bar{b}^{(0)}$ vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi. Shuning uchun ham biortogonallashtirish jarayoni $k \leq m$ qadamda tugaydi va $\bar{c}^{(k)} = 0$ yoki $\bar{b}^{(k)} = 0$ vektorga ega bo'lib, u holda $\bar{c}^{(0)}$, $A\bar{c}^{(0)}$, ..., $A^k\bar{c}^{(0)}$ vektorlar yoki $\bar{b}^{(0)}$, $A'\bar{b}^{(0)}$, ..., $A^k\bar{b}^{(0)}$ vektorlar orasida chiziqli bog'lanishga ega bo'lamiz. Ortogonallashtirish jarayonidagidek, bu yerda ham A matritsaning minimal ko'phadi yoki uning bo'luvchisini ketma-ket quyidagicha topamiz:

$$Q_0(\lambda) = 1,$$

$$Q_1(\lambda) = (\lambda - g_{10})Q_0(\lambda),$$

$$Q_2(\lambda) = (\lambda - g_{21})Q_1(\lambda) - g_{20}Q_0(\lambda),$$

$$\vdots$$

$$Q_k(\lambda) = (\lambda - g_{k,k-1})Q_{k-1}(\lambda) - g_{k,k-2}Q_{k-2}(\lambda).$$

Misol 4.3. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 30 & -48 \\ 3 & 14 & -24 \\ 3 & 15 & -25 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos sonlari topilsin.

Yechish: Bu yerda A matritsa simmetrik bo'lmaganligi uchun biortogonallashtirish jarayonini qo'llaymiz. Buning uchun $\bar{c}^{(0)} = \bar{b}^{(0)} = (1, 0, 0)'$ deb olamiz. U holda

$$A\bar{c}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A'\bar{b}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 30 \\ -48 \end{bmatrix}, \quad g_{10} = \frac{(A\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = 5$$

va

$$\begin{aligned} \bar{c}^{(1)} &= A\bar{c}^{(0)} - g_{10}\bar{c}^{(0)} = (0, 3, 3)', \\ \bar{b}^{(1)} &= A'\bar{b}^{(0)} - g_{10}\bar{b}^{(0)} = (0, 30, -48)' \end{aligned}$$

bo'ladi.

Ikkinchi qadamda

$$\begin{aligned} A\bar{c}^{(1)} &= (-54, -30, -30)', \quad A'\bar{b}^{(1)} = (-54, -300, 480)', \\ g_{21} &= \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})}{(\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(1)})} = -10, \quad g_{20} = \frac{(A\bar{c}^{(1)}, \bar{b}^{(0)})}{(\bar{c}^{(0)}, \bar{b}^{(0)})} = -54 \end{aligned}$$

va $\bar{c}^{(2)} = \bar{b}^{(2)} = \bar{0}$ ga ega bo'lamiz.

Demak, biz ikkinchi variantdagi 1) holga duch keldik. Minimal ko'phadning bo'luvchisini quyidagicha topamiz

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda) &= 1, \\ \varphi_1(\lambda) &= \lambda - 5, \\ \varphi_2(\lambda) &= (\lambda + 5)(\lambda - 5) + 54 = \lambda^2 + 5\lambda + 4. \end{aligned}$$

Bundan ko'rinadiki. $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$ xos sonlar bo'lar ekan. Uchinchi xos sonni topish uchun matritsaning izidan foydalanamiz:

$$5 + 14 - 25 = -1 - 4 + \lambda_3, \quad \lambda_3 = -1.$$

4.3.2 Xos vektorlarni topish

Bayonni qisqartirish maqsadida A matritsa simmetrik bo'lgan holni qaraylik. Faraz qilaylik, Lansosh metodini qo'llab, $\bar{c}^{(k)} = \bar{0}$ ga ega bo'laylik. Aytaylik, λ_i $\bar{c}^{(0)}$ vektor minimal ko'phadi $\psi_{\bar{c}^{(0)}}(\lambda)$ ning biror

ildizi bo'lsin. U holda bu xos songa mos keladigan $\bar{x}^{(i)}$ xos vektorni quyidagi ko'rinishda izlaymiz

$$\bar{x}^{(i)} = \beta_0 \bar{c}^{(0)} + \beta_1 \bar{c}^{(1)} + \dots + \beta_{k-1} \bar{c}^{(k-1)}. \quad (4.3.4)$$

Keyin $A\bar{x}^{(i)} = \lambda_i \bar{x}^{(i)}$ shartdan va oldingi punktdagi

$$\begin{aligned} A\bar{c}^{(0)} &= \bar{c}^{(1)} + g_{10}\bar{c}^{(0)}, \\ A\bar{c}^{(1)} &= \bar{c}^{(2)} + g_{21}\bar{c}^{(1)} + g_{20}\bar{c}^{(0)}, \\ &\vdots \\ A\bar{c}^{(k-2)} &= \bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,k-2}\bar{c}^{(k-2)} + g_{k-1,k-3}\bar{c}^{(k-3)}, \\ A\bar{c}^{(k-1)} &= g_{k,k-1}\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,k-2}\bar{c}^{(k-2)} \end{aligned}$$

tengliklardan foydalanib, (4.3.4) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} &\beta_0 (\bar{c}^{(1)} + g_{10}\bar{c}^{(0)}) + \beta_1 (\bar{c}^{(2)} + g_{21}\bar{c}^{(1)} + g_{20}\bar{c}^{(0)}) + \dots + \\ &+ \beta_{k-2} (\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,k-2}\bar{c}^{(k-2)} + g_{k-1,k-3}\bar{c}^{(k-3)}) + \\ &+ \beta_{k-1} (g_{k,k-1}\bar{c}^{(k-1)} + g_{k-1,k-2}\bar{c}^{(k-2)}) = \\ &= \lambda_i \beta_0 \bar{c}^{(0)} + \lambda_i \beta_1 \bar{c}^{(1)} + \dots + \lambda_i \beta_{k-1} \bar{c}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Bundan $\bar{c}^{(0)}, \bar{c}^{(1)}, \dots, \bar{c}^{(k-1)}$ vektorlarni chiziqli erkliligini hisobga olsak, quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} \beta_0 (\lambda_i - g_{10}) - g_{20}\beta_1 = 0, \\ \beta_1 (\lambda_i - g_{21}) - g_{31}\beta_2 - \beta_0 = 0, \\ \vdots \\ \beta_{k-2} (\lambda_i - g_{k-1,k-2}) - g_{k,k-2}\beta_{k-1} - \beta_{k-3} = 0, \\ \beta_{k-1} (\lambda_i - g_{k,k-1}) - \beta_{k-2} = 0. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Bu yerdan ko'ramizki, $\beta_{k-2}, \beta_{k-3}, \dots, \beta_0$ lar β_{k-1} ga proporsionaldir. Shuning uchun ham $\beta_{k-1} = 1$ deb olishimiz mumkin. U holda qolgan β_i koeffitsiyentlarni ketma-ket topamiz:

$$\begin{aligned} \beta_{k-2} &= \lambda_i - g_{k,k-1}, \\ \beta_{k-3} &= \beta_{k-2} (\lambda_i - g_{k-1,k-2}) - g_{k,k-2}, \\ \beta_0 &= \beta_1 (\lambda_i - g_{21}) - g_{31}\beta_2. \end{aligned}$$

Krilov metodiga o'xshash (4.3.5) tengliklardagi birinchi tenglik qolganlarining natijasi bo'lib, u $\bar{c}^{(0)}$ vektor minimal ko'phadining $\lambda = \lambda_i$ dagi ifodasidir. Bu tenglikdan hisoblash jarayonini nazorat qilishda foydalanish mumkin.

Agar biz quyidagi ko'phadlarni kiritsak:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda) &= 1, \\ \varphi_1(\lambda) &= (\lambda - g_{k,k-1}) \varphi_0(\lambda), \\ \varphi_2(\lambda) &= (\lambda - g_{k-1,k-2}) \varphi_1(\lambda) - g_{k,k-2} \varphi_0(\lambda) \\ &\vdots \\ \varphi_k(\lambda) &= (\lambda - g_{10}) \varphi_{k-1}(\lambda) - g_{20} \varphi_{k-2}(\lambda),\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

u holda λ_i ga mos keladigan $\bar{x}^{(i)}$ xos vektorni quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{x}^{(i)} = \varphi_{k-1}(\lambda_i) \bar{c}^{(0)} + \varphi_{k-2}(\lambda_i) \bar{c}^{(1)} + \dots + \varphi_0(\lambda_i) \bar{c}^{(k-1)}.$$

(4.3.6) tenglikdagi $\varphi_k(\lambda)$ ko'phad $P_k(\lambda)$ ko'phad bilan ustma-ust tushadi.

4.4-§. Danilevskiy metodi

Xos sonlar muammosini yechishning sodda va tejamkor usulini 1937-yilda A.M.Danilevskiy taklif etdi. Bu metodning g'oyasi berilgan matritsani o'xshash almashtirishlar yordamida *Frobeniusning*

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

normal formasiga keltirishdan iboratdir. A va P matritsalar o'xshash bo'lganligi uchun ular bir xil xarakteristik ko'phadga ega. Lekin P matritsaning xarakteristik ko'phadini bevosita yozish mumkin. Haqiqatan ham, $D(\lambda) = \det(P - \lambda E)$ ni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqsak:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}p_n = \\
 &= (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_n).
 \end{aligned}$$

Shunday qilib, Frobenius matritsasining birinchi satr elementlari $p_1, p_2, \dots, p_n$ uning xos ko'phadining mos ravishdagi koeffitsiyentlaridan iboratdir. A va P matritsalar o'xshash, ya'ni $P = S^{-1}AS$ bo'lganligi uchun, $D(\lambda)$ ko'phad A matritsaning ham xos ko'phadidir.

A matritsaning elementlariga bog'liq ravishda Danilevskiy metodida *regulyar* va *noregulyar* hol uchraydi. Avval *regulyar* holni ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, A matritsaning $a_{n,n-1}$ elementi noldan farqli bo'lsin. Birinchi qadamda A matritsani o'ng tomondan

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{n,n-1}} & \dots & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaga ko'paytiramiz, natijada

$$B^{(0)} = AM_{n-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

hosil bo'ladi. M_{n-1} matritsa A va birlik matritsalar yordamida quyidagicha tuziladi:

1) birlik matritsaning $(n-1)$ -ustunining elementlarini $a_{n,n-1} \neq 0$ elementga bo'lamiz,

2) hosil bo'lgan ustunni A matritsaning n -satrining $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-2}, a_{nn}$ elementlariga ko'paytirib, mos ravishda birlik matritsaning $1, 2, \dots, n-2, n$ -ustuni elementlaridan ayiramiz, natijada M_{n-1} matritsa tuziladi.

Matritsalarini ko'paytirish qoidasiga ko'ra $B^{(0)}$ matritsaning elementlari quyidagi

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i,n-1} \frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}} \quad (j = 1, 2, \dots, n; j \neq n-1)$$

$$b_{n,n-1} = \frac{a_{i,n-1}}{a_{n,n-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

formulalar yordamida hisoblanadi. Lekin qurilgan $B^{(0)} = AM_{n-1}$ matritsa A matritsaga o'xshash emas. O'xshash almashtirish hosil qilish uchun teskari M_{n-1}^{-1} matritsani chapdan $B^{(0)}$ ga ko'paytirish kerak:

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = M_{n-1}^{-1}B^{(0)}.$$

Teskari matritsa M_{n-1}^{-1} quyidagi

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ko'rinishga ega ekanligini bevosita tekshirib ko'rish mumkin. M_{n-1}^{-1} matritsani $B^{(0)}$ matritsaga chap tomondan ko'paytirish uning oxirgi satrini o'zgartirmaydi. Shuning uchun ham Danilevskiy metodining birinchi qadami bajarilganda biz quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan matritsani hosil qilamiz:

$$A^{(1)} = M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$a_{ij}^{(1)} = b_{ij} \quad (1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n),$$

$$a_{n-1,j} = \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kj} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Endi $A^{(1)}$ matritsaning $a_{n-2,n-1}^{(1)}$ elementi noldan farqli deb faraz qilamiz. U vaqtda Danilevskiy metodidagi ikkinchi qadam birinchi qadamga o'xshash bo'lib, $A^{(1)}$ matritsaning $(n-2)$ - satrini Frobenius formasiga keltirishdan iboratdir. Bu almashtirishlar natijasini quyidagicha yozish mumkin:

$$A^{(2)} = M_{n-2}^{-1}A^{(1)}M_{n-2} = M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \dots & a_{1,n-2}^{(2)} & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{21}^{(2)} & \dots & a_{n-2,n-2}^{(2)} & a_{n-2,n-1}^{(2)} & a_{n-2,n}^{(2)} \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu yerda

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n-1,1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & \dots & -\frac{a_{n-1,n-3}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{1}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n-1}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} & -\frac{a_{n-1,n}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}^{(1)} & a_{n-1,2}^{(1)} & \dots & a_{n-1,n-1}^{(1)} & a_{n-1,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Bundan tashqari

$$b_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i,n-2}^{(1)} \cdot \frac{a_{n-1,j}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}} \quad (j = \overline{1, n}; j \neq n-2),$$

$$b_{i,n-2}^{(1)} = \frac{a_{i,n-2}^{(1)}}{a_{n-1,n-2}^{(1)}}, \quad a_{ij}^{(2)} = b_{ij}^{(1)} \quad (i = \overline{1, n-3}),$$

$$a_{n-2,i}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{n-1,k}^{(1)} b_{kj}^{(1)}.$$

Bu jarayonni davom ettiramiz. Agar $a_{n,n-1} \neq 0$, $a_{n-1,n-2}^{(1)} \neq 0$, ..., $a_{21}^{(n-2)} \neq 0$, bo'lsa, u holda Danilevskiy metodining $(n-1)$ -qadamidan keyin quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A^{(n-1)} = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} \dots M_1 = S^{-1} A S = P =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n-1)} & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Shunday qilib, dastlabki A matritsa $S = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1$ matritsa orqali o'xshash almashtirish yordamida Frobenius normal formasiga keltiriladi va shu bilan xos ko'phad

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \dots - p_{n-1}\lambda - p_n$$

topiladi.

4.4.1 Danilevskiy metodidagi noregulyar hol

Endi noregulyar holni ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, Danilevskiy metodining $(n-k)$ -qadami bajarilsin va shu bilan birga $A^{(n-k)}$ matritsa-ning $a_{k,k-1}^{(n-k)}$ elementi nolga teng bo'lsin. Navbatdagi $(n-k+1)$ -qadamni yuqoridagi usul bilan bajarish mumkin emas. Bu yerda ikki variant bo'lishi mumkin.

1) Faraz qilaylik, $A^{(n-k)}$ matritsada $a_{k,k-1}^{(n-k)}$ elementdan chaproqda, masalan, i -element ($i < k-1$) $a_{ki}^{(n-k)} \neq 0$ bo'lsin. Bunday vaqtda noregulyar holni regulyar holga keltirish mumkin. Buning uchun $A^{(n-k)}$ matritsada $(k-1)$ -ustunni i -ustun bilan va xuddi shu nomerli satrlarni ham o'zaro almashtirish kerak. Bunday almashtirishni quyidagi ko'rinishda yozish mumkinligini bevosita tekshirib ko'rish mumkin:

$$UA^{(n-k)}U,$$

bu yerda

$$(i) \quad (k-1)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (i) \\ \\ \\ (k-1) \end{matrix}$$

$UA^{(n-k)}U$ almashtirish $A^{(n-k)}$ matritsa uchun o'xshash almashtirishdir. Haqiqatan ham, bu almashtirishni ikki marta bajarsak, avvalgi matritsaga kelamiz, demak $U^2 = E$, ya'ni $U = U^{-1}$. Bundan $UA^{(n-k)}U = U^{-1}A^{(n-k)}U$ o'xshash almashtirish ekanligi kelib chiqadi.

Bu almashtirishdan keyin Danilevskiy metodidagi keyingi qadamni regulyar holdagidek bajarishimiz mumkin.

2) Faraz qilaylik,

$$a_{k1}^{(n-k)} = a_{k2}^{(n-k)} = \dots = a_{k,k-1}^{(n-k)} = 0$$

bo'lsin. U holda $A^{(n-k)}$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A^{(n-k)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}^{(n-k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(n-k)} & a_{1k}^{(n-k)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n-k)} & a_{1n}^{(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(n-k)} & a_{k-1,k}^{(n-k)} & \dots & a_{k-1,n-1}^{(n-k)} & a_{k-1,n}^{(n-k)} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(n-k)} & \dots & a_{k,n-1}^{(n-k)} & a_{kn}^{(n-k)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B^{(n-k)} & C^{(n-k)} \\ 0 & P^{(n-k)} \end{bmatrix}.$$

Bu yerda $P^{(n-k)}$ Frobenius normal formasiga ega bo'lgan $(n-k+1)$ -tartibli kvadrat matritsa, $B^{(n-k)}$ esa $(k-1)$ -tartibli kvadrat matritsa.

Laplas teoremasiga ko'ra:

$$\det(A^{(n-k)} - \lambda E) = \det(B^{(n-k)} - \lambda E_{k-1}) \det(P^{(n-k)} - \lambda E_{n-k+1}), \quad (4.4.1)$$

ya'ni $P^{(n-k)}$ matritsaning xos ko'phadi A matritsa xos ko'pqadining bo'luvchisidir. (4.4.1) tenglikdan ko'ramizki, A matritsaning xos ko'phadini topish uchun yana $B^{(n-k)}$ matritsaning xos ko'phadini topish kerak. Buni esa yuqorida keltirilgan metod bilan bajarish mumkin. Danilevskiy metodi xos ko'phadni topish metodlari orasida eng tejamkor metoddir. Hisoblash jarayonini nazorat qilish uchun topilgan p_1 koeffitsiyentni matritsaning izi bilan taqqoslash kerak.

4.4.2 Danilevskiy metodi bilan xos vektorni hisoblash

Agar A matritsaning xos sonlari ma'lum bo'lsa, A.M.Danilevskiy metodi bilan uning xos vektorlarini aniqlash mumkin. Faraz qilaylik, λ son A matritsaning va demak, unga o'xshash bo'lgan P Frobenius matritsasining xos soni bo'lsin.

P matritsaning berilgan xos soniga tegishli bo'lgan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ xos vektorni topamiz. $P\bar{y} = \lambda\bar{y}$ bo'lganligi uchun $(P - \lambda E)\bar{y} = \bar{0}$ yoki

$$\begin{bmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Bundan esa $\bar{y}$ xos vektorning $y_1, y_2, \dots, y_n$ kordinatalarini topish uchun quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} (p_1 - \lambda)y_1 + p_2y_2 + \dots + p_ny_n = 0, \\ y_1 - \lambda y_2 = 0, \\ y_2 - \lambda y_3 = 0, \\ \vdots \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0. \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Bu sistemadan

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= \lambda y_n, \\ y_{n-2} &= \lambda^2 y_n, \\ &\vdots \\ y_1 &= \lambda^{n-1} y_n \end{aligned}$$

ni topamiz. Xos vektor xossasiga ko'ra $y_n = 1$ deb olishimiz mumkin, u holda

$$\begin{cases} y_n = 1, \\ y_{n-1} = \lambda, \\ y_{n-2} = \lambda^2, \\ \vdots \\ y_1 = \lambda^{n-1} \end{cases} \quad (4.4.3)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, izlanayotgan xos vektor $\bar{y} = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, 1)'$ ko'rinishga ega. (4.4.3) ni (4.4.2) sistemaning birinchi tenglamasiga olib borib qo'ysak, u

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu esa hisoblash jarayonini kontrol qilishga xizmat qiladi. O'xshash almashtirish matritsasi S ma'lum bo'lsa, A matritsaning xos vektorini topish qiyin emas. Haqiqatan ham, agar $\bar{x}$ vektor A matritsaning λ xos soniga mos keladigan xos vektori bo'lsa, u holda $\bar{x} = S\bar{y}$ bo'ladi, chunki $P\bar{y} = \lambda\bar{y}$ va $P = S^{-1}AS$ bo'lganligi uchun $S^{-1}AS\bar{y} = \lambda\bar{y}$ dir. Bu tenglikning har ikkala tomonini S ga chapdan ko'paytirsak, $AS\bar{y} = \lambda S\bar{y}$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, S matritsa ma'lum bo'lsa, A matritsaning xos vektorini topish qiyin emas. Danilevskiy metodining regulyar holda va no-regulyar holining birinchi variantida S matritsani bevosita yozish mumkin. Masalan, regulyar holda

$$S = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1.$$

M_i ($i = \overline{1, n-1}$) matritsalar birlik matritsadan faqat bitta satri bilan farq qilganligi uchun

$$\bar{x} = S\bar{y} = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1 \bar{y} \quad (4.4.4)$$

vektorni topayotganda avval $S = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1$ ko'paytmani topmasdan $\bar{y}$ vektorni ketma-ket $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ matritsalariga ko'paytirish ma'quldir. Vektorni M_i ga ko'paytirilganda vektorning faqat bitta koordinatasi o'zgaradi.

Danilevskiy metodidagi noregulyar holning ikkinchi variantida matritsaning xos vektorini bu yo'l bilan topib bo'lmaydi. Bunday holda xos vektorni Krilov metodida ko'rsatilgan usul bilan topish ma'quldir.

Misol 4.4. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 23 & -9 & -2 & 0 \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 23 & -9 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos sonlari va xos vektorlari topilsin.

Yechish: Danilevskiy metodi yordamida quyilagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= M_3^{-1} A M_3 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 & -9 & -2 & 0 \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 23 & -9 \\ 0 & -8 & -4 & 23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 23 & -5 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ -4 & 23 & 0 & -2 \\ 64 & 0 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bu yerda Danilevskiy metodidagi noregulyar holning birinchi variantiga duch keldik. Shuning uchun ham $A^{(1)}$ matritsani chap va o'ng tomonidan

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaga ko'paytiramiz, unda 1- va 2-ustunlarning o'rinlari o'zaro al-mashinadi:

$$U A^{(1)} U = \begin{bmatrix} 23 & -4 & 0 & -2 \\ -5 & 23 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu matritsaga Danilevskiy metodining navbatdagi qadamini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
 A^{(2)} &= M_2^{-1} U A^{(1)} U M_2 = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 & -4 & 0 & -2 \\ -5 & 23 & \frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 64 & 46 & -477 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & -\frac{46}{64} & \frac{477}{64} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 23 & -\frac{1}{16} & \frac{46}{16} & -\frac{509}{16} \\ -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^{(3)} &= M_1^{-1} A^{(2)} M_1 = \\
 &= \begin{bmatrix} -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 & -\frac{1}{16} & \frac{46}{16} & -\frac{509}{16} \\ -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{69}{320} & -\frac{1503}{320} & \frac{10235}{320} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -\frac{1}{16} & \frac{46}{16} & -\frac{509}{16} \\ -320 & 69 & -1503 & 10235 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \lambda^4 - 92\lambda^3 + 3070\lambda^2 - 43884\lambda + 225225 = \\
 &= (\lambda - 13)(\lambda - 21)(\lambda - 25)(\lambda - 33)
 \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. Bundan esa xos sonlarni topamiz:

$$\lambda_1 = 13, \lambda_2 = 21, \lambda_3 = 25, \lambda_4 = 33.$$

Endi xos vektorlarni topamiz. bu yerda $S = M_3 U M_2 M_1$ bo'lganligi uchun (4.4.3) va (4.4.4) formulalarga ko'ra

$$\bar{x}^{(1)} = M_3 U M_2 M_1 \bar{y} = M_3 U M_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{69}{320} & -\frac{1503}{320} & \frac{10235}{320} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13^3 \\ 13^2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= M_3 U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} & -\frac{46}{64} & \frac{477}{64} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 13^2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= M_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Shunday qilib, $\bar{x}^{(1)} = (3, 2, 6, 4)'$. Shu yo'l bilan hisoblab, qolgan xos vektorlarni ham topamiz:

$$\bar{x}^{(2)} = (3, 2, -6, 4)', \quad \bar{x}^{(3)} = (3, -2, 6, -4)', \quad \bar{x}^{(4)} = (3, -2, -6, 4)'.$$

4.5-§. Lever'e metodi

A matritsa uchun

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n \quad (4.5.1)$$

xos ko'phadning ildizlarini $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bilan, shu ildizlarning simmetrik funksiyalarini esa S_k bilan belgilaymiz:

$$S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (4.5.2)$$

Xos ko'phadning koeffitsiyentlari $p_1, p_2, \dots, p_n$ bilan S_k larni bog'laydigan quyidagi *Nyuton formulalari* mavjud:

$$S_k - p_1 S_{k-1} - \dots - p_{k-1} S_1 - k p_k = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (4.5.3)$$

Bu formulalardan keyinchalik ham foydalanamiz. Ularni isbotlash uchun $P(\lambda)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Bu tenglikni differensiallasak,

$$P'(\lambda) \equiv \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda - \lambda_j) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \quad (4.5.4)$$

ayniyat kelib chiqadi. Bu ayniyatning o'ng tomonini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} &= \lambda^{n-1} + (-p_1 + \lambda_i)\lambda^{n-2} + (-p_2 - p_1\lambda_i + \lambda_i^2)\lambda^{n-3} + \dots \\ &+ (-p_{n-1} - p_{n-2}\lambda_i - \dots - p_1\lambda_i^{n-2} + \lambda_i^{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Ikkinchi tomondan

$$P'(\lambda) = n\lambda^{n-1} - (n-1)p_1\lambda^{n-2} - (n-2)p_2\lambda^{n-3} - \dots - p_{n-1}$$

ni hisobga odib, (4.5.4) ayniyatni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} P'(\lambda) &= n\lambda^{n-1} - (n-1)p_1\lambda^{n-2} - (n-2)p_2\lambda^{n-3} - \dots - p_{n-1} \equiv \\ &\equiv n\lambda^{n-1} + (-np_1 + S_1)\lambda^{n-2} + (-np_2 - p_1S_1 + S_2)\lambda^{n-3} + \\ &+ (-np_3 - p_2S_1 - p_1S_2 + S_3)\lambda^{n-4} + \dots + (-np_{n-1} - p_{n-2}S_1 - p_{n-3}S_2 - \\ &\dots - p_1S_{n-2} + S_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Bundan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(n-1)p_1 = -np_1 + S_1, \\ -(n-2)p_2 = -np_2 - p_1S_1 + S_2, \\ -(n-3)p_3 = -np_3 - p_2S_1 - p_1S_2 + S_3, \\ \vdots \\ -p_{n-1} = -np_{n-1} - p_{n-2}S_1 - \dots - p_1S_{n-2} + S_{n-1}. \end{array} \right. \quad (4.5.7)$$

Bu tengliklarni soddalashtirsak:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 - p_1 = 0, \\ S_2 - p_1S_1 - 2p_2 = 0, \\ S_3 - p_1S_2 - p_2S_1 - 3p_3 = 0, \\ \vdots \\ S_{n-1} - p_1S_{n-2} - \dots - p_{n-2}S_1 - (n-1)p_{n-1} = 0. \end{array} \right. \quad (4.5.8)$$

Bulardan ketma-ket $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ larni aniqlaymiz.

p_n ni hosil qilish uchun quyidagilardan foydalanamiz:

$$P(\lambda_1) = \lambda_1^n - p_1\lambda_1^{n-1} - \dots - p_{n-1}\lambda_1 - p_n = 0,$$

$$P(\lambda_2) = \lambda_2^n - p_1\lambda_2^{n-1} - \dots - p_{n-1}\lambda_2 - p_n = 0,$$

$$\vdots$$

$$P(\lambda_n) = \lambda_n^n - p_1 \lambda_n^{n-1} - \dots - p_{n-1} \lambda_n - p_n = 0.$$

Endi bularni qo'shib,

$$S_n - p_1 S_{n-1} - \dots - p_{n-1} S_1 - np_n = 0 \quad (4.5.9)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik (4.5.8) bilan birga *Nyuton formulalarini* beradi.

Xos ko'phad koeffitsiyentlarini (4.5.8)–(4.5.9) lardan foydalanib ketma-ket quyidagicha hosil qilamiz:

$$\begin{cases} p_1 = S_1, \\ p_2 = \frac{1}{2}(S_2 - p_1 S_1), \\ \vdots \\ p_n = \frac{1}{n}(S_n - p_1 S_{n-1} - \dots - p_{n-1} S_1). \end{cases} \quad (4.5.10)$$

Agar $S_1, S_2, \dots, S_n$ ma'lum bo'lsa, bu formulalar yordamida $p_1, p_2, \dots, p_n$ topiladi. Ma'lumki, S_1 bu A matritsaning iziga teng:

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr} A.$$

Ikkinchi tomondan $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ lar $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ matritsaning xos sonlari ekanligini ham bilamiz, shuning uchun ham

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = \text{tr} A^k = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(k)}.$$

Shunday qilib, $P(\lambda)$ xos ko'phadning koeffitsiyentlarini topish uchun $A^2, A^3, \dots, A^n$ matritsalarini hosil qilib, ularning izi $S_k = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(k)}$ ($k = \overline{1, n}$) ni topish kerak.

Matritsa izini topish uchun bu matritsaning faqat diagonal elementlarini bilish kifoyadir. Shuning uchun ham $m = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ deb olib, $A^2, A^3, \dots, A^m$ ni hosil qilish hamda $A^{m+1}, A^{m+2}, \dots, A^n$ matritsalarining faqat diagonal elementlarini hisoblash kerak. Bu esa hisoblashni ancha qisqartiradi.

Shunga qaramasdan Lever'e metodi juda ko'p mehnat talab qiladi.

Misol 4.5. *Lever'e metodi bilan*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matritsaning xarakteristik ko'phadi topilsin.

Yechish: Bu yerda $m = \left[\frac{4+1}{2}\right] = 2$ bo'lganligi uchun A^2 ni hisoblab, A^3 va A^4 larning faqat diagonal elementlarini topamiz:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 17 & & \\ & & 35 & \\ & & & -10 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 10 \\ 6 & 6 & 15 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129 & & & \\ & 108 & & \\ & & 159 & \\ & & & 148 \end{bmatrix}.$$

Demak, bu yerdan

$$\begin{cases} S_1 = \text{tr} A = -1 + 1 + 2 - 2 = 0, \\ S_2 = \text{tr} A^2 = 9 + 6 + 8 + 11 = 34, \\ S_3 = \text{tr} A^3 = 3 + 17 + 35 - 10 = 45, \\ S_4 = \text{tr} A^4 = 129 + 108 + 159 + 148 = 542. \end{cases}$$

Endi (4.5.10) formulalar yordamida

$$\begin{cases} p_1 = S_1 = 0, \\ p_2 = \frac{1}{2}(S_2 - p_1 S_1) = 17, \\ p_3 = \frac{1}{3}(S_3 - p_1 S_2 - p_2 S_1) = 15, \\ p_4 = \frac{1}{4}(S_4 - p_1 S_3 - p_2 S_2 - p_3 S_1) = -9. \end{cases}$$

larni topamiz.

Demak,

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 17\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

berilgan matritsaning xarakteristik ko'phadidir. ■

4.6-§. Faddeyev metodi

D.K. Faddeyev Lever'e metodini shunday takomillashtirdiki, natijada berilgan A matritsaning xos ko'phadini topish bilan bir vaqtda unga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani hamda A matritsaning xos vektorlarini ham topish mumkin bo'ladi.

Lever'e metodidagi $A, A^2, \dots, A^n$ matritsalar ketma-ketligi o'rnidagi ushbu $A_1, A_2, \dots, A_n$ ketma-ketlikni D.K. Faddeyev quyidagicha aniqlaydi:

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \operatorname{tr} A_1 = q_1, B_1 = A_1 - q_1 E, \\ A_2 &= AB_1, \frac{\operatorname{tr} A_2}{2} = q_2, B_2 = A_2 - q_2 E, \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= AB_{n-2}, \frac{\operatorname{tr} A_{n-1}}{n-1} = q_{n-1}, B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1} E, \\ A_n &= AB_{n-1}, \frac{\operatorname{tr} A_n}{n} = q_n, B_n = A_n - q_n E. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Bu yerda quyidagilarni isbotlaymiz:

- a) $q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_n = p_n$;
- b) B_n nol matritsa;
- c) agar A maxsusmas matritsa bo'lsa, u holda

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}}{p_n}.$$

Matematik induksiya metodi bilan avval a) ni isbotlaymiz. Ravshanki, $p_1 = \operatorname{tr} A = q_1$. Endi faraz qilaylik, $q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_{k-1} = p_{k-1}$ bo'lsin, u holda $q_k = p_k$ ekanligini ko'rsatamiz. (4.6.1) dan va yuqoridagi farazdan quyidagini hosil qilamiz:

$$A_k = A^k - q_1 A^{k-1} - \dots - q_{k-1} A = A^k - p_1 A^{k-1} - \dots - p_{k-1} A.$$

Demak,

$$\operatorname{tr} A_k = k q_k = \operatorname{tr} A^k - p_1 \operatorname{tr} A^{k-1} - \dots - p_{k-1} \operatorname{tr} A = S_k - p_1 S_{k-1} - \dots - p_{k-1} S_1.$$

Bu yerdan Nyuton formulalari (4.5.3) ga ko'ra $k q_k = k p_k$, ya'ni $q_k = p_k$. Bu esa birinchi tasdiqni isbotlaydi.

Ikkinchi tasdiqni isbotlash uchun Gamilton-Keli teoremasidan foydalanamiz:

$$B_n = A_n - p_n E = A^n - p_1 A^{n-1} - \dots - p_n E = 0$$

Bu tenglikka ko'ra $A_n = p_n E$, (4.6.1) dan esa $A_n = A \cdot B_{n-1}$ Demak,

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1}^{-1}}{p_{n-1}}.$$

Shu bilan uchinchi tasdiq ham isbotlandi. Yuqorida hosil qilingan $A_n = p_n E$ tenglik kontrol vazifasini bajaradi, agar A_n matritsa skalyar $p_n E$ matritsadan qancha kam farq qilsa, hisoblash shuncha yaxshi olib borilgan bo'ladi.

Misol 4.6. *Quyidagi*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos ko'phadini va A^{-1} ni topamiz.

Yechish: (4.6.1) formulaga ko'ra

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_3 = 3, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = AB_1 = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad p_2 = 14, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Demak, $p_3 = 8$ bo'lib,

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 14\lambda - 8$$

va

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Endi xos vektorlarni topish masalasini ko'raylik. Yuqorida aniqlangan $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ matritsalaridan foydalanib,

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} E + \lambda^{n-2} B_1 + \lambda^{n-3} B_2 + \dots + B_{n-1}$$

matritsani tuzamiz. Agar A matritsaning barcha $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ xos sonlari bir-biridan farqli bo'lsa, u holda $Q(\lambda_k)$ matritsalar nol matritsa emasligini ko'rsatish mumkin. Endi $Q(\lambda_k)$ matritsaning har bir ustuni A matritsaning λ_k xos soniga mos keladigan xos vektordan iborat ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham $B_j - AB_{j-1} = -p_j E$ ($j = \overline{1, n}$) va λ_k xos ko'phadning ildizi bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} (\lambda_k E - A)Q(\lambda_k) &= (\lambda_k E - A)(\lambda_k^{n-1} E + \lambda_k^{n-2} B_1 + \dots + \lambda_k B_{n-2} + B_{n-1}) = \\ &= \lambda_k^n E + \lambda_k^{n-1}(B_1 - A) + \dots + \lambda_k(B_{n-1} - AB_{n-2}) - AB_{n-1} = \\ &= (\lambda_k^n - p_1 \lambda_k^{n-1} - \dots - p_n)E = 0, \end{aligned}$$

ya'ni

$$(\lambda_k E - A)Q(\lambda_k) = 0,$$

bundan esa

$$(\lambda_k E - A)\bar{x} = 0$$

yoki

$$A\bar{x} = \lambda_k \bar{x}$$

kelib chiqadi, bu yerda $\bar{x}$ vektor $Q(\lambda_k)$ matritsaning ixtiyoriy ustuni. Albatta, xos vektorni topish uchun $Q(\lambda_k)$ matritsaning hamma ustunlarini emas, balki uning biror ustunini topish kifoyadir. $Q(\lambda_k)$ matritsaning $\bar{u}$ ustunini quyidagi rekurrent formuladan aniqlash ma'quldir:

$$\bar{u}_0 = \bar{e}, \quad \bar{u}_i = \lambda_k \bar{u}_{i-1} + \bar{b}_i,$$

bu yerda $\bar{b}_i$ vektor B_i , matritsaning biror ustuni bo'lib, $\bar{e}$ esa birlik matritsaning shu nomerli ustunidir. Bu holda

$$\bar{u} = \bar{u}_{n-1}.$$

4.7-§. Noaniq koeffitsiyentlar metodi

Xarakteristik ko'phadni yozish murakkab masala ekanligini aytib o'tgan edik. Noaniq koeffitsiyentlar metodi mana shu murakkab masalani ancha soddashtirishga, ya'ni $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ ni $\lambda = 0, 1, \dots, n-1$ qiymatlarda hisoblash va bitta sonli matritsaning teskarisini topishga olib keladi. Oldingi bobdagi metodlarning birortasini qo'llab, $D(0), D(1), \dots, D(n-1)$ ni hisoblaymiz, natijada xos ko'phadning

$p_1, p_2, \dots, p_n$ koeffitsiyentlarini topish uchun quyidagi chiziqli *algebraik* tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} p_n = (-1)^{n-1} D(0), \\ (-1)^n (1^n - p_1 \cdot 1^{n-1} - p_2 \cdot 1^{n-2} - \dots - p_n) = D(1), \\ (-1)^n (2^n - p_1 \cdot 2^{n-1} - p_2 \cdot 2^{n-2} - \dots - p_n) = D(2), \\ \vdots \\ (-1)^n ((n-1)^n - p_1 \cdot (n-1)^{n-1} - p_2 \cdot (n-1)^{n-2} - \dots - p_n) = D(n-1). \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Bu yerdan esa

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = 1 + (-1)^n (D(0) - D(1)), \\ p_1 2^{n-1} + p_2 2^{n-2} + \dots + p_{n-1} 2 = 2^n + (-1)^n (D(0) - D(2)), \\ \vdots \\ p_1 (n-1)^{n-1} + p_2 (n-1)^{n-2} + \dots + p_{n-1} (n-1) = \\ = (n-1)^n + (-1)^n (D(0) - D(n-1)). \end{cases} \quad (4.7.2)$$

Bu sistemani yechib, xos ko'phad koeffitsiyentlari $p_1, p_2, \dots, p_n$ ni topib olamiz. Quyidagi matritsa

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^{n-1} & 2^{n-2} & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)^{n-1} & (n-1)^{n-2} & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

va

$$d = \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n (D(0) - D(1)) \\ 2^n + (-1)^n (D(0) - D(2)) \\ \vdots \\ (n-1)^n + (-1)^n (D(0) - D(n-1)) \end{bmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

vektorlarni kiritib, (4.7.2) sistemani matritsali tenglama shaklida yozib olamiz:

$$B_{n-1} \bar{p} = \bar{d}.$$

Bundan esa

$$\bar{p} = B_{n-1}^{-1} \bar{d}. \quad (4.7.3)$$

Shuni ham ta'kidlab o'tish kerakki, bu metod bilan bir nechta bir xil tartibli matritsalarining ko'phadini topish qulaydir, teskari matritsa faqat xarakteristik determinantning tartibiga bog'liq bo'lib, uni oldindan topib qo'yish mumkin.

Misol 4.7. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matritsaning ros ko'phadi topilsin.

Yechish: Gauss metodi bilan avval

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 \end{bmatrix}$$

matritsaning teskarisini topamiz:

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{-5}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

So'ngra quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} D(0) &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9, & D(1) &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -22, \\ D(2) &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -73, & D(3) &= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -108. \end{aligned}$$

Endi (4.7.3) tenglikka ko'ra

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{-5}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ 3 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 32 \\ 98 \\ 198 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ni topamiz. Demak,

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 17\lambda^2 - 15\lambda + 9$$

berilgan matritsaning xarakteristik ko'phadidir. ■

4.8-§. Hoshiyalash metodi

Ma'lumki, n - tartibli $A = A_n$ kvadrat matritsaning xarakteristik ko'phadi

$$D(\lambda) = D_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

ni topish n ortgan sari qiyinlashib boradi. Lekin $D_n(\lambda)$ bilan $(n-1)$ - tartibli A_{n-1} kvadrat matritsaning xarakteristik ko'phadi orasida rekurrent munosabat o'rnatib, $D_n(\lambda)$ ni topish masalasini $D_2(\lambda)$ ni topishga keltirish mumkin. Buning uchun biz oliy algebradan ayrim ma'lumotlar keltiramiz. Berilgan $A = [a_{ij}]$ matritsaga biriktirilgan matritsa deb,

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.8.1)$$

matritsaga aytiladi, bu yerda A_{ij} lar a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchisidir. Matritsalarini ko'paytirish qoidasidan

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix} = d \cdot E \quad (4.8.2)$$

kelib chiqadi, bu yerda $d = \det A$.

Endi hoshiyalash metodini tushuntirishga o'tamiz. Buning uchun A_n matritsani

$$A = A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \bar{u}^{(n-1)} \\ \bar{v}^{(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.8.3)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda

$$\bar{u}^{(n-1)} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n})',$$

$$\bar{v}^{(n-1)} = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-1}).$$

Endi $A_n - \lambda E_n$ matritsaga biriktirilgan matritsani $C(\lambda) = C_n(\lambda) = [\bar{c}_{ij}(\lambda)]$ orqali belgilab, (4.8.1) tenglikdan

$$\bar{c}_{nn}(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)$$

ekanligini ko'ramiz, (4.8.3) tenglikdagidek, $C_n(\lambda)$ ni ham kataklarga bo'lamiz:

$$C_n(\lambda) = \begin{bmatrix} C_{n-1}(\lambda) & \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) \\ \bar{h}^{(n-1)}(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Bu yerda

$$\bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = (c_{n1}(\lambda), c_{n2}(\lambda), \dots, c_{n,n-1}(\lambda))',$$

$$\bar{h}^{(n-1)}(\lambda) = (c_{1n}(\lambda), c_{2n}(\lambda), \dots, c_{n-1,n}(\lambda))$$

bo'lib, $D_{n-1}(\lambda)$ esa A_{n-1} matritsaning xarakteristik ko'phadidir. (4.8.1)-(4.8.2) tenglikdan

$$(A_n - \lambda E) C_n(\lambda) = D_n(\lambda) E_n$$

yoki

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} - \lambda E_{n-1} & \bar{u}^{(n-1)} \\ \bar{v}^{(n-1)} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n-1}(\lambda) & \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) \\ \bar{h}^{(n-1)}(\lambda) & D_{n-1}(\lambda) \end{bmatrix} = D_n(\lambda) E_n$$

ga ega bo'lamiz. Bundan esa quyidagi

$$\begin{cases} (A_{n-1} - \lambda E_{n-1}) \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + \bar{u}^{(n-1)} D_{n-1}(\lambda) = \bar{0}, \\ \bar{v}^{(n-1)} \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + (a_{nn} - \lambda) D_{n-1}(\lambda) = D_n(\lambda). \end{cases} \quad (4.8.4)$$

tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklarning birinchisidan $\bar{g}^{(n-1)}(\lambda)$ ni topamiz. Buning uchun birinchi tenglikni

$$\lambda \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = A_{n-1} \bar{g}^{(n-1)}(\lambda) + \bar{u}^{(n-1)} D_{n-1}(\lambda) \quad (4.8.5)$$

shaklda yozib olish ma'quldir. Bu tenglikdan

$$D_{n-1}(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_1 \lambda^{n-2} + q_2 \lambda^{n-3} + \dots + q_{n-1} \quad (4.8.6)$$

bo'lganligi uchun, ko'ramizki, $\bar{g}^{(n-1)}(\lambda)$ vektor λ ga nisbatan $(n-2)$ - darajali vektor-ko'phaddir:

$$\bar{g}^{(n-1)}(\lambda) = \bar{b}_0^{(n-1)} \lambda^{n-2} + \bar{b}_1^{(n-1)} \lambda^{n-3} + \dots + \bar{b}_{n-2}^{(n-1)}. \quad (4.8.7)$$

Buni va (4.8.6) ni (4.8.5) ga qo'yib, λ ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarini solishtirsak, $\bar{b}_j^{(n-1)}$ ($j = \overline{0, n-2}$) lar uchun quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \bar{b}_0^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \bar{u}^{(n-1)}, \\ \bar{b}_1^{(n-1)} = A_{n-1} \bar{b}_0^{(n-1)} + q_1 \bar{u}^{(n-1)}, \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-2}^{(n-1)} = A_{n-1} \bar{b}_{n-3}^{(n-1)} + q_{n-2} \bar{u}^{(n-1)}. \end{cases} \quad (4.8.8)$$

Shunday qilib, bevosita $D_2(\lambda)$ ni hisoblab, keyin ketma-ket $D_3(\lambda)$, $D_4(\lambda)$, ..., $D_n(\lambda)$ larni hisoblaymiz.

Misol 4.8. *Quyidagi*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning xarakteristik ko'phadi topilsin.

Yechish: Avvalo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsani olamiz va $D_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ dan foydalanib, $\bar{g}^{(2)}(\lambda)$ ning koeffitsiyentlarini (4.8.8) dan topamiz:

$$\bar{b}_0^{(2)} = \bar{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Endi $\bar{g}^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ni (4.8.4) ga qo'yib, $D_3(\lambda)$ ni hosil qilamiz:

$$D_3(\lambda) = [3, 2] \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) + (1 - \lambda) (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 14\lambda + 8.$$

Endi $A_4 = A$ deb olib, $\bar{g}^{(3)}(\lambda)$ ni topamiz:

$$\bar{b}_0^{(3)} = - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_1^{(3)} = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_2^{(3)} = - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} + 14 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix},$$

$$\bar{g}^{(3)}(\lambda) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Nihoyat, $D_4(\lambda)$ ni topamiz:

$$D_4(\lambda) = [4, 3, 2] \left(- \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \\ + (1 - \lambda) (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 14\lambda + 8) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20.$$

4.9-§. Xos sonlarning qisman muammosini yechishning iteratsion metodlari

Bu paragrafda biz xos sonlarning qisman muammosini yechishning eng sodda metodlarini ko'rib chiqamiz. Bundan tashqari qaraladigan matritsalarimiz oddiy strukturaga ega deb faraz qilamiz.

Ta'rif 4.1. Agar n - tartibli A kvadrat matritsa n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo'lsa, bunday matritsa oddiy strukturaga ega deyiladi.

Chiziqli algebradan ma'lumki, matritsalarining quyidagi sinflari oddiy strukturaga ega:

1. **Simmetrik matritsa**, chunki uning xos qiymatlari haqiqiy sonlar bo'lib, xos vektorlardan tuzilgan ortogonal bazis mavjuddir.
2. **Ermit matritsasi**, uning barcha xos sonlari haqiqiy bo'lib, xos vektorlaridan mos ravishdagi n o'lchovli kompleks fazoda ortonormal bazis tuzish mumkin.
3. **Normal matritsa**. Agar A matritsa o'zining qo'shmasi A^* bilan kommutativ, ya'ni $AA^* = A^*A$ bo'lsa, u holda A matritsa normal deyiladi. Umuman olganda, bu uchta sinfga tegishli matritsalaridan tashqari oddiy strukturaga ega bo'lgan boshqa matritsalar ham mavjud.

Biz avval moduli bo'yicha eng katta xos son va unga mos kelgan xos vektorni topish bilan shug'ullanamiz. Keyin esa moduli bo'yicha kattalik jihatdan ikkinchi o'rinda turgan xos son va unga mos keladigan xos vektorni topamiz.

4.9.1 Eng katta xos son va unga mos keladigan xos vektorni topishda darajali metod

Faraz qilaylik, A matritsa oddiy strukturaga ega va uning xos sonlari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bo'lib, ularga mos keladigan chiziqli erkli xos vektorlar $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)}$, bo'lsin. Bu yerda to'rt holni ko'rib chiqamiz:

1-hol. A matritsaning xos sonlaridan bittasi moduli bo'yicha eng katta bo'lsin. Umumiylikka zarar yetkazmasdan xos sonlar quyidagi tartibda joylashgan deb faraz qilishimiz mumkin:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (4.9.1)$$

Biz λ_1 ning taqribiy qiymatini topish usulini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy noldan farqli $\bar{y}^{(0)}$ vektorni olib, uni A matritsa xos vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{y}^{(0)} = b_1 \bar{x}^{(1)} + b_2 \bar{x}^{(2)} + \dots + b_n \bar{x}^{(n)}.$$

Bu yerda b_i lar o'zgarmas sonlar bo'lib, ayrimlari nol bo'lishi ham mumkin. $\bar{y}^{(0)}$ vektor ustida A^k matritsa yordamida almashtirish bajaramiz:

$$\bar{y}^{(k)} = A^k \bar{y}^{(0)} = \sum_{j=1}^n b_j A^k \bar{x}^{(j)}.$$

Bu yerdan $A^k \bar{x}^{(j)} = \lambda_j^k \bar{x}^{(j)}$ ekanligini hisobga olib,

$$\bar{y}^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j^k \bar{x}^{(j)} \quad (4.9.2)$$

ga ega bo'lamiz.

Endi n o'lchovli vektorlar fazosi R_n da ixtiyoriy $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ bazis olamiz. Shu bazisda

$$\bar{y}^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)} \right)',$$

$$\bar{x}^{(j)} = \left(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj} \right)'$$

bo'lsin. (4.9.2) tenglikni koordinatalarda yozib chiqamiz:

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} \lambda_j^k \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.9.3)$$

Shunga o'xshash

$$y_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} \lambda_j^{k+1} \quad (4.9.4)$$

Bu yerda $c_{ij} = b_j x_{ij}$ deb belgilab, (4.9.4) ni (4.9.3) ga bo'lamiz:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \frac{c_{i1} \lambda_1^{k+1} + c_{i2} \lambda_2^{k+1} + \dots + c_{in} \lambda_n^{k+1}}{c_{i1} \lambda_1^k + c_{i2} \lambda_2^k + \dots + c_{in} \lambda_n^k} \quad (4.9.5)$$

Faraz qilaylik, $c_{i1} \neq 0$ bo'lsin, bunga erishish uchun dastlabki vektor $\bar{y}^{(0)}$ va $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ bazisni kerakli ravishda tanlash kerak. Endi $d_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i1}}$ va $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ deb (4.9.5) ni quyidagicha yoyamiz:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + d_{i2} \mu_2^{k+1} + \dots + d_{in} \mu_n^{k+1}}{1 + d_{i1} \mu_2^k + \dots + d_{in} \mu_n^k} \quad (4.9.6)$$

Bu yerdan esa (4.9.1) ni hisobga olsak, $k \rightarrow \infty$ da $\mu_n^k \leq \dots \leq \mu_2^k \rightarrow 0$ kelib chiqadi.

Demak, (4.9.6) ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} &= \lambda_1 \left[1 + O(|\mu_2|^{k+1}) \right] \left[1 + O(|\mu_2|^k) \right]^{-1} = \lambda_1 \left[1 + O(|\mu_2|^k) \right] = \\ &= \lambda_1 + O(|\mu_2|^k). \end{aligned}$$

Bu yerdan esa yetarlicha katta k lar uchun

$$\lambda_1 \approx \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^k} \quad (4.9.7)$$

deb olishimiz mumkin. Odatda $\bar{x}^{(1)}$ vektorning bir necha koordinatalari noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun (4.9.7) da nisbatni i ning bir necha qiymatida hisoblash mumkin. Agar bu nisbatlar yetarli aniqlikda ustma-ust tushsa, u holda biz λ_1 ni yetarli aniqlik bilan topgan bo'lamiz. Ravshanki, bu jarayonning yaqinlashish tezligi μ_2 ning kichikligiga bog'liqdir.

Eslatma. Yuqoridagi iteratsion jarayonning yaqinlashishini tezlashtirish uchun ayrim hollarda quyidagi matritsalar ketma-ketligini tuzish foydalidir:

$$A^2 = A \cdot A,$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2,$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4,$$

$$\vdots$$

$$A^{2^m} = A^{2^{m-1}} \cdot A^{2^{m-1}}.$$

Bu yerdan esa $k = 2^m$ deb olib,

$$\bar{y}^{(k)} = A^k \bar{y}^{(0)}$$

va

$$\bar{y}^{(k+1)} = A \bar{y}^{(k)}$$

ga ega bo'lamiz.

Topilgan eng katta xos son λ_1 ga mos keladigan xos vektor sifatida $\bar{y}^{(k)}$ ni olishimiz mumkin. Haqiqatan ham, (4.9.3) formuladan

$$\bar{y}^{(k)} = b_1 \lambda_1^k \bar{x}^{(1)} + \sum_{j=2}^n b_j \lambda_j^k \bar{x}^{(j)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\bar{y}^{(k)} = b_1 \lambda_1^k \left\{ \bar{x}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \frac{b_j}{b_1} \mu_j^k \bar{x}^{(j)} \right\}.$$

Agar biz $\mu_j^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ekanligini hisobga olsak, u holda yetarli aniqlik bilan

$$\bar{y}^{(k)} \approx b_1 \lambda_1^k \bar{x}^{(1)}$$

ga ega bo'lamiz, ya'ni $\bar{y}^{(k)}$ xos vektor $\bar{x}^{(1)}$ dan sonli ko'paytuvchi bilan farq qilyapti va, demak, u λ_1 xos songa mos keladigan xos vektordir.

Misol 4.9. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning eng katta xos soni va unga mos keladigan xos vektori topilsin.

Yechish: Dastlabki $\bar{y}^{(0)} = (2, -1, -1)'$ vektorni olib, uning iteratsiyasini hosil qilamiz.

Natija jadval 4.1 da keltirilgan.

$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$A^2\bar{y}$	$A^3\bar{y}$	$A^4\bar{y}$	$A^5\bar{y}$	$A^6\bar{y}$	$A^7\bar{y}$
2	11	61	336	1842	10071	54981	299916
-1	-6	-31	-162	-861	-4626	-25011	-135702
-1	-2	-8	-39	-201	-1062	-5688	-30699

davomi

$A^8\bar{y}$	$A^9\bar{y}$	$A^{10}\bar{y}$	$A^{11}\bar{y}$	$A^{12}\bar{y}$
1635288	8914131	48586477	264798094	1442094008
-737711	-4015822	-21865709	-119103538	-648894351
-166401	-904112	-4919934	-26785643	-145889181

Jadval 4.1

Iteratsiyani shu yerda to'xtatib

$$\frac{y_1^{(12)}}{y_1^{(11)}} = \frac{1442094008}{264798094} = 5,4460; \quad \frac{y_2^{(12)}}{y_2^{(11)}} = \frac{648894351}{119103538} = 5,4481;$$

$$\frac{y_3^{(12)}}{y_3^{(11)}} = \frac{145889181}{26785643} = 5,4400$$

ga ega bo'lamiz. Demak, λ_1 ning taqribiy qiymati

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} (5,4460 + 5,4481 + 5,4400) = 5,4447 \approx 5,445$$

ga teng. A matritsaning birinchi xos vektori sifatida

$$\bar{y}^{(12)} = \begin{bmatrix} 1442094008 \\ -648894351 \\ -145889181 \end{bmatrix}$$

ni olishimiz mumkin. Bu vektorni normallashtirgandan so'ng

$$\bar{x}^{(1)} = (1; -0,46; -0,10)'$$

kelib chiqadi.

2-hol. A matritsa xos sonining moduli bo'yicha eng kattasi karrali bo'lsin. Faraz qilaylik,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s,$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_{s+1}| \geq |\lambda_{s+2}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

bo'lsin. Bu holda (4.9.5) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \frac{(c_{i1} + \dots + c_{is}) \lambda_1^{k+1} + c_{i,s+1} \lambda_{s+1}^{k+1} + \dots + c_{in} \lambda_n^{k+1}}{(c_{i1} + \dots + c_{is}) \lambda_1^k + c_{i,s+1} \lambda_{s+1}^k + \dots + c_{in} \lambda_n^k}. \quad (4.9.8)$$

Bu yerda ham $c_{i1} + \dots + c_{is} \neq 0$ deb faraz qilamiz va $d_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{i1} + \dots + c_{is}}$ ($j > s$), $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ belgilashlarni kiritib, (4.9.8) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + d_{i,s+1} \mu_{s+1}^{k+1} + \dots + d_{in} \mu_n^{k+1}}{1 + d_{i,s+1} \mu_{s+1}^k + \dots + d_{in} \mu_n^k}.$$

Bundan esa, $\mu_{s+1}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ni hisobga olib,

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} + O(|\mu_{s+1}|^k)$$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, yuqorida keltirilgan jarayon bu yerda ham o'rinlidir. 1) holdagidek A matritsaning λ_1 xos soniga mos keladigan xos vektor sifatida taqribiy ravishda $\bar{y}^{(k)}$ ni olishimiz mumkin. Umuman aytganda, boshqa dastlabki $\bar{y}^{(0)}$ vektorni tanlab boshqa $A^k \bar{y}^{(0)}$ xos vektorga ega bo'lamiz. Shunday qilib, λ_1 ga mos keladigan boshqa xos vektorlarni ham topish mumkin.

3-hol. Faraz qilaylik, A matritsaning xos sonlari quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \dots = -\lambda_{r+p}$$

va

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_{r+p}| > |\lambda_{r+p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Bu yerda yuqoridagi iteratsion jarayonni qo'llab bo'lmaydi. Haqiqatan ham, (4.9.3) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \bar{y}_i^{(k)} = & (b_1 x_{i1} + \dots + b_r x_{ir}) \lambda_1^k + (b_{r+1} x_{i,r+1} + \dots + \\ & + b_{r+p} x_{i,r+p}) (-\lambda_1)^k + b_{r+p+1} x_{i,r+p+1} \lambda_{r+p+1}^k + \dots + b_n x_{in} \lambda_n^k = \end{aligned}$$

$$= d_{i1}\lambda_1^k + d_{i,r+1}(-1)^k\lambda_1^k + d_{i,r+p+1}\lambda_{r+p+1}^k + \dots + d_{in}\lambda_n^k.$$

Bu yerda $d_{i1}\lambda_1^k$ va $d_{i,r+1}(-1)^k\lambda_1^k$ hadlar bir xil tartibga ega bo'lib, k ning o'zgarishi bilan ikkinchisi o'z ishorasini o'zgartiradi. Demak,

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$$

nisbat $k \rightarrow \infty$ da limitga ega bo'lmaydi. Lekin bu yerda $y_i^{(2k)}$ va $y_i^{(2k+2)}$ yoki $y_i^{(2k-1)}$ va $y_i^{(2k+1)}$ dan foydalanib, λ_1^2 ni topishimiz mumkin:

$$\frac{y_i^{(2k+2)}}{y_i^{(2k)}} = \lambda_1^2 + O(|\mu_{k+p+1}|^{2k}),$$

$$\frac{y_i^{(2k+1)}}{y_i^{(2k-1)}} = \lambda_1^2 + O(|\mu_{k+p+1}|^{2k}).$$

Shunday qilib, bu holda A matritsaning moduli bo'yicha eng katta xos sonini topishimiz mumkin. A matritsaning λ_1 va $-\lambda_1$ xos sonlarga mos keladigan xos vektorlarini topish uchun $\bar{y}^{(k+1)} + \lambda_1\bar{y}^{(k)}$ va $\bar{y}^{(k+1)} - \lambda_1\bar{y}^{(k)}$ vektorlarni tuzamiz:

$$\begin{aligned}\bar{y}^{(k+1)} + \lambda_1\bar{y}^{(k)} &= 2\lambda_1^{k+1} \left(b_1\bar{x}^{(1)} + \dots + b_r\bar{x}^{(r)} \right) + (\lambda_1 + \\ &+ \lambda_{r+p+1})b_{r+p+1}\lambda_{r+p+1}^k\bar{x}^{(r+p+1)} + \dots + (\lambda_1 + \lambda_n)\lambda_n^k b_n\bar{x}^{(n)} = \\ &= \lambda_1^{(k+1)} \left[2 \left(b_1\bar{x}^{(1)} + \dots + b_r\bar{x}^{(r)} \right) + O(|\mu_{r+p+1}|^k) \right], \\ \bar{y}^{(k+1)} - \lambda_1\bar{y}^{(k)} &= (-\lambda_1)^{k+1} \left[2 \left(b_{r+1}\bar{x}^{(r+1)} + \dots + b_{r+p}\bar{x}^{(r+p)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + O(|\mu_{r+p+1}|^k) \right].\end{aligned}$$

A matritsaning λ_1 xos soniga $b_1\bar{x}^{(1)} + \dots + b_r\bar{x}^{(r)}$ xos vektor va $-\lambda_1$ xos soniga $b_{r+1}\bar{x}^{(r+1)} + \dots + b_{r+p}\bar{x}^{(r+p)}$ xos vektor mos keladi. Shuning uchun ham, λ_1 ga mos keladigan xos vektor sifatida $\bar{y}^{(k+1)} + \lambda_1\bar{y}^{(k)}$ ni olishimiz mumkin. Agar r va p yoki bularning birortasi birdan katta bo'lsa, u holda boshqa dastlabki $\bar{y}^{(0)}$ vektorni tanlab shu jarayonni takrorlash kerak.

4-hol. Bu holga A matritsaning moduli bo'yicha eng katta xos sonlarni qo'shma kompleks bo'lgan hol yoki modullari bilan o'zaro juda yaqin

bo'lgan hol kiradi. Faraz qilaylik, λ_1 va λ_2 xos sonlar qo'shma kompleks sonlar bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Bu holda, quyidagi taqribiy tengliklarning o'rinli ekanligiga osongina ishonch hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} \bar{y}^{(k)} \approx b_1 \lambda_1^k \bar{x}^{(1)} + b_2 \lambda_2^k \bar{x}^{(2)}, \\ \bar{y}^{(k+1)} \approx b_1 \lambda_1^{k+1} \bar{x}^{(1)} + b_2 \lambda_2^{k+1} \bar{x}^{(2)}, \\ \bar{y}^{(k+2)} \approx b_1 \lambda_1^{k+2} \bar{x}^{(1)} + b_2 \lambda_2^{k+2} \bar{x}^{(2)}. \end{cases} \quad (4.9.9)$$

Demak, bu vektorlar orasida quyidagi taqribiy chiziqli bog'lanish mavjud:

$$\bar{y}^{(k+2)} - (\lambda_1 + \lambda_2) \bar{y}^{(k+1)} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{y}^{(k)} = \bar{0}.$$

Agar hisoblash jarayonida vektorlar orasida

$$\bar{y}^{(k+2)} + p \bar{y}^{(k+1)} + q \bar{y}^{(k)} = \bar{0} \quad (4.9.10)$$

chiziqli bog'lanish o'rinli bo'lsa, u holda λ_1 va λ_2 lar

$$u^2 + pu + q = 0 \quad (4.9.11)$$

kvadrat tenglamani qanoatlantiradi. Bu tenglamaning p va q koeffitsiyentlarini quyidagi mulohazalar yordamida topish mumkin. (4.9.10) tenglikda komponentlarga o'tsak,

$$y_i^{(k+2)} + p y_i^{(k+1)} + q y_i^{(k)} = 0,$$

$$y_j^{(k+2)} + p y_j^{(k+1)} + q y_j^{(k)} = 0$$

bo'lib, $i \neq j$ deb olamiz. Bu yerdan p va q ni topib, (4.9.11) ga qo'ysak, u holda (4.9.11) ni quyidagicha yozsak bo'ladi:

$$\begin{bmatrix} 1 & y_i^{(k)} & y_j^{(k)} \\ u & y_i^{(k+1)} & y_j^{(k+1)} \\ u^2 & y_i^{(k+2)} & y_j^{(k+2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (i, j = \overline{1, n}; \quad i \neq j). \quad (4.9.12)$$

(4.9.11) tenglikdan λ_1 va λ_2 topilgandan keyin ularga mos keladigan xos vektorlarni ham topish mumkin, (4.9.9) dan

$$\bar{y}^{(k+1)} - \lambda_1 \bar{y}^{(k)} = b_2 \lambda_2^k (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{x}^{(2)},$$

$$\bar{y}^{(k+1)} - \lambda_2 \bar{y}^{(k)} = b_2 \lambda_2^k (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{x}^{(1)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu natijalarni, modullari teng yoki yaqin bo'lgan xos sonlarning soni bir juftidan ko'p bo'lgan hol uchun ham umumlashtirish mumkin.

Misol 4.10. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matritsaning modullari bo'yicha eng katta xos sonlari va unga mos keladigan xos vektorlari topilsin.

Yechish: Quyidagi $\bar{y}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)'$ vektorni olib uning iteratsiyalarini hosil qilamiz. Bu iteratsiyalar jadval 4.2 da keltirilgan.

$\bar{y}^{(0)}$	$A\bar{y}$	$A^2\bar{y}$	$A^3\bar{y}$	$A^4\bar{y}$	$A^5\bar{y}$	$A^6\bar{y}$	$A^7\bar{y}$	$A^8\bar{y}$	$A^9\bar{y}$
1	-1	-28	-204	-1072	-4496	-14528	-6304	120126	1079100
1	18	103	419	1181	801	-17857	-160433	-789083	-3162093
1	6	40	233	1142	4665	-14936	27289	-70750	-959363
1	2	5	12	29	70	169	408	20985	49376

Jadval 4.2

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, iteratsiyalar ketma-ketligining mos ravishdagi komponentlarining nisbatlari tartibsiz ravishda o'zgarayapti, hatto, ishoralar almashinishi ro'y bermoqda. Bu esa kompleks ildizlarning mavjudligidan dalolat beradi. Endi λ_1 va λ_2 kompleks xos sonlarni topish uchun (4.9.12) tenglamani tuzamiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -6304 & -160433 \\ u & 120126 & -789083 \\ u^2 & 1079100 & -3162093 \end{bmatrix} = 0.$$

Bu yerdan

$$u^2 + 7,95u + 19,55 = 0$$

va

$$\lambda_{1,2} = -3,975 \pm i \cdot 1,936$$

ga ega bo'lamiz. Xos sonlarning aniq qiymati esa $\lambda_{1,2} = -4 \pm 2i$ dir. Biz taqribiy yechimni uncha katta bo'lmagan aniqlik bilan topdik. Chunki iteratsiyamizning soni yetarli emas edi. Aniqroq natijaga ega bo'lish uchun iteratsiyani yana davom ettirish kerak. ■

4.9.2 Ikkinchi xos son va unga mos keladigan xos vektorni topish

Faraz qilaylik, A matritsaning xos sonlari quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

ya'ni matritsaning bir-biridan farqli bo'lgan ikkita modullari bo'yicha eng katta xos soni mavjud bo'lsin. Bunday vaqtda 1-holda ko'rilgan usulga o'xshash usulni qo'llab, λ_2 va unga mos keladigan $\bar{x}^{(2)}$ xos vektorni topish mumkin. (4.9.2) formulaga ko'ra

$$\bar{y}^{(k)} = b_1 \lambda_1^k \bar{x}^{(1)} + b_2 \lambda_2^k \bar{x}^{(2)} + \dots + b_n \lambda_n^k \bar{x}^{(n)}, \quad (4.9.13)$$

$$\bar{y}^{(k+1)} = b_1 \lambda_1^{k+1} \bar{x}^{(1)} + b_2 \lambda_2^{k+1} \bar{x}^{(2)} + \dots + b_n \lambda_n^{k+1} \bar{x}^{(n)}. \quad (4.9.14)$$

Bu tengliklarda λ_1 ni yo'qotish uchun (4.9.13) ni λ_1 ga ko'paytirib (4.9.14) dan ayiramiz. Natijada

$$\bar{y}^{(k+1)} - \lambda_1 \bar{y}^{(k)} = b_2 \lambda_2^k (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{x}^{(2)} + \dots + b_n \lambda_n^k (\lambda_n - \lambda_1) \bar{x}^{(n)} \quad (4.9.15)$$

ga ega bo'lamiz.

Yozuvni qisqartirish maqsadida $y^{(k)}$ ning λ - ayirmasi deb ataluvchi quyidagi

$$\Delta_\lambda \bar{y}^{(k)} = \bar{y}^{(k+1)} - \lambda \bar{y}^{(k)}$$

belgilashni kiritamiz. Agar $b_2 \neq 0$ bo'lsa, u holda $k \rightarrow \infty$ da (4.9.15) da birinchi qo'shiluvchi yig'indining bosh qismi bo'ladi va biz

$$\Delta_{\lambda_1} \bar{y}^{(k)} \approx b_2 \lambda_2^k (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{x}^{(2)} \quad (4.9.16)$$

taqribiy tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerdan esa

$$\Delta_{\lambda_1} \bar{y}^{(k-1)} \approx b_2 \lambda_2^{k-1} (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{x}^{(2)}. \quad (4.9.17)$$

Bu tengliklarni komponentlarda yozib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_j^{(k)}}{\Delta_{\lambda_1} y_j^{(k-1)}} = \frac{y_j^{(k+1)} - \lambda_1 y_j^{(k)}}{y_j^{(k)} - \lambda_1 y_j^{(k-1)}}. \quad (4.9.18)$$

Bu formula yordamida λ_2 ni topishimiz mumkin. Bir-biriga yaqin sonlar $y_j^{(k)}$ va $\lambda_1 y_j^{(k-1)}$ hamda $y_j^{(k+1)}$ va $\lambda_1 y_j^{(k)}$ bo'lganligi uchun aniqlik yo'qoladi. Shuning uchun ham, praktikada λ_2 ni aniqlaydigan iteratsiya nomeri m ni

λ_1 ni aniqlaydigan iteratsiya nomeri dan kichikroq qilib olish, ya'ni λ_2 ni quyidagiga aniqlash ma'quldir:

$$\lambda_2 \approx \frac{y_j^{(m+1)} - \lambda_1 y_j^{(m)}}{y_j^{(m)} - \lambda_1 y_j^{(m-1)}} \quad (m < k). \quad (4.9.19)$$

Agar l yetarlicha katta bo'lsa, λ_2^l ning λ_j^l ($j = 3, 4, \dots$) dan ortiqligi sezilib qoladi, m sifatida shu l larning eng kichigini olish kerak. Umuman aytganda, (4.9.19) formula λ_2 ning qo'pol qiymatini beradi. Shu usul bilan qolgan xos sonlarni ham topish mumkin, lekin natija yana ham qo'polroq chiqadi.

(4.9.16) dan ko'rinib turibdiki, $\bar{x}^{(2)} \Delta_{\lambda_1} \bar{y}^{(m)}$ dan faqat o'zgarmas ko'payuvchiga farq qilayapti, shuning uchun ham

$$\bar{x}^{(2)} \approx \Delta_{\lambda_1} \bar{y}^{(m)}$$

deb olishimiz mumkin.

4.10-§. Musbat aniqlangan simmetrik matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini aniqlash

Biz yuqorida oddiy strukturaga ega bo'lgan matritsalarining moduli bo'yicha eng katta birinchi va ikkinchi xos sonlari va ularga mos keladigan xos vektorlarini topishni ko'rib chiqdik. Endi musbat aniqlangan simmetrik matritsaning barcha xos elementlarini iteratsiya usuli yordamida topish bilan shug'ullanamiz. Ma'lumki, musbat aniqlangan simmetrik A matritsaning barcha xos sonlari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ haqiqiy va musbat bo'lib, $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n)}$ xos vektorlarni shunday tanlash mumkinki, ular ortogonallik

$$(\bar{x}^{(i)}, \bar{x}^{(j)}) = \sum_{k=1}^n x_k^{(i)} x_k^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.10.1)$$

shartini qanoatlantiradi. Birinchi xos vektor $\bar{x}^{(1)}$ ni aniqlaydigan tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)} = 0, \\ a_{21}x_1^{(1)} + (a_{22} - \lambda_1)x_2^{(1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(1)} = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + (a_{nn} - \lambda_1)x_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (4.10.2)$$

yoki

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(1)}), \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(1)}), \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} (a_{n-1,1}x_1^{(1)} + a_{n-1,2}x_2^{(1)} + \dots + a_{n-1,n}x_n^{(1)}), \\ \lambda_1 = \frac{1}{x_n^{(1)}} (a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(1)}). \end{cases} \quad (4.10.3)$$

Xos vektorlar koordinatalarining hammasini biror songa ko'paytirish yoki bo'lish mumkin. Shuning uchun ham $x_n^{(1)} = 1$ deb olamiz. U holda (4.10.3) sistema n ta $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}, \lambda_1$ noma'lumli n ta tenglamadan iborat. Mos ravishda tanlab olingan dastlabki yaqinlashish $x_1^{(1,0)}, \dots, x_{n-1}^{(1,0)}, \lambda_1^{(0)}$ ni olib (4.10.3) sistemani iteratsiya metodi bilan yechamiz:

$$\begin{aligned} x_k^{(1,m+1)} &= \frac{1}{\lambda_1^{(m)}} (\sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}x_j^{(1,m)} + a_{kn}) \quad (k = \overline{1, n-1}), \\ \lambda_1^{(m+1)} &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(1,m+1)} + a_{nn} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Sistemani yechishda oddiy iteratsiya metodining o'rniga Zeydel metodidan ham foydalanish mumkin. Shu yo'l bilan birinchi xos son

$$\lambda_1 \approx \lambda_1^{(m)}$$

va unga mos keladigan xos vektor

$$\bar{x}^{(1)} \approx (x_1^{(1,m)}, \dots, x_{n-1}^{(1,m)}, 1)$$

ni topish mumkin.

Ikkinchi xos son λ_2 va unga mos keladigan xos vektor $\bar{x}^{(2)}$ ni topish uchun biz yana λ_2 va $\bar{x}^{(2)}$ ni hosil qiladigan sistemadan foydalanamiz. Bu sistemani biz quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\lambda_2 x_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(2)} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.10.4)$$

Ortogonallik sharti

$$(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(1,m)} x_j^{(2)} + x_n^{(2)} = 0 \quad (4.10.5)$$

dan $x_j^{(2)}$ noma'lum komponentlarning birortasini, masalan, $x_n^{(2)}$ ni qolgan komponentlar orqali ifodalash mumkin. Xuddi shu $x_n^{(2)}$ ni (4.10.4) ga qo'ysak, u holda u quyidagi unga teng kuchli bo'lgan sistemaga aylanadi:

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)} x_j^{(2)} \quad (i = \overline{1, n-2}),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{x_{n-1}^{(2)}} \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}^{(1)} x_j^{(2)} \quad (4.10.6)$$

Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{in} x_j^{(1,m)}$$

Bundan ham $x_{n-1}^{(2)} = 1$ deb olib va $x_k^{(2,0)}$, $\lambda_2^{(0)}$ dastlabki yaqinlashishlarni tanlab (4.10.6) sistemani iteratsiya metodi bilan yechib, λ_2 va $\bar{x}^{(2)}$ ning taqribiy qiymatlarini topamiz:

$$\lambda_2 \approx \lambda_2^{(m)}, \quad \bar{x}^{(2)} \approx (x_1^{(2,m)}, \dots, x_{n-2}^{(2,m)}, 1, x_n^{(2)})'.$$

Bu yerda $x_n^{(2)}$ ortogonallik sharti (4.10.5) dan topiladi. Shunga o'xshash qolgan xos son va xos vektorlarni topish mumkin. (4.10.4) sistemaning n -tenglamasidan kontrol sifatida, yani topilgan λ_2 va $\bar{x}^{(2)}$ larning aniqligini tekshirish uchun foydalanish mumkin. Qaralayotgan metodda, λ_k ni aniqlanayotganda $\bar{x}^{(k)}$ ning $x_{n-k+1}^{(k)} = 0$ bo'lishi bilan bog'liq bo'lgan maxsus hollar ham bo'lishi mumkin. Bunday maxsus hol (4.10.2) sistemaga iteratsiya metodini qo'llash uchun qulay (4.10.3) ko'rinishga keltirishdan kelib chiqqanligi uchun undan qutulish mumkin.

Misol 4.11. Quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning barcha xos sonlari va ularga mos keladigan xos vektorlari topilsin.

Yechish: Bu matritsa simmetrik va uning bosh minorlari

$$D_1 = 5 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 > 0, \quad D_3 = \det A = 9 > 0$$

musbat bo'lganligi uchun λ_i va $\bar{x}^{(i)}$ ni aniqlaydigan sistema:

$$\begin{cases} \lambda_i x_1^{(i)} = 5x_1^{(i)} - x_2^{(i)}, \\ \lambda_i x_2^{(i)} = -x_1^{(i)} + 3x_2^{(i)} + x_3^{(i)}, \\ \lambda_i x_3^{(i)} = x_2^{(i)} + x_3^{(i)}. \end{cases} \quad (4.10.7)$$

Bu yerda $x_3^{(i)} = 1$ deb olganda iteratsion jarayon uzoqlashadi, shuning uchun ham $i = 1$ va $x_1^{(1)} = 1$ deb olib

$$\begin{cases} x_2^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}(3x_2^{(1)} + x_3^{(1)} - 1), \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1}(x_2^{(1)} + x_3^{(1)}), \\ \lambda_1 = 5 - x_2^{(1)}. \end{cases} \quad (4.10.8)$$

ni hosil qilamiz. Bu sistemani Zeydel metodi bilan yechamiz. Dastlabki yaqinlashish sifatida

$$x_2^{(1,0)} = -0,5; \quad x_3^{(1,0)} = 0$$

deb olsak (4.10.8) ning oxirgi tenglamasidan $\lambda_1^{(0)} = 5,5$ ni hosil qilamiz. Zeydel iteratsiyasining natijasi javdal 4.3 da keltirilgan. Jadvaldan ko'ramizki.

$$\lambda_1 = 5,4491$$

va

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4491 \\ -0,1001 \end{bmatrix}$$

k	$x_2^{(1,k)}$	$x_3^{(1,k)}$	$\lambda_1^{(k)}$
0	-0,5	0	5,5
1	-0,4545	-0,0826	5,4545
2	-0,4484	-0,0974	5,4484
3	-0,4476	-0,1000	5,4476
4	-0,4484	-0,1001	5,4484
5	-0,4490	-0,1001	5,4490
6	-0,4491	-0,1001	5,4491
7	-0,4491	-0,1001	5,4491

Jadval 4.3

Endi (4.10.7) sistemada $i = 2$ deb olamiz va $\bar{x}^{(1)}$ ning $\bar{x}^{(2)}$ bilan ortogonallik sharti

$$x_1^{(2)} - 0,4491x_2^{(2)} - 0,1001 \cdot x_3^{(2)} = 0$$

dan $x_1^{(2)}$ ni topamiz. Bundan

$$x_1^{(2)} = 0,4491x_2^{(2)} + 0,1001 \cdot x_3^{(2)} \quad (4.10.9)$$

ni (4.10.7) ga qo'yib va $x_2^{(2)} = 1$ deb olsak, u holda

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{\lambda_2}(1 + x_3^{(2)}),$$

$$\lambda_2 = 3,4491 + 1,1001x_3^{(2)}.$$

Bu yerda

$$x_3^{(2,0)} = 0, \lambda_2^{(0)} = 4$$

deb olib, iteratsiyani qo'llaymiz. Natija jadval 4.4 da keltirilgan.

k	$x_3^{(2,k)}$	$\lambda_2^{(k)}$
0	0	4
1	0,25	3,72
2	0,34	3,82
3	0,35	3,83
4	0,353	3,837
5	0,3529	3,8373
6	0,3526	3,8370
7	0,3525	3,8369
8	0,3525	3,8369

Jadval 4.4

Jadvaldan ko'ramizki, $\lambda_2 \approx 3,8369$. Endi $x_1^{(2)}$ ni (4.10.9) tenglikdan topamiz: $x_1^{(2)} \approx 0,4844$. Shunday qilib,

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4844 \\ 1 \\ 0,3525 \end{bmatrix}.$$

Uchinchi xos vektor $\bar{x}^{(3)}$ ni ortogonallik shartlaridan aniqlaymiz:

$$(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(3)}) = x_1^{(3)} - 0,4491x_2^{(3)} - 0,1001x_3^{(2)},$$

$$(\bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}) = 0,4844x_1^{(3)} + x_2^{(3)} - 0,3525x_3^{(2)}.$$

Bundan esa $x_3^{(3)} = 1$ deb olib, $x_1^{(3)} = -0,2166$ va $x_2^{(3)} = -0,7029$ ni topib olamiz.

Demak,

$$\bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0,2166 \\ -0,7029 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nihoyat, (4.10.7) sistemaning oxirgi tengligida $i = 3$ deb olib, λ_3 ni topamiz: $\lambda_3 = 0,2971$. ■

4.11-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda iteratsiya metodining yaqinlashishini tezlashtirish

Biz 2-bobda algebraik va transcendent tenglamalarni iteratsiya metodi bilan yechishda iteratsiya yaqinlashishining tezligini oshirish metodlarini ko'rib chiqqan edik.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda va matritsaning xos soni hamda xos vektorlarini topishda iteratsiya metodining yaqinlashish tezligini oshirish mumkin emasmikan degan savol tug'iladi. Bunday metodlar ayrim hollarda mavjud. Biz bu yerda matritsasi moduli bo'yicha faqatgina bitta eng katta xos songa ega bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda iteratsiya tezligini oshirishning L.A.Lyusternik taklif etgan metodini ko'rib chiqamiz.

Agar

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (4.11.1)$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsion metod bilan yechadigan bo'lsak, buning uchun B va C matritsalarini $B + CA = E$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab olib, (4.11.1) sistemani

$$\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + C\bar{b} \quad (4.11.2)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Faraz qilaylik, ixtiyoriy dastlabki vektor $\bar{x}^{(0)}$ uchun $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ketma-ketlik (4.11.1) sistema yechimiga yaqinlashsin. U holda B matritsaning barcha xos sonlari $|\lambda_i| < 1$ ($i = \overline{1, n}$) tengsizlikni qanoatlantiradi. Agar $|\lambda_i|$ larning birortasi 1 ga yaqin bo'lsa, u holda iteratsiya juda ham sekin yaqinlashadi. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ning bir necha dastlabki

hadini topish kifoyadir. Shunda bu ketma-ketlikning yaqinlashishini tezlashtirish masalasi tug'iladi. B matritsaning xos sonlari

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

tartibda joylashgan deb faraz qilamiz. Lyusternik metodining asosiy g'oyasi qoldiqning bosh qismini ajratib olishdan iboratdir.

Shunday qilib, biz $\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}$ qoldiq hadining bosh qismini ajratishimiz kerak. Buning uchun $\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}$ vektorni B matritsaning xos vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)} = \beta_1 \bar{z}_1 + \beta_2 \bar{z}_2 + \dots + \beta_n \bar{z}_n.$$

Endi $\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}$ ga (4.11.2) ni qo'llab

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = B (\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)})$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \bar{z}_j. \quad (4.11.3)$$

Shunga o'xshash ixtiyoriy $\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} = B (\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)})$ vektor uchun

$$\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k \bar{z}_j \quad (4.11.4)$$

yoyilmaga ega bo'lamiz. Shartga ko'ra $\{\bar{x}^{(k)}\}$ yaqinlashuvchi va

$$|\lambda_i| < 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k = \frac{1}{1 - \lambda_i}$$

bo'lganligi uchun. $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}^{(m)} = \bar{x}^*$ ni e'tiborga olib,

$$\begin{aligned} \bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} &= \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{x}^{(k+i+1)} - \bar{x}^{(k+i)}) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^{k+i} \bar{z}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j^k}{1 - \lambda_j} \beta_j \bar{z}_j \end{aligned} \quad (4.11.5)$$

ga ega bo'lamiz. Agar k yetarlicha katta bo'lsa, u holda (4.11.3) shartga ko'ra (4.11.4) va (4.11.5) yoyilmalardan bosh qismlarini ajratib olishimiz mumkin. Natijada quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} \approx \beta_1 \lambda_1^k \bar{z}_1, \quad (4.11.6)$$

$$\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} \approx \beta_1 \frac{\lambda_1^k}{1 - \lambda_1} \bar{z}_1. \quad (4.11.7)$$

Bundan esa

$$\bar{x}^* \approx \bar{x}^{(k)} + \frac{1}{1 - \lambda_1} \left(\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} \right) \quad (4.11.8)$$

kelib chiqadi. Agar $\widetilde{\lambda}_1$ orqali λ_1 ning taqribiy qiymatini belgilasak, u holda, (4.11.6) ga ko'ra,

$$\widetilde{\lambda}_1 = \frac{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}{x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}} \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\lambda_1 = \widetilde{\lambda}_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) = \widetilde{\lambda}_1 + \varepsilon \quad (4.11.9)$$

munosabatlar o'rinishligini 4.8-§da ko'rgan edik. Quyidagicha tuzilgan

$$\bar{y}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} + \frac{1}{1 - \widetilde{\lambda}_1} \left(\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} \right) \quad (4.11.10)$$

vektor aniq vektor $\bar{x}^*$ ga $\bar{x}^{(k)}$ va $\bar{x}^{(k+1)}$ vektorlarga nisbatan yaqinroq ekanligini ko'rsatamiz. Avval $\bar{x}^* - \bar{y}^{(k)}$ va $\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}$ orasidagi munosabatni topamiz. Buning uchun

$$B_1 = \frac{1}{1 - \widetilde{\lambda}_1} [B - \widetilde{\lambda}_1 E]$$

matritsani olib, $\bar{x}^* - \bar{y}^{(k)} = B_1 (\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)})$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \bar{x}^* - \bar{y}^{(k)} &= \bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} - \frac{1}{1 - \widetilde{\lambda}_1} \left(\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)} \right) = \\ &= \bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} - \frac{1}{1 - \widetilde{\lambda}_1} \left[\left(\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^* \right) + \left(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)} \right) \right] = \end{aligned}$$

4.12.1 Matritsa va sistemaning shartlanganligi tushunchasi

Bog'lanishsizlik vektori $\bar{r}$ mumkin bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qilganda $\bar{x}^*$ va $\bar{b}$ vektorlari "nisbiy xatoligining" nisbatini kiritamiz:

$$\mu = \sup_{\bar{r}} \left(\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|} : \frac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|} \right). \quad (4.12.4)$$

Bundan esa

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leq \mu \frac{\|\bar{x}^*\|}{\|\bar{b}\|} \cdot \|\bar{r}\| \quad (4.12.5)$$

kelib chiqadi va (4.12.5) dan ko'rinadiki, μ kichik bo'lsa, u holda bog'lanishsizlik vektori normasining kichikligidan xatolar vektori normasining kichikligi kelib chiqali. Bu holda (4.12.1) *sistema yaxshi shartlangan* deyiladi. Agar μ katta bo'lsa, u holda $\|\bar{r}\|$ ning kichikligiga qaramasdan $\|\bar{\varepsilon}\|$ juda katta bo'lishi mumkin. Bunday holda (4.12.1) *sistema yomon shartlangan* deyiladi. Shunga o'xshash matritsa shartlanganligi tushunchasini kiritish mumkin. Matritsa normasining ta'rifi va (4.12.2) dan

$$\begin{aligned} \sup_{\bar{r}} \frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{r}\|} &= \sup_{\bar{r}} \frac{\|\bar{x}^* - \bar{y}\|}{\|\bar{r}\|} = \sup_{\bar{r}} \frac{\|A^{-1}(A\bar{x}^* - A\bar{y}^*)\|}{\|\bar{r}\|} = \\ &= \sup_{\bar{r}} \frac{\|A^{-1}\bar{r}\|}{\|\bar{r}\|} = \|A^{-1}\| \end{aligned} \quad (4.12.6)$$

ga ega bo'lamiz. Bundan (4.12.4) ga ko'ra

$$\mu = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{x}^*\|} \cdot \|A^{-1}\| \quad (4.12.7)$$

kelib chiqadi.

Endi (4.12.1) sistemani o'ng tomoni $\bar{b}$ mumkin bo'lgan barcha qiymatlarni qabul qilganda tekshiramiz. Har bir $\bar{b}$ uchun o'zining $\bar{x}^*$ yechimi mos keladi. Bu yechimlar to'plamini X orqali belgilaymiz va (4.12.7) bilan aniqlangan μ ning $\bar{x}^*$ vektorlar X da o'zgargan paytdagi xususiyatini, ya'ni

$$\sup_{\bar{x}^* \in X} \mu$$

ni ko'rib chiqamiz. Matritsa normasining ta'rifiga ko'ra

$$\nu = \sup_{\bar{x}^* \in X} \mu = \sup_{\bar{x}^* \in X} \frac{\|A\bar{x}^*\|}{\|\bar{x}^*\|} \cdot \|A^{-1}\| = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (4.12.8)$$

ν soni A matritsaning shartlanganlik soni deyiladi. (4.12.8) dan ko'rinib turibdiki, agar A matritsa maxsuslikka yaqin bo'lsa, u holda bunday matritsa uchun ν soni juda katta bo'ladi. Bunday matritsa yomon shartlangan matritsa deyiladi. Agar ν kichik son bo'lsa, u holda A matritsa yaxshi shartlangan deyiladi. Har xil normalarda μ va ν lar har xil sonli qiymatlarga ega bo'ladilar. Matritsaning ixtiyoriy normasining uning maksimal xos sonning modulidan katta yoki unga tengligini 3-bobda ko'rgan edik. Bundan tashqari, teskari matritsaning xos sonlari berilgan matritsa xos sonlarining teskari qiymatlariga tengligi ma'lum. Shuning uchun

$$\nu = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} \geq 1. \quad (4.12.9)$$

Uchinchi normada (4.12.9) munosabatni aniqroq yozish mumkin. Haqiqatan ham,

$$\nu_3 = \|A\|_3 \cdot \|A^{-1}\|_3 = \sqrt{\max \xi_i} \sqrt{\max \eta_i}, \quad (4.12.10)$$

bu yerda ξ_i $A'A$ matritsaning xos soni bo'lib, η_i $(A^{-1})' A^{-1}$ matritsaning xos sonidir. Ammo $(A^{-1})' A^{-1} = (AA')^{-1}$ va AA' , $A'A$ matritsalar o'xshash bo'lganliklari uchun $\eta_i = \frac{1}{\xi_i}$. Demak, (4.12.10) dan

$$\nu_3 = \sqrt{\frac{\max \xi_i}{\min \xi_i}}.$$

Xususiyl holda simmetrik A matritsalar uchun $\xi_i = |\lambda_i|^2$ va

$$\nu_3 = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} \quad (4.12.11)$$

bo'ladi.

Misol 4.12. Quyilagi matritsani olamiz [44]:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Yechish: Bu matritsaning elementlari katta son bo'lishiga qaramasdan $\det A = 1$ shuning uchun bu matritsa yomon shartlangan bo'lishi

kerak. Bu matritsaning teskarisi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berilgan A matritsa elementlarini ozgina o'zgartirganda u maxsus matritsa bo'lib qolishi mumkin. Haqiqatan ham

$$A(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 5 + \varepsilon & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

ni olaylik. Bu yerda $\det A(\varepsilon) = 1 + 68\varepsilon$ dir. Demak, $\varepsilon = -\frac{1}{68} \approx -0,015$ bo'lganda bu va matritsa maxsus matritsaga aylanadi. Shunday qilib, A matritsaning elementlari 0,02 aniqlikda berilgan bo'lsa, uni amalda maxsus deb qarash kerak. Qaralayotgan A^{-1} matritsaning elementlari keskin o'zgaradi. Haqiqatan ham.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4,99 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

uchun $\det A_1 = 0,320$ bo'lib,

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 204,82 & -128,12 & -53,12 & 31,25 \\ -128,12 & 77,53 & 31,78 & -18,81 \\ -53,12 & 31,78 & 14,03 & -8,31 \\ 31,25 & -18,81 & -8,31 & 5,12 \end{bmatrix}$$

dir. Agar teskari matritsaning elementlari katta bo'lsa, u holda bir-biriga "yaqin" ozod hadlarga ham $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning bir-biridan "uzoq" yechimlari mos kelishi mumkin. Haqiqatan ham

$$\bar{b}_1 = (23, 32, 33, 31)'$$

va

$$\bar{b}_2 = (23, 1; 31, 9; 32, 9; 31, 1)'$$

ozod hadlarga

$$\bar{x}^{(1)} = (1, 1, 1, 1)'$$

va

$$\bar{x}^{(2)} = (14, 6; -7, 2; -2, 5; 3, 1)'$$

yechimlar mos keladi. A_1 matritsaning shartlanganlik soni ν uchinchi normada

$$\nu_3 = \|A_1\|_3 \|A_1^{-1}\|_3 = \sqrt{933}\sqrt{9708} \approx 3009,6.$$

Bu haqiqatan ham katta son. Endi $A_1\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning shartlanganlik o'lchovini $\bar{b} = \bar{b}_1$ uchun topamiz:

$$\mu_3 = \frac{\|\bar{b}_1\|_3}{\|\bar{x}\|_3} \cdot \|A_1^{-1}\|_3 = \frac{\sqrt{3603}}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{9708} \approx 2957,1.$$

4.12.2 Xatoliklar vektori $\bar{\varepsilon}$ ni baholash

Biz yuqorida shartlanganlik soni katta bo'lib, ozod had ozgina o'zgarganda yechim anchaga farq qilishini konkret holda qaragan edik, endi shu masalani umumiy holda ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, (4.12.1) sistema bilan bir vaqtda

$$B\bar{y} = \bar{f} \quad (4.12.12)$$

sistema ham berilgan bo'lib, B matritsa va $\bar{f}$ vektor bilan A matritsa va $\bar{b}$ vektor orasida quyidagi tengliklar o'rinli bo'lsin:

$$B = A - CA, \quad \bar{f} = \bar{b} + \bar{\delta} \quad (4.12.13)$$

Bu yerda

$$\|C\| \leq q < 1, \quad \|\bar{\delta}\| \leq p.$$

Endi (4.12.12) va (4.12.13) dan

$$(E - C)A\bar{y} = \bar{f}$$

yoki

$$\begin{aligned} A\bar{y} - (E - C)^{-1}\bar{f} &= (E + C + C^2 + \dots)(\bar{b} + \bar{\delta}) = \\ &= \bar{b} + (C + C^2 + \dots)\bar{b} + (E + C + C^2 + \dots)\bar{\delta} \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglikni $\bar{r} = \bar{b} - A\bar{y}$ bilan solishtirsak, u holda (4.12.1) sistema taqribiy yechimi $\bar{y}$ ning bog'lanishsizlik vektori

$$\bar{r} = -[(C + C^2 + \dots)\bar{b} + (E + C + C^2 + \dots)\bar{\delta}]$$

bo'ladi. Demak, μ va ν ta'rifiga ko'ra, quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|} = \frac{\|\bar{x}^* - \bar{y}\|}{\|\bar{x}^*\|} \leq \mu \frac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|} = \frac{\mu}{\|\bar{b}\|} \left[-(C + C^2 + \dots) \bar{b} - (E + C + C^2 + \dots) \bar{\delta} \right] \leq$$

$$\leq \mu \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{1}{1-q} \frac{\|\bar{\delta}\|}{\|\bar{b}\|} \right\} \leq \nu \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{1}{1-q} \frac{p}{\|\bar{b}\|} \right\}. \quad (4.12.14)$$

Bundan ko'ramizki shartlanganlik soni ν va p hamda q qancha kichik bo'lsa "nisbiy xato" $\frac{\|\bar{\varepsilon}\|}{\|\bar{x}^*\|}$ ham shuncha kichik bo'ladi. (4.12.14) dan amalda kerak bo'ladigan $\|\bar{\varepsilon}\|$ ning bahosini chiqarish mumkin. Buning uchun

$$m(p, q) = \frac{p}{1-q} + \frac{1}{1-q} \frac{p}{\|\bar{b}\|}$$

deb belgilab va $\|\bar{x}^*\| = \|\bar{y} + \bar{x}^* - \bar{y}\| \leq \|\bar{y}\| + \|\bar{x}^* - \bar{y}\| = \|\bar{y}\| + \|\bar{\varepsilon}\|$ ni hisobga olib, $1 - \nu m(p, q) > 0$ bo'lganda

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leq \|\bar{y}\| \frac{\nu m(p, q)}{1 - \nu m(p, q)} \quad (4.12.15)$$

ga ega bo'lamiz. Odatda amalda bizga A va $\bar{b}$ ma'lum bo'lmasdan balki B va $\bar{f}$ berilgan bo'ladi. Shuning uchun ham (4.12.15) o'rnida quyidagi bahoni qarash kerak:

$$\|\bar{\varepsilon}\| \leq \|\bar{y}\| \frac{\nu^* m(p, q^*)}{1 - \nu^* m(p, q^*)} \quad (4.12.16)$$

bu yerda ν^* B matritsaning shartlanganlik soni bo'lib,

$$q^* = \|DB^{-1}\|, \quad D = B - A \quad \text{va} \quad m(p, q^*) = \frac{q^*}{1-q^*} + \frac{1}{1-q^*} \frac{p}{\|\bar{f}\|}$$

dir.

Amalda (4.12.1) sistemani yechishning ko'p metodlari A matritsani almashtirib sodda ko'rinishga, masalan, diagonal, uchburchak va h.k. ko'rinishga keltirishdan iboratdir. Bunday almashtirish A matritsani chap tomondan biror M matritsaga ko'paytirish natijasida bajariladi. Ixtiyoriy maxsusmas A matritsa uchun

$$\|MA\| \leq \|M\| \cdot \|A\|, \quad \|A^{-1}M^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|M^{-1}\|$$

bo'lganligidan,

$$\nu(MA) \leq \nu(M) \nu(A)$$

kelib chiqadi, ya'ni almashtirish natijasida, umuman aytganda, A matritsaning shartlanganlik soni ortib borar ekan.

Ko'rsatish mumkinki [4], faqat $M = cU$ bo'lgandagina (Bu yerda U ortogonal matritsa va c - o'zgarmas son) $\nu(M) = 1$ bo'lib, $\nu(MA) = \nu(A)$ bo'ladi.

Mashqlar

1. Quyilagi

$$\begin{bmatrix} 8,82 & 3,45 & 5,58 & 4,41 \\ 3,45 & 4,01 & 0,89 & 3,24 \\ 5,58 & 0,89 & 5,86 & 1,38 \\ 4,41 & 3,24 & 1,38 & 1,07 \end{bmatrix}$$

matritsaning xos soni va xos vektorlarini shu bobdagi barcha metodlar bilan toping.

2. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

matritsaning xarakteristik ko'phadi $A + B$ va $A - B$ matritsalar xarakteristik ko'phadining ko'paytmasiga tengligini isbot qiling.

3. Har qanday n - tartibli kvadrat kompleks A matritsa

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

ko'rinishdagi matritsaga o'xshashligini ko'rsating, bu yerda B_{22} $(n-1)$ - tartibli kvadrat matritsadir. $B = P^{-1}AP$ shartni qanoatlantiradigan P matritsani tuzish yo'lini ko'rsating.

4. Aytaymk, A matritsaning xos qiymati λ bo'lib, unga mos keladigan xos vektor $\bar{x}$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ uchun $\bar{x}$ vektor $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$ matritsaning $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^n$ xos soniga mos keluvchi xos vektor ekanligini ko'rsating.
5. Ixtiyoriy A matritsa va α son uchun A va $A - \alpha E$ matritsalar bir xil xos vektorga ega bo'lishini ko'rsating.
6. Agar A sodda strukturaga ega bo'lsa, u holda $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$ ham sodda strukturaga ega bo'lishini ko'rsating.

7. Agar A matritsa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lib, $\text{sign } a_{k,k-1} = \text{sign } a_{k,k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) bo'lsa, u holda A matritsaning barcha xos sonlari haqiqiy bo'lishini ko'rsating.

8. Oxirgi masala natijasidan foydalanib, Lejandr ko'phadining barcha ildizlari haqiqiy ekanligini ko'rsating.
9. Quyidagi n - tartibli

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matritsaning barcha xos sonlari $\lambda_k = 2 \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\pi k}{n+1} \right)$ ($k = \overline{1, n}$) ekanligini ko'rsating.

5-BOB. FUNKSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH

5.1-§. Masalaning qo'yilishi

Aksariyat hisoblash metodlari masalaning qo'yilishida qatnashadigan funksiyalarni unga biror, muayyan ma'noda yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyalarga almashtirish g'oyasiga asoslangan.

Ushbu bobda funksiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo'llaniladigan qismi — **funksiyalarni interpolyatsiyalash masalasi** ko'rib chiqiladi.

Dastlab interpolyatsiyalash deganda funksiyaning qiymatlarini argumentning jadvalda berilmagan qiymatlari uchun topish tushunilar edi. Bu holda interpolyatsiyalashni "satrlar orasidagilarni o'qiy bilish san'ati" deb ham ta'riflash mumkin. Hozirgi vaqtda interpolyatsiyalash tushunchasi juda keng ma'noda tushuniladi. Interpolyatsiya masalasining mohiyati quyidagidan iborat.

Faraz qilaylik, $[a, b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya berilgan yoki hech bo'lmaganda uning $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. Shu oraliqda aniqlangan va hisoblash uchun qulay bo'lgan qandaydir funksiyalar $\{P(x)\}$ sinfini, masalan, ko'phadlar sinfini olamiz. Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda interpolyatsiyalash masalasi shu funksiyaning berilgan sinfnining shunday $P(x)$ funksiyasi bilan taqribiy ravishda

$$f(x) \approx P(x)$$

almashtirishdan iboratki, $P(x)$ berilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul qilsin:

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = \overline{0, n}).$$

Bu yerda ko'rsatilgan $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalar *interpolyatsiya tugunlari* yoki *tugunlar* deyiladi, $P(x)$ esa *interpolyatsiyalovchi* funksiya deyiladi.

Agar $\{P(x)\}$ sinfi sifatida darajali ko'phadlar sinfi olinsa, u holda *interpolyatsiyalash algebraik* deyiladi. Algebraik interpolyatsiyalash apparati hisoblash matematikasining ko'p sohalarida qo'llaniladi, chunonchi, differensiallash va integrallashda, transsendant, differensial va integral tenglamalarni yechishda, funksiya ekstremumini topish hamda funksiya jadvalini tuzishda Teylor yoyilmasi klassik analizda qay darajada ahamiyatga ega bo'lsa, algebraik interpolyatsiyalash ham hisoblash matematikasida shunday ahamiyatga egadir. Ayrim hollarda interpolyatsiyalashning boshqa ko'rinishlarini qo'llash maqsadga muvofiqdir. Masalan, $f(x)$ davriy funksiya bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida trigonometrik funksiyalar sinfi olinadi; agar interpolyatsiyalanadigan funksiya berilgan nuqtalarda cheksizga aylanadigan bo'lsa, u holda $\{P(x)\}$ sinfi sifatida ratsional funksiyalar sinfini olish ma'quldir.

Bu bobda, biz, asosan, algebraik interpolyatsiyalashning har xil usullarini ko'rib chiqamiz va bunday yaqinlashtirishning aniqligini baholaymiz. Bobning oxirida interpolyatsiyalashning ayrim tatbiqlarini ko'rib chiqamiz.

5.2-§. Interpolyatsion ko'phadlarning mavjudligi va yagonaligi. Lagranj interpolyatsion formulasi

Biz asosan algebraik interpolyatsiyalash bilan shug'ullanamiz. Masalaning qo'yilishi quyidagichadir. Darajasi n dan yuqori bo'lmagan shunday ko'phad qurilsinki, u berilgan $(n+1)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarda berilgan

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu masalani geometrik ta'riflash ham mumkin: darajasi n dan ortmaydigan shunday $P(x)$ ko'phad qurilsinki, uning grafigi berilgan $(n+1)$ ta $M_k(x_k, f(x_k))$ ($k = \overline{0, n}$) nuqtalardan o'tsin.

Demak, c_m ($m = \overline{0, n}$) koeffitsiyentlarni shunday aniqlash kerakki,

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (5.2.1)$$

ko'phad uchun ushbu

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (5.2.2)$$

tengliklar bajarilsin. Bu tengliklarni ochib yozsak, c_m ($m = \overline{0, n}$) larga nisbatan $(n+1)$ noma'lumli $(n+1)$ ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \dots + c_n x_0^n = f(x_0), \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_n x_1^n = f(x_1), \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \dots + c_n x_n^n = f(x_n). \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Bu sistemaning determinanti Vandermond determinantidir: $W(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Masala mazmunidan ravshanki, x_k nuqtalar birbiridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (5.2.3) sistema va shu bilan birga qo'yilgan interpolatsiya masalasi yagona yechimga ega. Bu sistemani yechib, c_m larni topib (5.2.1)ga qo'ysa, $P(x)$ ko'phad aniqlanadi. Biz $P(x)$ ning oshkor ko'rinishini topish uchun boshqacha yo'l tutamiz, avvalo fundamental ko'phadlar deb ataluvchi $Q_{nj}(x)$ larni, ya'ni

$$Q_{nj}(x_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ bo'lganda,} \\ 1, & i = j \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiradigan n -darajali ko'phadlarni quramiz. U holda

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) Q_{nj}(x) \quad (5.2.4)$$

izlanayotgan interpolatsion ko'phad bo'ladi. Haqiqatan ham, barcha $i = 0, 1, 2, \dots, n$ uchun

$$L_n(x_i) = \sum_{j=0}^n f(x_j) Q_{nj}(x_i) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \delta_i^j = f(x_i)$$

va ikkinchi tomondan $L_n(x)$ n -darajali ko'phaddir.

Endi $Q_{nj}(x)$ ning oshkor ko'rinishini topamiz, $j \neq i$ bo'lganda $Q_{nj}(x_j) = 0$, shuning uchun ham $Q_{nj}(x)$ ko'phad $j \neq i$ bo'lganda $x - x_i$ ga bo'linadi. Shunday qilib, n -darajali ko'phadning n ta bo'luvchilari bizga ma'lum, bundan esa

$$Q_{nj}(x) = C \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)$$

kelib chiqadi. Noma'lum ko'paytuvchi C ni esa

$$Q_{nj}(x_j) = C \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i) = 1$$

shartdan topamiz; natijada:

$$Q_{nj}(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}.$$

Bu ifodani (5.2.4) ga qo'yib, kerakli ko'phadni aniqlaymiz:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}. \quad (5.2.5)$$

Bu ko'phad *Lagranj interpolatsion ko'phadi* deyiladi.

Bu formulaning xususiy hollarini ko'raylik: $n = 1$ bo'lganda Lagranj ko'phadi ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli formulasini beradi:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Agar $n = 2$ bo'lsa, u vaqtda kvadratik interpolatsion ko'phadga ega bo'lamiz, bu ko'phad uchta nuqtadan o'tuvchi va vertikal o'qqa ega bo'lgan parabolani aniqlaydi;

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2).$$

Misol 5.1. 0, 1, 2 nuqtalarda mos ravishla 1, 2, 5 qiymatlarni qabul qiluvchi kvadratik ko'phad qurilsin.

Yechish: Bu qiymatlarni oxirgi formulaga qo'yamiz:

$$L_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} \cdot 1 + \frac{(x - 0)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} \cdot 2 + \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} \cdot 5 = x^2 + 1.$$

Endi Lagranj interpolatsion formulasining boshqa ko'rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

ko'phadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \left[\prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i) \right].$$

Kvadrat qavs ichidagi ifoda $x = x_j$ va $k \neq j$ bo'lganda nolga aylanadi, chunki $(x_j - x_j)$ ko'paytuvchi qatnashadi. Demak,

$$\omega'_{n+1}(x_j) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)$$

Shuning uchun ham $\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ Lagranj koeffisientini

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x - x_j)}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan esa Lagranj ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega'_{n+1}(x_j)(x - x_j)}. \quad (5.2.6)$$

Endi tugunlar bir xil uzokdikda joylashgan: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$ xususiy holni ko'ramiz.

Bu holda soddalik uchun $x = x_0 + ih$ almashtirish bajaramiz, u holda

$$x - x_j = h(t - j), \quad \omega_{n+1}(x) = h^{n+1}\omega_{n+1}^*(x),$$

bu yerda

$$\omega_{n+1}^*(t) = t(t-1)\dots(t-n), \quad \omega'_{n+1}(x_j) = (-1)^{n-j}j!(n-j)!h^n$$

bo'lib, (5.2.6) Lagranj interpolatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$L_n(x_0 + th) = \omega_{n+1}^*(t) \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!}. \quad (5.2.7)$$

5.3-§. Eytken sxemasi

Interpolyatsion ko'phadni qurish uchun hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida Eytken sxemasini qo'llash qulaydir. $L_{(012\dots n)}(x)$ orqali $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar yordamida qurilgan n -darajali ko'phadni belgilaymiz. Ma'lum (5.2.5) formulaga ko'ra

$$L_{(01)}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_1) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0},$$

$$L_{(12)}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 - x \\ f(x_2) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

$$L_{(02)}(x) = \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) = \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_2) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Endi $L_{(02)}$ ifoda $f(x_0)$ va $f(x_2)$ lardan qanday qonuniyat bilan tuzilgan bo'lsa, xuddi shu qonuniyat bilan $L_{(01)}(x)$ va $L_{(12)}(x)$ yordamida tuzilgan

$$P(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_0 - x \\ L_{(12)}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

ifodani ko'rib chiqamiz. Ko'rinib turibdiki, $P(x)$ ikkinchi darajali ko'phad bo'lib,

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P(x_1) = f(x_1), \quad P(x_2) = f(x_2)$$

tengliklar o'rinlidir. Demak,

$$P(x) = L_{(012)}(x).$$

Shunday qilib, $L_{(01)}(x)$ va $L_{(12)}(x)$ ga birinchi tartibli interpolyatsiyani qo'llab, $L_{(012)}(x)$ ko'phadga ega bo'ldik. Xuddi shu natijani qolgan ikki formuladan ham hosil qila olamiz:

$$L_{(012)} = \frac{\begin{vmatrix} L_{(01)}(x) & x_1 - x \\ L_{(02)}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1},$$

$$L_{(012)} = \frac{\begin{vmatrix} L_{(02)}(x) & x_0 - x \\ L_{(12)}(x) & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Bu jarayonni cheksiz davom ettirishimiz mumkin.

Shunday qilib, $n + 1$ ta nuqta yordamida n -darajali interpolatsion ko'phad qurish uchun shu nuqtalarning n tasi yordamida tuzilgan ikkita bir-biridan farqli $(n - 1)$ -darajali interpolatsion ko'phadlarga birinchi tartibli interpolatsiyani qo'llash kerak. Masalan.

$$L_{(01234)} = \frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_3 - x \\ L_{(0124)}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_3} = \frac{\begin{vmatrix} L_{(0123)}(x) & x_0 - x \\ L_{(1234)}(x) & x_4 - x \end{vmatrix}}{x_4 - x_0}.$$

Yuqorida keltirilgan sxema *Eytken sxemasi* deyiladi. Odatda Eytken sxemasi $L_n(x)$ ning umumiy ko'rinishini topish uchun emas, balki uning biror x nuqtadagi qiymatini hisoblashda foydalaniladi. Hisoblashlarni jadval 5.1 shaklida yozish ma'quldir.

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{(i-1,i)}$	$L_{(i-2,\dots,i)}$	$L_{(i-3,\dots,i)}$	$L_{(i-4,\dots,i)}$	$L_{(i-5,\dots,i)}$
x_0	y_0	$x_0 - x$					
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{(01)}(x)$				
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{(12)}(x)$	$L_{(012)}(x)$			
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{(23)}(x)$	$L_{(123)}(x)$	$L_{(0123)}(x)$		
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{(34)}(x)$	$L_{(234)}(x)$	$L_{(1234)}(x)$	$L_{(01234)}(x)$	
x_5	y_5	$x_5 - x$	$L_{(45)}(x)$	$L_{(345)}(x)$	$L_{(2345)}(x)$	$L_{(12345)}(x)$	$L_{(012345)}(x)$

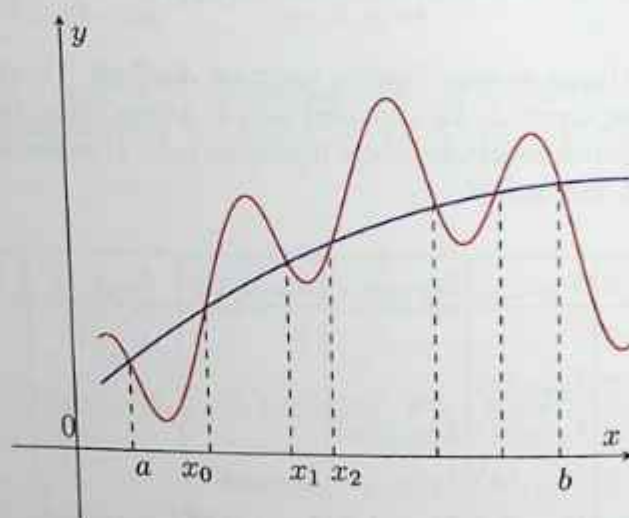
Jadval 5.1

Misol 5.2. Qadami $h = 0,01$ ga teng bo'lgan $\sin x$ ning jadvalidan foydalanib, $\sin x$ ning $x = 0,704$ nuqtadagi qiymatini topamiz. Hisoblash natijalari jadval 5.2 da keltirilgan.

0,68	0,62879	-0,024	0,647400			
0,69	0,63654	-0,014	0,647400			
0,70	0,64422	-0,004	0,647292	0,6472488		
0,71	0,65183	-0,006	0,637264	0,6472808	0,6472626	
0,72	0,65938	0,016	0,647300	0,6472424	0,6473038	0,6472679
$\sin 0,704 = 0,64727$						

Jadval 5.2

5.4-§. Lagranj interpolatsion formulasining qoldiq hadini baholash



Chizma 5.4.1

Agar biror $[a, b]$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyani $L_n(x)$ interpolatsion ko'pxad bilan almashtirsak, ular interpolatsiya tugunlarida o'zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa farq qiladi (chizma 5.4.1).

Shuning uchun qoldiq hadning $R(x) = f(x) - L_n(x)$ ko'rinishini topish va uni baholash bilan shug'ullanish maqsadga muvofiq. Buning uchun interpolatsiya tugunlarini o'z ichiga oladigan $[a, b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya

$(n+1)$ - tartibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz qilamiz. Interpolyatsiyaning qoldiq hadi $R(x)$ uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema 5.1. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $(n+1)$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda interpolyatsiya qoldiq hadini

$$R(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (5.4.1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\xi \in [a, b]$ bo'lib, umuman aytganda x ning funksiyasidir.

Isbot. (5.4.1) ni ko'rsatish uchun yordamchi $\varphi(z) = R(z) - K\omega_{n+1}(z)$ funksiyani tekshiramiz, bu yerda K noma'lum o'zgarmas koeffitsiyent. Bu funksiyaning $z = x_0, x_1, \dots, x_n$ larda nol qiymatlarni qabul qilishi ravshan. Noma'lum K koeffitsiyentini shunday tanlaymizki, $\varphi(z)$ funksiya $z = x \in [a, b]$ va $x = x_i$ ($i = 0, n$) nuqtalarda nol qiymatni qabul qilsin. Demak,

$$K = \frac{R(x)}{\omega_{n+1}(x)}. \quad (5.4.2)$$

Natijada $\varphi(z)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning $(n+2)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ nuqtalarida nolga aylanadi. Roll teoremasiga ko'ra $\varphi'(z)$ bu oraliqda kamida $(n+1)$ ta nuqtada nolga aylanadi, $\varphi''(z)$ esa kamida n ta nuqtada va hokazo, $\varphi^{(n+1)}(z)$ kamida bitta nuqtada nolga aylanadi. Aytaylik, bu nuqta ξ bo'lsin, $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Bundan $L_n(x)$ ning n - darajali ko'phad ekanligini hisobga olsak:

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0, \end{aligned}$$

ya'ni $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ va bundan hamda (5.4.2) dan (5.4.1) formulaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. ■

5.5-§. Interpolyatsion formulalar qoldiq hadlarini minimallashtirish va Chebishev ko'phadlari

Mumkin qadar kichik bo'lgan va $|R(x)| \leq \alpha(x)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a(x)$ miqdor interpolyatsiya metodining x nuqtadagi absolyut

xatosi va $a \leq x \leq b$ oraliqda $\alpha(x) \leq \alpha^*$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi mumkin qadar kichik bo'lgan α^* miqdor esa interpolatsiya metodining $[a, b]$ oraliqda absolyut xatosi bo'ladi.

Agar $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ ni aniqlash mumkin bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ va α^* ni tabiiy ravishda

$$\alpha(x) = M_{n+1} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!},$$

$$\alpha^* = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| \quad (5.5.1)$$

tengliklar bilan aniqlash mumkin. Oxirgi tenglik shuni ko'rsatadiki agar $f(x)$ funksiya va shu bilan birga M_{n+1} berilgan bo'lsa, u holda α^* faqat $\omega_{n+1}(x)$ gagina bog'liq bo'lib qoladi. Lekin $\omega_{n+1}(x)$ ko'phad interpolatsiya tugunlari $x_0, x_1, \dots, x_n$ bilan to'la ravishda aniqlanadi.

Shunday savol tug'ilishi mumkin: $[a, b]$ oraliqda interpolatsiya tugunlarini tanlash hisobiga shu oraliqda interpolatsiya metodining absolyut xatosi eng kichik bo'lishiga erishish mumkinmi? Bu savolga javob berish uchun P. L. Chebishev ko'phadlari va ularning xossalariidan foydalanamiz.

Chebishev ko'phadlari $T_n(x)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \quad |x| \leq 1.$$

Bundan $n = 1$ da

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

va $n = 2$ da

$$T_2(x) = \cos[2 \arccos x] = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$$

So'ngra

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

ayniyatda $\theta = \arccos x$ deb olib $T_n(x)$ uchun

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (5.5.2)$$

rekurrent munosabatga ega bo'lamiz. Bu munosabatdan ko'rinadiki, $T_n(x)$ n -darajali ko'phad bo'lib, x ning yuqori darajasining koeffitsiyenti

(2^{n-1}) ga teng ekan. (5.5.2) formuladan ketma-ket quyidagilarni topish mumkin:

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$\vdots$

$T_n(x)$ ning barcha n ta ildizlari haqiqiy bo'lib $[-1, 1]$ oraliqda joylashgan. Ular $\cos[\arccos x] = 0$ tenglikdan topiladi:

$$n \arccos x = \frac{\pi}{2}(2k+1) \text{ yoki } x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Bunda k ga n ta turli $0, 1, \dots, n-1$ qiymatlar berib, n ta turli ildizlarga ega bo'lamiz. Endi $T_n(x)$ ning $[-1, 1]$ oraliqdagi maksimum va minimumlarini topamiz. Statsionar nuqtalari $T'_n(x) = 0$ dan, ya'ni $\sin[n \arccos x] = 0$ tenglikdan topiladi. Bundan $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$ ($m = 0, 1, \dots, n$) va $T_n(\cos \frac{m\pi}{n}) = (-1)^m$. Demak, barcha maksimumlar 1 ga teng.

Agar interpolatsiyalash oralig'i $[a, b]$ sifatida $[-1, 1]$ va interpolatsiya tugunlari sifatida esa Chebishev ko'phadlarining ildizlari x_k lar olinsa, u holda $\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ va $\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n}$ bo'ladi.

Quyidagi

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \dots$$

ko'phadlar *noldan eng kam og'uvchi ko'phadlar* deyiladi.

Bu ta'rifning ma'nosini quyidagi lemma aniqlaydi.

Lemma 5.5.1. *Bosh koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lgan har qanday n darajali $P_n(x)$ ko'phad uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \geq \max_{-1 \leq x \leq 1} |\bar{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz. U holda $\bar{T}_n(x) - P_n(x)$ ko'phad $(n-1)$ -darajali bo'lib, shu bilan birga

$$\text{sign} [\bar{T}_n(x_k) - P_n(x_k)] = \text{sign} \left[\frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(x_k) \right] = (-1)^k,$$

chunki, shartga ko'ra, barcha k lar uchun $|P_n(x_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Shunday qilib, $\bar{T}_n(x) - P_n(x)$ ko'phad barcha $k = 0, 1, \dots, n$ lar uchun qo'shni x_k va x_{k+1} nuqtalarda ishorasini o'zgartiradi. Demak, $(n-1)$ -darajali $\bar{T}_n(x) - P_n(x)$ ko'phad noldan farqli, chunki u $x_k (k = \overline{0, n})$ nuqtalarda noldan farqli bo'lib, n ta har xil ildizlarga ega. Bu esa qarama-qarshilikka olib keladi.

Agar interpolatsiya ixtiyoriy $[a, b]$ oraliqda bajarilsa, u holda

$$x = \frac{1}{2} [(b-a)z + b + a]$$

chiziqli almashtirish yordamida uni $[-1, 1]$ oraliqqa keltirishi mumkin. Shu bilan birga $\bar{T}_n(x)$ ko'phad bosh koeffitsiyenti $\frac{2^n}{(b-a)^n}$ ga teng bo'lgan $\bar{T}_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ ko'phadga aylanadi.

Lemmaga ko'ra, bosh koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lgan

$$\bar{T}_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} \bar{T}_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

ko'phad $[a, b]$ oraliqda noldan eng kam og'adigan ko'phaddir. $\bar{T}_n^{[a,b]}(x)$ ning ildizlari

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2k+1)}{2n} \quad (k = \overline{0, n-1})$$

ekanligiga osongina ishonch hosil qilish mumkin. Ixtiyoriy oraliq uchun interpolatsion formulaning xatoligi quyidagicha bo'ladi:

$$|R(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

5.6-§. Bo'lingan ayirmalar va ularning xossalari

Hosila tushunchasining umumlashmasi bo'lgan bo'lingan ayirmalar tushunchasini kiritamiz. Biror sinfdan olingan $f(x)$ funksiya va bir-birlaridan farqli $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar berilgan bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning $x = x_i$ tugundagi nolinch tartibli bo'lingan ayirmasi deb $f(x_i)$ ga aytiladi; birinchi tartibli bo'lingan ayirmasi esa (x_i, x_j) tugunlarda)

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (5.6.1)$$

tenglik bilan aniqlanadi, x_i, x_j, x_m tugunlarga mos kelgan ikkinchi tartibli esa

$$f(x_i, x_j, x_m) = \frac{f(x_j, x_m) - f(x_i, x_j)}{x_m - x_i}$$

tenglik bilan va, umuman, k -tartibli bo'lingan $f(x_0, \dots, x_k)$ ayirmas ($k-1$)-tartibli orqali

$$f(x_0, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, \dots, x_k) - f(x_0, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

formula bilan aniqlanadi. Bo'lingan ayirmalarni jadval 5.3 ko'rinishida yozish ma'quldir.

x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$		

Jadval 5.3

Lemma 5.6.1. *Bo'lingan ayirmalar uchun*

$$f(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{i=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad (5.6.2)$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. Lemmani induksiya metodi bilan isbot qilamiz: $k=0$ bo'lganda (5.6.2) $f(x_0) = f(x_0)$ tenglikka aylanadi. $k=1$ bo'lganda (5.6.2) tenglik (5.3) tenglik bilan ustma-ust tushadi. Faraz qilaylik, (5.6.2) tenglik $k \leq n$ uchun o'rinli bo'lsin. U vaqtda

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_{n+1}) &= \frac{f(x_1, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, \dots, x_n)}{x_{n+1} - x_0} = \\ &= \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n+1}} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq j \leq n}} (x_i - x_j)} \right] \end{aligned}$$

Bu tenglikning o'ng tomonida $i \neq 0$, $i \neq n+1$ bo'lganda $f(x_i)$ oldidagi koeffitsiyent quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_{n+1} - x_0} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n+1}} (x_j)} - \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq j \leq n}} (x_i - x_j)} \right] \Rightarrow \\ & = \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0) \prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq j \leq n+1}} (x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq i \\ 0 \leq j \leq n+1}} (x_i - x_j)}, \end{aligned}$$

ya'ni izlanayotgan ko'rinishga ega; $i = 0$ va $i = n+1$ lar uchun $f(x_i)$ faqat bir martagina qatnashadi va uning oldidagi koeffitsiyent kerakli ko'rinishga ega bo'ladi. Shu bilan lemma isbot bo'ldi. ■

Bu lemmadan qator natijalar kelib chiqadi.

1- natija. Funktsiyalar algebraik yig'indisining bo'lingan ayirmasi qo'shiluvchilar bo'lingan ayirmalarining algebraik yig'indisiga teng.

2- natija. O'zgaras ko'paytuvchini bo'lingan ayirma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

3- natija. Bo'lingan ayirma o'z argumentlari $x_0, x_1, \dots, x_n$ larning simmetrik funksiyasidir, ya'ni ularning o'rinlari almashtirilganda bo'lingan ayirma o'zgarmaydi.

5.7-§. Nyutonning bo'lingan ayirmali interpolatsion formulasi

Lagranj interpolatsion ko'phadining har bir hadi interpolatsiya tugunlarining hammasiga bog'liqdir. Agar yangi tugunlar kiritiladigan bo'lsa, interpolatsion ko'phadni qaytadan qurishga to'g'ri keladi. Bu Lagranj interpolatsion ko'phadining kamchiligidir. Lagranj interpolatsion ko'phadini shunday tartibda yozish mumkinki, hosil bo'lgan ko'phadning ixtiyoriy i -hadi interpolatsiya tugunlarining faqat avvalgi i tasiga va funksiyaning shu tugunlardagi qiymatlariga bog'liq bo'ladi. Aytilganlarni

bo'lingan ayirmalar yordamida bajaramiz:

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x - x_i) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \\ &= \omega_{n+1}(x) \left[\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} + \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \right]. \end{aligned}$$

Bu ifodani 5.6-paragrafdagi lemma bilan solishtirib ko'rsak, kvadrat qavs-lar ichidagi ifoda $f(x, x_0, \dots, x_n)$ ning aynan o'zi ekanligi kelib chiqadi. Demak, biz

$$f(x) - L_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \omega_{n+1}(x) \quad (5.7.1)$$

deb yozishimiz mumkin.

Endi $L_n(x)$ tugunlari $x_0, x_1, \dots, x_m$ dan iborat bo'lgan Lagranj inter-polyatsion ko'phadi bo'lsin. U holda Lagranjning $L_n(x)$ interpolatsion ko'phadini

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)] \quad (5.7.2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Bu yerda $L_m(x) - L_{m-1}(x)$ $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ nuqtalarda nolga ay-lanadigan m - darajali ko'phad, chunki $L_m(x_j) = L_{m-1}(x_j) = f(x_j)$ ($j = \overline{0, m-1}$). Shuning uchun ham

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_m \omega_m(x), \quad \omega_m(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{m-1}).$$

Bunda $x = x_m$ deb olsak,

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_m \omega_m(x_m)$$

ga ega bo'lamiz. Ikkinchi tomondan (5.7.1) tenglikda $n = m - 1$ va $x = x_m$ deb olsak, u holda

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m, x_0, \dots, x_{m-1}) \omega_m(x_m).$$

Shunday qilib, $A_m = f(x_0, \dots, x_m)$ va demak,

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0, \dots, x_m) \omega_m(x).$$

Bu miqdorlarni (5.7.2) tenglikka qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \\ &\dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

Bu hosil bo'lgan interpolatsion ko'phad Nyutonning bo'lingan ayirmali interpolatsion ko'phadi deyiladi.

(5.7.1) tenglikni $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$ tenglik bilan solishtir-sak

$$f(x, x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, x_0 \leq \xi \leq x_n \quad (5.7.4)$$

kelib chiqadi.

Endi bir xususiy holni, ya'ni $f(x)$ m -darajali ko'phad

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

bo'lgan holni qaraylik. (5.7.4) formuladan ixtiyoriy $x_0, x_1, \dots, x_n$ lar uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_m(x, x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} a_n, & \text{agar } m = n \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } m < n \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Nyuton interpolatsion formulasini tuzishda ham Eytken sxemasi-dan foydalanish mumkin. Quyida Nyuton interpolatsion formulasining qo'llanilishiga doir misol keltirilgan.

Misol 5.3. $y = f(x)$ funksiyaning quyidagi

x	0	5	10	12	13	15	16
y	1	151	1051	1789	2263	3451	4177

jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib, uning $x = 12,5$ dagi qiy-matini topaylik.

Yechish: Bo'lingan ayirmalar jadvalini tuzamiz:

0	1			
		30		
5	151		15	
		180		1
10	1051		27	
		369		1
12	<u>1789</u>		35	
		<u>474</u>		1
13	2263		<u>40</u>	
		594		<u>1</u>
15	3451		44	
		726		
16	4177			

Uchinchi tartibli bo'lingan ayirma o'zgarmas bo'lganligi uchun $y = f(x)$ funksiya 3-darajali ko'phad ekan. Berilgan $x = 12,5$ qiymat jadvaldagi $x = 12$ va $x = 13$ qiymatlar orasida bo'lganligi uchun osti chizilgan bo'lingan ayirmalardan foydalanib, Nyutonning interpolyatsion formulasini tuzamiz:

$$f(x) = 1789 + 474(x - 12) + 40(x - 12)(x - 13) + (x - 12)(x - 13)(x - 15).$$

Bundan

$$f(12,5) = 1789 + 474 \cdot 0,5 - 40 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 2016,625. \quad \blacksquare$$

5.8-§. Chekli ayirmalar va ularning xossalari

Faraz qilaylik, argumentning o'zaro teng uzoqlikda joylashgan $x_i = x_0 + ih$ (h - jadval qadami) qiymatlarida $f(x)$ funksiyaning mos ravishdagi qiymatlari $f_i = f(x_i)$ berilgan bo'lsin. Ushbu $f_{i+1} - f_i$ ayirmaga *birinchi tartibli chekli ayirma* deyiladi; sharoitga ko'ra bu miqdorni o'ng chekli ayirma: Δf_i , chap chekli ayirma: ∇f_{i+1} yoki markaziy ayirma: $\delta f_{i+1/2} = f_{i+1/2}$ lar kabi belgilanadi. Shunday qilib, quyidagicha yoza olamiz:

$$f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2} = f_{i+1/2}^1. \quad (5.8.1)$$

Yuqori tartibli ayirmalar rekurrent munosabatlar yordamida tuziladi:

$$\begin{aligned}\Delta^k f_i &= \Delta (\Delta^{k-1} f_i) = \Delta^{k-1} (\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \\ \nabla^k f_i &= \nabla (\nabla^{k-1} f_i) = \nabla^{k-1} (\nabla f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}, \\ \delta^k f_i &= \delta (\delta^{k-1} f_i) = \delta^{k-1} (\delta f_i) = \delta^{k-1} f_{i+1/2} - \delta^{k-1} f_{i-1/2}, \\ f_i^k &= f_{i+1/2}^{k-1} - f_{i-1/2}^{k-1}.\end{aligned}$$

Ayirmalar jadvali odatda quyidagicha tasvirlanadi:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_0	f_0				
		$f_{1/2}^1$			
x_1	f_1		f_1^2		
		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$	
x_2	f_2		f_2^2		f_2^4
		$f_{5/2}^1$		$f_{5/2}^3$	
x_3	f_3		f_3^2		
		$f_{7/2}^1$			
x_4	f_4				

Hisoblash praktikasida ishning hamma bosqichlarida nazorat qiluvchi amallarning mavjudligi talab qilinadi. Bu narsa qo'pol xatolarga yo'l qo'ymaslikka yoki hech bo'lmaganda ularni minimumga keltirish uchun xizmat qiladi. Bunday nazorat qiluvchi amallar ayirmalar jadvalini tuza-yotganda bevosita hosil bo'ladi. (5.8.1) va undan keyingi formulalardan ko'rinib turibdiki,

$$\begin{aligned}f_{1/2}^1 + f_{3/2}^1 + \dots + f_{n-1/2}^1 &= f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + \dots + f_n - f_{n-1} = \\ &= f_n - f_0, \\ f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{n-1}^2 &= f_{3/2}^1 - f_{1/2}^1 + f_{5/2}^1 - f_{3/2}^1 + \dots + f_{n-1/2}^1 - f_{n-3/2}^1 = \\ &= f_{n-1/2}^1 - f_{1/2}^1,\end{aligned}$$

ya'ni jadvalning har bir ustunidagi sonlarning yig'indisi avvalgi ustun eng chetki elementlarining ayirmasiga teng. Ayrim interpolyatsion formulalarda f_i va ularning chekli ayirmalari bilan bir qatorda ayirmalarning quyidagi o'rta arifmetigi ishlatiladi:

$$\mu f_i^{2k-1} = \frac{f_{i-1/2}^{2k-1} + f_{i+1/2}^{2k-1}}{2},$$

$$\mu f_{i+1/2}^{2k} = \frac{f_i^{2k} + f_{i+1}^{2k}}{2}.$$

Endi chekli ayirmalarning ayrim xossalarini ko'rib chiqamiz.

Lemma 5.8.1. *k-tartibli chekli ayirma funksiyaning qiymatlari orqali quyidagi formula bilan ifodalanadi:*

$$f_i^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f_{i+\frac{k}{2}-j}. \quad (5.8.2)$$

Bu yerda k juft bo'lganda i butun bo'lib, k toq bo'lganda i yarim butundir.

Isbot. Matematik induksiya metodi bilan isbot qilamiz. $k = 1$ bo'lganda, (5.8.1) ga ko'ra (5.8.2) ning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Faraz qilaylik, (5.8.2) formula $k = l$ bo'lganda o'rinli bo'lsin. U holda

$$f_i^{l+1} = f_{i+\frac{1}{2}}^l - f_{i-\frac{1}{2}}^l = \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j f_{i+\frac{1}{2}+\frac{l}{2}-j} - \sum_{j=0}^l (-1)^j C_l^j f_{i-\frac{1}{2}+\frac{l}{2}-j}.$$

Bu tenglikda bir xil f_m lar oldidagi koeffitsiyentlarni yig'ib va

$$C_l^j + C_l^{j+1} = C_{l+1}^{j+1}$$

tenglikdan foydalanib, f_i^{l+1} uchun izlangan ifodaga ega bo'lamiz. Shu bilan lemma isbot bo'ldi. ■

Misol 5.4. $k = 2, 3, 4$ uchun (5.8.2) dan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} f_i^2 &= f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}, \\ f_i^3 &= f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}, \\ f_i^4 &= f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}/ \end{aligned}$$

Bu lemmadan quyidagi natijalarga kelamiz.

1-natija. Ikkita φ va g funksiya yig'indisi yoki ayirmasiyaning f_i^k chekli ayirmalari mos ravishda shu funksiyalar chekli ayirmalarining yigindisi yoki ayirmasiga teng:

$$f_i^k = \varphi_i^k \pm g_i^k.$$

2-natija. Funksiya bilan o'zgarmas son ko'paytmasining chekli ayirmalari funksiya chekli ayirmalari bilan o'zgarmas sonning ko'paytmasiga teng:

$$(af)_i^k = af_i^k.$$

Lemma 5.8.2. *Jadvalning qadami $h = x_i - x_{i-1}$ o'zgarmas bo'lsa, u holda bo'lingan ayirma bilan chekli ayirma orasida quyidagi munosabat o'rinlidir:*

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{h^k k!}. \quad (5.8.3)$$

Isbot. Isbotni bu yerda ham induksiya metodi bilan olib boramiz. $k = 1$ bo'lganda

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1/2}^1}{h},$$

bo'lib, (5.8.3) formulaning to'g'riligi ravshan. Faraz qilaylik, (5.8.3) formula barcha $m \leq k$ lar uchun o'rinli bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} f(x_i, \dots, x_{i+k+1}) &= \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \dots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i} = \\ &= \frac{f_{i+1+k/2}^k - f_{i+k/2}^k}{(h^k k!) (h(k+1))} = \frac{f_{i+(k+1)/2}^k}{h^{k+1} (k+1)!}. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (5.8.3) formula $m = k + 1$ uchun ham o'rinli ekan. Lemma isbotlandi. ■

Endi (5.7.4) formulaga ko'ra

$$f(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+k}.$$

Bu tenglikni (5.8.3) bilan solishtirib,

$$\Delta^k f_i = \nabla^k f_{i+k} = \delta^k f_{i+k/2} = f^{(k)}(\xi) h^k$$

ni hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikdan quyidagi natijaga kelamiz.

3- natija. n -darajali ko'phadning n -tartibli chekli ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lib, undan yuqori tartibli esa nolga teng.

Oxirgi natija ko'phad jadvalini tuzishning qulay usulini beradi. Avval argumentning $(n+1)$ ta qiymatlarida n -darajali ko'phadning qiymatlarini hisoblaymiz. Shu ma'lumotlardan foydalanib, n -tartibli ayirmalar jadvalini tuzamiz, so'ngra, n -tartibli ayirmalarning doimiylikidan foydalanib, n -tartibli ayirmalar ustunini to'ldiramiz. Undan keyin, $(n-1)$ -, $(n-2)$ - tartibli va hokazo ayirmalar ustunlarini to'ldiramiz. Bu ustunlarni to'ldirayotganda

$$f_i^k = f_{i-1/2}^k + f_{i-1/2}^{k+1}$$

formuladan foydalanamiz. Amaliyotda bu usulni qo'llayotganda qo'pol xatolarga yo'l qo'ymaslik maqsadida vaqti-vaqti bilan ko'phadning qiymatini hisoblab turish maqsadga muvofiqdir.

Misol 5.5. *Jadval qadamini $h = 1$ va dastlabki qiymatni $x_0 = 1$ deb hisoblab, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ ko'phadning ayirmalar jadvali tuzilsin.*

Yechish: $f(x)$ ning $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ nuqtalardagi qiymatlarini, hisoblaymiz: $f_0 = -7, f_1 = 3, f_2 = 31$. Bundan esa quyidagilar kelib chiqadi:

$$f_{1/2}^1 = f_1 - f_0 = 10, f_{3/2}^1 = f_2 - f_1 = 28, f_1^2 = f_{3/2}^1 - f_{1/2}^1 = 18.$$

x	f	f_1	f_2	f_3
1	-7			
		10		
2	3		18	
		28		6
3	31		24	
		52		6
4	83		30	
		82		6
5	165		36	
		118		6
6	283		42	
		160		
7	443			

Jadval 5.4

Bu qiymatlarni jadval 5.4 ga joylashtiramiz. Bizning funksiyamiz 3-darajali ko'phad bo'lganligi uchun uning 3-tartibli ayirmasi o'zgarmas son bo'lib, $f_{3/2}^3 = 3! = 6$ ga tengdir. Jadval (5.4) ning qolgan ustunlari quyidagi

$$\begin{aligned} f_i^2 &= f_{i-1}^2 + f_{i-1/2}^3 & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ f_{i+1/2}^1 &= f_{i-1/2}^1 + f_i^2 & (i = 2, 3, \dots), \\ f_i &= f_{i-1} + f_{i-1/2}^1 & (i = 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

formulalar yordamida to'ldiriladi.

Ayirmalar jadvalini tuzayotganda hisoblovchi tasodifan xatoga yo'l qo'yishi mumkin. Hozir biz f_i ni hisoblashda yo'l qo'yilgan ε xato ayirmalarga qanday ta'sir qilishini kuzatamiz (jadval (5.5)).

Jadval (5.5) dan yoki (5.8.2) formuladan ko'rinadiki, k - tartibli ayirmaga xato $(-1)^j C_k^j (j = \overline{0, k})$ koeffitsiyent bilan tarqaladi, demak k -tartibli ayirma maksimal xatosining absolyut qiymati juda tez o'sadi: har bir f_i^k ayirma uchun xatolarning ishorasi bilan olingan yig'indi nolga teng bo'lib, absolyut qiymati bilan olingan yig'indi esa $|\varepsilon|2^k$ ga teng. Shunday qilib, funksiyaning qiymatlari hisoblanayotganda yo'l qo'yilgan arizmas xato uning yuqori tartibli ayirmalariga katta ta'sir ko'rsatar ekan.

Ayirmalar jadvalidagi ε xatoning tarqalish qonuni ayrim hollarda bu xatoning o'rnini va qiymatini topishga hamda jadvalni tuzatishga imkon beradi. Odatda ayirmalar jadvali biror belgilangan o'uli xona aniqligida hisoblanadi.

Agar $y = f(x)$

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
...	...	...	...	...	...
x_{i-4}	f_{i-4}				
		$f_{i-7/2}^1$			
x_{i-3}	f_{i-3}		f_{i-3}^2		
		$f_{i-5/2}^1$		$f_{i-5/2}^3$	
x_{i-2}	f_{i-2}		f_{i-2}^2		$f_{i-2}^4 + \varepsilon$
		$f_{i-3/2}^1$		$f_{i-3/2}^3 + \varepsilon$	
x_{i-1}	f_{i-1}		$f_{i-1}^2 + \varepsilon$		$f_{i-1}^4 - 4\varepsilon$
		$f_{i-1/2}^1 + \varepsilon$		$f_{i-1/2}^3 - 3\varepsilon$	
x_i	$f_i + \varepsilon$		$f_i^2 - 2\varepsilon$		$f_i^4 + 6\varepsilon$
		$f_{i+1/2}^1 - \varepsilon$		$f_{i+1/2}^3 + 3\varepsilon$	
x_{i+1}	f_{i+1}		$f_{i+1}^2 + \varepsilon$		$f_{i+1}^4 - 4\varepsilon$
		$f_{i+3/2}^1$		$f_{i+3/2}^3 - \varepsilon$	
x_{i+2}	f_{i+2}		f_{i+2}^2		$f_{i+2}^4 + \varepsilon$
		$f_{i+5/2}^1$		$f_{i+5/2}^3$	
x_{i+3}	f_{i+3}		f_{i+3}^2		
		$f_{i+7/2}^1$			
x_{i+4}	f_{i+4}				
...	...	...	...	...	...

Jadval 5.5

funksiya k - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda uning k -tartibgacha bo'lgan ayirmalari tekis o'zgarib, k -tartibli belgilangan o'uli xona miqyosida deyarli o'zgarmas bo'ladi. Jadvalning biror qismida oxirgi shartning bajarilmasligi, umuman aytganda, hisoblash xatosi mavjudligi

dan dalolat beradi. k -tartibli ayirmaning normadan maksimal og'ishini o'rnatilgandan keyin, quyidagi shartlar bajarilganda bu xatoning o'rnini va qiymatini aniqlash mumkin:

1) bu xato faqat bir joyda va funksiyaning qiymatini hisoblash paytida sodir bo'lgan;

2) chekli ayirmalarni hisoblayotganda boshqa xatoga yo'l qo'yilmagan.

Jadval 5.5 dan ko'rinadiki, f_i^k dagi maksimal xato f_i ning xato qiymati joylashgan satrda yoki undan bitta yuqoridagi va bitta pastdagi satrlarda bo'ladi. Shunday qilib, xato hisoblangan jadvaldagi $f_n + \varepsilon$ qiymatning o'rnini n ma'lum bo'lib, miqdori ε ni topish kerak bo'lsin. Soddalik uchun uchinchi ayirma deyarli o'zgarmas bo'lsin deb faraz qilamiz, u holda ikkinchi ayirma arifmetik progressiyaning tashkil etadi va shuning uchun ham ikkinchi ayirma f_i^2 ning aniq qiymati uchta o'zaro qo'shni xato ayirmalarning o'rta arifmetigiga teng bo'ladi (q. jadval 5.5):

$$f_i^2 = \frac{1}{3} \left[(f_{i-1}^2 + \varepsilon) + (f_i^2 - 2\varepsilon) + (f_{i+1}^2 + \varepsilon) \right],$$

chunki ε lar o'zaro qisqarib ketadi. Ikkinchi ayirma f_i^2 ning topilgan aniq qiymatidan foydalanib xato miqdori ε ni aniqlash mumkin. Bu miqdor ikkinchi ayirmaning tuzatilgan qiymati bilan xato qiymati orasidagi ayirmaning yarmiga teng:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[f_i^2 - (f_i^2 - 2\varepsilon) \right].$$

f_i ning aniq qiymati esa

$$f_i = (f_i + \varepsilon) - \varepsilon$$

ayniyatdan topiladi. Hisoblashning to'g'riligini tekshirish uchun ayirmalarni yana bir marta hisoblash kerak.

x	f	f^1	f^2	xato
1,9	6,190	174		
2,0	6,364	174	0	
2,1	6,538	174	0	
2,2	6,712	1(69)74	(-5)0	ε
2,3	6,88(1)6	17(9)4	(10)0	-2ε
2,4	7,060	174	(-5)0	ε
2,5	7,234	174	0	
2,6	7,408	174	0	
2,7	7,582			

Jadval 5.6

Misol 5.6. Jadval 5.6 dagi xato tuzatilsin.

Yechish: Jadvalda xato raqamlar qavs ichida olingan va ayirmalar ustunida o'nli xonalar ko'rsatilmagan, ular funksiya qiymatlari ustunidan ayon. Bundan ko'rinadiki, ikkinchi ayirmaning tekis o'zgarishi $x = 2,3$ da buzilmoqda. Mavjud xato katta qavsga olingan uch satrga tarqalgan, $x = 2,3$ dagi f_i^2 ning aniq qiymatini topish uchun ikkinchi ayirmalarning har uch satrdagi qiymatlari o'rta arifmetigini olamiz:

$$f_i^2 = \frac{10^{-3}}{3}(-5 + 10 - 5) = 0.$$

Bundan

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(0 - 0,010) = -0,005.$$

$f(x)$ ning $x = 2,3$ nuqtadagi qiymatiga tuzatish sifatida, aniq qiymatini topamiz:

$$f_i = (f_i + \varepsilon) - \varepsilon = 6,881 - (-0,005) = 6,886.$$

Bu tuzatishlardan keyin birinchi ayirma o'zgarmas bo'lib, ikkinchi ayirma nolga teng bo'ladi.

5.9-§. Tugunlar teng uzoqlikda joylashgan hol uchun Nyuton interpolatsion formulalari

Ushbu va keyingi paragraflarda interpolatsiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan holni, ya'ni $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda interpolatsion formulaning ko'rinishlari ancha soddalashadi. Biz hozir Nyutonning ikkita interpolatsion formulasini chiqaramiz. Bularning birinchisi funksiyani jadval boshida va ikkinchisi jadval oxirida interpolatsiyalash uchun mo'ljallangan (5.11-§ga qarang).

Faraz qilaylik, $L_n(x)$ $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar bo'yicha tuzilgan Nyuton interpolatsion ko'phadi bo'lsin:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.9.1)$$

Bundagi bo'lingan ayirmalarni (5.8.3) formulaga ko'ra chekli ayirmalar bilan almashtiraylik.

Ushbu $x = x_0 + th$ almashtirishni ham bajargandan keyin (5.9.1) ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{3/2}^3 + \dots + \frac{t(t-1) \dots [t-(n-1)]}{n!} f_{n/2}^n. \quad (5.9.2)$$

Bu formulaning qoldiq hadi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h) \dots (x - x_0 - nh) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n). \quad (5.9.3)$$

(5.9.2) formula *Nyutonning jadval boshidagi yoki olq'a interpolatsion formulasi* deyiladi.

Endi (5.9.1) formulada interpolatsiyalash tugunlari sifatida $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}$ tugunlarni olamiz:

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_{-1})(x - x_0) + f(x_0, x_{-1}, x_{-2})(x - x_0)(x - x_{-1}) + \dots + f(x_0, \dots, x_{-n})(x - x_0) \dots (x - x_{-(n-1)}). \quad (5.9.4)$$

Bo'lingan ayirmalar o'z argumentining simmetrik funksiyasi bo'lganligi uchun

$$f(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) = f(x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0).$$

(5.9.4) formulada yana bo'lingan ayirmalarni chekli ayirmalar bilan almashtirib va $x = x_0 + th$ deb olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + f_{-1/2}^1 t + f_{-1}^2 \frac{t(t+1)}{2} + \dots + f_{-n/2}^n \frac{t(t+1) \dots [t+(n-1)]}{n!}. \quad (5.9.5)$$

Bu formula Nyutonning jadval oxiridagi yoki orqaga interpolatsion formulasi deyiladi.

Bu formulaning qoldiq hadi

$$\frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol 5.7. *Jadval (5.7) da ehtimollik integrali*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ning qiymatlari berilgan. Nyutonning interpolatsion formulalari yordamida $\Phi(0,64)$ va $\Phi(1,45)$ lar hisoblansin.

x	Φ	Φ^1	Φ^2	Φ^3
0,5	0,5205			
		834		
0,6	0,6039		-95	
		739		-1
0,7	0,6778		-96	
		643		1
0,8	0,7421		-95	
		548		5
0,9	0,7969		-90	
		458		7
1,0	0,8427		-83	
		375		9
1,1	0,8802		-74	
		301		10
1,2	0,9103		-64	
		237		10
1,3	0,9340		-54	
		183		9
1,4	0,9523		-45	
		138		
1,5	0,9661			

Jadval 5.7

Yechish: x_0 sifatida jadvaldagi qiymatlarning $x = 0,64$ ga eng yaqinini, ya'ni $x = 0,6$ ni olamiz. Bu yerda $h = 0,1$ bo'lgani uchun

$$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,64 - 0,6}{0,1} = 0,4.$$

(5.9.2) da $n = 3$ deb olib, bu qiymatlarni keltirib qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \Phi(0,64) &\simeq 0,6039 + 0,4 \cdot 0,0739 + \frac{0,4 \cdot (0,4 - 1)}{2} (-0,0096) + \\ &+ \frac{0,4(0,4 - 1)(0,4 - 2)}{3!} \cdot 0,0001 = 0,63462. \end{aligned}$$

Jadvaldagi qiymati esa $\Phi(0,64) = 0,6346$ ([50], 129 b. ga qarang).

Xuddi shunga o'xshash, $\Phi(1,45)$ ni hisoblash uchun x_0 sifatida jadvaldagi qiymat 1,5 ni olamiz. U holda

$$t = \frac{1,45 - 1,5}{0,1} = -0,5$$

bo'lib, (5.9.5) formulaga ko'ra:

$$\Phi(1, 45) \cong 0,9661 + 0,0138(-0,5) - 0,0045 \cdot \frac{-0,5(-0,5+1)}{2} + \\ + 0,0009 \cdot \frac{-0,5(-0,5+1)(-0,5+2)}{3!} = 0,959706.$$

Jadvaldagi qiymat esa $\Phi(1, 45) \approx 0,9597$. ■

Endi qoldiq had to'g'risida biroz to'xtalib o'taylik. Ayrim hollarda, xususan f_i qiymatlar tajriba yo'li bilan hosil qilingan bo'lsa, $f^{(n+1)}(\xi)$ ni baholash ancha mushkul bo'ladi. Shuning uchun qo'pol bo'lsa ham, soddaroq yo'l bilan baholash ma'quldir. Qaralayotgan oraliqda hosila $f^{(n+1)}(x)$, demak, ayirma f_i^{n+1} ham sekin o'zgaradi deb faraz qilib, (5.9.3) formula bilan berilgan qoldiq hadda qatnashuvchi hosilani (5.8.3) formula yordamida ayirma bilan almashtiramiz, natijada

$$R_n \approx \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!} f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} \quad (5.9.6)$$

hosil bo'ladi. Shuningdek, (5.9.5) formula o'rnida, quyidagi taqribiy, lekin qulay formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n \approx \frac{t(t+1)\dots(t+n)}{(n+1)!} f_{\frac{n+1}{2}}^{n+1}. \quad (5.9.7)$$

Yuqoridagi formulalar ancha qo'pol, ulardan foydalanishda hushyor bo'lish kerak. Agar hosila sekin o'zgarmasa, u holda ma'nosiz natijaga ega bo'lamiz. Masalan,

$$f(x) = x + N \sin \pi x$$

funksiyani olib, interpolatsiya tugunlari sifatida butun $x_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ qiymatlarni olaylik. Bu holda ikkinchisidan boshlab barcha ayirmalar nolga teng. Demak, qo'pol tarzda $f(x)$ ni chiziqli funksiya deb olishimiz mumkin. Lekin N yetarlicha katta bo'lganda $x + N \sin \pi x$ funksiya chiziqli funksiyadan keskin farq qiladi.

5.10-§. Gauss, Stirling, Bessel va Everett interpolatsion formulalar

Interpolatsiya xatosini kamaytirish maqsadida, x_i interpolatsiya tugunlarini interpolatsiyalanuvchi x nuqta atrofida olish ma'quldir. Chunki

bu holda qoldiq hadda qatnashadigan ξ nuqta ham x ga yaqin joylashgan bo'ladi va demak, $f^{(n+1)}(\xi)$ ham aytarli darajada o'zgarmaydi. Natijada qoldiq hadga keskin ta'sir etadigan miqdor faqatgina

$$|\omega_{n+1}(x)| = \prod_{j=0}^n |x - x_j|$$

bo'lib qoladi. Bu ifoda x bilan interpoliyatsiya tugunlari orasidagi masofalarning ko'paytmasidan iboratdir. Shuning uchun ham, $f(x)$ ni interpoliyatsiyalashda x ga nisbatan eng yaqin n ta nuqtani olsak, $|\omega_{n+1}(x)|$ minimal qiymatga ega bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $n = 2k$ bo'lsa, x ning chap va o'ng tomonlaridan k tadan nuqta olish kerak. Agar $n = 2k + 1$ bo'lsa, u vaqtda x ga eng yaqin bo'lgan tugunni olib, so'ngra chap va o'ng tomonlardan k tadan nuqtalar olish kerak.

Hozir interpoliyatsion formulalarni mana shu g'oyaga asoslangan holda tuzish bilan shug'ullanamiz. Bunday interpoliyatsion ko'phadlarning chiziqli kombinatsiyalarini olib, ayrim hollarda aniqlikni tushirmasdan ko'phadning darajasini pasaytirish mumkin. Biz dastlab shu metodga asoslangan Gauss interpoliyatsion formulalarini chiqaramiz. Agar funksiya $x \in (x_0, x_0 + \frac{h}{2})$ nuqtada interpoliyatsiyalansa, u holda interpoliyatsiya tugunlarini $x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + kh, x_0 - kh$ tartibda olish ma'quldir. Chunki ixtiyoriy n uchun shu tugunlarning avvalgi n tasini olsak, ular x ga eng yaqin turgan nuqtalardan iborat bo'lib, shu nuqtalar bo'yicha tuzilgan interpoliyatsion ko'phadning xatosi, ixtiyoriy boshqa tartibda olingan nuqtalar bo'yicha tuzilganidan kichik bo'ladi.

Gaussning birinchi interpoliyatsion formulasini tuzishda $2n + 1$ ta

$$x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh \quad (5.10.1)$$

nuqtalar uchun Nyutonning teng bo'lmagan oraliqlar uchun interpoliyatsion formulasini yozamiz:

$$\begin{aligned} L_{2n}(x) = & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + \\ & + f(x_0, x_1, x_{-1}, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) + \\ & + f(x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2})(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2) + \dots + \\ & + f(x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n})(x - x_0)(x - x_1) \dots \\ & \dots (x - x_{-(n-1)})(x - x_n). \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

Bunda $x = x_0 + th$ deb, bo'lingan ayirmalarning chekli ayirmalar orqali

ifodasidan foydalansak, u holda

$$\begin{aligned}
 G_{2n}(x_0 + th) &= L_{2n}(x_0 + th) = \\
 &= f_0 + f_{1/2}t + f_0^2 \frac{t(t-1)}{2!} + f_{1/2}^3 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \dots + \\
 &\quad + f_{1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} + \\
 &\quad + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2](t+n)}{(2n)!}
 \end{aligned} \quad (5.10.3)$$

hosil bo'ladi. Bu *Gaussning birinchi interpolatsion formulasi* yoki *Gaussning olg'a interpolatsion formulasi* deyiladi. Bu formula (5.10.1) nuqtalar uchun tuzilgan Lagranj formulasining o'zi bo'lib faqat boshqacha tartibda yozilganidir. Shunig uchun ham bu formulaning qoldiq hadini bevosita yoza olamiz:

$$R_{2n} = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)h^{2n+1}}{(2n+1)!} t(t^2-1) \dots (t^2-n^2). \quad (5.10.4)$$

(5.10.3) formulada qatnashadigan ayirmalar (5.8)-jadvalda strelkalarining yo'nalishi bo'ylab pastki "siniq satrni" tashkil etadi. Agar biz (5.10.1) nuqtalarni boshqacha tartibda, ya'ni $x_0, x_0-h, x_0+h, \dots, x_0-nh, x_0+nh$ kabi olsak, u vaqtda $x \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0)$ nuqtada interpolatsiyalash uchun yaxshi natija beradigan *Gaussning ikkinchi interpolatsion formulasi* yoki orqaga interpolatsiyalash formulasi

$$\begin{aligned}
 G_{2n}(x_0 + th) &= L_{2n}(x_0 + th) = f_0 + f_{-\frac{1}{2}}t + f_0^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \\
 &\quad + f_{-\frac{1}{2}}^3 \frac{t(t^2-1)}{3!} + \dots + f_{-\frac{1}{2}}^{2n-1} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} + \\
 &\quad + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots [t^2 - (n-1)^2](t+n)}{(2n)!}
 \end{aligned} \quad (5.10.5)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu formulada qatnashadigan chekli ayirmalar jadval 5.8 da ustki "siniq satr"ni tashkil etadi. Uning qoldiq hadi esa

$$R_{2n} = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} h^{2n+1} t(t^2-1)(t^2-2^2) \dots (t^2-n^2) \quad (5.10.6)$$

ga teng. Gaussning har ikkala formulasini qo'shib yaramiz deb, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
 L_{2n}(x_0 + th) = & f_0 + \mu f_0^1 t + f_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + \\
 & + \mu f_0^{2n-1} \frac{t(t^2 - 1)(t^2 - 2^2) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n-1)!} + \\
 & + f_0^{2n} \frac{t^2(t^2 - 1) \dots [t^2 - (n-1)^2]}{(2n)!}
 \end{aligned} \quad (5.10.7)$$

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	f^6
$\vdots$							
x_{-4}	f_{-4}						
		$f_{-7/2}^1$					
x_{-3}	f_{-3}		f_{-3}^2				
		$f_{-5/2}^1$		$f_{-5/2}^3$			
x_{-2}	f_{-2}		f_{-2}^2		f_{-2}^4		
		$f_{-3/2}^1$		$f_{-3/2}^3$		$f_{-3/2}^5$	
x_{-1}	f_{-1}		f_{-1}^2		f_{-1}^4		f_{-1}^6
	$\nearrow$	$f_{-1/2}^1 \searrow$	$\nearrow$	$f_{-1/2}^3 \searrow$	$\nearrow$	$f_{-1/2}^5 \searrow$	
x_0	f_0		f_0^2		f_0^4		f_0^6
	$\searrow$	$f_{1/2}^1 \nearrow$	$\searrow$	$f_{1/2}^3 \nearrow$	$\searrow$	$f_{1/2}^5 \nearrow$	
x_1	f_1		f_1^2		f_1^4		f_1^6
		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$		$f_{3/2}^5$	
x_2	f_2		f_2^2		f_2^4		
		$f_{5/2}^1$		$f_{5/2}^3$			
x_3	f_3		f_3^2				
		$f_{7/2}^1$					
x_4	f_4						
$\vdots$							

Jadval 5.8

chunki

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!} \right\} = \frac{t^2(t^2-1)\dots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}$$

va

$$\frac{1}{2} [f_{1/2}^{2n-1} + f_{-1/2}^{2n-1}] = \mu f_0^{2n-1}$$

Hosil qilingan (5.10.7) formula *Stirling interpolatsion formulasi* deyiladi. Bu formulada jadval 5.9 da ko'rsatilganidek, 0 indeksli juft tartibli chekli ayirmalar va 1/2 hamda -1/2 indeksli toq tartibli chekli ayirmalarning o'rta arifmetiklari qatnashadi.

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}	$f_{-3/2}^1$	f_{-1}^2	$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} f_{-1/2}^3 \\ f_{1/2}^3 \end{array} \right\}$	$\underline{f_0^4}$
x_{-1}	f_{-1}				
x_0	$\underline{f_0}$	$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} f_{-1/2}^1 \\ f_{1/2}^1 \end{array} \right\}$	$\underline{f_0^2}$		
x_1	f_1	$f_{3/2}^1$	f_1^2		
x_2	f_2				

Jadval 5.9

Ko'rinib turibdiki, Stirling formulasining qoldiq hadi

$$R_{2n}(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)\dots(t^2-n^2) \quad (5.10.8)$$

ga teng. Gaussning ikkinchi interpolatsion formulasini x_1 nuqta uchun qo'llansa, quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$L_{2n}(x_1 + uh) = f_1 + f_{1/2}^1 u + f_1^2 \frac{u(u-1)}{2} + f_{1/2}^3 \frac{u(u^2-1)}{3!} + \dots + f_{1/2}^{2n-1} \frac{u(u^2-1)\dots[u^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} + f_1^{2n} \frac{u(u^2-1)\dots[u^2-(2n-1)^2](u+n)}{(2n)!}. \quad (5.10.9)$$

Bu formulada $u = \frac{x-x_1}{h}$ belgilash kiritsak va buni $t = \frac{x-x_0}{h}$ orqali ifodalasak, $u = t-1$ bo'lib, (5.10.9) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$L_{2n}(x_0 + th) = f_1 + f_{1/2}^1(t-1) + f_1^2 \cdot \frac{t(t-1)}{2!} + f_{1/2}^3 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} + \dots + \\ + f_{1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-2)^2](t-n+1)(t-n)}{(2n-1)!} + f_1^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}. \quad (5.10.10)$$

Endi, bu formulani Gaussning birinchi interpolatsion formulasi (5.10.3) bilan qo'shib, yarmini olsak hamda quyidagi

$$\frac{1}{2} (f_0^{2n} + f_1^{2n}) = \mu f_{1/2}^{2n}$$

va

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{t(t^2-1) \dots (t^2-n^2)}{(2n+1)!} + \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-1)^2](t-n)(t-n-1)}{(2n+1)!} \right\} = \\ = \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-1)^2](t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!}$$

munosabatlardan foydalansak, u holda *Bessel formulasi* hosil bo'ladi:

$$B_{2n}(x_0 + th) = \mu f_{1/2} + f_{1/2}^1(t - \frac{1}{2}) + \mu f_{1/2}^2 \frac{t(t-1)}{2!} + \dots + \\ + f_{1/2}^{2n-1} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-2)^2](t-n+1)}{(2n-1)!} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) + \\ + \mu f_{1/2}^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}. \quad (5.10.11)$$

Bu formula, umuman aytganda, interpolatsion formula emas, chunki u mos ravishda

$$x_{-n}, \dots, x_n \text{ va } x_{-(n-1)}, \dots, x_{n+1}$$

tugunlarga ega bo'lgan ikkita interpolatsion ko'phadlarning o'rta arifmetigidir. Ya'ni u faqat $2n$ ta $x_{-(n-1)}, \dots, x_n$ tugunlarda $f(x)$ bilan ustma-ust tushadi, lekin bu formulada funksiyaning x_{-n} va x_{n+1} nuqtalardagi qiymatlari qatnashgan. (5.10.11) ko'phad interpolatsion bo'lishi uchun, ya'ni uning x_{-n} va x_{n+1} nuqtalarda ham $f(x)$ bilan ustma-ust

tushishi uchun, unga yana bitta had qo'shish kerak:

$$\begin{aligned}
 B_{2n+1}(x_0 + th) &= L_{2n+1}(x_0 + th) = \mu f_{1/2} + f_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \mu f_{1/2}^2 \frac{t(t-1)}{2} + \dots + \mu f_{1/2}^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2] (t-n)}{(2n)!} + \\
 &+ f_{1/2}^{2n+1} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2] (t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}
 \tag{5.10.12}$$

Bu formula $x_{-n}, \dots, x_n, x_{n+1}$ nuqtalar bo'yicha tuzilgan Lagranj interpolatsion ko'phadi bilan ustma-ust tushganligi uchun uning qoldiq hadi

$$R_{2n+1}(x) = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} t(t^2-1) \dots (t^2-n^2) [t-(n+1)]$$

bo'ladi. Demak, (5.10.11) formulaning qoldiq hadi esa

$$\begin{aligned}
 R_{2n+2}(x) &= f_{1/2}^{2n+1} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2] (t-n)(t-1/2)}{(2n+1)!} + \\
 &+ \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} t(t^2-1) \dots (t^2-n^2) [t-(n+1)]
 \end{aligned}
 \tag{5.10.13}$$

ga teng. Bessel formulasini oraliq o'rtasida, ya'ni $t = 1/2$ da qo'lash qulaydir. Bu holda barcha toq tartibli ayirmalarga ega bo'lgan hadlar nolga aylanadi. Bessel formulasida quyidagi ayirmalar qatnashadi:

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
x_{-2}	f_{-2}				
x_{-1}		$f_{-3/2}^1$			
	$\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} f_{-1} \\ f_0 \end{matrix} \right\}$	$f_{-1/2}^1$	f_{-1}^2	$f_{-1/2}^3$	
x_0			$\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} f_0^2 \\ f_1^2 \end{matrix} \right\}$		$\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} f_0^4 \\ f_1^4 \end{matrix} \right\}$
		$f_{1/2}^1$		$f_{1/2}^3$	
x_1	f_1		f_2^2		
x_2	f_2	$f_{3/2}^2$		$f_{3/2}^3$	

Nihoyat, keng qo'llaniladigan formulalarning yana birini tuzamiz. Buning uchun

$$f_{1/2}^{2k+1} = f_1^{2k} - f_0^{2k}$$

munosabat yordamida, Gaussning birinchi interpolatsion formulasi (5.10.3) dan toq tartibli ayirmalarni yo'qotamiz. U holda f_1^{2k} ayirma oldidagi koeffitsiyent

$$\frac{t(t^2 - 1) \dots (t^2 - k^2)}{(2k + 1)!}$$

ga teng bo'lib, f_0^{2k} ayirmaning koeffitsiyenti esa quyidagiga teng:

$$\begin{aligned} & \frac{t(t^2 - 1) \dots [t^2 - (k - 1)^2] (t - k)}{(2k)!} - \frac{t(t^2 - 1) \dots [t^2 - (k - 1)^2] (t^2 - k^2)}{(2k + 1)!} = \\ & = \frac{t(t^2 - 1) \dots [t^2 - (k - 1)^2] (t - k)(k + 1 - t)}{(2k + 1)!}. \end{aligned}$$

Oxirgi ifodada $t = 1 - u$ almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - u)(1 - u - 1)(1 - u + 1) \dots (1 - u - k + 1)(1 - u + k - 1)(1 - u - k)(k + u)}{(2k + 1)!} = \\ & = \frac{u(u^2 - 1) \dots (u^2 - k^2)}{(2k + 1)!}. \end{aligned}$$

Natijada quyidagi *Everett interpolatsion formulasi* hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} E_{2n+1}(x_0 + th) &= f_0 t + f_1^2 \frac{t(t^2 - 1)}{3!} + \dots + f_1^{2n} \frac{t(t^2 - 1) \dots (t^2 - n^2)}{(2n + 1)!} + \\ &+ f_0 u + f_0^2 \frac{u(u^2 - 1)}{3!} + \dots + f_0^{2n} \frac{u(u^2 - 1^2) \dots (u^2 - n^2)}{(2n + 1)!}. \end{aligned}$$

Bu formulaning qoldiq hadi $x_{-n}, \dots, x_{n+1}$ tugunlar yordamida tuzilgan Gauss formulasining qoldiq hadi bilan ustma-ust tushadi:

$$\frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} t(t^2 - 1) \dots (t^2 - n^2) [t - (n + 1)].$$

Everett formulasi odatda jadvalni zichlashtirishda qo'llaniladi, ya'ni $x_0 + kh$ tugunlarda funksiya qiymatlarining jadvali berilgan bo'lsa, $x_0 + kh'$ tugunlarda funksiya qiymatlari jadvalini tuzishda foydalaniladi, bu yerda $h' = \frac{h}{N}$ (N - butun son). ■

5.11-§. Teng qadamli interpolyatsion formulalarni qo'llash uchun tavsiyalar

Funksiyaning jadvaldagi qiymatlari odatda taqribiy bo'lib, ularning limit absolyut xatolari oxirgi xona birligining yarmiga, birinchi tartibli ayirmaniki oxirgi xonaning bir birligiga, ikkinchi tartiblisiniki oxirgi xonaning ikki birligiga, uchinchi tartiblisiniki esa oxirgi xonaning to'rt birligiga teng bo'lishi mumkin va hokazo. Silliqlik funksiyalarda odatda tartibi ortgan sari ayirma kamaya borib, biror tartibga yetganda deyarli o'zgarmas va undan keyingilari kichik miqdor bo'lishi kerak. Lekin funksiya qiymatidagi xato hisobiga, ayirma nolga aylanmasdan tartibsiz ishora bilan ortib ketishi ham mumkin. Bunday natijalar noto'g'ri bo'lib, ulardan foydalanish mumkin emas. Shuning uchun ham muntazam o'zgaradigan ayirmalarning eng yuqori tartibini aniqlash kerak. So'ngra esa interpolyatsiyalash uchun interpolyatsion formulani quyidagilarga asoslanib tanlash kerak. Agar funksiyaning qiymati hisoblanishi kerak bo'lgan x ning qiymati jadval boshida yoki oxirida bo'lsa, u holda mos ravishda Nyutonning birinchi yoki ikkinchi formulasini qo'llash kerak. Agar bu qiymat jadvalning o'rtasida, masalan, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqda bo'lsa hamda x_i va x_{i+1} tugunlarga mos keladigan satrda barcha muntazam o'zgaradigan ayirmalar mavjud bo'lsa, u holda dastlabki tugun sifatida x_i yoki x_{i+1} ni qabul qilib Stirling yoki Bessel formulasini qo'llash kerak. Shuni ta'kidlash kerakki, agar $|t| \leq 0,25$ bo'lsa Stirling formulasini, $0,25 < |t| \leq 0,75$ bo'lganda esa Bessel formulasini qo'llash kerak. Bu yerda x ning x_i yoki x_{i+1} tugunlarining qaysi biriga yaqin turishiga qarab, $t = \frac{x-x_i}{h}$ yoki $t = \frac{x-x_{i+1}}{h}$ deb olish kerak.

Yuqorida aytganimizdek, Everett formulasi jadvalni zichlashtirish uchun foydalaniladi. Biz 5.9-§ da Nyuton formulalarining qo'llanilishiga doir misollar ko'rgan edik.

Shuning uchun ham bu yerda Stirling va Bessel formulalarini qo'llanishga misol keltirish bilan kifoyalanamiz.

Misol 5.8. *Jadval 5.10*

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Frenel integralining qiymatlari $h = 0,1$ qadam bilan keltirilgan. $S(0,612)$ va $S(0,65)$ topilsin.

x	$S(x)$	$S^1(x)$	$S^2(x)$	$S^3(x)$	$S^4(x)$	$S^5(x)$	$S^6(x)$
0,3	0,0434						
		231					
0,4	0,0665		28				
		259		-6			
0,5	0,0924		22		2		
		281		-4		-1	
0,6	0,1205		18		1		3
		299		-3		2	
0,7	0,1504		15		-1		0
		314		-4		2	
0,8	0,1818		11		1		
		325		-3			
0,9	0,2143		8				
		333					
1,0	0,2476						

Jadval 5.10

Yechish: Jadvalda ayirmalarning faqat ma'noli raqamlari yozilgan. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, 4– tartibli ayirmalarni nol deb olish mumkin, chunki ularning eng kattasi $2 \cdot 10^{-4}$ ga teng bo'lib, xatolarning eng kattasi esa $8 \cdot 10^{-4}$ ga yetishi mumkin edi. Shuning uchun ham ayirmalarning to'rtinchidan yuqori tartiblilaridan foydalanish ma'noga ega emas. $S(0,612)$ ni hisoblash uchun $x_0 = 0,6$ va $t = 0,12$ deb olib, Stirling formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
 S(0,612) &\simeq 0,1205 + 0,5(0,0281 + 0,0299) \cdot 0,12 + 0,0018 \times \\
 &\quad \times 0,5 \cdot 0,0144 + 0,5 \cdot (-0,0004 - 0,0003) \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,12 \times \\
 &\quad \times (0,0144 - 1) + \frac{1}{24} \cdot 0,0001 \cdot 0,0144 \cdot (0,0144 - 1) = 0,12400.
 \end{aligned}$$

$S(0,65)$ ni hisoblash uchun $x = 0,6$ va $t = 0,5$ deb olib, Bessel formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
 S(0,65) &\simeq 0,5(0,1205 + 0,1504) + 0,5 \cdot 0,0018 + 0,0015) \times \\
 &\quad \times 0,5 \cdot 0,5 \cdot (0,5 - 1) = 0,13524.
 \end{aligned}$$

5.12-§. Interpolyatsion jarayonning yaqinlashishi

Interpolyatsiya amalda qo'llanilganda har doim ham qoldiq hadni baholash mumkin bo'lavermaydi. Shuning uchun ham yetarlicha ko'p tugunlar olinganda interpolyatsion ko'phadning interpolyatsiyalanuvchi funksiyaga yetarlicha yaxshi yaqinlashishiga ishonch hosil qilish amaliy interpolyatsiyalashda katta ahamiyatga ega. Shu sababdan ham interpolyatsion jarayonning yaqinlashishi masalasi tug'iladi.

Faraz qilaylik, sizga elementlari $[a, b]$ da yotuvchi cheksiz uchburchak matritsa

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.12.1)$$

berilgan bo'lsin. $[a, b]$ oraliqda aniqlangan biror $f(x)$ funksiya uchun Lagranj interpolyatsion ko'phadining ketma-ketligi $\{L_n(x)\}$ berilgan bo'lib, $L_n(x)$ ni qurishda (5.12.1) matritsaning n - satridagi barcha elementlar qatnashsin. Agar ixtiyoriy $x \in [a, b]$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x) \quad (5.12.2)$$

tenglik bajarilsa, interpolyatsion jarayon yaqinlashadi deyiladi. Agar (5.12.2) tenglik x ga nisbatan tekis bajarilsa, jarayon tekis yaqinlashadi deyiladi.

Shunday savol tug'iladi: $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun interpolyatsion jarayon yaqinlashadimi? Bu savolga umuman ijobiy javob berib bo'lmaydi. Faber tomonidan quyidagi teorema isbot qilingan: har qanday (5.12.1) ko'rinishdagi tugunlar matritsasi uchun shunday uzluksiz $f(x)$ funksiya topiladiki, uning uchun bu tugunlar bo'yicha qurilgan Lagranj interpolyatsion ko'phadi $[a, b]$ oraliqda bu funksiyaga tekis yaqinlashmaydi. Bundan ham kuchliroq natijani $[-1, 1]$ oralig'ida teng uzoqlikda joylashgan tugunlar ($x_0^{(n)} = -1, x_n^{(n)} = 1$) bo'yicha $f(x) = |x|$ funksiya uchun qurilgan Lagranj interpolyatsion ko'phadlari $L_n(x) - 1, 0, 1$ nuqtalardan tashqari birorta nuqtada ham $f(x)$ ga yaqinlashmasligini S. N. Bernshteyn ko'rsatgan edi.

Interpolyatsion jarayonning yaqinlashishi haqidagi juda ko'p tadqiqotlarda hozirgi zamon matematikasining eng nozik metodlari qo'llaniladi. Bu yo'nalishda olingan natijalarni keltirish imkoniga ega emasmiz. Hozircha $f(x)$ butun funksiya bo'lgan hol uchun bir teoremani keltirish bilan cheklanamiz.

Ta'rif 5.1. Agar $f(x)$ funksiyani x ning barcha chekli qiymatlarida

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

yaqinlashuvchi darajali qator shaklida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $f(x)$ butun funksiya deyiladi.

Teorema 5.2. Faraz qilaylik, $f(x)$ butun funksiya bo'lsin. U holda elementlari $[a, b]$ oraliqda yotuvchi (5.12.1) ko'rinishdagi ixtiyoriy uchburchak matritsa bo'yicha $f(x)$ uchun tuzilgan Lagranj interpolyatsion ko'phadlari $L_n(x)$ $[a, b]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

Isbot. Butun funksiya ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo'lgani tufayli, interpolyatsion formulaning qoldiq hadi uchun quyidagi bahoga ega bo'lamiz:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

Bu yerda

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i^{(n)}).$$

Ko'rinib turibdiki,

$$|\omega_{n+1}(x)| < (b-a)^{n+1},$$

demak,

$$|R_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Agar bu tengsizlik o'ng tomonining nolga intilishini ko'rsatsak, teorema isbot bo'ladi. Biz $f(x)$ ning $(n+1)$ -tartibli hosilasini topib, baholaymiz:

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n) a_k (x-x_0)^{n-k-1},$$

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n)a_k |x-x_0|^{n-k-1} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} (n+k)^{n+1} |a_{n+k}| |x-x_0|^{k-1}.$$

Ma'lumki, $x > 0$ bo'lganda

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x$$

bo'ladi, bundan

$$\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}.$$

Demak,

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| (e|x-x_0|)^{k-1}.$$

Endi L ixtiyoriy musbat, lekin muayyan son bo'lsin. Oxirgi tengsizlikning har ikkala tomonini L^{n+1} ga ko'paytiramiz:

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+k}| L^{n+1} (e|x-x_0|)^{k-1}.$$

Arap r orqali L va $\max_{a \leq x < b} (e|x-x_0|)$ sonlarning eng kattasini belgilasak, u holda

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k. \quad (5.12.3)$$

Oxirgi tengsizlik barcha $x \in [a, b]$ uchun o'rinlidir. Demak,

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} L^{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k. \quad (5.12.4)$$

$f(x)$ butun bo'lganligi uchun, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ qator yaqinlashadi va uning qoldiq hadi $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$ bilan birgalikda

$$M_{n+1} L^{n+1} (n+1)^{-n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.12.5)$$

e^x ning yoyilmasi

$$e^{n+1} = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2!} + \dots + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

dan

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\begin{aligned} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} &= \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} < \\ &< \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} [e(b-a)]^{n+1}. \end{aligned}$$

Endi $L = e(b-a)$ deb olib, (5.12.3)-(5.12.5) dan kerakli limit munosabatga ega bo'lamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} = 0.$$

Shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Eslatma. Teorema shartida $f(x)$ ning butun funksiya bo'lishi juda muhimdir. Haqiqatan ham, $[-1, 1]$ oraliqda

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani olaylik, Bu funksiya sonlar o'qi bo'ylab barcha tartibli uzluksiz hosilalarga ega, lekin butun emas. Agar interpolatsiya tugunlarini $[-1, 0]$ oraliqda olsak, u holda $L_n(x) \equiv 0$ bo'lib, u x ning hech bir musbat qiymati uchun $f(x)$ ga intilmaydi.

5.13-§. Karrali tugunlar bo'yicha interpolatsiyalash. Ermit formulasi

Faraz qilaylik, $[a, b]$ oraliqning x_k ($k = \overline{0, m}$) nuqtalarida $f(x) \in C[a, b]$ funksiya va uning $(\alpha_k - 1)$ -tartibli hosilalarining qiymatlari $f(x_k), f'(x_k), \dots, f^{(\alpha_k-1)}(x_k)$ ($k = \overline{0, m}$) berilgan bo'lsin. Bazis funksiyalari sistemasi $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^m$ sifatida darajasi j dan ortmaydigan

$\varphi_j(x)$ ko'phadlar ketma-ketligini olib, quyidagi masalani qarash mumkin, Ushbu

$$\Phi^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \quad (k = \overline{0, m}; j = \overline{0, \alpha_k - 1}), \quad (5.13.1)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n + 1 \quad (5.13.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^n A_j \varphi_j(x) \quad (5.13.3)$$

ko'phad topilsin. (5.13.2)–shart bajarilganda (5.13.3)–dagi A_j parametrning soni (5.13.1) shartlarning soni bilan ustma-ust tushadi. Ravshanki, $\Phi(x)$ ko'phadning mavjudligi va yagonaligi, (5.13.2) shartdan tashqari

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi'_0(x_0) & \varphi'_1(x_0) & \dots & \varphi'_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(\alpha_0-1)}(x_0) & \varphi_1^{(\alpha_0-1)}(x_0) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_0-1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(\alpha_m-1)}(x_m) & \varphi_1^{(\alpha_m-1)}(x_m) & \dots & \varphi_n^{(\alpha_m-1)}(x_m) \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlikni bajarilishini talab qiladi. Xususiyl holda, $\varphi_j(x) = x^j$ deb olib (5.13.3)–ko'phadning umumiy ko'rinishini topamiz. Bunday $H_n(x)$ ko'phad *Ermit interpolatsion ko'phadi* deyiladi. Demak, darajasi n dan ortmaydigan va

$$H_n^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k) \quad (k = \overline{0, m}; j = \overline{0, \alpha_k - 1}) \quad (5.13.4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$H_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'phadni quraylik. Bu shartlar $a_i (i = \overline{0, n})$ noma'lumlarni topish uchun $(n+1)$ ta chiziqli tenglamalar sistemasini beradi. Bu sistema yechimining

mavjudligi va yagonaligini ko'rsatish uchun

$$H_n^{(i)}(x_k) = 0 \quad (k = \overline{0, m}; i = \overline{0, \alpha_k - 1})$$

bir jinsli sistemaning faqat trivial yechimga ega ekanligini ko'rsatish kifoyadir. (5.13.6) sistema shuni ko'rsatadiki $x_0, x_1, \dots, x_m$ tugunlar $H_n(x)$ ko'phad uchun mos ravishda $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ (lardan kichik bo'lmagan) tartibli karrali ildizlardir. Demak, $H_n(x)$ ko'phad ildizlarining (karralilarini hisobga olgan holda) yig'indisi $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n + 1$ ga teng yoki undan kattadir. Darajasi n dan ortmaydigan va ildizlarining soni n dan katta bo'lmagan $H_n(x)$ ko'phad faqat aynan nolga teng bo'lishi kerak. Bundan esa uning barcha a_i koeffitsiyentlarining nolga tengligi va bir jinsli sistemaning faqat trivial yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, (5.13.4) dagi $f^{(i)}(x_k)$ qiymatlarning qanday bo'lishidan qat'i nazar, qo'yilgan masala yagona yechimga ega. $H_n(x)$ ko'phadning x_k tugunlar va $f^{(i)}(x_k)$ qiymatlar orqali oshkor ko'rinishini determinantlar yordamida ifodalash mumkin. Lekin bunday ifodaning tuzilishi juda murakkabdir. Shuning uchun bu yerda ham Lagranj interpolatsion ko'phadini tuzgandek, boshqacha yo'l tutamiz. Buning uchun fundamental ko'phadlar deb ataluvchi n -darajali $Q_{ij}(x)$ ($i = \overline{0, m}; j = \overline{0, \alpha_i - 1}$) ko'phadlarni, ya'ni

$$Q_{ij}^{(\beta)}(x_k) = \delta_k^i \cdot \delta_\beta^j \quad (\beta = \overline{0, \alpha_k - 1}; k = \overline{0, m}) \quad (5.13.5)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ko'phadlarni tuzamiz. U holda izlanayotgan ko'phadni quyidagicha yozish mumkin:

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} f^{(j)}(x_i) Q_{ij}(x) \quad (5.13.6)$$

(5.13.5) tengliklardan ko'ramizki, $Q_{ij}(x)$ ko'phad $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ nuqtalarda mos ravishda $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ karrali ildizlarga ega bo'lib, x_i nuqtada j karrali ildizga ega. Demak,

$$Q_{ij}(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_{i-1})^{\alpha_{i-1}} (x - x_i)^j \times \\ \times (x - x_{i+1})^{\alpha_{i+1}} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} q_{ij}(x). \quad (5.13.7)$$

bu yerda $q_{ij}(x)$ $x = x_i$ nuqtada nolga aylanmaydigan

$$n - (\alpha_0 + \dots + \alpha_{i-1} + j + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_m) = \alpha_i - j - 1$$

darajali ko'phaddir:

$$q_{ij}(x) = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}(x - x_0) + \dots + a_{ij}^{(\alpha_i-j-1)}(x - x_i)^{\alpha_i-j-1}. \quad (5.13.8)$$

Agar quyidagi

$$\Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_m)^{\alpha_m} \quad (5.13.9)$$

belgilashni kiritsak, u holda (5.13.7) va (5.13.9) dan ushbu

$$Q_{ij}(x) = \frac{\Omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i}} (x - x_i)^j q_{ij}(x) \quad (5.13.10)$$

formulaga ega bo'lamiz. (5.13.5)–shartlardan $Q_{ij}(x)$ ning x_i nuqta atrofidagi Teylor yoyilmasi quyidagi ko'rinishga ega ekanligi kelib chiqadi:

$$Q_{ij}(x) = \frac{1}{j!} (x - x_i)^j + b_{ij}^{(1)} (x - x_i)^{j+1} + \dots + b_{ij}^{(n-j)} (x - x_i)^n \quad (5.13.11)$$

Endi (5.13.8) va (5.13.10)–munosabatlarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \dots + a_{ij}^{(\alpha_i - j - 1)}(x - x_i)^{\alpha_i - j - 1} = \\ = \frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j}. \end{aligned} \quad (5.13.12)$$

(5.13.11)–tenglikni nazarda tutib, (5.13.12)–tenglikda limitga o'tsak hamda Lopital qoidasini qo'llasak, natijada

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right] = \frac{1}{j!} \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i} \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Qolgan $a_{ij}^{(k)}$ koeffitsiyentlar uchun

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]$$

ifodaga ega bo'lamiz. Ko'paytmani differensiallash uchun Leybnits qoidasini qo'llaymiz:

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \cdot \frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right] = \sum_{l=0}^k C_k^l \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(l)} \left[\frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-l)}.$$

Barcha l -lar uchun hosilalar $x = x_i$ nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]^{(l)} = \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(l)}.$$

Ikkinchi ko'paytmaning

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-l)}$$

limitni aniqlash uchun (5.13.11)–tenglikni

$$\frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} = \frac{1}{j!} + b_{ij}^{(1)}(x - x_i) + \dots + b_{ij}^{(n-j)}(x - x_i)^{n-j}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan esa

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{Q_{ij}(x)}{(x - x_i)^j} \right]^{(k-l)} = (k-l)! b_{ij}^{(k-l)}$$

kelib chiqadi. Lekin (5.13.11)–tenglikdan

$$b_{ij}^{(k-l)} = \frac{Q_{ij}^{(j+k-l)}(x_i)}{(j+k-l)!}$$

munosabatning o'rinli ekanligini ko'ramiz. (5.13.8)-dan ravshanki

$$j + k - p \leq j + k \leq j + \alpha_i - j - 1 = \alpha_i - 1.$$

Demak, barcha $p < k$ uchun $b_{ij}^{(k-p)} = 0$ bo'lib,

$$b_{ij} = \frac{1}{j!}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i} Q_{ij}(x)}{\Omega(x)(x - x_i)^j} \right] = \frac{1}{k! j!} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)}$$

va

$$Q_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{j! (x - x_i)^{\alpha_i - j}} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \frac{1}{k!} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} (x - x_i)^k$$

ni hosil qilamiz va nihoyat, (5.13.6) dan

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{\alpha_i - j - 1} \frac{1}{k!} f^{(j)}(x_i) \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} \frac{\Omega(x)}{(x - x_i)^{\alpha_i - j - 1}} \quad (5.13.13)$$

Ermit formulasini hosil qilamiz. Bu formulaning xususiy holi sifatida Lagranj interpolatsion ko'phadi hamda ko'phad uchun Teylor formulasini chiqarish mumkin (bobning oxiridagi mashqlarga qarang.) Hozir Ermit formulasining boshqa bir xususiy holini ko'rib chiqaylik. Barcha α_i lar 2 ga teng bo'lsin, ya'ni shunday n -darajali ko'phadni topish kerakki, u

$$\begin{aligned} H_n(x_i) &= f(x_i) \\ H'_n(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

shartlarni qanoatlantirsin. Bu shartlarning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: interpolatsion egri chiziq berilgan $y = f(x)$ egri chiziq bilan interpolatsiya tugunlarida umumiy urinmalarga ega.

Bu holda (5.13.13) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{aligned} H_n(x) = \sum_{i=0}^m \left\{ f(x_i) \left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i} \frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^2} + f(x_i) \left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} \right]'_{x=x_i} \frac{\Omega(x)}{x-x_i} + \right. \\ \left. + f'(x_i) \left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i} \frac{\Omega(x)}{x-x_i} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13.14)$$

Odatdagidek

$$\omega_{m+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)$$

belgilash kiritsak, u holda

$$\Omega(x) = \omega_{m+1}^2(x), \quad \frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} = \left[\frac{(x-x_i)}{\omega_{m+1}(x)} \right]^2$$

ga ega bo'lamiz. Endi (5.13.14) dagi koeffitsiyentlarni topamiz:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} \right]_{x=x_i} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \left[\frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right]^2 = \frac{1}{\omega'^2(x_i)}, \\ \left[\frac{(x-x_i)^2}{\Omega(x)} \right]'_{x=x_i} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{d}{dx} \left[\frac{(x-x_i)}{\omega_{m+1}(x)} \right]^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_i} 2 \left[\frac{x-x_i}{\omega_{m+1}(x)} \right] \frac{\omega_{m+1}(x) - (x-x_i)\omega'_{m+1}(x)}{\omega_{m+1}^2(x)} = \\ &= \frac{2}{\omega'_{m+1}(x_i)} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\omega_{m+1}(x) - (x-x_i)\omega'_{m+1}(x)}{\omega_{m+1}^2(x)} = -\frac{\omega''_{m+1}(x_i)}{\omega_{m+1}^3(x_i)}. \end{aligned}$$

Oxirgi limitni topish uchun Lopital qoidasini qo'lladik. Bularni hisobga olganda (5.13.14) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^m \frac{\omega_{m+1}^2(x)}{\omega_{m+1}'^2(x_i)(x-x_i)^2} \left[f(x_i) \left(1 - \frac{\omega_{m+1}''(x_i)}{\omega_{m+1}'(x_i)}(x-x_i) \right) + f'(x_i)(x-x_i) \right]. \quad (5.13.15)$$

Misol 5.9. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan beshinchi darajali $H_5(x)$ ko'phad topilsin:

$$H_5(-1) = -1, \quad H_5(0) = 0, \quad H_5(1) = 1;$$

$$H_5'(-1) = 0, \quad H_5'(0) = 1, \quad H_5'(1) = 0.$$

Bu yerda

$$\omega_3(x) = (x+1)x(x-1), \quad \omega_3'(x) = 3x^2 - 1, \quad \omega_3''(x) = 6x.$$

Yechish: (5.13.15) formuladan

$$H_5(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{4} \left[-1 \left(1 - \frac{6 \cdot (-1)}{2}(x+1) \right) \right] + \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{1} 1 \cdot x + \frac{x^2(x+1)^2}{4} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{6 \cdot 1}{1}(x-1) \right) \right] = \frac{1}{2}(-x^5 + x^3 + 2x).$$

Endi Ermit formulasining qoldiq hadini tekshiramiz.

Teorema 5.3. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $(n+1)$ -tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda Ermit interpolatsion formulasining qoldiq hadini

$$R_n(x) = f(x) - H_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\Omega(x)}{(n+1)!} \quad (5.13.16)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda ξ $[a, b]$ oraliqqa tegishli nuqta bo'lib, umuman x ning funksiyasidir.

Isbot. x ning interpolatsiya tugunlaridan farqli biror qiymatni olib, $K = \frac{R(x)}{\Omega(x)}$ deb belgilaylik. U holda ushbu

$$\varphi(z) = R_n(z) - K\Omega(z) \quad (5.13.17)$$

funksiya x_0 nuqtada α_0 karrali nolga, x_1 nuqtada α_1 karrali va h.k. x_m nuqtada α_m karrali nolga ega. Bundan tashqari u x nuqtada ham nolga

aylanadi. Demak, $\varphi(z)$ funksiya $[a, b]$ oraliq'ining $(m+2)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_m$, x nuqtalarida nolga aylanib, bu nollar karraliklarining yig'indisi $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m + 1 = n + 2$ ga teng. Shuning uchun ham Roll teoremasiga ko'ra $\varphi'(z)$ hosila $x_0, x_1, \dots, x_m, x$ nuqtalarni o'z ichiga olgan intervalda mos ravishda $m + 1$ ta $\alpha_0 - 1, \alpha_1 - 1, \dots, \alpha_m - 1$ karrali ildizlarga ega, ya'ni $[a, b]$ oraliqda

$$(\alpha_0 - 1) + (\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_m - 1) + m + 1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n + 1$$

ta nolga ega. Xuddi shu mulohazalarni takrorlab, ikkinchi hosila $\varphi''(z)$ $[a, b]$ oraliqda kamida n ta nolga ega degan xulosaga kelamiz va hokazo. Nihoyat, $(n+1)$ -tartibli hosila $\varphi^{(n+1)}(z)$ $[a, b]$ oraliqda bitta nuqtada nolga aylanadi. Demak, $[a, b]$ oraliqda kamida shunday bitta ξ nuqta topiladiki,

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad (5.13.18)$$

bo'ladi. Lekin

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)!, \quad (5.13.19)$$

chunki $H_n(z)$ -darajasi n dan ortmaydigan ko'phad, demak, $H_n^{(n+1)}(z) = 0$ va $\Omega(x)$ bosh hadi 1 ga teng bo'lgan $(n+1)$ - darajali ko'phad, uning $(n+1)$ - tartibli hosilasi $(n+1)!$ ga teng. (5.13.18)-(5.13.19) dan

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Demak,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Omega(x).$$

5.14-§. Jadval tuzishda interpolatsiyani qo'llash

Ushbu va keyingi paragraflarda interpolatsiyaning turli masalalariga tatbiqlarini ko'rib chiqamiz. Dastlab quyidagi masalani qaraylik: biror funksiyaning jadvali shunday tuzilsinki, bu jadval yordamida funksiyaning n - tartibli interpolatsion ko'phad bilan almashtirilganda yo'l qo'yiladigan absolyut xato ε dan ortmasin. Bunday holda *jadval n - tartibli interpolatsiyaga ε xato bilan yo'l qo'yadi* deyiladi. Biz bu yerda teng qadamli jadvalni qaraymiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraligida $(n+1)$ ta uzluksiz hosilaga ega bo'lib, berilgan jadval $L_n(x)$ Lagranj interpolatsion ko'phadiga ε xato bilan yo'l qo'ysin. Buning uchun jadval qadami h quyidagi

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \max_{0 \leq t \leq 1} |t(t-1) \dots (t-n)| < \varepsilon \quad (5.14.1)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kerak, bu yerda

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Odatda, keng qo'llaniladigan matematik jadvallar shunday tuziladiki, ular

$$f(x_0 + th) = L_1(x_0 + th) = f_0 + f_{1/2} t \quad (5.14.2)$$

chiziqli interpolatsiyaga yo'l qo'yadi. Bu holda (5.14.1) tengsizlik quyidagi

$$\frac{M_2}{2} h^2 \max_{0 \leq t \leq 1} |t(t-1)| \leq \varepsilon \quad (5.14.3)$$

ko'rinishni oladi. Osongina ishonch hosil qilish mumkinki: $\max_{0 \leq t \leq 1} |t(t-1)| = \frac{1}{4}$. Demak, h qadam

$$M_2 \frac{h^2}{8} \leq \varepsilon \quad (5.14.4)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kerak.

Misol uchun $[a, b] = [2, 3]$, $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$, $f(x) = e^x$ bo'lsin. Bu yerda $M_2 = e^3 < 20,1$ bo'lganligi uchun (5.14.4) dan $h < 0,001411$ kelib chiqadi. Hosil bo'lgan son 0,001411 yaxlit bo'lmaganligi uchun bunday qadam bilan ishlash noqulay. Shuning uchun ham unga nisbatan "yaxlitroq" $h = 0,001$ qadamni olish mumkin.

Ko'pincha jadvalning chiziqli interpolatsiyaga yo'l qo'yishligini talab qilish sharti ancha og'ir shart hisoblanadi, uning kvadratik interpolatsiyaga yo'l qo'yilishi talab qilinadi. Kvadratik interpolatsiyaning eng soddasi uchta eng yaqin nuqtalar bo'yicha tuzilgan Lagranj interpolatsion ko'phadidir. Agar x_0 tugun x ga eng yaqin va $x = x_0 + th$ bo'lsa, bu holda

$$f(x_0 + th) = L_2(x_0 + th) = f_0 + f_{1/2} t + f_{1/4} \frac{t(t-1)}{2}$$

Jadval $L_2(x_0 + th)$ ga yo'l qo'yishi uchun h qadam

$$\frac{M_3 h^3}{6} \max_{|t| \leq 0.5} |t(t^2 - 1)| < \varepsilon$$

yoki

$$M_3 \frac{h^3}{16} < \varepsilon \quad (5.14.5)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Agar bu yerda ham $[a, b] = [2, 3], \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}, f(x) = e^x$ deb olsak, u holda $h < 0,01585$ bo'lib, bu yerda $h = 0,01$ deb olish mumkin, ya'ni qadam chiziqli interpolatsiyadagiga nisbatan 10 marta katta.

Endi funksiyani ikkinchi tartibli Bessel interpolatsion ko'phadi bilan almashtiramiz. Agar $x_0 \leq x \leq x_1$ va $x \leq x_0 + th$ bo'lsa, u holda x_{-1}, x_0, x_1, x_2 nuqtalar bo'yicha tuzilgan ikkinchi tartibli Bessel ko'phadi

$$B_2(x_0 + th) = \mu f_{1/2} + f_{1/2}^t \left(t - \frac{1}{2} \right) + \mu f_{1/2}^2 \frac{t(t-1)}{2}$$

ko'rinishga ega.

Bu ifodaning qoldiq hadi (5.10.13) formulaga ko'ra quyidagiga teng:

$$R_2(x) = f_{1/2}^3 \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{6} + \frac{h^4 f^{IV}(\xi)}{24} t(t^2-1)(t-2).$$

Ma'lumki, $f_{1/2}^3 = h^3 f'''(\xi)$. Shuning uchun jadvalning $B_2(x_0 + th)$ ga yo'l qo'yishi uchun h qadam

$$M_3 \cdot \frac{h^3}{6} \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t(t-1) \left(t - \frac{1}{2} \right) \right| + M_4 \frac{h^4}{24} |t(t^2-1)(t-2)| \leq \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi kerak. Quyidagiga esa ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} t(t-1) \left(t - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12\sqrt{3}}, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} |t(t^2-1)(t-2)| = \frac{9}{16}.$$

Demak, h qadam

$$\frac{M^3 h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3M_4}{128} h^4 \leq \varepsilon \quad (5.14.6)$$

tengsizlikni qanoatlantirish kerak. Bu yerda h kichik bo'lsa, birinchi had bosh qism bo'lib, u (5.14.5) tengsizlikning chap tomonidan $4,5 \cdot \sqrt{3} = 7,794 \dots$ marta kichikdir. Demak, h kichik bo'lganda (5.14.6) ni qanoatlantiradigan h (5.14.5) ni qanoatlantiradigan h ga nisbatan $\sqrt[3]{4,5 \cdot \sqrt{3}} \approx 1,98$ marta kattadir. Yuqoridagi misolda (5.14.5) tengsizlik

$$20 \left(\frac{h^3}{72\sqrt{3}} + \frac{3h^4}{128} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$$

ko'rinishda bo'lib, uning yechimi $h \leq h_0 \leq 0,0315 \dots$ dir. Bu qadamga nisbatan "yaxlitroq" $h = 0,03$ ni olamiz.

Agar bu qadam ham kattalik qilsa, u holda interpolatsion ko'phadning darajasini orttirib qadamni yanada kichikroq olish mumkin.

Endi ekstrapolyatsiya, ya'ni argumentning jadvaldagi qiymatlari-dan tashqaridagi qiymatlarida funksiyaning qiymatini topish masalasiga to'xtalib o'tamiz. Ekstrapolyatsiyalash, odatda, jadvalning bir-ikki qadami miqyosida bajariladi. Chunki argumentning jadvaldagi qiymati-dan uzoqroq qiymatda ekstrapolyatsiyalaganda xato ortib ketadi. Jadval boshida ekstrapolyatsiyalash uchun Nyutonning birinchi interpolatsion formulasi qo'llanib, jadval oxirida esa ikkinchisi qo'llanadi. Interpolatsion ko'phadning tartibi odatda jadvalning amaliy o'zgarmas ayirmalari-ni tartibiga teng qilib olinadi.

Misol 5.10. Jadval 5.11 dan foydalanib $e^{1,78}$ va $e^{2,18}$ topilsin.

x	$f = e^x$	f^1	f^2	f^3	f^4
1.80	6,0496				
		3102			
1.85	6,3598		<u>159</u>		
		3261		<u>8</u>	
1.90	6,6859		167		1
		3428		9	
1.95	7,0187		176		-1
		3604		8	
2.00	7,3851		184		3
		3788		11	
2.05	7,7679		195		-2
		3983		<u>9</u>	
2.10	8,1662		<u>204</u>		
		<u>4187</u>			
2.15	8,5849				

Jadval 5.11

Yechish: Jadval 5.11 ga uchinchi tartibli ayirma amalda o'zgarmasdir. Shuning uchun ham uchinchi tartibli interpolatsion formuladan foy-dalanamiz. Jadval boshida va oxirida ekstrapolyatsiyalash uchun formu-

lalar quyidagicha yoziladi:

$$L_3(x) = 6,0496 + 0,3102t + 0,0159 \frac{t(t-1)}{2} + 0,0008 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}$$

$$L_3(x) = 8,5849 + 0,4187t + 0,0204 \frac{t(t+1)}{2!} + 0,0009 \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}$$

Birinchi formulaga $t = \frac{1,178-1,80}{0,05} = -0,4$ qiymatni qo'ysak:

$$e^{1,78} = 6,0496 + 0,3102(-0,4) + 0,0159 \cdot 0,4 \cdot 1,4 - 0,0008 \cdot 0,4 \cdot \frac{1,4 \cdot 2,4}{3!} = 5,92996$$

Shunga o'xshash $t = \frac{2,18-2,15}{0,05} = 0,6$ ni ikkinchi formulaga qo'yib, ushbu

$$e^{2,18} = 8,5849 + 0,4137 \cdot 0,6 + 0,0204 \cdot \frac{0,6 \cdot 1,6}{2} + 0,0009 \cdot \frac{0,6 \cdot 1,6 \cdot 2,6}{3!} = 8,83629$$

natijani topamiz. ■

5.15-§. Teskari interpolyatsiya. Tenglamalarni yechish

Shu paytgacha $y = f(x)$ funksiyani jadvali berilgan holda argumentning berilgan qiymatini x^* da funksiyani taqribiy qiymatini topish masalasi bilan shug'ullandik. Teskari interpolyatsiya masalasi quyidagicha qo'yiladi: $y = f(x)$ funksiyani jadvali berilgan, funksiyani berilgan y^* qiymati uchun argumentning shunday x^* qiymatini topish kerakki, $f(x^*) = y^*$ bo'lsin. Faraz qilaylik, jadvalning qaralayotgan oralig'ida $f(x)$ funksiya monoton va demak bir qiymatli teskari funksiya $x = \varphi(y)$ ($f(\varphi(y)) = y$) mavjud bo'lsin. Bunday holda teskari interpolyatsiya $\varphi(y)$ funksiya uchun odatdagi interpolyatsiyaga keltiriladi. Ushbu $x^* = \varphi(y^*)$ qiymatni topish uchun Lagranj yoki Nyuton tugunlari har xil joylashgan holdagi formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, Lagranj interpolyatsion formulasi quyidagi

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^n x_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad (5.15.1)$$

ko'rinishga ega bo'lib, qoldiq hadi

$$\varphi(y) - L_n(y) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (y - y_i)$$

ga teng bo'ladi.

Agar $f(x)$ monoton bo'lmasa, yuqoridagi formula yaramaydi. Bunday holda u yoki bu interpolatsion formulani yozib, argumentning ma'lum qiymatlaridan foydalanib va funksiyani ma'lum deb hisoblab, hosil bo'lgan tenglama u yoki bu metod bilan argumentga nisbatan yechiladi.

Misol 5.11. *Funksiyaning quyidagi qiymatlari*

x	-1	0	0,5	2
y	-4	-2	1	4

jadval bilan berilgan, x argumentning shunday qiymati topilsinki, $y = 0,5$ bo'lsin.

Yechish: Jadvaldagi qiymatlarga ko'ra funksiya monoton, shuning uchun ham $n = 3$ deb olib, (5.15.1) formuladan foydalanamiz:

$$L_3(y) = -1 \cdot \frac{(y+2)(y-1)(y-4)}{(-4+2)(-4-2)(-4-4)} + 0,5 \cdot \frac{(y+4)(y+2)(y-4)}{(1+4)(1+2)(1-4)} + \\ + 2 \cdot \frac{(y+4)(y+2)(y+1)}{(4+4)(4+2)(4-1)}.$$

Bu ifodaga $y = 0,5$ ni qo'yib, $x = 0,4142$ ni hosil qilamiz. ■

Misol 5.12. *Funksiyaning quyidagi qiymatlari*

x	-2	0	1	2	3
y	-12	-4	-9	-12	28

jadvali berilgan. x argumentning shunday qiymati topilsinki, $y = 3$ bo'lsin.

Yechish: Jadvaldan ko'rinib turibdiki, funksiya monoton emas. Shuning uchun ham ikkinchi usulni qo'llaymiz:

$$L_4(x) = -12 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)(-2-3)} - \\ - 4 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+2)(0-1)(0-2)(0-3)} - 9 \cdot \frac{(x+2)(x-0)(x-2)(x-3)}{(1+2)(1-0)(1-2)(1-3)} - \\ - 12 \cdot \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-3)}{(2+2)(2-0)(2-1)(2-3)} + \\ + 28 \cdot \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(3+2)(3-0)(3-1)(3-2)} = x^4 - 6x^2 - 4.$$

Demak, $L_4(x) = x^4 - 6x^2 - 4 = 3$ tenglamani yechib, $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ ni topamiz. ■

Endi teskari interpolatsiyalashda teng oraliqlar uchun chiqarilgan formulalarni qo'llash masalasini ko'raylik. Aytaylik, $f(x)$ monoton bo'lib, uning berilgan y^* qiymati $y_0 = f(x_0)$ va $y_1 = f(x_1)$ lar orasida joylashgan bo'lsin. Bu holda Nyutonning birinchi interpolatsion

$$f_t \approx L_n(x_0 + th) = f_0 + f_{1/2}^1 t + f_1^2 \frac{t(t-1)}{2!} + \dots + f_{n/2}^n \frac{t(t-1) \dots [t-(n-1)]}{n!}$$

formulasidan foydalanishimiz mumkin. Bu yerda f_t ma'lum bo'lib, t ni topish talab qilinadi. Buning uchun bu tenglamani ushbu

$$t = \frac{f_t - f_0}{f_{1/2}^1} - \frac{t(t-1)}{2} \frac{f_1^2}{f_{1/2}^1} - \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-(n-1))}{n!} \frac{f_{n/2}^n}{f_{1/2}^1} \quad (5.15.2)$$

ko'rinishda yozamiz va quyidagicha

$$\varphi(t) = \frac{f_t - f_0}{f_{1/2}^1} - \dots - \frac{(t-1) \dots (t-(n-1))}{n!} \frac{f_{n/2}^n}{f_{1/2}^1}$$

belgilash kiritib, (5.15.2) tenglamani

$$t = \varphi(t)$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Dastlabki yaqinlashish sifatida

$$t_0 = \frac{f_t - f_0}{f_{1/2}^1}$$

ni olib, iteratsiya metodini qo'llaylik:

$$t_m = \varphi(t_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.15.3)$$

Agar interpolatsiyaning barcha tugunlari $[a, b]$ da yotsa hamda $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ va qadam h yetarlicha kichik bo'lsa, u holda (5.15.3) iteratsion jarayon yaqinlashadi:

$$t = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$$

Teskari interpolatsiyani algebraik va transtsendent tenglamalarni yechish uchun ham qo'llash mumkin. Buni misollarda ko'rsatamiz.

Misol 5.13. Ushbu $x^3 - 3x + 1 = 0$ tenglamaning 0 va 1 orasidagi iddizi topilsin.

Yechish: $y = x^3 - 3x + 1$ funksiya qiymatlari jadvalini $h = 0,1$ qadam bilan tuzamiz:

x	f	f^1	f^2	f^3
0	1,000			
		-299	6	
0,1	0,701			6
		-293	12	
0,2	0,408			6
		-281	18	
0,3	<u>0,127</u>			6
		<u>-263</u>	<u>24</u>	
0,4	-0,136			<u>6</u>
		-239	30	
0,5	-0,375			6
		-209	36	
0,6	-0,584			6
		-173	42	
0,7	-0,757			6
		-131	48	
0,8	-0,888			6
		-83	54	
0,9	-0,971			
		-29		
1	-1,000			

Jadval 5.12

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, funksiya 0,3 dan 0,4 ga o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmoqda. Shuning uchun ham $x_0 = 0,3$; $y_0 = 0,127$; $y = 0$ kabi olib, (5.15.3) iteratsiyani qo'llash mumkin:

$$\varphi(t) = -\frac{0,127}{-0,263} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{0,024}{-0,263} - \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \cdot \frac{0,006}{-0,263}.$$

Dastlabki yaqilashish

$$t_0 = -\frac{0.127}{-0.263} = 0.483$$

bo'lib, qolgan yaqinlashishlar quyidagilarga teng:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0,4729364249; & t_2 &= 0,4729636375; \\ t_3 &= 0,47296335308; & t_4 &= 0,4729635333; \\ t_5 &= 0,4729635333. \end{aligned}$$

Bu yerda t_4 va t_5 ning qiymatlari ustma-ust tushadi. Shuning uchun ham x sifatida $x = x_0 + th = 0,347296355333$ ni olish mumkin. ■

Misol 5.14. Ushbu $e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$ tengdamaning ildizi topilsin.

Yechish: Bu tenglamaning sh $x - 2 = 0$ shaklida yozib olib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$f = \text{sh } x - 2$	f^1	f^2	f^3	f^4
1,1	-0,6644	1739			
1,2	-0,4905	1889	150		
1,3	-0,3016	2059	170	20	1
1,4	-0,0957	2250	191	21	1
1,5	-0,1293	2463	213	22	2
1,6	-0,3756	2700	237	24	5
1,7	0,6456	2966	266	29	
1,8	0,9422				

Jadval 5.13

Bu jadvaldan ko'ramizki, to'rtinchi tartibli ayirma amaliy o'zgarmas bo'lib, ildiz 1,4 va 1,5 lar orasidadir. Shuning uchun $n = 4$, $x_0 = 1,4$; $y_0 = -0,0957$; $y = 0$ kabi olib, (5.15.3) iteratsiyani qo'llashimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & -\frac{0,0957}{0,2250} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{0,0213}{0,2250} - \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \times \\ & \times \frac{0,0024}{0,2250} - \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{24} - \frac{0,0005}{0,2250}. \end{aligned}$$

Endi dastlabki yaqinlashish sifatida $t_0 = 0,425$ ni olsak, qolgan yaqinlashishlar quyidagilarga teng:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0,436128069472; & t_2 &= 0,4362022205039; \\ t_3 &= 0,436202662457; & t_4 &= 0,46202665278; \\ t_5 &= 0,436202665296; & t_6 &= 0,436202665296. \end{aligned}$$

Bu yerda t_5 va t_4 ustma-ust tushyapti, demak, $x = x_n + th = 1.4436202665296$. ■

5.16-§. Sonli differensiallash

5.16.1 Umumiy mulohazalar

Ko'p amaliy masalalarda funksiya hosilalarini ayrim nuqtalarda taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi. Bu masala *sonli differensiallash masalasi* deyiladi. Funksiyaning analitik ko'rinishi noma'lum bo'lib uning ayrim nuqtalardagi qiymatlari ma'lum bo'lsa, masalan, tajribadan topilgan bo'lsa, u holda uning hosilasi sonli differensiallash yo'li bilan topiladi. Umuman aytganda, funktsiyani sonli differensiallash masalasi doimo bir qiymatli ravishda yechilavermaydi. Masalan, $f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi hosilasini topish uchun $h > 0$ ni olib,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5.16.1)$$

yoki

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (5.16.2)$$

yoki

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (5.16.3)$$

kabi olishimiz mumkin. Ko'pincha (5.16.1) *o'ng hosila*, (5.16.2) *chap hosila* va (5.16.3) *markaziy hosila* deyiladi.

Sonli differensiallash usullari odatda interpolatsion formulalarga asoslangan. Faraz qilaylik, $[a, b]$ oralig'ida $(n+1)$ - tartibgacha hosilalari uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Uni

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \quad (5.16.4)$$

ko'rinishda tasvirlaymiz. Bu yerda $L_n(x)$ $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlar bo'yicha tuzilgan qandaydir interpolatsion ko'phad bo'lib, uning qoldiq hadi quyidagiga teng:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (a < \xi < b), \quad (5.16.5)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (5.16.6)$$

Odatda (5.16.4) tenglikni differensiallab, taqribiy ravishda

$$f'(x) \approx L'_n(x), \quad f''(x) \approx L''_n(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) \approx L^{(n)}_n(x) \quad (5.16.7)$$

deb olinadi. Bu taqribiy tengliklarning absolyut xatolari mos ravishda

$$R'_n(x), R''_n(x), \dots, R_n^{(n)}(x)$$

ifodalarning absolyut qiymatlariga teng bo'ladi. Lekin absolyut xatoni amalda har doim ham aniqlash yengil ish emas. Haqiqatan ham, (5.16.5) dan

$$\frac{dR_n(x)}{dx} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \omega_{n+1}(x) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi)}{dx} \quad (5.16.8)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglikda ξ ning x ga qanday tarzda bog'liqligini bilmaganligimiz uchun, ikkinchi hadni baholay olmaymiz. Bizga faqat shu narsa ma'lumki, interpolatsiya nuqtalarida ikkinchi had nolga teng.

Shunday qilib,

$$f'(x) \approx L'_n(x)$$

ning absolyut xatosini faqat interpolatsiya tugunidagina aniqlay olamiz:

$$\left. \frac{dR_n(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x_i). \quad (5.16.9)$$

Yuqori tartibli hosilalar qoldiq hadlarining ko'rinishi ancha murakkabdir. Masalan, ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} \quad (5.16.10)$$

hosilaning qoldiq hadi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_n(x)}{dx^2} &= \frac{d^2 \omega_{n+1}(x)}{dx^2} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + 2 \frac{d\omega_{n+1}(x)}{dx} \cdot \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} + \\ &+ 2\omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}. \end{aligned} \quad (5.16.11)$$

Buning isbotini, masalan, [4] dan qarash mumkin. Bu formulada ξ , ξ_1 va ξ_2 lar, $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalarni o'z ichiga oladigan eng kichik oraliqning qandaydir nuqtalaridir. Agar x nuqta $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlarining birortasi bilan ustma-ust tushsa, u holda (5.16.11) ning o'ng tomoni soddalashadi va oxirgi had nolga aylanadi. Quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 5.4. Faraz qilaylik, x nuqta $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlarni o'z ichiga oladigan eng kichik $[\alpha, \beta]$ oraliqning tashqarisida yotsin. Agar $f(x)$ funksiya interpolatsiya tugunlarini va x nuqtani o'z ichiga oladigan eng kichik $[a, b]$ oraliqda $(n+1)$ - tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda shunday ξ ($a < \xi < b$) nuqta mavjudki, izhtiyoriy k ($1 \leq k \leq n$) uchun

$$R_n^{(k)}(x) = \frac{\omega_{n+1}^{(k)}(x) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (5.16.12)$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. Yordamchi

$$\varphi(z) = R_n(z) - K\omega_{n+1}(z) \quad (5.16.13)$$

funksiya olamiz, bu yerda K o'zgarmas bo'lib, uni keyinroq aniqlaymiz. $\varphi(z)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $(n+1)$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega va $x_0, x_1, \dots, x_n$ tugunlarda nolga aylanadi, shuning uchun ham Roll teoremasiga ko'ra: (α, β) oraliqda $\varphi'(z)$ kamida n ta har xil ildizlarga, $\varphi''(z)$ kamida $(n-1)$ ta va hokazo, $\varphi^{(k)}(z)$ esa kamida $(n+1-k)$ ta har xil ildizlarga egadir. Endi doimiy K ni shunday tanlaymizki, $z = x$ da $\varphi^{(k)}(x) = 0$, ya'ni

$$\varphi^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(x) - K\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0 \quad (5.16.14)$$

bo'lsin. K ni shunday tanlashga haqlimiz, chunki $\omega_{n+1}^{(k)}(z)$ ning barcha $(n+1-k)$ ta ildizlari (α, β) oraliqda, x esa (α, β) dan tashqarida yotadi va demak, $\omega_{n+1}^{(k)}(x) \neq 0$. (5.16.14) dan K ni topamiz:

$$K = \frac{R_n^{(k)}(x)}{\omega_{n+1}^{(k)}(x)} \quad (5.16.15)$$

K ning bu qiymatida $\varphi^{(k)}(z)$ hosila $[a, b]$ oraliqda kamida $(n+2-k)$ ta turli ildizlarga ega. Roll teoremasiga ko'ra $[a, b]$ ichida $\varphi^{(k+1)}(z)$ kamida $(n+1-k)$ ta, $\varphi^{(k+2)}(z)$ kamida $(n-k)$ ta va hokazo, $\varphi^{(n+1)}(z)$ esa $[a, b]$ da kamida bitta ξ ildizga ega: $\varphi^{(n+1)}(z) = 0$, ya'ni

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K = 0.$$

Bundan esa

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

K ning bu qiymatini (5.16.15) bilan solishtirsak, teoremaning tasdig'i kelib chiqadi.

5.16.2 Lagranj interpolatsion ko'phadi yordamida sonli differensiallash

Yuqoridagi (5.16.4) tenglikdagi $L_n(x)$ sifatida Lagranj interpolatsion ko'phadini olaylik:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j), \quad (5.16.16)$$

Bu yerda

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \frac{d}{dx} \omega_{n+1}(x) \Big|_{x=x_k}.$$

(5.16.16) tenglikdan

$$\begin{aligned} \frac{dL_n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \frac{d}{dx} \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j) \Big|_{x=x_i} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \sum_{j=0, j \neq k}^n \prod_{l=0, l \neq k, l \neq j}^n (x_i - x_l). \end{aligned} \quad (5.16.17)$$

Oxirgi tenglikda faqat ikkita holda, ya'ni $k = i$ va $j = i$ bo'lgandagina

$$\prod_{l=0, l \neq k, l \neq j}^n (x_i - x_l)$$

ko'paytma noldan farqlidir. Shuning uchun ham

$$\begin{aligned} \frac{dL_n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} &= \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{l=0, l \neq j}^n (x_i - x_l) + \\ &+ \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} \cdot \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{l=0, l \neq i}^n (x_i - x_l). \end{aligned}$$

Demak,

$$\frac{dL_n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = f(x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} + \omega'_{n+1}(x_i) \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{f(x_k)}{(x_i - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}. \quad (5.16.18)$$

Agar $x_i = x_0 + ih$ bo'lsa, $\omega'_{n+1}(x_i) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!h^n$ bo'lganligi uchun, $f_i = f(x_i)$ deb olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left. \frac{dL_n(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{f_i}{h} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{i-j} + \frac{(-1)^i}{h C_n^i} \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{i-k} f_k. \quad (5.16.19)$$

Qoldiq had (5.16.9) formulaga ko'ra

$$\left. \frac{dR_n(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n+1) C_n^i} f^{(n+1)}(\xi) h^n. \quad (5.16.20)$$

Endi (5.16.19)–(5.16.20) formulalar yordamida n ning turli qiymatlarida hosila uchun formulalar chiqaramiz.

$n = 2$ (tugunlar uchta) bo'lganda:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \\ f'(x_1) &= \frac{1}{2h} (f_2 - f_0) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \\ f'(x_2) &= \frac{1}{2h} (f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi). \end{aligned}$$

$n = 3$ (tugunlar to'rtta) bo'lganda:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{6h} (-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi), \\ f'(x_1) &= \frac{1}{6h} (-2f_0 - 3f_1 + 6f_2 - f_3) + \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi), \\ f'(x_2) &= \frac{1}{6h} (f_0 - 6f_1 + 3f_2 + 2f_3) - \frac{h^3}{12} f^{IV}(\xi), \\ f'(x_3) &= \frac{1}{6h} (-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3) + \frac{h^3}{4} f^{IV}(\xi). \end{aligned}$$

$n = 4$ (tugunlar beshta) bo'lganda:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} (-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4) + \frac{h^4}{5} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h} (-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4) - \frac{h^4}{20} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4) + \frac{h^4}{30} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{12h} (-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4) - \frac{h^4}{20} f^{IV}(\xi),$$

$$f'(x_4) = \frac{1}{12h} (3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4) + \frac{h^4}{5} f^{IV}(\xi).$$

Agar bu formulalarga e'tibor berilsa, n juft bo'lganda o'rta nuqtalardagi hosilalar ifodalarining nisbatan sodda ekanliklarini ko'rish mumkin. Shu bilan birga qoldiq hadlardagi hosila oldidagi koeffitsiyentlari ham kichikdir. Shuning uchun ham amalda, mumkin qadar shu formulalarni qo'llashga harakat qilish kerak. Endi (5.16.10)–(5.16.11) dan $n = 2$ ikkinchi hosilalar uchun quyidagi ifodalarni chiqaramiz:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) - hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) - \frac{h^2}{12} f^{IV}(\xi),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) + hf'''(\xi_1) - \frac{h^2}{6} f^{IV}(\xi).$$

Bu yerda ham o'rta nuqtalarda hosilaning xatosi eng kichik bo'ladi.

5.16.3 Nyuton formulasi yordamida sonli differensiallash

Interpolyatsiya tugunlari teng uzoqdikda joylashgan bo'lsa, u holda sonli differensiallashda Nyuton, Bessel, Stirling, Everett formulalaridan foydalanish mumkin.

Nyutonning birinchi interpolatsion formulasidan foydalanaylik:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = P(t) = f_0 + tf_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2} f_1^2 + \dots \\ \dots + \frac{t(t-1)\dots[t-(n-1)]}{n!} f_{n/2}^n.$$

Bu ko'phad hadlarini gruppalab, uni t ning darajasi bo'yicha yozib chiqamiz:

$$P(t) = f_0 + t \left[f_{1/2} - \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{3/2}^3 - \frac{1}{4} f_2^4 + \frac{1}{5} f_{5/2}^5 - \dots \right] + \\ + \frac{t^2}{2!} \left[f_1^2 - f_{3/2}^3 + \frac{11}{12} f_2^4 - \frac{5}{6} f_{5/2}^5 + \dots \right] + \\ + \frac{t^3}{3!} \left[f_{3/2}^5 - \frac{3}{2} f_2^4 + \frac{7}{4} f_{5/2}^5 - \dots \right] + \dots \quad (5.16.21)$$

Bu yerda qavs ichida faqat beshinchi tartibligicha chekli ayirmalar qatnashadiganlarigina yozildi, amaliyotda shu yetarli bo'ladi. Ikkinchi tomondan $P(t)$ ni Teylor formulasi bo'yicha ifodalasak:

$$P(t) = P(0) + P'(0)t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}t^n. \quad (5.16.22)$$

Endi (5.16.22) ni (5.16.21) bilan taqqoslasak:

$$\begin{aligned} P'(0) &= f_{1/2} - \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{3/2}^3 - \frac{1}{4} f_2^4 + \frac{1}{5} f_{5/2}^5 - \dots, \\ P''(0) &= f_1^2 - f_{3/2}^3 + \frac{11}{12} f_2^4 - \frac{5}{6} f_{5/2}^5 + \dots, \\ P'''(0) &= f_{3/2}^5 - \frac{3}{2} f_2^4 + \frac{7}{4} f_{5/2}^5 - \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

So'ngra $k = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$L_n^{(k)}(x_0) = \frac{d^k P(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} \cdot \frac{1}{h^k} = \frac{P^{(k)}(0)}{h^k}$$

ni hisobga olgan holda x_0 nuqtada sonli differensiallash uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} \left(f_{1/2} - \frac{1}{2} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{3/2}^3 - \frac{1}{4} f_2^4 + \frac{1}{5} f_{5/2}^5 - \dots \right), \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2} \left(f_1^2 - f_{3/2}^3 + \frac{11}{12} f_2^4 - \frac{5}{6} f_{5/2}^5 + \dots \right), \\ f'''(x_0) &= \frac{1}{h^3} \left(f_{3/2}^5 - \frac{3}{2} f_2^4 + \frac{7}{4} f_{5/2}^5 - \dots \right). \end{aligned}$$

5.16.4 Aniqmas koeffitsiyentlar metodi

Agar tugunlar ixtiyoriy ravishda joylashgan bo'lsa, Lagranj ko'phadidan foydalanmasdan, amalda ancha qulay bo'lgan aniqmas koeffitsiyentlar metodidan foydalanish mumkin. Faraz qilaylik, $f(x)$ ning hosilalari $f^{(k)}(x_i)$ ni x_i ($i = \overline{0, n}$) nuqtalarda $f_0, f_1, \dots, f_n$ lar orqali ifodalash kerak bo'lsin. Buning uchun izlanayotgan formulani

$$f^{(k)}(x_i) = \sum_{i=0}^n c_i f_i + R(f)$$

shaklda yozamiz va c_i larni shunday tanlaymizki, u n -darajali ko'phad uchun aniq formulaga aylansin, ya'ni

$$f(x) = 1, f(x) = x - x_i, f(x) = (x - x_i)^2, \dots, f(x) = (x - x_i)^n$$

bo'lganda $R(f) = 0$ bo'lsin. Bu shartlar bizga c_i ($i = \overline{0, n}$) larga nisbatan $n+1$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini beradi.

Misol 5.15. $f'(x_2)$ ni $f(x)$ ning $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, x_0 + 4h$ nuqtalardagi f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 qiymatlari orqali ifodalaymiz

Yechish: Buniig uchun

$$f'(x_2) = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4$$

tenglikka ketma-ket $f(x) = 1, f(x) = x - x_2, f(x) = (x - x_2)^2, f(x) = (x - x_2)^3, f(x) = (x - x_2)^4$ larni qo'yamiz:

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0,$$

$$-2hc_0 - hc_1 + hc_3 + 2hc_4 = 1,$$

$$4h^2c_0 + h^2c_1 + h^2c_3 + 4h^2c_4 = 0,$$

$$-8h^3c_0 - h^3c_1 + h^3c_3 + 8h^3c_4 = 0,$$

$$16h^4c_0 + h^4c_1 + h^4c_3 + 16h^4c_4 = 0.$$

Soddalashtirsak,

$$(1) \quad c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0,$$

$$(2) \quad -2c_0 - c_1 + c_3 + 2c_4 = \frac{1}{h},$$

$$(3) \quad 4c_0 + c_1 + c_3 + 4c_4 = 0,$$

$$(4) -8c_0 - c_1 + c_3 + 8c_4 = 0,$$

$$(5) 16c_0 + c_1 + c_3 + 16c_4 = 0$$

hosil bo'ladi.

Bu sistemani yechish uchun (3) tenglamani (5) tenglamadan ayiramiz. unda $c_4 = -c_0$ ga ega bo'lamiz, keyin $c_4 = -c_0$ ni (3) ga qo'yib, $c_3 = -c_1$ ni topamiz. Bularni (1) va (4) larga qo'yib $c_2 = 0$ va $c_3 = 8c_4$ larni aniqlaymiz. Nihoyat, bularni ikkinchi tenglamaga qo'yib,

$$c_4 = -c_0 = \frac{1}{12h}, \quad c_3 = -c_1 = \frac{8}{12h}$$

larni topamiz. Nihoyat

$$f'(x_2) \simeq \frac{1}{12h} (f_0 - 8f_1 + 8f_2 - f_4)$$

kelib chiqadi. Bu esa Lagranj formulasi yordamida avval topilgan ifoda bilan qoldiq hadsiz ustma-ust tushadi. ■

Mashqlar

1. Agar $Q_{in}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ bo'lsa, u holda quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

$$a) Q_{0n}(x) + Q_{1n}(x) + \dots + Q_{nn}(x) = 1,$$

$$b) x_0^n Q_{0n}(x) + x_1^n Q_{1n}(x) + \dots + x_n^n Q_{nn}(x) = x^n,$$

$$c) \sum_{i=0}^n (x_i - x)^k Q_{in}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

2. Ayniyatni isbotlang:

$$\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = 1 + \sum_{m=1}^n \prod_{k=1}^m \frac{x-x_{k-1}}{x_0-x_k}.$$

3. Quyidagini isbotlang:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} \frac{i}{m} C_{m+n}^{m+i} = \frac{(m+n-2)!}{(n-1)!m!}.$$

Ko'rsatma: Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{m!} (m-x)(m-1-x)\dots(2-x)$$

funksiyaga Lagranj formulasini qo'llab, $x_0 = 0$, $h = 1$, $x = m+n$ deb olish kerak.

4. Lagranj interpolatsion ko'phadidan foydalanib, quyidagi formulalarni keltirib chiqaring:

a) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{1}{m-k} C_m^k C_n^k = \frac{1}{m-n} \quad (m > n),$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{k}{m-k} C_m^k C_n^k = \frac{m}{m-n} \quad (m > n).$

5. Faraz qilaylik, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ va $S_0 = 0$, $S_m = \sum_{v=0}^{m-1} P(v)$ bo'lsin. Quyidagi

$$S_m = mP(0) + C_m^2 \Delta P(0) + \dots + C_m^{n+1} \Delta^n P(0)$$

tenglikni ko'rsating.

(Eslatma. $\Delta^{n+1} S_m = \Delta^n P(m) = a_0 n!$ tenglikdan foydalaning.)

6. Oldingi masaladagi formuladan foydalanib,

$$\sum_{v=0}^{m-1} v, \quad \sum_{v=0}^{m-1} v^2, \quad \sum_{v=0}^{m-1} v^3$$

yig'indilar uchun formulalar chiqaring.

7. Ixtiyoriy $(2n+2)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ va $c_0, c_1, \dots, c_n$ sonlar berilgan bo'lsin. Darajasi n dan ortmaydigan va quyidagi

$$P(x_0) = c_0, \quad P'(x_1) = c_1, \quad \dots, \quad P^{(n)}(x_n) = c_n$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yagona ko'phad qurish mumkinligini isbotlang va $P(x)$ ko'phadning oshkor ko'rinishini aniqlang.

8. Ushbu $\Delta \arctg x = \arctg \frac{1}{1+x+x^2}$ tenglikdan foydalanib,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctg \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi}{2}$$

tenglikni isbotlang.

9. Lagranj interpolatsion formulasidan foydalanib, ikkinchi hosila uchun quyidagi 5 nuqtali

$$f''(x_2) = \frac{1}{24h^2} (-2f_0 + 32f_1 - 60f_2 + 32f_3 - 2f_4) + \frac{h^4}{90} f^{(5)}(\xi)$$

formulani keltirib chiqaring.

10. Bessel formulasidan foydalanib, quyidagi sonli differensiallash formulalarini keltirib chiqaring:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} \left(\mu f_0^1 - \frac{1}{3!} f_0^3 + \frac{(2!)^2}{3} \mu f_0^5 - \dots \right), \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2} \left(f_0^2 - \frac{2}{4!} f_0^4 + \dots \right), \\ f'''(x_0) &= \frac{1}{h^3} \left(\mu f_0^3 - \frac{3! (1^2 + 2^2)}{5!} \mu f_0^5 + \dots \right). \end{aligned}$$

11. Oldingi mashqdagi formulani aniqmas koeffitsiyentlar metodi bilan toping.
12. Stirling formulasidan foydalanib, sonli differensiallash uchun quyidagi formulalarni chiqaring.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} \left(f_{1/2}^1 - \frac{1}{2} \mu f_{1/2}^2 + \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^3 + \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^4 + \dots \right), \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2} \left(\mu f_{1/2}^2 - \frac{1}{2} f_{1/2}^3 - \frac{1}{12} \mu f_{1/2}^4 + \dots \right), \\ f'''(x_0) &= \frac{1}{h^3} \left(f_{1/2}^3 - \frac{1}{2} \mu f_{1/2}^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

6-BOB. FUNKSIYALARNING YAQINLASHISHI

6.1-§. Masalaning qo'yilishi

Faraz qilaylik, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ yetarlicha silliq va hisoblash uchun qulay bo'lgan chiziqli erkli funksiyalar sistemasi bo'lsin. Bu funksiyalardan tuzilgan

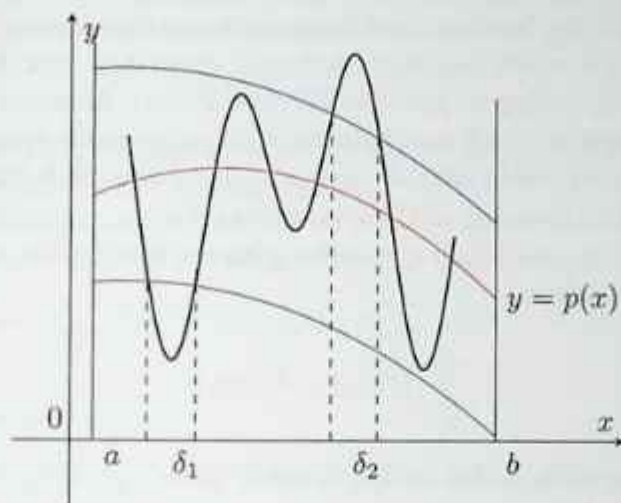
$$P_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x) \quad (6.1.1)$$

chiziqli kombinatsiya ($c_0, c_1, \dots, c_m$ — doimiy sonlar) *umumlashgan ko'phad* deyiladi. Oldingi bobda berilgan $f(x)$ funksiyani interpoliyatsiyalash yo'li bilan $P_m(x)$ orqali taqribiy ravishda almashtirish masalasini ko'rgan edik. Ammo shuni ham ta'kidlab o'tish lozimki, qator masalalarda funksiyaning bunday taqribiy tasvirlanishi maqsadga muvofiq bo'lavermaydi. Birinchidan, tugunlar soni ko'p bo'lsa, u holda interpoliyatsion ko'phadlarning ham darajasi ortib boradi, lekin bu yaqinlashishning sifati har doim ham yaxshi bo'lmasligi mumkin. Ikkinchidan, $f(x)$ funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymati biror tajribadan aniqlangan bo'lishi ham mumkin, u holda tabiiy ravishda bu qiymatlar tajriba xatosiga ega bo'lib, u interpoliyatsion ko'phadga ham ta'sir qiladi va shu bilan funksiyaning haqiqiy holatini ham buzib ko'rsatadi.

Qandaydir ma'noda bu kamchiliklardan xoli bo'lgan o'rta kvadratik yaqinlashuvchi ko'phadlarni tuzish bilan shug'ullanish maqsadga muvofiqdir. Shunday qilib, biz funksiyalar uchun o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish masalasi qo'yilishining maqsadga muvofiq ekanligiga ishonch hosil qildik. Bu masala quyidagidan iboratdir: $[a, b]$ oralig'ida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun (6.1.1) ko'rinishdagi yaqinlashuvchi shunday $P_m(x)$ ko'phad topilsinki,

$$\int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx \quad (6.1.2)$$

ifoda mumkin qadar eng kichik qiymatni qabul qilsin.



Chizma 6.1.1

Agar (6.1.2) integral kichik qiymat qabul qilsa, bu shuni bildiradiki, $[a, b]$ oraliqning ko'p qismida $f(x)$ va $P_m(x)$ bir-biriga yaqin. Shunga qaramasdan ayrim nuqtalar atrofida yoki bu oraliqning ba'zi kichik qismlarida $f(x) - P_m(x)$ ayirma nisbatan yetarlicha katta bo'lishi ham mumkin (Chizma 6.1.1).

Quyidagi

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - P_m(x)]^2 dx} \quad (6.1.3)$$

miqdor $P_m(x)$ ning $f(x)$ dan *o'rta kvadratik og'ishi* deyiladi va $f(x)$ ni $P_m(x)$ bilan yaqinlashishda *o'rta kvadratik ma'nodagi* xatoni bildiradi.

Agar $f(x)$ ni *o'rta kvadratik ma'noda* $P_m(x)$ bilan yaqinlashtirishda qandaydir sababga ko'ra qaralayotgan oraliqning biror qismida uning boshqa qismiga nisbatan aniqroq yaqinlashtirish kerak bo'lsa, u holda ko'pincha quyidagicha ish tutiladi: *vazn* deb ataluvchi maxsus ravishda tanlab olingan manfiy bo'lmagan $\rho(x)$ funksiya olinib, (6.1.2) o'rniga ushbu

$$\int_a^b \rho(x) [f(x) - P_m(x)]^2 dx$$

integralning eng kichik qiymatni qabul qilishi talab qilinadi. Bu yerda $\rho(x)$ shunday tanlangan bo'lishi kerakki, agar oraliqning biror x nuqtasi atrofida yaqinlashish aniqligi boshqa nuqtalarga nisbatan yaxshiroq bo'lishi talab qilinsa, $\rho(x)$ shu nuqta atrofida kattaroq qiymatga ega bo'lishi kerak. Masalan, $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiyani $P_m(x)$ funksiya bilan yaqinlashtirishda yaqinlashtirish aniqligining oraliqning chetki nuqtalari $x = \pm 1$ atrofida yuqori bo'lishini istasak, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ deb olish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiyaning analitik ko'rinishi o'rniga, uning faqat $(n+1)$ ta $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarigina ma'lum bo'lsa, u holda (6.1.2) integral o'rniga ushbu

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (6.1.4)$$

yig'indining mumkin qadar kichik qiymat qabul qilishligi talab qilinadi. Bu holda

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2}$$

miqdor *o'rta kvadratik og'ish* deyiladi. O'rta kvadratik yaqinlashtirish usuli eng kichik kvadratlar usuli ham deyiladi.

Agar bordiyu, $f(x_i)$ larning aniqligi bir xil bo'lmasa, masalan, har xil aniqlikka ega bo'lgan turli asboblardan yordamida hisoblangan bo'lsa, u holda biz aniqligi katta bo'lgan qiymatlarga ko'proq ishonch bilan kattaroq "vazn" berishimiz kerak. Buning uchun x_i nuqtadagi vazn deb ataluvchi maxsus tanlangan $\rho_i > 0$ sonlarni olib, (6.1.4) yig'indi o'rniga ushbu

$$\sum_{i=0}^n \rho_i [f(x_i) - P_m(x_i)]^2 \quad (6.1.5)$$

vazniy yig'indini minimallashtirishimiz kerak. Bu vaznlar odatda ularning yig'indisi birga teng bo'ladigan qilib tanlanadi:

$$\sum_{i=0}^n \rho_i = 1.$$

Agar (6.1.3) bilan aniqlangan o'rta kvadratik og'ish δ kichik bo'lsa, $[a, b]$ oraliqning aksariyat nuqtalarida $|f(x) - P_m(x)|$ ayirma qiymati kichik bo'ladi. Lekin shunga qaramasdan ayrim kichik oraliqchalarda bu miqdor katta bo'lishi ham mumkin. Aniqlashtirish, faraz qilaylik, $[a, b]$

oralig'ida $|f(x) - P_m(x)|$ ning ekstremumlari soni chekli bo'lib, γ ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Faraz qilaylik, $s_0, s_1, \dots, s_k$ o'zaro kesishmaydigan $[a, b]$ dan olingan shunday oraliqlar bo'lsinki,

$$|f(x) - P(x)| \geq \gamma$$

tengsizlik qanoatlantiradigan nuqtalar shu s_i larga tegishli bo'lib, σ shu oraliqlar uzunliklari yig'indisi bo'lsin. Agar $\delta < \varepsilon$ (q. (6.1.3)) bo'lsa, u holda

$$\varepsilon^2(b-a) > \int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx \geq \sum_{i=1}^k [f(x) - P(x)]^2 dx \geq \gamma^2 \sigma$$

bo'ladi. Bundan esa

$$\sigma < (b-a) \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right)^2.$$

Demak, agar ε yetarlicha kichik bo'lsa, σ istalgancha kichik bo'ladi. Shunday qilib, ε yetarlicha kichik bo'lsa, $[a, b]$ oraliqning o'lchovi istalgancha kichik σ dan ortmaydigan nuqtalar to'plamidan tashqari boshqa hamma nuqtalarda

$$|f(x) - P_m(x)| < \gamma$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Lekin ayrim hollarda yaqinlashtiriluvchi ko'phadga og'irroq shart qo'yiladi, chunonchi, $[a, b]$ oraliqning barcha nuqtalarida $f(x)$ ning $P_m(x)$ dan og'ishi berilgan miqdordan kichik bo'lishi talab qilinadi. Biz $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz va $P_m(x)$ algebraik ko'phad bo'lgan holni ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $H_n(P)$ darajasi n dan ortmaydigan

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

algebraik ko'phadlarning to'plami bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz va $P_n(x) \in H_n(P)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ ning $P_n(x)$ dan $[a, b]$ oraliqda og'ishini, ya'ni

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

ni $E_n(f, P_n)$ orqali belgilaymiz. Bu miqdor $P_n(x)$ ko'phad koeffitsiyentlari $a_0, a_1, \dots, a_n$ ning funksiyasi bo'lib, u manfiy emas hamda bu miqdor manfiy bo'lmagan aniq quyi chegaraga ega bo'ladi:

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} E_n(f, P_n)$$

Agar shunday $P_n^*(x)$ ko'phad mavjud bo'lib, $E_n(f, P_n^*) = E_n(f)$ tenglik bajarilsa, u holda $P_n^*(x)$ ko'phad *eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad* va $E_n(f)$ *eng kichik og'ish* yoki $f(x)$ *ning n -darajali ko'phad bilan eng yaxshi yaqinlashishi* deyiladi.

EHM larda funksiyalarni hisoblash uchun standart programmalar tuzishda berilgan $f(x)$ uchun $E_n(f)$ berilgan ε dan kichik bo'ladigan $P_n^*(x)$ ko'phadni topish talab qilinadi. Biz bu bobda mana shunday yaqinlashishlarni ko'rib chiqamiz.

O'tgan asrning elliginch yillaridan boshlab matematikada splayn-yaqinlashish yoki bo'lakli ko'phadlar bilan yaqinlashish deb ataluvchi yangi tipdagi yaqinlashish o'rganilmoqda. Bobning oxirgi paragraflari mana shu yaqinlashishga bag'ishlanadi.

6.2-§. Oraliqda algebraik ko'phadlar orqali o'rta kvadratik yaqinlashish

Agar chekli $[a, b]$ oraliqda $\rho(x) \geq 0$ bo'lib va undan olingan integral musbat bo'lsa, ya'ni

$$0 < \int_a^b \rho(x) dx < \infty \quad (6.2.1)$$

shart bajarilsa, u holda $\rho(x)$ $[a, b]$ oraliqda *vazn funksiyasi* deyiladi. Agar $[a, b]$ oraliq cheksiz bo'lsa, u holda, bundan tashqari,

$$\int_a^b x^k \rho(x) dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

integrallar absolyut yaqinlashuvchi bo'lishlari kerak.

Lemma 6.2.1. Agar $Q_n(x)$ $[a, b]$ oraliqda manfiy bo'lmagan n -darajali ko'phad bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\rho(x)$ *vazn funksiyasi* uchun

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) dx > 0 \quad (6.2.2)$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Avvalo lemmaning tasdig'i bevosita ko'rinib turgan ikki sodda holni ko'raylik. Birinchidan, agar $\rho(x)$ chekli sondagi maxsus nuqtalarga ega bo'lsa, u holda $[a, b]$ oraliqning bu nuqtalardan boshqa nuqtalarida $\rho(x)Q_n(x)$ musbat va uzluksiz, shuning uchun ham (6.2.2) dagi integral musbat. Ikkinchidan $[a, b]$ oraliqda $Q_n(x)$ musbat bo'lsa, u holda m orqali uning bu oraliqdagi minimumini belgilab,

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)dx > m \int_a^b \rho(x)dx > 0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz va lemmaning tasdig'i bu hol uchun ham o'rinli bo'ladi. Umumiy holda, faraz qilaylik, $Q_n(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda $x_1, x_2, \dots, x_s$ ildizlarga ega bo'lsin. U holda (6.2.1) shartga ko'ra $\rho(x)$ vazndan $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_s, b]$ oraliqlar bo'yicha olingan integrallarining kamida bittasi musbat bo'lishi kerak. Bunday oraliq uchun:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i + \varepsilon}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x)dx > 0. \quad (6.2.3)$$

Demak, yetarlicha kichik ε uchun $\rho(x)$ vazn $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$ oraliq bo'yicha musbat. Lekin bu oraliqda $Q_n(x)$ ko'phad ildizga ega emas, shuning uchun ham $m(\varepsilon)$ orqali $Q_n(x)$ ning $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$ oraliqdagi minimumini belgilab olsak, quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b \rho(x)Q_n(x)dx > \int_{x_i}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x)Q_n(x)dx > m(\varepsilon) \int_{x_i}^{x_{i+1} - \varepsilon} \rho(x)dx > 0.$$

Vazndan $[a, b]$ oraliq bo'yicha olingan integral mavjud va $[x_i + \varepsilon, x_{i+1} - \varepsilon]$ da $\rho(x) > 0$ bo'lgani uchun (6.2.3) integral mavjuddir.

Agar oraliq cheksiz, ya'ni $[x_s, \infty)$ bo'lsa, u holda (6.2.3) o'rniga

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_s + \varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \rho(x)dx = \int_{x_s}^{\infty} \rho(x)dx > 0$$

limitni qarash kerak. Xuddi shunga o'xshash $(-\infty, x_1]$ oraliq uchun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} \rho(x)dx = \int_{-\infty}^{x_1} \rho(x)dx$$

limit qaraladi. Lemma isbotlandi. ■

Endi, faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oralig'ida kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni

$$\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx$$

mavjud bo'lsin. Bunday funksiyalarni $L^2_\rho[a, b]$ fazoga tegishli deymiz. Bu funksiyani

$$P_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

umumlashgan ko'phad bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish masalasini ko'ramiz, ya'ni $a_0, a_1, \dots, a_n$ koeffitsiyentlarni shunday tanlashimiz kerakki,

$$\delta_n = \int_a^b \rho(x) [P_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right]^2 dx \quad (6.2.4)$$

ifoda eng kichik qiymatga ega bo'lsin. Bu yerda $\delta_n = \delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiya $a_0, a_1, \dots, a_n$ larga nisbatan kvadratik ko'phad va $\delta_n \geq 0$ bo'lgani uchun uning minimumi mavjud, bu minimumni topish uchun barcha

$$\frac{\partial \delta_n}{\partial a_i} \quad (i = \overline{0, n})$$

xususiyl hosilalarni topib, ularni nolga tenglashtiramiz. Natijada $a_0, a_1, \dots, a_n$ larni aniqlash uchun quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_0} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_0(x) dx = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_1} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_1(x) dx = 0, \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \delta_n}{\partial a_n} = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_n(x) dx = 0. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

Arap $L^2_\rho[a, b]$ fazodan olingan ikki $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiya skalyar

ko'paytmasini (φ, ψ) orqali belgilasak:

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \rho(x) \varphi(x) \psi(x) dx, \quad (6.2.6)$$

u holda (6.2.5) sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_0) = (f, \varphi_0), \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = (f, \varphi_1), \\ \vdots \\ a_0(\varphi_0, \varphi_n) + a_1(\varphi_1, \varphi_n) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{cases} \quad (6.2.7)$$

Endi $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ chiziqli erkli funksiyalar sistemasi uchun (6.2.7) sistema yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sistemaning *Gram determinanti* deb ataluvchi, (6.2.7) sistemaning ushbu determinanti

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \quad (6.2.8)$$

ning noldan farqliligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, aksincha, ya'ni $\Gamma_n = 0$ bo'lsin. U holda (6.2.7) sistemaga mos keladigan bir jinsli chiziqli algebratik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_0) = 0, \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_1) = 0, \\ \vdots \\ a_0(\varphi_0, \varphi_n) + a_1(\varphi_1, \varphi_n) + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0. \end{cases} \quad (6.2.9)$$

kamida bitta trivial bo'lmagan yechimga ega bo'lishi kerak, ya'ni shunday $a_0, a_1, \dots, a_n$ sonlar topilishi kerakki, ularning kamida birortasi noldan farqli bo'lib, (6.2.9) sistemani qanoatlantirsin. (6.2.9) sistemaning tenglamalarini mos ravishda $a_0, a_1, \dots, a_n$ larga ko'paytirsak va skalyar ko'paytmaning (6.2.6) ko'rinishini e'tiborga olgan holda natijalarni qo'shsak, quyidagi hosil bo'ladi:

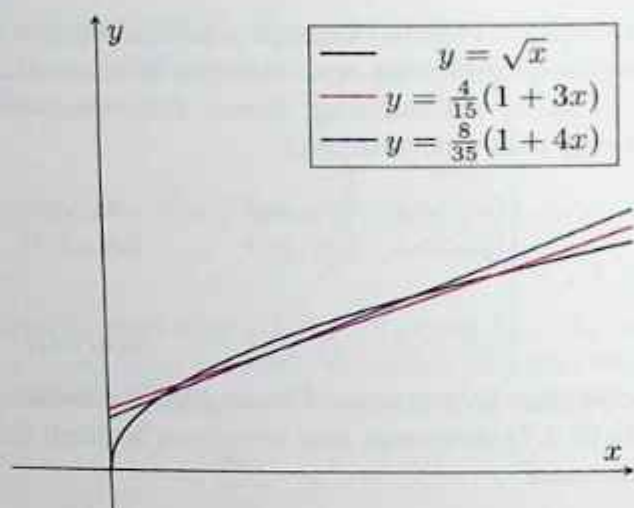
$$\int_a^b \rho(x) (a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x))^2 dx = 0.$$

Lemmaga ko'ra esa bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $\{\varphi_n(x)\}$ sistema chiziqli erkli bo'lib, $a_0, a_1, \dots, a_n$ larning kamida bittasi noldan farqliligi sababli

$$P(x) = (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x))^2$$

ko'phad aynan nolga teng emas. Demak, Gram determinanti Γ_n noldan farqli va (6.2.7) sistema yagona yechimga ega. ■

Misol 6.1. Ushbu $f(x) = \sqrt{x}$ ni $[0, 1]$ oralig'ida, $\rho(x) = 1$ bo'lganda birinchi darajali ko'phad bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirilsin.



Chizma 6.2.1

Yechish: Bu yerda $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \rho(x) = 1$ bo'lgani uchun

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1, \quad (\varphi_1, \varphi_0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3},$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{2}{5}.$$

Demak, (6.2.7) sistema

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

ko'rinishdadir.

Bundan $a_0 = \frac{4}{15}$, $a_1 = \frac{4}{5}$ bo'lib, izlanayotgan ko'phad $P_1(x) = \frac{4}{15}(1 + 3x)$ bo'ladi (Chizma 6.2.1). ■

Misol 6.2. Misol 6.1 vazn $\rho(x) = 1 - x$ bo'lgan hol uchun yechilsin.

Yechish: Vaznga nisbatan shuni aytish mumkinki, u oraliqning chap chetida yaxshiroq yaqinlashishni ta'minlaydi. Bu holda

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{2}, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{6},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{12},$$

$$(f, \varphi_0) = \frac{4}{15}, \quad (f, \varphi_1) = \frac{4}{35},$$

demak, (6.2.7) sistema quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{6}a_1 = \frac{4}{15}, \\ \frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{12}a_1 = \frac{4}{35}. \end{cases}$$

Bundan $a_0 = \frac{8}{35}$, $a_1 = \frac{32}{35}$, $P_1(x) = \frac{8}{35}(1 + 4x)$ (Chizma 6.2.1). ■

6.3-§. Ortogonal ko'phadlar sistemasi

Oldingi paragrafdagi metodning noqulay tomoni shundan iboratki, yaqinlashuvchi umumlashgan ko'phadning koeffitsiyentlarini topish uchun (6.2.7) sistemani yechishga to'g'ri keladi, bu esa katta n lar uchun juda ko'p mehnat talab qiladi. Agar biz ixtiyoriy chiziqli erkli $\{\varphi_n(x)\}$ sistema

o'rnida $\{\psi_n(x)\}$ ortogonal ko'phadlar sistemasini qarasak, u holda (6.2.7) sistema soddalashadi. Agar

$$(P, Q) = \int_a^b \rho(x)P(x)Q(x)dx = 0$$

bo'lsa, $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal, xususiyl holda $\rho(x) \equiv 1$ bo'lsa, $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda ortogonal deyiladi. Agar ixtiyoriy $k, l (l \neq k)$ indekslar uchun

$$\int_a^b \rho(x)\psi_k(x)\psi_l(x)dx = 0 \quad (6.3.1)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{\psi_n(x)\}$ funksiyalar sistemasi $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda ortogonal sistemani tashkil etadi deyiladi.

Biz 3-bobda vektorlarni ortogonallashtirish usulini ko'rib o'tgan edik. Bu yerda ham ixtiyoriy chiziqli erkli ko'phadlar sistemasi $\{\varphi_n(x)\}$ dan, xususiyl holda $\{x^n\}$ sistemadan, $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal sistema tuzish mumkin.

Teorema 6.1. *O'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida ortogonal ko'phadlar sistemasi yagonadir, boshqacha aytganda, agar*

$$\begin{aligned} \psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \dots \\ \chi_0(x), \chi_1(x), \dots, \chi_n(x), \dots \end{aligned}$$

sistemalar $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo'lgan ikkita sistema bo'lsa, u holda albatta

$$\psi_n(x) = c_n \chi_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bo'lishi kerak.

Isbot. Avvalo har xil darajadagi va turli sistemadagi ko'phadlarning ortogonal, ya'ni

$$\int_a^b \rho(x)\psi_k(x)\chi_l(x)dx = 0 \quad (k \neq l)$$

ekanligini ko'rsatamiz. Aniqlik uchun $k > l$ deb olaylik. $\chi_l(x)$ ni yagona usul bilan

$$\chi_l(x) = \sum_{j=0}^l c_j \psi_j(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan (6.3.1) ni hisobga olgan holda

$$\int_a^b \rho(x) \psi_k(x) \chi_l(x) dx = \sum_{j=0}^l c_j \int_a^b \rho(x) \psi_j(x) \psi_k(x) dx = 0$$

ga ega bo'lamiz, chunki $j \leq l < k$. Endi $\chi_l(x)$ ning $\psi_j(x)$ orqali tasvirlanishida nomeri $j < l$ bo'lgan barcha c_j koeffitsiyentlarning nolga tengligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$\int_a^b \rho(x) \psi_i(x) \chi_l(x) dx$$

integralni qaraymiz, bu yerda $i < l$. Bir tomondan, isbotlaganimizga ko'ra bu integral nolga teng, ikkinchi tomondan esa

$$\int_a^b \rho(x) \psi_i(x) \chi_l(x) dx = \sum_{j=0}^l c_j \int_a^b \rho(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx = c_i \int_a^b \rho(x) \psi_i^2(x) dx.$$

O'ng tomondagi integral noldan farqli, shuning uchun ham $c_i = 0$. Demak, barcha $i < l$ uchun $c_i = 0$, ya'ni

$$\chi_l(x) = c_l \psi_l(x).$$

Shu bilan teorema isbotlanadi. ■

Agar ortogonal ko'phadlarga yana biror qo'shimcha talab qo'yilsa, masalan, ko'phadning bosh koeffitsiyenti birga teng bo'lishini yoki bosh koeffitsiyenti musbat bo'lib, normasi

$$\|\psi_i\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x) \psi_i^2(x) dx}$$

birga teng bo'lishi talab qilinsa, u holda ortogonal ko'phad yagona ravishda aniqlanadi.

O'zaro ortogonal va normalari birga teng bo'lgan ko'phadlar sistemasi *ortonormal ko'phadlar sistemasi* deyiladi. Berilgan $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ ortogonal sistemaning har bir ko'phadini ularning normalariga bo'lsak,

$$P_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\|\psi_0\|}, P_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|}, \dots, P_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}, \dots$$

ortonormal sistema hosil bo'ladi. Yuqorida aytganimizga ko'ra berilgan $[a, b]$ oraliq va $\rho(x)$ vazn uchun ortonormal ko'phadlar sistemasi yagonadir.

Endi o'rta kvadratik ma'noda $f(x)$ funksiyaga eng yaxshi yaqinlashuvchi $Q_n(x)$ ko'phadni ortonormal ko'phadlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida izlaymiz:

$$Q_n(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x).$$

Bu ko'phadning koeffitsiyentlari a_k lar (6.2.7) sistemadan topiladi. Lekin bizning holda

$$(P_l, P_j) = \delta_l^j$$

bo'lgani uchun

$$a_k = (f, P_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) P_k(x) dx$$

bo'ladi va eng kichik og'ish esa

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \int_a^b \rho(x) [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \\ &- 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b \rho(x) f(x) \cdot P_k(x) dx + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n a_k a_l \int_a^b \rho(x) P_k(x) P_l(x) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2, \end{aligned}$$

ya'ni

$$\delta_n^2 = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n a_k^2$$

bilan xarakterlanadi.

6.4-§. Ortogonal ko'phadlarning asosiy xossalari

6.4.1 Ortogonal ko'phadlar uchun rekurrent munosabatlar

Ortogonal ko'phadlarni tez aniqlashga imkon beradigan rekurrent munosabatni keltirib chiqaramiz.

Teorema 6.2. *Ortonormal ko'phadlar sistemasining ixtiyoriy uchta ketma-ket elementlari uchun quyidagi rekurrent munosabat o'rinlidir*

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x), \quad (6.4.1)$$

bu yerda μ_n bu $P_n(x)$ ning bosh koeffitsiyenti bo'lib, α_n qandaydir o'zgarmas son.

Isbot. $xP_n(x)$ ko'phadning darajasi $n+1$ ga teng bo'lgani uchun uni $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n+1}(x)$ chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$xP_n(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x). \quad (6.4.2)$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini $\rho(x)P_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, n-2$) ga ko'paytirib, $[a, b]$ oraliq bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) [xP_j(x)] dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_a^b \rho(x) P_j(x) P_i(x) dx + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \int_a^b \rho(x) P_j(x) P_{n+1}(x) dx.$$

Chap tomondagi integral nolga teng, chunki barcha $j \leq n-2$ lar uchun $xP_j(x)$ darajasi $n-1$ dan ortmaydigan ko'phaddir, shuning uchun ham uni $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$ larning chiziqli kombinatsiyasi yordamida ifodalash mumkin. O'ng tomonda esa $i = j$ bo'lgandagina faqat bitta integral birga, qolganlari nolga teng:

$$\alpha_j \int_a^b \rho(x) P_j^2(x) dx = 0.$$

Demak, barcha $j \leq n-2$ lar uchun $\alpha_j = 0$. Shunday qilib, (6.4.2) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$xP_n(x) = \alpha_{n-1}P_{n-1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}P_{n+1}(x). \quad (6.4.3)$$

Bu yerda α_{n-1} ni aniqlash uchun (6.4.3) ni $\rho(x)P_{n-1}(x)$ ga ko'paytirib, $[a, b]$ bo'yicha integrallaymiz. Natijada

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= \int_a^b \rho(x)xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x) [\mu_n x^n + \dots] P_n(x)dx \\ &= \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \int_a^b \rho(x)P_n^2(x)dx = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}. \end{aligned}$$

Buni (6.4.3) ga qo'ysak, (6.4.1) kelib chiqadi. ■

Shuni ham ta'kidlash kerakki, $P_{-1}(x) = 0$ deb olsak, (6.4.1) formula barcha $n \geq 0$ uchun o'rinli bo'ladi.

6.4.2 Kristofel-Darbu ayniyati

Ortogonal ko'phadlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan *Kristofel-Darbu ayniyatini* chiqaramiz.

Teorema 6.3. *Ortonormal ko'phadlar uchun ushbu Kristofel-Darbu ayniyati o'rinlidir*

$$\sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}. \quad (6.4.4)$$

Isbot. (6.4.1) tenglikni $P_n(y)$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}P_{n+1}(x)P_n(y) = (x - \alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}P_{n-1}(x)P_n(y),$$

bunda x va y larning o'rinlarini almashtiramiz:

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}P_{n+1}(y)P_n(x) = (y - \alpha_n)P_n(x)P_n(y) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}P_{n-1}(y)P_n(x)$$

va birinchi tenglikdan ikkinchisini ayiramiz:

$$(x-y)P_n(x)P_n(y) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} [P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)] - \\ - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} [P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)].$$

Bu tenglik barcha $n \geq 0$ lar uchun o'rinli bo'lganligi sababli, uni barcha $n, n-1, \dots, 2, 1, 0$ nomerlar uchun qo'shib chiqsak, (6.4.4) tenglik kelib chiqadi. ■

6.4.3 Ortogonal ko'phadlar nollarining xossalari

Ortogonal ko'phadlar hisoblash jarayonlari – interpolatsiya, taqribiy differensiallash va taqribiy integrallashda keng qo'llaniladi. Bu esa, asosan, ortogonal ko'phadlarning nollari ajoyib xossalarga ega bo'lganligi tufaylidir.

Teorema 6.4. *(a, b) oralig'ida ortogonal $P_n(x)$ ko'phadning barcha ildizlari haqiqiy va har xil bo'lib, ular (a, b) intervalda yotadi.*

Isbot. $P_n(x)$ ko'phadning toq karrali va (a, b) da yotuvchi ildizlarini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, bu ildizlarning soni m bo'lib, ular $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ bo'lsin. Teorema isbotlanishi uchun $m = n$ ekanligini ko'rsatish kifoyadir, chunki bundan $P_n(x)$ ning boshqa ildizlari mavjud emasligi va ularning tubligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $m < n$ bo'lsin. Ushbu

$$q(x) = (x - x'_1) \dots (x - x'_m)$$

ko'phadni tuzamiz. Uning m darajasi n dan kichikligi sababli

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) q(x) dx = 0$$

bo'lishi kerak. Ammo bu tenglik bajarilmaydi, chunki $q(x)$ va $P_n(x)$ larining ishoralari bir xil nuqtalarda almashinadi va $q(x)P_n(x)$ ko'paytma $[a, b]$ da o'z ishorasini saqlaydi. Bundan tashqari $q(x)P_n(x)$ faqat chekli sondagi nuqtalardagina nolga aylanadi, shuning uchun ham yuqoridagi ifoda aynan nol emas. Demak, lemmaga ko'ra $\int_a^b \rho(x) q(x) P_n(x) dx$ noldan farqli bo'lishi kerak. Shunday qilib, qarama-qarshilik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi. ■

6.5-§. Eng ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalari

Quyida hisoblash matematikasida ko'p qo'llaniladigan ortogonal ko'phadlar sistemalarini keltiramiz. Biz bu sistemalarning berilgan vazn bo'yicha ortogonal sistemani tashkil etishlarini isbotlashni, rekurrent munosabatlar keltirib chiqarishni, shuningdek, ularning normalarini topish bilan bog'liq bo'lgan hisoblashlarni bajarishni o'quvchilarning o'zlariga havola qilamiz (shuningdek, [9, 37] dan ham qarashlari mumkin.)

6.5.1 Yakobi ko'phadlari

Quyidagi

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

ko'phadlar *Yakobi ko'phadlari* deb ataladi. Bular $[-1, 1]$ oraliqda

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

vazn bilan ortogonal ko'phadlar sistemasini tashkil etadi. Ularning normalari:

$$\begin{aligned} \|P_n^{(\alpha, \beta)}\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx} = \\ &= \left[\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ular quyidagi rekurrent munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)xP_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \\ = 2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) &+ (\beta^2 - \alpha^2)(\alpha+\beta+ \\ + 2n+1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &+ 2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

6.5.2 Lejandr ko'phadlari

Yakobi ko'phadlarining $\alpha = \beta = 0$ va $\rho(x) \equiv 1$ bo'lgandagi xususiy holi *Lejandr ko'phadlari* deb ataladi va ular *Rodrig formulasi*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

bilan aniqlanadi. Uning normasi

$$\|L_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

bo'lib, tegishli rekurrent munosabat esa

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \quad (6.5.1)$$

dan iborat.

Lejandr ko'phadlaridan foydalanib, $f(x) \in L^2[-1, 1]$ funksiya uchun o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phad qurish mumkin. Bu ko'phad

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(x)$$

bo'lib, bu yerda

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx. \quad (6.5.2)$$

Eng kichik og'ishining miqdori quyidagiga teng:

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2. \quad (6.5.3)$$

Lejandr ko'phadining dastlabki yettitasi quyidagilardan iborat:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8} (65x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$L_6(x) = \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Misol 6.3. Misol sifatida $f(x) = 1/(1+x^2)$ funksiyani $[-1, 1]$ oralig'ida 4-darajali ko'phad bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtiramiz.

Yechish: Lejandrning toq indeksli ko'phadlari toq ko'phad va juft indeksli juft ko'phad bo'lgani uchun (6.5.2) formulaga ko'ra

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0, a_0 = \frac{\pi}{4}, a_2 = \frac{5}{2}(3 - \pi), a_4 = \frac{9}{16} \left(34\pi - \frac{320}{3} \right).$$

Demak,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \sum_{k=0}^4 a_k L_k(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2}(3 - \pi)L_2(x) + \frac{9}{16} \left(34\pi - \frac{320}{3} \right) L_4(x) = \\ &= \frac{1}{64} [455\pi - 1680 + 2(7560 - 2415\pi)x^2 + (5355\pi - 16800)x^4]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \left[2a_0^2 + \frac{2}{5}a_2^2 + \frac{2}{9}a_4^2 \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \left[\frac{\pi^2}{8} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2}(3 - \pi)^2 + \frac{9}{128} \left(34\pi - \frac{320}{3} \right)^2 \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema 6.5. Agar $f(x)$ funksiya $[-1, 1]$ oralig'ida uzluksiz va chegaralangan $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Lejandr ko'phadlari bo'yicha Furye qatori $[-1, 1]$ oralig'ida unga tekis yaqinlashadi.

6.5.3 Chebishevning birinchi tur ko'phadlari

Biz 4-bobda tanishgan Chebishevning birinchi tur ko'phadi

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), |x| \leq 1$$

$[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Bu ko'phadning normasi

$$\|T_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & \text{agar } n = 0 \text{ bo'lsa,} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{agar } n > 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

ga teng. 4-bobda quyidagi

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

rekurrent munosabat keltirib chiqarilgan edi. Chebishev birinchi tur ko'phadlarining dastlabki yettitasi quyidagilardir:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Endi $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun Chebishevning birinchi tur ko'phadlari yordamida topilishi mumkin bo'lgan eng yaxshi yaqinlashuvchi

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$$

ko'phadning koeffitsiyentlari quyidagi formulalar bilan hisoblanishini eslatamiz:

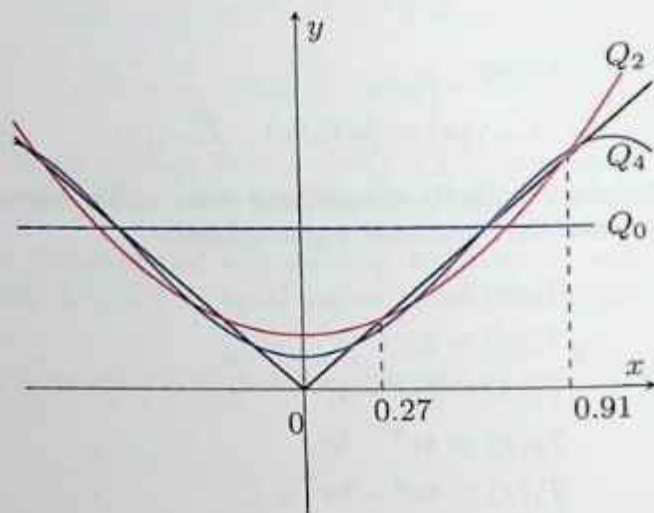
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) d\theta, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos k\theta d\theta \quad (k \geq 1);$$

eng kichik og'ishning miqdori δ_n esa

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{f^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2} [2a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2]$$

formula bilan ifodalanadi.

Misol 6.4. Misol sifatida $f(x) = |x|$ funksiyani $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vazn bilan o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashtiradigan ko'phadlar ketma-ketligini topamiz.



Chizma 6.5.1

Yechish: Bizning holda

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| \cos n\theta d\theta$$

bo'lgani uchun

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos 2n\theta d\theta = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cdot \frac{4}{4n^2 - 1}$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

lar osongina topiladi. Shuning uchun ham

$$|x| \sim \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} T_{2n}(x)$$

bo'lib, 0, 2, 4-tartibli o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'p hadlar quyidagilardan iboratdir:

$$Q_0(x) = \frac{2}{\pi}, Q_2(x) = \frac{2}{3\pi} (4x^2 + 1), Q_4(x) = \frac{2}{15\pi} (-16x^4 + 36x^2 + 3).$$

(Chizma 6.5.1). ■

Teorema 6.6. Agar $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiya birinchi tartibli uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Chebishev birinchi tur ko'phadlari bo'yicha Furye qatori $[-1, 1]$ oraliqda $f(x)$ funksiya tekis yaqinlashadi.

6.5.4 Chebishevning ikkinchi tur ko'phadlari

Chebishevning ikkinchi tur ko'phadi deb ataluvchi

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ko'phad $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Uning normasi

$$\|U_n\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n^2(x) dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ga teng bo'lib, ular uchun rekurrent munosabat

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

dan iboratdir. Chebishev ikkinchi tur ko'phadlarining dastlabki yettitasi quyidagilardir:

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.$$

$[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun Chebishevning ikkinchi tur ko'phadlari yordamida tuzilgan eng yaxshi yaqinlashuvchi

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k U_k(x)$$

ko'phadning koeffitsiyentlari

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta) \sin \theta \cdot \sin(k+1)\theta d\theta$$

formula bilan hisoblanib, eng kichik og'ish miqdori esa

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^1 [f(x) - Q_n(x)]^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f^2(x) dx - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n a_k^2$$

formula bilan aniqlanadi.

Misol 6.5. Misol sifatida $f(x) = |x|$ funksiyaning $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ vazn bilan o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashtiradigan ko'phadlar ketma-ketligini topamiz.

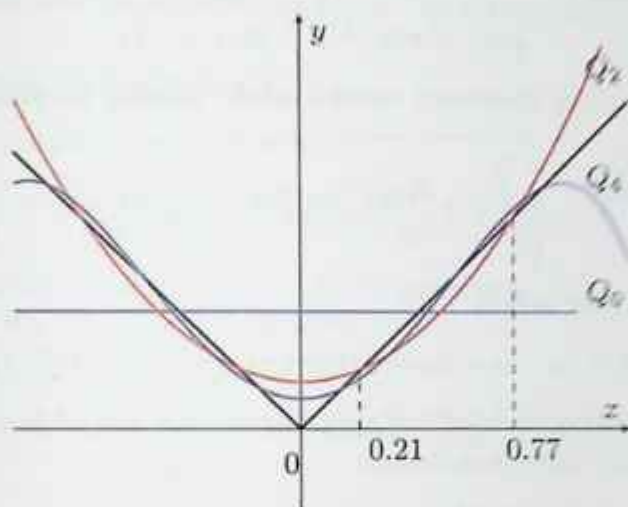
Yechish: Bu gal

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos \theta| \sin \theta \sin(n+1)\theta d\theta$$

bo'lib,

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)(2k+3)} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

larni topish qiyin emas.



Chizma 6.5.2

Shuning uchun ham

$$|x| \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+3)} U_{2n}(x)$$

bo'lib, 0, 2, 4-tartibli o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashtiruvchi ko'phadlar quyidagilardir:

$$Q_0(x) = \frac{4}{3\pi}, \quad Q_2(x) = \frac{8}{15\pi} (6x^2 + 1), \quad Q_4(x) = \frac{4}{105\pi} (-80x^4 + 144x^2 + 35)$$

(Chizma 6.5.2).

Teorema 6.7. Agar $[-1, 1]$ oralig'ida $f(x)$ funksiya uchinchi tartibli uchboshli hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ ning Chebishev ikkinchi darajali ko'phadlar bo'yicha Furye qatori o'sha oralig'ida $f(x)$ ga tekis yaqinlashadi.

6.5.5 Lagerr ko'phadlari

Endi cheksiz oraliqlarda ortogonal bo'lgan ko'phadlarni quramiz. *Lagerr ko'phadlari* deb ataluvchi

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x})$$

ko'phadlar $[0, \infty)$ oraliqda

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-x} (x > 0, \alpha > -1)$$

vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Buning normasi

$$\|L_n^{(\alpha)}\| = \sqrt{\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx} = \sqrt{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}$$

ga teng bo'lib, ular uchun

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha - 2n - 1)L_n^{(\alpha)}(x) + n(\alpha + n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0$$

rekurrent munosabat o'rinalidir. Lagerr ko'phadlarining birinchi 5 tasi $\alpha = 0$ bo'lganda quyidagilardan iborat:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = -x + 1,$$

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 74.$$

Agar $f(x)$ funksiya $[0, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsa, darajasi n dan ortmaydigan ko'phadlar orasida

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k L_k^{(\alpha)}(x)$$

ko'phad shu oraliqda o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phad bo'lib, bu yerda

$$a_k = \frac{1}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) L_k^{(\alpha)}(x) dx.$$

Quyidagi teorema o'rinalidir.

Teorema 6.8. Agar $[0, \infty)$ oraliqda $f(x)$ bo'lakli-silliqlik funksiya bo'lib,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} |f(x)| dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Lagerr ko'phadlari bo'yicha Furye qatori $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida shu funksiyaning o'ziga, uning uzilish nuqtalarida esa $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ ga yaqinlashadi.

6.5.6 Ermit ko'phadlari

Ermit ko'phadlari deb ataluvchi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

ko'phad $(-\infty, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = e^{-x^2}$ vazn bilan ortogonal sistemani tashkil etadi. Bu ko'phadning normasi

$$\|H_n\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx} = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

bo'lib, uning uchun

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

rekurrent munosabat o'rinlidir. Ermit ko'phadlarining birinchi 6 tasi quyidagidan iborat:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 82x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda $\rho(x) = e^{-x^2}$ vaznda kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsa, u holda darajasi n dan ortmaydigan ko'phadlar orasida

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(x)$$

ko'phad $(-\infty, \infty)$ oraliqda o'rta kvadratik ma'noda eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phad bo'lib, bu yerda

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx.$$

Quyidagi teorema o'rinalidir.

Teorema 6.9. Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty, \infty)$ oraliqda bo'lakli silliq bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x) dx$$

integral mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Ermit ko'phadlari bo'yicha Furye qatori $f(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarida shu funksiyaning o'ziga, uzilish nuqtalarida esa $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ ga yaqinlashadi.

6.6-§. Trigonometrik ko'phadlar bilan o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashish

Sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan davriy funksiyalarni o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashishda trigonometrik ko'phadlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Faraz qilaylik, davri 2π bo'lgan uzluksiz $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Yaqinlashuvchi ko'phad $Q_n(x)$ ni quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (6.6.1)$$

Agar a_k va b_k larni

$$\delta_n^2 = \int_0^{2\pi} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx$$

ning minimumga erishish shartidan topadigan bo'lsak, u holda ular uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.6.2)$$

Bular analiz kursidan ma'lum bo'lib, $f(x)$ funksiyaning *Furye ko'rsatkichlari* hisoblanadi. Eng kichik og'ishning miqdori esa quyidagicha hisoblanadi:

$$\delta_n^2 = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx - \left[\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Xususiylashtirishda, agar $f(x)$ juft funksiya bo'lsa,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

va $f(x)$ toq funksiya bo'lsa,

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

bo'ladi.

(6.6.1) trigonometrik ko'phaddagi

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \quad u_k = a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

hadlar odatda *garmonikalar* deyiladi. Agar (6.6.2) formulalarni (6.6.1) ga qo'yib, $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, $f(x)$ funksiya uchun uning *Furye trigonometrik qatori*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (6.6.3)$$

kelib chiqadi. Funksiyani *Furye trigonometrik ko'phadi* yoki *Furye trigonometrik qatori* shaklida ifodalash *garmonik analiz* deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[0, 2\pi]$ oralig'ida kvadrati bilan integrallanuvchi bo'lsa, uning (6.6.3) *Furye qatori* har doim o'rta kvadratik ma'noda unga yaqinlashadi. Agar $f(x)$ ga ba'zi qo'shimcha shartlar qo'yilsa, u holda (6.6.3) qator unga tekis yaqinlashadi.

Misol 6.6. $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ oralig'ida x^2 ga teng bo'lib, $(-\infty, \infty)$ oralig'ida 2π davr bilan davom ettirilgan bo'lsin. Shu funksiyani *Fourier* tartibli trigonometrik ko'phad bilan yaqinlashtirish talab qilinsin.

Yechish: Funksiya juft bo'lgani uchun (6.6.3) formulaga ko'ra

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{k\pi} x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi k^2} x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Demak, izlanayotgan trigonometrik ko'phad quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$Q_5(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{9} \cos 3x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{25} \cos 5x \right]. \quad \blacksquare$$

6.7-§. Jadval bilan berilgan funksiyalarni o'rta kvadratik ma'noda yaqinlashtirish

6.7.1 Darajali ko'phad bilan o'rta kvadratik yaqinlashtirish

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, \dots, x_n$ nuqtalardagi aniq yoki taqribiy $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari berilgan bo'lsin. Darajasi k ($k < n$) dan ortmaydigan

$$Q_k(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_k x^k$$

ko'phadlar orasida shunday ko'phadni topishimiz kerakki,

$$\Delta_n^2 = \sum_{i=0}^n \rho_i [f(x_i) - Q_k(x_i)]^2$$

yig'indi minimumga erishsin. Bu yerda ρ_i lar $\rho_i \geq 0$ va $\sum_{i=0}^n \rho_i = 1$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy sonlar.

Ikkinchi paragrafdagidek $\Delta_n^2 = \Delta_n^2(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dan a_j larga nisbatan hosila olib, ularni nolga tenglashtirsak, u holda quyidagi sistema

hosil bo'ladi:

$$a_0 \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j + a_1 \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+1} + \dots + a_k \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^n \rho_i f(x_i) x_i^j$$

$$(j = 0, 1, \dots, k).$$

Quyidagi

$$s_j = \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j, \quad t_j = \sum_{i=0}^n \rho_i f(x_i) x_i^j$$

belgilashlarni kiritib, bu sistemani ushbu ko'rinishda yozib olaylik:

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_k a_k = t_0, \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \dots + s_{k+1} a_k = t_1, \\ \vdots \\ s_k a_0 + s_{k+1} a_1 + \dots + s_{2k} a_k = t_k. \end{cases} \quad (6.7.1)$$

Bu sistema

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix} \quad (6.7.2)$$

determinantining noldan farqliligini va, demak, (6.7.1) sistema yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Dastlab quyidagi

$$Z_k(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x^k \end{vmatrix}$$

tenglik bilan aniqlangan k -darajali ko'phadning $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ to'plamda $\rho = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n\}$ vazn bo'yicha barcha $j < k$ lar uchun x^j bilan ortogonal ekanligini, ya'ni

$$\sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^j = 0 \quad (j = \overline{0, k-1}) \quad (6.7.3)$$

tengliklar o'rinli ekanligini ko'rsataylik. Haqiqatan ham, $j < k$ uchun $Z_k(x_i)$ ni $\rho_i x_i^j$ ga ko'paytirib, barcha $i = 0, 1, \dots, n$ lar bo'yicha yig'ib

chiqsak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^j &= \sum_{i=0}^n \rho_i \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & x_i^j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x_i^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x_i^{j+k} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i x_i^{j+k} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & s_{j+k} \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Ikkinchi tomondan $Z_k(x_i)$ ni $\rho_i x_i^k$ ga ko'paytirib, qo'shib chiqsak,

$$\sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^k = D_{k+1} \quad (6.7.4)$$

kelib chiqadi. Endi (6.7.2), (6.7.3) tengliklar yordamida

$$N_k = \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k^2(x_i) = D_k D_{k+1} \quad (6.7.5)$$

tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k^2(x_i) &= \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & x_i^k \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & \sum_{i=0}^n \rho_i Z_k(x_i) x_i^k \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_k & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} & D_{k+1} \end{vmatrix} = D_k D_{k+1}. \end{aligned}$$

N_k kvadratlar yig'indisi bo'lgani uchun u faqat

$$Z_k(x_0) = Z_k(x_1) = \dots = Z_k(x_n) = 0$$

bo'lgan holdagina nolga aylanadi. Lekin $k < n$ bo'lgani uchun faqat $Z_k(x) = 0$ bo'lgandagina $N_k = 0$ bo'ladi.

Agar $m = 1$ bo'lsa, u holda (6.7.2) ga ko'ra

$$Z_1(x) = \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & x \end{vmatrix} = s_0 x - s_1 = 1 \cdot x - s_1 \neq 0.$$

Demak, $N_1 = D_1 D_2 > 0$. Bundan $D_1 = s_0 = 1 > 0$ ni hisobga olsak, $D_2 > 0$ kelib chiqadi.

Endi (6.7.5) da $k = 2$ deb olsak, $N_2 = D_2 D_3$ bo'ladi. Ammo (6.7.2) ga ko'ra $Z_2(x)$ da x^2 oldidagi koeffitsiyent D_2 ga teng va isbotlanganga ko'ra $D_2 \neq 0$, shuning uchun ham $N_2 > 0$; bundan esa $D_3 > 0$. Bu mulohazani davom ettirib, $D_{k+1} \neq 0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, (6.7.1) sistema yagona yechimga ega, bu sistemani yechib izlanayotgan ko'phadning koeffitsiyentlarini topamiz.

Misol 6.7. Quyidagi ma'lumotlar uchun $f(x)$ funksiyaga yaqinlashuvchi ikkinchi darajali $Q_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ko'phad topilsin.

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
$f(x_i)$	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Yechish: Kerakli hisoblashlarni jadval 6.1 dagi sxema bo'yicha olib boramiz. Berilgan misolga tegishli hisoblashlar jadval 6.2 da keltirilgan, bu yerda bitta ehtiyot raqam olinib, hisoblashlar verguldan keyin uchta o'nli raqamda olib borilgan.

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	$f(x_0)$	$x_0f(x_0)$	$x_0^2f(x_0)$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	$f(x_1)$	$x_1f(x_1)$	$x_1^2f(x_1)$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	$f(x_2)$	$x_2f(x_2)$	$x_2^2f(x_2)$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	$f(x_3)$	$x_3f(x_3)$	$x_3^2f(x_3)$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	$f(x_4)$	$x_4f(x_4)$	$x_4^2f(x_4)$
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

Jadval 6.1: O'rta kvadratik yaqinlashish sxemasi

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
1	0,78	0,608	0,475	0,370	2,50	1,950	1,520
1	1,56	2,434	3,796	5,922	1,20	1,872	2,921
1	2,34	5,476	12,813	29,982	1,12	2,621	6,133
1	3,12	9,734	30,371	94,759	2,25	7,020	21,902
1	3,81	14,516	55,306	210,717	4,28	16,307	62,604
5	11,61	32,768	102,761	341,750	11,35	29,770	94,604

Jadval 6.2

Bundan a_0, a_1, a_2 koeffitsiyentlar aniqlanadigan sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} 5a_0 + 11,61a_1 + 32,768a_2 = 11,350, \\ 11,61a_0 + 32,768a_1 + 102,761a_2 = 29,770, \\ 32,768a_0 + 102,761a_1 + 341,750a_2 = 94,604. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi

$$a_0 = 5,045; \quad a_1 = -4,073; \quad a_2 = 1,009$$

bo'lib, izlanayotgan ko'phad:

$$Q_2(x) = 5,045 - 4,073x + 1,009x^2 \text{ dir.}$$

Endi $f(x)$ ga tegishli dastlabki ma'lumotni $Q_2(x)$ ning qiymatlari bilan solishtiraylik. Natijalar jadval 6.3 da keltirilgan.

x	$f(x)$	$Q_2(x)$	$Q_2(x) - f(x)$
0,78	2,50	2,505	+0,005
1,56	1,20	1,194	-0,006
2,34	1,12	1,110	-0,010
3,12	2,25	2,252	+0,002
3,81	4,28	4,288	+0,008

Jadval 6.3: O'rta kvadratik usul bilan hisoblashning xatosi.



6.7.2 Trigonometrik ko'phadlar yordamida o'rta kvadratik yaqinlashish

Faraz qilaylik, davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[0, 2\pi]$ oralig'ining teng uzoqlikda joylashgan

$$x_j = \frac{2\pi}{n}j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

n ta nuqtadagi $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ qiymatlari berilgan bo'lsin. Trigonometrik ko'phad $T_k(x) = \sum_{m=0}^n [a_m \cos mx + b_m \sin mx]$ dagi a_m va b_m koeffitsiyentlarni shunday tanlaylikki, $n > 2k$ bo'lganda

$$\delta_n^2 = \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) - T_k(x_j)]^2$$

ifoda eng kichik qiymatga erishsin.

Odatdagidek, δ_n^2 dan barcha a_m va b_m lar bo'yicha hosila olib, ularni nolga tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^n \left[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \cos lx_j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos lx_j, \\ \sum_{m=0}^n \left[a_m \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j + b_m \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \sin lx_j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin lx_j, \end{cases}$$

$$l = 0, 1, \dots, k. \quad (6.7.6)$$

Bu sistemaning koeffitsiyentlarini soddalashtirish maqsadida barcha $l, m = 0, 1, \dots, n$ lar uchun quyidagi tengliklarni isbotlaylik:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j = 0, \quad (6.7.7)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } m = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (6.7.8)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j = 0, \quad (6.7.9)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \cos lx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq l \text{ bo'lsa,} \\ \frac{n}{2}, & \text{agar } m = l \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } m = l = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad (6.7.10)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j \sin lx_j = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq l \text{ bo'lsa,} \\ \frac{n}{2}, & \text{agar } m = l \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } m = l = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (6.7.11)$$

Haqiqatan ham, (6.7.7) - (6.7.8) tengliklar $m = 0$ bo'lganda ko'rinib turibdi, $m \neq 0$ bo'lganda ularga ishonch hosil qilish uchun quyidagi

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j + i \sum_{j=0}^{n-1} \sin mx_j = \sum_{j=0}^{n-1} e^{imx_j} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{im \frac{2\pi j}{n}} = \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{n}}} = 0$$

tenglikda haqiqiy va mavhum qismlarini nolga tenglashtirish kifoyadir. (6.7.9) tenglikni ko'rsatish uchun uning chap tomonini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \cos mx_j \sin lx_j &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [\sin(l+m)x_j + \sin(l-m)x_j] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(l+m)x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(l-m)x_j. \end{aligned}$$

Oxirgi yig'indilar (6.7.7) - (6.7.8) tengliklarga ko'ra nolga teng. Qolgan tengliklar ham shu yo'l bilan keltirib chiqariladi.

Isbot qilingan (6.7.7) - (6.7.11) tengliklardan foydalanib, a_m va b_m lar uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j), \\ a_m = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cos mx_j, \\ b_m = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \sin mx_j. \end{cases} \quad (6.7.12)$$

Bu formulalar *Bessel formulalari* deyiladi.

Agar qaralayotgan $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda $b_m = 0$ ($m = 1, k$) bo'lib, aksincha u toq bo'lsa, u holda $a_m = 0$ ($m = 0, k$) bo'ladi (bu yerda $f(0) = f(\pi)$ ekanligi nazarda tutiladi).

Bunday hollarda (6.7.12) dagi noldan farqli koeffitsiyentlarni hisoblayotganda, yig'ishni $[0, 2\pi]$ oraliqning yarmi bo'yicha bajarib so'ngra natijani ikkilantirish mumkindir.

Misol 6.8. $[0, 2\pi]$ oraliqda quyidagi qiymatlari berilgan juft $f(x)$ funksiya uchun unga yaqinlashuvchi uchinchi tartibli trigonometrik ko'phad topilsin:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	2	5	3	0

Yechish: Bu yerda $n = 8$, $f(x)$ juft bo'lgani uchun $b_m = 0$ bo'lib, a_0 va a_m lar quyidagicha topiladi:

$$a_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 f(x_j) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 f(x_j) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

$$a_m = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^7 f(x_j) \cos mx_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 f(x_j) \cos \frac{m\pi j}{4}.$$

$$\text{Bundan } a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad a_2 = -\frac{5}{2}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Demak, izlanayotgan ko'phad quyidagidan iborat:

$$T_3(x) = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos x - \frac{5}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 3x.$$

6.8-§. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi algebraik ko'phadlar

Endi $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in H_n(P)} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad (6.8.1)$$

tenglikni ta'minlovchi $P_n^*(x)$ algebraik ko'phadning mavjudligini, yagonaligini va qurish mumkinligini ko'rib o'tamiz. Bu yerda $H_n(P)$ darajasi n dan ortmaydigan algebraik ko'phadlar to'plami.

Teorema 6.10. $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan, ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun eng yaxshi yaqinlashuvchi $P_n^*(x)$ algebraik ko'phad mavjud.

Isbot. Ixtiyoriy $f(x) \in C[a, b]$ uchun quyidagicha aniqlangan

$$\|f(x)\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

son norma ta'rifidagi har uch shartni qanoatlantiradi. Shuning uchun ham

$$\| \|f_1\| - \|f_2\| \| \leq \|f_1 - f_2\| \quad (6.8.2)$$

tengsizlik o'rinlidir. Endi ixtiyoriy $P_n(x) \in H_n(P)$ va $f(x) \in C[a, b]$ uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\|P_n\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| = F_0(a_0, a_1, \dots, a_n), \quad (6.8.3)$$

$$\|f - P_n\| = \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| = F_f(a_0, a_1, \dots, a_n). \quad (6.8.4)$$

Arap $f(x)$ ni qat'iy belgilab, $P_n(x)$ ni $H_n(P)$ to'plam bo'yicha o'zgartirsak, $(n+1)$ o'lchovli $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ fazoda aniqlangan F_0 va F_f funksiyalarga ega bo'lamiz. Bu funksiyalar (6.8.2) tengsizlikka ko'ra $a_0, a_1, \dots, a_n$ koeffitsiyentlarning uzluksiz funksiyalaridir. Haqiqatan ham, berilgan ε uchun $\delta = \varepsilon / \max(\sum_{k=0}^n |a|^k, \sum_{k=0}^n |b|^k)$ deb olsak, u holda

$$|a_i - a_i^{(0)}| < \delta \quad (i = \overline{0, n}) \text{ bo'lganda}$$

$$\begin{aligned} & \left| F_0(a_0, a_1, \dots, a_n) - F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \right| \leq \\ & \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k^{(0)} x^k \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=0}^n |a_k - a_k^{(0)}| |x|^k < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi, ya'ni $F_0(a_0, a_1, \dots, a_n)$ uzluksiz ekan. (6.8.4) dan ko'rinadiki, xuddi shuningdek, $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ham uzluksizdir. $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ manfiy emas. Uning aniq quyi chegarasini m orqali belgilaymiz. Teoremani isbotlash uchun F_f o'zining quyi chegarasiga erishadigan shunday $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ nuqta topilishini ko'rsatishimiz kerak. Haqiqatan ham, $(n+1)$ o'lchovli Evklid fazosida $\sum_{k=0}^n a_k^2 = 1$ birlik sferada yotuvchi nuqtalar to'plamini olaylik. Bu to'plam — chegaralangan yopiq to'plamdur. Demak, unda uzluksiz musbat F_0 funksiya o'zining aniq quyi chegarasi μ ga erishishi kerak. Ko'rinib turibdiki, $\mu > 0$, aks holda shunday

$$(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) \left(\sum_{k=0}^n [a_k^{(0)}]^2 = 1 \right)$$

nuqta topilar ediki, unda

$$F_0(a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=0}^n a_k^{(0)} x^k \right| = 0$$

bo'lar edi, buning bo'lishi mumkin emas, chunki $1, x, \dots, x^n$ lar chiziqli erklidir. Quyidagi

$$r = \frac{m + 1 + \|f\|}{\mu}$$

sonni olib, butun $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ fazoni ikki qism: R_1 va R_2 ga ajratamiz; $\sum_{k=0}^n a_k^2 \leq r^2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha nuqtalarni R_1 ga kiritib, qolganlarini R_2 ga kiritamiz. $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiyaning R_2 dagi qiymatlarini qaraylik. Faraz qilaylik, $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in R_2$, u holda $\sum_{k=0}^n b_k^2 = \rho^2 > r^2$, ya'ni $\sum_{k=0}^n b_k^2 \rho^{-2} = 1$ bo'lib, quyidagi baho o'rinni

bo'ladi:

$$\begin{aligned} F_f(b_0, b_1, \dots, b_n) &= \|f(x) - P_n(x)\| \geq \| \|P_n(x)\| - \|f(x)\| \| = \\ &= \left| |\rho| \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{|\rho|} x^k \right\| - \|f\| \right| \geq |\rho| \left\| \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{|\rho|} x^k \right\| - \\ &- \|f\| \geq |\rho|\mu - \|f\| > r\mu - \|f\| = m + 1 \end{aligned}$$

(oxirgi tenglik r ning tanlanishiga ko'ra bajariladi). Demak, R_2 qismda F_f ning quyi chegarasi $m + 1$ dan kichik emas va m soni F_f funksiya qiymatlarining R_1 dagi quyi chegarasi ekan. Lekin bu to'plam chegaralangan va yopiqdir. Bu to'plamda uzluksiz bo'lgan $F_f(a_0, a_1, \dots, a_n)$ funksiya o'zining aniq quyi chegarasiga erishishi kerak. Agar bu nuqtani $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ orqali belgilab olsak, u holda

$$m = F_f(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*) = \left\| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k^* x^k \right\| = \|f(x) - P_n^*(x)\|$$

bo'ladi. Shunday qilib, eng yaxshi yaqinlashuvchi $P_n^*(x)$ ko'phad mavjud. ■

Endi ko'phadning uzluksiz funksiya uchun eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phad bo'lishining zaruriy va yetarli shartlarini keltiramiz.

Teorema 6.11. (Valle-Pussen teoremasi). Faraz qilaylik, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ lar $[a, b]$ oralig'ining shunday $(n + 2)$ ta nuqtasi bo'lsinki, ular uchun

$$\text{sign} [(-1)^i (f(x_i) - P_n(x_i))] = \text{const} \quad (6.8.5)$$

bo'lsin, ya'ni x_i nuqtadan navbatdagi x_{i+1} nuqtaga o'tilganda $f(x) - P_n(x)$ miqdor o'z ishorasini o'zgartirsin. U holda

$$E_n(t) \geq m = \min_{i=1, \dots, n+2} |f(x_i) - P_n(x_i)|. \quad (6.8.6)$$

Isbot. Agar $m = 0$ bo'lsa, u holda teorema tasdig'ining o'rinliligi ko'rinib turibdi. Endi $m > 0$ deb olib, teskarisini faraz qilamiz, ya'ni eng yaxshi yaqinlashuvchi $P_n^*(x)$ ko'phad uchun

$$\|P_n^* - f\| = E_n(f) < m \quad (6.8.7)$$

bo'lsin. Quyidagi

$$\begin{aligned} \text{sign} [P_n(x) - P_n^*(x)] &= \text{sign} [(P_n(x) - f(x)) - (P_n^*(x) - f(x))], \\ |P_n(x_i) - f(x_i)| &> |P_n^*(x_i) - f(x_i)| \end{aligned}$$

munosabatlardan $\text{sign}[P_n(x_i) - P_n^*(x_i)] = \text{sign}[P_n(x_i) - f(x_i)]$ tenglik kelib chiqadi. Demak, n -darajali $P_n(x) - P_n^*(x)$ ko'phad o'z ishorasini $n+1$ marta almashtiradi, ya'ni $P_n(x) - P_n^*(x) = 0$. Bu esa (6.8.7) faraz qilingan shartga qarama-qarshi natijadir. Bu qarama-qarshilik teoremini isbotlaydi. ■

Teorema 6.12. (Chebishev teoremasi). $P_n^*(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda uzluksiz $f(x)$ funksionaning eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadi bo'lishi uchun bu oraliqda kamida $n+2$ ta quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$ nuqtalarning mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir: $\varepsilon = 1$ yoki $\varepsilon = -1$ bo'lganda barcha $i = 1, 2, \dots, n+2$ lar uchun

$$f(x_i) - P_n^*(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - P_n^*\|$$

tengliklar o'rinli bo'lsin.

Teorema shartlarini qanoatlantiradigan $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ nuqtalar Chebishev alternansining nuqtalari deyiladi.

Isbot. Kifoyaligi. $L = \|f - P_n^*\|$ deb belgilaylik. (6.8.6) tengsizlikka ko'ra $L = m \leq E_n(f)$, lekin $E_n(f)$ ning ta'rifiga ko'ra $E_n(f) \leq \|f - P_n^*\| = L$ bo'lishi kerak. Demak, $E_n(f) = L$ va $P_n^*(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad bo'ladi.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $P(x) = P_n^*(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad mavjud bo'lsin. Bu ko'phad uchun $\|P - f\| = E_n(f)$ bo'lib, hech bo'lmaganda bitta shunday x_0 nuqta mavjudki, uning uchun $|P(x_0) - f(x_0)| = E_n(f)$. Bunday nuqta eng katta og'ish nuqtasi yoki qisqacha (E)-nuqta deyiladi. $P(x)$ ko'phadning grafigi $y = f(x) + E_n(f)$ va $y = f(x) - E_n(f)$ chiziqlar orasida yotadi, hamda x_0 nuqtada $P(x)$ ning grafigi yoki yuqori chiziqqa yoki pastki chiziqqa urinadi. Agar $P(x)$ ning grafigi biror nuqtada yuqori chiziqqa urinsa, bunday nuqta eng katta og'ishning (+) nuqtasi yoki qisqacha (+) nuqta va ko'phadning grafigi pastki chiziqqa urinadigan har qanday nuqta (-) nuqta deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, (+) nuqta bilan bir vaqtda (-) nuqta ham mavjud bo'lishi kerak, chunki (+) nuqta yoki (-) nuqta mavjud bo'lmasa, u holda biror kichik musbat sonni $P(x)$ dan ayirib yoki unga qo'shib, shunday ko'phad hosil qilish mumkinki, uning grafigi $y = f(x)$ chiziq atrofidagi torroq yo'lakda joylashadi. Bu esa $P(x)$ ning eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phadligini inkor qiladi.

Endi $[a, b]$ oraliqni

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b$$

nuqtalar bilan shunday kichik qismlarga bo'lamizki, bu qismlarning har birida $P(x) - f(x)$ ning tebranishi $\frac{1}{2}E_n(f)$ dan kichik bo'lsin. Hech bo'lmaganda bitta (E) nuqtaga ega bo'lgan har bir $(E)t_k \leq x \leq t_{k+1}$ qismni (E) segment deb ataymiz. Har bir (E) segmentda $P(x) - f(x)$ nolga aylanmaydi (chunki uning tebranishi $\frac{1}{2}E_n(f)$ dan kichik) va o'z ishorasini saqlaydi. Demak, har bir (E) segmentda yoki faqat $(+)$ nuqta yotadi va bu yerda $P(x) - f(x)$ musbat, bunday segmentni $(+)$ segment deymiz yoki faqat $(-)$ nuqta yotadi va bu yerda $P(x) - f(x)$ manfiy, bunday segmentni $(-)$ segment deymiz. (E) segmentlarni chapdan o'ngga qarab nomerlab chiqamiz

$$d_1, d_2, \dots, d_N,$$

keyin $P(x) - f(x)$ ayirma eng kamida necha marta o'z ishorasini almashtirishi mumkinligini aniqlash uchun (E) segmentlarni gruppalariga quyidagicha ajratamiz. Aniqlik uchun d_1 ni $(+)$ segment deb olamiz:

$$\begin{aligned} & d_1, d_2, \dots, d_{k_1} \quad [(+) \text{ segmentlar}], \\ & d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \dots, d_{k_2} \quad [(-) \text{ segmentlar}], \\ & \vdots \\ & d_{k_{m-1}+1}, d_{k_{m-1}+2}, \dots, d_{k_m} \quad [(-1)^{m-1} \text{ segmentlar}]. \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

Bu yerda m ta gruppaga ko'rsatildi, bularning har biri kamida bitta (E) segmentga ega. Agar $m \geq n + 2$ bo'lsa, u holda teoremaning tasdig'i kelib chiqadi.

Teskarisi $m < n + 2$ ni faraz qilaylik va bunday faraz $P(x)$ ning eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad bo'lishligiga zid ekanligini ko'rsatamiz. Ko'rinib turibdiki, d_{k_j} va $d_{k_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) segmentlarda $P(x) - f(x)$ qarama-qarshi ishoralarga ega, shuning uchun ham bu segmentlar umumiy chetki nuqtalarga ega emas va ular o'zaro (E) segment bo'lmagan segmentlar bilan ajralgan bo'lishi kerak. Shuning uchun ham z_j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$) nuqtalarni shunday tanlash mumkinki, ular d_{k_j} dan o'ngda va $d_{k_{j+1}}$ dan chapda yotadi.

Quyidagi

$$v(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \dots (z_{m-1} - x)$$

$m - 1$ ($\leq n$) - darajali ko'phadni tuzaylik. (6.8.8) segmentlarning birinchi gruppasida $v(x)$ hamda $P(x) - f(x)$ ayirma musbat, ikkinchi gruppada $v(x)$ hamda $P(x) - f(x)$ ayirma manfiy va hokazo. Barcha (E) segmentlarda $\text{sign } v(x) = \text{sign}(P(x) - f(x))$, (E) segment bo'lmagan barcha segmentlarda $|P(x) - f(x)| < E_n(f)$. Aytaylik, bu segmentlarda $|P(x) - f(x)| \leq E' < E_n(f)$ bo'lsin.

Endi $\max_{a \leq x \leq b} |v(x)| = \rho$ deb olib, λ musbat sonini shunday tanlab olamizki,

$$\lambda \rho < E_n(f) - E' \quad \text{va} \quad \lambda \rho < \frac{1}{2} E_n(f)$$

tengsizliklar bajarilsin. Darajasi n dan ortmaydigan

$$Q(x) = P(x) - \lambda v(x)$$

ko'phadning $f(x)$ dan og'ishi $E_n(f)$ dan kichik ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, har bir (E) segment bo'lmagan segmentlarda

$$\begin{aligned} |Q(x) - f(x)| &\leq |P(x) - f(x)| + \lambda |v(x)| \leq E' + \lambda \rho < \\ &< E' + (E_n(f) - E') = E_n(f) \end{aligned}$$

Har bir (E) segmentda $\text{sign}(P(x) - f(x)) = \text{sign } v(x)$, $v(x) \neq 0$ va $|P(x) - f(x)| > \frac{1}{2} E_n(f)$, $|\lambda v(x)| < \frac{1}{2} E_n(f)$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} |Q(x) - f(x)| &= |P(x) - \lambda v(x) - f(x)| = |P(x) - f(x)| - \\ &- \lambda |v(x)| \leq E_n(f) - \lambda |v(x)| < E_n(f). \end{aligned}$$

Shunday qilib, $P(x)$ eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad emas ekan. Bu qarama-qarshilik $m \geq n + 2$ ekanini va yana shu bilan teoremaning o'rinli ekanini isbotlaydi. ■

Teorema 6.13. (Yagonalik teoremasi). *Uzluksiz funksiya uchun darajasi n dan ortmaydigan eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad yagonadir.*

Isbot. Faraz qilaylik, darajasi n dan ortmaydigan eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadlar ikkita $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ bo'lsin:

$$Q_n(x) \neq P_n(x), \quad \|Q_n - f\| = \|P_n - f\| = E_n(f).$$

Bundan

$$\left\| f - \frac{P_n + Q_n}{2} \right\| \leq \left\| \frac{P_n - f}{2} \right\| + \left\| \frac{Q_n - f}{2} \right\| = E_n(f).$$

Demak, $\frac{1}{2} (P_n(x) + Q_n(x))$ ko'phad ham eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad ekan. Faraz qilaylik $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ shu ko'phadga mos keluvchi Chebishev alternansining nuqtalari bo'lsin.

U holda

$$\left| \frac{1}{2} [P_n(x_i) + Q_n(x_i)] - f(x_i) \right| = E_n(f) \quad (i = 1, 2, \dots, n+2)$$

yoki

$$|[P_n(x_i) - f(x_i)] + [Q_n(x_i) - f(x_i)]| = 2E_n(f). \quad (6.8.9)$$

Lekin

$$|P(x_i) - f(x_i)| \leq E_n(f), \quad |Q_n(x_i) - f(x_i)| \leq E_n(f).$$

(6.8.9) tenglik faqat

$$P_n(x_i) - f(x_i) = E_n(f),$$

$$Q_n(x_i) - f(x_i) = E_n(f)$$

bo'lgan holdagina bajariladi. Bundan, $n + 2$ nuqtada ikkita n -darajali $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ ko'phadlar qiymatlarining o'zaro ustma-ust tushishlari kelib chiqadi, bu esa ularning aynan teng ekanliklarini bildiradi. ■

Endi bir necha misollar keltiramiz.

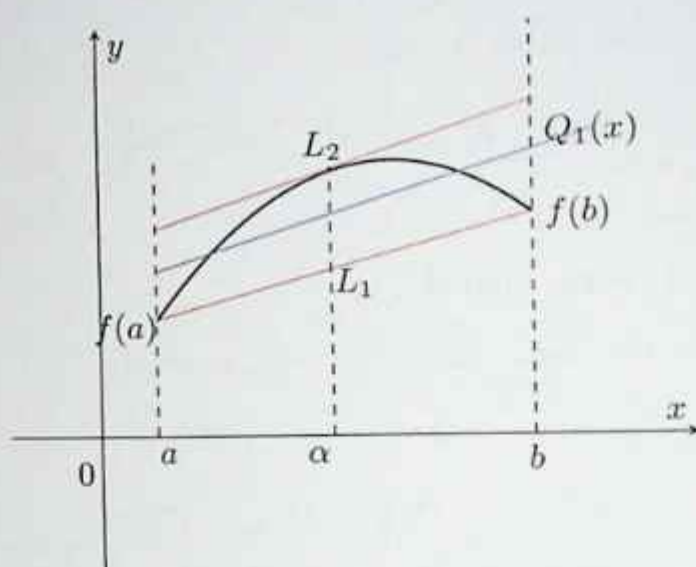
Misol 6.9. (eng yaxshi yaqinlashadigan o'zgarmas). Faraz qilaylik, uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun unga eng yaxshi yaqinlashadigan o'zgarmasni, ya'ni nolinchi darajali ko'phadni topish talab qilingan bo'lsin.

Aytaylik, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ bo'lsin. U holda $Q_0 = \frac{1}{2}(M + m)$ izlanayotgan eng yaxshi yaqinlashuvchi nolinchi darajali ko'phad va shu bilan birga $E_0(f) = \frac{1}{2}(M - m)$ bo'ladi. Buning isboti shunga asoslanganki, $f(x_1) = M$ va $f(x_2) = m$ tengliklarni qanoatlantiruvchi x_1 va x_2 nuqtalar Chebishev alternansining nuqtalaridir. ■

Misol 6.10. (eng yaxshi chiziqli funksiya). $f(x)$ funksiya ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $f''(x)$ hosila $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasin deb faraz qilaylik. Aniqlik uchun $f''(x) < 0$ deb hisoblaylik. Bu funksiya eng yaxshi yaqinlashuvchi birinchi darajali ko'phadni topish talab qilinsin.

Masalaning yechilishini chizmada tushuntiramiz (Chizma 6.8.1). Funksiya grafigidagi $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalarni L_1 kesma bilan birlashtiramiz – bu kesma chiziqli funksiya $l_1(x)$ ning grafigidir. $[a, b]$ oraliqda yagona d nuqta topiladiki, u nuqtada grafikka o'tkazilgan L_2 urinma L_1 ga parallel bo'ladi (chunki $f''(x) < 0$), L_2 – chiziqli funksiya $l_2(x)$ ning grafigidir.

Endi ravshanki, $Q_1(x) = 0,5(l_1(x) + l_2(x))$ izlanayotgan eng yaxshi yaqinlashuvchi chiziqli funksiya. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, a, d, b nuqtalar Chebishev alternansining nuqtalaridir. ■



Chizma 6.8.1

5-bobda Lagranj interpolatsion formulasining qoldiq hadini minimal-
lashtirish maqsadida interpolatsiya tugunlari sifatida $(n + 1)$ - tartibli
 $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)$ ko'phadning

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2(n+1)}, \quad (k = \overline{1, n+1})$$

ildizlarini olib, quyidagi

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \quad (6.8.10)$$

bahoga ega bo'lgan edik. Bundan

$$E_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $P_n^*(x)$ ko'phad $f(x)$ funksiya uchun eng yaxshi tekis
yaqinlashuvchi ko'phad bo'lsin. Chebishev teoremasiga ko'ra $f(x) - P_n^*(x)$
ayirma $(n + 1)$ ta $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ nuqtalarda nolga aylanadi. Shuning
uchun ham $P_n^*(x)$ ni tugunlari $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ lardan iborat bo'lgan
interpolatsion ko'phad deb qarash mumkin. 5 - bob (6.4.1) formulaga

ko'ra interpolatsiya xatosi uchun

$$f(x) - P_n^*(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n+1}), \quad \xi \in [a, b]$$

formula o'rinlidir. Faraz qilaylik,

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(x_0)|$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \|f - P_n^*\| \geq |f(x_0) - P_n^*(x_0)| = \\ &= \left| f^{(n+1)}(\xi(x_0)) \right| \frac{|\omega_{n+1}(x_0)|}{(n+1)!} \geq \min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \max_{a \leq x \leq b} \frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ikkinchi tomondan $\bar{T}_n^{[a,b]}(x)$ noldan eng kam og'uvchi ko'phad bo'lganligi uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)| \geq \max_{a \leq x \leq b} |\bar{T}_n^{[a,b]}(x)| \geq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Bundan quyidagi bahoga ega bo'lamiz:

$$E_n(f) \geq \min_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}. \quad (6.8.11)$$

Shunday qilib, agar $f^{(n+1)}(x)$ o'z ishorasini saqlasa va sekin o'zgarsa, u holda eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadning xatosi bilan Chebishev ko'phadlarining nollari bo'yicha tuzilgan interpolatsion ko'phad xatosi orasidagi farq aytarli katta bo'lmaydi. Aytilganlarni quyidagi masalaga qo'llash mumkin.

Misol 6.11. Berilgan $(n+1)$ -darajali

$$f(x) = Q_{n+1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n+1}x^{n+1}, \quad a_{n+1} \neq 0$$

ko'phad uchun eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi $P_n^*(x)$ ko'phad topilsin.

Yechish. Bu holda $f^{(n+1)}(x) = a_{n+1}(n+1)!$ bo'lganligi tufayli $E_n(f)$ uchun (6.8.10) va (6.8.11) baholar ustma-ust tushadi:

$$E_n(f) = \frac{|a_{n+1}|(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Shunday qilib, bu yerda eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad Chebishev ko'phadining

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}, \quad (k = \overline{1, n+1})$$

ildizlari bo'yicha tuzilgan interpolatsion ko'phad bilan bir xil bo'ladi. ■

Eng yaxshi yaqinlashuvchi ko'phadni boshqa ko'rinishda ham tasvirlash mumkin:

$$P_n^*(x) = Q_{n+1}(x) - a_{n+1}T_{n+1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \quad (6.8.12)$$

Haqiqatan ham, o'ng tomondagi ifoda n -darajali ko'phaddir, chunki x^{n+1} oldidagi koeffitsiyent nolga teng. (6.8.12) dan ko'ramizki, $|Q_{n+1}(x) - P_n^*(x)|$ maksimumga erishadigan ushbu

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi j}{n+1}, \quad (j = \overline{0, n+1})$$

nuqtalar $[a, b]$ oraliq'ida Chebishev alternansining nuqtalarini tashkil etadi.

Chebishevning $T_n(x)$ ko'phadlari yaqinlashuvchi ko'phadlar darajasini pasaytirish uchun ham qo'llaniladi. Buni quyidagi misolda ko'raylik. Faraz qilaylik, $f(x) = \cos x$ ni $[-1, 1]$ oraliqda oltinchi darajali ko'phad bilan yaqinlashtirish talab qilinsin. Bu funksiyaning Teylor qatorida 6-darajali hadini saqlasak:

$$Q_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$

u holda

$$\|f - Q_6\| < \frac{1}{8!} < 25 \cdot 10^{-6}$$

va

$$\|f - Q_6\| \geq |f(1) - Q_6(1)| > \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} > 24 \cdot 10^{-6}.$$

Endi yaqinlashuvchi ko'phad sifatida, $\cos x$ ning Teylor qatorida quyidagi

$$Q_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

qisman yig'indini olib, bu yerdan $\tilde{T}_8(x) = 2^{-7}T_8(x)$ Chebishev ko'phadi yordamida x^8 ni yo'qotamiz, natijada oltinchi darajali ushbu

$$\begin{aligned} P_6(x) &= Q_8(x) - \frac{1}{8!}\tilde{T}_8(x) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^7 \cdot 8!}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!8!}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{5}{4!8!}\right)x^4 - \left(\frac{1}{4!} - \frac{2}{8!}\right)x^6 \end{aligned}$$

ko'phadga ega bo'lamiz. Shu bilan birga

$$\|f - P_6\| \leq \|f - Q_8\| + \frac{1}{8!} \|\tilde{T}_8\| < \frac{1}{10!} + \frac{1}{2^7 \cdot 8!} < 47 \cdot 10^{-8}.$$

Shunday qilib, $P_6(x)$ ko'phad $f(x) = \cos x$ funksiya uchun oltinchi darajali Teylor qatoriga nisbatan 50 marta yaxshiroq yaqinlashishni beradi.

6.9-§. Splayn-funksiyalar bilan yaqinlashish

6.9.1 Splayn-funksiyaning ta'rif

Biz 4-bobda va shu bobning oldingi paragraflarida funksiyani ko'phadlar bilan yaqinlashtirishning turli usullari bilan tanishdik. Silliqligi yuqori bo'lmagan funksiyalar uchun ko'phadlar yaqinlashish apparati sifatida qator noqulayliklarga ega. Bulardan eng asosiysi shundan iboratki, bunday funksiyalarning biror nuqta atrofidagi holati, ularning to'la holati bilan uzviy bog'liqdir. Bundan tashqari interpolyatsion ko'phadlarning nuqsoni sifatida ularning har doim ham interpolyatsiyalanuvchi funksiyaga yaqinlashavermasligidir. Eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadlarning kamchiligi sifatida shuni ko'rsatish mumkinki, ularni qurish juda qiyin va odatda bunday ko'phadning darajasi ortishi bilan koeffitsiyentlari ham tez o'sib boradi.

Oxirgi vaqtlarda shu nuqsondan xoli bo'lgan boshqa yaqinlashish apparatlari ishlab chiqilmoqda. Nazariy tadqiqot va tatbiqlarda yaxshi natija beradigan apparat – splayn-funksiyalar apparatidir. Splaynning ta'rif bilan tanishaylik.

Haqiqiy o'qdagi $[a, b]$ oraliqda ushbu

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

to'r berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $H_m(P)$ darajasi m dan ortmaydigan ko'phadlar to'plami, $C^{(k)} = C^{(k)}[a, b]$ o'zi va k tartibgacha hosilalari $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyalar to'plami bo'lsin.

Ta'rif 6.1. *Quyidagi ikkita shartni qanoatlantiruvchi ushbu*

$$S_m(x) = S_m(x, \Delta_n)$$

funksiya defekti 1 ga teng bo'lgan m -darajali polinomial splayn deyiladi:

1. Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n}$) oraliqda $S_m(x) \in H_m(P)$;

$$2. S_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b].$$

Bu yerdagi $\{x_i\}$ nuqtalar *splayn tugunlari* deyiladi. $S_m(x)$ splaynning m - hosilasi $[a, b]$ oraliqda uzilishga ega bo'lishi ham mumkin.

Agar $k = 0, 1, \dots, m$ lar uchun

$$S_m^{(k)}(a+0) = S_m^{(k)}(b-0)$$

tengliklar bajarilsa, $S_m(x)$ splayn $(b-a)$ *davrli davriy splayn* deyiladi.

Ta'rifni qanoatlantiruvchi splaynlar bilan bir qatorda shunday splaynlar ham qaraladiki, ularning silliqdori Δ_n to'rtining turli qismlarida turlichadir. Bunday splaynlar $[a, b]$ oraliqning turli qismlarida turli silliqlikka ega bo'lgan funksiyalarni yaqinlashtirishda foydalaniladi.

Odatda, splayn yagona ravishda aniqlanishi uchun $[a, b]$ oraliqning chetki a va b nuqtalarida *chegaraviy shartlar* deb ataluvchi qo'shimcha shartlar qo'yiladi. Amalda uchinchi darajali, ya'ni kubik splaynlar keng qo'llaniladi.

Splaynlarning hisoblash matematikasida keng qo'llanilayotganligi sabablaridan yana biri ularning qiymatlarini EHMlarda hisoblashning qulayligi va ular yordamida interpolatsiyalash kabi jarayonlarning keng sinfdagi to'rtlar uchun yaxshi yaqinlashishligidadir (yuqorida aytilgandek ko'phad bilan interpolatsiyalash bunday emas).

Bundan buyon biz interpolatsion kubik va $S_3''(x) = S_3''(b) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi splaynlar bilan shug'ullanamiz.

6.9.2 Interpolatsion kubik splaynlarni qurish

Oldingi punktda aytilgandan so'ng quyidagi ta'rifni bera olamiz.

Ta'rif 6.2. *Quyidagi to'rt shartni qanoatlantiruvchi ushbu $S(f, x) = S_3(f, x, \Delta_n)$ funksiya interpolatsion kubik splayn deyiladi:*

1. Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n}$) oraliqda $S(f, x) \in H_3(P)$;
2. $S(f, x) \in C^2[a, b]$;
3. To'rtning x_k ($k = \overline{0, n}$) tugunlarida $S(f, x_k) = f_k$ tenglik o'rinli;
4. $S''(f, x)$ uchun

$$S''(f, a) = S''(f, b) = 0 \quad (6.9.1)$$

chegaraviy shartlar bajariladi.

Bu to'rt shartni qanoatlantiruvchi yagona $S(f, x)$ splayn mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun avval quyidagi yordamchi faktlarni keltiramiz.

Lemma 6.9.1. Faraz qilaylik, $A = [a_{ij}]$ n -tartibli kvadrat matritsaning elementlari

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} = q > 0 \quad (6.9.2)$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $A\bar{x} = \bar{b}$ sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq q^{-1} \max_{1 \leq k \leq n} |b_k| \quad (6.9.3)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Arap $A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning ozod hadlari nolga teng bo'lsa, u holda (6.9.3) tengsizlikdan bu sistemaning faqat trivial yechimga ega ekanligi, demak, $\det A \neq 0$ bo'lishi va bu sistemaning ixtiyoriy ozod hadlar uchun yagona yechimga egaligi kelib chiqadi. Shuning uchun ham, lemmani isbot qilish uchun (6.9.3) tengsizlikni keltirib chiqarish kifoyadir. Faraz qilaylik, (6.9.2) shart bajarilsin va $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = x_k$ bo'lsin. U holda

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \text{ ekanligidan}$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} |b_i| &\geq |a_{ik}| |x_k| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_k| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \left\{ |a_{ik}| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right\} \geq q \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

bo'ladi. Shu bilan (6.9.3) tengsizlik va demak lemma isbotlandi.

Agar matritsaning elementlari (6.9.2) shartni qanoatlantirsa, bunday matritsa *salmuqli bosh diagonalga ega* deyiladi.

Endi splaynni qurish bilan shug'ullanamiz, $S(f, x)$ ning ikkinchi hosilasi to'ring har bir $[x_{i-1}, x_i]$ oralig'ida uzluksiz bo'lganligi tufayli $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ da ushbu

$$S''(f, x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (6.9.4)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerda $h_i = x_i - x_{i-1}$ va $M_i = S''(f, x_i)$. Bu tenglikning har ikki tomonini integrallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S(f, x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i \frac{x_i - x}{h_i} + B_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (6.9.5)$$

bunda A_i va B_i integrallash doimiylari bo'lib, ular $S(f, x_{i-1}) = f_{i-1}$ va $S(f, x_i) = f_i$ shartlardan aniqlanadi. (6.9.5) da $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ larni o'rniga qo'yib mos ravishda $M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1}$ va $M_i \frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i$ larni hosil qilamiz. Bundan A_i va B_i larni topib (6.9.4) ga qo'ysak, natijada

$$S(f, x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad (6.9.6)$$

$$S'(f, x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_i \quad (6.9.7)$$

larga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglik $[x_i, x_{i+1}]$ oraliq uchun quyidagi ko'rinishga ega:

$$S'(f, x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{M_{i+1} - M_i}{6} h_{i+1}. \quad (6.9.8)$$

Endi (6.9.7) da x ning x_i ga chapdan va (6.9.8) da x ning x_i ga o'ngdan intilgandagi, ya'ni $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ lar uchun hosilaning bir tomonlama limitlarini hisoblaylik:

$$S'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$S'(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Ta'rifning 2) shartiga ko'ra $S'(f, x)$ va $S''(f, x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda uzluksiz. $S'(f, x)$ ning $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuqtalarda uzluksizligidan foydalansak, quyidagi $(n-1)$ ta tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}. \quad (6.9.9)$$

Bu tenglamalarni (6.9.1) chegaraviy shartdan kelib chiqadigan

$$M_0 = M_n = 0 \quad (6.9.10)$$

tengliklar bilan to'ldirib,

$$a_i = \frac{h_i}{6}, \quad b_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad c_i = \frac{h_{i+1}}{6}, \quad d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad (6.9.11)$$

belgilashlarni kiritsak, u holda $M_1, M_2, \dots, M_{n-2}$ noma'lumlarni topish uchun

$$\begin{cases} b_1 M_1 + c_1 M_2 & = d_1, \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + c_2 M_3 & = d_2, \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + c_3 M_4 & = d_3, \\ \vdots & \\ a_{n-2} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + c_{n-2} M_{n-1} & = d_{n-2}, \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} & = d_{n-1} \end{cases} \quad (6.9.12)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (6.9.11) ga ko'ra (6.9.12) sistema-ning matritsasi salmoqli bosh diagonalga ega bo'lganligi tufayli ixtiyoriy $f_1, f_2, \dots, f_n$ lar uchun (6.9.12) sistema yagona yechimga ega. Shunday qilib, 1) – 4) shartlarni qanoatlantiruvchi yagona splayn mavjud ekan. (6.9.12) sistemani yechishning juda ham effektiv algoritmi mavjud, uni quyida keltirib o'tamiz. Buning uchun barcha $k = 1, 2, \dots, n-1$ lar uchun

$$p_k = a_k q_{k-1} + b_k \quad (q_0 = 0), \quad (6.9.13)$$

$$q_k = -\frac{c_k}{p_k}, \quad u_k = \frac{d_k - a_k u_{k-1}}{p_k}, \quad (u_0 = 0)$$

yordamchi miqdorlarni hosil qilamiz. So'ngra (6.9.12) sistemaning 2-, ..., $(n-1)$ -tenglamalaridan ketma-ket $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ larni yo'qotib, ushbu

$$M_k = q_k M_{k+1} + u_k \quad (k = \overline{1, n-2}), \quad (6.9.14)$$

$$M_{n-1} = u_{n-1}$$

ekvivalent sistemaga ega bo'lamiz. Bundan esa ketma-ket $M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1$ larni aniqlash mumkin.

Salmoqli bosh diagonalga ega bo'lgan matritsalar uchun bu hisoblash sxemasi shu ma'noda turg'undirki, xato tez so'nib boradi ($0 < q_k < 1$). Buni (6.9.13) va (6.9.14) dan osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuni ham ta'kidlash kerakki, p_k va q_k miqdorlar faqat Δ_n to'rga bog'liq bo'lib, to'rning tugunlaridagi ordinalarning qiymatlariga bog'liq emas. Bu esa muayyan Δ_n to'r uchun $\{p_k\}$ va $\{q_k\}$ larning qiymatlarini bir marta hisoblab olib, to'r tugunlaridagi turli xil ordinalar bilan splaynlar qurishga imkon beradi. Splaynni qurishda hisoblash natijalarini jadval 6.4 dagi sxema shaklida yozish ma'quldir.

Agar Δ_n to'r tekis, ya'ni tugunlar teng uzoqlikda joylashgan bo'lsa, u holda bu sxema yanada soddalashadi: h_k, a_k, b_k, c_k ustunlarni yozmaslik ham mumkin.

x_k	f_k	h_k	a_k	b_k	c_k	d_k	p_k	q_k	u_k	M_k
x_1	f_1	h_1	a_1	b_1	c_1	d_1	p_1	q_1	u_1	M_1
x_2	f_2	h_2	a_2	b_2	c_2	d_2	p_2	q_2	u_2	M_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n-1}	f_{n-1}	h_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	p_{n-1}	q_{n-1}	u_{n-1}	M_{n-1}
x_n	f_n	h_n								

Jadval 6.4

Shunday qilib, funksiyaning $f_0, f_1, \dots, f_n$ qiymatlari berilgan bo'lsa, bu qiymatlardan foydalanib (6.9.6) formula yordamida splayn-funksiyalar bilan $f(x)$ ni interpolatsiyalash mumkin. (6.9.7) formula yordamida esa uning hosilasini topish mumkin.

Kubik splayn-funksiyalar, yuqorida aytib o'tganimizdek yaxshi yaqinlashish xossasiga ega. Agar interpolatsiyalanadigan $f(x)$ funksiya $C^k[a, b]$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) sinfga tegishli bo'lsa, u holda uning xatosi $r(x) = f(x) - S(f, x)$ uchun quyidagi bahoni ko'rsatish mumkin:

$$\max_{a \leq x \leq b} |r^{(p)}(x)| \leq ch^{k-p} \quad (k \geq p),$$

bu yerda c to'rga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas bo'lib, $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$.

Eslatma 6.9.1. Ko'pincha $x = a$ va $x = b$ nuqtalarda $f(x)$ funksiya haqida qo'shimcha ma'lumotga ham ega bo'lishimiz mumkin. Masalan, splayn tuzishdan asosiy maqsad

$$f(a) + \alpha f'(a) = A, \quad f(b) + \beta f'(b) = B$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi differensial tenglamani yechishdan iborat bo'lishi mumkin. Bunday holda, splayn tuzishda $M_0 = M_n = 0$ chegaraviy shart o'rniga yuqoridagi shartni olish kerak.

Mashqlar

1. Lejandr ko'phadlari bo'yicha quyidagi yoyilmalarning o'rinli ekanligini ko'rsating:

$$a) \arcsin x = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!}{2^k k!} \right]^2 [P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)], \quad (|x| < 1),$$

- b) $(1 - 2px + p^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k P_k(x), \quad (|p| < \min |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|),$
- c) $\frac{1}{\sqrt{1 - 2px + p^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} P_k(x), \quad (|p| > \max |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|).$
2. Chebishevning birinchi tur ko'phadlari bo'yicha quyidagi yoyilmalarning to'g'ri ekanligini ko'rsating:
- a) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{T_{2k-1}(x)}{(2k-1)!}, \quad (|x| < 1),$
- b) $\arctg x = \frac{\pi}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad (0 \leq x < \infty),$
- c) $\arctg \frac{x}{a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}(x), \quad (p = \sqrt{1+a^2}, |x| < 1),$
- d) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (3 - 2\sqrt{2})^k T_k(2x - 1) \right], \quad (0 < x < 1).$
3. Ikkinchi tur Chebishev ko'phadlari bo'yicha quyidagi yoyilmaning to'g'ri ekanligini ko'rsating:

$$\frac{1}{(a - bx)^2} = \frac{2}{b\sqrt{a^2 + b^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right)^k U_k(x).$$

4. Ermit ko'phadlari bo'yicha quyidagi yoyilmalarning o'rinli bo'lishini ko'rsating:
- a) $\operatorname{sh} 2x = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} H_{2k+1}(x),$
- b) $\operatorname{ch} 2x = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} H_{2k}(x).$
5. $f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ uchun uchinchi tartibli eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad $P_3^*(x) \equiv 0$ bo'lishini ko'rsating.
6. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiya uchun $[-1, 1]$ oraliqda ikkinchi darajali eng yaxshi, tekis yaqinlashuvchi ko'phadni toping.

Javob:

$$P_2^*(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{77}{80}.$$

7. Ikki eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phadlarning yig'indisi eng yaxshi tekis yaqinlashuvchi ko'phad bo'lmasligi ham mumkinligini misolda ko'rsating.
8. $R(x)$ ko'phadlar orasida $-1 \leq x \leq 1$ oraliqda noldan eng kam og'uvchi va biror $\xi (\xi > 1 \text{ yoki } \xi < -1)$ nuqtada η qiymat qabul qiluvchi ko'phadni aniqlang.

Javob:

$$R(x) = \eta \frac{T_n(x)}{T_n(\xi)} = \eta \frac{\cos(n \arccos x)}{\cos(n \arccos \xi)}.$$

9. Bosh koeffitsiyenti A ga teng bo'lgan n -darajali

$$R(x) = Ax^n + \dots$$

ko'phadlar orasida $-1 \leq x \leq 1$ oraliqda noldan eng kam og'uvchisini toping

Javob:

$$R(x) = \frac{A}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{A}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

7-BOB. INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH

7.1-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash masalasi

Amaliy va nazariy masalalarning ko'pchiligi biror $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya dan olingan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblashga keltiriladi. Ammo integral hisobining asosiy formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(bu yerda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi) amaliyotda ko'pincha ishlatilmaydi. Chunki ko'p hollarda $F(x)$ ni elementar funksiyalarning chekli kombinatsiyasi orqali ifodalab bo'lmaydi. Bundan tashqari amaliyotda $f(x)$ jadval ko'rinishida berilgan bo'lishi ham mumkin, bunday holda boshlang'ich funksiya tushunchasining o'zi ma'noga ega bo'lmay qoladi. Shuning uchun ham aniq integrallarni taqribiy hisoblash metodlari katta amaliy ahamiyatga ega.

Biz bu bobda $f(x)$ funksiyalarning yetarlicha keng sinfi uchun $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqning chekli sonda olingan nuqtalaridagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasiga keltiradigan metodlarni ko'rib chiqamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (7.1.1)$$

Bu yerda $x_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) kvadratur formulaning tugunlari, $A_k^{(n)}$ kvadratur formulaning koeffitsiyentlari va $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ kvadratur yig'indi deyiladi.

Ta'rif 7.1. Agar integrallash chegaralari a va b kvadratur formulaning tugunlari bo'lsa, u holda kvadratur formula "yopiq tipdagi" aks holda esa "ochiq tipdagi" deyiladi.

Kvadratur formulaning tugunlari $x_k^{(n)}$ va koeffitsiyentlari $A_k^{(n)}$ funksiyalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi talab qilinadi.

Ta'rif 7.2. Ushbu

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (7.1.2)$$

ifoda esa (7.1.1) kvadratur formulaning qoldiq hadi yoki xatosi deyiladi.

Odatda (7.1.1) formulaga nisbatan umumiyroq kvadratur formula qaraladi. Faraz qilaylik, Φ chekli yoki cheksiz $[a, b]$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiyalarning biror sinfi bo'lib, $\rho(x)$ oraliqda vazn funksiyasi bo'lsin (6-bobga qarang). Endi quyidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (7.1.3)$$

kvadratur formula va uning qoldiq hadi

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (7.1.4)$$

ni qaraymiz.

Quyida $[a, b]$ oraliqni chekli deb faraz qilib, biz kvadratur formula tuzishning ayrim yo'nalishlarini qisqacha ko'rib chiqamiz.

1. Ko'pincha kvadratur formula tuzish uchun $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda n ta $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ nuqtalar yordamida interpolatsiyalanadi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} \cdot f(x_k^{(n)}) + r_n(f, x).$$

Endi buni $\rho(x)$ ga ko'paytirib integrallasak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_j^{(n)}} dx.$$

Shu usulda tuzilgan kvadratur formulalar *interpolyatsion formulalar* deyiladi.

2. Analizdan va 6-bobdan ma'lumki, chekli oraliqda uzluksiz funksiyalarni algebraik ko'phadlar bilan yetarlicha yuqori aniqlikda yaqinlashtirish mumkin (Veyershtass teoremasi). Shu bilan birga, ko'phad darajasi qancha yuqori bo'lsa, aniqlik ham shuncha yuqori bo'ladi. Shuning uchun ham (7.1.3) formulada $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, bu tenglik yetarlicha yuqori darajali algebraik ko'phadlar uchun aniq bo'lsin. Shu usul bilan tuzilgan (7.1.3) formula $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ko'p funksiyalarni integrallashda aniqlik jihatidan yaxshi natija beradi. Odatda, (7.1.3) formula barcha darajali ko'phadlar uchun aniq bo'lib, $f(x) = x^{m+1}$ uchun aniq bo'lmasa, u holda uning *algebraik aniqlik darajasi m ga teng deyiladi*.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri 2π ga teng bo'lsin va $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. U holda (7.1.3) formulada $A_k^{(n)}$ va $x_k^{(n)}$ parametrlarni shunday tanlashga harakat qilinadiki, u imkon boricha yuqori tartibli trigonometrik ko'phadlarni aniq integrallasin.

Aniqlik darajasi (tartibi) eng yuqori bo'lgan kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega. Bunday formulalar *Gauss tipidagi kvadratur formulalar* deyiladi.

3. Kvadratur formulalar tuzishda elliginchi yillarning oxirlaridan boshlab yangi bir yo'nalish rivojlana boshladi. Uning mohiyati quyidagidan iborat. Bizga $f(x)$ funksiyalarning biror sinfi Φ berilgan bo'lsin. Butun Φ sinf uchun aniqlikni tavsiflaydigan miqdor sifatida quyidagi aniq yuqori

chegara

$$R_n = \sup_{f \in \Phi} |R_n(f)| = \sup_{f \in \Phi} \left| \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|$$

olinadi. Bu yerda $[a, b]$ da $x_k^{(n)}$ tugunlarni va $A_k^{(n)}$ koeffitsiyentlarni shunday tanlash talab qilinadiki, R_n o'zining eng kichik qiymatiga erishsin. Bunday formulalar, tabiiy ravishda, *funksiyalarning Φ sinfida eng kichik zatoga ega bo'lgan formulalar* deyiladi.

Masalani boshqacha tarzda ham qo'yish mumkin; ya'ni $A_k^{(n)}$ yoki $x_k^{(n)}$ larga nisbatan ayrim shartlar bilan, masalan, koeffitsiyentlarning o'zaro teng bo'lishligi $A_1^{(n)} = A_2^{(n)} = \dots = A_n^{(n)} = A^{(n)}$ yoki tugunlarning bir xil uzoqliqda joylashgan bo'lishligi kabi va h.k. Koeffitsiyentlari yoki tugunlari mana shu shartlarni qanoatlantirgan holda (7.1.3) formulani shunday tuzish talab qilinadiki, R_n qoldiq funksiyalar sinfida eng kichik bo'lsin. Paragrafni yakunlashdan oldin umumiy bir mulohazani aytib o'tamiz. Integrallarni (7.1.3) formula yordamida hisoblashda, kvadratur yig'indi umuman taqribiy ravishda hisoblanadi. Odatda $f(x_k^{(n)})$ o'rnida biror $\tilde{f}(x_k^{(n)})$ ga ega bo'lamiz, demak

$$f(x_k^{(n)}) = \tilde{f}(x_k^{(n)}) + \varepsilon_k^{(n)},$$

bu yerda $\varepsilon_k^{(n)}$ - yaxlitlash xatosi. Faraz qilaylik, barcha $k = 1, 2, \dots, n$ uchun $\varepsilon_k^{(n)} \leq \varepsilon$ bo'lsin. Agar ko'paytmalarning yig'indisi $\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} \tilde{f}(x_k^{(n)})$ aniq hisoblansa, u holda kvadratur yig'indini hisoblashda yaxlitlash xatosi $\varepsilon \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$ dan ortmaydi, xususan, teng bo'lishi ham mumkin. Bundan ko'rinib turibdiki, $\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$ qancha katta bo'lsa, kvadratur yig'indini hisoblashda hosil bo'lgan yaxlitlash xatosi shuncha katta bo'ladi.

Faraz qilaylik, (7.1.3) formula $f(x) \equiv 1$ ni aniq integrallasin, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Bundan, ravshanki $\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|$ eng kichik qiymatni qabul qilishi uchun barcha $k = \overline{1, n}$ lar uchun $A_k^{(n)} > 0$ bo'lishi kerak. Bu esa musbat koeffitsiyentli kvadratur formulalar katta ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi.

7.2-§. Interpolyatsion kvadratur formulalar

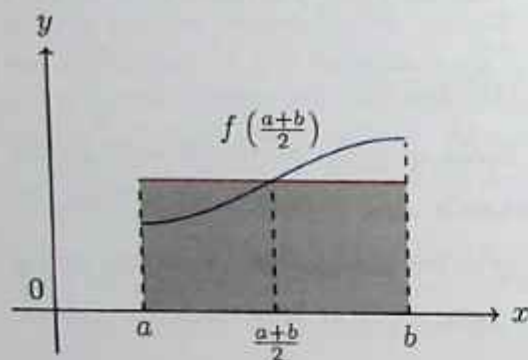
7.2.1 Eng sodda kvadratur formulalar: to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulari

Eng sodda kvadratur formulalarni oddiy mulohazalar asosida qurish mumkin. Aytaylik,

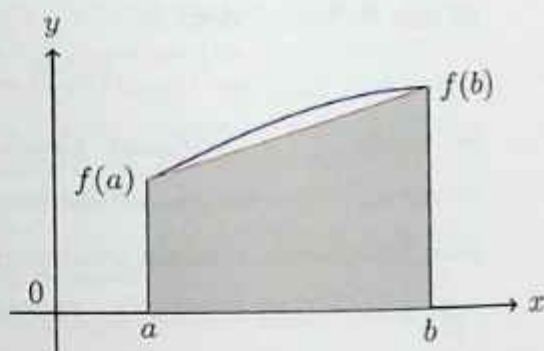
$$\int_a^b f(x) dx$$

integralni hisoblash talab qilinsin. Agar qaralayotgan oraliqda $f(x) = \text{const}$ bo'lsa, u vaqtda

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (7.2.1)$$



Chizma 7.2.1



Chizma 7.2.2

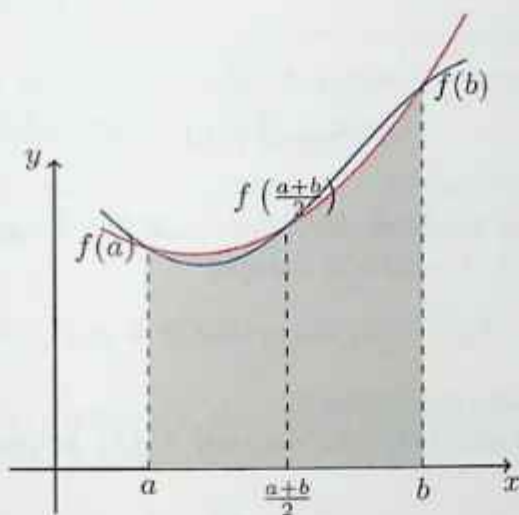
deb olishimiz mumkin (chizma 7.2.1). Bu formula *to'g'ri to'rtburchaklar formulasi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo'lsin, u holda tabiiy ravishda integralni balandligi $b-a$ ga va asoslari $f(a)$ va $f(b)$ ga teng bo'lgan trapetsiya yuzi bilan almashtirish mumkin (chizma 7.2.2), u holda

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \quad (7.2.2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula *trapetsiya formulasi* deyiladi. Nihoyat, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda kvadratik funksiya yaqin bo'lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ ni taqribiy ravishda Ox o'qi va $x = a, x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda $y = f(x)$ funksiya grafigining absissalari $x = a, x = \frac{a+b}{2}$ va $x = b$ bo'lgan nuqtalardan o'tuvchi ikkinchi tartibli parabola orqali chegaralangan yuza bilan almashtirish mumkin (chizma 7.2.3), u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\}. \quad (7.2.3)$$



Chizma 7.2.3

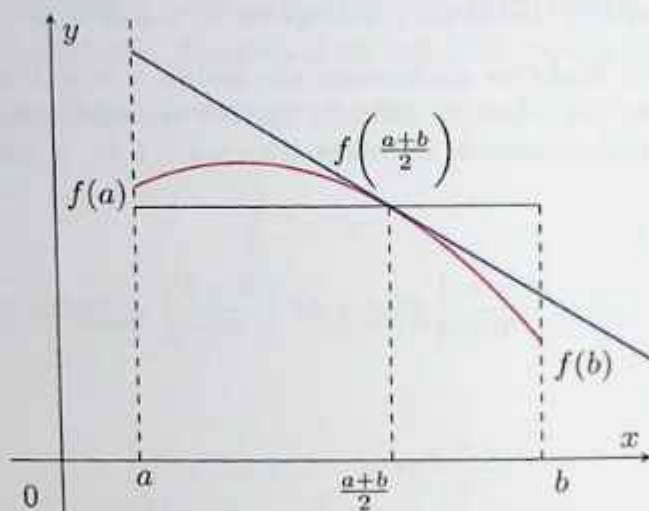
Bu formulani ingliz matematigi Simpson 1743 yilda taklif etgan edi.

Bu formulaning hosil qilinishi usulidan ko'rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

ko'phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta eng sodda kvadratur formulalarga ega bo'ldik. (7.2.1) formulani tuzishda u o'zgarmas son $f(x) = c$ aniq integrallashini talab qilgan edik. Lekin u $f(x) = a_0 + a_1x$ chiziqli funksiya ham aniq integrallaydi, chunki $(b-a)f(\frac{a+b}{2})$ balandligi

$b - a$ va o'rta chizig'i $f(\frac{a+b}{2})$ bo'lgan ixtiyoriy trapetsiyaning yuziga teng (Chizma 7.2.4).



Chizma 7.2.4

Shunga o'xshash *Simpson formulasi* ham biz kutgandan ko'ra ham yaxshiroq formuladir. U uchinchi darajali

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

ko'phadlarni ham aniq integrallaydi.

Haqiqatdan ham, uchinchi darajali $P_3(x)$ ko'phadni quyidagicha yozamiz:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P_2(x) + a_3x^3$$

u vaqtda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3dx = \int_a^b P_2(x)dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4). \quad (7.2.4)$$

Lekin bizga ma'lumki,

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[P_2(a) + P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b) \right]. \quad (7.2.5)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6} \left\{ a_3 a^3 + 4a_3 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + a_3 b^3 \right\} \quad (7.2.6)$$

ayniyat o'rinlidir. Endi (7.2.5)-(7.2.6) ni (7.2.4) ga qo'yib

$$\int_a^b P_3(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b) \right]$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz uchta kvadratur formulani ko'rdik. Ulardan ikkitasi to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya formulalari - birinchi darajali ko'phad uchun aniq formula bo'lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko'phad uchun aniq formuladir.

7.2.2 To'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalarining qoldiq hadlari

Endi yuqorida qurilgan kvadratur formulalarning qoldiq hadlarini aniqlash bilan shug'ullanamiz. To'g'ri to'rtburchak formulasining qoldiq hadi

$$R_0(f) = \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ni topish uchun $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda Teylor formulasiga ko'ra:

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\zeta)$$

bu yerda $x \leq \zeta = \zeta(x) \leq \frac{a+b}{2}$. Bu tenglikning ikkala tomonini a dan b gacha integrallasak,

$$R_0(f) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\zeta) dx \quad (7.2.7)$$

kelib chiqadi, chunki $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$. Quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$m = \min_{a \leq x \leq b} f''(x), M = \max_{a \leq x \leq b} f''(x).$$

Integral ostidagi funksiya $(x - \frac{a+b}{2})^2$ o'z ishorasini saqlaydi, shuning uchun (7.2.7) integralga umumlashgan o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llash mumkin:

$$R_0(f) = L \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = L \frac{(b-a)^3}{24}, \quad (7.2.8)$$

bunda $m \leq L \leq M$, $f''(x)$ uzluksiz bo'lgani uchun Koshi teoreмага ko'ra shunday ξ , $a \leq \xi \leq b$ topiladiki,

$$L = f''(\xi).$$

Endi (7.2.8) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$R_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \quad (7.2.9)$$

Bu esa qoldiq hadning izlanayotgan ko'rinishidir.

Endi trapetsiya formulasining qoldiq hadini topaylik. Buning uchun $f(x)$ funksiyani $x = a$ va $x = b$ nuqtalardagi qiymatlari yordamida interpolatsiyalab, interpolatsion formulani qoldiq hadi bilan yozamiz:

$$f(x) - L_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\zeta).$$

Bu tenglikning ikkala tomonini a dan b gacha integrallaymiz, natijada

$$R_1(f) = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)f''(\zeta)dx$$

hosil bo'ladi. Bu yerda $[a, b]$ oraliqda $(x-a)(x-b) \leq 0$ bo'lgani uchun $R_1(f)$ integralga o'rta qiymat haqidagi umumlashgan teoremani qo'llash mumkin:

$$R_1(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (7.2.10)$$

Nihoyat, Simpson formulasining qoldiq hadini aniqlaylik. Buning uchun $c = 0,5(a+b)$ deb olib, quyidagi

$$H(a) = f(a), H(c) = f(c), H'(c) = f'(c), H(b) = f(b)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi Ermit interpolatsion ko'phadini tuzamiz:

$$H(x) = \frac{4}{(a-b)^3} [(x-c)^2(x-b)f(a) - (x-a)(x-b)(a-b)f(c) - \\ - (x-a)(x-b)(x-c)(a-b)f'(c) - (x-a)(x-c)^2f(b)].$$

Ravshanki,

$$\int_a^b H(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Endi 5-bobning 5.13-§ga ko'ra $f(x) = H(x) + r(x)$ interpolatsion formulaning qoldiq hadi

$$r(x) = \frac{1}{24} \Omega(x) f^{IV}(\zeta), \quad (a \leq \zeta \leq b)$$

bo'lib, bu yerda

$$\Omega(x) = (x-a)(x-c)^2(x-b).$$

Demak, (7.2.3) formulaning qoldiq hadi

$$R_2(f) = \frac{1}{24} \int_a^b \Omega(x) f^{IV}(\zeta) dx$$

bo'lib, $\Omega(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlaydi va umumlashgan o'rta qiymat teoremasiga ko'ra

$$R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b)$$

ga ega bo'lamiz.

Qoldiq hadlar uchun chiqarilgan formulalar yana bir bor shuni ko'rsatadiki, to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko'phadlar uchun aniq bo'lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko'phadlar uchun aniq formuladir.

7.2.3 Interpolatsion kvadratur formulalar

Bundan keyin qisqalik uchun kvadratur formulaning $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ koeffitsiyentlari va $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ tugunlarini

yuqori indeksiz $A_1, A_2, \dots, A_n$ va $x_1, x_2, \dots, x_n$ ko'rinishda yozamiz. Faraz qilaylik, bizga $f(x)$ funksiyaning $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalardagi $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ qiymatlari berilgan bo'lib, maqsad shu qiymatlar bo'yicha $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqribiy qiymatini mumkin qadar yuqori aniqlikda topishdan iborat bo'lsin. Demak, A_k koeffitsiyentlar aniqlanishi kerak. Buning uchun $f(x)$ ni uning berilgan qiymatlaridan foydalanib, $(n-1)$ -darajali ko'phad bilan interpolatsiyalaymiz:

$$f(x) = L_{n-1}(x) + r_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) + r_n(f, x). \quad (7.2.11)$$

Endi bu tenglikni $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaylik:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx.$$

Agar bundagi

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b \rho(x) r_n(f, x) dx \quad (7.2.12)$$

qoldiq hadni tashlasak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx \quad (7.2.13)$$

kvadratur formulaga ega bo'lamiz.

Bu formulani qurilish usuliga ko'ra *interpolyatsion kvadratur formula* deyiladi. Bunday formulalar uchun ushbu teorema o'rinalidir.

Teorema 7.1. *Quyidagi*

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.2.14)$$

kvadratur formulaning interpolatsion bo'lishi uchun uning barcha $(n-1)$ -darajali algebraik ko'phadlarni aniq integrallashi zarur va kifoyadir.

Isbot. Zarurligi. Agar $f(x)$ $(n-1)$ -darajali ko'phad bo'lsa, u holda (7.2.11) tenglikda $r_n(f, x) \equiv 0$ bo'lib,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va (7.2.14) qoida interpolatsion qoida bo'lganidan (7.2.13) ga ko'ra:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Demak, (7.2.14) formula $(n-1)$ -darajali $f(x)$ ko'phadni aniq integrallaydi.

Kifoyaligi. (7.2.14) formula $(n-1)$ -darajali ixtiyoriy ko'phad uchun aniq formuladir. Xususiyl holda, $(n-1)$ -darajali ushbu

$$\omega_m(x) = \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i}, \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

ko'phad uchun ham aniq bo'ladi. Agar $\omega_m(x_k) = 0$, $(k \neq m)$ va $\omega_m(x_m) = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i \neq m}^n \frac{x - x_i}{x_m - x_i} dx = \int_a^b \rho(x) \omega_m(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_m(x_k) = A_m$$

kelib chiqadi. Demak, (7.2.14) qoida interpolatsiondir, shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Bu teoremadan ko'rinadiki, n nuqtali interpolatsion kvadratur formulaning algebraik aniqlik darajasi $n-1$ dan kichik bo'lmazligi kerak.

Osongina ishonch hosil qilish mumkinki, yuqorida ko'rib o'tilgan to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari interpolatsion kvadratur formulalardir. 5-bobdan ma'lumki, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda n -tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda interpolatsion formulaning qoldiq hadi $r_n(f, x)$ ni

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \omega(x), \quad \omega(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Buni (7.2.12) ga qo'yib, kvadratur formula uchun

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b \rho(x) \omega(x) f^{(n)}(\zeta) dx \quad (7.2.15)$$

ga ega bo'lamiz. Endi n - tartibli uzluksiz hosilaga ega va hosilasi

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (7.2.16)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfini qaraymiz.

Bunday funksiyalar uchun (7.2.15) dan

$$|R_n(f)| \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |\rho(x) \omega(x)| dx \quad (7.2.17)$$

ga ega bo'lamiz. Agar $\omega(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda (7.2.17) baho aniq bo'lib, undagi tenglikka

$$f(x) = \frac{M_n}{n!} x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'phadga erishiladi.

Endi interpolatsion kvadratur formulalarning bir muhim xossasini ko'rib o'taylik. Avval A_k ni aniqlaydigan integralda $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ almashtirish bajaramiz. Agar $\rho(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t) = \bar{\rho}(t)$ deb belgilasak, u holda A_k quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A_k = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \bar{\rho}(t) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{t-t_i}{t_k-t_i} dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \bar{\rho}(t) \frac{\omega(t) dt}{(t-t_k) \omega'(t_k)} = \frac{b-a}{2} B_k,$$

bu yerda

$$B_k = \int_{-1}^1 \bar{\rho}(t) \frac{\omega(t) dt}{(t-t_k) \omega'(t_k)} \quad (7.2.18)$$

va

$$t_k = \frac{2x_k - a - b}{b - a}.$$

Shunday qilib, (7.2.13) formula quyidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n B_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right) \quad (7.2.19)$$

ko'rinishga keladi. ■

Teorema 7.2. Faraz qilaylik, vazn funksiyasi $\rho(x)$ $[a, b]$ oraliqning o'rta nuqtasiga nisbatan juft funksiya va t_k tugunlar shu nuqtaga nisbatan simmetrik, ya'ni $t_k = -t_{n+1-k}$ bo'lsin. U holda simmetrik tugunlarga mos keladigan kvadratur formulaning koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi:

$$B_k = B_{n+1-k}. \quad (7.2.20)$$

Isbot. Agar n juft bo'lsa, u holda

$$\omega(t) = (t - t_1) \dots (t - t_n) = \omega(-t),$$

$$\omega'(t_k) = \prod_{j \neq k}^n (t_k - t_j) = - \prod_{j \neq k}^n (t_{n+1-k} - t_j) = -\omega'(t_{n+1-k})$$

tengliklar o'rinlidir. Agar n toq bo'lsa, u holda, aksincha $\omega(t) = -\omega(-t)$, $\omega'(t_k) = \omega'(t_{n+1-k})$ bo'ladi. Har ikkala holda ham (7.2.18) da $t = -\tau$ almashtirish bajarsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} B_k &= \int_{-1}^1 \rho(\tau) \frac{\omega(\tau) d\tau}{\omega'(t_{n+1-k})(\tau + t_k)} = \\ &= \int_{-1}^1 \bar{\rho}(\tau) \frac{\omega(\tau) d\tau}{\omega'(t_{n+1-k})(\tau - t_{n+1-k})} = B_{n+1-k}. \end{aligned}$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. Bundan ko'rinadiki t_i lar simmetrik joylashganda barcha B_i larni hisoblash o'rniga $B_1, B_2, \dots, B_{[\frac{n+1}{2}]}$ larni hisoblash kifoyadir.

Ikkinchi tomondan, bunday formulalar $[a, b]$ oraliqning o'rtasiga nisbatan toq bo'lgan har qanday funksiya uchun aniq formuladir. Haqiqatdan ham, $\rho(x)$ ning juft ekanligini e'tiborga olsak, bunday funksiyalar uchun $\int_a^b \rho(x) f(x) dx = 0$ va shu bilan birga (7.2.20) formulaga ko'ra $\sum_{k=1}^n B_k f(x_k) = 0$. Demak, $R_n = 0$. Xususiyl holda, (7.2.19) formula $\text{const}(x - \frac{a+b}{2})^{2q+1}$ ni aniq integrallaydi.

Endi xuddi shu kvadratur formulani n toq bo'lganga qaraylik. Bu formula $f(x) = \text{const}(x - \frac{a+b}{2})^n$ ni aniq integrallaydi va qurilish usuliga

ko'ra ixtiyoriy $(n-1)$ -darajali ko'phadni ham aniq integrallaydi. Shunday qilib, tugunlari soni $2m-1$ yoki $2m$ bo'lsa, oraliq o'rtasiga nisbatan simmetrik joylashgan interpolatsion kvadratur formulalar $2m-1$ darajali ko'phadlar uchun aniq formuladir. Bunga to'g'ri to'rtburchak va Simpson formulalari misol bo'la oladi.

Toq tugunli kvadratur formulaning qoldiq hadini $f^{(n)}(x)$ orqali emas, balki $f^{(n+1)}(x)$ orqali ifodalash uchun integral ostidagi funksiyani yanada aniqroq $\frac{a+b}{2}$ nuqtada ikki karrali tugunga ega bo'lgan Ermit interpolatsion ko'phadi bilan almashtirish kerak. Biz yuqorida to'g'ri to'rtburchak va Simpson formulalarining qoldiq hadlarini baholashda xuddi shunday qilgan edik. ■

7.2.4 Nyuton - Kotes kvadratur formulalari

Nyuton - Kotes formulalari eng dastlabki interpolatsion kvadratur formulalardan hisoblanadi. Bu formulalarda oraliq chekli, vazn funksiyasi $\rho(x) \equiv 1$ va x_i tugunlar o'zaro teng uzoqlikda joylashgandir. Bu formula (7.2.13) formulaning $\rho(x) \equiv 1$ bo'lgandagi xususiy holidir.

Lekin aksariyat adabiyotlarda Nyuton - Kotes formulasi (7.2.19) ko'rinishda emas, balki boshqa ko'rinishda keltiriladi. Biz ham shu ko'rinishda qaraymiz.

Buning uchun $[a, b]$ oraliqni

$$x_k^{(n)} = a + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$(n+1)$ ta nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz va $A_k^{(n)}$ koeffitsiyentlarni tegishli ko'rinishga keltirish uchun

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx$$

integralda $x = a + th$ almashtirish bajaramiz,

$$x - x_i^{(n)} = (t-i)h, \quad x_k^{(n)} - x_i^{(n)} = (k-i)h$$

bo'lganligi uchun

$$\prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=0, i \neq k}^n (t-i).$$

Demak,

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt.$$

Endi

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt \quad (7.2.21)$$

deb olsak, u holda Nyuton-Kotes formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} f(a+kh). \quad (7.2.22)$$

Bundagi $B_k^{(n)}$ koeffitsiyentlar $[a, b]$ oraliqqa bog'liq emas.

Kotes tomonidan $B_k^{(n)}$ koeffitsiyentlar $n = 1, 2, \dots, 10$ uchun hisoblangan. Quyida ular $n = 1, 2, \dots, 5$ uchun keltirilgan:

$$n = 1 : B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = \frac{1}{2};$$

$$n = 2 : B_0^{(2)} = B_2^{(2)} = \frac{1}{6}, \quad B_1^{(2)} = \frac{4}{6};$$

$$n = 3 : B_0^{(3)} = B_3^{(3)} = \frac{1}{8}, \quad B_1^{(3)} = B_2^{(3)} = \frac{3}{8};$$

$$n = 4 : B_0^{(4)} = B_4^{(4)} = \frac{7}{90}, \quad B_1^{(4)} = B_3^{(4)} = \frac{32}{90}, \quad B_2^{(4)} = \frac{12}{90};$$

$$n = 5 : B_0^{(5)} = B_5^{(5)} = \frac{19}{288}, \quad B_1^{(5)} = B_4^{(5)} = \frac{75}{288}, \quad B_2^{(5)} = B_3^{(5)} = \frac{50}{288}.$$

R.O. Kuzmin $B_k^{(n)}$ lar uchun $n \rightarrow \infty$ da asimptotik formulalarni topgan edi. Bu formulalardan, jumladan, $n \rightarrow \infty$ da $\sum_{k=1}^n |B_k^{(n)}| \rightarrow \infty$ kelib

chiqadi. Endi $\sum_{k=1}^n B_k^{(n)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b 1 dx = 1$ ekanligini hisobga olsak, bundan n yetarlicha katta bo'lganda koeffitsiyentlar orasida manfiylari ham, musbatlari ham mavjudligi ravshan bo'lib qoladi. Hatto, $n = 8$ va $n = 10$ bo'lganda ham $B_k^{(n)}$ lar orasida manfiylari mavjuddir. Shuning uchun ham (7.1-§ga qarang) Nyuton-Kotes formulalarini katta n larda qo'llash maqsadga muvofiq emas. Ravshanki, $n = 1$ va $n = 2$ bo'lganda (7.2.22) formuladan mos ravishda trapetsiya va Simpson formulalari kelib chiqadi.

To'g'ri to'rtburchak formulasi esa $\rho(x) \equiv 1$ va $n = 1$ bo'lganda (7.2.19) formuladan kelib chiqadi. $n = 3$ bo'lganda (7.2.22) dan "Sakkizdan uch qoidasi" deb ataluvchi Nyuton formulasiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b) \right].$$

7.2.5 Umumlashgan kvadratur formulalar

Qaralayotgan oraliq yetarlicha katta bo'lib, bu oraliqda funksiya to'g'ri chiziqli yoki parabolaga yetarlicha yaqin bo'lmasa, u holda to'g'ri to'rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari yaxshi natija bermaydi. U vaqtda $f(x)$ ni yuqori tartibli ko'phad bilan almashtirishga to'g'ri keladi, lekin yuqori tartibli Nyuton-Kotes formulasini qo'llash ham maqsadga muvofiq emas. Bunday holda $[a, b]$ oraliqni qisman oraliqlarga bo'lib, har bir qisman oraliqda kichik n lar uchun chiqarilgan kvadratur formulalarni qo'llash yaxshi natijaga olib keladi.

Berilgan $[a, b]$ oraliqni $x_k = a + kh$ ($k = \overline{0, N}$) nuqtalar yordamida uzunligi $h = \frac{b-a}{N}$ bo'lgan N ta bo'lakka bo'lamiz. Har bir qisman oraliq $[x_k, x_{k+1}]$ bo'yicha olingan integralga (7.2.1) formulani qo'llaymiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx hf\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (7.2.23)$$

Qulaylik uchun $f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) = y_{k+\frac{1}{2}}$ kabi belgilab (7.2.23) ni barcha $k = 0, 1, \dots, N-1$ lar bo'yicha yig'ib chiqsak, natijada umumlashgan to'g'ri to'rtburchak ("katta" yoki "tarkibiy") deb ham yuritiladi) formulasiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} (y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{N-1/2}). \quad (7.2.24)$$

Bu formulaning qoldiq hadi $R_N(f)$ ni topish uchun (7.2.23) ning

$$R_0(f, k) = \frac{(b-a)^3}{24N^3} f''(\xi_k) \quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}) \quad (7.2.25)$$

qoldiq hadini barcha $k = 0, 1, \dots, N-1$ lar bo'yicha yig'amiz, natijada

$$R_N^{(0)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^3} \sum_{k=0}^{N-1} f''(\xi_k). \quad (7.2.26)$$

Ravshanki,

$$\min_{a \leq x \leq b} f''(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f''(\xi_k) \leq \max_{a \leq x \leq b} f''(x).$$

Ikkinchi hosilaning uzluksizligidan, Koshi teoremasiga ko'ra shunday ξ ($a \leq \xi \leq b$) mavjudki,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f''(\xi_k) = f''(\xi).$$

Buni (7.2.29) ga olib borib qo'ysak, umumlashgan to'g'ri to'rtburchaklar formulasining qoldiq hadi hosil bo'ladi:

$$R_N^{(1)}(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (7.2.27)$$

Shuningdek, umumlashgan trapetsiyalar formulasini ham chiqarish mumkin. Agar $f(a + kh) = y_k$ deb olsak, umumlashgan trapetsiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} [y_0 + y_N + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{N-1})] \quad (7.2.28)$$

bo'lib, uning qoldiq hadi esa

$$R_N^{(1)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b) \quad (7.2.29)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Umumlashgan Simpson formulasini chiqarish uchun $[a, b]$ oraliqning uzunligi $h = \frac{b-a}{2N}$ ga teng bo'lgan $2N$ ta oraliqchalarga bo'lamiz va uzunligi $2h$ ga teng bo'lgan har bir ikkilangan $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2N-2}, x_{2N}]$, oraliqchalarga Simpson formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \\ &+ \frac{h}{3} (y_{2N-2} + 4y_{2N-1} + y_{2N}). \end{aligned}$$

Bundan esa umumlashgan Simpson formulasi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N} [(y_0 + y_{2N}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2N-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2N-2})] \quad (7.2.30)$$

kelib chiqadi. Yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib, $f(x)$ to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lganda, umumlashgan Simpson formulasining

$$R_N^{(2)}(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{IV}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b) \quad (7.2.31)$$

g'oldiq hadini hosil qilamiz.

Misol tariqasida

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,693147180\dots$$

integralni taqribiy hisoblaylik. Buning uchun umumlashgan to'g'ri to'rtburchak formulasi (7.2.24) da $N = 10$ deb olaylik. Bu yerda $h = \frac{b-a}{N} = 0,1$ bo'lgani uchun $y_{1/2} = \frac{1}{1+(k+0,5) \cdot 0,1}$ bo'lib,

$$\begin{aligned} y_{0,5} &= 0,95238; & y_{1,5} &= 0,86957; & y_{2,5} &= 0,80000; \\ y_{3,5} &= 0,74074; & y_{4,5} &= 0,68966; & y_{5,5} &= 0,64516; \\ y_{6,5} &= 0,60606; & y_{7,5} &= 0,57143; & y_{8,5} &= 0,54054; \\ y_{9,5} &= 0,51282. \end{aligned}$$

Bundan esa umumlashgan to'g'ri to'rtburchak formulasiga ko'ra:

$$I \approx \frac{1}{10} (y_{0,5} + y_{1,5} + \dots + y_{9,5}) = 0,692836.$$

Bu taqribiy qiymat bilan aniq qiymatning farqi $|\ln 2 - 0,692836| < 0,00032$. Demak, $\ln 2 \approx 0,693$, bu raqamlar aniqdir.

Ikkinchi misol sifatida ushbu integral sinusning

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$x = 1$ nuqtadagi qiymatini umumlashgan Simpson formulasi bilan olti xona aniqlikda topish masalasini qaraylik.

Bu yerda berilgan $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-6}$ bo'lib, so'ngra unga ko'ra umumlashgan Simpson formulasi uchun tegishli N ni aniqlash mumkin. Buning uchun $Si(x)$ ning 4-tartibli hosilasini baholash kerak. Ravshanki,

$$\frac{\sin x}{x} \int_0^1 \cos ux du.$$

Bundan

$$\frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \int_0^1 u^4 \cos ux du$$

va

$$\left| \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}.$$

Endi (7.2.31) formulaga ko'ra N quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{1}{2880} \frac{1}{N^4} \cdot \frac{1}{5} \leq 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Bundan esa $N \geq 5$ ekanligini topamiz. Shuning uchun ham $N = 5$ uchun $Si(1)$ ni umumlashgan Simpson formulasi bo'yicha hisoblaymiz. Jadvaldan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1; & y_1 &= 0,998330; & y_2 &= 0,993345; & y_3 &= 0,985067; \\ y_4 &= 0,973545; & y_5 &= 0,958852; & y_6 &= 0,941070; & y_7 &= 0,920311; \\ y_8 &= 0,896695; & y_9 &= 0,870363; & y_{10} &= 0,841471. \end{aligned}$$

Nihoyat,

$$Si(1) \approx \frac{1}{30} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_8)] = 0,946082.$$

Aslida $Si(1)$ ning olti xona aniqlikdagi qiymati $Si(1) = 0,946083$. Topilgan qiymat bilan aniq qiymat orasidagi oxirgi xona birligidagi farq yaxlitlash xatosi hisobidan kelib chiqqan.

7.3-§. Algebraik aniqlik darajasi eng yuqori bo'lgan formulalar

7.3.1 Gauss tipidagi kvadratur formulalar

Oldingi paragrafda n nuqtali interpolatsion formula

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.3.1)$$

ning tugun nuqtalari $[a, b]$ oraliqda qanday joylashganliklaridan qat'i nazar, $(n-1)$ -darajali ko'phadlarni aniq integrallashligini ko'rgan edik. Chekli $[a, b]$ oraliq va $\rho(x) \approx 1$ uchun Gauss quyidagi masalani qaragan edi: $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlar shunday tanlansinki, (7.3.1) formula mumkin qadar darajasi eng yuqori bo'lgan ko'phadlarni aniq integrallasin. (7.3.1) formulada n ta parametr tugunlarni maxsus ravishda tanlash yo'li bilan uning aniqlik darajasini n birlikka orttirishini kutish mumkin. Haqiqatan ham $x_1, x_2, \dots, x_n$ tugunlarni maxsus ravishda tanlash orqali (7.3.1) formulaning darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko'phadlar uchun aniq bo'lishiga erishish mumkinligini Gauss ko'rsatdi. Keyinchalik Gaussning natijasi ixtiyoriy oraliq va vazn funksiyalari uchun unumlashtirildi. Bunday formulalar *Gauss tipidagi kvadratur formulalar* deyiladi.

Qulaylik uchun x_k tugunlar o'rniga $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ ko'phad bilan ish ko'ramiz. Agar x_k lar ma'lum bo'lsa, u holda $\omega_n(x)$ ham ma'lum bo'ladi va aksincha. Lekin x_k larni topishni $\omega_n(x)$ ni topish bilan almashtirsak, u holda biz $\omega_n(x)$ ni ildizlari haqiqiy, har xil va ularning $[a, b]$ oraliqda yotishini ko'rsatishimiz shart.

Teorema 7.3. (7.3.1) kvadratur formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallashi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir: 1) u interpolatsion va 2) $\omega_n(x)$ ko'phad $[a, b]$ oraliqda $\rho(x)$ vazn bilan darajasi n dan kichik bo'lgan barcha $Q(x)$ ko'phadlarga ortogonal bo'lishi kerak:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = 0. \quad (7.3.2)$$

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, (7.3.1) formula darajasi $2n-1$ dan ortmaydigan barcha ko'phadlarni aniq integrallasin. U holda teorema 7.1

ga ko'ra u interpolatsiondir. Endi darajasi n dan kichik bo'lgan ixtiyoriy $Q(x)$ ko'phadni olib, $f(x) = \omega_n(x)Q(x)$ deb olamiz. Ko'rinib turibdiki, $f(x)$ darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan ko'phad. Shuning uchun ham uni (7.3.1) formula aniq integrallaydi:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_n(x_k) Q(x_k).$$

Bu yerda, $\omega_n(x_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) ni hisobga olsak, (7.3.2) tenglik kelib chiqadi.

Yetarliligi: Faraz qilaylik (7.3.1) formula interpolatsion va $\omega_n(x)$ ko'phad darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlarga $\rho(x)$ vazn bilan ortogonal bo'lsin. Endi (7.3.1) formula darajasi $2n - 1$ dan ortmaydigan barcha $f(x)$ ko'phadlarni aniq integrallashini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $f(x)$ ni $\omega_n(x)$ ga bo'lib,

$$f(x) = \omega_n(x)Q(x) + r(x) \quad (7.3.3)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $Q(x)$ va $r(x)$ larni darajalari n dan kichik. Bu tenglikning har ikkala tomonini $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) \omega_n(x) Q(x) dx + \int_a^b \rho(x) r(x) dx.$$

Teorema shartiga ko'ra o'ng tomondagi birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral esa

$$\int_a^b \rho(x) r(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$$

chunki $r(x)$ darajasi n dan kichik ko'phad va (7.3.1) formula interpolatsiondir. Demak,

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k).$$

Lekin (7.3.3) ga ko'ra $r(x_k) = f(x_k)$. Shuning uchun

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Shu bilan teoremaning yetarli sharti ham isbot bo'ldi. ■

$\omega_n(x)$ ko'phad $\rho(x)$ vazn bilan $[a, b]$ oraliqda darajasi n dan kichik bo'lgan barcha ko'phadlar bilan ortogonal va bosh koeffitsiyenti birga teng bo'lganligi uchun, 6-bob natijalariga ko'ra, bunday $\omega_n(x)$ ko'phad yagona hamda uning ildizlari haqiqiy, har xil va $[a, b]$ oraliqda yotadi.

Demak, agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda har bir $n = 1, 2, \dots$, uchun $2n - 1$ darajali ko'phadni aniq integrallaydigan yagona (7.3.1) kvadratur formula mavjud. Quyidagi teorema (7.3.1) formulaning eng yuqori aniqlik darajasi $2n - 1$ ekanligini ko'rsatadi.

Teorema 7.4. *Agar $\rho(x)$ vazn $[a, b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasa, u holda x_k va A_k lar har qanday tanlanganda ham (7.3.1) tenglik $2n$ darajali barcha ko'phadlar uchun aniq bo'la olmaydi.*

Isbot. Kvadratur formulaning tugunlarini $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar orqali belgilab, quyidagi

$$f(x) = \omega_n^2(x) = [(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)]^2$$

$2n$ - darajali ko'phadni qaraymiz.

Ko'rinib turibdiki, (7.3.1) formula bu ko'phad uchun aniq emas, chunki

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx > 0$$

va ixtiyoriy A_k koeffitsiyentlar uchun

$$\sum_{k=1}^n A_k \omega_n^2(x_k) = 0.$$

7.3.2 Gauss tipidagi kvadratur formula koeffitsiyentlarining xossasi

Gauss tipidagi kvadratur formulaning barcha koeffitsiyentlari A_k musbatdir. Haqiqatdan ham, $2n - 2$ darajali

$$f(x) = \varphi_{k,n}^2(x) = \left[\frac{\omega_n(x)}{x - x_k} \right]^2$$

ko'phad uchun quyidagi

$$\varphi_{k,n}(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{agar } j \neq k, \\ \omega'_n(x_k), & \text{agar } j = k \end{cases}$$

tengliklar bajarilishi ayondir. Bu ko'phad uchun Gauss tipidagi formula aniqdir:

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx = A_k [\omega'_n(x_k)]^2.$$

Bundan:

$$A_k = \frac{\int_a^b \rho(x) \varphi_{k,n}^2(x) dx}{[\omega'_n(x_k)]^2}. \quad (7.3.4)$$

O'z navbatida bundan barcha A_k larning musbatligi kelib chiqadi.

7.3.3 Gauss tipidagi kvadratur formulalarning qoldiq hadi

Teorema 7.5. Agar $[a, b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya $2n$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladiki, Gauss tipidagi kvadratur formulaning qoldiq hadi

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx. \quad (7.3.5)$$

Isbot. Ushbu

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i) \quad (i = \overline{1, n})$$

shartlarni qanoatlantiruvchi Ermit interpolatsion ko'phadi $H(x)$ ni tuza-miz. 5-bob 5.13 - § dagi formulaga ko'ra, Ermit interpolatsion formulasi qoldiq hadi bilan birga quyidagicha yoziladi:

$$f(x) = H(x) + \frac{\omega_n^2(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad (7.3.6)$$

bu yerda η x ga bog'liq bo'lib, x va interpoliyatsiya tugunlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ joylashgan oraliqda yotadi. Agar $\xi \in [a, b]$ ni hisobga olsak, u holda $\eta \in [a, b]$. Endi (7.3.6) ning har ikki tomonini $\rho(x)$ ga ko'paytirib, a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) H(x) dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) f^{(2n)}(\eta) dx. \quad (7.3.7)$$

Oxirgi integralning mavjudligi qolgan ikki integrallarning mavjudligidan kelib chiqadi. $H(x)$ ko'phadning darajasi $2n - 1$ bo'lgani uchun, o'ng tomondagi birinchi integralni

$$\sum_{k=1}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

kvadratur yig'indi bilan almashtirish mumkin:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) f^{(2n)}(\eta) dx.$$

Bundan ko'rinadiki,

$$R_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) f^{(2n)}(\eta) dx.$$

Endi $\rho(x) \omega_n^2(x) \geq 0$ ekanligini nazarda tutib, o'rta qiymat haqidagi umumlashgan teoremani qo'llasak, qoldiq had uchun (7.3.5) formula kelib chiqadi. ■

7.3.4 Gauss tipidagi kvadratur formulalarning yaqinlashishi

Yuqorida, $\rho(x) \geq 0$ bo'lsa, barcha $n = 1, 2, \dots$ uchun Gauss tipidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f)$$

kvadratur formulaning mavjud bo'lishini ko'rib o'tdik.

Ta'rif 7.3. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

tenglik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya uchun kvadratur formula yaqinlashadi deyiladi.

Teorema 7.6. Agar $[a, b]$ oraliq chekli va $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda Gauss tipidagi kvadratur formula yaqinlashadi.

Isbot. $n \rightarrow \infty$ da

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \rightarrow 0$$

ekanligini isbotlash kerak. $[a, b]$ oraliq chekli va bu oraliqda $f(x)$ uzluksiz bo'lganligidan Veyershtass teoremasiga ko'ra berilgan har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $P(x)$ ko'phad mavjudki, ixtiyoriy $x \in [a, b]$ uchun

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (7.3.8)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $R_n(f)$ ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b \rho(x)(f(x) - P(x))dx + \left[\int_a^b \rho(x)P(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})). \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Kvadrat qavslardagi ifoda $P(x)$ ko'phad uchun kvadratur formulaning $R_n(f)$ qoldig'idan iboratdir. Agar bu ko'phadning darajasini N orqali belgilasak, u holda $2n - 1 > N$ bo'lganda $R_n(P) = 0$ bo'ladi. Endi (7.3.9) dagi qolgan ifodalar (7.3.8) tengsizlikka ko'ra quyidagicha baholanadi:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \rho(x)(f(x) - P(x))dx \right| &\leq \varepsilon \int_a^b \rho(x)dx, \\ \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} (P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})) \right| &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b \rho(x)dx. \end{aligned}$$

Demak, $2n - 1 > N$ bo'lganda

$$|R_n(f)| \leq 2\varepsilon \int_a^b \rho(x) dx$$

bo'ladi. Shu bilan teorema isbotlandi. ■

Umumiy ko'rinishdagi (Gauss tipidagiga emas) kvadratur formulalar ketma-ketligini

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f)$$

qaraymiz. Bu yerda $[a, b]$ oraliq chekli va bu oraliqda $\rho(x)$ vazn integralanuvchi ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Bu kvadratur formula uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema 7.7. $f(x)$ $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiya bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx \quad (7.3.10)$$

tenglikning bajarilishi uchun quyidagi ikki shartning bajarilishi zarur va yetarlidir:

- 1) $f(x)$ ixtiyoriy ko'phad bo'lganda, (7.3.10) tenglik o'rinli.
- 2) Shunday L son mavjudki, uning uchun:

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq L \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Agar kvadratur formula interpolatsion, uning $A_k^{(n)}$ koeffitsiyentlari barcha k va n lar uchun musbat bo'lsa, u holda teorema shartlari bajariladi. Shunday qilib, teorema 7.6 teorema 7.7 ning xususiy holidir.

7.4-§. Davriy funksiyalarni integrallash

Bu paragrafda 2π davrli $f(x)$ funksiyalarni taqribiy integrallash masalasini ko'ramiz. Bu yerda tabiiyki, kvadratur formulaning aniqlik darajasi algebraik ko'phadga nisbatan emas, balki trigonometrik ko'phadga nisbatan qaratiladi.

Agar ushbu kvadratur formula

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (x_k^{(n)} \in [0, 2\pi]) \quad (7.4.1)$$

ixtiyoriy $m - 1$ - tartibli trigonometrik ko'phadlar uchun aniq bo'lib, birorta m - tartibli trigonometrik ko'phad uchun aniq bo'lmasa, u holda bu formulaning trigonometrik aniqlik tartibi $m - 1$ ga teng deyiladi.

Teorema 7.8. n tugunli kvadratur formulalar to'plamida $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ tugunlari $[0, 2\pi]$ oraliqda tekis joylashgan va koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lgan kvadratur formula eng yuqori trigonometrik aniqlik tartibiga ega bo'lib, bu tartib $n - 1$ ga teng.

Isbot. Avvalo, (7.4.1) ko'rinishdagi ixtiyoriy kvadratur formulaning aniqlik darajasi $n - 1$ dan ortmasligini ko'rsatamiz. Kvadratur formulaning $x_k^{(n)}$ tugun nuqtalaridan foydalanib,

$$f(x) = \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k^{(n)}}{2}$$

funksiyani tuzaylik. Har bir ko'payuvchi

$$\sin^2 \frac{x - x_k^{(n)}}{2} = \frac{1}{2} [1 - \cos x_k^{(n)} \cos x - \sin x_k^{(n)} \sin x]$$

birinchi tartibli trigonometrik ko'phad bo'lgani uchun, $f(x)$ n - tartibli trigonometrik ko'phaddir. Bu ko'phad uchun (7.4.1) formula aniq emas, chunki

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{x - x_k^{(n)}}{2} dx > 0$$

va

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = 0.$$

Demak, n tugunli ixtiyoriy kvadratur formulaning trigonometrik aniqlik tartibi $n - 1$ dan ortmaydi. Endi ixtiyoriy $\alpha \in [0, \frac{2\pi}{n}]$ uchun ushbu

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n f\left[\alpha + (j-1) \frac{2\pi}{n}\right] \quad (7.4.2)$$

kvadratur formulaning barcha

$$f(x) = \cos kx, \sin kx \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

funksiyalar uchun aniq ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun uning barcha

$$f(x) = e^{ikx} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

funksiyalar uchun aniq ekanini ko'rsatish kifoyadir. Agar $k = 0$ bo'lsa, $f(x) = 1$ bo'lib, (7.4.2) formulaning aniq ekani ravshandir. Endi $0 < k < n-1$ bo'lsin. U holda

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \left. \frac{1}{k} e^{ikx} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Shu bilan bir vaqtda kvadratur yig'indi ham nolga teng:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(x_j) &= \sum_{j=1}^n e^{ik(\alpha + (j-1)\frac{2\pi}{n})} = e^{ik\alpha} \sum_{j=1}^n e^{ik(j-1)\frac{2\pi}{n}} = \\ &= e^{ik\alpha} \frac{e^{ik\frac{2\pi}{n}n} - 1}{e^{ik\frac{2\pi}{n}} - 1} = e^{ik\alpha} \frac{e^{2\pi ki} - 1}{e^{ik\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (7.4.2) formulaning trigonometrik aniqlik tartibiga teng ekan.

Ixtiyoriy $\alpha \in [0, \frac{T}{n}]$ uchun

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx \approx \frac{T}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\alpha + (k-1)\frac{T}{n}\right) \quad (7.4.3)$$

kvadratur formulaning $(n-1)$ - tartibli ixtiyoriy

$$T_{n-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{T} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kx \right)$$

trigonometrik ko'phad uchun aniq tenglikka aylanishini ko'rsatish qiyin emas. ■

Misol 7.1. Misol sifatida ushbu

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

to'liq elliptik integralning $k = 0,5$ dagi qiymatini to'rt xona aniqligida hisoblaylik.

Yechish: Integral ostidagi funksiya juft va π davrli bo'lgani sababli $K(0,5)$ ni

$$K(0,5) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 0,25 \sin^2 \varphi}}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu integralni hisoblash uchun (7.4.3) da $T = \pi$ deb olamiz. Endi $n = 6$ deb olib, tugunlarni $\varphi = 0$ nuqtaga nisbatan simmetrik ravishda joylashtiramiz:

$$\varphi_{\pm 1} = \pm \frac{\pi}{12}, \varphi_{\pm 2} = \pm \frac{\pi}{4}, \varphi_{23} = \pm \frac{5\pi}{12}.$$

U holda

$$\begin{aligned} K(0,5) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2 \left[f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{6} \left[\frac{1}{\sqrt{0,9983}} + \frac{1}{\sqrt{0,8750}} + \frac{1}{\sqrt{0,7668}} \right] = \\ &= \frac{\pi}{6} (1,0009 + 1,0691 + 1,1419) = 1,6816. \end{aligned}$$

$K(0,5)$ ning jadvaldagi qiymati 1,6858. Demak, xato 0,0042 ga teng.

7.5-§. Gauss tipidagi kvadratur formulaning xususiy hollari

7.5.1 Gauss kvadratur formulasi

Gauss kvadrat formulasi Gauss tipidagi kvadratur formulalarning xususiy holi bo'lib, bu holda $\rho(x) \equiv 1$ va $[a, b]$ oraliq cheklidir. Ixtiyoriy oraliqni chiziqli almashtirish yordamida $[-1, 1]$ ga keltirish mumkin, shuning uchun ham integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

ko'rinishga keltirilgan deb faraz qilamiz.

Ma'lumki, $[-1, 1]$ oraliqda $\rho(x) \equiv 1$ vazn bilan ortogonal bo'lgan funksiyalar sistemasini Lejandr ko'phadlari

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (7.5.1)$$

tashkil etadi. Bu ko'phadlarning ortogonal sistema tashkil etishi 6-bobda ta'kidlangan edi. Lekin buni bevosita tekshirish ham mumkin. Ixtiyoriy $k \leq n$ uchun, bo'laklab integrallash yo'li bilan ushbuga ega bo'lamiz:

$$S_k = \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = \left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 - k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.$$

O'ng tomondagi birinchi had nolga teng, shuning uchun:

$$S_k = -k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.$$

Shunga o'xshash

$$\begin{aligned} S_k &= (-k)(-k+1) \int_{-1}^1 x^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n dx = \dots = \\ &= (-1)^k 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

Bundan ko'rinadiki, ixtiyoriy $k = 0, 1, \dots, n-1$ uchun $S_k = 0$ bo'lib, $L_n(x)$ ortogonal sistemani tashkil etadi. $L_n(x)$ ko'phad $\omega_n(x)$ dan faqat doimiy ko'paytuvchi bilan farq qiladi. (7.5.1) formuladan:

$$L_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \dots \quad (7.5.2)$$

Demak,

$$\omega_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} L_n(x) \quad (7.5.3)$$

kelib chiqadi. Endi (7.5.2) ni hisobga olib, bo'laklab integrallash yo'li bilan (S_k ni hisoblashdagidek)

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = 2 \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$$

ni hosil qilamiz. Ma'lumki,

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Demak,

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (7.5.4)$$

Bizga $L_n(1)$ va $L_n(-1)$ ning qiymatlari kerak bo'ladi. Buni topish uchun Leybnits formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n] = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x+1)^n \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^n = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{k!} (x+1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n [C_n^k]^2 (x+1)^k (x-1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Bundan esa xususiyl holda

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n \quad (7.5.5)$$

ga ega bo'lamiz.

Endi Gauss kvadratur formulasining

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.5.6)$$

tugunlari va koeffitsiyentlarini aniqlashga o'tamiz. Tugunlarni topish uchun

$$L_n(x) = 0$$

algebraik tenglamaning barcha ildizlarini aniqlash kerak. Tugunlar aniqlangandan so'ng koeffitsiyentlarni

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{L_n(x)}{(x-x_k) L_n'(x_k)} dx$$

yordamida aniqlash mumkin. Lekin bu formula hisoblash uchun noqulay, shuning uchun ham boshqa yo'l tutamiz. Buning uchun (7.5.6) formulani shunday ko'phadga qo'llaymizki, o'ng tomonda faqat birgina had qolsin. Masalan,

$$f(x) = 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)$$

kabi olsak, bu yerda

$$L_{n,k}(x) = \frac{L_n(x)}{x - x_k} = C \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - x_j),$$

u holda

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)dx &= L_{n,k}^2(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{L_n^2(1)}{(1-x_k)^2} - \frac{L_n^2(-1)}{(1+x_k)^2} = \\ &= \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2} L_n^2(1) = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2}, \quad (7.5.7) \end{aligned}$$

chunki (7.5.5) ga ko'ra $L_n^2(1) = L_n^2(-1) = 1$. Ikkinchi tomondan, (7.5.6) ga ko'ra

$$\int_{-1}^1 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)dx = 2A_k L_{n,k}(x_k) L'_{n,k}(x_k) \quad (7.5.8)$$

chunki (7.5.6) dagi qolgan hadlar nolga aylanadi. Quyidagi tenglikni

$$(x - x_k) L_{n,k}(x) = L_n(x)$$

ikki marta differensiallab, $x = x_k$ deb olsak,

$$L_{n,k}(x_k) = L'_n(x_k), \quad 2L'_{n,k}(x_k) = L''_n(x_k)$$

ga ega bo'lamiz. Bu qiymatlarni (7.5.8) ga qo'yib, so'ngra uni (7.5.7) bilan taqqoslab, quyidagini topamiz:

$$A_k = \frac{4x_k}{(1-x_k^2)^2} \cdot \frac{1}{L'_n(x_k) L''_n(x_k)}. \quad (7.5.9)$$

Ma'lumki, Lejandr ko'phadi $L_n(x)$ ushbu

$$(x^2 - 1) L''_n(x) + 2x L'_n(x) - n(n+1) L_n(x) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Buni bevosita tekshirib ko'rish mumkin. Bu tenglamada $x = x_k$ deb va $L_n(x_k) = 0$ ni hisobga olsak

$$(x_k^2 - 1) L_n''(x_k) + 2x_k L_n'(x_k) = 0$$

kelib chiqadi. Bundan esa

$$L_n''(x_k) = \frac{2x_k L_n'(x_k)}{1 - x_k^2}.$$

Bu ifodani (7.5.9) ga qo'yib, A_k uchun kerakli formulaga ega bo'lamiz:

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) [L_n'(x_k)]^2}.$$

Endi Gauss formulasining qoldiq hadini aniqlaylik. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[-1, 1]$ oraliqda $2n$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. U holda 7.3-§ dagi teorema 7.5 ga ko'ra

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \omega_n^2(x) dx.$$

Bu yerda (7.5.3) va (7.5.4) formulalarga ko'ra

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{2^{2n} (n!)^4}{[(2n)!]^2} L_n^2(x) dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^4}{[(2n)!]^2} \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

Shunday qilib, Gauss formulasining qoldiq hadi

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi)$$

bo'ladi.

Quyida Gauss formulasining tugunlari, koeffitsiyentlari va qoldiq hadlari $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ uchun keltirilgan:

$$n = 1$$

$$x_1 = 0, A_1 = 2, R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi);$$

$$n = 2$$

$$-x_1 = x_2 = 0,5773502692, A_1 = A_2 = 1,$$

$$R_2 = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi);$$

$$n = 3$$

$$-x_1 = x_3 = 0,7745966692, x_2 = 0,$$

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}, R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi);$$

$$n = 4$$

$$-x_1 = x_4 = 0,8611363116, -x_2 = x_3 = 0,3399810436;$$

$$A_1 = A_4 = 0,3478548451, A_2 = A_3 = 0,6521451549,$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi);$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0,9061798459,$$

$$-x_2 = x_4 = 0,5384693101, x_3 = 0$$

$$A_1 = A_5 = 0,2369268851,$$

$$A_2 = A_4 = 0,4786286705,$$

$$A_3 = 0,5688888889,$$

$$n = 6$$

$$R_3 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi);$$

$$-x_1 = x_6 = 0,9324695142,$$

$$-x_2 = x_5 = 0,6612093865,$$

$$-x_3 = x_4 = 0,2386191861,$$

$$A_1 = A_6 = 0,1713244924,$$

$$A_2 = A_5 = 0,3607615730,$$

$$A_3 = A_4 = 0,4679139446,$$

$$R_6 = \frac{1}{648984786150} f^{(12)}(\xi).$$

V.I. Krilovning [23] kitobida Gauss formulasining tugunlari va koefitsiyentlari $n = 1(1)16$ uchun o'n beshta o'ali raqami bilan berilgan. Iltijoz: riy $[a, b]$ oraliq bo'yicha olingan

$$\int_a^b f(t) dt$$

integralni

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

almashtirish yordamida $[-1, 1]$ oraliqqa keltirish mumkin:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

Bu integralga Gauss formulasini qo'llasak,

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(t_k)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$t_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}$$

x_k va A_k lar $[-1, 1]$ uchun qurilgan Gauss formulasining tugunlari va koefitsiyentlaridir.

Misol 7.2. Gauss formulasini yordamida ushbu

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.78539816 \dots$$

integralni hisoblaymiz.

Yechish: Aravak $t = \frac{x+1}{2}$ almashtirishda yordamida

$$I = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{1+(1+t)^2}$$

ko'rinishga keltiramiz, so'ngra $n = 4$ deb hisoblashlarni olti xona aniqlikda bajaramiz:

$$I = 2 \left[0,347855 \left(\frac{1}{4 + 0,138864^2} + \frac{1}{4 + 1,861136^2} \right) + \right. \\ \left. + 0,652145 \left(\frac{1}{4 + 0,660019^2} + \frac{1}{4 + 1,339981^2} \right) \right] = 0,785403. \quad \blacksquare$$

7.5.2 Meler kvadratur formulasi

Endi $[-1, 1]$ oraliqda

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.5.10)$$

vazn bilan kvadratur formula quraylik. $[-1, 1]$ oraliqda (7.5.10) vazn bilan ortogonal bo'lgan ko'phad

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Chebyshev ko'phadlari ekanligi ma'lumdir. Buni tekshirish uchun

$$I_m = \int_{-1}^1 \frac{x^m \cos n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

integrachda $x = \cos \theta$ almashtirish bajaramiz:

$$I_m = \int_0^\pi \cos^m \theta \cos n\theta d\theta.$$

Ma'lumki,

$$\cos^m \theta = \sum_{k=0}^m a_k \cos k\theta$$

va barcha $k = 0, 1, \dots, n-1$ uchun

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cos n\theta d\theta = 0.$$

Bulardan esa $I_m = 0$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

kvadratur formulaning tugunlari $T_n(x) = 0$ tenglamaning

$$x_{n+1-k} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ildizlaridan iboratdir. Bu formulaning koeffitsiyentlarini esa

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{T_n(x)}{x-x_k} dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu integralni hisoblash uchun $x = \cos \theta$ almashtirish bajaramiz:

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta. \quad (7.5.11)$$

Integral osti funksiyasining juftligi tufayli:

$$A_k = \frac{1}{2T'_n(x_k)} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta.$$

Integral ostidagi funksiya $(n-1)$ -tartibli trigonometrik ko'phaddir. Biz 7.4-§ da bunday ko'phadni $2n$ nuqtali to'g'ri to'rtburchaklar formulasi aniq integrallashini ko'rsatgan edik. (7.5.11) integralni hisoblash uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasida quyidagi nuqtalarni

$$\theta_j = \frac{2j-1}{2n} \pi, j = -n+1, -n+2, \dots, 0, 1, 2, \dots, n$$

olsak, A_k ning aniq qiymatiga ega bo'lamiz. Ravshanki integral ostidagi funksiya

$$f(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k}$$

$$-x_1 = x_3 = 0, 7745966692, x_2 = 0,$$

$$A_1 = A_3 = \frac{5}{9}, A_2 = \frac{8}{9}, R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi);$$

$$n = 4$$

$$-x_1 = x_4 = 0, 8611363116, -x_2 = x_3 = 0, 3399810436;$$

$$A_1 = A_4 = 0, 3478548451, A_2 = A_3 = 0, 6521451549,$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi);$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0, 9061798459,$$

$$-x_2 = x_4 = 0, 5384693101, x_3 = 0$$

$$A_1 = A_5 = 0, 2369268851,$$

$$A_2 = A_4 = 0, 4786286705,$$

$$A_3 = 0, 5688888889,$$

$$n = 6$$

$$R_3 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi);$$

$$-x_1 = x_6 = 0, 9324695142,$$

$$-x_2 = x_5 = 0, 6612093865,$$

$$-x_3 = x_4 = 0, 2386191861,$$

$$A_1 = A_6 = 0, 1713244924,$$

$$A_2 = A_5 = 0, 3607615730,$$

$$A_3 = A_4 = 0, 4679139446,$$

$$R_6 = \frac{1}{648984786150} f^{(12)}(\xi).$$

$$\int_a^b f(t)dt$$

integralni

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

almashtirish yordamida $[-1, 1]$ oraliqqa keltirish mumkin:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

Bu integralga Gauss formulasini qo'llasak,

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f(t_k)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$t_k = \frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}$$

x_k va A_k lar $[-1, 1]$ uchun qurilgan Gauss formulasining tugunlari va koefitsiyentlaridir.

Misol 7.2. Gauss formulasi yordamida ushbu

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0,78539816 \dots$$

integralni hisoblang.

Yechish: Avvalo $t = \frac{x+1}{2}$ almashtirish yordamida

$$I = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{4 + (1+x)^2}$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875} f^{(8)}(\xi);$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0,9061798459,$$

$$-x_2 = x_4 = 0,5384693101, x_3 = 0$$

$$A_1 = A_5 = 0,2369268851,$$

$$A_2 = A_4 = 0,4786286705,$$

$$A_3 = 0,5688888889,$$

$$n = 6$$

$$R_3 = \frac{1}{1237732650} f^{(10)}(\xi);$$

$$-x_1 = x_6 = 0,9324695142,$$

$$-x_2 = x_5 = 0,6612093865,$$

$$-x_3 = x_4 = 0,2386191861,$$

$$A_1 = A_6 = 0,1713244924,$$

$$A_2 = A_5 = 0,3607615730,$$

$$A_3 = A_4 = 0,4679139446,$$

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt$$

Bu integralga Gauss formulasini qo'lla

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{3} f'\left(\frac{b-a}{2}\right) \right]$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$t_k = \frac{b-a}{2} x_k$$

x_k va A_k lar $[-1, 1]$ uchun qurilgan Gauss koefitsiyentlaridir.

Misol 7.2. Gauss formulasi yordamida

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

integralni hisoblang.

Yechish: Avvalo $t = \frac{x+1}{2}$ almash

$$\int_0^1$$

ning $\theta = \theta_j$ ($j = \overline{1, n}$) nuqtadagi qiymati $j \neq k$ bo'lganda nolga teng bo'lib, $j = k$ bo'lganda $T'_n(x_k)$ ga teng. Bundan tashqari $f(\theta)$ juft funksiya va $\theta_{-j+1} = -\theta_j$, shuning uchun ham $f(\theta_{-j+1}) = f(\theta_j)$. Demak,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - x_k} d\theta &= \frac{2\pi}{2n} \left[f\left(-\frac{2n-1}{2n}\pi\right) + f\left(-\frac{2n-3}{2n}\pi\right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f\left(\frac{2n-3}{2n}\pi\right) + f\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{n} \left[f\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + f\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \right] = \frac{2\pi T'_n(x_k)}{n}. \end{aligned}$$

Buni (5.11) ga qo'yib,

$$A_k = \frac{1}{2T'_n(x_k)} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot T'_n(x_k) = \frac{\pi}{n}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz quyidagi Meler kvadratur formulasiga ega bo'ldik:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Bu formula ba'zan *Ermit formulasi* ham deyiladi, bu formulani Ermit o'zining analiz kursiga kiritgan edi.

Bu formulaning qoldiq hadini qaraylik. 4-bobda ko'rgan edikki,

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + ax^{n-1} + \dots$$

Shuning uchun ham $\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ va

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} T_n^2(x) dx.$$

Quyidagiga ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Shunday qilib,

$$R_n(f) = \frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Boshqa har xil vazn funksiyali Gauss tipidagi kvadratur formulalar haqida bobning oxiridagi mashqlardan qarang.

7.6-§. Chebishev kvadratur formulasi

Biz oldingi paragrafda Meler kvadratur formulasini hosil qildik. Bu formula shu bilan xarakterlanadiki, $f(x_k)$ oldidagi barcha koeffitsiyentlar o'zaro teng. Agar $f(x_k)$ ning qiymatlari tasodifiy xatolarga moyil bo'lsa, u holda bunday formulalar katta ahamiyatga ega bo'ladi. Chunki belgilangan

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n \text{ uchun} \\ c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n)$$

ifoda $c_1 = c_2 = \dots = c_n$ bo'lganda eng kichik tasodifiy xatoga ega bo'ladi. Shu munosabat bilan P.L.Chebishev teng koeffitsiyentli

$$\int_{-1}^1 \rho(x) f(x) dx = c_n \sum_{k=1}^n f(x_k) + R_n(f) \quad (7.6.1)$$

kvadratur formula tuzish masalasini qo'ygan edi. Bu kvadratur formula-ning o'ng tomonida $n+1$ ta parametr: n ta x_k tugunlar va c_n koeffitsiyent qatnashadi. Bu parametrlarni tegishli usulda tanlash yo'li bilan (7.6.1) formulani n -darajali $f(x)$ ko'phadni aniq integrallaydigan qilib qurishga imkoniyat borligiga umid qilish mumkin. Biz keyinchalik (7.6.1) formulaning har doim ham mavjud bo'lavermasligini ko'ramiz. 7.4-§ dagidek bu yerda ham $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni topish o'rniga

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

ko'phadni izlaymiz. (7.6.1) formulada

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

deb olamiz, bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ - ixtiyoriy haqiqiy sonlar. Shartga ko'ra bu funksiya uchun $R_n(f) = 0$, shuning uchun ham quyidagi tenglikka ega

bo'lamiz:

$$\begin{aligned} a_0 \int_{-1}^1 \rho(x) dx + a_1 \int_{-1}^1 \rho(x) x dx + \dots + a_n \int_{-1}^1 \rho(x) x^n dx = \\ = c_n [na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \\ + \dots + a_n(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n)]. \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

Quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$m_k = \int_{-1}^1 \rho(x) x^k dx.$$

(7.6.2) tenglikdan a_i larning ixtiyoriyligini hisobga olsak,

$$\begin{aligned} nc_n &= m_0, \\ c_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= m_1, \\ c_n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) &= m_2, \\ &\vdots \\ c_n(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) &= m_n \end{aligned}$$

tengliklar kelib chiqadi. Birinchi tenglikdan $c_n = \frac{1}{n}m_0$ ni topamiz. So'ng $s_k = \frac{m_k}{c_n}$ belgilash kiritib, $x_1, x_1, \dots, x_n$ larni topish uchun quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = s_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = s_2, \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = s_n. \end{cases} \quad (7.6.3)$$

Biz 3-bobda

$$\omega_n(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

ko'phadning koeffitsiyentlari bilan uning ildizlaridan tuzilgan $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ simmetrik funksiyalarni o'zaro bog'laydigan

$$\begin{cases} s_1 + A_1 = 0, \\ s_2 + A_1 s_1 + 2A_2 = 0, \\ \vdots \\ s_n + A_1 s_{n-1} + A_2 s_{n-2} + \dots + nA_n = 0. \end{cases}$$

Nyuton formulalarini chiqargan edik. Bu formulalardan ketma-ket $A_1, A_2, \dots, A_n$ larni aniqlaymiz.

Endi $\rho(x) \equiv 1$ bo'lgan Chebishev formulasining xususiy holini qaraymiz. Bu holda $c_n = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{n}$,

$$s_k = \frac{n}{2} \int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{2(k+1)} \cdot n \quad (k = \overline{1, n})$$

bo'ladi. Chebishev $n = 1(1)7$ lar uchun

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (7.6.4)$$

kvadratur formulaning tugunlarini topgan edi. Keyinchalik ma'lum bo'ldiki, $n = 8$ bo'lganda $\omega(x)$ ko'phad ildizlarining orasida komplekslari ham mavjud ekan, $n = 9$ bo'lganda barcha ildizlar yana haqiqiydir.

Quyida $n = 1(1)7$ va $n = 9$ uchun Chebishevning kvadratur formulasining tugunlari keltirilgan:

$$n = 1$$

$$x_1 = 0;$$

$$n = 2$$

$$-x_1 = x_2 = 0,5773502691;$$

$$n = 3$$

$$-x_1 = x_3 = 0,7071067812, \quad x_2 = 0;$$

$$n = 4$$

$$-x_1 = x_4 = 0,7946544723, \quad -x_2 = x_3 = 0,1875924741;$$

$$n = 5$$

$$-x_1 = x_5 = 0,8324974870, \quad -x_2 = x_4 = 0,3745414096, \quad x_3 = 0;$$

$$n = 6$$

$$\begin{aligned}
-x_1 &= x_6 = 0,8662468181, & -x_2 &= x_5 = 0,4225186538, \\
-x_3 &= x_4 = 0,2666354015; \\
n &= 7 \\
-x_1 &= x_7 = 0,8838617008, & -x_2 &= x_6 = 0,5296567753, \\
-x_3 &= x_5 = 0,3239118105, & x_4 &= 0; \\
n &= 9 \\
-x_1 &= x_9 = 0,9115893077, & -x_2 &= x_8 = 0,6010186554, \\
-x_3 &= x_7 = 0,5287617831, \\
-x_4 &= x_6 = 0,1679061842, & x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Ta'rif 7.4. Agar (7.6.3)- tenglamalar sistemasi barcha n natural sonlar uchun haqiqiy yechimga ega bo'lsa, u holda $\rho(x)$ vazn funksiyasi Chebishev kvadraturasiga joiz deyiladi.

Teorema 7.9. (S.N. Bernshteyn teoremasi). Barcha $n \geq 10$ uchun (7.6.1) Chebishev kvadratur formulasida x_k absissalar orasida komplekslari mavjud, ya'ni $\rho(x) \equiv 1$ Chebishev kvadratur formulasiga joiz emas.

Uzoq muddat davomida $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dan farqli Chebishev kvadraturasiga joiz vaznni qidirish ishlari ijobiy natijaga olib kelmagan edi, ya'ni tekshiriladigan vaznlar uchun (7.6.3) - sistema n ning biror qiymatidan boshlab kompleks ildizlarga ega edi.

1966-yilda amerikalik matematik I.L. Almen birinchi ijobiy natija oldi. Kutilgandan ham ortiq, u Chebishev kvadraturasiga joiz bo'lgan vazn funksiyalarining butun bir oilasi mavjudligini isbotladi. Aniqrog'i quyidagi teorema o'rnatildi.

Teorema 7.10. Agar $|a| \leq \frac{1}{4}$ bo'lsa, u holda

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+2ax}{1+4a^2+4ax}$$

vazn funksiyasi Chebishev kvadratur formulasiga joizdir.

Misol 7.3. Chebishev formulasi bilan $n = 7$ bo'lganda

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9} \ln 10 = 0,25584279 \dots$$

hisoblang.

Yechish: Bu yerda $x = \frac{1}{2}(t + 1)$ almashtirish bajarib, integrallash oraliq'ini $[-1, 1]$ ga keltiramiz:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dt}{11 + 9t}.$$

Hisoblashlarni olti xona aniqlikda olib boramiz:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0,328381, & f(x_2) &= 0,160434, & f(x_3) &= 0,123689, \\ f(x_4) &= 0,090909, & f(x_5) &= 0,071864, & f(x_6) &= 0,063424, \\ f(x_7) &= 0,052757. \end{aligned}$$

Bulardan, Chebishev kvadratur formulasi yordamida berilgan integralning taqribiy qiymatini topamiz:

$$I \approx 0,254702.$$

7.7-§. Optimal kvadratur formulalar

Berilgan $\int_a^b f(x)dx$ integralni u yoki bu kvadratur formula yordamida hisoblash paytida asosiy mehnat funksiyaning kvadratur formula tugunlaridagi qiymatlarini hisoblashga sarflanadi. Shunday ekan, integralni hisoblashda kerakli aniqlikka, imkon boricha kam mehnat sarflab erishishga intilish tabiiydir, boshqacha aytganda berilgan integralni tugunlari soni mumkin qadar kam bo'lgan formula bo'yicha hisoblash maqsadga muvofiqdir. Agar integrallanuvchi $f(x)$ ni darajasi yuqori bo'lmagan ko'phadlar bilan yaqinlashtirish mumkin bo'lsa, u holda oldingi paragraflarda ko'rilgan algebraik darajasi eng yuqori kvadratur formulalar yaxshi natija beradi. Lekin uncha silliq bo'lmagan funksiyalar uchun bu formulalar yaxshi natija bermaydi. Odatda bunday funksiyalar uchun aniqligi uncha katta bo'lmagan to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar formulalari yaxshi natija beradi. Shuning uchun ham, funksiyalarning muhim sinflari uchun shunday formulani topish kerakki, bu formula berilgan sinfning barcha funksiyalari uchun boshqa formulalarga nisbatan eng kichik qoldiqqa ega bo'lsin.

Aniqroq aytganda, masala quyidagicha qo'yiladi. Biror $[a, b]$ oraliqda aniqlangan funksiyalar sinfi H berilgan bo'lsin.

Ta'rif 7.5. Butun H

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

kvadratur formulaning qoldiq hadi deb

$$R_n(H) = \sup_{f \in H} |R_n(f)| = \sup_{f \in H} \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right|$$

ifodaga aytiladi.

Uning quyi chegarasi

$$W_n(H) = \inf_{A_k, x_k} R_n(H)$$

qaralayotgan sinfda kvadratur formula xatosining optimal bahosi deyiladi.

Ta'rif 7.6. Agar shunday kvadratur formula mavjud bo'lsaki, uning uchun $R_n(H) = W_n(H)$ tenglik bajarilsa, bunday formula qaralayotgan sinfda it optimal yoki eng yaxshi formula deyiladi.

Ikkita sinf misolida optimal formula tuzishni ko'rib chiqamiz. Avval $[0, 1]$ oraliqda uzluksiz va birinchi hosilasi bo'lakli uzluksiz hamda $|f'(x)| \leq L$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $C^1(L)$ funksiyalar sinfini qaraymiz.

Qaralayotgan

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1) \quad (7.7.1)$$

kvadratur formula $f(x) = \text{const}$ uchun aniq bo'lishini, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n A_k = 1 \quad (7.7.2)$$

tenglik bajarilishini talab qilamiz. Aks holda $f(x) = C$ uchun

$$R_n(f) = \left(1 - \sum_{k=1}^n A_k \right) C \neq 0$$

bo'lib, barcha $f(x) = \text{const}$ funksiyalar qaralayotgan sinfda yotadi va demak,

$$R_n(H) \geq \sup_c \left(\left| 1 - \sum_{k=1}^n A_k \right| |C| \right) = \infty.$$

Ko'rinib turibdiki, bunday kvadratur formulaning optimalligi haqida gap bo'lishi mumkin emas. Ravshanki, $f(x) \in C^1(L)$ ni

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \quad (7.7.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin va aksincha, $f(x)$ ixtiyoriy son bo'lib, $f'(x)$ bo'lakli-uzluksiz va $|f'(x)| \leq L$ bo'lsa, u holda (7.7.3) tenglik $f(x) \in C^1(L)$ funksiyani aniqlaydi. (7.7.1) - (7.7.2) kvadratur formulaning $f(x) = \text{const}$ uchun aniqligini hisobga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 \left[f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right] dx - \\ &- \sum_{k=1}^n A_k \left[f(0) + \int_0^{x_k} f'(t) dt \right] = \int_0^1 \int_0^x f'(t) dt dx - \sum_{k=1}^n A_k \int_0^{x_k} f'(t) dt = \\ &= \int_0^1 dt \int_0^x f'(t) dx - \sum_{k=1}^n A_k \int_0^1 f'(t) (\overline{x_k - t})^\circ dt, \end{aligned}$$

bu yerda

$$(\overline{x_k - t})^\circ = \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 \leq t < x_k \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x_k \leq t \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib,

$$R_n(f) = \int_0^1 f'(t) \left[1 - t - \sum_{k=1}^n A_k (\overline{x_k - t})^\circ \right] dt = \int_0^1 f'(t) K_n(t) dt,$$

bu yerda $K_n(t)$ funksiya $R_n(t)$ qoldiqning yadrosi deyiladi va u quyidagicha

teng:

$$K_n(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k (\overline{x_k - t})^{\circ} =$$

$$= \begin{cases} -t, & \text{agar } 0 \leq t < x_1 \quad \text{bo'lsa,} \\ -t + \sum_{i=1}^n A_i, & \text{agar } x_k \leq t < x_{k+1} \quad (k = \overline{1, n-1}) \text{ bo'lsa,} \\ 1 - t, & \text{agar } x_n \leq t \leq 1 \quad \text{bo'lsa.} \end{cases} \quad (7.7.4)$$

Shuningdek,

$$\sum_{k=1}^n A_k (\overline{x_k - t})^{\circ} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 < t < x_1 \quad \text{bo'lsa,} \\ a_k = \sum_{i=k}^n A_i, & \text{agar } x_{k-1} \leq t < x_k \quad (k = \overline{2, n}) \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x_n \leq t \leq 1 \quad \text{bo'lsa.} \end{cases} \quad (7.7.5)$$

(7.7.4) dan ko'rinadiki $K_n(t)$ yadro $f(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lmay, balki faqat kvadratur formulaning tugunlari x_k va koeffitsiyenlari A_k largagina bog'liqdir. $K_n(t)$ ning grafigi bo'lakli-chiziqli bo'lib, x_k tugunlarda sakrashi A_k ga teng bo'lgan birinchi jins uzilishga ega.

$C^1(L)$ funksiyalar sinfida $R_n(f)$ qoldiq had uchun

$$|R_n(f)| \leq L \int_0^1 |K_n(t)| dt$$

bahoga ega bo'lamiz. Endi

$$R_n(C^1(L)) = L \int_0^1 |K_n(t)| dt$$

ekanligini ko'rsataylik. Quyidagi

$$\varphi(x) = \int_0^x L \operatorname{sign} K_n(t) dt$$

funksiya bo'lakli-uzluksiz hosila $\varphi'(x) = L \operatorname{sign} K_n(t)$ ga ega, $\varphi'(x) = L(x \neq x_k)$, ya'ni u qaralayotgan sinfda yotadi va

$$|R_n(\varphi)| = \int_0^1 L \operatorname{sign} K_n(t) \cdot K_n(t) dt = L \int_0^1 |K_n(t)|^2 dt.$$

Bundan ma'lum bo'ladiki, qarayotgan sinfda kvadratur formula *zotini* minimallashtirish quyidagi $\|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(x)|dx$ metrikada $1-t$ funksiyani (7.7.5) ko'rinishdagi funksiya bilan eng yaxshi yaqinlashtirish *maslani* keltiriladi. Endi

$$\int_0^1 |K_n(t)|dt \text{ ni } V(q_2, \dots, q_n; x_1, \dots, x_n)$$

orqali belgilab olib,

$$V(q_2, \dots, q_n; x_1, \dots, x_n) =$$

$$\int_0^{x_1} |t|dt + \sum_{k=2}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |1-t-q_k|dt + \int_{x_n}^1 |1-t|dt \quad (7.7.6)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar q_k larni belgilangan deb olsak, u holda yig'indining k - hadi

$$V(q_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} |1-t-q_k|dt$$

faqatgina q_k ga bog'liq va bu integralni hisoblasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$V(q_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 + (q_k - 1 + x_k)(x_k - x_{k-1}), & \text{agar } 1 - x_{k-1} \leq q_k, \\ \frac{1}{2}[(1 - q_k - x_k)^2 + (1 - q_k - x_{k-1})^2], & \text{agar } 1 - x_k \leq q_k \leq 1 - x_{k-1}, \\ \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 - (q_k - 1 + x_k)(x_k - x_{k-1}), & \text{agar } q_k \leq 1 - x_k. \end{cases}$$

Bundan esa,

$$V'(q_k) = \begin{cases} x_k - x_{k-1}, & \text{agar } 1 - x_{k-1} \leq q_k, \\ -2(1 - q_k) + x_k + x_{k-1}, & \text{agar } 1 - x_k \leq q_k \leq 1 - x_{k-1}, \\ -(x_k - x_{k-1}), & \text{agar } q_k \leq 1 - x_k. \end{cases}$$

Oxirgi ifodadan foydalanib, $V(q_k)$ ni minimallashtirishni hisobga olsak oldingi ifodadan

$$\min_{q_k} V(q_k) = \frac{1}{4}(x_k - x_{k-1})^2 \quad (7.7.7)$$

kelib chiqadi. (7.7.6) ning o'ng tomonida $V(q_k)$ miqdorlardan tashqari yana ushbu ifoda ham bor:

$$\int_0^{x_1} |t| dt + \int_{x_n}^1 |1-t| dt = \frac{x_1^2 + (1-x_n)^2}{2}.$$

Bundan va (7.7.6)-(7.7.7) lardan

$$\inf_{q_2, \dots, q_n} V(q_2, \dots, q_n; x_1, \dots, x_n) = U(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1^2 + (1-x_n)^2}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})^2.$$

Shunday qilib,

$$\inf_{q_2, \dots, q_n; x_1, \dots, x_n} V(q_2, \dots, q_n; x_1, \dots, x_n) = \inf_{x_1, \dots, x_n} U(x_1, \dots, x_n).$$

Endi $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ hosilalarni nolga tenglashtirib, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{3x_1 - x_2}{2} = 0, \quad \frac{3x_n - 2 - x_{n-1}}{2} = 0, \quad \frac{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}{2} = 0, \quad (k = \overline{2, n-1}).$$

Bu sistemaning yechimi

$$x_k = \frac{2k-1}{2n} \quad (k = \overline{1, n})$$

bo'lib

$$\inf_{x_1, \dots, x_n} U(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{4n}.$$

Shunday qilib, qaralayotgan $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ soha ichida $U(x_1, \dots, x_n)$ ning ekstremal qiymatini topdik, lekin $U(x_1, \dots, x_n)$ o'zining eng kichik qiymatiga bu sohaning chegarasida erishishi mumkin.

Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki, $U(x_1, \dots, x_n)$ ning topilgan qiymati uning minimal qiymatidir.

Buning uchun

$$\left| \sum_{k=1}^{2n} b_k \right|^2 \leq 2n \sum_{k=1}^{2n} b_k^2.$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligida

$$\begin{aligned} b_1 &= x_1, \\ b_2 &= b_3 = \frac{x_2 - x_1}{2}, \\ b_4 &= b_5 = \frac{x_3 - x_2}{2}, \\ &\dots \dots \dots \\ b_{2n-2} &= b_{2n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, \quad b_{2n} = 1 - x_n \end{aligned}$$

deb olsak, u holda $\sum_{k=1}^{2n} b_k = 1$ bo'lib,

$$1 \leq 2n \sum_{k=1}^{2n} b_k^2$$

yoki

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} b_k^2 = U(x_1, \dots, x_n)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $\int_0^1 |K_n(t)| dt$ ning minimal qiymati $\frac{1}{4n}$ bo'lib, bu qiymatga

$$x_k = \frac{2k-1}{2n}, \quad q_k = 1 - \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = 1 - \frac{k-1}{n}$$

bo'lganda erishiladi. Bu va (7.7.2) dan kvadratur formulaning koeffitsiyentlari uchun mos ravishdagi quyidagi qiymatlarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} A_n &= q_n = \frac{1}{n}, \quad A_j = q_j - q_{j+1} = \frac{1}{n} \quad (j = \overline{2, n-1}), \\ A_1 &= 1 - \sum_{k=2}^n A_k = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Shunday qilib, qarayotgan sinfda optimal kvadratur formula umumlashgan o'rta to'g'ri to'rtburchak formulasi

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{n}\right)$$

bo'lib, uning xatoligi $\frac{L}{4n}$ dan iboratdir.

Ayrim hollarda optimal kvadratur formula qurish paytida bu formula koeffitsiyentlari yoki tugunlarining ma'lum shartlarni qanoatlantirishi, masalan tugunlarining muntazam taqsimlanishi talab qilinadi.

Endi $[0, 1]$ oraliqda uzluksiz, birinchi tartibli hosilasi kvadrati bilan jamlanuvchi hamda

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq L^2$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi $C_2^1(L)$ ni qaraymiz. Bu sinfnig har bir funksiyasini

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \quad (7.7.8)$$

ko'rinishda yozish mumkin va aksincha, agar $f(0)$ ixtiyoriy son bo'lib, $f'(x)$ o'lchanadigan $[0, 1]$ da kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsa va $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq L^2$ shart bajarilsa, u holda (7.7.8) bilan aniqlangan funksiya $C_2^1(L)$ sinfga qarashli bo'ladi. Endi $C_2^1(L)$ funksiyalar sinfiga quyidagi ko'rinishdagi

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{k}{n}\right), \quad \sum_{k=0}^n A_k = 1 \quad (7.7.9)$$

optimal kvadratur formulani tuzish masalasini ko'rib chiqamiz. Bu yerda qoldiq had uchun

$$R_n(f) = \int_0^1 f'(t) K_n^{(1)}(t) dt, \quad (7.7.10)$$

$$\begin{cases} K_n^{(1)}(t) = 1 - t - \sum_{k=0}^n A_k \left(\frac{k}{n} - t\right)^{\circ} = 1 - t - \sum_{j=i}^n A_j \\ \frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n} \quad (i = \overline{1, n}) \end{cases}$$

formulalarga ega bo'lamiz. Koshi - Bunyakovski tengsizligini qo'llab

topamiz:

$$|R_n(f)| = \left| \int_0^1 f'(t) K_n^{(1)}(t) dt \right| \leq \\ \leq \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt} \leq L \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt}.$$

Quyidagi funksiya

$$\varphi'(t) = \frac{L |K_n^{(1)}(t)| \operatorname{sign} K_n^{(1)}(t)}{\sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt}}$$

$[0, 1]$ da o'lchanadigan, kvadrati bilan jamlanuvchi va $\int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt = L^2$,

demak, $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt \in C_2^1(L)$ va uning uchun:

$$|R_n(\varphi)| = L \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt}.$$

Shuning uchun ham

$$R_n(C_2^{(1)}(L)) = L \sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt}.$$

Shunday qilib, $C_2^{(1)}(L)$ da optimal kvadratur formula tuzish uchun $A_k \left(\sum_{k=1}^n A_k = 1 \right)$ koeffitsiyenlarni shunday tanlashimiz kerakki, ushbu

$$\sqrt{\int_0^1 (K_n^{(1)}(t))^2 dt}$$

ifoda minimal qiymatga ega bo'lsin. Ravshanki,

$$V(q_1, \dots, q_n) = \int_0^1 [K_n^{(1)}(t)]^2 dt = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{i}{n} - q_i \right)^3 - \left(\frac{i-1}{n} - q_i \right)^3 \right],$$

bunda

$$q_i = \sum_{j=0}^{i-1} A_j \quad (i = \overline{1, n})$$

o'zining minimal qiymati $\frac{1}{12n^2}$ ga $q_i = \frac{2i-1}{2n}$ larda erishishini payqash qiyin emas. Koeffitsiyentlar uchun

$$A_i = q_{i+1} - q_i = \frac{1}{n}, \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

$$A_0 = q_1 = \frac{1}{2n},$$

$$A_n = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{1}{2n}$$

qiymatlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $C_2^{(1)}(L)$ sinfida (7.7.9) ko'rinishdagi kvadratur formulalar orasida umumlashgan trapetsiya formulasi

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \left[\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right]$$

optimal formula bo'lib, uning xatosi $\frac{L}{2n\sqrt{3}}$ ga teng ekan.

7.8-§. Kvadratur formulalarning aniqligini orttirish

Oldingi paragrafda aytib o'tilganidek silliqiligi yuqori bo'lmagan funksiyalarni integrallash paytida algebraik aniqlik darajasi yuqori bo'lgan formulalarni qo'llash yaxshi natijaga olib kelmaydi. Bunday funksiyalar uchun trapetsiyalar yoki to'g'ri to'rtburchaklar formulasini qo'llash ma'quldir.

Endi shunday savol tug'iladi: bunday formulalarning aniqliklarini, ularning qoldiq hadlaridan bosh qismlarini ajratib olish yo'li bilan orttirish mumkin emasmikan? Ma'lum bo'lishicha shunday qilish mumkin

ekan. Bu vazifani Eyler - Makloren formulasi hal qiladi. Bu formulalar trapetsiyalar katta formulasiga va davriy funksiyalar uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasiga tuzatma kiritadi. Eyler - Makloren formulasi bundan tashqari funksiyani qatorga yoyish, qatorlarning yig'indisini topish va boshqa masalalarda ham qo'llaniladi.

Eyler - Makloren formulasini keltirib chiqarishda bizga Bernulli sonlari va ko'phadlari haqidagi ayrim ma'lumotlar kerak bo'ladi. Quyida shu ma'lumotlarni bayon qilamiz.

7.8.1 Bernulli sonlari va ko'phadlari

Bu sonlar va ko'phadlarni ularni hosil qiluvchi funksiyalar yordamida aniqlaymiz. Buning uchun

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1}, \quad g(t-x) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \quad (7.8.1)$$

funksiyalarni kiritamiz. Bu funksiyalar doiraga regulyar bo'lganligi uchun ularni shu doirada darajali qatorga yoyish mumkin:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad (7.8.2)$$

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \quad (7.8.3)$$

Birinchi tenglik bilan aniqlangan miqdorlar *Bernulli sonlari* deyiladi. Bu sonlarni aniqlaydigan rekurrent tengliklarni qurish mumkin. Buning uchun (7.8.2) ning har ikkala tomonini $e^t - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ ga ko'paytiramiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = t.$$

Bu tenglikda $t, t^2, t^3, \dots$ hadlar oldingi koeffitsiyentlarni taqqoslab,

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{B_2}{(n-2)! \cdot 2!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{1! \cdot (n-1)!} = 0$$

$$(n = 2, 3, \dots)$$

yoki

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \quad (n \geq 2) \quad (7.8.4)$$

rekurrent munosabatlarni hosil qilamiz. B_1 dan boshqa barcha toq indeksli Bernulli sonlari- ning nolga teng ekanligini ko'rsatish mumkin. Buning uchun (7.8.2) tenglikda t ni $-t$ ga almashtiramiz:

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Lekin

$$\frac{-t}{e^{-t}+1} = \frac{te^t}{e^t-1} = t + \frac{t}{e^t-1} = t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

demak,

$$t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Bundan esa $n > 1$ bo'lganda $B_n = (-1)^n B_n$ tenglikka ega bo'lamiz va $n = 2k + 1$ uchun

$$B_{2k+1} = -B_{2k+1}, \quad B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

kelib chiqadi. Quyida Bernulli sonlarining dastlabki bir nechtasining qiymatlari keltirilgan:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = \frac{691}{2730}, \quad B_{14} = -\frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \dots$$

Endi $B_n(x)$ Bernulli ko'phadlarini aniqlaydigan rekurrent munosabatlarni tuzaylik. Buning uchun (7.8.3) tenglikda e^{xt} va $\frac{t}{e^t-1}$ funksiyalarni ularning darajali qatorlardagi yoyilmalari bilan almashtiramiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n.$$

Bu yerda t_n oldidagi koeffitsiyentlarni taqqoslab,

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{x^n B_0}{n!} + \frac{x^{n-1} B_1}{(n-1)!} + \dots + \frac{B_n}{n!}$$

yoki

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k} \quad (7.8.5)$$

ni hosil qilamiz. Bernulli ko'phadlaridan dastlabki bir nechtasini keltiramiz:

$$\begin{aligned}
 B_0(x) &= 1, \\
 B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
 B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
 B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
 B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
 B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
 B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.
 \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

Endi Bernulli ko'phadlarining ayrim xossalari bilan tanishaylik. Avvalo (7.8.5) dan

$$B_n(0) = B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{7.8.7}$$

kelib chiqadi. (7.8.3) tenglikning har ikki tomonini x bo'yicha differensiallab,

$$e^{xt} \frac{t^2}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} t^n$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikning chap tomoni $t \cdot g(t, x)$ ga teng bo'lgani uchun:

$$t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} t^n.$$

Bunda t^n oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, Bernulli ko'phadlarini differensiallash qoidasiga ega bo'lamiz:

$$B'_n(x) = n B_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{7.8.8}$$

Bundan va (7.8.7) dan integrallash qoidasini chiqaramiz:

$$B_n(x) = B_n + n \int_0^x B_{n-1}(t) dt. \tag{7.8.9}$$

Endi

$$B(1-x) = (-1)^n B_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7.8.10}$$

ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi

$$e^{(1-x)t} \frac{t}{e^t - 1} = e^{-xt} \frac{te^t}{e^t - 1} = e^{x(-t)} \frac{-t}{e^{-t} - 1}$$

almashtirishlarni bajarib,

$$g(t, 1-x) = g(-t, x)$$

ni hosil qilamiz. Bu munosabatga g ning (7.8.3) dagi yoyilmasini keltirib qo'ysak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n$$

tenglik kelib chiqadi, bundan esa (7.8.10) ni hosil qilamiz.

Endi Bernulli ko'phadlaridan faqat ozod had bilan farq qiladigan quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$\varphi_n(x) = B_n(x) - B_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.8.11)$$

Bu funksiyalar, $\varphi_1(x)$ dan tashqari, $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda nolga aylanadi. Haqiqatan ham, (7.8.7) ga ko'ra $\varphi_n(0) = 0$, (7.8.11) tenglikka ko'ra esa

$$\varphi_n(1) = B_n(1) - B_n = (-1)^n B_n - B_n = -B_n [1 - (-1)^n] = 0,$$

chunki juft n lar uchun kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng bo'lib, toq $n > 1$ lar uchun B_n Bernulli sonlari nolga teng.

Quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema 7.11. $\varphi_2(x), \varphi_4(x), \varphi_6(x), \dots$ ko'phadlar $(0, 1)$ oraliqda doimiy, chunonchi $\varphi_{2k}(x) (-1)^k$ ishoraga ega; $\varphi_3(x), \varphi_5(x), \varphi_7(x), \dots$ ko'phadlar $x = \frac{1}{2}$ nuqtada nolga aylanadi, shu bilan birga $(0, \frac{1}{2})$ va $(\frac{1}{2}, 1)$ oraliqlarda $\varphi_{2k+1}(x)$ mos ravishda $(-1)^{k-1}$ va $(-1)^k$ ishoralarga ega.

Isbot. Avvalo (7.8.10) ga ko'ra

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ yoki } B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Shunday qilib, $\varphi_{2k+1}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) ko'phadlar $0, \frac{1}{2}, 1$ nuqtalarda nolga aylanadi. Endi $(0, 1)$ oraliqda $\varphi_{2k+1}(x)$ ning boshqa nollarga ega

emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varphi_{2k+1}(x)$ ko'phad $(0, 1)$ oralig'ida ikkita har xil nuqtada nolga ega bo'la olmasligini ko'rsataylik. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni x_1 va x_2 ($0 < x_1 < x_2 < 1$) $\varphi_{2k+1}(x)$ ning nollari bo'lsin. Bundan tashqari, $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalar ham uning nollari bo'lganligi uchun $(0, x_1)$, (x_1, x_2) va $(x_2, 1)$ oraliqlarning har birida

$$\varphi'_{2k+1}(x) = B'_{2k+1}(x) = (2k+1)B_{2k}(x)$$

ko'phad kamida bitta nolga ega va demak,

$$\varphi''_{2k+1}(x) = (2k+1)B'_{2k}(x) = (2k+1)2k\varphi_{2k-1}(x)$$

ko'phad, ya'ni $\varphi_{2k-1}(x)$ $(0, 1)$ oraliqda kamida ikkita nolga ega. Bu mulohazalarni davom ettirib, shunday xulosaga kelamizki, $\varphi_3(x)$ ko'phad oraliqda kamida ikkita turli ildizlarga ega. Bunga $x = 0$ va $x = 1$ nollarni qo'shsak, u holda aynan nol bo'lmagan uchinchi darajali ko'phad kamida to'rtta ildizga ega degan mumkin bo'lmagan xulosaga kelamiz. Shuning uchun ham, $\varphi_{2k+1}(x)$ ko'phad $(0, 1)$ oraliqda ikkita har xil ildizga ega degan farazimiz noto'g'ri ekan. Ushbu

$$\text{sign} B_{2k} = (-1)^{k-1} \quad (7.8.12)$$

tenglikdan foydalanamiz. Buning to'g'riligini keyinchalik ko'rsatamiz. (7.8.5) tenglikka ko'ra x ning kichik qiymatlari uchun $\varphi_{2k+1}(x)$ ning qiymatlari ishorasi B_{2k} ning ishorasi bilan ustma-ust tushadi; (7.8.12) ga ko'ra bu ishora $(-1)^{k-1}$ dan iboratdir. Demak, $[0, \frac{1}{2}]$ oraliqda $\varphi_{2k+1}(x)$ ning ishorasi $(-1)^{k-1}$ dir va $\varphi'_{2k+1}(\frac{1}{2}) \neq 0$ bo'lganligi uchun $[\frac{1}{2}, 1]$ da uning ishorasi $(-1)^k$ bo'ladi.

Endi $\varphi_{2k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) ning $(0, 1)$ oraliqda nolga aylanmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $\varphi_{2k}(x)$ ko'phad $(0, 1)$ oraliqda nolga aylansa, u holda uning hosilasi

$$\varphi'_{2k}(x) = B'_{2k}(x) = 2kB_{2k-1}(x) = 2k\varphi_{2k-1}(x),$$

ya'ni $\varphi_{2k-1}(x)$ ko'phad, $(0, 1)$ da kamida ikkita ildizga ega bo'lar edi.

Shunday qilib, $\varphi_{2k}(x)$ ko'phad $(0, 1)$ da o'z ishorasini saqlaydi va bu ishora

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) dx = \int_0^1 [B_{2k}(x) - B_{2k}] dx = \left[\frac{1}{2k+1} B_{2k+1}(x) - B_{2k} \right] \Big|_0^1 = -B_{2k}$$

ni hosil qilamiz. Agar (7.8.16) da $x = 0$ deb olsak, Bernulli sonlari uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$B_{2k} = B_{2k}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}. \quad (7.8.17)$$

Bu yerdan (7.8.12) formula kelib chiqadi va k o'sishi bilan B_{2k} ning modul bo'yicha tez o'sishi ko'rinadi.

7.8.2 Ixtiyoriy funksiyalarni Bernulli ko'phadlari orqali tasvirlash

Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 7.12. Agar $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ oralig'ida $m \geq 1$ tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda $0 \leq x \leq 1$ uchun quyidagi formula o'rinlidir:

$$\begin{aligned} f(x) = & \int_0^1 f(t) dt + \sum_{v=1}^{m-1} \frac{B_v(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] - \\ & - \frac{1}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(t) [B_m^*(x-t) - B_m^*(x)] dt. \end{aligned} \quad (7.8.18)$$

Isbot. Ushbu

$$\rho_m(x) = \frac{1}{m!} \int_0^1 B_m^*(x-t) f^{(m)}(t) dt \quad (7.8.19)$$

integralda $m > 1$ deb faraz qilib, bu integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\rho_m(x) = \frac{B_m^*(x-t)}{m!} f^{(m-1)}(t) \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{m!} \int_0^1 f^{(m-1)}(t) \frac{d}{dt} B_m^*(x-t) dt.$$

Bernulli ko'phadlarining yuqorida ko'rsatilgan

$$B_m^*(x-1) = B_m^*(x) = B_m(x)$$

va

$$\frac{d}{dt} B_m^*(x-t) = -m B_{m-1}^*(x-t)$$

xossalaridan foydalansak, u holda

$$\rho_m(x) = \frac{B_m(x)}{m!} \left[f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0) \right] + \rho_{m-1}(x)$$

va bu munosabatni $m - 1$ marta qo'llab,

$$\rho_m(x) = \sum_{v=2}^m \frac{B_v(x)}{v!} \left[f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0) \right] + \rho_1(x) \quad (7.8.20)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi $\rho_1(x)$ ni hisoblash uchun $B_1^*(x)$ ning butun nuqtalarida -1 sakrashga va butun bo'lmagan nuqtalarda esa $B_1^*(x)$ ning hosilasi 1 ga tengligini e'tiborga olib hamda $0 < x < 1$ deb olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \int_0^x f'(t) B_1^*(x-t) dt + \int_x^1 f'(t) B_1^*(x-t) dt = \\ &= B_1^*(+0) f(x) - B_1^*(x) f(0) + \int_0^x f(t) dt + \\ &\quad + B_1^*(x-1) f(1) - B_1^*(-0) f(x) + \int_x^1 f(t) dt = \\ &= [B_1^*(+0) - B_1^*(-0)] f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

Ma'lumki,

$$B_1^*(+0) = -\frac{1}{2}, \quad B_1^*(-0) = \frac{1}{2},$$

shuning uchun ham

$$\rho_1(x) = -f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt.$$

ni hosil qilamiz. Agar (7.8.16) da $x = 0$ deb olsak, Bernulli sonlari uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$B_{2k} = B_{2k}(0) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}. \quad (7.8.17)$$

Bu yerdan (7.8.12) formula kelib chiqadi va k o'sishi bilan B_{2k} ning modul bo'yicha tez o'sishi ko'rinadi.

7.8.2 Ixtiyoriy funksiyalarni Bernulli ko'phadlari orqali tasvirlash

Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 7.12. Agar $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ oralig'ida $m \geq 1$ tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda $0 \leq x \leq 1$ uchun quyidagi formula o'rinlidir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(t) dt + \sum_{v=1}^{m-1} \frac{B_v(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] - \\ &- \frac{1}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(t) [B_m^*(x-t) - B_m^*(x)] dt. \end{aligned} \quad (7.8.18)$$

Isbot. Ushbu

$$\rho_m(x) = \frac{1}{m!} \int_0^1 B_m^*(x-t) f^{(m)}(t) dt \quad (7.8.19)$$

integralda $m > 1$ deb faraz qilib, bu integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\rho_m(x) = \frac{B_m^*(x-t)}{m!} f^{(m-1)}(t) \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{m!} \int_0^1 f^{(m-1)}(t) \frac{d}{dt} B_m^*(x-t) dt.$$

Bernulli ko'phadlarining yuqorida ko'rsatilgan

$$B_m^*(x-1) = B_m^*(x) = B_m(x)$$

va

$$\frac{d}{dt} B_m^*(x-t) = -m B_{m-1}^*(x-t)$$

xossalaridan foydalansak, u holda

$$\rho_m(x) = \frac{B_m(x)}{m!} [f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)] + \rho_{m-1}(x)$$

va bu munosabatni $m - 1$ marta qo'llab,

$$\rho_m(x) = \sum_{v=2}^m \frac{B_v(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] + \rho_1(x) \quad (7.8.20)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi $\rho_1(x)$ ni hisoblash uchun $B_1^*(x)$ ning butun nuqtalarida -1 sakrashga va butun bo'lmagan nuqtalarda esa $B_1^*(x)$ ning hosilasi 1 ga tengligini e'tiborga olib hamda $0 < x < 1$ deb olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \int_0^x f'(t) B_1^*(x-t) dt + \int_x^1 f'(t) B_1^*(x-t) dt = \\ &= B_1^*(+0) f(x) - B_1^*(x) f(0) + \int_0^x f(t) dt + \\ &\quad + B_1^*(x-1) f(1) - B_1^*(-0) f(x) + \int_x^1 f(t) dt = \\ &= [B_1^*(+0) - B_1^*(-0)] f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

Ma'lumki,

$$B_1^*(+0) = -\frac{1}{2}, \quad B_1^*(-0) = \frac{1}{2},$$

shuning uchun ham

$$\rho_1(x) = -f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt.$$

Buni (7.8.20) ga qo'yib, (7.8.19) ni e'tiborga olsak,

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{v=1}^m \frac{B_v(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] - \\ - \frac{1}{m!} \int_0^1 B_m^*(x-t) f^{(m)}(t) dt$$

kelib chiqadi va bunda $v = m$ ga mos keluvchi hadini integral bilan almashtirsak:

$$\frac{f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)}{m!} B_m(x) = \frac{1}{m!} B_m^*(x) \int_0^1 f^{(m)}(t) dt,$$

u holda (7.8.18) formulaga ega bo'lamiz. ■

Biz (7.8.18) formulani $0 < x < 1$ uchun isbotladik, lekin u $0 \leq x \leq 1$ uchun ham o'rinlidir, chunki u formulada qatnashayotgan barcha funksiyalar x ning uzluksiz funksiyalaridir.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $[a, a+h]$ ($h > 0$) oraliqda $m \geq 2$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. (7.8.18) formulaning shu hol uchun mos kelgan ko'rinishini keltiramiz. Yangi ξ o'zgaruvchini kiritamiz: $x = a + h\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$ va m marta uzluksiz differensiallanuvchi $\varphi(\xi) = f(a + h\xi)$ funksiyaga $0 \leq \xi \leq 1$ uchun (7.8.18) formulani qo'llaymiz

$$\varphi(\xi) = \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau + \sum_{v=1}^{m-1} \frac{\varphi^{(v-1)}(1) - \varphi^{(v-1)}(0)}{v!} B_v(\xi) - \\ - \frac{1}{m!} \int_0^1 \varphi^{(m)}(\tau) [B_m^*(\xi - \tau) - B_m^*(\tau)] d\tau. \quad (7.8.21)$$

Quyidagi

$$\varphi^{(v)}(\xi) = h^v f^{(v)}(a + h\xi) = h^v f^{(v)}(x),$$

$$\varphi(t) = f(a + h\tau) = f(t), \quad t = a + h\tau, \quad dt = h d\tau$$

munosabatlarni hisobga olib, (7.8.21) formulada avvalgi o'zgaruvchi va

funksiyalarga o'tamiz, u holda

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt + \sum_{v=1}^{m-1} \frac{h^{v-1}}{v!} \left[f^{(v-1)}(a+h) - f^{(v-1)}(a) \right] \times B_v \left(\frac{x-a}{h} \right) - \frac{h^m}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a+h\tau) \left[B_m^* \left(\frac{x-a}{h} - \tau \right) - B_m^* \left(\frac{x-a}{h} \right) \right] d\tau. \quad (7.8.22)$$

7.8.3 Eyler-Makloren formulasi

Oldingi punktdagi (7.8.22) formulada $x = a$ deb olib, shu bilan birga $B_m(0) = B_m$ va $B_m^*(\tau)$ hamda uning hosilasining davriyligini

$$B_m^*(-\tau) = B_m^*(1-\tau) = B_m(1-\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

hisobga olsak, u holda

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(a+h) - f(a)] + \\ &+ \sum_{v=2}^{m-1} \frac{h^{v-1} B_v}{v!} \times [f^{(v-1)}(a+h) - f^{(v-1)}(a)] - \\ &- \frac{h^m}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a+h\tau) [B_m(1-\tau) - B_m] d\tau \end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} f(t) dt &= \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] - \\ &- \sum_{v=2}^{m-1} \frac{h^v B_v}{v!} [f^{(v-1)}(a+h) - f^{(v-1)}(a)] + \\ &+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a+h\tau) [B_m(1-\tau) - B_m] d\tau \quad (7.8.23) \end{aligned}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Eyler - Makloren formulasini hosil qilish uchun $[a, b]$ oraliqni $h = \frac{b-a}{n}$ qadam bilan n ta

$$[a + jh, a + (j+1)h], \quad j = \overline{0, n-1}$$

qisman oraliqlarga bo'lamiz va bu qisman oraliq uchun (7.8.23) formulani qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a+jh) + f(a+(j+1)h)] - \\ &- \sum_{v=2}^{m-1} \frac{h^v B_v}{v!} [f^{(v-1)}(a+(j+1)h) - f^{(v-1)}(a+jh)] + \\ &+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 f^{(m)}(a+jh+h\tau) [B_m(1-\tau) - B_m] d\tau. \end{aligned} \quad (7.8.24)$$

Quyidagi

$$T_n = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) \right] \quad (7.8.25)$$

belgilashni kiritib (7.8.24) formulani j bo'yicha 0 dan $n-1$ gacha yig'ib chiqamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= T_n - \sum_{v=1}^{m-1} \frac{h^v B_v}{v!} [f^{(v-1)}(b) - f^{(v-1)}(a)] + \\ &+ \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 [B_m(1-\tau) - B_m] \sum_{j=0}^{n-1} f^{(m)}(a+jh+h\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.8.26)$$

Bu formula *Eyler - Makloren formulasi* deyiladi. Odatda Eyler - Makloren formulasida juft $m = 2k$ olinadi. Bunday holda $B_m(1-\tau) - B_m$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$B_{2k}(1-\tau) - B_{2k} = B_{2k}(\tau) - B_{2k} = \varphi_{2k}(\tau).$$

Bu funksiya $0 \leq \tau \leq 1$ oraliqda o'z ishorasini saqlaydi. Bundan tashqari, $j = 3, 5, 7, \dots$ bo'lganda $B_j = 0$ ekanligini hisobga olsak, u holda Eyler -

Makloren formulasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x) dx = T_n - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} \left[f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a) \right] + R_{2k}(f), \quad (7.8.27)$$

bu yerda

$$R_{2k}(f) = \frac{h^{2k+1}}{(2k)!} \int_0^1 \varphi_{2k}(\tau) \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau. \quad (7.8.28)$$

Bu formuladan ko'rinadiki,

$$- \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h^{2j} B_{2j}}{(2j)!} \left[f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a) \right]$$

had trapetsiyaning katta formulasiga tuzatmadan iboratdir. Endi faraz qilaylik $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, davri $b-a$ ga teng bo'lsin hamda haqiqiy o'qning barcha nuqtalarida $2k$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. U holda barcha $f^{(2j)}(x)$ hosilalar ham davriy bo'lib, (7.8.27) formula sodalashadi:

$$\int_a^b f(x) dx = T_n + R_{2k}(f).$$

Funksiyaning davriyligi tufayli T_n to'g'ri to'rtburchaklar kvadratur yig'indisi bilan ustma-ust tushadi, shuning uchun ham

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(a + jh) + R_{2k}(f).$$

Demak, qarayotgan holda to'g'ri to'rtburchaklar formulasining qoldiq hadi (7.8.28) ko'rinishga ega.

Endi (7.8.28) qoldiq hadni tekshirish bilan shug'ullanamiz.

Teorema 7.13. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda $2k$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$R_{2k}(f) = -\frac{h^{2k}}{(2k)!} (b-a) B_{2k} f^{(2k)}(\xi), \quad (7.8.29)$$

bu yerda $a \leq \xi \leq b$.

Isbot. Birinchi punktda $\varphi_{2m}(\tau)$ funksiyaning $0 < \tau < 1$ da o'z ishorasini saqlashini ko'rgan edik. Shuning uchun ham

$$I = \int_0^1 \varphi_{2k}(\tau) \sum_{j=0}^{n-1} f^{(2k)}(a + jh + h\tau) d\tau = \int_0^1 \varphi_{2k}(\tau) S_{2k}(\tau) d\tau$$

integralda umumlashgan o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llash mumkin:

$$I = S_{2k}(\eta) \int_0^1 \varphi_{2k}(\tau) d\tau = S_{2k}(\eta) \int_0^1 [B_{2k}(\tau) - B_{2k}] d\tau = -S_{2k}(\eta) B_{2k}. \quad (7.8.30)$$

Bu yerda $0 < \eta < 1$. Agar M va m orqali $f^{(2k)}(\xi)$ ning $[a, b]$ dagi eng katta va eng kichik qiymatlarini belgilasak, u holda ko'rinib turibdiki, $nm \leq S_{2k}(\eta) \leq nM$. Lekin $f^{(2k)}(\xi)$ funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun $[a, b]$ oraliqda shunday nuqta topiladiki, $S_{2k}(\eta) = n f^{(2k)}(\xi)$ tenglik bajariladi. Buni (7.8.30) ga va (7.8.30) ni (7.8.28) ga qo'ysak, (7.8.29) kelib chiqadi va shu bilan teorema isbot bo'ldi. ■

Takidlab o'tamizki, (7.8.29) da $k = 1$ deb olsak, u holda u trapetsiyalar formulasining qoldiq hadiga aylanadi.

Teorema 7.14. Agar barcha $x \in [a, b]$ uchun

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) \geq 0 \quad \text{va} \quad f^{(2k+2)}(x) \geq 0 \\ [\text{yoki} \quad f^{(2k)}(x) \leq 0 \quad \text{va} \quad f^{(2k+2)}(x) \leq 0] \end{aligned} \quad (7.8.31)$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda Eyler - Makloren formulasi $R_{2k}(f)$ qoldiq hadining ishorasi

$$-\frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \quad (7.8.32)$$

sonning ishorasi bilan ustma-ust tushib, $R_{2k}(f)$ ning absolyut qiymati (7.8.32) ning absolyut qiymatidan ortmaydi.

Isbot. Eyler - Makloren formulasidan

$$R_{2k}(f) - R_{2k+2}(f) = -\frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] \quad (7.8.33)$$

kelib chiqadi. (7.11) teoreмага ko'ra:

$$\text{sign} \varphi_{2k}(\tau) = (-1)^k.$$

Bundan va (7.8.31) dan foydalangan holda, (7.8.28) dan ma'lum bo'ladiki, $R_{2k}(f)$ va $(-R_{2k+2}(f))$ bir xil ishoraga ega. Bu ishora (7.8.33) ga ko'ra (7.8.32) ning ishorasi bilan bir xil bo'lishi kerak va $R_{2k}(f)$ hamda $R_{2k+2}(f)$ hamda absolyut qiymatlari bo'yicha (7.8.32) ning absolyut qiymatidan ortmaydi. Teorema isbotlandi. ■

Eslatma. k o'sishi bilan B_{2k} Bernulli sonlari tez o'sib boradi. [(7.8.17) ga qarang.] Shuning uchun ham, (7.8.29) dan ko'rinadiki k cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiyalarning juda ham tor sinfi uchun $R_{2k}(f)$ nolga intiladi. Odatda cheksizlikka intilganda $R_{2k}(f)$ katta tezlik bilan cheksizlikka intiladi. Shuning uchun ham hisoblash paytida k ni shunday tanlash kerakki, $|R_{2k}(f)|$ imkon boricha kichik qiymat qabul qilsin.

Misol 7.4. *Eyler - Makloren formulasi yordamida*

$$I = \int_1^2 \left(\cos x - \frac{1}{x^2} + shx \right) dx$$

integral verguldan keyin 4 xona aniqlikda hisoblansin.

Yechish: [1, 2] oralig'ini $h = 0,2$ qadam bilan 5 bo'lakka bo'lamiz va

$$x_i = 1 + 0,2i \quad (i = \overline{0, 5})$$

deb olib, $f(x) = \cos x - \frac{1}{x^2} + shx$ ning qiymatlarini topamiz:

$$f(x_0) = 0,71550, \quad f(x_1) = 1,17738, \quad f(x_2) = 1,56407,$$

$$f(x_3) = 1,95577, \quad f(x_4) = 2,40636, \quad f(x_5) = 2,96077.$$

Bu yerdan

$$\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_4) + \frac{1}{2}f(x_5) = 8,94171.$$

Uchinchi tartibli hosila bilan chegaralanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f'(x) = -\sin x + \frac{2}{x^3} + chx, \quad f'''(x) = \sin x + \frac{4!}{x^5} + chx.$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2,70161, & f'(2) &= 3,10290, \\ f'''(1) &= 26,38455, & f'''(2) &= 5,42150. \end{aligned}$$

Topilgan qiymatlarni (7.8.27) formulaga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$I = 8,94171 \cdot 0,2 - \frac{(0,2)^2}{12} (3,10290 - 2,70161) + \frac{(0,2)^4}{720} (5,42150 - 26,38455) = 1,78696.$$

Bevosita integrallab,

$$I = \left[\sin x + \frac{1}{x} + \operatorname{ch} x \right]_1^2 = 1,78696$$

ni hosil qilamiz, ya'ni yuqorida topilgan raqamlarning barchasi ishonchli ekan. ■

7.9-§. Kvadratur formulalarni qo'llash to'g'risida ayrim mulohazalar. Runge qoidasi

Biz oldingi paragraflarda bir qancha kvadratur formulalar ko'rdik. Konkret funksiyalarni taqribiy integrallash paytida konkret kvadratur formulani tanlash katta ahamiyatga ega. Bunday tanlash ko'p jihatlarga: integrallanuvchi funksiyaning xossasiga, uning berilishiga, hisoblovchining qo'l ostidagi hisoblash quroliga, talab qilinadigan aniqlikka bog'liq.

Agar integrallanuvchi funksiya qiymatlari jadvali bilan berilgan bo'lsa, u holda shunday kvadratur formulani qo'llash kerakki, unda shu tugun nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari qatnashsin. Agar funksiya o'zining grafigi bilan berilgan bo'lsa, u holda teng koeffitsiyentli kvadratur formulani ishlatish ma'quldir. Chunki funksiya qiymatlaridan tuzilgan chiziqli kombinatsiya barcha koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lgandagina eng kichik tasodifiy xatoga ega bo'ladi.

Tez tebranuvchi funksiyalarni integrallash katta qiyinchiliklar tug'diradi. Bunday funksiyalarni integrallash uchun maxsus formulalar yaratilgan. Ayrim hollarda bo'laklab integrallash ham yaxshi natiga olib kelishi mumkin. Masalan,

$$\int_0^1 f(x) \cos 2\pi N x dx$$

integralni N yetarlicha katta bo'lganda integrallash talab qilinsin. U holda $\cos 2\pi Nx$ hisobiga integral ostidagi funksiya tez tebranuvchi bo'ladi. Bu yerda agar $f(x)$ integrallash oralig'ida $2n$ - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda $2n$ marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \cos 2\pi Nx dx &= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{(2\pi N)^{2j}} \left[f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0) \right] + \\ &+ \frac{(-1)^n}{(2\pi N)^{2n}} \int_0^1 f^{(2n)}(x) \cos 2\pi Nx dx. \end{aligned}$$

Agar N yetarlicha katta bo'lsa, u holda ikkinchi integral oldidagi ko'paytuvchi yetarlicha kichik bo'ladi va ikkinchi integralni berilgan integralga nisbatan kichikroq aniqlikda ham hisoblash mumkin.

Integrallash oralig'ida funksiyaning xossalarini o'rganish katta ahamiyatga ega. Chunki funksiya xossalarini hisobga olmasdan har qanday kvadratur formula qo'llanila berilsa, katta xatolarga duch kelinishi mumkin.

Agar tugunlar nomuvofiq joylashgan bo'lsa, u holda kvadratur formula bema'ni natijaga olib keladi.

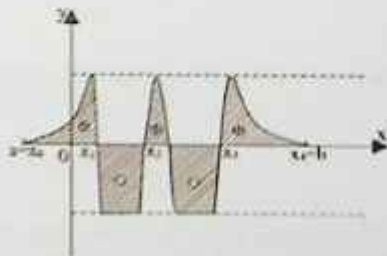
Masalan, (chizma 7.9.1) chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiyaning integrallash uchun teng uzoqlikda joylashgan $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$ tugunlarni olib besh nuqtali Nyuton-Kotes formulasidan foydalansak, kvadratur yig'indining qiymati musbat chiqadi. Ko'rinib turibdiki, integralning qiymati manfiy chiqishi kerak.

Ikkinchi misol, aytaylik, ixtiyoriy

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

formula bilan $f(x)$ funksiyaning integrallamoqchi bo'lsak, ko'rinib turibdiki, N yetarlicha katta bo'lganda integralning qiymati yetarlicha katta bo'lib, kvadratur yig'indi esa nolga teng.

Funksiya xossalarini o'rganish yana shu tomondan ham muhimki, agar funksiyaning silliqqligi yuqori bo'lmasa, u holda qoldiq hadida yuqori tartibli hosilalar qatnashadigan formulalarni



Chizma 7.9.1

qo'llash ma'noga ega emas. Bunday holda 7.7-§ da ko'rsatilganidek soddaroq kvadratur formulalardan foydalanish ma'quldir. Funksiya xossalari tekshirilgandan keyin integrallash oralig'ini maqbul ravishda qismlarga bo'lib, har bir qism uchun o'ziga xos kvadratur formulasini qo'llash ma'quldir. Funksiya tez o'zgaradigan oraliqchalarda tugunlarni tig'izroq olib, sekin o'zgaradigan qismlarida esa tugunlarni siyrak olish kerak.

Bundan tashqari, integrallarni qo'lda hisoblashda soddaroq kvadratur formulalar ishlatiladi. Chunki Gauss tipidagi, koeffitsiyentlari va tugunlari ko'p xonali raqamlar bilan beriladigan formulalarni qo'llash ancha qiyinchilik tug'diradi. Aksincha, bunday formulalar EHMLar yordamida hisoblashda foydalaniladi. Shuning uchun ham, ko'p EHMLarda standart programmalar asosida yuqori tartibli Gauss formulalari olinadi.

EHMLarni seriyali hisoblashlarda qo'llanilish sharoitida har bir funksiyaning, individual ravishda tekshirilishi mumkin bo'lmaydi, odatda, uning u yoki bu sinfga tegishliligi ma'lum bo'ladi. Shuning uchun turli sinflar funksiyalarini integrallash uchun standart programmalar to'plami bo'lib, berilgan sinfdagi har bir funksiyaning individual xususiyatini hisobga olish programmada qadamni avtomatik ravishda tanlash yo'li bilan olib boriladi.

Qadamni avtomatik ravishda tanlash Runge prinsipiga asoslangan. Runge prinsipiga asoslanib, integrallarni taqribiy hisoblashlarning har xil proseduralari mavjud, shulardan eng keng tarqalganini ko'rib chiqamiz. Bu bobda ko'rib chiqilgan barcha

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f) \quad (7.9.1)$$

kvadratur formulalarning qoldiq hadi

$$R(f) = c \cdot h^k f^{(k-1)}(\xi)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda c - konstanta, h - integrallash oralig'ining yoki bir qismining uzunligi, ξ - integrallash oralig'ining qandaydir nuqtasi.

Agar integrallash oralig'ida $f^{(k-1)}(\xi)$ sekin o'zgarsa, uni taqriban o'zgarmas $f^{(k-1)}(x) = M_1$ hamda $M_1 c = M$ deb belgilab olib, qoldiq hadni

$$R(f) = M h^k \quad (7.9.2)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin va agar integralning aniq qiymatini I va

taqribiy qiymatini $\sum$ orqali belgilab olsak, u holda

$$I = \sum + Mh^k$$

$[a, b]$ oraliqni ikkiga bo'lib, har biriga (7.9.1) kvadratur formulani qo'llab, integrallarning taqribiy qiymatlarini qo'shsak, $[a, b]$ oraliq bo'lib integralning taqribiy qiymati $\sum_1$ ni hosil qilamiz va natijada

$$I = \sum_1 + M\left(\frac{h}{2}\right)^k + M\left(\frac{h}{2}\right)^k = \sum_1 + 2^{1-k}Mh^k \quad (7.9.3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (7.9.2) va (7.9.3) tengliklardan qoldiq had uchun

$$R(f) = ch^k f^{(k-1)}(\xi) = Mh^k = \frac{\sum_1 - \sum}{1 - 2^{1-k}} \quad (7.9.4)$$

bahoga ega bo'lamiz, bu baho *Runge bahosi* deyiladi. Shunday qilib, $[a, b]$ oraliqda $f^{(k-1)}(x)$ deyarli o'zgarmas deb faraz qilib, qoldiq hadini ma'lum miqdorlar yordamida ifodaladik, natijada integralning aniqroq qiymati quyidagicha yoziladi:

$$\bar{I} = \sum_1 + \frac{\sum_1 - \sum}{1 - 2^{1-k}} \quad (7.9.5)$$

Endi (7.9.4) formulaga asoslanib, qadamni avtomatik ravishda tanlash yo'li bilan integralni hisoblashni ko'rib chiqamiz. Buning uchun

$$I(f; [a, b]) = \int_a^b f(x) dx, \quad \sum(f; [a, b]) = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

belgilashni kiritamiz. Aniqlik $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 = 2^{-p}\varepsilon$ va dastlabki qadam $h = \frac{b-a}{n}$ berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$\begin{aligned} \sum_0 &= \sum(f; [a, a+h_0]), \\ \sum_1 &= \sum\left(f; \left[a, a+\frac{h_0}{2}\right]\right) + \sum\left(f; \left[a+\frac{h_0}{2}, a+h_0\right]\right), \\ R_0 &= \frac{\sum_0 - \sum_1}{1 - 2^{1-k}} \end{aligned}$$

miqdorlarni hisoblab,

$$|R_0| \leq \varepsilon \quad (7.9.6)$$

shartni tekshiramiz. Agar bu shart bajarilsa, u holda

$$|R_0| \leq \varepsilon_0 \quad (7.9.7)$$

shartni tekshiramiz. Agar (7.9.7) shart ham bajarilsa, u holda qadam juda ham kichik olingan bo'lib, h_0 ning o'rnida $2h_0$ ni olish kerak. So'ngra

$$\begin{aligned} \sum_0^{(1)} &= \sum (f; [a, a + 2h_0]) \\ \sum_1^{(1)} &= \sum (f; [a, a + 2h_0]) + \sum (f; [a + h_0, a + 2h_0]) \\ R_0^{(1)} &= \frac{\sum_1^{(1)} - \sum_0^{(1)}}{1 - 2^{1-k}} \end{aligned}$$

miqdorlar hisoblanadi va

$$|R_0^{(1)}| \leq \varepsilon, \quad |R_1^{(1)}| \leq \varepsilon$$

shartlar tekshiriladi. Agar har ikkala shart ham bajarilsa, u vaqtda qadam yana ikkilanadi, ya'ni $4h_0$ qadam olinadi va bu jarayon davom ettiriladi.

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Qadamlarning ikkilanishi jarayonida $2^q h_0 = b - a$ ga ega bo'lib, shu bilan birga $2^q h_0 = b - a$ qadamda

$$|R_0^{(q)}| \leq \frac{|\sum_1^{(q)} - \sum_0^{(q)}|}{1 - 2^{1-k}} \leq \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda

$$\begin{aligned} \sum_0^{(q)} &= \sum (f; [a, a + 2^q h_0]) \\ \sum_1^{(q)} &= \sum (f; [a, a + 2^{q-1} h_0]) + \sum (f; [a + 2^{q-1} h_0, a + 2^q h_0]). \end{aligned}$$

U holda $\int_a^b f(x) dx$ integralning taqribiy qiymati sifatida

$$\sum_0^{(q)} + \frac{\sum_1^{(q)} - \sum_0^{(q)}}{1 - 2^{1-k}}$$

ni qabul qilamiz.

2) Qadamlarning ikkilanishi jarayonida shunday l topiladiki, $h_1 = 2^l h_0 < b - a$ qadamda

$$|R_0^{(l)}| \leq \varepsilon, \quad |R_0^{(l)}| \geq \varepsilon_0$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda $I(f; [a, a + 2^l h_0])$ integralning taqribiy qiymati sifatida

$$\sum_0^{(l)} + \frac{\sum_1^{(l)} - \sum_0^{(l)}}{1 - 2^{1-k}}$$

qabul qilinadi va $[a, b]$ oraliqning qolgan qismi $[a + 2^l h_0, b]$ uchun integralni hisoblash h_l qadam bilan davom ettiriladi.

Agar (7.9.6) shart bajarilmasa, u holda berilgan ε aniqlikda dastlabki qadam h_0 katta bo'lib, h_0 o'rniga $\frac{h_0}{2}$ qadam olinadi va

$$\begin{aligned} \sum_0^{(-1)} &= \sum \left(f; \left[a, a_0 + \frac{h_0}{2} \right] \right), \\ \sum_1^{(-1)} &= \sum \left(f; \left[a, a + \frac{h_0}{4} \right] \right) + \sum \left(f; \left[a + \frac{h_0}{4}, a + \frac{h_0}{2} \right] \right), \\ R_0^{(-1)} &+ \frac{\sum_1^{(-1)} - \sum_0^{(-1)}}{1 - 2^{1-k}} \end{aligned}$$

miqdorlar hisoblanib,

$$|R_0^{(-1)}| \leq \varepsilon$$

shart tekshiriladi. Agar bu shart bajarilsa, $I(f; [a, a + \frac{h_0}{2}])$ ning taqribiy qiymati sifatida $\sum_0^{(-1)} + R_0^{(-1)}$ olinib, qolgan $[a + \frac{h_0}{2}, b]$ oraliq bo'yicha integral $\frac{h_0}{2}$ qadam bilan hisoblanadi.

Agar $|R_0^{(-1)}| \leq \varepsilon$ shart bajarilmasa, qadam yana ikki marta kichraytiriladi. Qadamni kichraytirish jarayoni

$$|R_0^{(-q)}| \leq \varepsilon$$

shartni qanoatlantiradigan q topilguniga qadar davom ettiriladi. So'ngra

$$I \left(f; \left[a, a + \frac{h_0}{2} \right] \right) \approx \sum_0^{(-q)} + \frac{\sum_1^{(-q)} - \sum_0^{(-q)}}{1 - 2^{1-k}}$$

deb olinadi, bu yerda

$$\begin{aligned}\sum_0^{(-q)} &= \sum \left(f; \left[a, a_0 + \frac{h_0}{2} \right] \right), \\ \sum_1^{(-q)} &= \sum \left(f; \left[a, a + \frac{h_0}{2^{q+1}} \right] \right) + \sum \left(f; \left[a + \frac{h_0}{2^{q+1}}, a + \frac{h_0}{2^q} \right] \right).\end{aligned}$$

Oraliqning qolgan qismi bo'yicha integralni hisoblash uchun shu jarayonni $\frac{h_0}{2^q}$ qadam bilan davom ettiramiz.

Shunday qilib, integrallash oraliq'i m qismlarga bo'linadi va har bir oraliqda integral ε aniqlikda hisoblanadi. Bu integrallarning yig'indisi $\int_a^b f(x) dx$ ning taqribiy qiymatini $m\varepsilon$ xato bilan aniqlaydi.

7.10-§. Integrallanuvchi funksiyaning maxsusligini susaytirish

Amaliyotda ko'pincha xosmas integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday integrallar cheksiz oraliq bo'yicha olingan integrallardan yoki chekli oraliq bo'yicha olingan bo'lib, integral ostidagi funksiya integrallash oraliq'ining ayrim nuqtalarida cheksizlikka aylanadi.

Cheksiz chegarali maxsusmas integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish yo'li bilan chekli chegarali xosmas va hatto, xos integralga keltirish mumkin.

Masalan,

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$$

integralda $x = \frac{1}{y}$ almashtirish bajarsak, u chekli chegarali xos integralga keltiriladi:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{y} dy}{1+y^2}.$$

Cheksiz chegarali integralni hisoblash uchun uni chekli, lekin shunday yetarlicha katta chegarada olish kerakki, tashlab yuboriladigan qismi integralning berilgan hisoblash xatosidan ortmasin. Masalan, integralni xato bilan hisoblamoqchi bo'lsak, uni

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

ko'rinishda yozib olamiz va b ni shunday katta qilib tanlaymizki,

$$\left| \int_b^{\infty} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Endi $\int_a^b f(x) dx$ xos integralning $\frac{\varepsilon}{2}$ aniqlikdagi $\sum$ taqribiy qiymatini biror kvadratur formula yordamida topamiz:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bu paytda

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx - \sum \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Shunday qilib, cheksiz chegarali xosmas integralni har doim chekli chegarali integralga keltirish mumkin. Shuning uchun ham, biz chekli chegarali xosmas integrallarning maxsusliklarini susaytirishning ayrim usullarini ko'rib chiqamiz.

7.10.1 Vazn funksiyasini ajratish

Faraz qilaylik,

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (7.10.1)$$

integralni hisoblash talab qilinsin va $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning bir yoki bir nechta nuqtalarida cheksizlikka aylansin. Bu funksiyaning

$$f(x) = \rho(x)\varphi(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz, $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda chegaralangan va yetarlicha uzluksiz hosilalarga ega hamda $\rho(x) > 0$ yetarlicha sodda ko'rinishga ega. Bu yerda $\rho(x)$ ni vazn funksiyasi deb olib, yuqoridagi usullar bilan vaznli kvadratur formula tuzamiz.

Misollar ko'raylik. Aytaylik,

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

integralni hisoblash kerak bo'lsin. Integral ostidagi funksiya ± 1 nuqtalarda cheksizga aylanadi. Bu funktsiyani

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ko'rinishda yozib, $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ deb olamiz. U holda Meler kvadratur formulasini qo'llash mumkin:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+x_k^2}} \quad (x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi).$$

Bundan $n = 10$ deb olsak:

$$I \approx \frac{\pi}{10} \left[\frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 9^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 27^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 45^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 63^\circ}} + \frac{2}{\sqrt{1+\cos^2 81^\circ}} \right] \approx 2,2211428.$$

Integralning qiymati verguldan keyin olti xona aniqlik bilan quyidagiga teng:

$$I = 2,221441.$$

7.10.2 Additiv usul

L.V.Kantorovich maxsuslikni susaytirishning quyidagi usulini taklif etgan. Faraz qilaylik, integral ostidagi funksiya

$$f(x) = (x-c)^\alpha \varphi(x) \quad (7.10.2)$$

ko'rinishga ega bo'lib, $c \in [a, b]$, $\alpha > -1$ va $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda k -tartibli hosilaga ega bo'lsin. U holda $f(x)$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^{j+\alpha}$$

$$f_2(x) = (x-c)^\alpha [\varphi(x) - \varphi(c) - \sum_{j=1}^k \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^j].$$

Bu yerda $f_1(x)$ darajali funksiya bo'lgani uchun oson integrallanadi. Kvadrat qavs ichidagi ifoda va uning k -tartibli hosilasigacha $x = c$ nuqtada maxsuslikka ega emas. Bundan tashqari, $x = c$ nuqtada bu funksiya $k + [\alpha]$ tartibli uzluksiz hosilaga ega. Shuning uchun ham, $\int_a^b f_2(x) dx$ ga biror kvadratur formulani qo'llab natija olish mumkin.

Misol 7.5. Quyidagi

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \left(= \frac{\pi}{2} = 1,5707963... \right)$$

integral taqribiy hisoblansin.

Yechish: Integral ostidagi funksiya

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

integrallash oralig'ida yagona $x = 0$ maxsuslikka ega, $\varphi(x) = (1-x)^{-1/2}$ funksiyani darajali qatorga yoyib x^4 hadigacha saqlaymiz, u holda

$$f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right),$$

$$f_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \right) \right], f_2(0) = 0.$$

Berilgan integralni

$$I = \int_0^{0,5} f_1(x)dx + \int_0^{0,5} f_2(x)dx$$

ko'rinishda yozib olamiz. Birinchi integral aniq hisoblanadi:

$$\int_0^{0,5} f_1(x)dx = \frac{715801}{645120} \sqrt{2} = 1,5691585.$$

Ikkinchi integralni $n = 10$ va qadam $h = 0,05$ deb olib, Simpson formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$\int_0^{0,5} f_2(x)dx = 0,0006385.$$

Demak,

$$I = 1,5691585 + 0,0006385 = 1,570797.$$

Bu usulni, integrallash oralig'ida bir necha maxsus nuqta bo'lgan holda ham qo'llash mumkin. ■

7.10.3 Bo'laklab integrallash

Ayrim hollarda integral ostidagi funksiyaning maxsusligini bo'laklab integrallash yo'li bilan susaytirish mumkin. Masalan, integral ostidagi funksiya (7.10.2) ko'rinishga ega bo'lsin. U holda (7.10.1) integralni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ko'rinishda yozib olib, har biriga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz, u holda

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-c)^\alpha \varphi(x)dx &= \frac{1}{\alpha+1} \left[\varphi(b)(b-c)^{\alpha+1} - \varphi(a)(c-a)^{\alpha+1} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\alpha+1} \int_a^b (x-c)^{\alpha+1} \varphi'(x)dx. \end{aligned}$$

Bundan ko'rinadiki, o'ng tomondagi integral xos integralga aylandi. Bu yerda c nuqta oraliqning chetki nuqtalari bilan ustma-ust tushishi ham mumkin.

Misol 7.6. Quyidagi

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

integralni bo'laklab integrallaymiz.

Yechish: Bo'laklab integrallashni qo'llab quyidagiga ega bo'lamiz

$$I = \left. \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right|_0^1 + 2 \int_0^1 \sqrt{x} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}.$$

Oxirgi integral xos integraldir. Yuqorida keltirilgan usullarni qo'llab, integral ostidagi funksiya

$$f(x) = (x-c)^\alpha \ln^n(x-c) \varphi(x)$$

ko'rinishda bo'lganda ham maxsuslikni susaytirish mumkin, bu yerda n —natural son bo'lib, $c, \alpha, \varphi(x)$ yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradi. ■

Yuqorida keltirilgan usullarni faqat xosmas integrallarni hisoblash uchun emas, balki integral ostidagi funksiya chegaralangan, lekin kerakli

tartibli hosilalari chegaralanmagan hol uchun ham qo'llash mumkin. Bunday holda kvadratur formulalarning katta xatoga ega bo'lishini ularning qoldiq hadlarining qiymatlaridan bilish mumkin. Maxsuslikni susaytirish usullari ko'pincha integral ostidagi funktsiyani aniq integrallanuvchi va yetarlicha silliq funktsiyalar yig'indisi ko'rinishida yozishga imkon beradi.

7.11-§. Chekli-ayirmali tenglamalar

Differensial va integral tenglamalar klassik analizda qanchalik katta ahamiyatga ega bo'lsa, chekli-ayirmali tenglamalarning roli ham diskret analizda ana shundaydir. Bu paragrafni chekli ayirmali tenglamalarga bag'ishlaymiz.

Faraz qilaylik, $y(x)$ funktsiya biror oraliqda berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun bu oraliq $0 \leq x < \infty$ yarim o'qdan iborat bo'lsin. Biror $h > 0$ qadamli $x + kh$ to'rni olib, $y(x)$ ning chekli ayirmalarini tuzamiz:

$$\Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots, \Delta^p y(x).$$

Ushbu

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \dots, \Delta^p y(x)) = 0 \quad (7.11.1)$$

ko'rinishdagi tenglama p - tartibli chekli-ayirmali tenglama deyiladi.

Bu yerda $y(x)$ izlanayotgan funktsiya bo'lib, $F(x, y_0, \dots, y_p)$ o'z argumentlari $(x, y_0, \dots, y_p)$ ning o'zgarish sohasida aniqlangan funktsiyadir.

Agar chekli ayirmalarni funktsiyaning qiymatlari orqali ifodalasak, (7.11.1) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\Phi(x, y(x), y(x+h), \dots, y(x+ph)) = 0. \quad (7.11.2)$$

Endi x ning $x = nh$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ko'rinishdagi qiymatlarini olib, $y(kh) = y_k$ deb belgilab olsak, (7.11.2) tenglama

$$Q(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+p}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.11.3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Biz (7.11.3) ko'rinishdagi tenglamaning eng sodda ko'rinishini, ya'ni y_k larga nisbatan chiziqli bo'lgan

$$L(y) = a_0(n)y_{n+p} + a_1(n)y_{n-p+1} + \dots + a_p(n)y_n = f(n) \quad (7.11.4)$$

tenglamanı qaraymiz. Bu tenglama p - tartibli chiziqli-ayirmali tenglama deyiladi. Bu yerda $a_i(n)$ koeffitsiyentlar va $f(n)$ ozod had n (butun sonlar)ning ixtiyoriy funktsiyalari. Ozod hadi nolga teng bo'lgan $L(z) = 0$

tenglama bir jinsli deyiladi. Agar c_i larga konkret qiymatlar berib,

$$z = z(n, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

formuladan qaralayotgan tenglamaning barcha yechimlarini topish mumkin bo'lsa, bunday formula *umumiy yechim* deyiladi. Agar v va y bir jinsli bo'lmagan $L(v) = h$ tenglamaning xususiy va umumiy yechimi bo'lsa, u holda $z = y - v$ bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi: $L(y - v) = L(y) - L(v) = h - h = 0$. Shunday qilib, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimining yig'indisiga teng: $y = z + v$. Agar barchasi birdaniga nolga teng bo'lmagan $c_1, c_2, \dots, c_m$ lar mavjud bo'lib,

$$c_1 u^{(1)} + c_2 u^{(2)} + \dots + c_m u^{(m)} = 0 \quad (7.11.5)$$

o'rinli bo'lsa, u holda bir jinsli tenglama $L(u) = 0$ ning $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$ yechimlari argumentning qaralayotgan sohasida *chiziqli bog'langan* deyiladi. Aks holda, ya'ni (7.11.5) faqat $c_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$) da bajarilsa, bu yechimlar *chiziqli erkli* deyiladi. Agar $z^{(i)}$ bir jinsli tenglama $L(z) = 0$ ning yechimi bo'lsa, u holda ularning chiziqli kombinatsiyasi $\sum_i c_i z^{(i)}$ ham bu tenglamaning yechimi bo'ladi, chunki

$$L\left(\sum_i c_i z^{(i)}\right) = \sum_i c_i L\left(z^{(i)}\right) = 0.$$

Qulaylik uchun (7.11.4) tenglamaning $n \geq 0$ qiymatlar uchun qaraymiz.

Teorema 7.15. Faraz qilaylik, barcha $n \geq 0$ uchun $a_0(n) \neq 0$ bo'lib, $a_i(n)$ lar chegaralangan bo'lsin. U holda $L(z) = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$z = \sum_{i=1}^p c_i z^{(i)} \quad (7.11.6)$$

bo'lib, $z^{(1)}, \dots, z^{(p)}$ funksiyalar $L(z) = 0$ ning chiziqli erkli yechimlaridir.

Isbot. (7.11.4) tenglamani quyidagi ($f(n) = 0$ bo'lganda)

$$z_{n+p} = - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_i(n)}{a_0(n)} z_{n+i} \quad (7.11.7)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Agar $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ berilgan bo'lsa, (7.11.4) dan ketma-ket $z_p, z_{p+1}, \dots$ larni topib olamiz. Demak, ixtiyoriy $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$

uchun $L(z) = 0$ tenglama yechimga ega. Bu yechim yagona, chunki har qanday yechimning qiymati (7.11.7) tenglamani qanoatlantiradi, bu tenglamadan esa $z_p, z_{p+1}, \dots$ larning qiymatlari yagona ravishda aniqlanadi.

Endi $z_n^{(i)}$ orqali $L(z) = 0$ tenglamaning $z_{j-1}^{(i)} = \delta_i^j$ ($i, j = 1, 2, \dots, p$) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini belgilaylik.

Bu yechimlar chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Haqiqatan ham

$$\sum_{i=1}^p c_i z_n^{(i)} \equiv 0 \quad (7.11.8)$$

bo'lsa, u holda $j = 1, 2, \dots, p$ uchun

$$0 = \sum_{i=1}^p c_i z_{j-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^p c_i \delta_i^j = c_j.$$

Demak, (7.11.8) tenglik faqat $c_i = 0$ ($i = \overline{1, p}$) bo'lgandagina bajariladi va shuning uchun ham $z^{(1)}, \dots, z^{(p)}$ funksiyalar chiziqli erklidir.

Endi $L(z) = 0$ ning ixtiyoriy yechimini (7.11.6) ko'rinishda yozish mumkinligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, y_n $L(z) = 0$ ning biror yechimi bo'lsin. U holda

$$y_n = \sum_{i=1}^p z_{i-1} z_n^{(i)}$$

funksiya bu tenglamaning $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ dastlabki shartlarini qanoatlantiradigan yechimi bo'ladi. $L(z)$ tenglama yechimining yagonaligidan

$$z_n = \sum_{i=1}^p z_{i-1} z_n^{(i)} \quad (7.11.9)$$

kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. ■

Endi o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli-ayirmali tenglamani

$$L(y) = \sum_{i=0}^p a_i y_{n+i} = f(n), \quad a_p \neq 0$$

va unga mos keluvchi bir jinsli

$$L(z) = \sum_{i=0}^p a_i z_{n+i} = 0 \quad (7.11.10)$$

tenglamani qaraymiz. Oxirgi tenglamaning xususiy yechimini λ_i^n ko'rinishda izlaymiz, u holda

$$\left(\sum_{i=0}^p a_i \lambda^i \right) \lambda^n = 0$$

Demak, *xarakteristik tenglama* deb ataluvchi

$$\sum_{i=0}^p a_i \lambda^i = 0$$

tenglamaning har bir λ yechimiga (7.11.10) tenglamaning λ^n xususiy yechimi mos keladi.

Agar xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari tub bo'lsa, u holda p ta har xil yechimga ega bo'lamiz. Xarakteristik tenglamaning har bir k karrali ildiziga (7.11.10) tenglamaning k ta har xil

$$\lambda^n, c_n^1 \lambda^{n-1}, \dots, c_n^{k-1} \lambda^{n-k+1} \quad (7.11.11)$$

yechimlari to'g'ri kelishini ko'rsatamiz. Buni karrali ildizlar haqiqiy bo'lgan hol uchun qarash bilan kifoyalanamiz, chunki aytilgan gaplar kompleks bo'lgan hol uchun ham o'rinlidir. Xarakteristik ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\sum_{i=0}^p a_i \lambda^i = a_p \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_i).$$

Haqiqiy $\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0$ parametrni olib, quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi $\lambda_{i\varepsilon}$ ni olamiz:

1) barcha $i = 1, 2, \dots, k$ uchun $\lambda_{i\varepsilon}$ lar har xil;

2) barcha $i \leq k$ uchun $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{i\varepsilon} = \lambda_i$.

Bu ildizlarga mos keladigan xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$0 = a_p \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_{i\varepsilon}) = \sum_{i=0}^p a_{i\varepsilon} \lambda^i.$$

Ko'rinib turibdiki, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{i\varepsilon} = a_i$. Bu xarakteristik tenglamaga

$$\sum_{i=0}^p a_{i\varepsilon} \lambda_{n+i} = 0 \quad (7.11.12)$$

ayirmali tenglama mos keladi. Endi faraz qilaylik, $\varepsilon > 0$ uchun (7.11.12) tenglamaning shunday $z_{\varepsilon, n}$ yechimini ko'rsata olaylikki, ixtiyoriy $n \geq 0$ uchun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_{\varepsilon, n} = z_n$$

limit mavjud bo'lsin. Agar $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{i\varepsilon} = a_i$ ni hisobga olib, (7.11.12) tenglamada limitga o'tsak, u holda z_n limitdagi funksiya (7.11.10) tenglamaning yechimi ekanligini ko'ramiz. Shunday $z_{\varepsilon n}$ ketma-ketliklarni quramizki, ular (7.11.10) tenglamaning karrali ildiziga mos keladigan xususiy yechimiga yaqinlashsin. Bunday qurishni amalga oshirish uchun bo'lingan ayirmalardan foydalanamiz. Avval ildiz ikki karrali bo'lgan holni ko'ramiz, buning uchun $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ deb belgilab,

$$z_{2\varepsilon, n} = \varphi(\lambda_{1\varepsilon}, \lambda_{2\varepsilon}) = \frac{\lambda_{2\varepsilon}^n - \lambda_{1\varepsilon}^n}{\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_{1\varepsilon}}$$

birinchi tartibli bo'lingan ayirmani olamiz. Ko'rinib turibdiki, bu funksiya (7.11.10) tenglamani qanoatlantiradi. Endi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{1\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{2\varepsilon} = \lambda_1$ ni hisobga olib, limitga o'tamiz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_{2\varepsilon, n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_{2\varepsilon}^{n-1} + \lambda_{2\varepsilon}^{n-2} \lambda_{1\varepsilon} + \dots + \lambda_{1\varepsilon}^{n-1}) = n \lambda_1^{n-1}.$$

Shunday qilib, biz ikki karrali ildizga mos keladigan yana bir $n \lambda_1^{n-1}$ yechimga ega bo'ldik. Endi λ_1 ning karraligi ikkidan katta bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Buning uchun 5-bobdagi bo'lingan ayirmalar nazariyasiga oid ikkita formuladan foydalanamiz:

$$\varphi(x_1, \dots, x_q) = \sum_{j=1}^q \frac{\varphi(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \quad (7.11.13)$$

va

$$\varphi(x_1, \dots, x_q) = \frac{\varphi^{(q-1)}(\xi)}{(q-1)!}, \quad (7.11.14)$$

bu yerda

$$\min(x_1, \dots, x_q) \leq \xi \leq \max(x_1, \dots, x_q).$$

Ixtiyoriy $1 \leq q \leq k$ uchun $z_{q\varepsilon, n}$ orqali $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ ning q tartibli bo'lingan ayirmasini belgilaymiz, (7.11.13) ga ko'ra:

$$z_{q\varepsilon, n} = \varphi(\lambda_{1\varepsilon}, \dots, \lambda_{q\varepsilon}) = \sum_{j=1}^q \frac{\lambda_{j\varepsilon}^n}{\prod_{i \neq j} (\lambda_{j\varepsilon} - \lambda_{i\varepsilon})} = \sum_{j=1}^n c_{j\varepsilon} \lambda_{j\varepsilon}^n.$$

Ko'rinib turibdiki, $z_{q\epsilon, n}$ (7.11.12) tenglamani qanoatlantiradi. So'ngra, (7.11.14) dan foydalanib, $z_{q\epsilon, n}$ ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$z_{q\epsilon, n} = C_n^{q-1} \lambda_\epsilon^{n-q+1}.$$

Bu yerda $\min(\lambda_{1\epsilon}, \dots, \lambda_{q\epsilon}) \leq \lambda_\epsilon \leq \max(\lambda_{1\epsilon}, \dots, \lambda_{q\epsilon})$ bo'lgani uchun $\epsilon \rightarrow 0$ holda limitga o'tib,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_{q\epsilon, n} = z_n = C_n^{q-1} \lambda_1^{n-q+1}$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, k karrali xarakteristik ildizga k ta har xil (7.11.11) funksiyalar mos kelishini ko'rsatdik. Endi faraz qilaylik,

$$a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_p \lambda^p = 0 \quad (7.11.15)$$

xarakteristik tenglama m ta, karraliliklari mos ravishda $k_1, k_2, \dots, k_m$ larga teng bo'lgan har xil $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ildizlarga ega bo'lsin. Bu ildizlarga (7.11.10) tenglamaning quyidagi xususiy yechimlari to'g'ri keladi:

$$\begin{cases} \lambda_1^n, C_n^1 \lambda_1^{n-1}, C_n^2 \lambda_1^{n-2}, \dots, C_n^{k_1-1} \lambda_1^{n-k_1+1}, \\ \lambda_2^n, C_n^1 \lambda_2^{n-1}, C_n^2 \lambda_2^{n-2}, \dots, C_n^{k_2-1} \lambda_2^{n-k_2+1}, \\ \lambda_m^n, C_n^1 \lambda_m^{n-1}, C_n^2 \lambda_m^{n-2}, \dots, C_n^{k_m-1} \lambda_m^{n-k_m+1}. \end{cases} \quad (7.11.16)$$

Bu yerda $k_1 + k_2 + \dots + k_m = p$ bo'lgani uchun (7.11.15) ning yechimlari soni p ga teng.

Ta'rif 7.7. Agar $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}$ o'zaro chiziqli erkli bo'lib, $L(z) = 0$ ning har qanday yechimini ularning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda bir jinsli tenglamaning $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}$ yechimi fundamental sistemani tashkil qiladi deyiladi.

Teorema 7.16. (7.11.15) xarakteristik tenglamaning ildizlariga mos keladigan (7.11.16) yechimlar fundamental sistemani tashkil etadi.

Isbot. (7.11.16) funksiyalar sistemasini $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}$ orqali belgilab olib, ularning dastlabki qiymatlaridan tuzilgan quyidagi determinantni qaraymiz:

$$W_p = W_p(z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}) = \begin{vmatrix} z_0^{(1)} & z_0^{(2)} & \dots & z_0^{(p)} \\ z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \dots & z_1^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p-1}^{(1)} & z_{p-1}^{(2)} & \dots & z_{p-1}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Agar (7.11.15) xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari tub bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi (7.11.16) sistema $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n$ bo'lib, $W_p(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n)$ Vandermond determinanti bo'ladi va shuning uchun ham $W_p(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_p^n) \neq 0$. Umumiy holda ham $W_p \neq 0$ ekanini ko'rsatish mumkin. Bu prinsip jihatdan qiyin emas, lekin katta hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi. Biz bunga to'xtalib o'tirmaymiz. Endi $W_p \neq 0$ deb hisoblab, $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}$ ning fundamental sistema ekanini ko'rsatamiz. Aksincha, ya'ni bu sistemani chiziqli bog'langan deb faraz qilaylik. U holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $c_1, c_2, \dots, c_p$ topiladiki,

$$\sum_{i=0}^p c_i z_n^{(i)} = 0$$

barcha n lar, xususiyl holda $n = 0, 1, \dots, p-1$ uchun o'rinli bo'ladi. Lekin $W_p \neq 0$ shartda sistema

$$\begin{cases} c_1 z_0^{(1)} + c_2 z_0^{(2)} + \dots + c_p z_0^{(p)} = 0, \\ c_1 z_1^{(1)} + c_2 z_1^{(2)} + \dots + c_p z_1^{(p)} = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ c_1 z_{p-1}^{(1)} + c_2 z_{p-1}^{(2)} + \dots + c_p z_{p-1}^{(p)} = 0 \end{cases}$$

faqat $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$ trivial yechimga ega bo'ladi. Shunday qilib, $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(p)}$ sistema chiziqli erkli ekan. Endi (7.11.10) sistemaning har bir yechimi bu sistemaning chiziqli kombinatsiyasi ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham,

$$\begin{cases} c_1 z_0^{(1)} + c_2 z_0^{(2)} + \dots + c_p z_0^{(p)} = z_0, \\ c_1 z_1^{(1)} + c_2 z_1^{(2)} + \dots + c_p z_1^{(p)} = z_1, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ c_1 z_{p-1}^{(1)} + c_2 z_{p-1}^{(2)} + \dots + c_p z_{p-1}^{(p)} = z_{p-1} \end{cases}$$

sistema ixtiyoriy $z_0, \dots, z_{p-1}$ uchun yechimga ega. Demak, ixtiyoriy yechim z_n uchun shunday $c_1, \dots, c_p$ larni ko'rsatish mumkinki, bir jinsli tenglamaning yechimi

$$u_n = \sum_{i=1}^p c_i z_n^{(i)}$$

$n = 0, 1, \dots, p-1$ uchun z_n bilan ustma-ust tushadi. Ayirmali tenglamaning $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ dastlabki shartlarni qanoatlantiradigan yechimning

yagonaligidan barcha n lar uchun $z_n = u_n$ ligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi. ■

Teorema 7.17. *Karraliligi k ga teng bo'lgan λ_1 ildizga mos keluvchi (7.11.10) tenglamaning xususiy yechimlaridan tuzilgan*

$$\sum_{q=1}^k A_q C_n^{q-1} \lambda_1^{n-q+1} \quad (7.11.17)$$

chiziqli kombinatsiyalarning to'plami ixtiyoriy $(k-1)$ - darajali ko'phadlar $P_{k-1}(n)$ uchun

$$P_{k-1}(n) \lambda_1^n \quad (7.11.18)$$

funksiyalar to'plami bilan ustma-ust tushadi.

Isbot. Har bir $C_n^{q-1} \lambda_1^{1-q}$ funksiya n ga nisbatan $q-1 < k$ darajali ko'phad bo'lgani uchun (7.11.17) ko'rinishdagi har bir funksiyaning (7.11.18) ko'rinishda yozish mumkin. Ikkinchi tomondan, $P_{k-1}(n)$ ixtiyoriy $(k-1)$ - darajali ko'phad bo'lsin. Ixtiyoriy k tugun uchun $(k-1)$ - darajali ko'phad har bir $P_{k-1}(n)$ ko'phad o'zi uchun interpolatsion ko'phad bo'ladi. Shuning uchun ham Nyuton interpolatsion formulasida

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_1) + f(x_1; x_2)(x - x_1) + \dots + \\ & + f(x_1; \dots x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$n = k$, $L_n = P_{k-1}$, $f = P_{k-1}$ deb olish mumkin. Bundan tashqari, $x_j = j-1$ va $x = n$ deb olsak, u holda

$$P_{k-1}(n) = B_0 + B_1 n + B_2 n(n-1) + \dots + B_{k-1} n(n-1) \dots (n-k+2)$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $B_j = P_{k-1}(0; \dots; j)$. Bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$P_{k-1}(n) = \sum_{q=0}^{k-1} A_q C_n^{q-1} \lambda_1^{1-q}, \quad A_q = B_{q-1} (q-1)! \lambda_1^{q-1}.$$

Demak, (7.11.18) ko'rinishdagi har bir funksiyaning (7.11.17) ko'rinishda yozish mumkin. Teorema isbot bo'ldi. ■

Shunday qilib, (7.11.16) fundamental sistema o'rniga ushbu

$$z_n^{(1)} = \lambda_1^n, \quad z_n^{(2)} = n \lambda_1^n, \dots, z_n^{(k_1)} = n^{k_1-1} \lambda_1^n, \quad z_n^{k_1+1} = \lambda_{(k_1+1)}^n, \dots$$

fundamental sistemani olish mumkin.

Misol 7.7. Quyidagi

$$z_{n+1} + 4z_n - 5z_{n-1} = 0$$

bir jinsli chiziqli-ayirmali tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish: Bu tenglamaning xarakteristik ko'phadi

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = -5$ bo'lgani uchun umumiy yechim

$$z_n = c_1 + (-1)^n c_2 5^n$$

bo'ladi. ■

Misol 7.8. Nol va birdan boshlanib, har bir keyingisi ikkita oldingilarining yig'indisiga teng bo'lgan Fibonachchi sonlarini qaraylik: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, Umumiy hadining ko'rinishi topilsin.

Yechish: Masala shartiga ko'ra

$$z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$$

chekli-ayirmali tenglamani $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ dastlabki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilishi kerak. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

ning ildizlari $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ bo'lgani uchun umumiy yechim

$$z_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

bo'ladi. O'zgarmas c_1 va c_2 dastlabki shart, ya'ni

$$c_1 + c_2 = 0, (c_1 + c_2) + \sqrt{5}(c_1 - c_2) = 2$$

tenglamadan topiladi:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

demak,

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$
■

Misol 7.9. Ushbu

$$z_{n+4} + 2z_{n+3} + 3z_{n+2} + 2z_{n+1} + z_n = 0$$

tenglamaning $z_0 = z_1 = z_3 = 0$, $z_2 = -1$ dastlabki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: Xarakteristik tenglamani

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$ kabi yozib olib, uning

$$\lambda_1 = \lambda_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

ildizlarini topamiz. Umumiy yechim esa:

$$\begin{aligned} z_n &= (c_1 + c_2 n)e^{\frac{2\pi i n}{3}} + (c_3 + c_4 n)e^{-\frac{2\pi i n}{3}} \\ &= (A_1 + A_2 n) \cos \frac{2\pi n}{3} + (A_3 + A_4 n) \sin \frac{2\pi n}{3} \end{aligned}$$

bu yerda A_1, A_2, A_3, A_4 , yangi ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bu o'zgarmaslarni topish uchun dastlabki shartlardan foydalanib, quyidagi tenglamalarni tuzamiz:

$$\begin{aligned} z_0 &= A_1 = 0, \\ z_1 &= (A_1 + A_2) \cos \frac{2\pi}{3} + (A_3 + A_4) \sin \frac{2\pi}{3} = 0, \\ z_3 &= A_1 + 3A_2 = 0, \\ z_2 &= (A_1 + 2A_2) \cos \frac{4\pi}{3} + (A_3 + 2A_4) \sin \frac{4\pi}{3} = -1. \end{aligned}$$

Bundan esa

$$A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = -A_4 = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Shunday qilib,

$$z_n = \frac{2(n-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi n}{3}.$$

7.12-§. Aniqmas integrallarni hisoblash¹

7.12.1 Masalaning qo'yilishi

Agar $f(x)$ funksiya $[x_0, X]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda boshlang'ich funksiyani quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad x \in [x_0, X]. \quad (7.12.1)$$

Demak, boshlang'ich funksiyani topish $\int_{x_0}^x f(t)dt$ integralning qiymatlarini topish bilan teng kuchlidir.

Volterra integral tenglamasi

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, t)f(t)dt$$

da ushbu

$$y(x) = \int_a^x K(x, t)f(t)dt \quad (7.12.2)$$

integral bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Biz faqat boshlang'ich funksiyani hisoblash bilan shug'ullanamiz. Integralning yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgani va $y(x)$ ning ko'p nuqtalardagi qiymatlarini topishga ehtiyoj tug'ilishi tufayli aniqmas integrallarni hisoblash masalasi o'ziga xos bo'lib, ular uchun maxsus metodlar yaratishga to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik, (7.12.1) integralning qiymatini argumentning $x = x_0, x_1, x_2, \dots$ qiymatlari uchun hisoblash talab qilinsin. Aytaylik, $y_0, y_1, \dots, y_n$ topilgan bo'lib, y_{n+1} ni topish kerak bo'lsin. Buning uchun $y(x)$ ning avval topilgan mavjud y_k ($k \leq n$) qiymatlaridan foydalanish mumkin. Biz avval $f(x)$ formula yordamida (ya'ni uning istalgan qiymatini topish mumkin bo'lgan) aniqlangan holni qaraymiz. Paragraf oxirida esa $f(x)$ jadval bilan berilgan holni ko'rib o'tamiz. Ko'pincha $f(x)$ ning qiymatini kerakli x nuqtalarda hisoblab, y_{n+1} ni istalgan aniqlikda topish mumkin bo'ladi. Bu yerda $y(x)$ ning ko'p qiymatlarini topish lozim

¹Mazkur paragrafni yozishda [23] dan foydalanildi.

bo'lgani uchun f ning har bir qiymatidan $y(x)$ ning bir necha qiymatlari-ni topishda foydalanish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rish mumkin: y_{n+1} ni hisoblashda

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \quad (7.12.3)$$

tenglikdan foydalanish mumkin. O'ng tomondagi integralni hisoblashda aniq integral uchun qurilgan formulalarning birortasidan foydalanish mumkin. Lekin bu usul quyidagi ko'rinib turgan nuqsonga ega: f ning qiymatlari, agar ular $[x_n, x_{n+1}]$ ning chetki nuqtalariga mos kelmasa, faqat y_{n+1} ni hisoblashda foydalanib, avvalgi $y_n, y_{n-1}, \dots$ va keyingi $y_{n+2}, y_{n+3}, \dots$ larni hisoblashda qatnashmaydi.

Kelgusida f ning qiymatlarini hisoblashning bir necha qadamlarida ish-latishga imkon beradigan usullar haqida so'z yuritiladi.

Aniqmas integralni topishda foydalaniladigan integrallash qoidasi muvaffaqiyatsiz tanlangan bo'lsa, hisoblash xatolari yig'ilib bir necha qadamdan keyin keraklisidan katta bo'lib ketishi mumkin. Xuddi shu holni misolda ko'raylik. Faraz qilaylik, y_{n+1} ni hisoblash uchun oldingi y_{n-1} va y_n qiymatlar hamda hosilaning ikkita $y'_{n-1} = f_{n-1}$ va $y_n = f_n$ qiymatlari asosida interpolatsiyadan foydalanaylik. Bu yerda ikkita ikki karrali tugunlarga ega bo'lganimiz uchun Ermit formulasidan foydalani-shimiz mumkin va qoldiq hadni tashlab quyidagi integrallash qondasiga ega bo'lamiz:

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n + 2f_{n-1}). \quad (7.12.4)$$

Bu tenglik barcha uchinchi tartibli ko'phadlar uchun aniqdir. Bu formula bir marta qo'llashda yaxshi natija beradi, lekin ko'p marta qo'llash uchun esa xato tez ortib borishi sababli yaroqsizdir.

Faraz qilaylik, f ning barcha qiymatlari va y_{n-1} aniq hisoblangan bo'lib, y_n ni hisoblashda ε xatoga (masalan, yaxlitlash hisobidan) yo'l qo'yilgan bo'lsin. Birinchi bobda $y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1}$ hisoblash jarayoni uchun ko'rganimizdek, bu xato $y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots$ larni topishda ularga mos ravishda $-4\varepsilon, 21\varepsilon, -104\varepsilon, \dots$ kabi o'sa borib noturg'unlik yuz be-radi. Keyingi punktda y_{n+k} ni topishda bu xato $\frac{1+(-5)^k}{6}\varepsilon$ qonuniyat bilan o'sishini ko'ramiz. Bundan (7.12.4) formulaning hisoblash uchun yaroqsiz-ligi ma'lum bo'ladi. Uning o'rniga, (7.12.3) integralni trapetsiya formulasi bilan hisoblasak,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formulaning algebraik aniqlik darajasi birga teng bo'lsa ham, ko'p martalab qo'llash uchun qulaydir, chunki xato jamlanmaydi. Ko'p martalab qo'llaniladigan qoidalarining turg'unliklariga katta e'tibor berish lozim. Bu masalalarni keyingi punktda ko'rib o'tamiz.

7.12.2 Hisoblash xatosi va yaqinlashish

Faraz qilaylik, (7.12.1) integralning qiymatini $h > 0$ qadamli $x_k = x_0 + kh$ ($x_0 + Nh \leq X < x_0 + Nh + h$) to'rdagi hisoblash uchun

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) \quad (7.12.5)$$

formula tanlangan bo'lsin. Bu formula bilan hisoblashda y_{n+1} ni topish uchun $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$ va f ning $m = m(n)$ ta ξ_{nj} ($j = \overline{1, m}$) qiymatlari ma'lum deb qaraymiz. Agar bu formulada taqribiy qiymat y_{n+1} o'rniga aniq qiymat $y(x_{n+1})$ ni qo'ysak, tenglik bajarilmaydi va tenglik o'rinli bo'lishi uchun (7.12.5) ning o'ng tomoniga formulaning xatosi deb ataluvchi qo'shimcha r_n hadni qo'shish kerak:

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_i y(x_{n-i}) + \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) + r_n. \quad (7.12.6)$$

Odatda hisoblashlar yaxlitlash bilan bajariladi. Shuning uchun ham n -qadamdagi yaxlitlash xatosini $-\rho_n$ orqali belgilasak, (7.12.5) formula o'rniga ushbu

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) - \rho_n \quad (7.12.7)$$

hisoblash formulasiga ega bo'lamiz. Bundan keyingi asosiy vazifamiz y_k taqribiy qiymatning

$$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k$$

xatosini o'rganishdan iboratdir. Buning uchun (7.12.7) ni (7.12.6) dan ayirib, xato uchun

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i \varepsilon_{n-i} + r_n + \rho_n \quad (7.12.8)$$

o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan chekli-ayirmali tenglamani hosil qilamiz. Biz bundagi y_k ($k = \overline{0, p}$) taqribiy qiymatlarning xatolari

ε_k ($k = \overline{0, p}$) ma'lum deb qaraymiz. Qolgan barcha ε_k ($k > p$) ketma-ket ravishda (7.12.8) formuladan aniqlanadi. (7.12.8) da $n = p$ deb olsak, ε_{p+1} dastlabki ε_k ($k = \overline{0, p}$) va $r_p + \rho_p$ larning chiziqli kombinatsiyasi sifatida topiladi. Bu natijadan foydalanib va (7.12.8) da $n = p+1$ deb olib, ε_{p+2} ni dastlabki ε_k ($k = \overline{0, p}$) va $r_p + \rho_p, r_{p+1} + \rho_{p+1}$ larning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi va hokazo. Shunday qilib, (7.12.8) tenglama yordamida $n > p$ uchun ε_k ($k \leq p$) va $r_p + \rho_p, \dots, r_{n-1} + \rho_{n-1}$ larning bir jinsli funksiyasi kabi ifodalanadi:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^p \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i + \sum_{j=p}^{n-1} G_n^{(j)} (r_j + \rho_j). \quad (7.12.9)$$

Ko'rinib turibdiki, $\Gamma_n^{(i)}$ funksiya (7.12.8) tenglamaga mos

$$L(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} - \sum_{i=0}^p A_i \varepsilon_{n-i} = 0 \quad (7.12.10)$$

bir jinsli tenglamaning $\varepsilon_k = \delta_k^i$ ($k = \overline{0, p}$) dastlabki shartlarga mos keluvchi xususiy yechimidir. Haqiqatan ham, (7.12.9) da barcha $j = \overline{p, n-1}$ uchun $r_j + \rho_j = 0$ deb olib, bu dastlabki shartlardan foydalansak $\varepsilon_n = \Gamma_n^{(i)}$ kelib chiqadi. Shuning uchun ham $\Gamma_n^{(i)}$ funksiya ε_i ning *ta'sir yoki Grin funksiyasi* deyiladi. Xuddi shunga o'xshash $G_n^{(i)}$ nolli $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_p = 0$ dastlabki shartni qanoatlantiradigan

$$L(\varepsilon_n) = \delta_n^i \quad (n, i \geq p) \quad (7.12.11)$$

tenglamaning yechimidir. Haqiqatan ham, (7.12.9) da $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_p = 0$, $r_j + \rho_j = \delta_j^i$ deb olsak, $\varepsilon_n = G_n^{(i)}$ kelib chiqadi. $G_n^{(i)}$ funksiya $r_i + \rho_i$ ozod hadning *tavsir funksiyasi* deyiladi. Endi $G_n^{(i)} = \Gamma_{n+p-i-1}^{(p)}$ ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, (7.12.11) tenglama faqat $n = i$ bo'lganda bir jinsli bo'lmagan hamda $n < i$ va $n > i$ uchun bir jinsli tenglama bo'lib, $G_n^{(i)}$ quyidagi

$$L(\varepsilon_n) = 0 \quad (n > i), \varepsilon_{i-p+1} = \varepsilon_{i-p+2} = \dots = \varepsilon_i = 0, \varepsilon_{i+1} = 1$$

masalaning yechimidir. Bu masala $\Gamma_n^{(i)}$ ni aniqlaydigan masaladan faqat shu bilan farq qiladiki, bunda n o'q bo'yicha $i - p + 1$ birlikka surilgandir, demak, $G_n^{(i)} = \Gamma_{n+p-i-1}^{(p)}$.

Bundan foydalanib, ε_n ni quyidagicha yozamiz:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^p \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i + \sum_{j=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} (r_j + \rho_j) \quad (7.12.12)$$

yoki

$$\varepsilon_n = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)}, \quad (7.12.13)$$

bu yerda

$$E_n^{(1)} = \sum_{i=0}^p \Gamma_n^{(1)} \varepsilon_i, E_n^{(2)} = \sum_{i=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} \rho_j, E_n^{(3)} = \sum_{i=p}^{n-1} \Gamma_{n+p-j-1}^{(p)} r_j. \quad (7.12.14)$$

Ko'rinib turibdiki, $E_n^{(i)}$ (7.12.10) bir jinsli tenglamaning $E_n^{(1)} = \varepsilon_k (k = \overline{0, p})$ dastlabki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lib, $E_n^{(2)}$ va $E_n^{(3)}$ lar mos ravishda $L(E_n) = \rho_n$ va $L(E_n) = r_n$ bir jinsli bo'lmagan tenglamalarning nolli $E_k = 0 (k = \overline{0, p})$ dastlabki shartlarni qanoatlantiradigan yechimdir.

Endi $h \rightarrow 0$ da $y_n (n = \overline{0, N})$ taqribiy yechimlarning $y(x_n)$ aniq yechimga tekis yaqinlashish shartini aniqlaymiz. Buning uchun ular orasidagi masofa sifatida

$$\rho(y, y_n) = \max_n |\varepsilon_n| = \max_n |y(x_n) - y_n|$$

miqdorni olamiz. ε_n, ρ_n va r_n lar o'zaro bog'liq bo'lmaganliklari sababli, $h \rightarrow 0$ da $\rho(y, y_n) \rightarrow 0$ bajarilishi uchun $h \rightarrow 0$ da $\max_n E_n^{(k)} (k = 1, 2, 3)$ lar nolga intilishlari kerak.

Ishni E_n ni o'rganishdan boshlaymiz. Agar dastlabki xatolar $\varepsilon_k (k < p)$ absolyut qiymatlari bo'yicha chegaralangan $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ bo'lsa, u holda (7.12.14) ga ko'ra

$$|E_n| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^p |\Gamma_n^{(i)}|$$

baho kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, (7.12.15) formula o'zgarmas y ni aniq integrallasin va $f = 0$ bo'lsin. U holda bu formulaning koeffitsiyentlari $\sum_{i=0}^p A_i = 1$ shartni qanoatlantirishlari kerak. Bu esa $\varepsilon_n = 1$ bir jinsli $L(\varepsilon_n) = 0$ tenglamaning yechimi ekanini ko'rsatadi. Bundan tashqari, u o'zgarmas va $f = 0$ bo'lgani uchun $\rho_j = r_j = 0$ bo'lib, (7.12.14) dan

$$\sum_{i=0}^p \Gamma_n^{(i)} = 1$$

kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy n uchun

$$\sum_{i=0}^p |\Gamma_n^{(i)}| \geq 1,$$

$n \rightarrow \infty$ da E_n ning tartibi bilan $\sum_{i=0}^p |\Gamma_n^{(i)}|$ yig'indining chegaralanganligi uzviy bog'liqdir.

Shu munosabat bilan, quyidagi ta'rifni kiritamiz.

Ta'rif 7.8. Agar shunday M soni topilsaki, $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ ($i \leq p$) bo'lganda barcha $n \geq p$ uchun

$$|E_n| = \left| \sum_{i=0}^p \Gamma_n^{(i)} \varepsilon_i \right| \leq M\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (7.12.5) formula dastlabki qiymatlarining ε_i ($i \leq p$) xatolariga nisbatan turg'un deyiladi.

Endi turg'unlik kriteriysini keltiramiz.

Teorema 7.18. (7.12.5) formula dastlabki xatolar ε_i ($i \leq p$) ga nisbatan turg'un bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

$$1) \lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} = 0$$

tenglamaning λ_k ildizlari orasida moduli bo'yicha birdan kattasi mavjud emas;

2) moduli birga teng bo'lgan ildizlar tubdir.

Isbot. Oldingi paragrafdan ma'lumki (7.12.10) bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli ayirmali tenglamaning umumiy yechimi

$$\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} = 0$$

$(p+1)$ - darajali algebraik tenglamaning ildizlari orqali aniqlanadi.

Tenglamaning ildizlarini $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ va ularning karralarini $k_1, k_2, \dots, k_m$ orqali belgilasak, u holda $\lambda_i^n n^j$ ($j = \overline{0, k_i - 1}; i = \overline{1, m}$) funksiyalar $L(\varepsilon_n) = 0$ bir jinsli tenglama yechimlarining fundamental sistemasini tashkil etadi. Tenglamaning ixtiyoriy yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, dastlabki qiymatlarning ta'sir funksiyasi $\Gamma_n^{(i)}$ ($i = \overline{0, p}$) ham fundamental sistemani tashkil etadi va bu sistema $\lambda_i^n n^j$ yechimlardan maxsusmas matritsali chiziqli almashtirish yordamida hosil bo'ladi.

Ushbu $\sum_{i=0}^p |\Gamma_n^{(i)}|$ yig'indining chegaralanganligi $\Gamma_n^{(i)} (i = \overline{0, p})$ funksiyalarning chegaralanganliklari bilan va demak, barcha n uchun $\lambda_i^n n^j (j = \overline{0, k_i - 1}; i = \overline{1, m})$ yechimlarning chegaralanganliklari bilan teng kuchlidir. Bu esa λ_i lar modullari bo'yicha birdan katta bo'lmagandagina yoki $|\lambda_i| = 1$ holda esa $k_i = 1$ bo'lgandagina o'rinalidir. Shu bilan teorema isbotlandi. ■

Endi $E_n^{(2)}$ ni tekshiramiz. Agar ρ barcha qadam uchun ρ_n larning yuqori chegarasi bo'lsa, ya'ni $|\rho_n| \leq \rho$, u holda (7.12.14) ga ko'ra

$$|E_n^{(2)}| \leq \rho \sum_{j=p}^{n-1} |\Gamma_{n+p-j-1}^{(p)}| = \rho \sum_{j=p}^{N-1} |\Gamma_j^{(p)}|,$$

$$\max_n |E_n^{(2)}| \leq \rho \sum_{j=p}^{N-1} |\Gamma_j^{(p)}|, \quad (7.12.15)$$

bo'ladi. Agar $\rho_n, |\rho_n| \leq p$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilsak, u holda oxirgi baho aniq bo'lib, $n = N$ va $\rho_k = \rho \operatorname{sign} \Gamma_{N+p-k-1}^{(p)}$ bo'lganda tenglikka erishiladi.

Ko'rinib turibdiki, $h \rightarrow 0$ da N cheksiz ortib boradi.

Endi $L(\varepsilon_n) = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lgan ushbu

$$\Gamma_n^{(p)}, \Gamma_{n+1}^{(p)}, \dots, \Gamma_{n+p}^{(p)} \quad (7.12.16)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerda $\Gamma_p^{(p)} = 1$ ni hisobga olsak, u holda quyidagi matritsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \Gamma_{p+1}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \Gamma_{p+1}^{(p)} & \dots & \Gamma_{2p-2}^{(p)} & \Gamma_{2p-1}^{(p)} & \Gamma_{2p}^{(p)} \end{bmatrix}$$

$n = 1, 2, \dots, p$ uchun (7.12.16) sistemaning qiymatlarini tasvirlaydi. Bu matritsaning determinanti noldan farqli. Shuning uchun ham (7.12.16) sistema fundamental sistema bo'lib, u $\Gamma_n^{(0)}, \Gamma_n^{(1)}, \dots, \Gamma_n^{(p)}$ va demak, $\lambda_i^n n^j$ yechimlardan maxsusmas chiziqli almashtirish yordamida hosil bo'ladi. Ularning chegaralanganligi $\Gamma_n^{(i)} (i \leq p)$ va $\lambda_i^n n^j (j = \overline{0, k_i - 1}; i = \overline{0, m})$ funksiyalarning chegaralanganligi bilan teng kuchlidir.

Ta'rif 7.9. Agar h ga bog'liq bo'lmagan shunday M_1 soni mavjud bo'lib, barcha $N > p$ uchun

$$\left| E_n^{(2)} \right| \leq M_1 N \rho \quad (n = \overline{p, N-1})$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (7.12.5) hisoblash formulasi ρ_n yaxlitlash xatolariga nisbatan turg'un deyiladi.

Teorema 7.19. (7.12.5) hisoblash formulasining ρ_n yaxlitlash xatolariga nisbatan turg'un bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarlidir:

- 1) $\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} = 0$ tenglama moduli bo'yicha birdan katta ildizga ega emas va
- 2) moduli birga teng bo'lgan ildizlar tubdir.

Isbot. Haqiqatan ham, teorema shartlari bajarilganda $\lambda_i^n n^j$ ($j = \overline{0, k_i - 1}; i = \overline{1, m}$) yechimlar, ular bilan birgalikda esa $\Gamma_n^{(i)}$ ($i \leq p$) ta'sir funksiyalari chegaralangan bo'ladi, xususiyligida $\left| \Gamma_n^{(p)} \right| \leq M_1$. Bundan va (7.12.15) tengsizlikdan teorema tasdig'i kelib chiqadi. ■

Shunday qilib, y_i ($i \leq p$) dastlabki qiymatlarni aniqroq hisoblash va ρ_n yaxlitlash xatolarini kamaytirish yo'li bilan $h \rightarrow 0$ bo'lganda doimo

$$\max_n \left| E_n^{(k)} \right| \rightarrow 0 \quad (k = 1, 2)$$

bo'lishiga erishish mumkin. Bundan biz quyidagini aytishimiz mumkin: agar $h \rightarrow 0$ da $\max_n \left| E_n^{(3)} \right| \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda (7.12.5) formula shubhasiz tekis yaqinlashuvchi hisoblash jarayoniga yo'l qo'yadi.

Faraz qilaylik, $r = r(h)$ barcha n ($p \leq n \leq N-1$) uchun xato absolyut qiymatining yuqori chegarasi bo'lsin: $|r_n| \leq r$. U holda

$$\left| E_n^{(3)} \right| \leq r \sum_{i=p}^{n-1} \left| \Gamma_{n+p-i-1}^{(p)} \right| = r \sum_{k=p}^{n-1} \left| \Gamma_k^{(p)} \right|$$

va

$$\max_n \left| E_n^{(3)} \right| \leq r \sum_{k=p}^{N-1} \left| \Gamma_k^{(p)} \right|. \quad (7.12.17)$$

Bundan quyidagiga ega bo'lamiz.

Teorema 7.20. Agar $h \rightarrow 0$ bo'lganda

$$r(h) \sum_{k=p}^{N-1} |\Gamma_k^{(p)}| \rightarrow 0$$

bo'lsa, u holda (7.12.5) formula tekis yaqinlashuvchi hisoblash jarayoniga yo'l qo'yadi.

Teorema 7.21. Agar $\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} = 0$ tenglamaning moduli bo'yicha birdan katta ildizi mavjud bo'lmasa va moduli birga teng bo'lgan ildizi tub bo'lsa, u holda $h \rightarrow 0$ bo'lganda

$$\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$$

bo'lsa, (7.12.5) formula tekis yaqinlashuvchi hisoblash jarayoniga yo'l qo'yadi.

Isbot. Biz yuqorida ko'rganimizdek, teorema shartlari bajarilganda, shunday M_1 soni topiladiki, barcha $k \geq p$ uchun

$$|\Gamma_k^{(p)}| \leq M_1$$

bo'ladi. Bundan va (7.12.17) dan quyidagi bahoga ega bo'lamiz:

$$\max_n |E_n^{(3)}| \leq M_1(N-p)r \leq M_1 r N \leq M_1 \frac{r}{h} (X - x_0).$$

Bundan esa teorema tasdig'i kelib chiqadi. ■

Teorema 7.22. Agar $A_i \geq 0$ ($i = \overline{0, p}$) va $\sum_{i=0}^p A_i = 1$ bo'lsa, u holda (7.12.5) formula dastlabki xatolarga nisbatan turg'un bo'ladi.

Isbot. (7.12.5) formulaga mos keluvchi bir jinsli

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerdan

$$|y_{n+1}| \leq \sum_{i=0}^p A_i |y_{n-i}| \leq \max_{n-p \leq k \leq n} |y_k| \sum_{i=0}^p A_i = \max_{n-p \leq k \leq n} |y_k|.$$

Bu bahoni bir necha marta qo'llash bilan barcha n lar uchun $|y_n| \leq \max_{0 \leq k \leq p} |y_k|$ tengsizlikning o'rinli ekanligini ko'ramiz. Boshqacha aytganda, bir jinsli tenglama yechimining barcha qiymatlari $y_0, y_1, \dots, y_n$ dastlabki qiymatlarning moduli bo'yicha eng kattasidan ortmaydi. Bundan ko'rinadiki, dastlabki qiymatlarning barcha ta'sir funksiyalari modullari bo'yicha birdan ortmaydi:

$$|\Gamma_n^{(i)}| \leq 1 \quad (i = \overline{0, p}; \quad n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bundan esa, yuqorida ko'rganimizdek,

$$\lambda^{p+1} - \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i} = 0$$

tenglamaning ildizlari orasida modullari bo'yicha birdan kattasi mavjud emasligi va modullari bo'yicha birga tenglarining tub ekanliklari kelib chiqadi. Bu yerdan esa teorema tasdig'i teorema 7.18 dan kelib chiqadi. ■

Endi (7.12.4) formulani tekshiramiz. Unga mos keluvchi $y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1}$ bir jinsli tenglamani olaylik. Buning xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ bo'lib, ildizlari $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$. Demak,

$$E_{n+1} = -4E_n + 5E_{n-1}$$

tenglamaning $E_0 = \varepsilon_0$ va $E_1 = \varepsilon_1$ dastlabki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$E_n = \frac{1}{6}(\varepsilon_1 + 5\varepsilon_0) + \frac{(-1)^n}{6}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)5^n$$

bo'ladi. Agar $\varepsilon_0 - \varepsilon_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda n ning o'sishi bilan E_n juda tez o'sadi. Bundan esa teorema 7.19 ga ko'ra (7.12.4) formulaning dastlabki xatoga nisbatan turg'un emasligi kelib chiqadi. Bu formulaning yaxlitlash xatosiga nisbatan xam turg'un bo'lmasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Aksincha,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

formula teorema 7.22 ga ko'ra dastlabki xatoga nisbatan turg'un hisoblash jarayonini beradi.

7.12.3 Jadval ko'rinishida berilgan funksiyalarni integrallash

Faraz qilaylik, $[x_0, X]$ oraliqning teng uzoqlikda joylashgan

$$x_n = x_0 + nh \quad (n = \overline{0, N}; x_0 + Nh \leq X < x_0 + Nh + h)$$

nuqtalarida $f(x)$ ning qiymatlari berilgan bo'lib, shu qiymatlar bo'yicha

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt$$

ni o'sha teng uzoqlikda joylashgan $x_n = x_0 + nh$ nuqtalarda hisoblash talab qilinsin.

Biz avval dastlabki jadvalni davom ettirish masalasini ko'rib chiqamiz. Jadvalning boshlang'ich va oxirgi qismlarini tuzish masalalarini keyinroq ko'ramiz. Faraz qilaylik, hisoblashlar $x_n = x_0 + nh$ tugungacha bajarilgan bo'lib, $y(x)$ ning oxirgi hisoblangan qiymati $y(x_n)$ bo'lsin. Keyingi $y(x_{n+1})$ qiymatni topish uchun ixtiyoriy ma'lum $y(x_k)$ ($k \leq n$) qiymatlardan va f ning jadvaldagi ixtiyoriy qiymatidan foydalanish mumkin. Biz faqat hisoblangan bitta $y(x_n)$ qiymatdan foydalanib, $y(x_{n+1})$ ni hosil qiladigan usullarni ko'rib o'tamiz. Ma'lumki, $y(x_{n+1})$ ning aniq qiymati

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$$

formula bilan topiladi. Bundan foydalanish uchun $f(t)$ $[x_n, x_{n+1}]$ oraliqning barcha nuqtalarida ma'lum bo'lishi kerak. Lekin bizga $f(t)$ ning aniq qiymati ma'lum emas, $f(t)$ ning $[x_n, x_{n+1}]$ dagi taqribiy qiymati interpolatsiya yo'li bilan topilishi kerak. Interpolatsiyalash uchun $[x_n, x_{n+1}]$ oraliqqa yaqinroq joylashgan nuqtalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Shu maqsadda Bessel formulasidan foydalanish mumkin. Agar $[x_n - kh, x_n + kh + h]$ oraliqda $f(x)$ funksiya $2k + 2$ marta uzluksiz hosi-

laga ega bo'lsa, u holda Bessel formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
 f(t) = f(x_n + uh) &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{u - 0,5}{1!} \Delta f_n + \\
 &+ \frac{u(u-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{(u-0,5)u(u-1)}{3!} \Delta^3 f_{n-1} + \dots + \\
 &+ \frac{(u+k-1) \dots (u-k)}{(2k)!} \cdot \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} + \\
 &+ \frac{(u-0,5)(u+k-1) \dots (u-k)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{n-k} + r(t), \\
 r(t) &= h^{2k+2} \frac{(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\xi), \\
 &[x_n - kh < \xi < x_n + kh + h].
 \end{aligned}$$

Endi f ning bu ko'rinishini

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt = h \int_0^1 f(x_n + uh) du$$

integralga qo'yib, uncha murakkab bo'lmagan amallar bajargandan so'ng $y(x_{n+1})$ uchun quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\begin{aligned}
 y(x_{n+1}) = y(x_n) + h &\left[\frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right. \\
 &+ \frac{11}{720} \cdot \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \frac{191}{60480} \cdot \frac{\Delta^6 f_{n-3} + \Delta^6 f_{n-2}}{2} + \\
 &\left. + \dots + B_k \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} \right] + R_{n,k},
 \end{aligned} \quad (7.12.18)$$

$$B_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1) \dots (u-k) du,$$

$$R_{n,k} = \frac{h^{2k+3}}{(2k+2)!} \int_0^1 (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) f^{(2k+2)}(\xi) du.$$

Bundagi $(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)$ ko'paytma $[0,1]$ oraliqda o'z ishorasini saqlagani uchun o'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llash mumkin, u holda

$$\begin{aligned}
 R_{n,k} &= h^{2k+3} B_{k+1} f^{(2k+2)}(\eta), \\
 x_n + kh &< \eta < x_n + kh + h.
 \end{aligned}$$

Agar (7.12.18) formulada qoldiq had $R_{n,k}$ ni tashlasak, y_{n+1} ni topish uchun taqribiy formulaga ega bo'lamiz. Agar bu formulani $y_1, y_2, \dots, y_n$ dastlabkilarni hisoblash uchun qo'llaydigan bo'lsak, u holda $[x_0, X]$ oraliqdan chapga chiqishga, ya'ni $f(x_0 - h), f(x_0 - 2h), \dots, f(x_0 - kh)$ larni hisoblashga to'g'ri keladi.

Agar bu qiymatlar bizga ma'lum bo'lmasa, u holda dastlabki qiymatlarni hisoblash uchun boshqacha yo'l tutish mumkin. Masalan, $y(x_1)$ ni

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt$$

formula bilan hisoblashda $f(t)$ ni $[x_0, x_1]$ oraliqda interpolatsiyalash uchun Nyutonning birinchi interpolatsion formulasidan foydalanish mumkin:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x_0 + uh) = f_0 + \frac{u}{1!} \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \\ &+ \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{u(u-1) \dots (u-k+1)}{k!} \Delta^k f_0 + r(t), \\ r(t) &= h^{k+1} \frac{u(u-1) \dots (u-k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Buni integralga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0) + h \left[\frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 f_0 + \dots + C_k \Delta^k f_0 \right] + \\ &+ R_{n,k}, \end{aligned}$$

$$C_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 u(u-1) \dots (u-k+1) du,$$

$$R_{n,k} = C_{k+1} h^{k+2} f^{(k+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_k.$$

$R_{n,k}$ qoldiq hadni tashlab, $y(x_1)$ ni aniqlaydigan taqribiy formulaga ega bo'lamiz. Bu yerda x_0 ni x_1 bilan almashtirib, $y(x_2)$ ni hosil qilamiz va h.k. Shunga o'xshash $y(x_{N-k+1}), \dots, y(x_N)$ larni hisoblash uchun Nyutonning ikkinchi interpolatsion formulasidan foydalanib, quyidagi formulani chiqarish

mumkin:

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + h \left[\frac{f_N + f_{N-1}}{2} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{N-2} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{N-3} - \frac{19}{720} \Delta^4 f_{N-4} - \dots + (-1)^{k-1} C_k \Delta^k f_{N-k} \right] + R_{N,k}.$$

7.13-§. Kubatur formulalar

Matematikaning o'zida va uning tatbiqlarida ko'pincha karrali integrallarni taqribiy hisoblashga ehtiyoj tug'iladi. Kvadratur formulalar kabi bu yerda ham karrali integralning qiymatini integral ostida funksiyaning chekli miqdordagi $P_1, P_2, \dots, P_N$ nuqtalardagi qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasi yordamida aniqlaydigan ushbu

$$I = \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sum_{k=1}^N A_k f(P_k) + R(f)$$

formula *kubatur formula* deyiladi. Bundagi

$$P_1, P_2, \dots, P_N \quad (P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \Omega$$

nuqtalarning to'plami *integrallash to'ri*, A_k ($k = \overline{1, N}$) *kubatur formulaning koeffitsiyentlari* va $R(f)$ *goldiq had* deyiladi. Bu paragrafda kubatur formulalarni tuzishning ayrim usullarini ko'rib chiqamiz. Biz asosan ikki karrali integrallarni qaraymiz.

7.13.1 Kvadratur formulalarni ketma-ket qo'llash

Kubatur formula tuzishning eng sodda usuli, bu karrali integralni takroriy integral shaklida tasvirlab, bir karrali integrallar uchun qurilgan kvadratur formulalarni qo'llashdan iboratdir.

Faraz qilaylik, integrallash sohasi Ω to'g'ri burchakli to'rtburchak $\{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ bo'lsin. Ushbu

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (7.13.1)$$

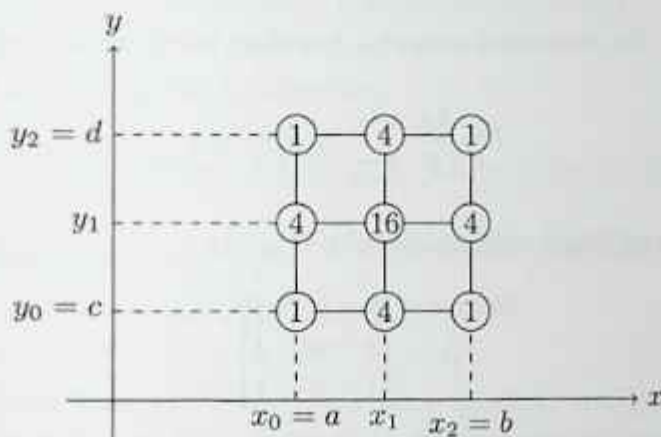
integralni hisoblash uchun Simpson formulasini ikki marta qo'llaylik. Buning uchun $[a, b]$ va $[c, d]$ oraliqlarning har birini quyidagi nuqtalar bilan ikkiga bo'lamiz:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a+h, \quad x_2 = a+2h = b; \quad y_0 = c, \quad y_1 = c+k, \quad y_2 = c+2k = d,$$

bu yerda

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad k = \frac{d-c}{2}.$$

Shunday qilib, hammasi bo'lib to'qqizta (x_i, y_j) ($i, j=0,1,2$) nuqtaga ega bo'lamiz (chizma 7.13.1).



Chizma 7.13.1

Endi (7.13.1) integralda

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

ichki integralni hisoblash uchun Simpson formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} I &\approx \int_a^b \frac{k}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] dx = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^b f(x, y_0) dx + 4 \int_a^b f(x, y_1) dx + \int_a^b f(x, y_2) dx \right]. \end{aligned}$$

Har bir integralga yana Simpson formulasini qo'llasak, u holda

$$I = \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \}$$

yoki

$$I \approx \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2) + 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + 16f(x_1, y_1)] \} \quad (7.13.2)$$

hosil bo'ladi. Bu formulani qisqacha quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$I \approx \frac{hk}{9} \sum_{i,j=0}^2 \lambda_{ij} f(x_i, y_j).$$

Bu yerda λ_{ij} quyidagi uchinchi tartibli

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsaning elementlaridir (chizma 7.13.1).

Ko'rsatish mumkinki (7.13.2) formulaning qoldiq hadi

$$R(f) = -\frac{h^5 k}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial x^4} - \frac{hk^5}{45} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial y^4} - \frac{h^5 k^5}{90^2} \frac{\partial^8 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial x^4 \partial y^4} \quad (7.13.3)$$

$$(a < \xi_i < b; c < \eta_i < d)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qoldiq hadning bu ko'rinishidan ma'lum bo'ladiki, 9 nuqtali (7.13.2) formula darajasi uchdan ortmagan integrallarni aniq integrallaydi.

Misol 7.10. Simpson formulasi yordamida

$$I = \int_4^5 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x+y)^2}$$

hisoblansin.

Yechish: Bu yerda

$$h = \frac{5-4}{2} = 0,5; k = \frac{1-0}{2} = 0,5$$

deb olamiz. Integral ostidagi funksiya $f(x, y) = (x + y)^{-2}$ qiymatlari quyidagi jadvalda keltirilgan

$y_i \backslash x_i$	4	4,5	5
0	0,0625000	0,0493827	0,0400000
0,5	0,0493827	0,0400000	0,0330688
1	0,0400000	0,0330688	0,1666667

(7.13.2) kubatur formulani qo'llaymiz:

$$I \approx \frac{0,5 \cdot 0,5}{9} [0,0625000 + 0,0400000 + 0,0400000 + 0,1666667 + \\ + 4(0,0493827 + 0,0493827 + 0,0330688 + 0,0330688) + \\ 16 \cdot 0,0400000] = 0,044688.$$

Bir o'lchovli holdagidek bu yerda ham aniqlikni orttirish maqsadida $\Omega = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini mos ravishda m va n bo'laklarga bo'lib, hosil bo'lgan mn ta kichik to'g'ri to'rtburchaklarning har birida Simpson formulasini hosil qilish mumkin. Faraz qilaylik,

$$h = \frac{b-a}{2m} \quad \text{va} \quad k = \frac{d-c}{2n}$$

bo'lsin, u holda tugunlarning to'ri quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = a, \quad i = \overline{0, 2m};$$

$$y_j = y_0 + jk, \quad y_0 = c, \quad j = \overline{0, 2n}.$$

Qulaylik uchun $f(x_i, y_j) = f_{ij}$ deb olib, har bir kichik to'g'ri to'rtburchakka (7.13.2) formulani qo'llasak, u holda

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n [(f_{2i, 2j} + f_{2i+2, 2j} + f_{2i+2, 2j+2} + f_{2i, 2j+2}) + \\ + 4(f_{2i+1, 2j} + f_{2i+2, 2j+1} + f_{2i+1, 2j+2} + f_{2i, 2j+1}) + 16f_{2i+1, 2j+1}]$$

ga ega bo'lamiz yoki o'xshash hadlarni ixchamlasak,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^{2n} \lambda_{ij} f_{ij},$$

bu yerda λ_{ij} quyidagi matritsani elementidir:

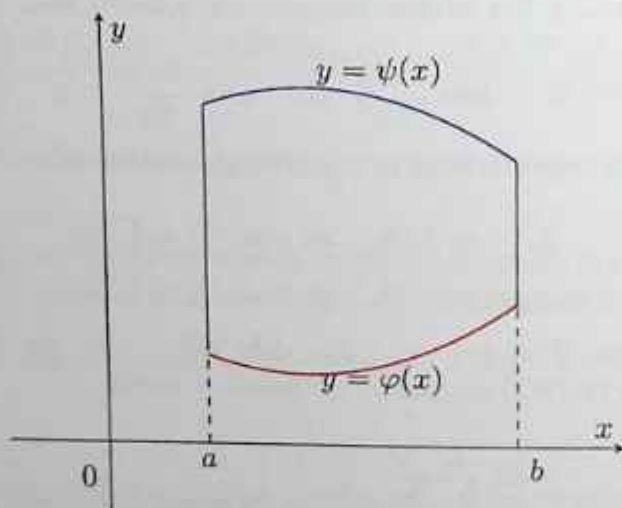
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Biz ichki va tashqi integrallarning har ikkalasi uchun Simpson formulasini qo'lladik. Ichki integralni bir kvadratur formula bilan hisoblab, tashqi integralni esa boshqa formula bilan ham hisoblash mumkin edi.

Agar Ω soha

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa (chizma 7.13.2),



Chizma 7.13.2

bu holda ham (7.13.1) integralni yuqoridagi usul bilan hisoblash mumkin:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x) dx,$$

bu yerda

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Biror kvadratur formulani qo'llab, $\int_a^b F(x) dx$ ni hisoblaymiz:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N A_i F(x_i). \quad (7.13.4)$$

O'z navbatida

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

integralni boshqa biror kvadratur formula bilan hisoblash mumkin:

$$F(x_i) \approx \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} F(x_i, y_j).$$

Buni (7.13.4) ga qo'yib quyidagi

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j) \quad (7.13.5)$$

kubatur formulani hosil qilamiz. Biz qaragan (7.13.4) va (7.13.5) formulalarda ko'p tugunlar qatnashadi. Bu yo'l bilan borsak integral karrasi ortgan sari tugunlar soni ham tez ortib boradi. Agar integrallash sohasi n o'lchovli kub bo'lib, har bir o'zgaruvchi bo'yicha integrallash uchun m tadan nuqta olinsa, u holda tuzilgan kubatur formulaning tugunlari soni $N = m^n$ ta bo'ladi. Shuning uchun ham, kubatur formulalar nazariyasida eng yuqori aniqlikka ega bo'lgan formulalar tuzishga harakat qilinadi.

7.13.2 Interpolyatsion kubatur formulalar

Integral ostidagi funktsiyani 2 o'lchovli interpolyatsion ko'phad bilan almashtiramiz. Agar $L_i(x, y)$ ko'phadlarni quyidagicha

$$L_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \\ 0, & \text{agar } i \neq j \end{cases} \quad i, j = \overline{1, N}$$

aniqlab olsak, u holda

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) L_i(x, y) \quad (7.13.6)$$

ko'phad (x_j, y_j) nuqtada $f(x_j, y_j)$ qiymatni qabul qiladi. Integral ostidagi funktsiyani (7.13.6) bilan almashtiramiz:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \approx \iint_{\Omega} L(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i),$$

bu yerda $A_i = \iint_{\Omega} L_i(x, y) dx dy$ bo'lib, uni murakkab bo'lmagan sohalar uchun hisoblash qiyin emas.

Faraz qilaylik, Ω soha to'g'ri to'rtburchak bo'lsin: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Integrallash to'ri sifatida

$$x_i = a + ih, \quad y_j = c + jk, \quad (i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, n}) \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad k = \frac{d-c}{n}$$

to'g'ri chiziqlarning kesishishlaridan hosil bo'lgan nuqtalar to'plamini olamiz, u holda quyidagi interpolyatsion formulaga ega bo'lamiz:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f(x_i, y_j) \prod_{\substack{t=0 \\ t \neq i}}^m \frac{x - x_t}{x_i - x_t} \cdot \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \frac{y - y_s}{y_j - y_s}.$$

Buni to'g'ri to'rtburchak bo'ylab integrallasak,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n A_{ij} f(x_i, y_j)$$

hosil bo'ladi, bu yerda

$$A_{ij} = \int_a^b \prod_{\substack{t=0 \\ t \neq i}}^m \frac{x - x_t}{x_i - x_t} dx \int_c^d \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \frac{y - y_s}{y_j - y_s} dy$$

yoki

$$A_{ij} = (b-a)(d-c)I_{i,m+1} \cdot I_{j,n+1}$$

ko'rinishda yozish mumkin, $I_{i,m+1}$ va $I_{j,n+1}$ lar esa Nyuton-Kotes formulasining koeffitsiyentlaridir.

7.14-§. Statistika sinov metodi (Monte-Karlo metodi)

Shu paytgacha tuzilgan kvadratur(kubatur) formulalar uchun funksiyalarning biror sinfida qoldiq hadning aniq bahosi berilgan edi yoki berish mumkin edi. Masalan, 7.7-§ da $C^1(L)$ sinf uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasining xatosi uchun $0,25LN^{-1}$ bahoni aniqlagan edik, bu yerda N kvadratur formula tugunlari soni. Bu baho qarayotgan sinfning barcha funksiyalari uchun o'rindir. Ayrim sinflar uchun bunday baho juda ham qo'pol bo'ladiki, integralni yetarlicha aniqlik bilan hisoblashning imkoni bo'lmaydi. Masalan, n -o'lchovli birlik kubda aniqlangan, uzluksiz xususiy hosilalari bo'lakli - uzluksiz va $|f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq L$ shartni qanoatlantirgan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyalar sinfi $C^{1,1,\dots,1}(L)$ uchun $dLN^{-\frac{1}{n}}$ (d -o'zgarmas son) dan yaxshiroq bahoni ta'minlaydigan baho mavjud emasligini N.S. Baxvalov [2,3,20] ko'rsatgan edi. 7.7-§ da qaralgan sinf bu sinfning $n=1$ bo'lgan holdir.

Faraz qilaylik, shu sinf funksiyalari uchun integralning qiymatini $0,01dL$ dan ortmaydigan aniqlik bilan hisoblash kerak bo'lsin. U holda kubatur formulaning tugunlari $dLN^{-\frac{1}{n}} \leq 0,01dL$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak, ya'ni $N \geq 100n$ bo'lishi kerak. Odatda ko'p o'lchovli funksiyaning har bir qiymatini hisoblash ko'p mehnat talab qiladi, shuning uchun ham hatto $n=6$ bo'lganda bunday integralni hisoblash mumkin bo'lmaydi.

Bunday holda, qat'iy bahoni topishdan voz kechib, buning o'rniga ma'lum darajada ishonch bilan bo'lsa-da, xatoni baholashning boshqa metodlarini qidirish yo'lga o'tish kerak. Bunday metod *statistik sinov metodi* yoki boshqacha aytganda *Monte-Karlo metodidir*.

Ta'rif 7.10. Agar X miqdor u yoki bu qiymatlarni biror tasodifiy hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi bilan bog'liq holda qabul qilsa, u holda X tasodifiy miqdor deyiladi.

Tasodifiy miqdor X taqsimot qonuni

$$P(X < x) = \Phi(x)$$

bilan aniqlanadi, bu yerda X —ixtiyoriy haqiqiy son va $\Phi(x)$ -taqsimot funksiyasi. Tasodifiy miqdorning qiymatlari *tasodifiy sonlar* deyiladi.

Agar tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni aniq bo'lsa (tekis, normal va h.k.), u holda unga mos keladigan tasodifiy sonlar shu qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi.

Agar tasodifiy miqdor X ning qiymatlari $[0,1]$ oraliqda yotsa va qiymatlarining ixtiyoriy $(\alpha, \beta) \in [0,1]$ oraliqda yotish ehtimollari $\beta - \alpha$ ga teng bo'lsa, X bu oraliqda *tekis taqsimlangan* deyiladi.

Tasodifiy sonlarni hosil qilish uchun tasodifiy fizik jarayonlar masalan, o'yin soqqasini tashlash, ruletkani aylantirish, Geyger schyotlaridagi yonish va h.k. natijalaridan foydalanish mumkin. Hozirgi paytda tasodifiy sonlarning tayyor jadvallari ham mavjuddir [5].

Faraz qilaylik, biror usul bilan $[0,1]$ oraliqda bir-biriga bog'liq bo'lmagan va tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar ketma-ketligini hosil qilgan bo'laylik:

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_k^{(1)}, \dots \\ &\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_k^{(2)}, \dots \\ &\vdots \\ &\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots \end{aligned}$$

Koordinatalari shu sonlardan iborat bo'lgan birlik kubning

$$P_k = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)}) (k = \overline{1, N})$$

nuqtalarini N ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy nuqtalar deb qarashimiz mumkin.

Elliginchi yillardan boshlab hisoblash matematikasida, shu jumladan karrali integrallarni hisoblashlarda, Monte-Karlo metodi qo'llanila boshlandi.

Biz hozir shu metodning ikki variantini qisqacha ko'rib chiqamiz.

Birinchi variant. Faraz qilaylik, integrallash sohasi quyidagi

$$0 \leq x_1 < 1$$

$$0 \leq \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \leq x_i < \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) \quad (7.14.1)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n)$$

tengsizliklar bilan aniqlansin va $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya bu sohada

$$0 \leq f(P) < 1 \quad (7.14.2)$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Ushbu

$$I = \int_{\Omega} f(P) dP \quad (7.14.3)$$

karrali integrallarni taqribiy hisoblash uchun yuqorida aytilgan N ta $P_k = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)})$ tasodifiy nuqtalar to'plamini olamiz. Agar $P_k \in \Omega$ bo'lsa $f(P_k)$ ni hisoblaymiz, agar $P_k \notin \Omega$ bo'lsa $f(P_k) = 0$ deb olamiz. So'ngra, bu $f(P_k)$ miqdorlarining o'rta arifmetigini aniqlaymiz:

$S_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(P_k)$ katta sonlar qonuniga ko'ra katta N lar uchun katta ehtimollik bilan $I \simeq S_N(f)$ deb olish mumkin. Aniqrog'i, agar berilgan $\alpha (0 < \alpha < 1)$ uchun t_α quyidagi

$$\Phi(t_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1+\alpha}{2} \quad (7.14.4)$$

tenglikdan (ehtimolliklar integrali jadvalidan foydalanib) aniqlansa va berilgan $\varepsilon < 0$ uchun N quyidagi

$$N \geq \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} [f(P) - I]^2 dP = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left[\int_{\Omega} f^2(P) dP - I^2 \right] = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} D(f)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda Chebishev tengsizligiga ko'ra

$$|I - S_N(f)| < \varepsilon$$

tengsizlik α ehtimollik bilan bajariladi. Agar $t_\alpha = 2$ bo'lsa, u holda $\alpha = 0,997$ va $t_\alpha = 5$ bo'lsa, u holda $\alpha = 0,99999$ bo'ladi.

Bu yerda I ning qiymati oldindan ma'lum bo'lmagani uchun, $D(f)$ ning qiymati noma'lum, shuning uchun ham N ning kerakli kichik qiymatini topish murakkablashadi. Shu sababga ko'ra praktikada quyidagicha ish tutiladi.

Ixtiyoriy N_0 sonni olib, $D(f)$ ning taqribiy qiymatini beradigan

$$\delta_{N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} f^2(P_k) - S_{N_0}^2(f)$$

miqdorni hisoblaymiz, keyin N_1 ni aniqlaymiz:

$$N_1 = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left(1 + 4\sqrt{\frac{2}{N_0}} \right) \delta_{N_0}(f).$$

Agar $N_1 < N_0$ bo'lsa, u holda $[N_1] + 1$ ta sinov olinadi va

$$\delta_{N_1}(f) = \frac{1}{[N_1] + 1} \sum_{k=1}^{[N_1] + 1} f^2(P_k) - S_{N_1}^2(f),$$

$$N_2 = \frac{t_\alpha^2}{\varepsilon^2} \left(1 + 4\sqrt{\frac{2}{N_1}} \right) \delta_{N_1}(f)$$

miqdorlar hisoblanadi hamda N_2 , N_1 bilan taqqoslanadi va h.k. Sinovning kerakli soni N_m aniqlangandan keyin bu jarayon to'xtatiladi.

$S_N(f)$ va $\delta_N(f)$ larni hisoblashda EHMLarning xotirasini band qilmaslik maqsadida quyidagicha ish tutish mumkin.

Faraz qilaylik, m ta sinov o'tkazilib,

$$S_m(f) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(P_k), \quad \delta_m(f) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f^2(P_k) - S_m^2(f)$$

miqdorlar hisoblangan bo'lsin. Navbatdagi $m + 1$ -sinov o'tkazilgandan keyin $S_{m+1}(f)$ va $\delta_{m+1}(f)$ lar

$$S_{m+1}(f) = \frac{1}{m+1} [mS_m(f) + f(P_{m+1})],$$

$$\delta_{m+1}(f) = \frac{1}{m+1} [m(\delta_m(f) + S_m^2(f)) + f^2(P_{m+1})] - S_{m+1}^2(f)$$

formulalar yordamida hisoblanadi.

Ikkinchi variant. Bu yerda ham avvalgidek N ta $Q_k = (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(n)})$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy nuqtalar orasidan

$$0 \leq \xi_k^{(1)} < 1$$

$$\varphi_2(\xi_k^{(1)}) \leq \xi_k^{(2)} < \psi_2(\xi_k^{(1)}),$$

$$\varphi_3(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}) \leq \xi_k^{(3)} < \psi_3(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}),$$

⋮

$$\varphi_n(\xi_k^{(1)}, \dots, \xi_k^{(n-1)}) \leq \xi_k^{(n)} < \psi_n(\xi_k^{(1)}, \dots, \xi_k^{(n-1)}),$$

$$0 \leq \xi_k < f(\xi_k^{(1)}, \dots, \xi_k^{(n)})$$

tengsizliklarni qanoatlantiradiganlarning soni ν aniqlanadi. Yetarlicha katta N lar uchun

$$I \cong \frac{\nu}{N}$$

deb olish mumkin. Aniqrog'i, agar berilgan α uchun t_α (7.14.4) tenglikdan aniqlansa va sinovlar soni N berilgan $\varepsilon > 0$ orqali

$$N \geq \frac{I(1-I)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2 \quad (7.14.5)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda α ehtimollik bilan

$$|I - \frac{\nu}{N}| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Agar EHM $[0,1]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlarni hosil qiluvchi programmaga ega bo'lsa, u holda bu variant oldingi variantga nisbatan ancha qulaydir.

Bu yerda (7.14.5) tengsizlikni qanoatlantiruvchi N ni aniqlash uchun avval ixtiyoriy N_0 olinib, yuqoridagi usul bilan integralning qiymati I_0 hisoblanadi va

$$N_1 = \frac{I_0(1-I_0)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2$$

topiladi. Agar $N_1 < N_0$ bo'lsa, u holda sinovlar soni $[N_1]+1$ ga yetkaziladi, I_1 hisoblanadi va

$$N_2 = \frac{I_1(1-I_1)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2$$

topiladi. Bu jarayon kerakli N_k topilgunga qadar davom ettiriladi.

Shuni ham aytish kerakki, bu metod N ta sinov nuqta olinganda α ehtimollik bilan $O(\varepsilon) = O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ xatolikni beradi.

7.15-§. Singulyar integrallarni taqribiy hisoblash

7.15.1 Singulyar integral tushunchasi

Biz 7.10-§ da

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-c|^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

ko'rinishdagi maxsuslikka ega bo'lgan integrallarni hisoblash masalasini ko'rgan edik.

Ko'p tatbiqiy masalalarda, jumladan aerodinamikada, shunday integrallar uchraydiki, ularda $\alpha = 1$ bo'ladi. Bunday holda integrallarni Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida tushunish kerak.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqning c nuqtasi atrofida chegaralanmagan bo'lib,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t)dt \right]$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $[a, b]$ oraliq bo'yicha $f(x)$ funksiyadan olingan xosmas integralning Koshi bo'yicha bosh qiymati deyiladi va

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x)dx \text{ yoki } \int_a^{*b} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

(Bu yerda V.p. "valeur principale" so'zlarining bosh harflari bo'lib, fransuzcha "bosh qiymat"ni bildiradi.)

Bosh qiymat ma'nosidagi integrallarni ko'pincha *maxsus* yoki *singulyar integrallar* deb atashadi.

Misol 7.11. Faraz qilaylik, $f(x) = \frac{1}{x-c}$, $c \in (a, b)$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (7.15.1)$$

Ko'rinib turibdiki ε_1 va ε_2 ixtiyoriy ravishda nolga intilsa, bu yig'indining limiti mavjud bo'lmaydi, ya'ni $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ xosmas integral mavjud bo'lmaydi. Bu yerda $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ deb olamiz. U holda $\varepsilon \rightarrow 0$ da (7.15.1) ifoda-ning limiti mavjud bo'lib, ta'rifga ko'ra $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ integralning bosh qiymatini beradi:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}. \quad (7.15.2)$$

Ta'rif 7.11. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalar uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|^\alpha$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda Gel'der shartini qanoatlantiradi deyiladi, bu yerda L va α -qandaydir musbat miqdorlar.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $f(x)$ Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi. Biz doim $0 < \alpha \leq 1$ deb olamiz. Ko'rinib turibdiki, $[a, b]$ da Gel'der shartini qanoatlantiradigan funksiya shu oraliqda uzluksizdir.

Faraz qilaylik, $y \in (a, b)$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, $\int_a^b \frac{f(x)}{x-y} dx$ integralda $K(x, y) = \frac{1}{x-y}$ Koshi yadrosi deyiladi va integralning o'zi Koshining singulyar integrali deyiladi.

Teorema 7.23. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda Gel'der shartini qanoatlantirsa, u holda Koshining singulyar integrali bosh qiymat ma'nosida mavjuddir.

Isbot. Haqiqatan ham,

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-y} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(y)}{x-y} dx + f(y) \int_a^b \frac{dx}{x-y}. \quad (7.15.3)$$

Gel'der shartiga ko'ra $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leq \frac{L}{|x-y|^{1-\alpha}}$ ($\alpha > 0$), shuning uchun ham, (7.15.3) ning o'ng tomonidagi integral xosmas, integral sifatida mavjud va (7.15.2) formulaga ko'ra ikkinchi integral ham mavjuddir. Bundan esa $\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-y}$ integralning bosh qiymat ma'nosida mavjudligi kelib chiqadi:

$$\int_a^{*b} \frac{f(x)}{x-y} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(y)}{x-y} dx + f(y) \ln \frac{b-y}{y-a}.$$

Yana singulyar integralga misol sifatida Gilbert almashtirishlarini olishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \varphi(x) \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dx, \\ \varphi(y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \psi(x) \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dx. \end{aligned}$$

Bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $[-\pi, \pi]$ da Gel'der shartini qanoatlantiradi va shu bilan birga:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = 0.$$

Ko'rsatish mumkin, $\sin kx$ va $\cos kx$ barcha $k = 1, 2, \dots$ uchun Gilbert almashtirishlari bo'ladi [42]:

$$\begin{cases} \cos ky = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \sin kx \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dx, \\ \sin ky = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \cos kx \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dx. \end{cases} \quad (7.15.4)$$

Bu paragrafda singulyar integrallarni taqribiy hisoblash bilan shug'ullanamiz.

7.15.2 Gilbert yadroli singulyar integrallarni taqribiy hisoblash

Qulaylik uchun Gilbert integralini almashtirish yordamida quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$If(y) = \int_0^{*1} f(x) \operatorname{ctg} \pi(x-y) dx. \quad (7.15.5)$$

Odatda Gilbert integralida $f(x)$ funksiyani Gel'der shartlarini qanoatlantirishidan tashqari, u davriy funksiya deb qaraladi. Biz bu yerda $f(x)$ funksiyaning Furje koeffitsientlari

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x} \quad (7.15.6)$$

quyidagi

$$|C_n| \leq \frac{C}{|n|\alpha} \quad (n \neq 0) \quad (7.15.7)$$

shartni qanoatlantiradi va $\alpha < 1$ deb faraz qilib, (7.15.5) integral uchun kvadratur formula tuzamiz [15, 19].

Buning uchun $P_N(x)$ trigonometrik ko'phadni quyidagicha kiritamiz:

$$P_N(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{C}_m e^{2\pi i m x}, \quad (7.15.8)$$

$$\tilde{C}_m = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) e^{-2\pi i \frac{k m}{2N}}. \quad (7.15.9)$$

Endi (7.15.9) ni (7.15.8) ga qo'ysak,

$$P_N(x) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \psi_k(x)$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\psi_k(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} e^{2\pi i m(x - \frac{k}{2N})} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos 2\pi m(x - \frac{k}{2N}).$$

(7.15.4) formula yordamida

$$I\psi_k(y) = -2 \sum_{m=1}^{N-1} \sin 2\pi m(y - \frac{k}{2N}) = \varphi_k(y)$$

ni hosil qilamiz. Endi

$$f(x) = P_N(x) + r_N(x) \quad (7.15.10)$$

deb olib, buni (7.15.5) integralga qo'ysak,

$$If(y) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k}{2N}\right) \varphi_k(y) + R_N(y) \quad (7.15.11)$$

kvadratur formulani hosil qilamiz.

Teorema 7.24. Agar $f(x)$ funksiyaning Furrye koeffitsiyentlari (7.15.7) shartni qanoatlantirsa va $\alpha < 1$ bo'lsa, u holda (7.15.11) kvadratur formulaning qoldiq hadi uchun

$$\max_{0 \leq y \leq 1} |R_N(y)| \leq \frac{4C}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}} \quad (7.15.12)$$

baho o'rinlidir. Bu yerda C o'zgarmas son.

Isbot. Shartga ko'ra $\alpha < 1$, shuning uchun ham (7.15.7) dan ko'ramizki,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n x}. \quad (7.15.13)$$

Furrye qatori absolyut yaqinlashadi. Faraz qilaylik, $R_N(y)$ ning Furrye yoyilmasi

$$R_N(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{2\pi i n y} \quad (7.15.14)$$

bo'lsin. (7.15.4) formulalardan

$$Ie^{2\pi i m y} = i \operatorname{sign} m \cdot e^{2\pi i m y} \quad (7.15.15)$$

ekanligi ravshan. Endi (7.15.9), (7.15.10), (7.15.13) va (7.15.15) dan koeffitsiyentlarning quyidagiga tengligini ko'ramiz:

$$C_m^* = \begin{cases} (C_m - \tilde{C}_m) i \operatorname{sign} m, & |m| < N \text{ bo'lsa,} \\ C_m \cdot i \operatorname{sign} m, & |m| \geq N \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (7.15.16)$$

Ushbu bevosita ko'rinib turgan

$$\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{2\pi i \frac{nk}{2N}} = \begin{cases} 1, & \text{agar } n \text{ } 2N \text{ ga bo'linsa,} \\ 0, & \text{agar } n \text{ } 2N \text{ ga bo'linmasa,} \end{cases}$$

tengliklar va

$$f(x)e^{-2\pi imx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i(n-m)x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+m} e^{2\pi inx}$$

dan foydalanib, $\tilde{c}_m$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_m &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n+m} e^{2\pi i \frac{nk}{2N}} = \\ &= c_m + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_{n+m} \left(\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} e^{2\pi i \frac{nk}{2N}} \right) = c_m + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_{2nN+m}. \end{aligned}$$

Demak,

$$|c_m - \tilde{c}_m| = \left| \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_{2nN+m} \right|. \quad (7.15.17)$$

Endi (7.15.4), (7.15.15) va (7.15.17) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |R_N(y)| &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m^*| = \sum_{|m| < N} |c_m - \tilde{c}_m| + \sum_{|m| \geq N} |c_m| = \\ &= \sum_{|m| < N} \left| \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} c_{2nN+m} \right| + \sum_{|m| \geq N} |c_m| = 4 \sum_{m=N}^{\infty} |c_m| - 2 \sum_{m=1}^{\infty} |c_{(2m+1)N}|. \end{aligned}$$

Demak,

$$|R_N(y)| \leq 4 \sum_{m=N}^{\infty} |c_m|.$$

Bundan va (7.15.7) dan teoremaning tasdig'i kelib chiqadi. ■

Mashqlar

1. Quyidagi integrallarni trapetsiya, to'g'ri to'rtburchak, Simpson, Gauss, Chebishev formulalari yordamida $\varepsilon = 10^{-1}$ aniqlikda hisoblang:

a) $\int_0^1 \sin x^2 dx,$

b) $\int_{0,5}^{1,5} \ln(1+x^2) dx,$

d) $\int_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$

e) $\int_{0,2}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x} dx,$

f) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx,$

g) $\int_1^2 x \ln x dx.$

2. Quyidagi kvadratur formulalarni keltirib chiqaring:

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n,$

$$R_n = \frac{\pi}{2^n} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad -1 < \xi < 1;$$

b) $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n,$

$$R_n = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi \leq 1.$$

3. Beshinchi darajali ko'phadni aniq integrallaydigan quyidagi ko'rinishdagi kvadratur formulani quring:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0[f(0) + f(1)] + A_1[f'(1) - f'(0)] + Bf(x_1).$$

4. Ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} \left[f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$

kvadratur formulaning beshinchi darajali ko'phadni aniq integrallashini ko'rsating.

4. Uchinchi darajali ko'phadni aniq integrallaydigan

$$\int_0^1 f(x) dx \approx C_0 f(0) + C_1 f(1) + C_2 f'(0) + C_3 f'(1)$$

ko'rinishdagi kvadratur formulani toping.

5. Uchinchi darajali ko'phadni aniq integrallaydigan

$$\int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = C_{-1} f(-1) + C_0 f(0) + C_1 f(1)$$

kvadratur formulani toping.

6. Integral ostidagi funksiyaning maxsusligini susaytirish yo'li bilan quyidagi integrallarni $\varepsilon = 10^{-5}$ aniqlik bilan hisoblang:

a) $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2(1-x)^3}}$.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Аляберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения, – М., "Мир", 1972.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы, т., 1. – М., "Наука", 1973.
3. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классных функций, Сб. "Численные методы решения дифф. и интегральных уравнений и квадратурные формулы". – М., "Наука", 1964 (5-63-betlar).
4. Березин И.С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1., изд. 3-е. – М., "Наука", 1966.
5. Бусленко Н.П. и др. Методы статистических испытаний (метод Монте-Карло). – М., Физматгиз, 1962.
6. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М., "Мир", 1974.
7. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. – М., "Наука", 1966.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, 3-е исправ. изд. – М., "Наука", 1967.
9. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций, 2-е переработанное изд. – М., Гостехиздат, 1954.
10. Даугавет И.К. Введение в теорию приближений функций, изд. ЛГУ. – Ленинград, 1977.
11. Демидович Б.П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М., "Наука", 1970.

12. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. 2-е доп. изд. – М., "Наука", 1975.
13. Ермаков С.М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. – М. "Наука", 1982.
14. Исраилов М.И., Джуракулов Р. Построение весовых квадратурных формул для интегралов типа Коши и сингулярных интегралов с помощью эрмитовых сплайнов, Сб. "Вопросы вычислительной и прикладной математики", 47. – Ташкент, "Фан", 1977.
15. Исраилов М.И., Максудов Т. С. Квадратурные и кубатурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Гильберта на классе функций. Сб. "Вопросы вычисл. и прикл. матем", 28. – Ташкент, "Фан", 1974.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М., "Наука", 1978.
17. Канторович Л.В. О методе Ньютона. Труды матем. ин-та АН СССР, 28, 104-144, 1949.
18. Qobulov V.K. Funksional analiz va hisoblash matematikasi, "O'qituvchi". – Toshkent, 1976.
19. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, Сб. "Численные методы решения дифф. и интегральных сравнений и квадратурные формулы". – М., "Наука", 1964.
20. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – М., Физматгиз, 1963.
21. Копченова Н.В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М., "Наука", 1972.
22. Крылов А.И. Лекции о приближенных вычислениях. – М., Гостехиздат, 1954.
23. Крылов В.Н. Приближенное вычисление интегралов. – М., "Наука". 1967.
24. Крылов В.И. Бобков В. В., Монастырский П. Н. Вычислительные методы высшей математики. 1. – Минск, "Вышэйшая школа", 1972.

25. Крылов В.И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М., "Наука", 1966.
26. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. – М., ИЛ, 1962.
27. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М., Физматгиз, 1961.
28. Мили В.Э. Численный анализ. – М., ИЛ, 1951.
29. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М., "Мир", 1975.
30. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М., "Наука", 1977.
31. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. – М., Физматгиз, 1962.
32. Никольский С.М. Квадратурные формулы. 2-е изд. – М., "Наука", 1972.
33. Положий П.С., Пахарева Н.А., Степаненко И.З., Бондаренко П.С., Великоиваненко И.М. Математический практикум. – М., Физматгиз, 1960.
34. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. – М., ИЛ, 1963.
35. Ремез Б.Я. Основы численных методов Чебышевского приближения. – Киев, "Наукова думка", 1968.
36. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. – М., Физматгиз, 1962.
37. Сегё Г. Ортогональные многочлены. – ФМ, 1962.
38. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М., Наука, 1987.
39. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М., "Наука", 1974.
40. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Слайды в вычислительной математике. – М., "Наука", 1976.

41. Суетин С.Б. Классические ортогональные многочлены. – М., "Наука", 1976.
42. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М., ИЛ, 1960.
43. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М., "Наука", 1970.
44. Фаддеев Д.К., Фаддеев В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М., Физматгиз, 1960.
45. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем алгебраических уравнений. – М., "Мир", 1969.
46. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М., ИЛ, 1951.
47. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. – М., ИЛ, 1956.
48. Хемминг Р.В. Численные методы. – М., "Наука", 1972.
49. Черкасова М.П. Сборник задач по численным методам. – Минск, "Вышэйшая школа", 1967.
50. Янке Е. Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. – М., Физматгиз, 1959.
51. Wegstein J.H. Accelerating convergence of Iterative processes. Comm. Assoc. Comput. Math. 1, N. 6, 1958, 9-14.

1-bobga taalluqli adabiyot: [2, 4, 11, 21, 22, 34, 47].

2-bobga taalluqli adabiyot: [2, 4, 11, 16, 17, 21, 22, 26, 31, 33, 34, 36, 51].

3-bobga taalluqli adabiyot: [2, 4, 7, 11, 16, 21, 24, 27, 30, 34, 42, 44, 45].

4-bobga taalluqli adabiyot: [2, 4, 7, 11, 16, 24].

5-bobga taalluqli adabiyot: [2, 4, 9, 11, 16, 21, 24, 27, 31, 34, 36, 50].

6-bobga taalluqli adabiyot: [1, 2, 4, 6, 9, 10, 16, 21, 28, 30, 37].

7-bobga taalluqli adabiyot: [2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 31, 32, 39, 42, 46, 48].

M.I. ISROILOV

HISOBLASH METODLARI

I qism

(Qayta ishlangan ikkinchi nashri)

© «O'QITUVCHI NASHRIYOTI» MCHJ, 2025

Muharrir: M.Hayitova

Texnik muharrir: M.Tursunov

Musavvir: Sh.Zoxidova

Musahhihlar: S.Hayitova, Sh.Beknazarova

Kompyuterda sahifalovchi: A.Ismailov

1-t
2-t
3-t
4-t
5-t
6-t
7-t
24,

Bosishga ruxsat etildi 06.05.2025.
Bichimi 60x84 1/16. «Times New Roman» garniturası.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 30,22. Adadi:1000. Buyurtma №1209.

"KOLORAK" MCHJ bosmaxonasida chop etildi. 100206,
Toshkent, Yunusobod tum., Yangishahar ko'ch., 1a.



INNOVATSIYA
NASHRIYOTI



ISBN 978-9910-01-222-8

