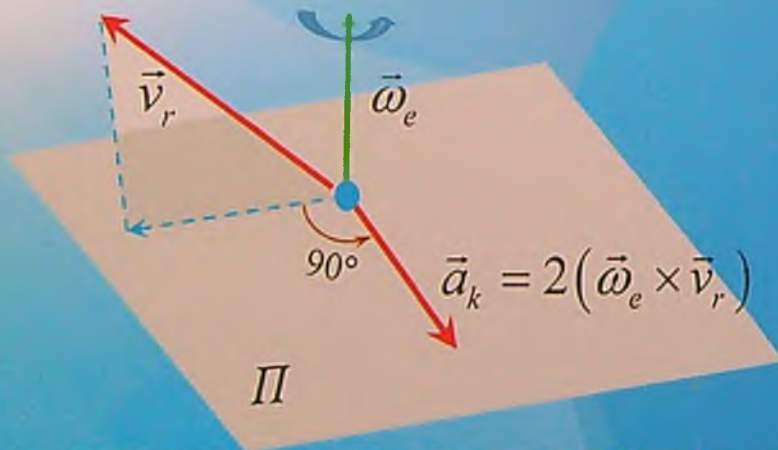


K.A. KARIMOV,
A.X. AXMEDOV,
A.R. KARIMOVA



NAZARIY MEXANIKA



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0(\vec{F}_i)$$

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

K.A. KARIMOV, A.X. AXMEDOV, A.R. KARIMOVA

NAZARIY MEXANIKA

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan*

**FOSHKENT
«MALIK PRINT CO»
2021**

UO'K 531.21(075.8)
K BK 22.21ya7
K 25

Karimov K.A., Axmedov A.X., Karimova A.R.
Nazariy mexanika / O'quv qo'llanma: – T.:
«MALIK PRINT CO.» nashriyoti, 2021. – 360 b.

Taqrizchilar:

Sultonov K.S. – f.m.f.d., professor; O'zRFA Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti;

Xudjayev M.K. – t.f.d., dotsent; Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti.

Mazkur o'quv qo'llanma mualliflarning "Nazariy mexanika" fani doirasida olib borgan ko'p yillik ilmiy va pedagogik faoliyatlari natijasining mahsulidir. Qo'llanmada fanning qisqacha rivojlanish tarixi, statika, kinematika, dinamika bo'limlariga tegishli asosiy mavzular yoritilib, har bir mavzu yuzasidan xarakterli masalalar ishlab ko'rsatilgan. O'quvchi statika, kinematika va dinamika bo'limlari mavzularini chuqur o'zlashtirishlari uchun har bir mavzu bo'yicha mustaqil yechish uchun masalalar taklif etilgan. Talabalar fanni to'laqonli o'zlashtirishlari, innovatsion g'oyalarni shakllantirish va rivojlantirish maqsadlarida o'quv jarayonida zamonaviy innovatsion va pedagogik texnologiya usullarini samarali qo'llash haqida to'xtab o'tilgan.

O'quv qo'llanma mexanika va mashinasozlik sohasidagi barcha ta'lim yo'nalishlarining bakalavriat talabalariga mo'ljallangan bo'lib, shuningdek undan turdosh ta'lim yo'nalishlari talabalari va mustaqil izlanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Данное учебное пособие является результатом многолетней научно-педагогической работы авторов в области «Теоретическая механика». Учебное пособие охватывает краткую историю науки, основные темы статики, кинематики, динамики, а также характерные задачи по каждому разделу. Студентам предлагаются задачи для самостоятельного решения по каждой тематике с целью углубления их знаний основных положений статики, кинематики и динамики. С целью полноценного овладения предмета студентами, а также формирования фазового мышления и развития инновационных идей особое внимание уделено эффективному использованию современных информационно-коммуникационных, инновационных и педагогических технологий в учебном процессе.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата по всем направлениям обучения в области механики и машиностроения, а также для студентов смежных дисциплин и независимых исследователей.

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2020-yil 28 dekabrda
676 - sonli buyrug'iga asosan o'quv qo'llanma sifatida nashr etishga ruxsat etildi.*

ISBN 978-9943-7445-4-7

© Toshkent davlat texnika universiteti, 2021.
© "Malik print co.", 2021

KIRISH

Harakat borliqning mavjudlik shakllaridan biri bo'lib, uning muhim xususiyati bo'lgan o'zgaruvchanlikni ifodalaydi. Borliqdagi har qanday jarayon harakat tufayli sodir bo'ladi. Harakat deganda, nafaqat ko'chada odamlar va mashinalarning yurishi, osmonda samolyot va qushlarning uchishi, suvda baliq va boshqa jonzoatlarning suzishi, Oyning Yer atrofidagi va Yerning Quyosh atrofidagi aylanishi, balki issiqlik, kimyoviy, elektromagnit, biologik va boshqa o'zgarishlarda sodir bo'ladigan murakkab jarayonlar ham tushuniladi. Mexanik harakat esa, harakatning oddiy turlaridan biri hisoblanadi. Jismlarning fazodagi o'rning vaqt o'tishi bilan boshqa jismlarga nisbatan o'zgarishi *mexanik harakat* deb ataladi.

Nazariy mexanika moddiy jismlarning o'zaro ta'sirlari va mexanik harakatning umumiy qonuniyatlari haqidagi fundamental fan hisoblanadi. Moddiy jismlarning harakati ma'lum qonun-qoidalarga bo'ysunadi.

Moddiy jismlar o'zaro ta'sirining miqdoriy o'lchoviga *kuch* deyiladi. Mexanikada kuchlarning faqat miqdoriy o'zgarishlari asosiy ahamiyat kasb etadi va kuchlar fizik jihatdan o'rganilmaydi. Shuni nazarda tutish lozimki, jismning barcha xossalarini e'tiborga olgan holda uning harakatini o'rganish masalasi juda murakkab. Shuning uchun, qo'yilgan masalaga qarab, ayrim hollarda o'rganilayotgan jismning ba'zi bir xususiyatlari



Muvozanat kuchlari

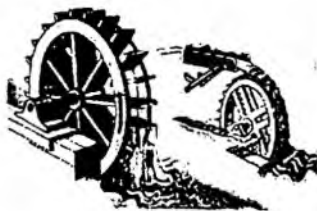
e'tiborga olinmaydi. Nazariy mexanikada mexanik tabiatga ega bo'lgan kuchlar ta'siridagi harakatlar o'rganilishi bilan birga turli fizik tabiatga xos bo'lgan kuchlar ta'siridagi sistemalarning harakatlari ham o'rganiladi.

Biz o'rganayotgan nazariy mexanika odatda *klassik mexanika* deyiladi. Boshqacha aytganda, Nyuton qonunlari o'rinli bo'lgan, tezligi yorug'lik tezligidan nihoyatda kichik bo'lgan moddiy jismlar harakati yoki muvozanati o'rganiladi.

Hozirgi zamon mexanikasi matematika, fizika, astronomiya, informatika, axborot, innovatsion va nano texnologiyalari, kimyo, biologiya kabi fanlar bilan chambarchas bog'liq holda rivojlanmoqda. Ayniqsa, mashinasozlik, qurilish, avtomatika, asbobsoslik, kosmonavtika va umuman texnikaning barcha sohalarining rivojlanishida nazariy mexanika fani alohida o'rin egallaydi.

Nazariy mexanika haqidagi bilimlar qadimdan ma'lum va mavjud. Mexanikaning tarixi jamiyatning rivojlanish tarixi bilan uzviy bog'liq. Tarixning umumiy rivojlanishi uni ishlab chiqaradigan kuchga va shu bilan birga har bir davrda insoniyat rivojlanishi, qadimgi dunyodan to yangi davrgacha bo'lgan fanning muammolari va hal qilish yo'llariga bog'liq.

Mexanikaning qisqacha tarixi. Mexanika fani tasodifan paydo bo'lmagan. Balki, insoniyat mehnatlarining in'ikosi, kashfiyotlar, texnologiya va qurilishlarning ilohiy natijasida paydo bo'lgan. Insoniyat o'zining rivojlanish ibtidosidan boshlab oddiy qurilmalar va mexanizmlar yarata boshlagan.



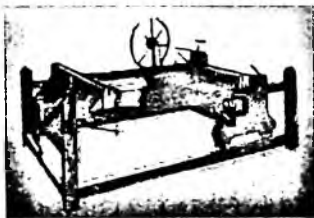
Suv uzatish moslamasi

Zamonaviy mexanikaning asosiy qonuniyatlari ajdodlarimizning tajribalari natijasida yuzaga kelgan.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari kuzatishlar va amaliyot tajribalari natijalariga asoslanadi. Insoniyat qadim zamonlardayoq o'z ehtiyoji uchun uy-joy qurgan, hayvonlarni ovlagan, keyinchalik esa yer haydab dehqonchilik qilgan. Odamlar bu kabi faoliyatlarida eng soddashinalar – richag, qiya tekislik, pona, g'ildirak kabi oddiy mexanizmlardan foydalanganlar. Neolit davri va jez davrida g'ildirak ma'lum bo'lgan. Ma'lum davr o'tgach esa

richag, polispast va boshqalar qo'llanila boshlangan. Miloddan avvalgi V asrda Afina harbiylari devor teshar mashinalar – taranlar, tosh uloqtiradigan qurilmalardan foydalanishgan. Miloddan avvalgi III asrda qadimgi Misr ehromlari, shuningdek, Bobil, Xitoy, Xorazm, Sug'diyona, Eron va boshqa joylarda saqlanib qolgan suv inshootlari ularni qurishda richag, pona, qiya tekisliklardan foydalanilganligini ko'rsatadi. O'rta Osiyoda esa qadimdan charxpalak va chig'iriqdan foydalanilgan. Davrlar o'tishi bilan insonlar yanada murakkabroq bo'lgan qurilmalar – aravalar va kemalar, ko'priklar va to'g'onlar qurganlar. Shu bilan birga turli hunarmandchilik asboblari kashf etganlar.

Texnikaning avvalgi mehnat qurollaridan asosiy farqi, uning ishlab chiqarishda inson qo'l mehnatini keskin kamaytirishi yoki unga umuman o'rin qoldirmasligi hisoblanadi. Omoch, plug, charxpalak, urchuq, charx, to'quvchilik dastgohlari, shamol tegirmoni va boshqalar odam qo'l mehnatini eng ko'p dara-



1733 yilda yaratilgan "Jenni" mexanik ip yigirish mashinasi

jada yengillashtirishga imkon beradigan texnikani yaratish yo'lidagi dastlabki ixtirolar bo'ldi. Turli mashinalarning yaratilishi va ularga bo'lgan ehtiyojning orta borishi yangi bilimlarni egallash uchun zarurat tug'dirgan. Shu tariqa davrlar o'tishi bilan mexanika fani shakllanib borgan. Masalan, 1733 yilda inglizlik mexanik va to'quvchi Jon Key to'quv dastgohini ixtiro qildi. Inglizlik Jeyms Uatt esa birinchi dvigatel (motor yoki yuritma), ya'ni harakatga keltiruvchi texnikani ixtiro qildi va bu ixtiro bug' mashinasi deb ataldi. Albatta, bu hodisa o'sha davr uchun katta muvaffaqiyat edi. Bug' mashinasining ixtiro qilinishi esa, keyinchalik transport texnikalari uchun ham dvigatel yaratilishiga turtki bo'ldi.

Mexanika eng qadimiy fanlardan biridir. Mexanika dastlab miloddan avvalgi VI-V asrlarda Yunonistonda paydo bo'lgan deb hisoblanadi. Bu yerda aniq fanlar va qurilish tezkorlik bilan jadal rivojlangan. Miloddan avvalgi III asrda yozilgan "Mexanik muammolar" asari esa mexanika bo'yicha yozilgan eng qadimiy asar hisoblanadi. Bu asarning muallifi Aristotel, degan taxminlar ham bor. Bizgacha yetib kelgan mexanikaga oid dastlabki qo'lyozmalar qadimgi Misr va Gretsiya olimlariga tegishli. Bunday qo'lyozmalar misolida qadimgi yunon olimi Aristotelning (e.a. 384-322 yillar) bir qancha asarlarini misol sifatida keltirish mumkin. Aristotel o'zining "Fizika" kitobida birinchi marta "mexanika" so'zini qo'llab, uni fanga kiritgan. "Mexanika" so'zi yunon tilidan tarjima qilinganda "mechanike"—"qurol", "inshoot", "ma-

shina haqidagi ta'limot" degan ma'nolarni bildiradi. Aristotel "Fizika" kitobida o'sha davrgacha ma'lum bo'lgan mexanika haqidagi bilimlarni to'plab, ularni tartibga solgan. U o'z asarlarida oddiy mexanizmlar muvozanati va harakatiga oid umumiy fikrlarini yozgan. Bizgacha yetib kelgan asarlardan Aristotel nomi bilan bog'liq bo'lgan richag, pona va blok kabi oddiy mexanizmlar mexanika sohasi asosida yaratilgan. Lekin, manbalarda keltirilishicha, Aristotel o'zining nazariy xulosalarining ba'zilarini tajribalar orqali tekshirib ko'rmagan. Mexanikaning asosiy tushunchalaridan biri bu kuch tushunchasi hisoblanadi. Kuch tushunchasi mushaklarning harakatlari bilan bog'liq bo'lib, bu tushuncha dastlab antik davrda yuzaga kelgan. Taxminan eramizdan avvalgi IV asrning boshlarida Yunonistonda oddiy qonunlarning borligi va kuchlarning taqqoslanishi ko'pchilikka ma'lum edi. Alohida



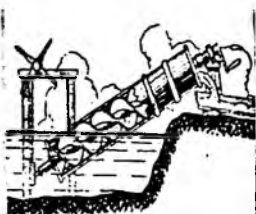
Aristotel



Arximed

qiziqish richag haqidagi masalaga qaratilgan. Richag nazariyasi qadimgi yunon olimi, matematik va mexanik, mexanika va gidrostatika nazariyasining asoschisi Sitsiliya orolidagi Sirakuza shahrida tug'ilgan Arximed (mil. avv. 287–212 yillar) tomonidan yaratilgan. Bu masala "Richaglar haqida" asarida bayon etilgan. Arximed birinchi bo'lib mexanik hodisalarni tahlil qilish uchun matematikani qo'llagan. U

jismlarning muvozanati va og'irlik markazini aniqlash, qattiq jism statikasining asosiy prinsiplari, suvda suza oladigan jismlarning muvozanati haqidagi nazariyalarga asos solgan. Arximed usuli yordamida egri chiziqlarning uzunligini hisoblab topish, turli xil jismlarning yuza va hajmlarini aniqlash kabi ishlar katta



Arximed vinti

ahamiyat kasb etadi. Arximed tishli g'ildirakni harakatga keltiruvchi chervyaklar va richaglar, polispast, ekin maydonlarini sug'orish mashinalari, yuklarni ko'tarish uchun mo'ljallangan richag va bloklar tizimlari, harbiy irg'itish mashinalari kabi qirgqa yaqin har xil mexa-nizmlarga oid ko'plab masalalar bilan shug'ullangan. Arximed o'z davridagi mashhur bo'lgan "besh mexanizm" dan iborat va oddiy mexanizmlar nazariyasini aniqlagan va uni ilmiy davralarda e'lon qilgan. Arximedning besh mexanizmi quyidagilar: richag, pona, blog, chig'iriy va oxiri yo'q vint (Arximed vinti). Arximed bu mexanizmlardan muhandislik ishlarida mohirona foydalangan. Xususan, binolar qurilishida richag va chig'iriy yordamida og'ir va katta toshlarni yuqoriga ko'tarishda foydalanilgan. Arximed vintidan botqoqliklarni quritishda foydalanilgan. Zero, Arximedning: "Tayanch nuqtasini topib bersangiz yerni o'z o'qidan siljitaman" degan mashhur iborasi bizga ma'lum. Uning ixtiro qilgan mexanizmlari insoniyat kundalik xo'jalik faoliyatida uzoq asrlar davomida xizmat qilib keldi. Biz uchun oddiy narsaga aylangan bolt, vint va gayka ham aynan Arximed vintining keyingi takomillashtirilishi natijasida kelib chiqqan tarixiy "innovatsiya" hisoblanadi. Arximed vintini

o'zini esa bugungi kunda barchamiz o'z xonadonimizdan topishimiz mumkin (hozirgi go'sht qiymalagich).

Dastlab Yunonistonda mexanikaning muhim bo'limi – statika vujudga kelgan. Arximed statika asoschilaridan biri hisoblanadi. Mexanikaning statika bo'limi qurilish san'atining antik dunyosi bilan uzviy bog'liq holda rivojlangan. Arximed birinchi bo'lib mexanika muammolarini o'rganishda matematika usullaridan foydalangan. Statikaning geometrik yo'nalishi Arximed nomi bilan bog'liq.

Eramizning I asrida yashagan aleksandriyalik Geron esa richag, pona, blok, chig'ir va vint kabi oddiy mashinalarni alohida va birgalikda ishlashi mumkinligini ta'kidlab o'tgan. "Mexanika" asarida beshta oddiy mexanizm – richag, chig'ir, pona, vint va blokni tasvirlagan. Geronning "Mexanika", "Pnevmatika", "Avtomatlar haqida" nomli asarlari tatbiqiy mexanikaga oid asarlardir. Geron bir qancha mexanizm va avtomatlar ham yaratgan, bular o'sha davr uchun ancha katta muvaffaqiyatlar edi. Uning "muqaddas" suv sotish avtomati hozirgi gazli suv sotish avtomatining o'tmishdoshi hisoblanadi.

Kinematika qoidalarini ishlab chiqish bilan Yevdoks Knidskiy (miloddan avvalgi IV asr), Platon, Arximed, Apolloniy Pergayos, Gipparx, Ptolomey va boshqalar shug'ullanganlar.

Mexanika fanining keyingi rivojlanish davri IX-XII asrlarga to'g'ri keladi. O'rta asrlarga kelib Markaziy Osiyoda mexanika rivojlanishining yangi bosqichi boshlandi. Bu davrda mexanika fanining rivojlanishida buyuk bobolarimiz ham katta hissa qo'shganlar. Tabiatdagi hodisalarni tushuntirishda O'rta Osiyolik olimlarning fikr va mulohazalari qadimgi an'analar asosida rivojlangan bo'lsada, ular tajribalardan foydalangan holda matematik usullar va matematik hisoblashlarni keng joriy etib, fanga juda ulkan hissa qo'shganlar.



Muhammad al-Xorazmiy

Markaziy Osiyolik matematik olimlar orasida eng mashhur olimlardan biri Abu Abdulloh Muhammad Ibn Muso al-Xorazmiydir (783-850). Al-Xorazmiyning matematika va astronomiyadagi xizmatlari shunday beqiyoski, uning nomi O'rta asr Yevropasida "algoritmus" matematik atamasiga aylangan. Al-Xorazmiy mexanika bilan ham shug'ullangan. U o'zining "Ilmlarning kalitlari" nomli asarida mexanika haqida, ayniqsa, Geronning "Pnevmatika"si haqida so'z yuritib, o'z fikrlarini bayon etgan. Al-Xorazmiy mexanika fani haqida "Fanlar kitobi" asarida ham to'xtalib o'tgan bo'lib, bu kitobda mashinalar tavsifi va ularni ishlatish bo'yicha tavsiyalar berilgan. Undan tashqari, bu asarda harbiy mashinalarga bag'ishlangan bo'lim ham mavjud.



Ahmad al-Farg'oniy

Al-Xorazmiy olam sirlarini o'rgangan. U farg'onalik do'sti Ahmad al-Farg'oniy bilan Bag'dodda rasadxona qurishga boshchilik qilgan. Rasadxonadagi asboblarni yordamida koinot sirlarini va Yer sayyorasini o'rgangan. Al-Xorazmiy va Al-Farg'oniy Andalusiyada diniy va aniq fanlar o'qitiladigan universitet tashkil qilgan. Ular boshchiligidagi olimlar 1000 dan ortiq yulduzlarni tekshirganlar hamda ularning joylashish xaritasini tuzganlar. Yer sayyorasining aylana uzunligini aniqlaganlar. Xorazmiy "Surat al-arz" ("Yer suvrati") nomli kitobida Afrika, Osiyo va Yevropa qit'alarini aniq tavsiflagan. Koinot sirlarini o'rganishga oid ishlari "Zij" ("Astronomiya") kitobida bayon etilgan. Xususan, Quyosh va Oy harakati

tenglama-lari va tutilish muddatlarini aniqlash qoidalari, sinuslar jadvallari, geografik nuqtalarni topish qoidalari berilgan.

Yevropada al Fraganus nomi bilan mashhur bobomiz Ahmad al-Fargʻoniy (797-865) olamning tuzilishi, Yer oʻlchovi, sayyoramizning sharsimon koʻrinishga ega ekanligi haqidagi dastlabki maʼlumotlarni ilgari surdi. U “Osmon jismlari harakati” asarini yozgan. Bu asar XII asrda lotin tiliga, XIII asrda Yevropaning boshqa tillariga tarjima qilingan va keng tarqalgan. Ahmad al-Fargʻoniy stereografik proyeksiya nazariyasining asoschisi sifatida fazo jismlari harakatining tekisliklardagi proyeksiyalari nisbatlari asosida baʼzi bir kattaliklarni oʻlchash mumkinligini isbotlagan.

Ahmad al Fargʻoniyning ulkan kashfiyotlaridan biri uning oʻrta asrlardagi asosiy astronomik asbob – “usturlob” nazariyasini ishlab chiqqani va ayniqsa, mashhur inshoot – “Miqyosi nil” ni yaratganidir. Mising Nil daryosida suv oqimining hajmi va tezligini oʻlchaydigan “Nilomer” yuksak



Nilomer

bilimdonlik bilan bunyod etilgan. Nilomer yordamida daryo oqimidagi mavsumiy oʻzgarishlar va ularning darajalari doimiy ravishda kuzatilgan hamda oqim sathi belgilangan. Bu esa dehqonchilik sohasining ahvolini bilishni va ayniqsa, aholining iqtisodiy ahvolini oldindan bilish imkonini bergan.

Abu Rayhon Beruniy (973-1048) Yerning tortishishi, jismlarning erkin tushishi, ogʻirlik, oddiy mexanizmlar, energiya va uning bir turdan boshqa turga aylanishi haqidagi maʼlumotlarni bergan. Beruniy oʻzi yasagan asboblarda Yerning



Abu Rayhon Beruniy

o'z o'qi atrofida aylanishini isbotlagan. Shu bilan birga u o'z izlanishlari natijasida Yerning radiusi 6490 km ga yaqin ekanligini aniqlagan. Beruniy olamning moddiy ekanligi haqida o'z fikrlarini bildirgan. Beruniy asarlarida harakat haqida, shu jumladan mexanik harakat va sayyoralarning harakati haqida ham juda yaxshi fikrlar keltirib o'tilgan. Shuningdek, harakatning turlari haqida, Yer va boshqa sayyoralarning Quyosh atrofidagi harakat trayektoriyalari ellips shakliga yaqin ekanligi haqida, fazoviy jismlarning vaznsizligi haqida, atmosfera bosimi haqida, jismlarning inersiyasi haqida, jismlarning elektrlanishi haqida, suyuqliklar gidrostatikasi haqida, atomning bo'linishi va atomdan keyingi zarralarning o'zaro ta'sir kuchlari haqida, solishtirma og'irlikni aniqlash usullari haqida, tovush tezligi va yorug'lik tezligi haqida, yomg'ir, qor va do'l kabi tabiat hodisalari paydo bo'lishining asosiy sabablari haqida, dengiz sathining ko'tarilish va pasayish sabablari haqida va shu kabi bir qator ilmiy masalalar haqida ajoyib fikrlar yozib qoldirgan. U Rayda shahrida (hozirgi Tehron yaqinida) mashhur olim, matematik va astronom al-Xo'jandiy bilan hamda tabib va faylasuf ar-Roziy bilan tanishadi. Beruniy Rayda o'zining "Al-Faxriy sekstanti" risolasini yozib qoldiradi.



Abu Ali Ibn Sino

Abu Ali al Xusayn ibn Abdulloh Ibn Sino (980-1037) tibbiyot, adabiyot, musiqa, falsafa, matematika, geologiya, astronomiya, kimyo, fizika, mantiq, tilshunoslik va psixologiya kabi fanlar bilan chegaralanmay, balki mexanika masalalari bilan ham shug'ullangan. U o'zining "Aql mezon" ("Miyar al-akul") asarida asosan mexanikadagi sodda mexanizmlar, ya'ni chig'ir, richag, blok, vint va ponalardan tuzilgan mashinalarning ishlash prinsiplarini batafsil bayon etgan. Shuningdek, "Aql mezon" asarida Aristotel va Geron asarlarini ijobiy qayta ishlab chiqqan va ko'pgina

qo'shimchalar kiritgan. Ibn Sino o'z asarlarida harakat (shu jumladan, mexanik harakat) haqida, sayyoralarning harakati haqida, kuch va atmosfera bosimi haqida ko'plab ma'lumotlar yozib qoldirgan. Ibn Sino ta'rifiga ko'ra, jism holatining o'zgarib borishi harakatni ifodalaydi, jismlarning fazodagi harakati (mexanik harakat) esa bu harakatning xususiy holidir. Ibn Sino asarlarida harakatning nisbiyligi, bo'shliq va atmosfera bosimi, jismning inersiyasi, kuch, massa va tezlanish orasidagi bog'lanish, aylanma harakat va markazga intilma kuch, chiziqli tezlik, yashin va momaqaldirroq hodisalari, tovush va yorug'lik tezligi kabi va boshqa ko'plab mavzularda o'z fikrlarini bayon etgan. Keltirilgan fikr va mulohazalarining juda ko'pchiligi hozirgi zamon tushunchalariga mos keladi.

Ibn Sino Sharqda "Shayx ur - rais" – "Olimlar olimi" deb nom oldi. Ibn Sinoning buyuk daholigini quyidagi fakt ham yorqin tasdiqlaydi. Ibn Sino Ioann Filopanning harakat haqidagi ta'limotini rivojlantirgan. Xususan, harakatlanuvchi jismga qo'yilgan kuch yo'qolmasligini va harakatga biror qarshilik bo'lmasa, harakatning cheksiz uzoq vaqt sodir bo'lishi mumkinligini asoslab bergan. Keyinchalik, XVII asrning oxirlariga kelib, Abu Ali Ibn Sinoning bu ta'limoti dinamikaning birinchi qonuni – "Inersiya qonuni" deb yuritila boshladi.

Ismoil al-Jazoiriyning (XII-XIII asrlar) "Muhandislik mexanikasini bilish" kitobi va Muhammad al-Xurosonning "Suv g'ildiraklari va suvni yuqoriga chiqarish va uni amalga oshirishda ishlatiladigan mexanik mos-lamalar" traktatlari mexanika sohasi rivoji uchun katta ahamiyatga ega.

Ulug'bek Muhammad Tarag'ay (1394-1449) XV asrda jahonda yagona rasadxona qurdirgan. Mirzo Ulug'bek sayyoralar harakatini, jumladan, Quyosh va Oyning harakatini katta aniqlikda hisoblay olgan. U o'zining "Ziji jadidi Ko'ragoniy" ("Ko'ragoniy



Mirzo Ulug'bek



Ulug'bek rasadxonasi

yangi astronomik jadvali”) asarida astronomiyaning nazariy asoslarini, koinot ilmi sohasidagi ijodiy ishlarini bayon qilgan. Bu asarda astronomiya (falakkiyot) faniga asos solingan va 1018 ta yulduzning joylashish koordinatalari jadvali juda katta aniqlikda hisoblab berilgan. Optik asboblarni ixtiro qilinguniga qadar tuzilgan zijlar orasida “Ziji jadidi Ko’ragoniy” eng mukammal hisoblanadi. Bu asari bilan butun

dunyoga astronom olim sifatida tanilgan. “Ziji jadidi Ko’ragoniy” asari dunyo xalqlari tillariga tarjima qilinib, boshqa olimlar tomonidan o’rganib kelingan.

Uyg’onish davrida Yevropada mexanika yanada kuchli taraqqiy etdi. Bu davrda mexanika fani oldiga ko’pgina yangi masalalar qo’yildi. Masalan, jismning urilish kuchi, snaryadlarning uchish nazariyasi, kemalarning chidamliligi, mayatniklar tebranishi va boshqa Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari ham shu davrda ishlab chiqildi va bunda Leonardo da Vinchi, N.Kopernik, I.Kepler, G.Galiley, I.Nyuton va boshqa ko’plab olimlarning o’rni katta bo’ldi.

Mexanikaning tiklanish davri savdogarlik, hunarmandchilik va harbiy ishlarga doir yangi bilimlarni to’plash bilan bog’liq. XIV–



Leonardo da Vinchi

XV asrlarda tiklanish davri fan va madaniyatning gullab yashnashi bilan boshlandi. Mexanika XV asrning birinchi o’n yilligida Italiyada, keyinchalik boshqa davlatlarda tez sur’atlarda rivojlandi.

Italiyalik rassom, matematik, mexanik va muhandis olim Leonardo da Vinchining (1452-1519) nazariy va amaliy mexanika sohasida qilgan ishlari diqqatga sazovordir. U statika

sohasida Arximed ishlarini davom ettirib, richaglar nazariyasi, jismlarning og'irlik markazini topish, jismlarning qiya tekislikdagi harakati, kuchlarni qo'shish va ajratish, ishqalanish koeffitsiyentini aniqlash, zarbalar nazariyasi, quvurlarda suvning harakati va jismlar harakati inersiyasiga oid bir qator ilmiy ishlar bilan shug'ullangan. Shu bilan birga u to'qimachilik dastgohlarini, bosmaxona va yog'ochni qayta ishlovchi mexanizmlarni yaratgan. Rasmlar va chizmalar Leonardoning ko'p yillik anatomiya va mexanikadagi tadqiqotlarining natijasidir. Qayta chizilgan rasmlar, "Doimiy dvigatel", "Kuchning yelka ostidan ko'rinishi", "Potensial richag", "Mexanik qush" kabi davrdan ilgari ketgan rasmlar, bularning barshasi Leonardo da Vinchi davrida erishish mumkin emas deb hisoblanardi, hozirgi kunda esa bular haqiqatdir. Konditsioner besh asrlik tarixga ega. Masalan, Leonardo da Vinchi havoni siqib, uni quvurlarga haydovchi qurilma yaratgan. Mazkur kashfiyotning qo'llanish doirasi juda katta: pechlarni qizdirishdan tortib, xona ventilyatsiyasigacha.

Leonardo da Vinchining fikricha: "Agar odamda pishiq matodan tayyorlangan, har bir tomoni 12 qo'l uzunligiga teng, balandligi ham xuddi shunday soyabon bo'lsa, u har qanday balandlikdan sakrashi va sog'-omon qolishi mumkin" (12 qo'l uzunligiga teng parashyut). Uning o'zi mazkur qurilmani sinovdan o'tkazishga ulgurmadi. Lekin 2000 yil dekabr oyida Buyuk britaniyalik parashyutchi Adrian Nikolas Janubiy Afrikada Leonardo da Vinchi chizmalari asosida tayyorlangan xuddi shunday parashyut bilan havo sharidan sakrab ko'rdi. 3 ming metr balandlikdan sakragan shovvoz barchasini muvaffaqiyatli amalga oshira oldi. Olim uzoqni ko'zlay olgan, hozirgi kunga qadar uning texnika va mexanikadagi kashf etgan yangiliklarini *fenomenallik* deb hisoblashadi.



Nikolay Kopernik

Mexanika fanining rivojlanishida polyak astronomi Nikolay Kopernik (1473-1543) tomonidan yaratilgan geliosentrik sistema alohida ahamiyatga ega. Nikolay Kopernik Quyosh olam markaziga joylashtirilgan, geliosentrik modeli asosida osmon jismlarining harakatini Yerni olam markaziga qo'ymasdan turib, tushuntirish mumkinligini isbot qildi.

Kopernikka qadar qadimgi yunon olimi Aristarx ham Yerning Quyosh atrofida aylanishi haqidagi fikrni ta'kidlagan bo'lsada, lekin u ilmiy jamoatchilik oldida o'z fikrlarini isbotlashga erisha olmagan edi. Nikolay Kopernik Yerning Quyosh atrofida aylanishi haqidagi fikrni isbotlab berdi. U osmon jismlarining harakatini kuzatib borib, Ptolomey nazariyasining noto'g'ri ekanligi haqida xulosa chiqardi va Yer ham oddiy sayyoralaridan biri ekanligini va barcha sayyoralar, shu jumladan Yer ham Quyosh atrofida aylanishini ilmiy jihatdan isbotlab berdi. Kopernik sayyoralar harakatini Yerdagi jismlar harakati kabi tushuntirib bo'lmashini aytib, o'zimiz ham Yer bilan birga harakatda bo'lganimizda sayyoralarning ham harakatda ekanligiga e'tibor berish zarurligini ta'kidladi. XVII asr fizikasining eng katta yutuqlaridan biri klassik mexikaning yaratilishi bo'ldi.



Galileo Galilei

Italiyalik shifokor va matematik D. Kardon (1501-1576) tegirmon va soat mexanizmlarini yaratgan.

Eng birinchi bo'lib italiyalik olim Galileo Galilei (1564-1642) dinamikaga fan sifatida asos solgan. Galileo Galilei mayatnikning tebranish va jismning o'z og'irligi ta'sirida harakatlanish qonunlarini yaratib, mexanika faniga salmoqli hissa qo'shgan. U mexanik harakatni

tajriba yo'li bilan o'rganib, harakatni matematik formulalar asosida ifodalash zarurligini aniqlagan. Shu bilan birga, jismning og'ma tekislikdagi harakati, balkalarning mustahkamligi, gorizontga ma'lum burchak ostida otilgan jismning harakati va erkin tushish haqidagi qonun, mayatnikning tebranish qonunlarini kashf etgan. Galiley erkin tushish tezlanishi jismning massasiga bog'liq emasligini aniqlaydi va bu bilan u Arastu davridan buyon hukm surayotgan "tushish tezligi" jism og'irligiga proporsional degan fikrga chek qo'yadi. Galiley o'z tadqiqotlarida Arastuning koinot tuzilishi va uning mexanik holatiga oid ta'limoti xato ekanini ko'rsatib berdi. Galiley klassik mexanikadagi nisbiylik nazariyasining asoschilaridan biri. Keyinchalik esa bu nazariya uning nomi bilan ataldi. U jismlarning o'zaro ta'siri natijasida tezlik o'zgarib, tezlanish hosil bo'lishini, ta'sir bo'lmaganda harakat holatining o'zgarmasligi, ya'ni tezlanishning nolga tengligini yoki tezlikning o'zgarmasdan saqlanishini qayd etib, Aristotelning shu masalaga qarashli fikrini, ya'ni ta'sir natijasida tezlik hosil bo'lishini inkor etadi. Keyinchalik Galiley aniqlagan qonun inersiya qonuni degan nom oldi.

Abu Rayhon Beruniy kabi Galiley ham Aristotelning "yengillik kuchi" tushunchasiga qarshi chiqib, faqat og'irlik kuchini tan oldi. U tabiiy hodisalarni tajribalar va matematik fikrlar asosida tushuntirishga harakat qildi. Galileyning "Mexanika" (1593) nomli asarida uning mexanika faniga oid izlanishlari yozib qoldirilgan. 1600 yilda u Yer tirik magnit ekanligini isbotlagan. U kompas magnit milining burilishini Yerning katta magnitga o'xshashi orqali tushuntirib, magnetizm va elektrning o'zaro bog'lanishini tekshirgan. Galiley bo'shliqda jismlarning tushish qonunlarini aniqlab berish bilan bir qatorda, bir tekis harakatlanmaydigan nuqtaning to'g'ri chiziqli harakati vaqtida tezlik va tezlanishlar bo'lishini birinchi bo'lib mexanikaga kiritgan. U bo'shliqda gorizontga nisbatan ma'lum burchak ostida otilgan jism trayektoriyasining paraboladan iborat bo'lishini ko'rsatib bergan. Galiley Stevinning mumkin bo'lgan ko'chishlar sohasidagi tekshirishlariga qo'shimcha ravishda, qiya tekislik ustida yuritilgan mulohazalar asosida – nimaiki kuchdan yutsa, u

tezlikdan yo'qotadi, degan mexanikaning oltin qoidasini ta'riflab bergan.

Fransuz matematigi Blez Paskal (1623–1662) arifmometr yasagan va suyuqliklar muvozanati masalalarini hal qilinishiga asos yaratgan.

Fransuz olimlaridan G.Amonton (1663–1705) va Sh.Kulon (1736–1806) birinchi bo'lib ishqalanish kuchini aniqlash yo'llarini ko'rsatganlar.



Isaak Nyuton

Ingliz olimi Isaak Nyuton (1643–1727) 1687 yilda mexanikaning asosiy qonunlarini kashf qilgan. U 1687 yilda nashr qilingan “Natural falsafaning matematik asoslari” nomli asarida mexanikaning asosiy klassik qonunlarini ta'rifladi, dinamikani sistematik ravishda bayon etdi va butun olam tortishish qonunini yaratdi. Ayniqsa, mexanikada Nyutonning butun olam tortishish qonuni muhim o'rin egallaydi. Nyuton o'ziga-

cha o'rgangan olimlarning fikrlariga va o'zining kuzatishlariga asoslanib, quyidagi xulosaga kelgan: Yerning Quyosh bilan tortishish kuchi ular massalari ko'paytmasiga to'g'ri, oralaridagi masofaning kvadratiga teskari proporsional. Nyuton tortishish kuchining bunday tabiati faqat Yer bilan Quyosh orasidagi tortishishiga emas, balki Oy bilan Yer, Quyosh bilan boshqa sayyoralar, Yer bilan atrofimizdagi jismlar orasidagi tortishishga ham tegishli ekanligini kashf etdi. Nyuton xulosasiga asosan, butun olam tortishish qonuni quyidagicha ta'riflanadi: Ikki jismning o'zaro tortishish kuchi ularning massalari ko'paytmasiga to'g'ri va ular orasidagi masofaning kvadratiga teskari proporsional. Nyuton mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi faqat tashqi kuchlar bilan aniqlanishini aytdi. Ammo klassik mexanika qonunlari tezligi yorug'lik tezligiga yaqinlashgan jismlar harakatiga qo'l kelmaydi. Lekin tezligi kichik jism harakatiga relyativistik va klassik mexanika qonunlari

qo'llanilishidan kelib chiqadigan natijalar bir xil ekanligi tajribada tasdiqlandi.

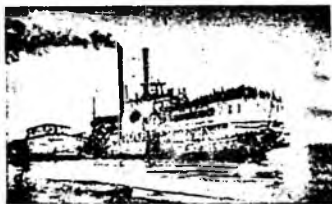
Agar jismning boshlang'ich vaqtdagi holati hamda harakat davomida unga ta'sir etuvchi kuchlarning tabiati ma'lum bo'lsa, Nyuton qonunlariga asoslangan holda shu jismning harakat tenglamasini tuzish mumkin. Bu harakat tenglamasidan foydalanib, ushbu jismning istalgan vaqtda fazodagi o'rini, tezlik, tezlanish va fizik kattaliklarni aniqlash mumkin bo'ldi. Nyuton osmon harakatining



Yog'ochdan yasalgan velosiped

ta'limotini berdi va osmon mexanikasini yaratdi. Makon va zamonni mutlaq deb hisobladi. Nyuton sayyoralar harakatlarini tushuntiruvchi Kepler qonunlari asosida butun olam tortishish qonunini ochdi va bu qonun orqali Oy, sayyoralar va kometalar harakatini isbotlab berdi. Nyutonning qilgan ishlari uning zamondoshlariga tushunarli emas edi va mujmalroq tuyulardi. Lekin, Nyuton qonunlari hozirgi kunda ham o'z o'rini yo'qotmagan.

Galileyning izdoshlaridan biri golland olimi H. Gyuygens (1629-1695) ham mexanikaga katta hissa qo'shgan. Gyuygens 1655 yilda Saturn yo'ldoshlaridan biri Titanni kashf qilgan va Saturnning aylanish davrini hisoblab, uning halqalari borligini aniqlagan. Gyuygens matematika, mexanika va astronomiyaga oid "Jismlarning zarba



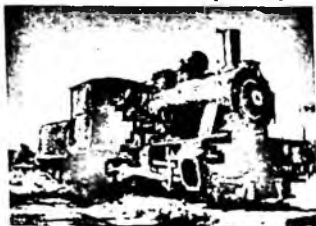
Robert Fulton tomonidan yaratilgan birinchi paroxod (1807 yil)

ta'siridagi harakatlari haqida", "Dioptrika", "Mayatnikli soatlar" kabi asarlar yozib qoldirgan. U o'zining optika sohasidagi ishlarini "Og'irlik sabablari" degan ilova qo'shilgan "Yorug'lik

haqidagi traktat" (1690) asarida jamladi. Bu asarda u birinchi bo'lib yorug'likning to'liq nazariyasi haqida bayon qilgan. Bunda olim butun olam tortishish qonunini ochishga juda yaqin kelgan edi.

XVIII asrda Fransiyada Vokanson, Shvetsiyada ota-bola Dro, Rossiyada Kulibin yaratgan mexanizmlar shu davr olimlarining mashinalar barpo etish sohasidagi ishlariga asos bo'ldi. Kinetik energiyaning o'zgarishi to'g'risidagi teoremani Iogann Bernulli (1667–1748) va Daniil Bernulli (1700–1782) tomonidan yaratilishi mexanik sistema dinamikasini rivojlantirdi.

XVII asrda klassik mexanika mustahkam o'rin egallab, akustika, optika, elektr va magnetizm, issiqlik hodisalarini o'rganish sohalarida katta izlanishlar boshlangan. XVIII asrga kelib esa tajriba va matematikadan keng foydalanilgan, klassik mexanika va osmon mexanikasi yanada tez sur'atlar bilan rivojlangan. Yer va Osmon hodisalarini mexanika qonunlari orqali tushuntirish asosiy maqsad hamda bosh ta'limot hisoblanar edi. O'sha davrda hatto, o'rganilayotgan fizik hodisani mexanika qonunlari orqali tushuntirish mumkin bo'lmasa, tanlangan tushuntirish yo'li to'liq emas yoki noto'g'ri deb yuritilar edi.



Jorj Stefenson tomonidan yaratilgan
birinchi parovoz (1814 yil)

XVII asming oxirlarida mexanikaning asosiy qonunlari ishlab chiqilgan. Shunga ko'ra, XVII asrni mexanikaning asosiy rivojlanish davri deyish mumkin. XVIII asrda ishlab chiqarish ehtiyoji muhim mexanizmlarni o'rganish zarurati tug'ildi. Bir tomondan, Oy va Yerning harakati muammosi hamda osmon mexanikasining

rivojlanishi haqidagi fikrlar olg'a surilgan bo'lsa, ikkinchi tomondan esa, moddiy nuqta mexanikasi masalalarini yechish va umumiy masalalarning yechimlarini topish kabi muammolar o'rtaga tashlandi.

Matematik, mexanik, fizik va astronom Leonard Eyler (1707-1783) qattiq jismlar mexanikasining asoschisi hisoblanadi. Eyler nuqta va qattiq jism dinamikasi masalalarini yechishda dastlab differensial tenglamalarini tuzib, so'ngra ularni integrallash yo'li bilan yechish usullarini ishlab chiqqan. Muammolarning matematik tahlili bo'yicha 800 dan



Leonard Eyler

ortiq ishga qo'l urgan bo'lib, ularga differensial tenglamalar, geometriya, sonlar nazariyasi, osmon mexanikasi, matematika, fizika, optika va boshqa bir qator masalalar kiradi. Uning 1736 yilda nashr qilingan ikki jildlik "Analitik mexanika" kitobida mexanikaga oid kashfiyotlari bayon qilingan. L.Eyler bilan D.Bernulli ayni bir vaqtda harakat miqdori momentining o'zgarishi to'g'risidagi teoremani ta'riflab berganlar.

Peterburg Fanlar akademiyasining akademigi Ya.German 1716 yilda dinamika masalalarini statika masalalariga keltiruvchi mexanika prinsipini ishlab chiqdi. Bu prinsip kinetostatika metodining o'zidir. Keyinchalik, 1737 yilda L.Eyler bu prinsipni umumlashtirib, egiluvchan jismlar tebranishini o'rganish uchun qo'lladi.

Rus olimi M.V. Lomonosov (1711-1765) tabiatshunoslik fani uchun mexanika, fizika va falsafaning ahamiyatini yuqori baholagan. Lomonosov materiya bo'lmasa, harakat ham bo'lmasligini ta'kidlab, materiya va harakatning saqlanish qonunini kashf etgan. Lomonosov birinchi bo'lib, haroratning mutlaq noli (0) mavjudligini aytgan va elektr hamda chiroqlarning paydo bo'lishi haqidagi fikrlarini bayon etgan. Lomonosov va Eyler o'z faoliyatlari davomida mexanika usullari ustida ham bir qator ilmiy izlanishlar olib borganlar va mexanikaning rivojlanishi uchun o'z hissalarini qo'shganlar.

Fransuz olimi J. Dalamber (1717-1783) "Dalamber prinsipi" deya nom olgan mexanika prinsipini yaratdi. 1743 yilda nashr qilingan "Dinamika bo'yicha traktat" asarida bog'lanishdagi

mexanik sistemalar harakati haqidagi masalalarni Dalamber prinsipi asosida yechish usulini ko'rsatgan. U German va Eyler metodlarini rivojlantirdi va murakkab bog'lanishdagi mexanik sistemalar dinamikasini o'rganishga yo'l ochdi.



Jozef Lui Lagranj

Fransuz olimi Jozef Lui Lagranj (1736-1813) 1788 yilda nashr qilingan "Analitik mexanika" nomli kitobida mexanika masalalarini mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qo'llash yordamida yechish usuli haqida bayon qiladi. Uning bu asari nazariy mexanika rivojlanishida alohida o'rin egallaydi.

Mumkin bo'lgan ko'chishlar nazariyasini birinchi marta Stevin (1548-1620) yaratgan. Keyinroq, Lagranj German, Eyler va Dalamber prinsiplarini birlashtirib, ularni mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipi bilan bog'ladi va ularga amaliy masalalarni hal etishni ishlab chiqdi. Mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipining ilmiy isboti bilan I.Bernulli, Furiye, Puasson va Lagranj shug'ullanganlar. Koriolis esa murakkab harakatlardagi "Koriolis tezlanishi" tushunchasini kiritdi.

XIX asrga kelib, mashinasozlik tez sur'atlar bilan rivojlana



Karl Bens tomonidan yaratilgan birinchi avtonobil (1885 yil)

boshladi. Shu bilan birga, XIX asrda gazlar dinamikasi va yopishqoq suyuqlik dinamikasiga asos solingan. Mexanika fanini rivojlanishiga rus olimlaridan juda ko'plab olimlar ilmiy izlanishlari bilan o'z hissalarini qo'shganlar. Ularning ilmiy ishlari mexanika fani rivojlanishi uchun muhim ahamiyatga ega.

M.V. Ostrogradskiy (1801-1862) analitik mexanika sohasi, osmon mexanikasi, gidromexanika va egiluvchanlik (elastiklik) ta'limoti

bo'yicha bir qator ilmiy ishlari bilan tanilgan. P.L. Chebishev (1821-1891) mashina va mexanizmlar nazariyasiga asos solib, bu nazariyaning rivojlanishida o'z hissasini qo'shgan. V.L. Kirpichev (1845-1913) "Mexanika haqida suhbatlar" nomli kitobida mexanikaning asosiy masalalarini oddiy va tushunarli holda bayon etgan. K.E. Sialkovskiy (1857-1935) raketa naza-riyasi va suyuq yoqilg'i bilan ishlaydigan raketa dvigateli naza-



I.V. Meshcherskiy

riyasiga asos solgan. I.V. Meshcherskiy (1859-1935) o'zgaruvchan massali jismlarning harakatini o'rgangan va osmon mexanikasi hamda reaktiv texnikaga oid bir qator masalalarni yechish uchun ilmiy asos bo'ladigan asarlar yozib qoldirgan. A.N. Krilov (1863-1945) kemalarning ustuvor harakati, magnit va gidroskopik kompaslarga doir ilmiy ishlari bilan mashhur. S.A. Chaplugin (1869-1942) aerogidrodinamika sohasidagi ilmiy ishlari hamda bog'lanishdagi mexanik sistemalarning harakatini o'rganishga doir bir qancha ilmiy ishlari bilan tanilgan. S.P. Korolyov (1906-1966) Yerning sun'iy yo'ldoshlari, geofizik raketalar, "Vosxod" hamda "Vostok" kosmik kemalarini yaratgan. M.V. Keldish (1911-1978) tebranishlar nazariyasi, kosmonavtika va aerogidrodinamika sohalarida ilmiy izlanishlar olib borib, juda ko'plab tadqiqotlar o'tkazgan. "Rus aviat-siyasining otasi", N.E. Jukovskiyning (1847-1921) mehnati aerodinamika va aviatsiya fanini to'liqligicha o'rganishda beqiyosdir.

Keyingi yillar mobaynida fazoga juda ko'plab kosmik kemalar, Yerning sun'iy yo'ldoshlari uchirilmoqda. Ularni fazoga uchirishda, Yerdan orbitagacha olib chiqish uchun raketalardan foydalaniladi. Bunda albatta, impulsning saqlanish qonuni asosida hosil bo'ladigan reaktiv harakat kosmonavtikaning asosi hisoblanadi.

Aviatsiya va aerodinamika sohasida, kosmik raketa va kemalarning yaratilishida olim va ixtirochilardan K.E. Siolkovskiy (1857-1935), S.P. Korolyov (1906-1966), M.V. Keldish (1911-

1978), V. Braun (1912–1976), G. Obert (1894–1989) va boshqalar katta hissa qo'shganlar. Hozirgi kunda kelib, kosmonavtika sohasi yuksak darajada taraqqiy etib bormoqda.

XX asr o'zbek ilm-fani taraqqiyoti tarixi haqida gap ketgudek bo'lsa, avvalo, Respublika Fanlar Akademiyasi, universitetlar, oliy o'quv yurtlarining tashkil etilishi, fan sohalarida yaratilgan ulkan kashfiyotlar ko'z oldimizda gavdalanadi. Yangi-yangi fan tarmoqlarining, ilmiy yo'nalishlarning vujudga kelishida ko'plab olimlarning muborak nomlari, ular yaratgan ilmiy maktablar, ulkan samaralar, qutlug' izlanishlar bor bo'y-basti bilan ko'z o'ngimizda namoyon bo'ladi.



X.A. Raxmatulin

Nazariy mexanika fanining rivojlanishida, yangi usullar bilan boyitilishida, yangi istiqbolli ilmiy va uslu-biy ishlanmalarni yaratishda Vatani-mizning taniqli olimlari, akademiklar, X.A. Raxmatulin (1900–1988), M.T. O'rozboyev (1906–1971), X.X. Usmonxo'jayev (1919–1993), V.K. Qobulov (1921–2010), J.F. Fayzullayev (1924–1992), T.R. Rashidov (1934–2020), Ya.N. Muborakov (1944–1999), M.M. Mirsaidov (1948 yilda tug'ilgan) va boshqalarning hissaları beqiyosdir.

Shuningdek, professorlar A.G'. Azizov, M.F. Shulgin, Sh.M. Mamatqulov, A.A. Hamidov, A.B. Begmatov, N.A. Korshunova, K.S. Sultonov, dotsentlar P.Sh. Shohaydarova, Sh.Sh. Shoziyotov, A.M. Shulgin, Sh.Z. Sibukayev, M.A. Valiyev, Q.B. Mo'minov, A.X. Musalov, J.Z. Zoirov, S.S. Nasriddinov, R.D. Xudoyberdiyev va boshqalar ham mexanika sohasida ilmiy izlanishlar olib borganlar.

Mexanika sohasi rivojlanishiga munosib hissa qo'shgan akademik, X.A. Raxmatulin (1900–1988) O'zbekistonda ko'p fazali muhitlar gidrodinamikasi ilmiy maktabi asoschisi. X.A. Raxmatulinning asosiy ilmiy ishlari elastik va elastik-plastik muhitlarda to'liqlar tarqalishining dinamik nazariyasi, elastik

bog'lanishlar bo'yicha ko'ndalang zarba nazariyasi, tuproq dinamikasi, singdiruvchi jismlar aerodinamikasi, parashyutlar nazariyasi va ko'p fazali muhitlar mexanikasiga doir.

Raxmatullin yuk tushadigan (nagruzkali) va yuk tushmaydigan (nagruzkasiz) to'liqlar mavjudligini kashf qildi (ular "Raxmatullin to'liqlari" nomini oldi). Bu kashfiyot inshootlar zaminini hisoblash va ularni loyihalashda, kema zirhi mustahkamligini aniqlash va boshqa masalalarni hal qilishda qo'llaniladi. X.A. Raxmatulin umrlarining oxirigacha M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetida "To'liqlar dinamikasi" kafedrasiga mudirlik qilgan.

Akademik M.T. O'rozboyev (1906-1971) o'zbek mexaniklarining otasi hisoblanadi. U mexanikaning ko'p yo'nalishlariga asos solgan: iplar mexanikasi va inshootlarning seysmik mustahkamligi nazariyasi va amaliyoti, suyuqlik va gazlar mexanikasi, paxta teruvshi va boshqa mexanizm va mashinalar nazariyasi hamda amaliyotiga oid bir qator ilmiy ishlarning muallifi.



M.T. O'rozboyev

O'rozboyev dunyo seysmologiya fani asoschisi hisoblanadi. U texnika fanlarining rivojlanishiga, suv muammolari va ularni qishloq xo'jaligiga tatbiq etishda ham katta hissa qo'shgan. Uning ilmiy ishlari hozirgacha mexanika fanining rivojlanishida asos bo'lib kelmoqda. M.T. O'rozboyevning ko'p sonli mutaxassis shogirdlari ilm-fan va texnika rivojlanishida ilmiy izlanishlar olib borishmoqda. U ayniqsa, o'zining shogirdlariga juda ahamiyatli bo'lgan va zarur vaqtlarda ularning kamchiliklarini ham ko'rsatgan.



V.Q. Qobulov

O'zbekistonda kibernetikaning taraqqiyotiga munosib hissa qo'shgan akademik, V.Q. Qobulov (1921-2010) tutash muhitlar mexanikasi masalalarini algoritmash va avtomatik boshqarish tizimlarini yaratish sohasida bir qancha ilmiy ishlarning muallifi. Ilmiy ishlarini bajarish jarayonida EHMdan foydalanish bo'yicha bir qator samarali ishlar olib borgan.

Qobulovning ilmiy ishlari hisoblash texnikasini fan, texnika va xalq xo'jaligining turli sohalariga joriy etish bilan bog'liq. Respublikamizda 1966 yilda Kibernetika instituti tashkil etilgach, Qobulov yetakchiligidanoat va boshqa ishlab chiqarish korxonalarida kibernetika va hisoblash texnikasi vositalari asosida boshqarishning avtomatlashtirilgan sistemalari yaratildi va joriy qilindi.



J.F. Fayzullayev

Yirik gidrodinamik olim, texnika fanlari doktori, professor, O'zbekistonda xizmat ko'rsatgan fan arbobi, O'zbekiston Fanlar Akademiyasining akademigi, J.F. Fayzullayev (1924-1992) ko'p fazali muhitlar gidrodinamikasining asoschisi. Uning ilmiy faoliyati ko'p fazali muhitning aero-gidrodinamikasini yaratishga va uni biomexanika, gidrotexnika, melioratsiya, neft mexanikasi kabi texnika sohalariga tatbiq qilishga

bag'ishlangan. U qishloq xo'jaligi ekinlarini suv tanqisligi sharoitida tomchilatib va zamindano sug'orishning gidrodinamik nazariyasini yaratdi. Qon tomirlarining xususiyatlarini hisobga olib, ko'p fazali muhitning elastik trubalardagi harakatini o'rgandi va biomexanika masalalarini yechish uchun asos soldi.

Akademik X.X. Usmonxo'jayevning (1919-1993) mexanizmlar va mashinalar hamda mashinasozlik ilmiga qo'shgan hissasi beqiyosdir. U O'zbekistonda mexanizm va mashinalar nazariyasi maktabining tashkilotchisi va asoschisi hisoblanadi. X.X. Usmonxo'jayevning asosiy tadqiqot ishlari mexanizmlar, mashinalar va avtomatik chiziqlar nazariyasi, richagli va episiklik mexanizmlar nazariyasi, paxta terish mashinalari nazariyasi va mashina agregatlari dinamikasi bilan bog'liq. Namlikni, haroratni va tuzilishini hisobga olib, turli kinematik juftlar orasidagi ishqalanish koeffitsiyentini aniqlovchi uskunani yaratgan.



X.X. Usmonxo'jayev

Akademik T.R. Rashidov (1934-2020) yer osti inshootlari seysmik mustahkamligi nazariyasini yaratishda ulkan ishlarni amalga oshirgan. U murakkab tuzilishdagi yer osti inshootlarining seysmik ustuvorligi dinamikasi nazariyasi masalalari bo'yicha va boshqa masalalar bo'yicha ilmiy ishlar olib borgan.



T.R. Rashidov

Akademik Ya.N. Muborakovning (1944-1999) asosiy ilmiy ishlari yer osti fazoviy inshootlarini seysmik kuchlar ta'sirida deformatsiyalanish-zo'riqish holatlarini tadqiq qilishning nazariy asoslarini yaratishga oid. Uning tadqiqot natijalari amaliyotda Toshkent metropoliteni inshootining loyihalashtirilishi va qurilishida, Arman Oqtosh atom elektr stansiyasida va boshqa bir qator ishlarda tatbiq qilingan.



Ya.N. Muborakov



M.M. Mirsaidov

Akademik M.M. Mirsaidov (1948 yilda tug'ilgan) tomonidan gruntli inshootlar dinamikasini baholashda energiyaning to'liq ko'rinishida chiqib ketishini hisobga oluvchi nazariya ishlab chiqilgan. Shuningdek, gruntli to'g'onlar dinamikasining uch o'lchovli masalasini yechishda geometrik va fizik chiziqlikni, gruntli to'g'on-larning suv bilan o'zaro ta'sirini hisobga oluvchi uslub ishlab chiqilgan.

Nazariy mexanika fani tabiatda sodir bo'ladigan barcha mexanik harakatlarning umumiy qonuniyat-larini idrok etish, ularning barqaror-ligini hamda ustuvor kechishi haqi-dagi tasavvurga ega bo'lish, sanoat-ning barcha sohalari uchun mexanizm va mashinalarning yangi avlodlarini yaratish uchun asos bo'la oladi. Bu esa o'z navbatida texnologik jarayonlarni hisobga olgan holda mexanizm va mashinalarni tuzilish jihatidan kinematik tadqiq etish, ularning dinamik va matematik modellarini yaratishga zamin hozirlaydi. Oddiy va murakkab masalalarni hal etish jarayonida nazariy mexanika fanining tatbiqiy masalalarini yechish uchun ma'ruza va amaliyot darslarini uyg'unlashtirgan holda yangi usullar, fikrlar va asosli mulohazalardan foydalanish yaxshi samara beradi.

Mexanika – tashqi kuch ta'siri natijasida jismning fazoda harakatlanishi va muvozanat holatini o'rganish bilan shug'ullanadi. Shu o'rinda aytish lozimki, mexanika tabiiy fan hisoblanadi, chunki u tabiat hodisalarini o'rganadi. Ko'pgina inshootlar mexanikasidagi misollar matematik isbotlarga tayanganligi sababli mexanikani matematika fani bilan ham bog'liq deyishadi. Boshqa bir tomondan olib qaraganda, mexanika mavhum yoki aniq fan emas, balki mexanika amaliy fan ham hisoblanadi.

Nazariy mexanika fani uch qismga bo'linadi: statika, kinematika, dinamika.

Nazariy mexanikaning *statika* bo'limida jismlarning muvozanat holatlari va ularga qo'yilgan kuchlarni sodda holga keltirish kabi masalalar o'rganiladi.

Nazariy mexanikaning *kinematika* bo'limida jismlarning harakati, aniq harakat deb ataluvchi geometrik nuqtai-nazardan o'rganiladi, ya'ni harakat, uni vujudga keltiruvchi sabablarga bog'lanmasdan o'rganiladi.

Nazariy mexanikaning *dinamika* bo'limida moddiy jismlarning harakati shu harakatni yuzaga keltiruvchi sabablar, ya'ni kuchlarni inobatga olgan holda o'rganiladi.

Qattiq jismlarning harakatlanish sabablari, qonuniyatlari hamda ularning muvozanat holatlarini o'rganish masalasi muhandisdan nazariy mexanika fanini chuqur va mukammal bilishni talab etadi.

Nazariy mexanika fanini o'zlashtirish uchun "Oliy matematika", "Fizika", "Informatika va informatsion texnologiyalar", "Chizma geometriya va muhandislik grafikasi" kabi fanlardan chuqur bilim talab etiladi. Shu bilan birga, "Mexanizm va mashinalar nazariyasi", "Materiallar qarshiligi", "Amaliy mexanika", "Mashina detallari" va boshqa umummuhandislik fanlarini o'zlashtirish uchun "Nazariy mexanika" fani po'ydevor hisoblanadi.

I. STATIKA

1. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI VA AKSIOMALARI

Nazariy mexanikaning jismga ta'sir etuvchi kuchlarning turlari, ular ustida amallar va kuchlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi bo'limi *statika* deb ataladi. Statikada jismlarning muvozanati va jismlarga qo'yilgan kuchlarni sodda holga keltirish kabi masalalar o'rganiladi.

Statikaning asosiy tushunchalaridan biri mutlaq (absolyut) qattiq jism tushunchasidir. Ma'lumki, jismga tashqi kuchlar ta'sir qilganda u o'z shaklini ma'lum darajada o'zgartirishi mumkin. Jism kuchlar ta'sirida bo'lganda uning ixtiyoriy ikkita nuqtasi orasidagi masofa har qanday holatda ham o'zgarmasa, bunday jismga *mutlaq (absolyut) qattiq jism* deyiladi. Ya'ni, qo'yilgan kuchlar ta'sirida mutlaq qattiq jismning geometrik shakli va o'lchamlari o'zgarmaydi, deformatsiyalanmaydi. Ma'lumki, har qanday qattiq jism tashqi ta'sir natijasida juda kichik miqdorda bo'lsa ham ma'lum darajada o'z shaklini o'zgartiradi (deformatsiyalanadi). Bunda jismning deformatsiyalanishi unga ta'sir etayotgan tashqi kuchlar bilan bir qatorda, jismning shakli va geometrik o'lchamlari hamda uning qanday materialdan tashkil topganligiga ham bog'liq bo'ladi. Keyingi matnlarda jism yoki qattiq jism deganimizda mutlaq qattiq jism tushuniladi. Ushbu kitob yordamida siz bilan qattiq jism mexanikasini o'rganamiz.

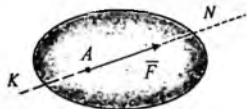
Nazariy mexanika fanidagi asosiy tushunchalardan yana biri moddiy nuqta tushunchasi hisoblanadi. Geometrik o'lchamlari e'tiborga olinmaydigan darajada kichik bo'lgan jism *moddiy nuqta* deb ataladi. Moddiy nuqta geometrik nuqtadan farqli ravishda berilgan jismning massasiga teng massaga hamda boshqa jismlarga o'zaro ta'sir etish xususiyatiga ega bo'ladi. Chizmada esa moddiy nuqtani geometrik nuqta sifatida tasvirlaymiz. Yerni Quyosh atrofidagi aylanishida moddiy nuqta deb qarash mumkin. Toshkentdan Moskvaga qarab harakatlanayotgan avtomobilni ham moddiy nuqta deyish mumkin. Lekin, Yerni o'z o'qi atrofidagi aylanishida moddiy

nuqta deb qarab bo'lmaydi. Chunki, geometrik o'lchami (diametri) aylanish o'qining o'lchamiga yaqin. Har qanday jismni moddiy nuqtalar to'plamidan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu nuqtalarning orasidagi munosabat esa jismning xususiyatlariga bog'liq bo'ladi.

Har birining holati va harakati boshqalarining holati hamda harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami *mexanik sistema* deb ataladi. Fazoda ixtiyoriy yo'nalishda harakatlana oladigan jism *erkin jism* deb ataladi. Quyosh sistemasining sayyorolari bunga misol bo'la oladi.

Moddiy jismlarning harakati yoki ichki holatining o'zgarishiga sabab bo'luvchi, o'zaro bir-birlariga ko'rsatgan ta'sirlarining miqdor o'lchovi *kuch* deb ataladi. Kuchning jismga ta'siri kuch qo'yilgan nuqta, kuchning yo'nalishi va kuchning miqdori bilan aniqlanadi. SI xalqaro birliklar sistemasida kuchning asosiy o'lchov birligi sifatida 1 *Nyuton* (1N) qabul qilingan. Bu birlik mashhur ingliz olimi *Isaak Nyuton* sharafiga qo'yilgan. 1 N deb, 1 kg massali jismga 1 m/s² tezlanish bera oladigan kuchga aytiladi. Kuchni o'lchash uchun *dinamometr* asbobidan foydalaniladi (grekcha *dinamics* – kuch, *metreo* – o'lchayman). Texnikaning bir qancha sohalarida kuch birligi sifatida kilogramm-kuch (1kgk) birligi ham qo'llaniladi, 1 kgk = 9,81 N.

Kuch – jismlarning o'zaro mexanik ta'siri o'lchovi. *Kuch* – vektor kattalik bo'lib, chizmada yo'naltirilgan kesma tarzida ifodalanadi. *Kuch yo'nalishi* deb, tinch holatda turgan erkin moddiy nuqtaning qo'yilgan kuch ta'siridan olgan harakatining yo'nalishiga aytiladi. Kuch yo'nalgan to'g'ri chiziq *kuchning ta'sir chizig'i* (KN) deb ataladi (1.1-rasm).



1.1-rasm

Jismning bevosita kuch qo'yilgan nuqtasi *kuch qo'yilgan nuqta* deb ataladi. Kuch yo'naltirilgan kesma orqali grafik tasvirlanadi. Tanlab olingan masshtabda kesma uzunligi kuch miqdorini ifodalaydi.

Agar jismga bir nechta, $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ kuchlar ta'sir etsa, bunday kuchlar to'plamiga *kuchlar sistemasi* deyiladi va $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ kabi belgilanadi.

Agar jismga qo'yilgan $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirini, uning tinch yoki harakat holatini o'zgartirmay, boshqa kuchlar sistemasi, ya'ni $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m)$ bera olsa, bu ikki kuchlar sistemasi o'zaro *ekvivalent kuchlar sistemasi* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \Leftrightarrow (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m).$$

Berilgan kuchlar sistemasi bitta kuchga ekvivalent bo'lsa, bu kuchga berilgan kuchlar sistemasining *teng ta'sir etuvchisi* deyiladi. Shuni nazarda tutish kerakki, kuchlar sistemasining jismga berayotgan ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuch mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisidir:

$$(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m) \Leftrightarrow \bar{R}.$$

Kuchlar sistemasi ta'siridagi jism tinch holatda qolsa yoki inersion harakatda bo'lsa, jismning bunday holati *muvozanat holat* deb ataladi. Inersion harakat deganga jismning barcha nuqtalari o'zgarmas va bir xil tezlik bilan harakatlanishi tushuniladi. Jismning muvozanat holati uning qattiq, suyuqlik va gazsimon holatda ekanligiga ham bog'liq bo'ladi. Suyuq va gazsimon jismlarning muvozanat shartlari gidrostatika va aerostatikaga oid fanlarda o'rganiladi. Nazariy mexanika kursining statika bo'limida esa, asosan, qattiq jismlarning muvozanat shartlari o'rganiladi.

Moduli bo'yicha teng ta'sir etuvchiga teng bo'lgan, yo'nalishi bo'yicha unga qarama-qarshi va u bilan bir to'g'ri chiziqli yotuvchi kuch *muvozanatlovchi kuch* deb ataladi.

Erkin jism unga qo'yilgan kuchlar sistemasi ta'sirida tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi *muvozanatlashgan kuchlar sistemasi* yoki *nolga ekvivalent sistema* deyiladi:

$$(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m) \Leftrightarrow 0.$$

Bir jismga (yoki bir necha jismlarga) ta'sir etayotgan kuchlar ikki turga, ya'ni ichki va tashqi kuchlarga bo'linadi. Boshqa jismlarning shu jismga ta'sir kuchlari *tashqi kuchlar* deb ataladi. Bir jism (yoki jismlar sistemasi) qismlarining o'zaro ta'sir kuchlari *ichki kuchlar* deb ataladi.

Jismning bir nuqtasiga ta'sir etadigan kuchni *markazlashgan kuch* deyiladi. Jismning butun hajmi bo'yicha, yoki ma'lum yuzasi bo'yicha ta'sir etuvchi kuchlar *taralgan (yoyilgan) kuchlar* deb ataladi.

Markazlashgan kuch tushunchasi shartli tushuncha hisoblanadi. Chunki, aslida har qanday kuch jismga birorta yuza (yoki yuzacha) orqali ta'sir etadi. Kuchni bir nuqtaga qo'yishlikning iloji yo'q. Mexanikada markazlashgan (yig'ilgan) kuch tushunchasi, umuman olganda, juda kichkina yuzachaga jamlangan holda bo'ladi. Masalan, xususiy holda og'irlik kuchini olaylik, aslida bu kuch jismning har bir zarrachasiga ta'sir etadigan kuchlarning yig'indisidan iborat hamda bu kuchning ta'sir chizig'i shu *jismning og'irlik markazi* deb atalgan markazidan o'tadi.

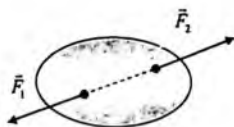
Nazariy mexanikaning statika bo'limida jismga qo'yilgan kuchlar haqidagi umumiy qonunlar quyidagi aksiomalar tarzida beriladi:

1-aksioma. *Erkin qattiq jism ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlar miqdor jihatdan teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi zarur va yetarli.*

Bu aksioma eng sodda muvozanatlashgan kuchlar sistemasini ifodalaydi (1.2-rasm).

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \text{ va } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Tajribalardan ma'lumki, bitta kuch ta'siridagi erkin jism muvozanatda bo'la olmaydi.



1.2-rasm

2-aksioma. Agar qattiq jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasi qo'shilsa yoki undan ayirilsa, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Yuqorida keltirilgan ikkita aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Qattiq jismga qo'yilgan kuchni uning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'nalishini o'zgartirmasdan jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirganda, kuchning jismga ta'siri o'zgarmaydi.



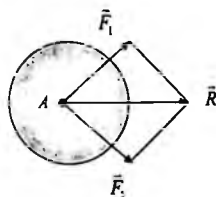
1.3-rasm

Isbot. Qattiq jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin. Bu kuchning ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy B nuqtani olib, shu nuqtaga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini, ya'ni tashkil etuvchilari miqdor jihatidan F ga teng bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0$ kuchlar sistemasini qo'yamiz (1.3-rasm).

Ikkinchi aksiomaga asosan, bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Ko'rish mumkinki, $\vec{F}$ va $\vec{F}_2$ kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Bu muvozanatlashgan kuchlar sistemasini ikkinchi aksiomaga binoan jismdan olib tashlaymiz. U holda, jismning B nuqtasiga qo'yilgan $\vec{F}_1 = \vec{F}$ kuch qoladi. Demak, kuch o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin ekan.

O'zining ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lgan vektor sirpanuvchi vektor deb ataladi. Bundan ko'rinadiki, kuch vektori sirpanuvchi vektor ekan.

3-aksioma (parallelogramm qoidasi). Jismning biror nuqtasiga turli yo'nalishda qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi, miqdor jihatidan shu kuchlarga qurilgan parallelogramning kuchlar qo'yilgan nuqtasidan chiquvchi diagonaliga teng bo'lib, shu diagonal bo'ylab yo'naladi.



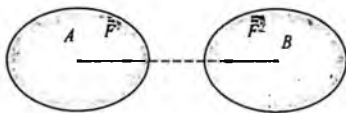
1.4-rasm

Bu aksioma, ikki vektorni qo'shish

qonuniyatiga asoslanadi (1.4-rasm). $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\vec{R}$ bilan belgilab, quyidagini yozish mumkin: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

4-aksioma. (Nyutonning uchinchi yoki aks ta'sir qonuni). Ikki jismning bir-biriga ko'rsatgan ta'sir kuchlari o'zaro teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi.

Ta'sir va aks ta'sir kuchlarini ikkita jismga alohida-alohida qo'yilganligini osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuning uchun bu ikki kuchni muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deb qarab bo'lmaydi. $\vec{F}' = -\vec{F}$ (1.5-rasm).



1.5-rasm

5-aksioma. Berilgan kuchlar ta'sirida deformatsiyalanadigan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi.

Bu aksiomaga qotish prinsipi deyiladi. Aksiomadan ko'rinadiki, absolyut qattiq jismning muvozanat sharti zaruriydir, ammo ko'p hollarda deformatsiyalanuvchi jismning muvozanati uchun yetarli



1.6-rasm

bo'lmaydi. Masalan, AB sterjenning $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlar ta'siridagi muvozanatini ko'raylik (1.6-rasm). Bu kuchlar miqdor jihatidan AB to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan. Agar sterjen absolyut qattiq bo'lsa, u holda $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlarning har qanday miqdorlarida sterjen muvozanatda bo'ladi. Agar sterjen absolyut qattiq bo'lmasa, kuchlarning miqdori ixtiyoriy bo'lmaydi, chunki sterjenni uzishi mumkin bo'lgan kuchlarning chegaraviy qiymatlari mavjuddir.

Nazorat savollari

1. Nazariy mexanika fani nimani o'rgatadi?
2. Mexanik harakat deb nimaga aytiladi?
3. Muvozanat deb nimaga aytiladi?
4. Statika bo'limi nimani o'rgatadi?
5. Kinematika bo'limi nimani o'rgatadi?
6. Dinamika bo'limi nimani o'rgatadi?
7. Qanday jismga absolyut qattiq jism deyiladi?
8. Kuch deb nimaga aytiladi?
9. Kuchlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
10. Teng ta'sir etuvchining kuchdan qanday farqi bor?
11. Muvozanatlovchi kuch nima va uning teng ta'sir etuvchi kuchdan farqi?
12. Statikaning aksiomalarini ta'riflang?

2. BOG'LANISH VA BOG'LANISH REAKSIYALARI

Harakati bog'lanishlar bilan cheklanmagan jismga *erkin jism* deyiladi. Ya'ni, agar jism tekislikda yoki fazoda ixtiyoriy tomonga harakatlana olsa, bunday jism erkin jism hisoblanadi. Masalan, havoda uchayotgan samolyot yoki havo sharini erkin jism deb qarash mumkin. Aslida tabiatda erkin jism mavjud emas. Har qanday jismning harakati biror yo'nalishda qandaydir boshqa jismlar tomonidan cheklangan bo'ladi. Lekin masala yechishni soddalashtirish uchun erkin jism mavjud deb qaraladi.

Jismning harakati yoki holati biror sabab bilan cheklangan bo'lsa, u *bog'lanishdagi jism* deb ataladi. Jismning harakati yoki holatini cheklovchi sababga *bog'lanish* deyiladi. Misol uchun tekislikdagi mexanizm yoki mashinaning harakati cheklangan bo'ladi. Masalan, ichki yonuv dvigateli silindri ichida to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanayotgan porshen bog'lanishdagi jism, silindr va shatun esa bog'lanish vazifasini bajaradi. Temir yo'l vagonining vertikal yo'nalishdagi harakati cheklangan, ya'ni rels vertikal harakatni cheklaydi. Bunda vagon bog'lanishdagi jism, rels esa bog'lanish vazifasini bajaradi.

Bog'lanishning jismga ko'rsatadigan ta'sirini ekvivalent kuch yoki kuch momenti bilan almashtirish mumkin, uni *bog'lanish reaksiya kuchi (momenti)* deyiladi.

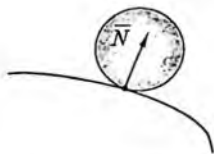
Odatda, bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi va qiymati noma'lum bo'lib, ular berilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan aniqlanadi. Bog'lanish reaksiya kuchlarini aniqlash statikaning asosiy masalasi hisoblangani uchun, bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini bilish ahamiyatlidir. Odatda bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi tomonga cheklangan bo'lsa, bog'lanish reaksiya kuchi shu yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

Statika masalalarini yechishda erkin jismning muvozanat shartlarini bog'lanishdagi jismga tatbiq etish uchun bog'lanishdan b'oshatish aksiomasidan foydalaniladi.

6-aksioma (*bog'lanishdan ozod qilish, bo'shatish aksiomasi*). *Bog'lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun unga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlarini ham qo'shish kerak.*

Bog'lanishdagi jismlarning bir-biriga tegib turgan qismlaridagi ishqalanish kuchlarini hisobga olmasdan ularni quyidagi *asosiy bog'lanish turlariga* ajratish mumkin:

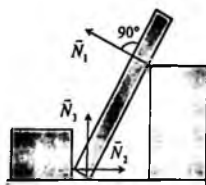
1. Silliq sirt yoki tayanch vositasida bog'lanish. Bunda silliq sirt jismning shu sirt bilan tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal yo'nalishi bo'yicha harakatini cheklaydi. Shuning uchun, silliq sirtning reaksiya kuchi, $\bar{N}$ jismning silliq sirtga tegib turgan nuqtasiga qo'yilgan va sirtga o'tkazilgan normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi (2.1-rasm). Bu kuchga *normal reaksiya kuchi* deyiladi.



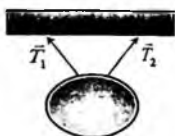
2.1-rasm

Agar tegib turgan sirtlardan birortasi nuqta bo'lsa, u holda reaksiya kuchi ikkinchi sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (2.2-rasm).

Agar jism qo'zg'almas tekislikka g'altaklar vositasida tayanib turgan bo'lsa, u holda qo'zg'aluvchan tayanchning reaksiya kuchi tayanch tekisligiga perpendikulyar holda yo'nalgan bo'ladi.



2.2-rasm



2.3-rasm

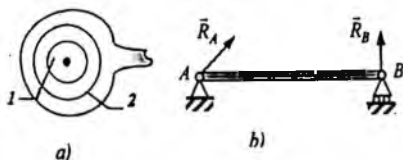
2. Ip (arqon, zanjir, qayish, sim) vositasida bog'lanish. Agar bog'lanish cho'zilmaydigan ipdan iborat bo'lsa, ip jismni osilish nuqtasidan ip bo'ylab harakatlanishiga chek qo'yadi. Iplarda hosil bo'ladigan reaksiya kuchlariga taranglik kuchlari deyiladi. Ipning taranglik kuchi ip bo'ylab osilish nuqtasiga tomon yo'naladi (2.3-rasm).

3. Sharnirli bog'lanishlar. Umumiy o'q yoki nuqta atrofida aylanib oladigan ikkita jism orasidagi bog'lanishga sharnir deyiladi. Ya'ni, bir-biriga birlashtirilgan ikki valning (o'qning) o'zaro burchak hosil qilib aylanishi yoki harakat qilishiga imkon beradigan qo'zg'aluvchan mexanizm.

Quyida sharnirli bog'lanishlarning ba'zilari haqida qisqacha to'xtalib o'tamiz.

a. Silindrik sharnirli bog'lanish (zoldirli g'ildirak-podshipnik).

Bolt – 1 va kiygizilgan vtulka – 2 dan iborat qo'zg'almas silindrik sharnir jism bilan mahkam birlashtirilgan vtulkaning ichki diametri bilan barobar (2.4-rasm, a). Jism rasm tekisligiga perpendikulyar bo'lgan sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin. Ammo sharnir o'qi-ga perpendikulyar yo'nalish bo'yicha harakatlanmaydi. Shuning uchun silindrik



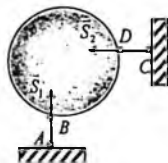
2.4-rasm

shamirda reaksiya kuchi, shamir o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotib, shamir o'qini kesib o'tadi.

Ko'pincha texnikada mustahkam va qo'zg'aluvchan shamirli tayanchlar uchraydi. 2.4-rasm, b) da A nuqtada mustahkam shamirli tayanch tasvirlangan. Bu tayanchda $\bar{R}_A$ reaksiya kuchi shamir o'qidan o'tadi va unga perpendikulyar tekislikda yotib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. B nuqtada shamirli qo'zg'aluvchan tayanch tasvirlangan. Bunda $\bar{R}_B$ reaksiya kuchi qo'zg'aluvchan tayanch tiralib turgan tekislikning normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

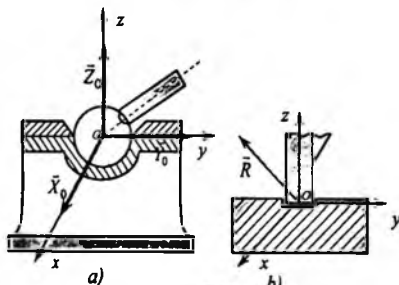
b. Vaznsiz sterjen vositasida sharnirli bog'lanish. O'z og'irligi hisobga olinmaydigan, uchlaridan boshqa nuqtalariga hech qanday kuch qo'yilmagan sterjenlarga *vaznsiz sterjenlar* deyiladi. Jism uchlari shamirli biriktirilgan vaznsiz sterjenlar vositasida bog'langan bo'lsin (2.5-rasm). Bog'lanish uchlari shamirlar bilan biriktirilgan AB va CD sterjenlar vositasida bajariladi.

Sterjen og'irliklarini e'tiborga olmay, u sterjenning A va B (C va D) shamirlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Binobarin, reaksiya kuchlari sterjenlarning uchlaridagi, sharnirlardan o'tuvchi o'qlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (2.5-rasm).



2.5-rasm

c. Sferik (zoldirli) sharnir va tagtovon (podpyatnik). Bu holda jism har qanday harakat qilishi mumkin, faqat sferik shamirning markazi qo'zg'almas bo'lib qoladi



2.6-rasm

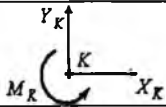
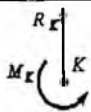
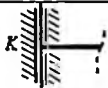
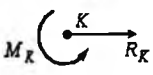
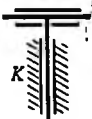
(2.6-rasm, a). Xuddi shunday bog'lanishni siqib tiralib turgan podshipnik (zoldirli g'ildirak) vositasida bajarilganligini ko'rish mumkin, odatda bu *tagtovon* deyiladi (2.6-rasm, b).

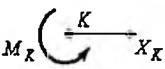
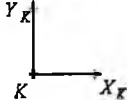
Podpyatnik ustunlarni asosini mustahkamlash uchun xizmat qiladi va jismning faqat ustun o'qi atrofida aylanishiga yo'l qo'yadi. Jism sferik shamir vositasida bog'langan bo'lsa, bu shamir o'z markazidan o'tadigan har qanday o'q atrofida jismni aylanishiga to'sqinlik qilmaydi. Fotoapparatlarning shtatividagi zoldirli tutqich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli (sferik) shamirga misol bo'la oladi. Zoldirli (sferik) shamir va tagtovonlarda bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi fazoda ixtiyoriy yo'nalishni olishi mumkin.

Inshootlarni asos bilan biriktiruvchi va ularning ko'chishini chekllovchi qurilmalar *tayanchlar* deb ataladi.

1-jadvalda statika masalalarini yechishda qo'llaniladigan bog'lanishlar sxemalari va ularda hosil bo'ladigan tayanch reaksiya kuchlarining yo'nalishi keltirilgan.

1-jadval

Tayanch turlarining nomlanishi	Bog'lanishlar sxemalari	Tayanch reaksiyalari
Qistirib mahkamlangan tayanch		
Gorizontal harakatlana oladigan qistirib mahkamlangan tayanch		
Vertikal harakatlana oladigan qistirib mahkamlangan tayanch		
Gorizontal va vertikal harakatlana oladigan qistirib mahkamlangan tayanch		

Gorizontal sirpanuvchi qistirib mahkamlangan tayanch		
Vertikal sirpanuvchi qistirib mahkamlangan tayanch		
Sharnirli tayanch		
Qo'zg'aluvchan sharnirli tayanch		
Qo'zg'almas sharnirli tayanch		

Mexanika masalalarini yechishda, turli inshootlarning muvozanatini aniqlashda ularning ayrim nuqtalariga qo'yilgan kuchlar bilan birga hajm, sirt yoki chiziq kesmalari bo'yicha ma'lum bir qonuniyat asosida taqsimlangan kuchlarni ham hisoblashga to'g'ri kelishi mumkin. Mashina yoki inshoot qismlarining ma'lum yuzasi yoki uzunligi bo'yicha qo'yilgan kuchlar uzluksiz ta'sir ko'rsatib tursa, bunday kuchlar *taqsimlangan kuchlar* deyiladi. Bunda jismlarga asosan parallel yoki bir nuqtada kesishuvchi taqsimlangan kuchlar ta'sir etadi. Uzunlik birligi yoki yuza birligiga ta'sir qiluvchi kuchlarning intensivligi, odatda q bilan belgilanadi va mos ravishda N/m yoki N/m^2 hisobida o'lchanadi. Masalan, jism zarralarining og'irlik kuchi hajm bo'yicha, ko'prik balkasining ustiga yotqizilgan betonning ta'siri yoki suvning to'g'on sirtiga bosim kuchlarining ta'siri sirt bo'yicha taqsimlangan parallel kuchlarni ifodalaydi. Masalani yechishda taqsimlangan kuchlar bir nuqtaga qo'yilgan kuch bilan almashtiriladi. Kuchning ta'sir chizig'i esa mazkur yuzaning og'irlik markazidan o'tadi.

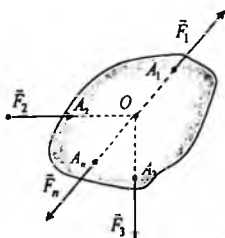
Bir-biriga tegib turadigan ikki jismning o'zaro ta'sir kuchi ularning urinib turgan nuqtasiga qo'yilgan deb hisoblanadi. Haqiqatan esa jismlarning tegishib turgan joyida deformatsiya hosil bo'lib, ularning o'zaro ta'siri urinib turgan nuqtaga qo'yilmay, balki biror yuzachaga qo'yiladi. Bu yuzachaning sathi juda kichik bo'lsa-da cheklidir. Aslida, ikkita jismning tegib turgan yuzachasi jism o'lchamlariga qaraganda juda kichkina bo'lsa, bu yuzachani bir nuqta deb, kuchni esa nuqtaga qo'yilgan *to'plangan kuch* deb hisoblaymiz. Bu to'plangan kuch jismlarning tegishib turgan yuzasidagi bosimlarning teng ta'sir etuvchisidir. Masalan, ikki uchi bilan tayanch ustida yotgan to'sinning biror joyiga qo'yilgan og'ir jismning to'sin sirtiga tegib turgan yuzasi juda kichik bo'lganida shu yuza bo'yicha ta'sir etuvchi kuchlar o'rniga ularning teng ta'sir etuvchisini olamiz. Nuqtaga qo'yilgan kuch to'plangan kuch deb ataladi. Bu tushuncha shartli bo'lib, u kuchning ta'sir yuzasi nisbatan kichik bo'lgan holda o'rinli bo'ladi.

Nazorat savollari

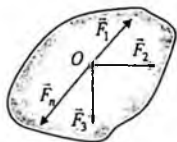
1. Bog'lanishlar deb nimaga aytiladi?
2. Bog'lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
3. Bog'lanishdan bo'shatish aksiomasini ta'riflang.
4. Bog'lanishning qanday turlarini bilasiz?
5. Jism silliq sirtga tayanganda reaksiya kuchi qanday yo'naladi?
6. Sharnirlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?
7. Ip, sterjenlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?
8. Bog'lanishdagi jism erkin jism holatiga qanday keltiriladi?
9. Qotish prinsipi deganda nimani tushunasiz?

3. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI. KUCHNING O'QDAGI VA TEKISLIKDAGI PROYEKSIYASI. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANATI

Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasiga *kesishuvchi kuchlar sistemasini* deyiladi (3.1-rasm, a). Kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chi-



a)



b)

3.1-rasm

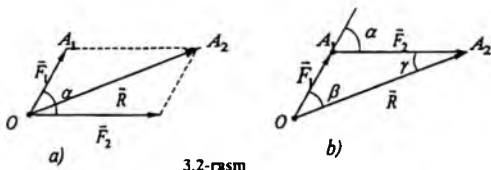
rish mumkinligidan, kesishuvchi kuchlar sistemasini bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasini bilan almash-tiriladi (3.1-rasm, b).

Kesishuvchi kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash. Bir nuqtaga qo'yilgan, $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar berilgan bo'lsin. Parallelogramm qoidasiga ko'ra, biror O nuqtaga qo'yilgan ikkita kuchning teng ta'sir etuvchisi ularga qurilgan parallelogrammning diagonaliga teng. Shu bilan birga, parallelogrammning yarmini tashkil etuvchi kuch uchburchagining OA_1 tomoniga teng (3.2-rasm, b).

Demak, $\vec{R}$ vektor $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ vektorlarning geometrik yig'indisiga teng:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$\vec{R}$ teng ta'sir etuvchi kuchni $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning yo'nalishlari bilan tashkil qilgan β va γ burchaklarni hamda uning miqdorini $\triangle OA_1A_2$ dan aniqlash mumkin.



3.2-rasm

Sinuslar teoremasidan:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}. \quad (3.1)$$

Kosinuslar teoremasidan:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (3.2)$$

3.1-masala. O'zaro $\alpha = 60^\circ$ burchak hosil qiluvchi $F_1 = 10 \text{ N}$ va $F_2 = 5 \text{ N}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisining qiymatini aniqlang.

Yechish. Kosinuslar teoremasiga asosan

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Demak,

$$R = \sqrt{100 + 25 + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} \text{ N} = \sqrt{125 + 100 \cdot \frac{1}{2}} \text{ N} \approx 13,2 \text{ N}.$$

Javob: $R \approx 13,2 \text{ N}$.

3.2-masala. $F_1 = 10 \text{ N}$ kuch Ox o'qiga nisbatan $\alpha = 30^\circ$ burchak ostida va $F_2 = 8 \text{ N}$ kuch Oy o'qi bo'ylab yo'nalgan (3.3-rasm). Ularning teng ta'sir etuvchisining Ox va Oy koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklarini aniqlang.

Yechish. F_1 va F_2 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, R ning qiymatini kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlaymiz:

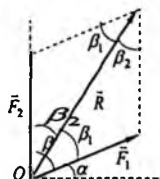
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos \beta}.$$

F_1 va F_2 kuchlar orasidagi burchak:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Demak,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos 60^\circ} \text{ N} = \sqrt{100 + 64 + 2 \cdot 80 \cdot \frac{1}{2}} \text{ N} = 15,6 \text{ N}.$$



3.3-rasm

Sinuslar teoremasidan foydalanib, R teng ta'sir etuvchining Oy koordinata o'qi bilan tashkil qilgan burchagi, β_2 ni aniqlaymiz:

$$\frac{F_1}{\sin \beta_1} = \frac{R}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta_2 = \frac{F_1}{R} \sin \beta,$$

$$\sin \beta_2 = \frac{10}{15,6} \cdot \sin 60^\circ = \frac{10}{15,6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,555 \Rightarrow \beta_2 = 34^\circ.$$

Endi esa β_1 burchakni va R teng ta'sir etuvchining Ox koordinata o'qi bilan tashkil qilgan burchagi, $\beta_1 + \alpha$ ni aniqlaymiz:

$$\beta_1 = \beta - \beta_2 = 60^\circ - 34^\circ = 26^\circ,$$

$$\beta_1 + \alpha = 26^\circ + 30^\circ = 56^\circ.$$

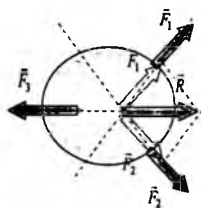
Javob: 56° va 34° .

Uch kuch muvozanatiga oid teorema

Teorema. Bir tekislikda joylashgan va o'zaro parallel bo'lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi.

Isbot. Muvozanatdagi jismning nuqtalariga bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$) kuchlar sistemasi qo'yilgan bo'lsin (3.4-rasm). Kuchlar parallel bo'lmagani uchun ulardan ixtiyoriy ikkita-sining ta'sir chizig'i biror nuqtada kesishadi.

Masalan, $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning ta'sir chiziqlarini kesishguncha davom ettiramiz. $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarni O nuqtaga ko'chiramiz va parallelogram qoidasiga asosan qo'shamiz:

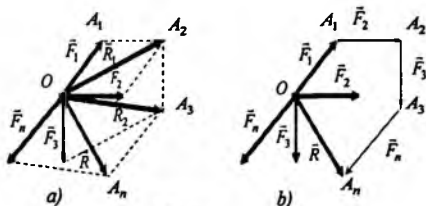


3.4-rasm

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$\vec{R}$ kuchning ta'sir chizig'i $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarining ta'sir chiziqlari kesishgan nuqtadan o'tadi. Shunday qilib, jismga $\vec{R}$ va $\vec{F}_3$ kuchlari ta'sir qiladi. Ikkita kuch qo'yilgan jism muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlarning miqdorlari teng bo'lib, bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lishi kerak. Demak, $\vec{F}_3$ kuchning ta'sir chizig'i ham O nuqtadan o'tadi yoki

uchta kuchning ta'sir chizig'i bir nuqtada kesishadi. Teorema isbotlandi.



3.5-rasm

Bir nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar berilgan bo'lsin. Bu kuchlarni qo'shish uchun parallelogramm yasash orqali parallelogramm qoidasidan ketma-ket foydalanish mumkin (3.5-rasm, a). Lekin, kesishuvchi kuchlarni qo'shish uchun har gal parallelogramm yasash o'miga $\vec{F}_1$ kuchning uchiga $\vec{F}_2$ kuchni parallel ravishda keltiramiz. So'ngra, $\vec{F}_2$ kuchning uchiga $\vec{F}_3$ kuchni o'ziga parallel ravishda keltiramiz va hokazo (3.5-rasm, b). Shu tariqa, birinchi kuchning boshi, O dan oxirgi kuchning oxiri, A_n ga $\overline{OA_n}$ vektorini o'tkazamiz. $A_1, A_2, \dots, A_n$ siniq chiziqqa kuch ko'pburchagi deyiladi. Kuch ko'pburchagidagi $\overline{OA_n}$ vektorga kuch ko'pburchagini yopuvchi tomon deyiladi.

Kuch ko'pburchagida shtrixlangan vektor yordamida bo'lingan uchburchaklarni qaraymiz (3.5-rasm, a). Kuch uchburchagini qurish usuliga, asosan, $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\vec{R}_1$ $\overline{OA_2}$ vektor vositasida tasvirlanadi, ya'ni $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. $\overline{OA_1}$ vektor, $\overline{OA_2}$ va $\vec{F}_3$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisi, $\vec{R}_2$ ni tasvirlaydi, shu bilan birga, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ va $\vec{F}_3$ kuchlarining ham teng ta'sir etuvchisidir. Ya'ni, $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ va hokazo.

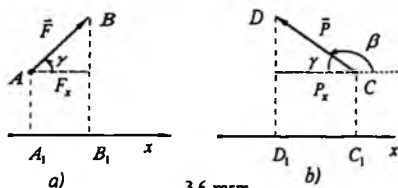
Hamma uchburchaklarni ko'rib, quyidagi xulosaga kelamiz. Kuch ko'pburchagini yopuvchi $\overline{OA_n}$ tomon n ta kuchning teng ta'sir etuvchisini tasvirlaydi. Ya'ni, agar berilgan kesishuvchi

kuchlar sistemasi n ta kuchdan iborat bo'lsa, ularning teng ta'sir etuvchisi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.3)$$

Shunday qilib, *kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi* tashkil etuvchi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lib, shu kuchlar ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi.

Kuchning tekislikdagi va o'qdagi proyeksiyasi. Kuchning boshi hamda oxirini biror o'qdagi proyeksiyalari orasiga joylashgan, tegishli ishora bilan olingan, kesma uzunligiga teng bo'lgan skalyar miqdorga *kuchning o'qdagi proyeksiyasi* deyiladi (3.6-rasm).



3.6-rasm

Kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat ishora bilan olinadi, agar proyeksiya boshlanish nuqtasidan oxiriga qarab ko'chishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa (3.6-rasm, a), manfiy ishora bilan olinadi, agar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa (3.6-rasm, b).

$$F_x = A_1B_1 = F \cos \alpha,$$

$$P_x = -D_1C_1 = -P \cos \gamma = P \cos \beta.$$

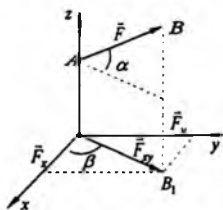
Shunday qilib, kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi skalyar miqdor bo'lib, kuch miqdori bilan kuchni o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusi ko'paytmasiga teng.

Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi vektor kattaligidir.

Berilgan $\bar{F}$ kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi deb, $\bar{F}$ kuchning boshi va uchining shu tekislikdagi proyeksiyalarini tutashtiruvchi yo'nalishli kesmaga aytiladi. 3.7-rasmda $\bar{F}$

kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasining miqdori quyidagiga teng:

$$F_{xy} = F \cos \alpha.$$



3.7-rasm

$\vec{F}$ kuchning biror Oxy tekislikdagi proyeksiyasini aniqlash uchun, dastlab kuchning koordinata tekisliklariga proyeksiyalari aniqlanadi, so'ngra bu proyeksiya koordinata tekisligida yotuvchi o'qlarga proyeksiyalanadi (ikki marta proyeksiyalash usuli). 3.7-rasmda ko'rsatilgan hol uchun quyidagilar o'rinli:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta, \\ F_y &= F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash. Kuchni uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari va qo'yilgan nuqtasining koordinatalari orqali topish usuliga analitik usulda aniqlash deyiladi. Bizga ma'lumki, vektorlar yig'indisining biror o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi. Shunga, asosan, (3.3) formuladan foydalanib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (3.5)$$

Teng ta'sir etuvchining R_x, R_y, R_z proyeksiyalari (3.5) formula yordamida aniqlanadi va teng ta'sir etuvchining miqdori hamda yo'nalishlari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \\ \cos(\vec{R}, Ox) &= \frac{R_x}{R}; \quad \cos(\vec{R}, Oy) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(\vec{R}, Oz) = \frac{R_z}{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik va analitik muvozanat shartlari

1. Muvozanatning geometrik sharti. Ma'lumki, kesishuvchi kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lganda, faqat shu holdagina teng ta'sir etuvchi nolga teng bo'ladi: $\vec{R} = 0$.

Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi (kuch ko'pburchagining yopiq bo'lishi) zarur va yetarlidir.

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0. \quad (3.7)$$

2. Muvozanatning analitik sharti. Agar $\vec{R} = 0$ bo'lsa, u holda $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$ va (3.5) ga asosan quyidagilarni olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (3.8)$$

Kuchning jismga ta'siri kuchning moduli, kuchning yo'nalishi va kuchning qo'yilish nuqtasi orqali belgilanishini yuqorida ko'rib o'tgan edik. Ushbu uch faktordan tashqari kuchning jismga ta'siri jismga ta'sir etayotgan kuchlar soniga ham bog'liq. Kuchlar soni qancha ko'p bo'lsa, o'sha jismning harakat yo'nalishini belgilash va muvozanatga keltirish shartlarini ishlab chiqish shuncha murakkab bo'ladi.

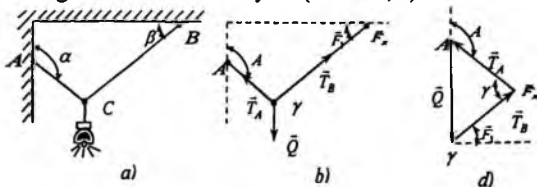
Statikada jismning muvozanatiga oid masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. *Muvozanati tekshirilayotgan jism aniqlanadi.*
2. *Koordinatalar sistemasi tanlab olinadi.*
3. *Tekshirilayotgan jismga ta'sir etayotgan berilgan kuchlar ko'rsatiladi hamda bog'lanishlar reaksiya kuchlari bilan almashtiriladi.*
4. *Ta'sir etayotgan kuchlar qanday kuchlar sistemasini tashkil etishini e'tiborga olgan holda, ularga mos muvozanat tenglamalari tuziladi.*
5. *Tenglamalarni yechib noma'lum kuchlar aniqlanadi. Bunda aniqlangan reaksiya kuchi ishorasining musbat bo'lishi tanlab olingan yo'nalishning to'g'ri ekanligini, manfiy bo'lishi reaksiyaning tanlab olingan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalganligini ko'rsatadi.*

3.3-masala. Og'irligi $20N$ bo'lgan elektr lampa BC shnur yordamida shipga osilgan va AC arqon bilan devorga tortib qo'yilgan. Burchak, $\alpha = 135^\circ$ va burchak, $\beta = 60^\circ$ deb olib, BC

shnurning $\bar{T}_B$ va AC arqonning $\bar{T}_A$ taranglik kuchlari aniqlansin. Shnur va arqonning og'irligi hisobga olinmasin (3.8-rasm, a).

Yechish: Elektr lampani moddiy nuqta deb qarab, uning muvozanatini tekshiramiz. C nuqtaga $Q=20N$ bo'lgan vertikal pastga yo'nalgan og'irlik kuchi qo'yilgan. Elektr lampaning $\bar{Q}$ og'irlik kuchini hamda arqon va shnurda hosil bo'ladigan, $\bar{T}_A$ va $\bar{T}_C$ taranglik kuchlarini tasvirlaymiz (3.8-rasm, b).



3.8-rasm

($\bar{Q}, \bar{T}_A, \bar{T}_C$) kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'siridagi C nuqta muvozanatda bo'lishi uchun ularning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak:

$$\bar{Q} + \bar{T}_A + \bar{T}_C = 0.$$

$\bar{Q}, \bar{T}_A, \bar{T}_C$ kuchlarga qurilgan kuch uchburchagi yopiq bo'lishi kerak. Kuchlar uchburchagini quramiz va kuchlarni parallel ko'chirish natijasida hosil qilingan uchburchak yopiq uchburchakni ifodalaydi (3.8-rasm, d).

$\alpha = 135^\circ$ va $\beta = 60^\circ$ ekanligini e'tiborga olsak, tasvirlangan rasmdagi yopiq uchburchakning ichki burchaklarining qiymati:

$$\angle CAB = 45^\circ, \quad \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\angle ABC = \gamma = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ.$$

Sinuslar teoremasidan foydalanamiz:

$$\frac{Q}{\sin \gamma} = \frac{T_B}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{T_A}{\sin(90^\circ - \beta)},$$

$$\frac{Q}{\sin 105^\circ} = \frac{T_B}{\sin 45^\circ} = \frac{T_A}{\sin 30^\circ}.$$

Demak,

$$T_A = \frac{Q \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \Rightarrow T_A = 10,4 N,$$

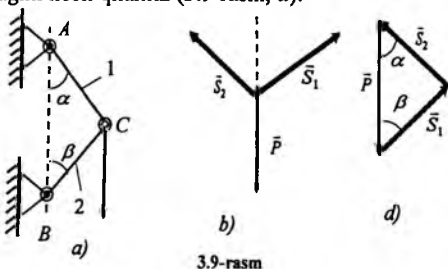
$$T_B = \frac{Q \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \Rightarrow T_B = 14,6 N.$$

Javob: BC shnurning taranglik kuchi $T_B = 14,6 N$, AC arqonning taranglik kuchi $T_A = 10,4 N$ ga teng.

3.4-masala. Og'irliklari e'tiborga olinmaydigan AC va BC sterjenlar bir-biri va vertikal devor bilan sharnirlar vositasida biriktirilgan. Sharnirli C boltga $P=1000 N$ vertikal kuch ta'sir qiladi. Agar sterjenlar bilan devor orasidagi burchaklar, $\alpha = 30^\circ$ va $\beta = 60^\circ$ bo'lsa, sharnirli C boltga sterjenlarning ko'rsatadigan reaksiyalari aniqlansin (3.9-rasm).

Yechish: Sharnirli C boltga sterjenlarning ko'rsatadigan reaksiyalari yo'nalishini aniqlash uchun AC va BC sterjenlarni fikran kesib, S_1 va S_2 reaksiya kuchlarini yo'naltiramiz.

C nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarni parallel ko'chirib, kuchlar uchburchagini hosil qilamiz (3.9-rasm, d).



3.9-rasm

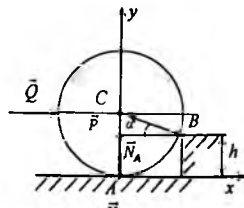
Kuchlar uchburchagidan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$S_1 = P \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow S_1 = 866 N,$$

$$S_2 = P \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow S_2 = 500 N.$$

Javob: Sharnirli C boltga sterjenlarning ko'rsatadigan reaksiyalari, $S_1 = 866 N$ va $S_2 = 500 N$.

3.5-masala. Og'irligi, $\bar{P}$ ga teng bo'lgan silindr gorizontal tekislikda joylashgan bo'lib, uning bir tomonidan siquvchi, $\bar{Q}$ kuch ta'sir etmoqda. Ikkinchi tomondan esa u B nuqtadagi



3.10-rasm

o'tkir qirraga qadalib qolgan holda muvozanat holatda turibdi (3.10-rasm). Agar $BD = h = R/2$ (R -silindrning radiusi) bo'lsa, A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari aniqlansin.

Yechish: Dastlab, berilgan $\bar{P}$, $\bar{Q}$ kuchlar hamda $\bar{N}_A$ va $\bar{N}_B$ reaksiya kuchlari ta'siridagi silindrning muvozanat shartini ko'rib chiqamiz. Shakldan ko'rinib turibdiki, barcha kuchlar bitta tekislikda joylashgan bo'lib, ular silindrning markazi C nuqtada kesishadi. Silindrga ta'sir etayotgan kuchlar soni 4 ta bo'lganligi uchun masalani analitik usulda yechish lozim bo'ladi. Shu sababli, (3.2) formulaga asosan 2 ta tenglamadan iborat tenglamalar sistemasini tuzamiz. Buning uchun koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilgandek tanlab olamiz. U holda

$$Q - N_B \cos \alpha = 0,$$

$$N_A - P + N_B \sin \alpha = 0.$$

Agar $h = 0,5R$ bo'lsa, u holda quyidagicha bo'ladi:

$$\sin \alpha = \frac{R-h}{R} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{Birinci tenglamadan: } N_B = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} Q.$$

N_B ning aniqlangan qiymatini ikkinchi tenglamaga qo'ysak, quyidagi hosil bo'ladi:

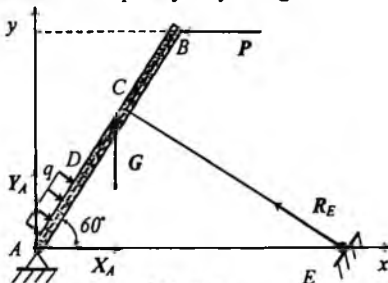
$$N_A = P - Q \operatorname{tg} \alpha = P - \frac{\sqrt{3}Q}{3}.$$

Agar $Q = \sqrt{3}P$ bo'lsa, $N_A = 0$ bo'ladi. Agar $Q > \sqrt{3}P$ bo'lsa, silindr yerdan ko'tarilib, B nuqta atrofida aylanma harakat qila boshlaydi.

3.6-masala. 3.11-rasmda tasvirlangan qurilmaga AB to'sin o'qiga perpendikulyar tekis taqsimlangan kuch va gorizonttal P kuch ta'sir etadi. Bir jinsli AB to'sinning og'irligi $G = 20N$, va shu bilan birga $P = 10N$, $q = 30N/m$. $AD = DC = CB = 1m$. Qurilmaning A tayanch reaksiyasi va CE sterjendagi zo'riqishlarini aniqlang. CE sterjenning og'irligi e'tiborga olinmasin.

Yechish: Muvozanatdagi AB to'sinni tekshiramiz. Tekis taqsimlangan yukning ta'sirini to'plangan Q kuch bilan

almashtiramiz. Bu kuch AD bo'lakning o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, miqdori $Q = q \cdot AD$ ga teng. AB jismni bog'lanishlardan ozod qilib, bog'lanish reaksiyalari bilan almashtiramiz. A shamirdagi noma'lum reaksiyani koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz. E shamirdagi R_E reaksiya kuchi shamir o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.



3.11-rasm

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A + Q \cdot \cos 30^\circ - R_E \cdot \cos 30^\circ - P = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - Q \cdot \cos 60^\circ + R_E \cdot \cos 60^\circ - G = 0,$$

$$\sum M_A = 0, \quad -Q \cdot \frac{AD}{2} - G \cdot \frac{AB}{4} + R_E \cdot AC + P \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Muvozanat tenglamalaridan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$X_A + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - R_E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 = 0,$$

$$Y_A - 30 \cdot \frac{1}{2} + R_E \cdot \frac{1}{2} - 20 = 0,$$

$$-30 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{3}{4} + R_E \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Bu tenglamalar sistemasidan X_A , Y_A va R_E reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$R_E = 2,01 \text{ N},$$

$$X_A = -14,25 \text{ N},$$

$$Y_A = 34 \text{ N}.$$

X_A va Y_A lar orqali, R_A to'liq reaksiya kuchi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

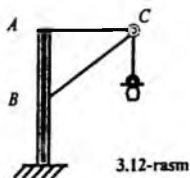
$$R_A = \sqrt{(X_A)^2 + (Y_A)^2},$$

$$R_A = \sqrt{(-14,25)^2 + (34)^2} \text{ N} = 36,87 \text{ N}.$$

Javob: $R_E = 2,01 \text{ N}$, $R_A = 36,87 \text{ N}$.

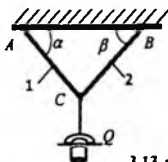
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Og'irligi 300 N bo'lgan ko'cha fonari AC gorizontal sterjen va BC tirgak yordamida vertikal ustunga osilgan (3.12-rasm). $AC = 1,2 \text{ m}$, $BC = 1,5 \text{ m}$. AC va BC sterjenlar A , B va C nuqtalarda shamirlar vositasida birlashtirilgan. Sterjenlar og'irliklarini hisobga olmay, ulardagi S_1 va S_2 zo'riqlashlar aniqlansin.



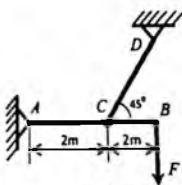
3.12-rasm

2-masala. Rasmda bir-biri ship va devorlar bilan shamirlar vositasida birlashtirilgan sterjenlar sxema tarzida tasvirlangan (3.13-rasm). B , F va K shamirli boltlarga $Q = 1000 \text{ N}$ yuk osilgan, $\alpha = \beta = 45^\circ$. Sterjenlar og'irliklarini hisobga olmay, ulardagi zo'riqlashlar aniqlansin.



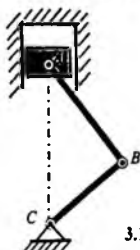
3.13-rasm

3-masala. AB balkani CD sterjen gorizontal holatda tutib turadi. A , C va D bog'lanishlar shamirlidir (3.14-rasm). Agar balkaning uchiga $F = 5 \text{ kN}$ vertikal kuch ta'sir qilayotgan bo'lsa, A va D tayanchlar reaksiyalari aniqlansin. O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. Balka va sterjenning og'irligi hisobga olinmasin.



3.14-rasm

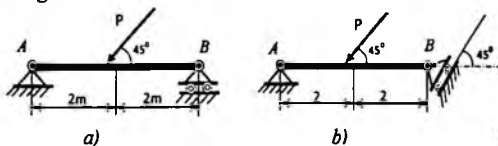
4-masala. Ichki yonuv dvigatelining porsheni yuzasi $0,02 \text{ m}^2$ bo'lib, shatuni $AB = 30 \text{ sm}$ va krivoshipi $BC = 6 \text{ sm}$ uzunlikka ega (3.15-rasm). Berilgan paytda porshen ustidagi gaz bosimi $P_1 = 1000 \text{ kPa}$ va porshen ostida esa $P_2 = 200 \text{ kPa}$. Agar $\angle ABC = 90^\circ$ bo'lsa, gaz bosimi farqi tufayli vujudga kelgan, AB shatun tomonidan BC



3.15-rasm

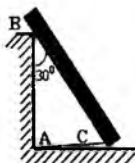
krivoshipga ta'sir qiladigan T kuch aniqlansin. Porshen bilan silindr orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin.

5-masala. AB balka A tayanchga sharnir bilan birgalikda biriktirilgan, uning B uchi katokka qo'yilgan (3.16-rasm). Balkaning o'rtasiga uning o'qiga 45° burchak ostida $P=2\text{ kN}$ kuch qo'yilgan. Balkaning og'irligini hisobga olmay, a va b hollar uchun tayanch reaksiyalari aniqlansin. O'lchovlar 3.16-rasmda keltirilgan.



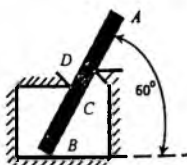
3.16-rasm

6-masala. Og'irligi 600 N , uzunligi 4 m bo'lgan bir jinsli balka bir uchi bilan silliq polga va oraliqdagi B nuqtada balandligi 3 m bo'lgan ustunning uchiga tiralgan, balka vertikal bilan 30° burchak tashkil etadi (3.17-rasm). Balkani pol bo'ylab tortilgan AC arqon shu holatda ushlab turadi. Ishqalanishni hisobga olmasdan, arqonning tortilish kuchi, T , ustunning reaksiyasi, R_B va pol reaksiyasi, R_C aniqlansin.



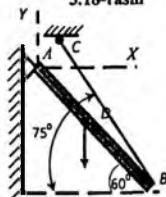
3.17-rasm

7-masala. Og'irligi 200 N bo'lgan bir jinsli AB balka gorizontal silliq polga B nuqtada 60° burchak ostida tiralib turadi. Bundan tashqari uni ikkita C va D tayanchlar ushlab turadi (3.18-rasm). B , C va D tayanchlardagi reaksiyalar aniqlansin. Bunda $AB=3\text{ m}$, $CD=0,5\text{ m}$ va $BD=1\text{ m}$.

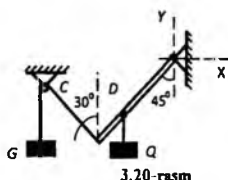


3.18-rasm

8-masala. A o'q atrofida aylana oladigan va gorizontal tekislik bilan 60° burchak tashkil etuvchi bir jinsli narvonning og'irligi $2,4\text{ kN}$, uzunligi 6 m . Narvonning B uchidan 2 m masofadagi D nuqtada og'irligi $0,8\text{ kN}$ bo'lgan odam turadi (3.19-rasm). Gorizontal bilan 75° burchak tashkil qiluvchi BC arqon narvonning B uchini tutib turadi. Arqondagi T tortilish kuchi va A o'qning reaksiyasi topilsin.



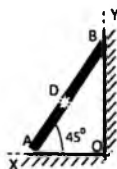
3.19-rasm



3.20-rasm

9-masala. Og'irligi $P=100N$ bo'lgan A shamir bilan devorga mahkamlangan bir jinsli AB balkani blokdan o'tkazilgan va bir uchiga G yuk osilgan tros vertikalga nisbatan 45° burchak ostida ushlab turadi (3.20-rasm). Trosning BC qismi vertikal

bilan 30° burchak hosil qiladi. D nuqtada balkaga og'irligi $200N$ bo'lgan Q yuk osilgan. Agar $BD = \frac{1}{4}AB$ bo'lsa, G yuk og'irligi va A shamirning reaksiyasi aniqlansin. Blokdagi ishqalanish hisobga olinmasin.



3.21-rasm

10-masala. Silliqlik devorga gorizontal bilan 45° burchak tashkil qiluvchi bir jinsli AB narvon qo'yilgan (3.21-rasm). Narvonning og'irligi $200N$, uning pastki uchidan hisoblaganda narvon uzunligining $\frac{1}{3}$ qismiga teng bo'lgan masofadagi D nuqtada og'irligi $600N$ bo'lgan odam turadi. Narvondan A tayanchga va devorga tushadigan bosim kuchlari aniqlansin.

Nazorat savollari

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Hayotda uchraydigan kesishuvchi kuchlar sistemasiga misollar keltiring.
3. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
5. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi asosiy farq nimadan iborat?
6. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartlari qanday?
7. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat shartlari qanday?
8. Uch kuch muvozanatiga oid teoremani aytib bering.

4. NUQTAGA VA O'QQA NISBATAN KUCH MOMENTI. JUFT KUCH. JUFT MOMENTI

Agar jismga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir tekislikda yotsa, bu kuchlar to'plamiga *tekislikdagi kuchlar sistemasi* deyiladi.

Bunday kuchlar sistemasini o'rganish uchun tekislikdagi parallel kuchlar, juft kuch, tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan kuch momenti, juft kuch momenti kabi tushunchalardan foydalanamiz.

Ta'sir chiziqlari o'zaro parallel bo'lgan kuchlar sistemasiga *parallel kuchlar sistemasi* deyiladi.

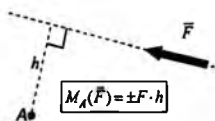
Miqdorlari teng, qarama-qarshi yo'nalgan, bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan ikki parallel kuchga *juft kuch* yoki qisqacha *juft* deyiladi. Juft kuchni bitta kuch bilan almashtirib bo'lmaydi va juft kuch ortiq soddalashmaydi. Bunday kuchlarni qo'shib bo'lmaydi, ya'ni juft kuch uchun teng ta'sir etuvchi kuch tushunchasi ma'noga ega emas.

Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta yoki o'q atrofida aylanma harakati o'rganilayotganda kuch momenti tushunchasi kiritiladi. Moment olinayotgan nuqta *moment markazi* deyiladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan *kuch momenti* deb, mos ishora bilan olingan kuch modulini kuch yelkasi (kuchning ta'sir chizig'idan moment markazigacha bo'lgan eng qisqa masofa)ga ko'paytmasiga teng kattalikka aytiladi (4.1-rasm). Agar kuch jismni moment markazi atrofida soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, moment ishorasi musbat (+), aks holda manfiy (-) olinadi. Moment markazidan kuchning ta'sir chizig'iga tushirilgan perpendikulyarga teng kesma *kuchning yelkasi* deyiladi.

Jismning biror nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin va bu kuch jismni qandaydir A nuqta atrofida aylantirsin. U holda $\vec{F}$ kuchning A nuqtaga nisbatan momenti quyidagicha bo'ladi:

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot h.$$



Kuch momenti Nyuton metr ($1 \text{ N} \cdot \text{m}$) da o'lchanadi.

Kuch momenti quyidagi xossalarga ega:

1) Jismga qo'yilgan kuchni o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning istalgan nuqtasiga ko'chirilsa, kuch momenti o'zgarmaydi.

2) Agar jismga kuch ta'sir etmasa yoki kuchning ta'sir chizig'i moment markazidan o'tsa, uning shu nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

3) Kuch momenti miqdor jihatdan kuchning boshi va uchini moment markazi bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan uchburchak yuzasining ikkilanganiga teng.

Juftning momenti deb, juftlarni tashkil etuvchi kuchlardan ixtiyoriy birining modulini, juftning yelkasiga ko'paytmasiga aytiladi. *Juftning yelkasi* deb, shu kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofaga aytiladi (4.2-rasm):

$$M = \pm F_1 \cdot h = \pm F_2 \cdot h,$$

bu yerda h – juftning yelkasi.

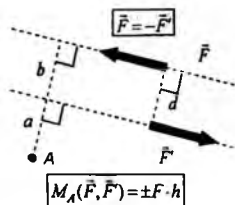
Juft kuch momenti vektor kattalik va juft joylashgan tekislikka perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaraganimizda, juft kuch jismni soat miliga yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, musbat, aks holda manfiy ishora bilan olinadi.

Juft momentini asosiy xususiyati shundaki, uni ixtiyoriy olingan nuqtalarga nisbatan momentlari bir biriga teng bo'ladi, shuning uchun juftning momentini qaysi nuqtaga nisbatan olinayotganligi belgilanmaydi.

Juft kuch momenti haqidagi teorema. Juft tashkil etuvchi kuchlarning juft tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi juft momentiga teng.

$$M_A(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot (a+b) - F' \cdot a = F \cdot b = F' \cdot d.$$

Ekvivalent juftlar haqidagi teorema. Bir tekislikda yotuvchi, momentlari teng va aylanish yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.



4.2-rasm

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = F_1 \cdot d_1, \quad M(\vec{F}_2, \vec{F}_2') = F_2 \cdot d_2,$$

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_1') = (\vec{F}_2, \vec{F}_2').$$

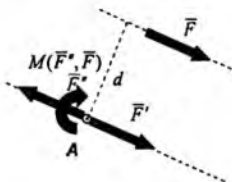
Bir tekislikdagi juft kuchlarni qo'shish haqida teorema. Bir tekislikda yotuvchi juftlar sistemasi bitta juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng. Ya'ni

$$M = \sum_i M_i = 0.$$

Juft kuch sistemasining muvozanat sharti. Tekislikdagi juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun berilgan juft kuchlar momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Kuchlarni berilgan markazga keltirish (Puanso lemmasi). Kuchni o'z-o'ziga parallel holda tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirish mumkin, agarda ko'chirilgan kuchga momenti shu kuchning qaralayotgan nuqtaga nisbatan momentiga teng bo'lgan juft kuch qo'ysak, bu kuch ta'sirida jismning kinematik holati o'zgarmaydi.

Sistemaning A nuqtasiga miqdorlari berilgan kuch miqdoriga teng, berilgan kuchga parallel bo'lgan o'zaro qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchni qo'yamiz (4.3-rasm).



4.3-rasm

$$\vec{F}'' = -\vec{F}' = -\vec{F}.$$

Bunda jismning kinematik holati o'zgarmaydi (2-aksiomaga asosan).

Berilgan kuch bilan qarama-qarshi yo'nalgan qo'shilgan kuch juft kuchni hosil qiladi.

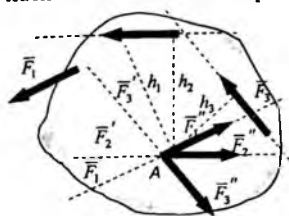
Bu juft momenti berilgan kuchdan keltirish markaziga nisbatan olingan momentga teng bo'ladi.

$$M(\vec{F}'', \vec{F}') = -F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\vec{F}).$$

Ko'p hollarda juft kuchni yoy strelkasi bilan ifodalash qulayroq bo'ladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish

Tekislikda ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz va Puanso usulidan foydalanib, har bir kuchni shu nuqtaga keltiramiz. Berilgan kuchlar sistemi o'rniga kesishuvchi kuchlar sistemi va juft kuchlar sistemasini hosil qilamiz (4.4-rasm).



4.4-rasm

Bu kesishuvchi kuchlar sistemasini bitta kuch bilan almashtirish mumkin. Biz bu kuchni teng ta'sir etuvchi deb atagan edik. Hozirgi holatda uni bunday atay olmaymiz. Chunki, bu nuqtada bu kuchlardan tashqari juft kuchlar ham mavjud. Juft kuchlarni bir-biriga algebraik qo'shib bitta juftga keltiramiz

(juftlarni qo'shish haqidagi teoremlarga asosan). Hosil bo'lgan juft berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

Umumiy holda, tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemi bosh vektor deb ataladigan bitta kuch va kuchlardan olingan bosh moment deb ataladigan juft momentga keltiriladi:

$$\text{bosh vektor: } \vec{R} = \sum \vec{F}_i,$$

$$\text{bosh moment: } M = M_A = \sum M_{A_i}.$$

Binobarin, kuchlar sistemasining bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi.

Tekislikdagi kuchlar sistemasining biror markazga nisbatan bosh momenti tashkil etuvchi kuchlarning shu markazga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

$$M_A = \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i)$$

Bosh vektorning moduli va yo'nalishi quyidagicha aniqlanadi:

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2}.$$

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

Agar bosh vektor, $\vec{R}=0$, ya'ni berilgan kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq hamda bosh moment, $M_A \neq 0$ bo'lsa, tekislikdagi kuchlar sistemasi momenti M_A ga teng bitta juft kuchga keltiriladi. Bu holda keltirish markazini o'zgartirgan bilan bosh moment o'zgaraydi.

Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat sharti kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentining bir vaqtda nolga tengligidan iborat:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0, \quad M = M_A = \sum M_{A_i} = 0.$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ikkita koordinata o'qlariga proyeksiyalarining yig'indilari alohida-alohida nolga teng va shu tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasi quyidagicha:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0. \quad (\text{I tur tenglamalar})$$

Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalarni yechishda yuqoridagi tenglamalar sistemasi tuzilib, noma'lum reaksiyalar aniqlanadi. Bu tenglamalar statikaning muvozanat tenglamari deb ataladi.

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy ikki nuqtaning har biriga nisbatan momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng va shu tekislikdagi nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

$$\sum_{k=1}^n F_{k\alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \alpha \neq 90^\circ. \quad (\text{II tur tenglamalar})$$

Tekislikdagi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun barcha kuchlarning shu tekislikdagi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan ixtiyoriy uchta nuqtaning har biriga nisbatan

momentlarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0. \quad (\text{III tur tenglamalar})$$

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasi Tekislikdagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikdagi ixtiyoriy markazga nisbatan momenti, uni tashkil etuvchi kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng.

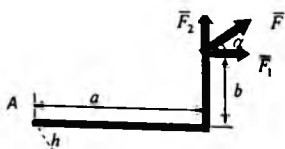
$$M_A(\vec{R}) = \sum M_A(\vec{F}_i).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan teng ta'sir etuvchiga keltirilsin. Bunday sistema muvozanatda bo'lmaydi ($\vec{R} \neq 0$). Bu sistemani $\vec{R}$ kuch bilan muvozanatlaymiz. U $\vec{R}$ teng ta'sir etuvchiga teng bo'lib, uning ta'sir chizig'i bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi (4-aksiomaga ko'ra).

Shunday qilib, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ kuchlar sistemasi muvozanatlovchi $\vec{R}$ kuch bilan birgalikda muvozanatda bo'ladi va muvozanat tenglamasini qanoatlantiradi.

$\vec{R}'$ kuch, $\vec{R}$ teng ta'sir etuvchiga teng va uning ta'sir chizig'i bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalganligi uchun $M_A(\vec{R}') = -M_A(\vec{R})$. Bu tenglikni muvozanat tenglamasiga qo'ysak,

$$\sum M_A(\vec{F}_i) - M_A(\vec{R}) = 0 \quad \text{yoki} \quad M_A(\vec{R}) = \sum M_A(\vec{F}_i).$$



4.5-rasm

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani qo'llash uchun kuch yelkasini hisoblash qiyinroq bo'lgan holda, nuqtaga nisbatan kuch momentini hisoblash masalasi ko'riladi. Bunda $\vec{F}$ kuchni $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ tashkil etuvchilarga ajratamiz (4.5-

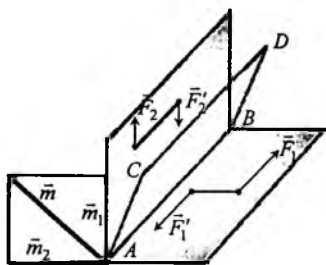
rasm). U holda $\vec{F}$ kuchning A nuqtaga nisbatan momenti har bir kuchdan shu nuqtaga nisbatan olingan momentlar yig'indisiga teng bo'ladi:

$$M_A(\vec{F}) = -F_1 \cdot b + F_2 \cdot b = -(F \cos \alpha) \cdot b + (F \sin \alpha) \cdot a.$$

Nazariy mexanika fanining statika bo'limida asosan quyidagi masalalar hal qilinadi:

Jismda ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi unga ekvivalent bo'lgan soddaroq kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi. Kuchlar sistemasi ta'siridagi mutlaq qattiq jismning muvozanat shartlarining zarur va yetarliligi tekshiriladi. Muvozanat tenglamalaridan noma'lum reaksiya kuchlari (momentlari) aniqlanadi.

4.1-masala. Qattiq jismga o'zaro perpendikulyar bo'lgan tekisliklarda joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_1'$ va $\vec{F}_2, \vec{F}_2'$ kuchlardan tashkil topgan ikkita juft kuchlar ta'sir etmoqda. Har bir juft momentining moduli $30 \text{ N} \cdot \text{m}$ ga teng. Shu juftlarning yig'indisini aniqlang.



4.6-rasm

Yechish. Juftlar joylashgan tekisliklarning kesishgan chizig'ida joylashgan ixtiyoriy A nuqtaga $\vec{m}_1$ va $\vec{m}_2$ vektorlarni tegishli yo'nalishlarda qo'yamiz (4.6-rasm). So'ngra ularni geometrik usulda qo'shib, yig'indi vektorni aniqlaymiz. Ya'ni:

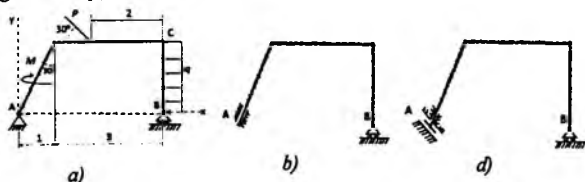
$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

Demak, shu ikki juftga ekvivalent bo'lgan bitta juft, shu $\vec{m}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan $ABCD$ tekislikda joylashib, momentining moduli $m = 30\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$ ga teng bo'ladi.

4.2-masala. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi qattiq jismning tayanch reaksiya kuchlarini aniqlash masalasi.

Sxemalarda o'qi siniq chiziqlardan iborat bo'lgan brusni mahkamlashning uchta usuli ko'rsatilgan (4.7-rasm). Berilgan yuklama va o'lchamlar har uchala holda ham bir xil. Tayanchlarning reaksiyalari brusni mahkamlashning shunday

usuli uchun aniqlansinki, bunda tekshirilayotgan reaksiya kuchi eng kichik qiymatga ega bo'lsin.



4.7-rasm

Sxemalardagi o'qi siniq chiziqlardan iborat bo'lgan bruslarga bitta to'plangan $P=4\text{ kN}$ kuch, bitta taqsimlangan $q=1\text{ kN/m}$ kuch va $M=10\text{ kN}\cdot\text{m}$ moment ta'siridagi konstruksiyaning R_B noma'lum reaksiyasini eng kichik son qiymatga ega bo'ladigan miqdordagi tayanch reaksiyalarini mahkamlashning usulini aniqlang.

Yechish: Barcha sxemalar uchun R_B reaksiya kuchini topamiz va eng kichik reaksiya kuchini aniqlaymiz. Yuzaga tekis taqsimlangan kuchni bitta teng ta'sir etuvchi bilan almashtiramiz:

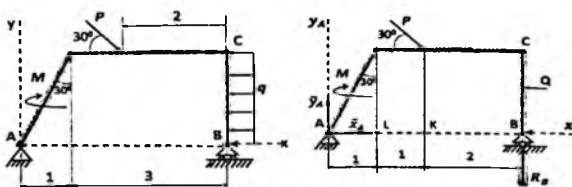
$$Q = q \cdot BC = 1\text{ kN/m} \cdot 2\text{ m} = 2\text{ kN}.$$

a) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.8-rasm). Shaki uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

Yo'naltirilgan 3 ta tayanch reaksiyalaridan R_B noma'lum reaksiyani aniqlashimiz uchun faqat bitta muvozanat tenglamasini tuzish yetarli bo'ladi. Buning uchun barcha kuchlarni A nuqtaga nisbatan momentlari yig'indisini topamiz. Chunki, A nuqtaga nisbatan kuch momentlari yig'indisi aniqlansa, tenglamada faqat bitta R_B noma'lum reaksiya kuchi qatnashadi va bu tenglama biz uchun yetarli bo'ladi.

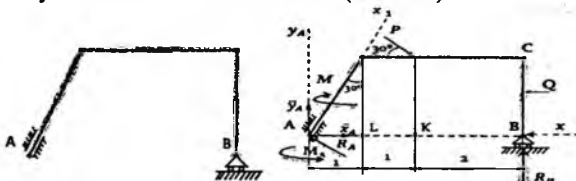
$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0: \quad R_B \cdot AB - M - P(\cos 30^\circ \cdot BC + \sin 30^\circ \cdot AK) + Q \cdot \frac{BC}{2} = 0,$$

$$BC = AB \cdot \tan 30^\circ, \quad R_B = \frac{M + P(\cos 30^\circ \cdot BC + \sin 30^\circ \cdot AK)}{AB} - \frac{Q}{2} = 4,625\text{ kN}.$$



4.8-rasm

b) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.9-rasm).

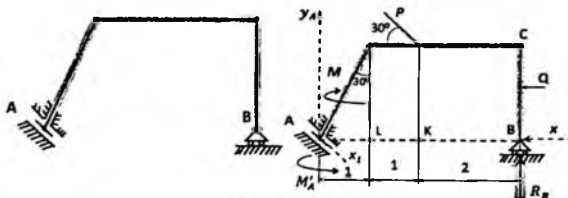


4.9-rasm

Shakl uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. 3 ta tayanch reaksiyalaridan R_B noma'lum reaksiyani aniqlashimiz kerakligi uchun faqat bitta muvozanat tenglamasini tuzish yetarli. Buning uchun barcha kuchlarni x_1 o'qiga nisbatan proyeksiyalarini yig'indisi topilsa, tenglamada faqat bitta R_B noma'lum reaksiya qatnashadi.

$$\sum X_M = 0: R_B \cos 30^\circ - q \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = 0, \quad R_B = \frac{q \cdot BC \cdot \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 1 \text{ kN}.$$

d) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.10-rasm).



4.10-rasm

Shakl uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Tayanch reaksiyalarining ichidan R_B noma'lum reaksiyani aniqlashimiz kerak bo'ladi. Buning uchun biz barcha kuchlarni x_1 o'qiga nisbatan proyeksiyalarining yig'indisini aniqlasak, tenglamada faqat bitta R_B noma'lum reaksiya qatnashadi.

$$\sum X_u = 0: P - R_B \cos 30^\circ - q \cdot BC \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow R_B = \frac{P - q \cdot BC \cdot \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 5 \text{ kN}.$$

Topilgan barcha R_B tayanch reaksiyalarni taqqoslab, ularning orasidan moduli bo'yicha eng kichik bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlaymiz. Taqqoslangan R_B tayanch reaksiya kuchlari ichida moduli eng kichigi b sxemada bo'lganligi uchun, shu sxemadagi qolgan 2 ta R_A va M_A tayanch reaksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun b sxemadagi barcha kuchlarni x_1 o'qiga nisbatan proyeksiyalarini yig'indisini va barcha kuchlarni A nuqtaga nisbatan momentlari yig'indisini 0 ga tenglab topamiz.

$$\sum X_u = 0: P \cos 30^\circ - R_A \cos 30^\circ - q \cdot BC = 0, \quad R_A = \frac{P \cos 30^\circ - q \cdot BC}{\cos 30^\circ} = 2 \text{ kN}.$$

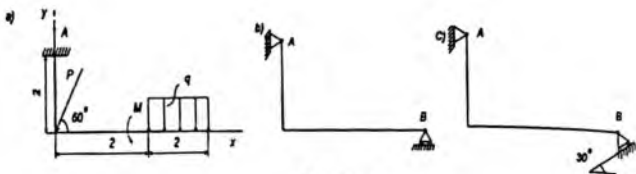
$$\sum m_u = 0: R_B \cdot AB + \frac{Q}{2} \cdot \frac{BC}{2} - M - P \cdot AL + M_A = 0, \quad M_A = 14,5 \text{ kN} \cdot m.$$

Hisoblash natijalari 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval

Sxema	R_B [kN]	R_A [kN]	M_A [kN·m]
a	4,625	—	—
b	1	2	14,5
c	5	—	—

4.3-masala. Sxemalardagi o'qi siniq chiziqlardan iborat bo'lgan bryslarga bitta to'plangan $P=10 \text{ kN}$ kuch, bitta tekis taqsimlangan kuch $q=2 \text{ kN/m}$ va $M=6 \text{ kN} \cdot m$ moment ta'siridagi konstruksiyaning Y_A noma'lum reaksiyasini eng kichik son qiymatga ega bo'ladigan miqdordagi tayanch reaksiyalarini mahkamlashning usulini aniqlang (4.11-rasm).



4.11-rasm

Yechish: $P=10\text{ kN}$, $q=2\text{ kN/m}$, $M=6\text{ kN}\cdot\text{m}$. $Y_A=?$

Barcha sxemalar uchun Y_A reaksiya kuchini va eng kichik reaksiya kuchini aniqlaymiz. Yuzaga tekis taralgan kuchni teng ta'sir etuvchi bilan almashtiramiz:

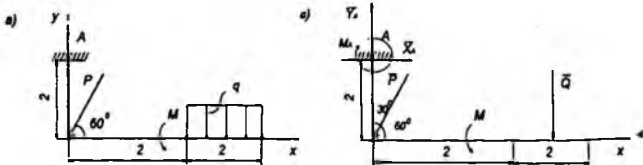
$$Q = q \cdot BD, \quad Q = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2\text{m} = 4\text{ kN}.$$

a) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.12-rasm).

Shakl uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Tayanch reaksiyalaridan Y_A noma'lum reaksiyani aniqlashimiz kerakligi uchun faqat bitta muvozanat tenglamasini tuzish yetarli bo'ladi. Buning uchun barcha kuchlarning Oy o'qiga nisbatan proyeksiyalarining yig'indisini aniqlasak, tenglamada faqat bitta Y_A noma'lum reaksiya qatnashadi:

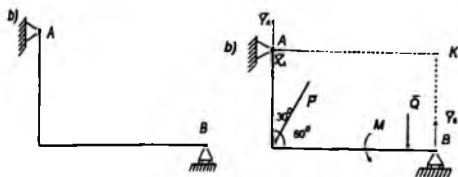
$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - P \sin 60^\circ - Q = 0,$$

$$Y_A = 0,0866 \cdot 10\text{ kN} + 4\text{ kN} = 12,66\text{ kN}.$$



4.12-rasm

b) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.13-rasm).



4.13-rasm

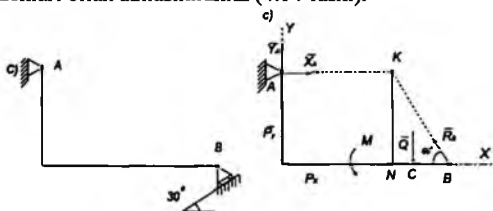
Muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Y_A noma'lum reaksiyani topish uchun barcha kuchlarning biror bir nuqtaga nisbatan momentlari yig'indisini aniqlaymiz. Biz B nuqtaga nisbatan barcha kuchlarning momentlari yig'indisini nolga teng deb olamiz va Y_A noma'lum reaksiyani aniqlaymiz:

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - P \cos 60^\circ = 0, \Rightarrow X_A = 0,5 \cdot 10 \text{ kN} = 5 \text{ kN}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad -X_A \cdot AC - Y_A \cdot BC + P \sin 60^\circ \cdot BC + Q \cdot \frac{BD}{2} + M = 0,$$

$$Y_A = \frac{-X_A \cdot AC + P \sin 60^\circ \cdot BC + Q \cdot \frac{BD}{2} + M}{BC}, \Rightarrow Y_A = 8,66 \text{ kN}.$$

c) berilgan brusni bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz (4.14-rasm).



4.14-rasm

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz va bu tenglamalardan noma'lum reaksiya kuchlarini aniqlaymiz:

$$\sum M_B = 0, \quad -P \cos 60^\circ \cdot AC - Q \cdot \left(CD + \frac{BD}{2} \right) + R_B \cdot (BC \cdot \cos 30^\circ - AC \cdot \sin 30^\circ) + M = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{BC \cdot \cos 30^\circ - AC \cdot \sin 30^\circ} \left(P \cos 60^\circ \cdot AC + Q \cdot \left(CD + \frac{BD}{2} \right) - M \right), \Rightarrow R_B = 6,49 \text{ kN}.$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_A - P \sin 60^\circ - Q + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$Y_A = P \sin 60^\circ + Q - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0, \Rightarrow Y_A = 7,04 \text{ kN}.$$

$$\sum X_i = 0, \quad X_A - P \cos 60^\circ - R_B \sin 30^\circ = 0, \quad \Rightarrow X_A = 8,23 \text{ kN}.$$

Aniqlangan Y_A tayanch reaksiyalarini taqqoslab, ulardan moduli bo'yicha eng kichik bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlaymiz. Taqqoslash natijasida sxemalarda Y_A tayanch reaksiya kuchlaridan moduli bo'yicha eng kichigi C sxemada ekanligini ko'rish mumkin.

Hisoblash natijalari 3-jadvalda keltirilgan.

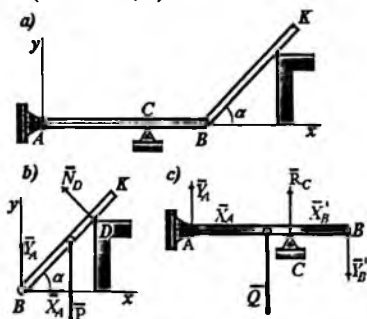
3-jadval

Sxema	Y_A [kN]	R_B [kN]	X_A [kN]
a	12,66	—	—
b	8,66	—	—
c	7,04	6,49	8,23

4.4-masala. Og'irligi $Q=200 \text{ N}$ bo'lgan gorizontal holatda joylashgan AB balka, o'zining A uchi bilan devorga sharnir orqali mahkamlangan, C nuqtasi esa qirraga tayanib turibdi. Balkaning B uchiga sharnir orqali og'irligi $P=400 \text{ N}$ bo'lgan BK brus ulangan bo'lib, u D nuqtada to'g'ri burchakli qirraga tayangan holda muvozanat saqlab turibdi. Bu yerda $CB=AB/3$, $DK=BK/3$ va burchak $\alpha=45^\circ$. Balka va brusni bir jinsli deb hisoblab, tayanch reaksiylari aniqlansin (4.15-rasm, a).

Yechish.

Konstruksiya B nuqtadan ikki qismga, AB balkaga va BK brusga ajratib yuboramiz. BK brusga tashqi $\vec{P}$ kuch va bog'lanishlarning $\vec{N}_D, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ reaksiya kuchlari ta'sir etmoqda. $BK=a$ deb belgilash kiritib, brus uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



4.15-rasm

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= X_B - N_D \sin \alpha = 0, \\ \sum F_{iy} &= Y_B - P + N_D \cos \alpha = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= N_D \cdot \frac{2a}{3} - P \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Ushbu tenglamalarni noma'lum qiymatlarga nisbatan yechib, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}N_D &= \frac{3}{4} P \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_D = 212 N, \\ X_B &= \frac{3}{8} P \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow X_B = 150 N, \\ Y_B &= P - \frac{3}{4} P \cdot \cos^2 \alpha \Rightarrow Y_B = 250 N.\end{aligned}$$

AB balkaga Q og'irlik kuchi, $\bar{N}_C, \bar{X}_A, \bar{Y}_A$ tashqi bog'lanishlarning reaksiya kuchlari va B nuqtadagi sharnir orqali uzatiladigan BK brusning $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ bosim kuchlari ta'sir etadi. Ta'sir va aks ta'sir haqidagi aksiomaga asosan $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ kuchlar $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ kuchlarga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lib, ularning modullari o'zaro teng bo'ladi. Ya'ni, $\bar{X}_B' = \bar{X}_B, \bar{Y}_B' = \bar{Y}_B$ bo'ladi.

$AB=b$ belgilash kiritib, balkaga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= X_A - X_B' = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -Y_B' \cdot b + N_C \cdot \frac{2b}{3} - Q \cdot \frac{b}{2} = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= -Y_A \cdot \frac{2b}{3} + Q \cdot \frac{b}{6} - Y_B' \cdot \frac{b}{3} = 0.\end{aligned}$$

Ushbu tenglamalardagi $\bar{X}_B' = \bar{X}_B, \bar{Y}_B' = \bar{Y}_B$ qiymatlarni e'tiborga olib, ularni noma'lumlarga nisbatan yechamiz:

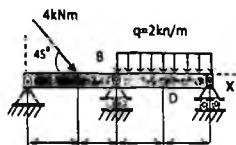
$$\begin{aligned}X_A &= X_B = 150 N, \\ Y_A &= \frac{1}{4} Q - \frac{1}{2} Y_B = -75 N, \\ N_C &= \frac{3}{4} Q + \frac{3}{2} Y_B = 525 N.\end{aligned}$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, $\bar{Y}_A$ dan tashqari barcha reaksiya kuchlari to'g'ri yo'naltirilgan hamda $\bar{Y}_A$ ning reaksiyasi pastga yo'nalishi lozim ekan.

Statika masalalarini yechishda: agar bitta jismning boshqa jismga bosimi $\bar{R}$ yoki uning tashkil etuvchi kuchlari, $\bar{X}$ va $\bar{Y}$ orqali tasvirlangan bo'lsa, ta'sir va aks ta'sir qonuniga asosan, ikkinchi jismning birinchi jismga aks ta'siri ham o'z navbatida $\bar{R}$ yoki uning tashkil etuvchilari mos ravishda $\bar{X}'$ va $\bar{Y}'$ bilan belgilanib, yo'nalishlari esa ta'sir kuchlariga qarama-qarshi yo'nalishlarda belgilanadi. Ularning modullari esa o'zaro teng, ya'ni $R=R'$, $X=X'$, $Y=Y'$ bo'ladi.

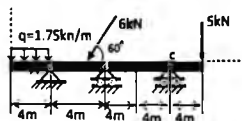
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Rasmda yig'ma balkalar hamda unga qo'yilgan kuch va yuk tasvirlangan. A , B va C tayanchlardagi hamda D shamirdagi reaksiyalar aniqlansin (4.16-rasm).



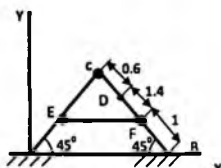
4.16-rasm

2-masala. Rasmda yig'ma balkalar hamda unga qo'yilgan kuch va yuk tasvirlangan. A , B va C tayanchlardagi hamda D shamirdagi reaksiyalar aniqlansin (4.17-rasm).



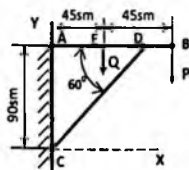
4.17-rasm

3-masala. AC va BC qismlardan iborat bo'lgan ko'chma narvon gorizontal silliq tekislikda turadi. AC va BC qismlar har birining og'irligi $120N$, uzunligi $3m$ bo'lib, ular C shamir va EF arqon bilan biriktirilgan; masofa $BF=AF=1m$. Har qaysi AC va BC qismlarning og'irlik markazi ularning o'rtasida. $CD=0,6m$ masofadagi D nuqtada og'irligi $720N$ bo'lgan odam bor. Agar burchaklar, $\angle BAC=\angle ABC=45^\circ$ bo'lsa, pol va shamir reaksiyasi, shuningdek, EF arqondagi T taranglik kuchi aniqlansin (4.18-rasm).



4.18-rasm

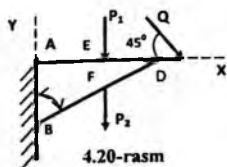
4-masala. Gorizontal AB brusning uchiga $P=25N$ yuk osilgan. Brusning



4.19-rasm

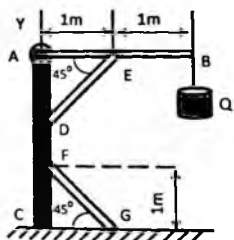
og'irligi $Q=10N$ bo'lib, E nuqtaga qo'yilgan. Brus CD sterjenga tiralgan bo'lib, devorga A sharnir yordamida, sterjenga esa D sharnir vositasida biriktirilgan. O'lchovlar rasmda ko'rsatilgan. CD sterjenning og'irligini hisobga olmay, A va C sharnirlarning reaksiyalari aniqlansin (4.19-rasm).

5-masala. Uzunligi bir xil bo'lgan ikkita AC va BD sterjenlar D nuqtada o'zaro sharnir vositasida birikkan. Shuningdek, ular



4.20-rasm

vertikal devorning A va B nuqtalariga ham sharnir bilan mahkamlangan. AC sterjen gorizontall joylashgan, BD sterjen esa vertikal devor bilan 60° burchak hosil qiladi. AC sterjenga E nuqtada vertikal $P_1=40N$ kuch va C nuqtada gorizontga nisbatan 45° burchak bilan $Q=100N$ kuch qo'yilgan. $AE=EC$; $BF=FD$ deb olib, A va B sharnirlarning reaksiyalari aniqlansin (4.20-rasm).



4.21-rasm

6-masala. Uzunligi $2m$ bo'lgan AB gorizontall balkaning uchiga $500N$ og'irlikdagi Q yuk osilgan. Balka AC vertikal ustunning A nuqtasiga biriktirilgan va DE tirgovuch bilan mahkamlangan. Bunda $AE=CG=1m$, DE va FG tirgovuchlar gorizontga 45° burchak bilan qiyalangan. Balka va ustun tirgovuchlarining og'irliklarini hisobga olmay, DE va DG tirgovuchlardagi S_E va S_F zo'riqlarini hamda yerning C nuqtasidagi reaksiya topilsin. Biriktirishlar shamirli bog'lanishlar deb hisoblansin (4.21-rasm).

Nazorat savollari

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning yelkasi deb nimaga aytiladi?
3. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qanday aniqlanadi?

4. Qaysi hollarda nuqtaga nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi?
5. Qaysi hollarda kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi?
6. Juft kuch deb qanday kuchlar sistemasiga aytiladi?
7. Juftning momenti nimaga teng?
8. Juftning yelkasi qanday aniqlanadi?
9. Juft kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nimaga teng?
10. Ekvivalent juftlar deb qanday juftlarga aytiladi?
11. O'zaro kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar qanday qo'shiladi?
12. Juft kuchlar sistemasining muvozanat shartini ayting?

5. ISHQALANISH

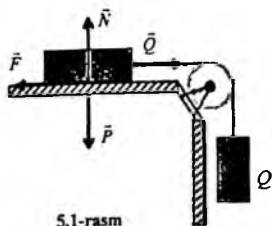
Sirpanishdagi ishqalanish

Biz yuqoridagi mavzularda bog'lanishdagi jismlar mutlaq qattiq jismdan iborat va ularning bir-birlariga tegib turgan sirtlari ideal silliq hamda bog'lanish reaksiya kuchlari faqat normal tashkil etuvchidan iborat deb faraz qilgan edik. Lekin aslida har qanday jism oz bo'lsada deformatsiyalanadi va ularning sirti silliq bo'lmaydi. Shuning uchun, bog'lanishlarning reaksiya kuchi jismlar bir-birlariga tegib turgan yuzada normal reaksiya kuchiga perpendikulyar ravishda yo'nalgan yana bir tashkil etuvchiga ega bo'ladi va bu tashkil etuvchiga ishqalanish kuchi deyiladi.

Texnikada ishqalanish kuchini e'tiborga olish juda muhim hisoblanadi. Masalan, avtomobilning g'ildiragi yo'lga ishqalanganligi tufayli harakatlanadi. Tasmali uzatma ham ishqalanish tufayli shkiylarni aylantiradi. Friksion uzatmalarda, tormozlarda ham ishqalanishdan keng foydalaniladi.

Bir jism ikkinchi jism sirtida sirpanganda, uning hararatiga qarshilik hosil bo'ladi, buni *sirpanib ishqalanish* deb ataladi. Sirpanishga qarshilik ko'rsatuvchi kuch *ishqalanish kuchi* deb ataladi.

Jismning tinch holatida hosil bo'ladigan ishqalanish kuchiga *statik ishqalanish kuchi* deyiladi. Jismning harakati paytida hosil bo'ladigan ishqalanish kuchiga *dinamik ishqalanish kuchi* deyiladi.



5.1-rasm

Ishqalanish kuchining namoyon bo'lishi va uning qonuniyatlarini quyidagi tajriba orqali tushuntirish mumkin. Gorizontallikda yotuvchi $\bar{P}$ og'irligidagi jismga gorizontallik ip vositasida $\bar{Q}$ yukni qo'yaylik. Buni blok orqali uzatilgan ip uchiga tosh qo'yilgan pallachani osish orqali bajarish mumkin (5.1-rasm).

Jismning $\bar{P}$ og'irligi bilan tekislikning $\bar{N}$ reaksiya kuchi o'zaro muvozanatlashadi. Gorizontallik $\bar{Q}$ kuchning miqdori qanchalik kichik bo'lmasin, jism harakatlanishi lozim. Biroq harakat $\bar{Q}$ kuch ma'lum bir miqdorga yetgandan keyingina boshlanadi. Bundan ko'rinadiki, jismlarning tegishib turgan sirtlarida $\bar{N}$ normal reaksiyadan tashqari, $\bar{Q}$ kuch bilan muvozanatlashuvchi $\bar{F}$ kuch paydo bo'ladi. Shu kuchni ishqalanish kuchi deb ataladi.

Jismning qo'zg'alish oldidan hosil bo'lgan qarshilik kuchi, $\bar{F}_{\max}$ maksimal ishqalanish kuchidir. Ishqalanish kuchi faqat jismga sirpaniruvchi kuch ta'sir qilgandagina hosil bo'ladi. Bu ishqalanish kuchi jismni qo'zg'atish uchun zarur bo'lgan kuchga kattalik jihatidan teng va unga qarama-qarshi yo'naladi. Ishqalanish kuchi noldan qandaydir aniq qiymatgacha o'zgaradi: $0 \leq \bar{F} \leq \bar{F}_{\max}$. Tajribalardan ma'lumki, maksimal ishqalanish kuchi jismning normal reaksiya kuchiga to'g'ri proporsionaldir. Ya'ni

$$\bar{F}_{\max} = f \cdot \bar{N}. \quad (5.1)$$

Bu ifoda *Kulon qonuni* deb ataladi. Bu yerda: N -normal reaksiya kuchi, f -proporsionallik koeffitsiyenti - *ishqalanish koeffitsiyenti* deyiladi. Agar biror sirtga tayanib turgan jism sirpanish oldida (muvozanat chegarasida) bo'lsa, ishqalanish kuchi maksimal qiymatga erishadi.

(5.1) ifodadan ko‘rinadiki, ishqalanish koeffitsiyenti, f o‘lchovga ega bo‘lmagan miqdordir. Ishqalanish koeffitsiyenti tajribalar yordamida aniqlanadi (masalan: g‘isht bilan beton uchun, $f=0,3+0,8$, g‘isht bilan yog‘och uchun, $f=0,4+0,7$). Tajribalardan ko‘rinadiki:

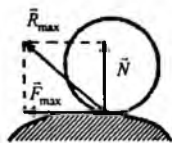
1. Ishqalanish kuchi jismlarning ishqalanuvchi sirtlari o‘lchamlariga bog‘liq bo‘lmaydi.

2. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi jismlarning materialiga va ular sirtlarining fizik holatlariga (g‘adir-budurliqi, namlik, harorat va boshqalarga) bog‘liq bo‘ladi.

3. Jism harakatda bo‘lgandagi ishqalanish kuchi (dinamik ishqalanish kuchi) tinch turgandagi (statik ishqalanish kuchi) ga nisbatan kichikroq bo‘ladi.

Shunday qilib, bog‘lanishning to‘liq reaksiyasi, $\bar{R}_{\max}$ normal reaksiya, $\bar{N}$ va unga perpendikulyar bo‘lgan $\bar{F}$ ishqalanish kuchlarining yig‘indisidan iborat bo‘lib, normal bilan qandaydir φ burchak tashkil qiladi.

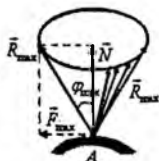
Ishqalanish kuchi $\bar{F}$ noldan $\bar{F}_{\max}$ gacha o‘zgarganda, to‘liq reaksiya $\bar{N}$ dan $\bar{R}_{\max}$ gacha, uning normaldan og‘ish burchagi noldan φ_0 gacha o‘zgaradi. Rasmga ko‘ra, to‘la reaksiya kuchi $\bar{R}_{\max} = \bar{N} + \bar{F}_{\max}$ ga teng bo‘ladi. To‘la reaksiya kuchi, $\bar{R}_{\max}$ bilan normal reaksiya kuchi, $\bar{N}$ tashkil qilgan burchakning maksimal miqdori, $\varphi_{\max}$ - *ishqalanish burchagi* deb ataladi (5.2-rasm).



5.2-rasm

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

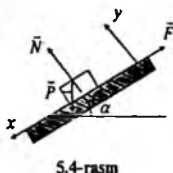
Ishqalanish kuchi urinma tekislikda, sirpanti-ruvchi kuchga bog‘liq ravishda, ixtiyoriy yo‘nalishni oladi. Bog‘lanishning to‘liq reaksiyasi, $\bar{R}_{\max}$ yo‘nalishining olishi mumkin bo‘lgan geometrik o‘mi, uchi jismlarning tegishib turgan nuqtasida bo‘lgan konus sirtidan iborat bo‘ladi. Bu konus *ishqalanish konusi* deb ataladi (5.3-rasm). Jismning muvozanat holatida to‘liq reaksiya kuchi



5.3-rasm

ishqalanish konusi ichida ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin. Binobarin, g'adir-budur sirtga tayangan jism muvozanatida unga ta'sir qiluvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, jismlarning tegishib turgan nuqtasidan o'tib, konus ichida yotadi. Faqat shunday kuchgina tayanch nuqtaning reaksiyasi bilan muvozanatlashadi. Agar teng ta'sir etuvchi kuch ishqalanish konusining tashqarisidan o'tsa, u holda reaksiya u bilan muvozanatlashmaydi va jism sirpana boshlaydi.

5.1-masala. Qiya yerning tabiiy og'ish burchagi topilsin (5.4-rasm). Shu yerning ishqalanish koeffitsiyenti, $f = 0,8$. (Qiya yerning tabiiy og'ish burchagi deb qiyalikning gorizontga nisbatan hosil qilgan shunday eng katta og'ish burchagiga aytiladiki, bunda qiyalik yotgan tuproq zarrachasi muvozanatda bo'ladi).



Yechish: Muvozanat sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0: P \sin \alpha - F = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0: N - P \cos \alpha = 0.$$

Bunda F -ishqalanish kuchi.

Tenglamalardan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F = P \sin \alpha,$$

$$N = P \cos \alpha.$$

Jism muvozanatda bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi lozim:

$$F \leq f \cdot N \text{ yoki } P \sin \alpha \leq P f \cos \alpha.$$

Bu yerdan quyidagini aniqlaymiz:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f \quad \forall \alpha \leq \arctg f,$$

$$\alpha = 38^\circ 39'.$$

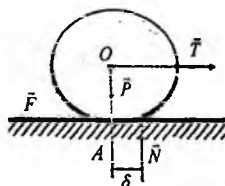
Javob: $\alpha = 38^\circ 39'$.

Dumalashdagi ishqalanish

Bir jism ikkinchi jismning sirti bo'ylab dumalasa yoki dumalashga intilganda hosil bo'ladigan qarshilik *dumalashdagi*

ishqalanish deb ataladi. Misol tariqasida og'irligi P bo'lgan g'ildirak gorizontaal tekislikda turadi. G'ildirakning o'qiga gorizontaal $\vec{T}$ kuch qo'yilgan. Bu holda g'ildirakka $\vec{N}$ normal reaksiya kuchi, va $\vec{F}$ ishqalanish kuchi, hamda $\vec{P}$ og'irlik kuchi ta'sir ko'rsatadi. G'ildirakning markaziga uncha katta bo'lmagan gorizontaal $\vec{T}$ kuch ta'sir etsa, g'ildirak muvozanatda qolaveradi. Ishqalanish kuchi miqdor jihatdan $\vec{T}$ ga teng bo'lib, unga qarama-qarshi tomonga qarab yo'naladi. $\vec{T}$ kuch bilan ishqalanish kuchi, $\vec{F}$ o'zaro juftni tashkil etadi va g'ildirakni ayilantirishga intiladi. $\vec{P}$ va $\vec{N}$ lardan tashkil topgan juft g'ildirakning dumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi juft hosil qiladi. Dumalash $\vec{T}$ kuchining qandaydir qiymatidan boshlanadi.

Bu juft *dumalashdagi ishqalanish jufti* deyiladi. Bu juft tekislik va g'ildirakning ezilishi (deformatsiyasi) natijasida hosil bo'ladi, ularning sirtlari A nuqta atrofida kichik bir yuza bo'ylab tegadi. Reaksiya kuchi shu yuzacha bo'ylab taqsimlangan bo'ladi.



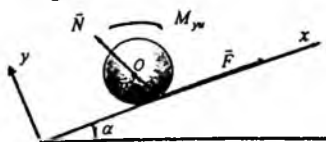
5.5-rasm

Ezilgan yuzaning har bir nuqtasida hosil bo'ladigan $\vec{N}$ normal reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi A nuqtaga emas, balki ezilgan yuzaning biror C nuqtasiga qo'yilgan bo'ladi. C nuqtada ishqalanish kuchi ham hosil bo'ladi (5.5-rasm). Dumalab ishqalanish jufti $\vec{T}$ va $\vec{F}$ ning momenti qandaydir $M_{\max}$ qiymatgacha o'zgarishi tajribada tasdiqlangan: $0 \leq M \leq M_{\max}$. Ko'pincha tajribalarga suyanib quyidagi xulosaga kelingan: dumalab ishqalanish jufti momenti g'ildirak radiusiga bog'liq bo'lmagan N normal reaksiyaga to'g'ri proporsional bo'ladi. Ya'ni

$$M_{\max} = \delta \cdot N. \quad (5.2)$$

Bunda: δ —*dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti* deyiladi. Dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti, δ uzunlik birligi bilan o'lchanadi. U bir-biriga tegib turgan materiallarning fizik xossalriga, ishqanish darajasiga, g'ildirak radiusiga va $\vec{N}$ normal reaksiya kuchiga bog'liq ekanligi tajribada aniqlangan. Tajribalar shuni ko'rsatadiki, dumalashdagi qarshilik sirpanishdagi

qarshilikka nisbatan ancha kam bo'ladi. Shuning uchun texnikada, ishqalanish zararli bo'lgan hollarda, sirpanishni dumalashga almashtiriladi. Masalan, sirpanuvchi podshipniklar o'miga sharikli podshipniklar ishlatiladi.



5.6-rasm

5.2-masala. Gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikda radiusi R ga teng bo'lgan g'ildirak (silindr) turibdi. Dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti δ ga teng (5.6-rasm). α burchagining

qanday qiymatida g'ildirak muvozanatda bo'ladi?

Yechish. G'ildirakka quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: og'irlik kuchi — $\vec{P}$, tekislikning normal reaksiyasi — $\vec{N}$, sirpanib ishqalanish kuchi — $\vec{F}$ va momenti — $\vec{M}_y$.

Agar sirpanish va dumalash sodir bo'lmasa, quyidagi shartlar bajarilishi lozim:

$$F \leq f \cdot N, \quad (1)$$

$$M_y \leq \delta \cdot N. \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0: P \sin \alpha - F = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0: N - P \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n m_k (\vec{F}_k) = 0: PR \sin \alpha - M_y = 0. \quad (5)$$

Bu tenglamalardan quyidagilarni olamiz:

$$N = P \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f. \quad (6)$$

(2) ni e'tiborga olib, (5) dan quyidagini hosil qilamiz:

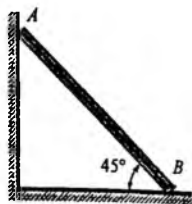
$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\delta}{R}. \quad (7)$$

Bu yerdan (6) shart g'ildirakning sirpanmasligini va (7) shart esa g'ildirakning dumalamasligini ta'minlaydi.

Ko'pgina jismlar uchun $\frac{\delta}{R} < f$ bo'lganligi sababli, g'ildirak muvozanatda bo'lishi uchun α burchak (7) shartni qanoatlantirishi kerak.

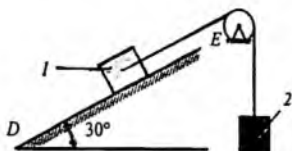
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Bir jinsli AB to'sin silliq devor va yerga tiralgan. To'sin bilan yer $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qiladi. Rasmda ko'rsatilgan holatda to'sin muvozanatda qolishi uchun to'sin bilan yer orasidagi ishqalanish koeffitsiyentining eng kam miqdorini toping (5.7-rasm).



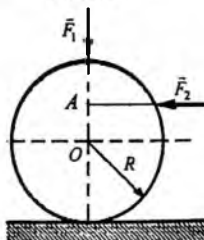
5.7-rasm

2-masala. Qiya tekislikda 1 -yuk blok orqali ip yordamida og'irligi 320 N li 2 -yukga bog'langan. Qiya tekislik bilan gorizontal tekislik $\alpha = 30^\circ$ burchak hosil qiladi. Agar 1 -yuk va qiya tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsiyenti $0,2$ bo'lsa, 1 -yuk DE tekislik bo'ylab pastga tushishi uchun uning eng kam og'irligi qancha bo'ladi (5.8-rasm)?



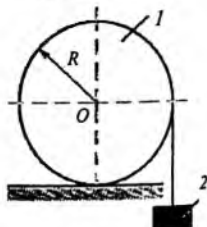
5.8-rasm

3-masala. Og'irligi 2 kN bo'lgan bir jinsli, g'ildirakka gorizontal $F_2 = 10\text{ N}$ va vertikal F_1 kuchlar ta'sir etib, g'ildirak dumalashni boshlashi uchun F_1 kuchning eng katta qiymati qancha bo'lishi lozim (5.9-rasm)? (Bunda: g'ildirakning radiusi $R = 0,8\text{ m}$, masofa $OA = 0,4\text{ m}$ va dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti, $\delta = 0,005\text{ m}$ deb olinsin).



5.9-rasm

4-masala. Og'irligi $G = 3,2\text{ kN}$, radiusi $R = 32,4\text{ sm}$ bo'lgan g'ildirakka cho'zilmaydigan ip yordamida 2 -yuk osilgan. Agar dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti, $\delta = 0,004\text{ m}$ bo'lsa, 2 -yukning qanday eng katta qiymatida g'ildirak o'zining muvozanat holatini saqlab qoladi (5.10-rasm)?



5.10-rasm

Nazorat savollari

1. Sirpanish ishqalanish kuchi deb qanday kuchga aytiladi?
2. Ishqalanish kuchi qanday qonunlarga bo'ysunadi?
3. Ishqalanish kuchi nimalarga bog'liq?
4. Ishqalanish kuchining maksimal qiymati qanday hisoblanadi?
5. Ishqalanish bo'lgan holda reaksiya kuchi qanday bo'ladi?
6. Ishqalanish burchagi nima?
7. Ishqalanish konusi nima?
8. Dumalashdagi ishqalanish nima?
9. Dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti nima?
10. Dumalashdagi ishqalanish jufti momenti qanday hisoblanadi?

6. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASI. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASINING NUQTAGA VA O'QQA NISBATAN MOMENTI

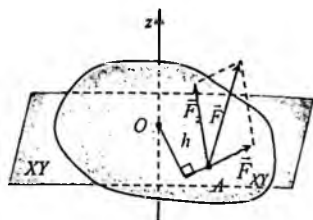
Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga *fazodagi kuchlar sistemi* deyiladi.

Fazodagi kuchlarning nuqtaga nisbatan momenti quyidagi faktorlar bilan aniqlanadi: kuchning modulini uning yelkasiga ko'paytmasiga teng moment moduli, kuchning ta'sir chizig'i va moment markazi orqali o'tuvchi aylanish tekisligi va shu tekislikdagi aylanish yo'nalishi.

Fazodagi kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor kattalik bo'lib, kuch qo'yilgan nuqtaning moment markaziga nisbatan radius-vektori bilan shu kuchning vektor ko'paytmasiga teng.

Fazodagi kuchlar sistemasining jismga ta'sirini o'rganishda kuchning markazga nisbatan momenti bilan birgalikda kuchning o'qqa nisbatan momenti tushunchasi ham kiritiladi.

z o'q atrofida aylana oladigan qattiq jism berilgan va jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin (6.1-rasm). A nuqtadan o'tuvchi aylanish o'qiga perpendikulyar XY tekisligini o'tkazamiz. z o'qning shu tekislik bilan kesishgan nuqtasini O bilan va $\vec{F}$ kuchning XY tekisligidagi proyeksiyasini $\vec{F}_{XY}$ bilan belgilaymiz.



6.1-rasm

$\vec{F}$ kuchni XY tekisligida yotuvchi $\vec{F}_{XY}$ va z o'qqa parallel bo'lgan $\vec{F}_z$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. $\vec{F}_z$ tashkil etuvchi jismni z o'q atrofida aylantira olmaydi. $\vec{F}_z$ kuch jismni z o'qi bo'ylab siljitishga intiladi. $\vec{F}$ kuchning z o'q atrofida aylantirish effekti shu o'q atrofida $\vec{F}_{XY}$ kuchning aylantirish effekti bilan bir xil bo'ladi.

Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti deb, uning shu o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasining o'q bilan shu tekislik kesishgan nuqtasiga nisbatan momentiga aytiladi.

$\vec{F}$ kuchning z o'qqa nisbatan momenti $M_z(\vec{F})$ kabi belgilanadi:

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{XY}).$$

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{XY} \cdot h.$$

Kuchning o'qqa nisbatan momenti skalyar miqdor bo'lib, o'qning musbat yo'nalishidan qaraganda kuchning o'qqa perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasi jismni o'q atrofida soat mili harakatiga teskari yo'nalishda aylantirishga intilsa, kuch momenti (+) musbat, aks holda (-) manfiy ishora bilan olinadi.

Agar $\vec{F}$ kuchning ta'sir chizig'i z o'qqa parallel yo'nalgan bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

Agar $\vec{F}$ kuchning ta'sir chizig'i z o'qni kesib o'tsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'ladi.

Lemma: Kuchning biror o'qqa nisbatan momenti uning shu o'qda olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan moment vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng.

$$M_x(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_x, \quad M_y(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_y, \quad M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z.$$

Fazodagi kuchlar teng ta'sir etuvchisining momentiga oid Varin'on teoremasi

Agar fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keltirilsa, bu teng ta'sir etuvchining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti barcha kuchlarning shu nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Fazodagi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining ixtiyoriy o'qqa nisbatan momenti mazkur kuchlarning ushbu o'qqa nisbatan momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

$$M_x(\vec{R}) = \sum M_x(\vec{F}_i).$$

Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasi

Koordinatalari x, y, z bo'lgan nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuchning tashkil etuvchilari mos ravishda $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ bo'lsin. Varin'on teoremasiga ko'ra:

$$M_x(\vec{F}) = \sum M_x(\vec{F}_i) = M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z),$$

$$M_y(\vec{F}) = \sum M_y(\vec{F}_i) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_y) + M_y(\vec{F}_z),$$

$$M_z(\vec{F}) = \sum M_z(\vec{F}_i) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z).$$

Shuningdek, $\vec{F}_x \parallel O_x, \vec{F}_y \perp O_x, \vec{F}_z \perp O_x$.

$M_x(\vec{F}_x) = 0, M_x(\vec{F}_y) = -z \cdot F_y, M_x(\vec{F}_z) = yF_z$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - z \cdot F_y.$$

Xuddi shuningdek, O_y va O_z , o'qlariga nisbatan $\vec{F}$ kuchning momentlari aniqlanadi. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z,$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Ushbu ifoda fazodagi kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasi. Bu ifodalardan foydalanib,

kuchning nuqtaga nisbatan momentlarining moduli aniqlanadigan quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

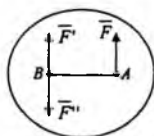
$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}.$$

Kuchni o'ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishga oid Puanso lemmasi

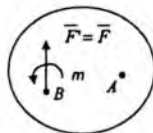
Qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni ta'sirini o'zgartirmay jismning ixtiyoriy nuqtasiga qanday qilib parallel ko'chirish mumkinligini 1804 yilda fransuz olimi Lui Puanso o'zining mashhur lemmasi orqali hal qildi. Ushbu lemma fazoda va tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini osongina soddalashtirish imkonini beradi.

Lemma. *Absolyut qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay o'ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish natijasida, keltirish markazida momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan juft qo'shishni taqozo etadi.*

Isbot. Jismning biror A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan bo'lsin. Jismning ixtiyoriy B nuqtasiga tashkil etuvchilari $\vec{F}'$ va $\vec{F}''$ miqdor jihatidan $\vec{F}$ kuchga teng bo'lgan, ya'ni $\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}''$ nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo'yamiz (6.2-rasm). Hosil bo'lgan uchta kuchdan iborat bo'lgan $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ sistema berilgan $\vec{F}$ kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani $\vec{F}$ kuch va $(\vec{F}', \vec{F}'')$ juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin A nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch, B nuqtaga qo'yilgan shunday $\vec{F}'$ kuchga va $(\vec{F}', \vec{F}'')$ juftga ekvivalentdir. $(\vec{F}', \vec{F}'')$ juftni *qo'shilgan juft* deb ataladi. Uning momenti quyidagicha aniqlanadi: $m(\vec{F}, \vec{F}'') = F \cdot d = m_B(\vec{F}')$.



6.2-rasm

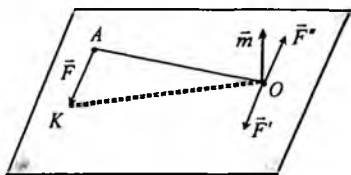


6.3-rasm

Binobarin, qo'shilgan juftning momenti, A nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuchning ko'chirish zarur bo'lgan B nuqtaga nisbatan momentiga teng bo'ladi.

Bosh vektor va bosh moment

Puanso lemmasiga asosan, qattiq jismning biror A nuqtasiga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch (6.4-rasm) o'ziga parallel ko'chirilsa, O nuqtaga qo'yilgan shunday $\vec{F}$ kuch va $\vec{F}$ kuchdan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ($\vec{F}, \vec{F}'$)



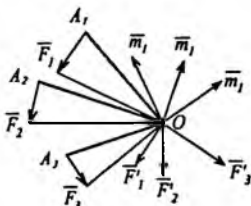
6.4-rasm

juft kuch hosil bo'ladi. Juftning

$\vec{m}$ moment vektori OAK tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Shuning uchun quyidagicha yozish mumkin. $\vec{F} = \vec{F}'$ va berilgan markazga keltirishda hosil bo'lgan ($\vec{F}, \vec{F}'$) juftni shaklda

ko'rsatmay, uning $\vec{m}$ moment vektorini tasvirlash kifoya. Bu natijadan foydalanib, ixtiyoriy joylashgan va qattiq jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga qo'yilgan uchta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlarni berilgan markazga keltiramiz (6.5-rasm). Buning uchun hamma kuchlarni O nuqtaga keltirib qo'shilgan juftlarni olamiz. Natijada O markazga qo'yilgan



6.5-rasm

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlar sistemasi va momentlari $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ bo'lgan qo'shilgan juft kuchlar sistemasini olamiz. Ma'lumki,

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2), \vec{m}_3 = \vec{m}_0(\vec{F}_3).$$

O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlarni qo'shib, ularning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan $\vec{R}$ ni olamiz, ya'ni:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Agar $\vec{F}_1 = \vec{F}_1, \vec{F}_2 = \vec{F}_2, \vec{F}_3 = \vec{F}_3$ bo'lsa, u holda $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ kuchlarning geometrik yig'indisi *bosh vektor* deyiladi. Qo'shilgan juftlarni yig'ib teng ta'sir etuvchi juftni hosil qilamiz uning momenti qo'shilgan juft momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni,

$$\vec{M}_O = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3.$$

Agar

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1), \vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2), \vec{m}_3 = \vec{m}_O(\vec{F}_3) \text{ bo'lsa,}$$

u holda

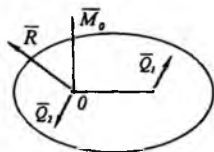
$$\vec{M}_O = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \vec{m}_O(\vec{F}_3).$$

Bunda: $\vec{M}_O$ vektor berilgan kuchlardan O keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar sistemasining *keltirish markaziga nisbatan bosh momenti* deyiladi.

Olingan natijani fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tatbiq qilib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k). \quad (6.1)$$

Shunday qilib, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan va keltirish markaziga qo'yilgan yolg'iz kuch va momenti berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan qandaydir $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ juft bilan almashtirish mumkin (6.6-rasm).



6.6-rasm

Bosh vektor keltirish markazini tanlashga bog'liq bo'lmaydi. Lekin bosh moment keltirish markazining tanlab olinishiga bog'liq bo'lib, keltirish markazining o'zgarishi bilan bosh moment ham o'zgarishi mumkin.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentini analitik aniqlash

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining boshini keltirish markazi O nuqtada olamiz. U holda, $\vec{R}$ bosh vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (6.2)$$

Bosh vektorning moduli quyidagicha

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (6.3)$$

$\bar{R}$ bosh vektoring yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha:

$$\cos(\bar{R}, \hat{Ox}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \hat{Oy}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \hat{Oz}) = \frac{R_z}{R}. \quad (6.4)$$

M_0 bosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k). \quad (6.5)$$

Yuqorida keltirilgan formula yordamida aniqlanuvchi M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} miqdorlar *koordinata o'qlariga nisbatan bosh momentlar* deyiladi. Biror koordinata o'qiga nisbatan sistema kuchlarining bosh momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan momentlar algebraik yig'indisiga teng.

Bosh momentning miqdor va yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}. \quad (6.6)$$

$$\cos(\bar{M}_0, \hat{Ox}) = \frac{M_{Ox}}{M_0}; \quad \cos(\bar{M}_0, \hat{Oy}) = \frac{M_{Oy}}{M_0}; \quad \cos(\bar{M}_0, \hat{Oz}) = \frac{M_{Oz}}{M_0}. \quad (6.7)$$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari

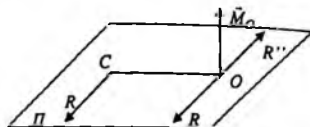
Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirilganda quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1. $R=0, M_0 \neq 0$. Bu holda kuchlar sistemasi momenti keltirish markaziga nisbatan bosh momentga teng bo'lgan juftga keltiriladi. Juft momenti moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaganligi uchun bosh moment ham keltirish markazining olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

2. $R \neq 0, M_0 = 0$. Bu holda kuchlar sistemasi, ta'sir chizg'i keltirish markazidan o'tuvchi bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

3. $R \neq 0, M_0 \neq 0$ va $\bar{M}_0 \perp \bar{R}$. Bu holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi, ta'sir chizig'i keltirish markazidan o'tmaydigan bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan $\bar{R}$ va $\bar{M}_0$ fazoda ixtiyoriy joylashgan $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n)$ kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momenti bo'lsin va $\bar{M}_0 \perp \bar{R}$ (6.7-rasm). Bosh

moment $\vec{M}_O$ ni $R=R'=R''$ bo'lgan (R, R') juft bilan almashtiramiz. Bu juftning biror kuchini O nuqtaga qo'yib, R'' kuchga qarama-qarshi qilib olamiz.

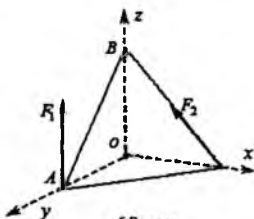


6.7-rasm

Kuchlar sistemasi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{R}, \vec{R}', \dots, \vec{R})$. Biroq, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow \vec{R}$ bo'lgani uchun $\vec{R}$ kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lib, C nuqtaga qo'yiladi. O nuqtadan C nuqtagacha bo'lgan masofa (juftning yelkasi) quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$OC = \frac{M_O}{R}. \quad (6.8)$$

6.1-masala. 6.8-rasmda tasvirlangan tetraedrning qirralari $OA=OB=OD=5m$. Tetraedrga qiymatlari $F_1=2N$ va $F_2=8,6N$ kuchlar qo'yilgan. $F_1 \parallel Oz$ bo'lsa, shu kuchlar sistemasining bosh vektorini hisoblang.



6.8-rasm

Yechish: Bosh vektorni hisoblash uchun uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

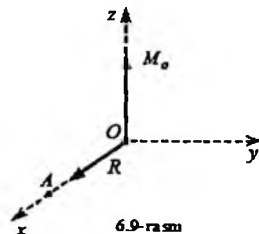
$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y}, \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z}, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{aligned} R_x &= 0 + 0 = 0, \\ R_y &= 0 - F_2 \cdot \cos 45^\circ = -6,08 N, \\ R_z &= F_1 + F_2 \cdot \sin 45^\circ = 8,08 N, \\ R &= \sqrt{(-6,08)^2 + 8,08^2} = 10,1 N. \end{aligned}$$

Javob: $R=10,1 N$.

6.2-masala. 6.9-rasmda tasvirlangani kabi, O keltirish markazida bosh vektor, $R=5N$ va bosh moment, $M_O=25N \cdot m$



6.9-rasm

berilgan. $OA=1m$ masofada joylashgan A nuqtani keltirish markazi deb, bosh momentning miqdorini aniqlang.

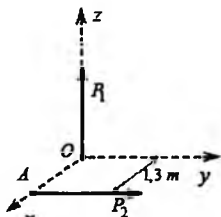
Yechish: Bizga ma'lumki, keltirish markazini o'zgartirish natijasida bosh momentning qiymati, oldingi bosh moment bilan bosh vektorning keyingi tanlangan nuqtaga nisbatan momentlarining yig'indisiga teng. Ya'ni:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{M}_A(\vec{R}).$$

Masala sharti va chizmaga asosan, A nuqta R bosh vektorning ta'sir chizig'ida joylashgani uchun $M_A(\vec{R})=0$ bo'ladi, bundan $M_A = M_O = 25N \cdot m$ ekanligi kelib chiqadi.

Javob: $M_A = 25N \cdot m$.

6.3-masala. 6.10-rasmda tasvirlangani kabi, Oz o'qi bo'ylab yo'nalgan $P_1=8N$ va Oy o'qiga parallel yo'nalgan $P_2=12N$ kuchlar sistemasi kanonik holga keltirilsin va shu kuchlar bosh vektorining miqdori, R hamda markaziy vint o'qida olingan ixtiyoriy nuqtaga nisbatan bosh momentning miqdori, M aniqlansin. Markaziy vint o'qining koordinata o'qlari bilan hosil qilgan α , β va γ burchaklari aniqlansin. Bu yerda $OA=1,3m$ deb hisoblansin.



6.10-rasm

Yechish: 6.10-rasmdan foydalanib, berilgan kuchlarni koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz va bosh vektorni hisoblaymiz:

$$R_x = 0, R_y = P_2, R_z = P_1.$$

Demak,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{64 + 144} N = 14,4 N.$$

$$R \neq 0.$$

Kuchlarning har bir o'qqa nisbatan momentlarini hisoblaymiz:

$$M_x = 0, M_y = 0, M_z = P \cdot AO.$$

Demak, $M_O \neq 0$.

Ularning skalyar ko'paytmasi:

$$(\vec{R} \cdot \vec{M}_O) = R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z = P_1 \cdot P_2 \cdot AO = 124,8 \neq 0.$$

Demak, bosh vektor va bosh moment bir-biriga perpendikulyar emas.

$$\text{Bosh moment: } M_O = \frac{124,8}{14,4} = 8,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Bosh vektor, bosh moment va ularning skalyar ko'paytmasi farqli bo'lgan holatda kuchlar sistemasi dinamik vintga keltiriladi. Markaziy vint o'qining koordinata o'qlari bilan hosil qilgan α , β va γ burchaklarini aniqlaymiz.

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} \text{ ekanligini e'tiborga olsak,}$$

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos \beta = \frac{12}{14,4} = 0,83, \quad \cos \gamma = \frac{8}{14,4} = 0,55.$$

Demak, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 33,7^\circ$, $\gamma = 56,3^\circ$.

Javob: $M_O = 8,6 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 33,7^\circ$, $\gamma = 56,3^\circ$.

Nazorat savollari

1. Fazodagi kuchlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
3. Fazoda kuchlar teng ta'sir etuvchisining momentiga oid Varin'on teoremasini ayting.
4. Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasi qanday ifodalanadi?
5. Kuch vektorini o'z o'ziga parallel ko'chirish uchun nima qilish zarur?
6. Kuchni o'ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishga oid Puanso lemmasini ayting.
7. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori qanday aniqlanadi?
8. Bosh vektor bilan teng ta'sir etuvchi vektorning farqini aytib bering?
9. Qaysi holda bosh vektor teng ta'sir etuvchi vektor bo'lishi mumkin?

10. Agar bosh vektor nolga teng bo'lsa, bu nimani anglatadi?

11. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh momenti qanday aniqlanadi?

12. Agar bosh moment nolga teng bo'lsa bu nimani anglatadi?

7. FAZODAGI KUCHLAR SISTEMASINING MUVOZANAT SHARTLARI

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Agar fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R}$ va bosh momenti $\vec{M}_O$ nolga teng bo'lsa, kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi:

$$\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0. \quad (7.1)$$

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi:

Teorema. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun bu kuchlarning geometrik yig'indisi va ixtiyoriy markazga nisbatan tashkil etuvchi kuchlar momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bolishi zarur va yetarli:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k) \quad (7.2)$$

Fazodagi kuchlar sistemasi uchun (7.2) ifoda muvozanatning zaruriy va yetarli shartlaridir. Agar (7.3) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (7.3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \sum m_z(\vec{F}_k) = 0. \quad (7.4)$$

Agar (7.3) va (7.4) tengliklar *fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari* deyiladi. Bu tengliklarda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etsa u holda bu tenglamalardan noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari aniqlanadi.

Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Berilgan kuchlar sistemasi Oz o'qiga parallel bo'lsin. U holda bu kuchlar sistemasining Ox va Oy o'qlaridagi proyeksiyalari va Oz o'qiga nisbatan momentlari 0 ga teng, shuning uchun (7.4) va (7.5) tenglamalar sistemasidan faqat quyidagi tenglamalar qoladi:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0. \quad (7.5)$$

Ushbu tenglamalar fazoda *parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari* deyiladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$\vec{R}' = 0 \quad \text{va} \quad M_O = 0. \quad (7.6)$$

Bosh vektor $\vec{R}'$ va bosh moment M_O quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}, \quad M_O = \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k).$$

1. Muvozanat shartining asosiy ko'rinishi

Ma'lumki, agar berilgan ixtiyoriy yo'nalgan kuchlar sistemasi bir tekislikda yotsa, ular jismni ikkita o'q bo'yicha ilgarilanma, (ya'ni Ox va Oy o'qlari bo'yicha ilgarilanma) hamda biror nuqta (masalan O nuqta) atrofida aylanma harakat qildirishi mumkin. Ya'ni, agar $\vec{R}' = 0$ va $M_O = 0$ bo'lsa, u holda muvozanat tenglamasining asosiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (7.7)$$

Ya'ni, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi hamda kuchlarning ta'sir tekisligidagi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan olingan momentlarining

algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli. Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalar yechishda (6.7) da noma'lum reaksiya kuchlari ham ishtirok etadi. Ko'pgina masalalar ushbu tenglamalar sistemasi orqali yechiladi.

Ba'zi hollarda yuqoridagi tenglamalar sistemasi orqali masalalar yechilganda ayrim noqulayliklarga duch kelishimiz mumkin. Shunday hollarda boshqa ko'rinishdagi quyidagi ikki xil turdagi tenglamalar sistemasi tuziladi.

2. Muvozanat shartining ikkinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun jismga qo'yilgan barcha aktiv kuchlarning va reaksiya kuchlarining ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi hamda AB kesmaga perpendikulyar bo'lmagan Ox o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k), \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k), \quad \alpha \neq 90^\circ. \quad (7.8)$$

3. Muvozanat shartining uchinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun jismga qo'yilgan barcha aktiv kuchlarning va reaksiya kuchlarining bir to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta, A , B va C nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (7.9)$$

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, masalalarni yechganimizda har doim muvozanat tenglamalarining birinchi shakli, (7.7) formuladan foydalanish ma'qulroq, chunki unga hech qanday cheklanishlar qo'yilmagan. Lekin, ayrim hollarda (7.8) va (7.9) shartlardan foydalanish katta afzalliklarga olib kelishi mumkin.

Juft kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Juft kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun juft kuch momentlarining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indilari nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (7.10)$$

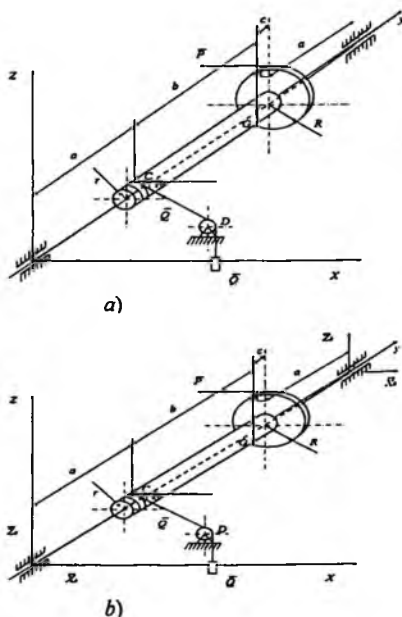
Statik aniq va statik noaniq masalalar

Berilgan masalada noma'lum reaksiyalar soni statikaning muvozanat tenglamalari sonidan ortiq bo'lmasa, bunday masalaga *statik aniq* masala deyiladi. Noma'lum reaksiyalar soni statikaning muvozanat tenglamalari sonidan ortiq bo'lsa, *statik noaniq* masala deyiladi.

Odatda nazariy mexanikada statik aniq masalalar yechiladi. Statik noaniq masalalarni yechish usullari materiallar qarshiligi va qurilish mexanikasi kursida batafsil o'rganiladi.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi qattiq jismning tayanch reaksiya kuchlarini aniqlashga doir ayrim masalalarni ko'rib chiqamiz. Masalaning ma'nosi fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi qattiq jismning muvozanat holatini aniqlashdan iborat.

7.1-masala. Fazoda mahkamlangan AB nuqtalardan o'tuvchi o'qda joylashgan g'altak yordamida yukni tekis ko'tarish mexanizmi berilgan (7.1-rasm). Bunda og'irligi $G=20\text{ kN}$ bo'lgan g'altakni harakatga keltiradigan P kuch yordamida g'altakni uchiga o'ralgan tross vositasida D blok orqali o'tkazilgan og'irligi $Q=2\text{ kN}$ bo'lgan yuk tekis ko'tariladi. Masofalar: koordinata boshidan, ya'ni A nuqtadan g'altakgacha bo'lgan masofa, $a=20\text{ sm}$, g'altakni uchidan uning og'irlik markazigacha bo'lgan masofa $b=30\text{ sm}$, g'altakni og'irlik markazidan uning



7.1-rasm

oxirigacha bo'lgan masofa, $c=10\text{ sm}$, g'altakning radiuslari, $r=5\text{ sm}$ va $R=15\text{ sm}$. A va B nuqtalardagi tayanch reaksiya kuchlari va g'altakni harakatga keltiruvchi P kuch miqdori aniqlansin.

Yechish: $Q=2\text{ kN}$, $G=20\text{ kN}$, $a=20\text{ sm}$, $b=30\text{ sm}$, $c=10\text{ sm}$, $R=15\text{ sm}$, $r=5\text{ sm}$. P, X_A, Z_A, X_B, Z_B - ?

Berilgan konstruksiyani bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Bunda A va B nuqtalarning har birida ikkitadan X_A, Z_A va X_B, Z_B reaksiya kuchlari paydo bo'ladi. D blokda ishqlanishni hisobga olmaganligimiz sababli, trossning taranglik kuchi Q yukni og'irligiga teng bo'ladi.

Sistema uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz, buning uchun biz fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan foydalanamiz, ya'ni uchta koordinata o'qlariga nisbatan barcha kuchlarning proyeksiyalari yig'indisini 0 ga tenglab olamiz va barcha kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan kuch momentlari yig'indisini 0 ga tenglaymiz:

$$\sum F_{kx} = 0: X_A + X_B - P + Q \cos 45^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0: 0 = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0: Z_A + Z_B - Q \sin 45^\circ - G = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0: -Q \sin 45^\circ \cdot a - G(a+b) + Z_B(2a+b+c) = 0, \quad (4)$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0: Q \cdot r - P \cdot R = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = 0: -Q \cos 45^\circ \cdot a + P \cdot (a+b+c) - X_B \cdot (2a+b+c) = 0. \quad (6)$$

Tuzilgan muvozanat tenglamalaridan foydalanib, noma'lum reaksiya kuchlarini va g'altakni harakatga keltiruvchi P kuchni aniqlaymiz:

(5) tenglamadan:

$$P = \frac{Q \cdot 2}{R} = 0,6\text{ kN}.$$

(6) tenglamadan:

$$X_B = \frac{P \cdot (a+b+c) - Q \cos 45^\circ \cdot a}{2a+b+c} = 0,1\text{ kN}.$$

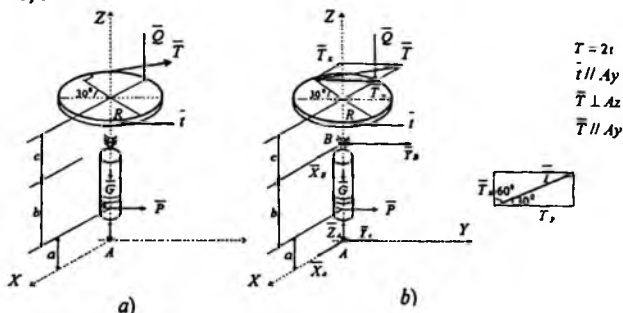
(4) tenglamadan:

$$Z_B = \frac{Q \cos 45^\circ \cdot a + G \cdot (a+b)}{2a+b+c} = 12,85 \text{ kN}.$$

$$(3) \text{ tenglamadan: } Z_A = -Z_B + Q \cos 45^\circ + G = 8,55 \text{ kN}.$$

$$(1) \text{ tenglamadan: } X_A = -X_B + P - Q \cos 45^\circ = -0,9 \text{ kN}.$$

Javob: $X_A = -0,9 \text{ kN}$, $Z_A = 8,55 \text{ kN}$, $Z_B = 12,85 \text{ kN}$, $X_B = 0,1 \text{ kN}$, $P = 0,6 \text{ kN}$.



7.2-rasm

7.2-masala. 7.2-rasmda ko'rsatilgan mexanik sistema muvozanat holatida turibdi, sistemadagi A va B tayanchlardagi reaksiya kuchlari va noma'lum P kuch aniqlansin. Bunda barabanga ta'sir qilayotgan kuch, $Q = 4 \text{ kN}$ ga teng, yetaklovchi tasmadagi tortishish kuchi, $T = 6 \text{ kN}$, yetaklanuvchi tasmadagi tortishish kuchi, $t = 3 \text{ kN}$ ga teng, sistemaning og'irlik kuchi, $G = 3 \text{ kN}$ bo'lib, masofalar esa quyidagicha: $a = 20 \text{ sm}$ – koordinata boshidan P kuch qo'yilgan nuqttagacha bo'lgan masofa, $b = 40 \text{ sm}$ – P kuch qo'yilgan nuqtadan B tayanchgacha bo'lgan masofa, $c = 15 \text{ sm}$ – B tayanchdan barabangacha bo'lgan masofa, $R = 20 \text{ sm}$ va $r = 10 \text{ sm}$ esa baraban va g'altakning radiuslari.

Yechish: $Q = 4 \text{ kN}$, $T = 6 \text{ kN}$, $G = 3 \text{ kN}$, $t = 3 \text{ kN}$, $a = 20 \text{ sm}$, $b = 40 \text{ sm}$, $c = 15 \text{ sm}$, $R = 20 \text{ sm}$, $r = 10 \text{ sm}$, P , X_A , Z_A , X_B , Z_B –?

Berilgan mexanik sistemani bog'lanishlardan ozod qilib, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz. Bunda A va B nuqtalarning har birida X_A , Z_A va X_B , Z_B reaksiya kuchlari paydo bo'ladi.

Sistema uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz, buning uchun biz fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan foydalanamiz, ya'ni uchta koordinata o'qlariga nisbatan barcha kuchlarning proyeksiyalari yig'indisini 0 ga tenglab olamiz va barcha kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan kuch momentlari yig'indisini 0 ga tenglab olamiz.

$$1) \sum X_i = 0: -T \cos 60^\circ + X_B + X_A = 0;$$

$$2) \sum Y_i = 0: T \cos 30^\circ + Y_B + Y_A + P + t = 0;$$

$$3) \sum Z_i = 0: Z_A - G - Q = 0;$$

$$4) \sum M_x(F_i) = 0:$$

$$-P \cdot a - Y_B(a+b) - t \cdot (a+b+c) - T \cos 30^\circ \cdot (a+b+c) - Q \cdot R = 0;$$

$$5) \sum M_y(F_i) = 0: X_B(a+b) + Q \cdot R - T \cos 60^\circ \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$6) \sum M_z(F_i) = 0: t \cdot R - T \cdot R + P \cdot r = 0.$$

Tuzilgan muvozanat tenglamalaridan foydalanib, noma'lum reaksiya kuchlarini va g'altakni harakatga keltiruvchi P kuchni aniqlaymiz.

$$6\text{-tenglamadan: } P = \frac{1}{r}(T \cdot R - t \cdot R) = 6 \text{ kN};$$

$$5\text{-tenglamadan: } X_B = (T \cos 60^\circ \cdot (a+b+c) - Q \cdot R) = 2,42 \text{ kN};$$

$$4\text{-tenglamadan:}$$

$$Y_B = (-P \cdot a - t \cdot (a+b+c) - T \cos 30^\circ \cdot (a+b+c) - Q \cdot R) \frac{1}{a+b} = -13,58 \text{ kN};$$

$$3\text{-tenglamadan: } Z_A = G + Q = 7 \text{ kN};$$

$$2\text{-tenglamadan: } Y_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T - Y_B - P - t = -0,62 \text{ kN}.$$

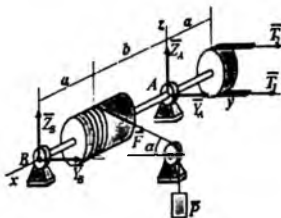
$$1\text{-tenglamadan: } X_A = T \cos 60^\circ - X_B = 0,58 \text{ kN}.$$

$$\text{Javob: } P = 6 \text{ kN}, \quad X_A = 0,58 \text{ kN},$$

$$X_B = 2,42 \text{ kN}, \quad Y_A = -0,62 \text{ kN},$$

$$Y_B = -13,58 \text{ kN}, \quad Z_A = 7 \text{ kN}.$$

7.3-masala. 7.3-rasmda A va B podshipniklar orqali gorizontol holatda val o'rnatilgan. Ushbu valga radiuslari, $r_1 = 20 \text{ sm}$, $r_2 = 15 \text{ sm}$ bo'lgan ikkita shkiv mahkamlangan. Ikkinchi shkivga arqon o'ral-



7.3-rasm

gan bo'lib, uning yordamida og'irligi, $P=180\text{ kN}$ yuk yuqoriga ko'tarilmoqda. Valning og'irligini hisobga olmagan holda, A va B podshipniklardagi tayanch reaksiyalarini hamda tasmaning T_1 tortilish kuchi aniqlansin. Valning o'lchovlari: $a=40\text{ sm}$, $b=60\text{ sm}$, $a=30\text{ sm}$. Tasmaning tortilish kuchlari, $T_1=T_2$ ga teng deb qabul qilinsin.

Yechish: Bu masala fazoviy kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalari orqali yechiladi.

Bog'lanishlar aksiomasiga asosan, valga aktiv va reaksiya kuchlarini vektor shaklda qo'yib, A va B tayanchlarni tashlab yuboramiz. Valni erkin jism deb faraz qilib, unga qo'yilgan kuchlar ta'sirida muvozanat holatini saqlamoqda deb qabul qilamiz. Shakldan ko'rinib turibdiki, barcha kuchlar Oyz tekisligida joylashgan. Demak, ularning Ox o'qiga proyeksiyalari 0 ga teng.

Muvozanat tenglamalarini tuzish uchun valga qo'yilgan barcha kuchlarning proyeksiyalari va ularning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini jadval ko'rinishida keltiramiz.

4-jadval

$\vec{F}_k$	$\vec{F}$	$\vec{T}_1$	$\vec{T}_2$	$\vec{R}_A$	$\vec{R}_B$
F_{ky}	$F \cdot \cos \alpha$	T_1	T_2	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-F \cdot \sin \alpha$	0	0	Z_A	Z_B
$m_x(F_k)$	$-F \cdot r_2$	$T_1 \cdot r_1$	$-T_2 \cdot r_1$	0	0
$m_y(F_k)$	$F \cdot b \cdot \cos \alpha$	0	0	0	$-Z_B \cdot (a+b)$
$m_z(F_k)$	$F \cdot b \cdot \cos \alpha$	$-T_1 \cdot a$	$-T_2 \cdot a$	0	$Y_B \cdot (a+b)$

$P=F$ ekanligini e'tiborga olgan holda quyidagi muvozanat tenglamalarini yozamiz:

$$F \cdot \cos \alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0, \quad (1)$$

$$-F \cdot \sin \alpha + Z_A + Z_B = 0, \quad (2)$$

$$-r \cdot F + r_1 \cdot T_1 - r_1 \cdot T_2 = 0, \quad (3)$$

$$F \cdot b \cdot \sin \alpha - (a+b) \cdot Z_B = 0, \quad (4)$$

$$F \cdot b \cdot \cos \alpha - a \cdot T_1 - a \cdot T_2 + (a+b) Y_B = 0. \quad (5)$$

Bu tenglamalar sistemasida 5 ta noma'lumlar mavjud va ularni aniqlaymiz. $T_1 = T_2$ ekanligini e'tiborga olgan holda yozamiz:

$$(3) \text{ tenglamadan, } T_2 = \frac{r_2 \cdot F}{r_1} = 135 \text{ kN.}$$

$$(4) \text{ tenglamadan } Z_B = \frac{b \cdot F}{a+b} \cdot \sin \alpha = 54 \text{ kN.}$$

$$(5) \text{ tenglamadan } Y_B = \frac{3 \cdot a \cdot T_2 - b \cdot F \cdot \cos \alpha}{a+b} = 69 \text{ kN.}$$

$$(1) \text{ tenglamadan, } Y_A = -F \cdot \cos \alpha - 3 \cdot T_2 - Y_B = -630 \text{ kN.}$$

$$(2) \text{ tenglamadan, } Z_A = F \cdot \sin \alpha - Z_B = 36 \text{ kN.}$$

Demak,

$$T_1 = 270 \text{ kN, } Y_A = -630 \text{ kN, } Z_A = 36 \text{ kN, } Y_B = 69 \text{ kN, } Z_B = 54 \text{ kN.}$$

Agar A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlarning to'la qiymatini aniqlash zarur bo'lsa, Pifagor teoremasidan foydalanib aniqlanadi:

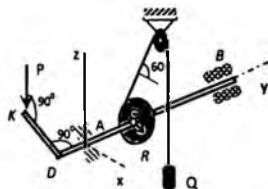
$$R_A = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-630)^2 + (36)^2} \text{ kN} = 631 \text{ kN,}$$

$$R_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(69)^2 + (54)^2} \text{ kN} = 87,6 \text{ kN.}$$

$$\text{Javob: } T_1 = 270 \text{ kN, } R_A = 631 \text{ kN, } R_B = 87,6 \text{ kN.}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

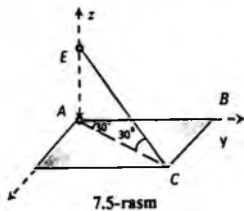
1-masala. 7.4-rasmda sxema tarzida ko'rsatilgan chig'iriq yordamida $Q=1 \text{ kN}$ yuk ushlab turiladi. Baraban radiusi $R=5 \text{ sm}$. Dasta uzunligi $KD=40 \text{ sm}$, $DA=30 \text{ sm}$, $AC=40 \text{ sm}$, $CB=60 \text{ sm}$. Arqon barabandan urinma bo'ylab



7.4-rasm

gorizontga 60° burchak ostida tushadi. KD dastaning gorizont holatida dastaga tushadigan P bosim hamda A va B tayanchlardagi reaksiyalari aniqlansin.

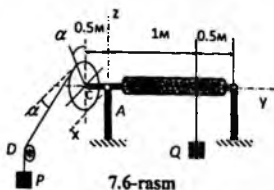
2-masala. Og'irligi 200 N bo'lgan bir jinsli to'g'ri burchakli romb A sharli sharnir va B halqa yordami



7.5-rasm

bilan devorga biriktirilgan bo'lib, uni CE arqon gorizontal holda ushlab turadi (7.5-rasm). Arqon devorning A bilan bir vertikalidagi E nuqtasiga qoqilgan mixga va rombning C nuqtasiga bog'langan. $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$. Arqondagi tortilish kuchi va tayanchlardagi reaksiyalar aniqlansin.

3-masala. Chig'irining A valiga Q yukni ushlab turuvchi arqon o'ralgan. Valga o'rnatilgan C g'ildirakning radiusi val radiusidan olti marta katta. Boshqa o'lchovlar 7.6-rasmda ko'rsatilgan. G'ildirak aylanasi arqon o'ralgan bo'lib, uni og'irligi $60N$



bo'lgan P yuk tortib turadi, arqon gorizontga $\alpha = 30^\circ$ burchak ostida og'gan urinma bo'ylab g'ildirakdan tushadi. Valning og'irligini va D blokda ishqalanishni hisobga olmay, chig'irini muvozanatga keltiradigan Q yukning og'irligini hamda A va B podshipniklarning reaksiyalari aniqlansin.

4-masala. Agar kuchlar sistemasi koordinata boshiga nisbatan $\vec{R} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ bosh vektorga va $\vec{M}_O = 8\vec{j} + 10\vec{k}$ bosh momentga ega bo'lsa, bu kuchlar sistemasini bitta teng ta'sir etuvchiga almashtirsa bo'ladimi?

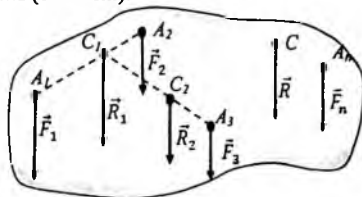
Nazorat savollari

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini yozib bering.
2. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini yozib bering.
3. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini yozib bering.
4. Juft kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini yozib bering.
5. Statik aniq masala deb qanday masalaga aytiladi?
6. Statik noaniq masala deb qanday masalaga aytiladi?

8. OG'IRLIK MARKAZI

Parallel kuchlarni qo'shish, parallel kuchlar markazi

Bir tekislikda yotmaydigan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ parallel kuchlar sistemasini ko'ramiz (8.1-rasm).



8.1-rasm

Kuchlarni ketma-ket qo'shamiz va teng ta'sir etuvchisini topamiz:

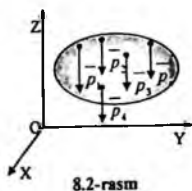
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (8.1)$$

Teng ta'sir etuvchining qo'yilish nuqtasi C nuqta quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n F_k}. \quad (8.2)$$

Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar

Jismni elementar bo'lakchalarga bo'lib, har bir bo'lakka ularning og'irlik kuchlarini qo'yamiz. U holda parallel kuchlar sistemasini hosil qilamiz (8.2-rasm). Parallel og'irlik kuchlari sistemasining markazi, jismning og'irlik markazi bo'ladi. Jismning og'irlik markazining koordinatalari (8.2) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:



8.2-rasm

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{\sum_{k=1}^n P_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{\sum_{k=1}^n P_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (8.3)$$

Bunda $P = \sum_{k=1}^n P_k$ – jismning og'irligi. Bir jinsli jism uchun quyidagi tenglik o'rinni:

$$P_k = \gamma \Delta V_k, \quad P = \gamma V.$$

Bunda ΔV_k – elementar bo'lakchani hajmi, V – jismning to'la hajmi, γ – birlik hajmining og'irligi.

P_k va P larning qiymatlarini (8.2) formulalarga qo'yib quyidagilarni olamiz:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta V_k}{V}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta V_k}{V}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k}{V}. \quad (8.4)$$

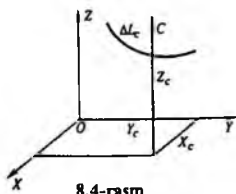
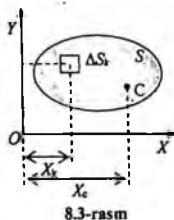
Agar jism yupqa bir jinsli plastinka bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi (8.3-rasm):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta S_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta S_k}{S}. \quad (8.5)$$

Bunda S_k – elementar bo'lakchani yuzasi, S – butun plastinka yuzasi.

Agar jism bir jinsli chiziqdan (8.4-rasm) iborat bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta L_k}{L}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta L_k}{L}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta L_k}{L}. \quad (8.6)$$



Og'irlik markazini aniqlash usullari

1. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi

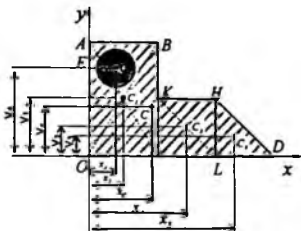
Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi o'qi yoki markaziga ega bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi mos ravishda shu tekislikda, o'q yoki markazda yotadi.

2. Bo'laklarga ajratish (to'ldirish) usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni og'irlik markazlari ma'lum bo'lgan chekli sonli geometrik shakllarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda uning og'irlik markazining koordinatalari (8.2), (8.3), (8.4) formulalar yordamida aniqlanadi. Agar qattiq jismda teshiklar mavjud bo'lsa, uning og'irlik markazini aniqlashda jismni to'liq deb qaraladi, teshiklar va yetishmovchi yuza yoki hajmga tegishli hadlar manfiy ishoralar bilan olinadi. Bu usulni manfiy yuzalar (hajmlar) usuli deb ataladi.

8.1-masala. 8.5-rasmda tasvirlangan bir jinsli yupqa plastinka og'irlik markazining koordinatalarini aniqlang.

Yechish: Plastinkani to'rtta bo'laklarga ajratamiz. Markazi $C_1(x_1, y_1)$ nuqtada bo'lgan to'rtburchak, markazi $C_2(x_2, y_2)$



8.5-rasm

nuqtada bo'lgan to'rtburchak, markazi $C_3(x_3, y_3)$ nuqtada bo'lgan uchburchak va markazi $C_4(x_4, y_4)$ nuqtada bo'lgan doira. C_1, C_2, C_3, C_4 nuqtalarning koordinatalari ma'lum o'lchovlar yordamida aniqlanadi. Bo'lakchalarning yuzalarini S_1, S_2, S_3, S_4 lar bilan belgilaymiz va ular oson aniqlanadi. Quyidagi formuladan foydalanib, og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 + S_4 \cdot x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ y_c &= \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + S_4 \cdot y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \end{aligned} \right\}$$

Aytaylik, quyidagi o'lchovlar o'rinli bo'lsin:

$$OA = 30 \text{ sm}, OD = 36 \text{ sm}, OE = 24 \text{ sm}, AB = 10 \text{ sm}, BK = 20 \text{ sm},$$

$$x_1 = 5 \text{ sm}, y_1 = 15 \text{ sm}, x_2 = 17 \text{ sm}, y_2 = 5 \text{ sm}, x_3 = 28 \text{ sm}, y_3 = \frac{10}{3} \text{ sm},$$

$$x_4 = 5 \text{ sm}, y_4 = 24 \text{ sm}, r = 3 \text{ sm}.$$

Agar $S_1 = 300 \text{ sm}^2$, $S_2 = 140 \text{ sm}^2$, $S_3 = 60 \text{ sm}^2$, $S_4 = 9\pi \text{ sm}^2$, ekanligi ma'lum bo'lsa, quyidagilarni aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{300 \cdot 5 + 140 \cdot 17 + 60 \cdot 28 - 9\pi \cdot 5}{300 + 140 + 60 - 9\pi} \text{ sm} = \frac{5418,7}{471,7} \text{ sm} \approx 11,5 \text{ sm},$$

$$y_c = \frac{300 \cdot 15 + 140 \cdot 5 + 60 \cdot \frac{10}{3} \cdot 28 - 9\pi \cdot 24}{300 + 140 + 60 - 9\pi} \text{ sm} = \frac{4721}{471,7} \text{ sm} \approx 10 \text{ sm}.$$

3. Integrallash usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni chekli sondagi sodda geometrik shakllarga ajratishning iloji bo'lmasa, u holda og'irlik markazi koordinatalarini aniqlash uchun keltirilgan yuqoridagi formulalarda bo'lakchalar soni, n cheksizlikka intilganda, ularning o'lchovlari ham nolga intiladi. Limitga o'tish orqali hajm og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} x dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} y dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_{(v)} z dV.$$

Sirt og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} y dS; \quad z_c = \frac{1}{S} \int_{(s)} z dS.$$

bunda S – sirt yuzasi.

Agar sirt tekis shakl bo'lsa va Oxy tekislik shu shakl tekisligida olinsa, yuqoridagi formulalar quyidagicha yoziladi:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{(x)} x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \int_{(y)} y dS.$$

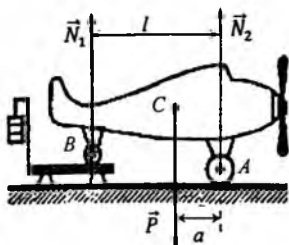
Ko'ndalang qirqim yuzalari o'zgarmas va bir jinsli moddadan iborat chiziqlarning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(l)} x dl; \quad y_c = \frac{1}{LS} \int_{(s)} y dl; \quad z_c = \frac{1}{L} \int_{(l)} z dl.$$

4. Tajriba usuli

Murakkab shakldagi bir jinsli jismlarning og'irlik markazi tajriba usulida aniqlanadi.

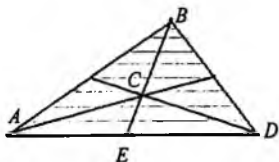
Bu usullardan biri ipga osish usuli: Jismning turli nuqtalaridan ipga osamiz. Ipning yo'nalishini davom ettirib og'irlik kuchlarining ta'sir chiziqlarini o'tkazamiz. Ushbu chiziqlarning kesishish nuqtasi og'irlik markazini beradi.



8.6-rasm

Ikkinchi usul tarozida tortish usuli: jismni A va B nuqtalaridan taroziga qo'yib, jismning berayotgan bosimini aniqlaymiz (8.6-rasm). S nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzib, a masofani aniqlaymiz: $N_2 a - N_1 (l - a) = 0$.

Ba'zi jismlarning og'irlik markazini aniqlash

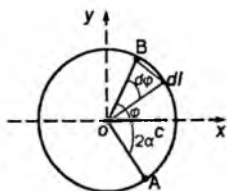


8.7-rasm

1. Uchburchak yuzasining og'irlik markazi

Uchburchak yuzasini og'irlik markazi, medianalarining kesishgan nuqtasida joylashadi (8.7-rasm). Geometriyadan ma'lumki: $CE = BE/3$.

2. Aylana qismi (yoyi) og'irlik markazi



8.8-rasm

Markaziy burchagi 2α bo'lgan R radiusli AB aylana yoyini olamiz (8.8-rasm). Aylana yoyi simmetriya o'qiga ega, Ox koordinata o'qidir. Teoremaga asosan yoyning og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotishi kerak. Ya'ni: $y_c = 0$.

x_c koordinata quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$x_c = \frac{1}{L_1} \int x dl.$$

Og'irlik markazining absissasi, x bo'lgan yoydan cheksiz kichik elementar dl bo'lakchani ajratib olamiz. U holda:

$$dl = R d\varphi, \quad x = R \cos \varphi, \quad L_1 = R\alpha.$$

φ bo'yicha integrallab, quyidagi natijani olamiz:

$$X_c = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \alpha d\varphi = \left(\frac{R}{2\alpha} \cdot \sin \varphi \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Demak,

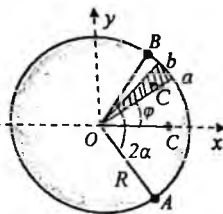
$$X_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Yarim aylana uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lganida, $X_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0,43R$.

3. Doira shakli sektor yuzaning og'irlik markazi

Ixtiyorimizda R radiusli va markaziy burchagi 2α bo'lgan doira sektor yuzi mavjud (8.9-rasm). Sektor yuzasining simmetriya o'qini Ox koordinata o'qi sifatida qabul qilib, $OC = x$ masofani quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$X_c = \frac{1}{S} \int x dS.$$



8.9-rasm

Markaziy burchagi $d\varphi$ bo'lgan cheksiz kichik Oab sektor yuzachani ajratamiz. Teng yonli uchburchak deb qaralgan bu elementar bo'lakchani og'irlik markazi C' nuqtada bo'lib, bu masofa quyidagiga teng: $OC' = \frac{2}{3}R$, bu C' markaz koordinatasi quyidagiga teng:

$$X = \frac{2}{3}R \cdot \cos \varphi.$$

$$\text{Yuzacha: } dS = \frac{1}{\alpha} R^2 \cdot d\varphi.$$

$$\text{Sektor yuzasi: } S = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = R^2 \cdot \alpha.$$

Yuqoridagi ifodalardan foydalanib, φ bo'yicha integrallab,

$$\text{quyidagini olamiz: } X_c = \frac{1}{R^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi = \left(\frac{R}{3\alpha} \cdot \sin \varphi \right) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

$$\text{Demak, } X_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

Sektor o'rnida yarim doira bo'lsa, $\alpha = \pi/2$ bo'lib, quyidagi natija kelib chiqadi:

$$X_c = \frac{4R}{3\alpha} = 0,2124R.$$

4. Balandligi H va asosining radiusi R bo'lgan to'g'ri doiraviy konus og'irlik markazi

Konusning simmetriya o'qini Oz koordinata o'qi sifatida olamiz. U holda $x_c = y_c = 0$.

z_c koordinata quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$z_c = \frac{1}{V} \int_V x dv.$$

Konus asosidan z masofada balandligi dz va radiusi r bo'lgan silindr ko'rinishdagi cheksiz kichik bir element hajmini ajratamiz (8.10-rasm). Bu element hajmi quyidagiga teng:

$$dV = \pi \cdot r^2 dz.$$

r radius OAB va O_1AB_1 uchburchaklarning o'xshashligidan aniqlanadi:

$$\frac{r}{R} = \frac{(H-z)}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-z).$$

Natijada quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$dV = \frac{\pi \cdot R^2}{H^2} (H-z)^2 dz.$$

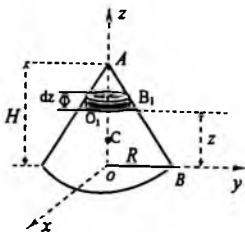
Konusning hajmi $V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 H$ ga teng bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$z_c = \frac{\int_0^H z \frac{\pi (H-z)^2 R^2}{H^2} dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{1}{4} H.$$

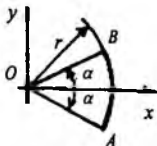
Demak: $z_c = \frac{1}{4} H$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Bir jinsli to'g'ri chiziqli AB sterjenning A va B nuqtalarining koordinatalari: $x_A = 12 \text{ sm}$ va $x_B = 62 \text{ sm}$ berilgan. Uning og'irlik markazi x_c (sm) koordinatasini



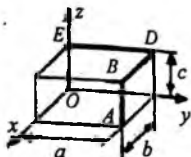
8.10-rasm



8.11-rasm

toping.

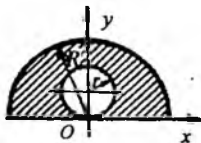
2-masala. Radiusi $r=12\text{ sm}$ bo'lgan AB yoy shaklidagi jismning C og'irlik markazining x_c koordinatasi aniqlansin (8.11-rasm). Yoyning burchagi, $\alpha=30^\circ$ deb hisoblansin.



8.12-rasm

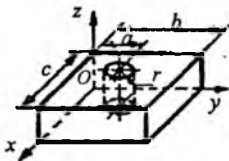
3-masala. O'lchamlari $a=b=1\text{ m}$ va $c=0,5\text{ m}$ bo'lgan $ABDE$ jismning og'irlik markazi koordinatalarini toping (8.12-rasm).

4-masala. Radiuslari $R=0,99\text{ m}$ va $r=0,33\text{ m}$ bo'lgan shtrixlangan shaklning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlang (8.13-rasm).



8.13-rasm

5-masala. O'lchamlari $r=0,2\text{ m}$, $a=0,6\text{ m}$, $b=1,6\text{ m}$ va $c=1,8\text{ m}$ bo'lgan bir jinsli jismning og'irlik markazi koordinatalarini aniqlang (8.14-rasm).



8.14-rasm

Nazorat savollari

1. Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?
2. Og'irlik markazini aniqlash formulalari qanday?
3. Hajmning og'irlik markazini aniqlash formulasini keltiring.
4. Yuzaning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Chiziqning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
6. Og'irlik markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?

II. KINEMATIKA

9. NUQTA KINEMATIKASI. HARAKAT QONUNINING BERILISH USULLARI. HARAKAT QONUNINING BERILISHIGA QARAB TEZLIK VA TEZLANISHLARNI ANIQLASH

Kinematika – nazariy mexanikaning bo‘limi bo‘lib, nuqta va absolyut qattiq jismning mexanik harakati faqat geometrik nuqtai-nazardan, ya’ni massalari va harakatni vujudga keltiruvchi sabablar(kuchlar)ga bog‘liqsiz ravishda o‘rganiladi.

Harakat deganda, tezligi yorug‘likning vakuumdagi tezligidan juda kichik bo‘lgan harakat tushuniladi (Yorug‘lik tezligi – elektromagnit to‘lqinlarining tarqalish tezligi, fizikaning asosiy doimiylaridan biri, har qanday fizik ta’sirlarning eng yuqori chegaraviy tarqalish tezligi, eng aniq qiymati $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$). Ixtiyoriy moddiy nuqta yoki jismning harakati hamda ma’lum vaqtdagi holati Nyuton mexanikasi qonunlari asosida o‘rganiladi. Yorug‘lik tezligiga yaqin yoki undan katta tezliklardagi jismlarning (yoki mikrozarralarning) harakat qonunlarini relyativistik mexanika o‘rganadi. Relyativistik mexanika Eynshteynning nisbiylik nazariyasiga asoslangan va u Nyuton mexanikasiga nisbatan keng qamrovli. Relyativistik mexanika Nyuton mexanikasining qonunlari va qoidalarini inkor qilmaydi, balki uning qo‘llanish chegarasini belgilab beradi. Xususiyl holda, yorug‘lik tezligidan kichik tezliklarda relyativistik mexanika qonunlari Nyuton mexanikasi qonunlaridan iborat bo‘ladi.

Harakat tushunchasi harakatlanayotgan jism hamda fazo va vaqt tushunchalari bilan bog‘liq. Jismlarning harakat qonunlarini o‘rganishda fazo va vaqt tushunchalarini aniq tasavvur qilish muhim ahamiyat kasb etadi. Jism o‘z harakati tufayli vaziyatini o‘zgartiradi. Bu o‘zgarish fazoda sodir bo‘ladi va ma’lum vaqt oralig‘ida amalga oshadi. Jism harakatini fazo va vaqtdan ajralgan holda tasavvur qilib bo‘lmaydi. Shuning uchun, jismning mavjudligi va uning harakati fazoda va ma’lum vaqt oralig‘ida sodir bo‘ladi deb qaraladi.

Fazo – bir vaqtda mavjud bo'lgan ob'ektlarning joylashish tartibini ifodalaydi.

Vaqt – sodir bo'layotgan hodisalarning (harakatning) qancha davom etishini ifodalaydi.

Nazariy mexanikada vaqt va fazo mutlaq deb qaraladi hamda ular bir-biriga bog'liq emas deb hisoblanadi. Shu bilan birga, vaqt bir sanoq sistemasining boshqa bir sanoq sistemasiga nisbatan harakatiga ham bog'liq emas, barcha sanoq sistemalari uchun vaqt bir xilda o'tadi deb hisoblanadi. Nazariy mexanikada mutlaq vaqt to'xtovsiz o'zgaradigan kattalik deb hisoblanadi. Vaqt bir o'lchamli va u orqaga qaytmaydi deb hisoblanadi. Vaqtni o'lchash uchun tabiatda uchraydigan davriy ravishda takrorlanib keluvchi hodisalardan yoki sun'iy ravishda hosil qilinadigan davriy takrorlanuvchi jarayonlardan foydalaniladi (masalan, Yerning o'z o'qi atrofida aylanishi yoki soat mayatnigining tebranishi va shu kabilar). Vaqtning o'lchov birligi soat (minut, sekund) hisoblanadi.

Nazariy mexanikada moddiy jismlarning harakati uch o'lchovli Yevklid fazosiga nisbatan tekshiriladi hamda fazoni mutlaq qo'zg'almas deb qaraladi.

Jismning mexanik harakati boshqa biror jism bilan birlashtirilgan hamda *sanoq sistemi* deb ataladigan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rganiladi. Sanoq sistemasini harakatlanayotgan jismga birlashtirilgan yoki qo'zg'almas deb qarash mumkin.

Sanoq sistemasiga nisbatan jismning harakatini o'rganishda shu jism nuqtalarining koordinatalari bilan birgalikda burchak koordinatalarini ham kiritish lozim bo'ladi. Nazariy mexanikada burchak koordinatalari uchun o'lchov birligi sifatida radian (*rad*), uzunlik o'lchov birligi sifatida esa metr (*m*) qabul qilingan.

Kinematikaning asosiy vazifasi tanlab olingan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini aniqlanish, harakatni kinematik xarakterlaydigan kattaliklar, ya'ni uning shu sistemaga nisbatan biror vaqt oralig'idagi trayektoriyasini hamda har ondagi tezlik va tezlanishlarini aniqlashdan iborat. Jismning harakatini kinematik usulda aniqlash texnikada turli mexanizm va mashinalar qismlarining harakatini o'rganish uchun nazariy asos

bo'lib xizmat qiladi. Kinematika ikki qismga bo'linadi: nuqta kinematikasi va qattiq jism kinematikasi. Qattiq jism kinematikasini o'rganish uchun nuqta kinematikasini bilish talab etiladi.

Nuqta kinematikasida qattiq jism nuqtalari harakatini o'rganish uchun asos bo'lgan moddiy nuqtalarning harakati o'rganiladi.

Nuqta harakatining berilishi deganda, ixtiyoriy vaqt davomida fazoda nuqtaning holatini aniqlash imkoniyatiga ega bo'lish tushuniladi (nuqtaning harakat qonuni yoki harakat tenglamasi).

Nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan chizgan uzluksiz chizig'i, yoki nuqtaning fazoda qoldirgan izi nuqtaning *trayektoriyasi* deyiladi. Agar nuqta trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, *to'g'ri chiziqli harakat*, trayektoriyasi egri chiziq bo'lsa, *egri chiziqli harakat* deyiladi.

Nuqta kinematikasida asosan quyidagi ikkita asosiy masala ko'riladi:

1. Berilgan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakatini matematik usulda aniqlash.

2. Nuqtaning berilgan harakat qonuniga ko'ra o'rganilayotgan harakatning barcha kinematik xarakteristika(trayektoriya, yo'l, ko'chish, tezlik, tezlanish va hokazo)larini aniqlash.

Ixtiyoriy t vaqt uchun nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan holatini aniqlash usuli ma'lum bo'lsa, shu sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakati aniqlangan deyiladi va nuqtaning harakatini aniqlovchi ifoda uning *harakat qonuni* yoki *harakat tenglamasi* deyiladi. Kinematikada nuqtaning harakat qonuni asosan uchta usulda aniqlanadi:

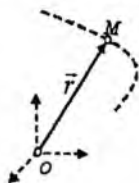
1. Nuqta harakatini aniqlashning vektor usuli (radius vektoring kattaligi va yo'nalishi beriladi).

Bu usulda M nuqtaning holati boshi biror qo'zg'almas markazda bo'lgan $\vec{r}(t)$ radius vektori bilan aniqlanadi. M nuqta qo'zg'almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatda bo'lsin. O va M nuqtalarni birlashtirib, M nuqtaning $\vec{r} = \overline{OM}$ radius vektorini hosil qilamiz. M nuqta harakatlanganda uning $\vec{r}$ radius

vektori vaqt o'tishi bilan miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarib boradi. Agar

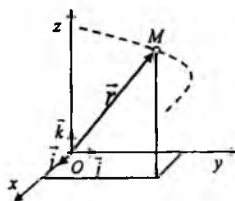
$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (9.1)$$

ma'lum bo'lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan vaqt uchun aniq bo'ladi. Bu ifoda nuqta harakatining *vektor ko'rinishidagi kinematik tenglamasi* deyiladi. Nuqta harakatining ushbu tarzda berilishi uning *vektor usulda ifodalanishi* deyiladi. Agar $\vec{r} = \text{const}$ bo'lsa, nuqta tinch holatda bo'ladi (9.1-rasm).



9.1-rasm

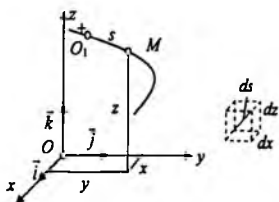
2. Nuqta harakatini aniqlashning koordinatalar usuli (nuqta holatining koordinatalari beriladi). Harakatlanayotgan M nuqtaning holatini to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan aniqlaymiz (9.2-rasm). Nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning koordinatlari o'zgaradi. M nuqtaning x , y , z koordinatalari vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo'ladi:



9.2-rasm

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Ta'kidlash lozimki, bu yerda $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ funksiyalar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalari hisoblanadi. Agar nuqta koordinatalari bilan t vaqt orasidagi munosabatlar berilgan bo'lsa, M nuqtaning fazoda ixtiyoriy paytdagi holatini aniqlash mumkin bo'ladi. Nuqtaning harakatini koordinatalar usulida ifodalashda uning ifodasi yuqoridagi munosabatlar orqali aniqlanadi. Dekart koordinatalaridagi tenglamalari deb ataluvchi tenglamalar nuqtaning holatini to'liq aniqlaydi. Bu tenglamalarni yechish orqali nuqta trayektoriyasining tenglamasi aniqlanadi.



9.3-rasm

3. Nuqta harakatini aniqlashning tabiiy usuli (nuqtaning harakat qonuni va trayektoriyasi beriladi). Harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi oldindan ma'lum bo'lsa, nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash qulay bo'ladi. $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan egri chiziqli

harakatdagi nuqta trayektoriyasining tenglamasini $f_1(x, y, z) = 0$ va $f_2(x, y, z) = 0$ sirtlarning kesishgan chizig'i sifatida qarash mumkin. Lekin, bu tenglamalar yordamida nuqtaning harakatini aniqlab bo'lmaydi. Chunki, vaqt o'tishi bilan ushbu trayektoriya bo'yicha nuqta turlicha qonuniyatga ko'ra harakat qilishi mumkin. Nuqtaning trayektoriya ustidagi holatini bir qiymatli aniqlash uchun harakatlanayotgan nuqta trayektoriyasining biror O_1 nuqtasini koordinata boshi deb olib, bu nuqtaga nisbatan yoy koordinatasini o'tkazamiz. O_1 nuqtadan bir tomonni musbat (+), ikkinchi tomonni manfiy (-) yo'nalish deb hisoblaymiz (9.3-rasm). Vaqt o'tishi bilan qo'zg'almas O_1 nuqtadan harakatlanayotgan nuqtagacha bo'lgan O_1M masofa o'zgaradi, ya'ni yoy koordinatasi vaqtning funksiyasidan iborat bo'ladi

$$s = s(t). \quad (9.3)$$

Bu munosabat nuqtaning trayektoriya bo'ylab *harakat qonunini* ifodalaydi va (t, s) tekisligida ushbu munosabatni ifodalovchi egri chiziqli nuqtaning harakat grafigi deyiladi.

Shunday qilib, nuqtaning tabiiy usuldagi harakat tenglamasi quyidagilardan iborat bo'ladi:

$$\begin{aligned} s &= s(t), \\ f(x, y, z) &= 0, \\ ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \end{aligned}$$

Ta'kidlash joizki, nuqtaning harakatini aniqlash usullari o'zaro ekvivalent va bir-biri bilan bog'langan.

- Vektor usuli va tabiiy usuli orasidagi munosabat:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

- Koordinatalar usuli va tabiiy usuli orasidagi munosabat:

$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Harakat trayektoriyasi tenglamasini hosil qilish uchun koordinatalar usulidagi harakat tenglamasidan vaqtni yo'qotish lozim:

$$x = x(t) \Rightarrow t = t(x),$$

$$y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x),$$

$$z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x).$$

Chunki, trayektoriya vaqtga bog'liq emas:

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x). \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar chiziqli sirtini ifodalaydi. Bu sirtlarning kesishish chizig'i nuqtaning harakat trayektoriyasini ifodalaydi.

Nuqta tezligi – nuqtaning fazodagi holatini qanchalik tez o'zgarishini xarakterlovchi vektor kattalik.

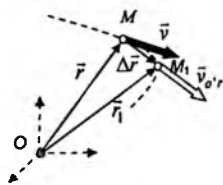
Nuqtaning tezligi

Tezlik – vaqt birligi ichida bosib o'tilgan yo'lni xarakterlovchi vektor kattalik hisoblanadi.

Nuqtaning tezligini aniqlash usullari:

Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezligini aniqlash.

M nuqta qo'zg'almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatda bo'lsin (9.4-rasm). O va M nuqtalami tutashtirib, M nuqtaning $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ radius vektorini hosil qilamiz. M nuqta harakatlanganda vaqt o'tishi bilan uning $\vec{r}$ radius vektori miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarib boradi. Agar $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ma'lum bo'lsa, nuqtaning fazodagi



9.4-rasm

holati istalgan vaqt uchun aniq bo'ladi. Bu ifoda nuqta harakatining *vektor ko'rinishidagi kinematik tenglamasi* deyiladi.

Nuqtaning t va $t_1 = t + \Delta t$ vaqtlardagi ikki holatini solishtiramiz (9.4-rasm):

$$t \Rightarrow \vec{r}, \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}.$$

Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik vektori:

$$\vec{v}_{o'r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Bundan Δt musbat skalyar qiymat bo'lgani uchun o'rtacha tezlik vektori $\overline{MM_1}$ ko'chish vektori bo'yicha yo'naladi.

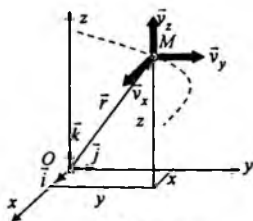
Nuqta o'rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan ondagi tezlik vektori deyiladi:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning *tezlik vektori* uning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezligini aniqlash



9.5-rasm

M nuqtaning radius vektori Dekart koordinatalari orqali quyidagicha ifodalanadi (9.5-rasm):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Tezlikni aniqlashning vektor formulasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \end{aligned}$$

Nuqta tezligining biror qo'zg'almas Dekart koordinata o'qidagi proyeksiyasi harakatlanuvchi nuqtaning shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, *tezlik moduli* va *tezlik yo'nalishi* quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v}.$$

Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezligini aniqlash. M nuqta berilgan trayektoriya bo'ylab, $s = s(t)$ qonuniyat asosida harakat-lansin (9.6-rasm). Radius vektorni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)].$$

Nuqtaning o'rtacha tezligi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$\vec{v}_{or} = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

U holda M nuqtaning berilgan ondagi tezligi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

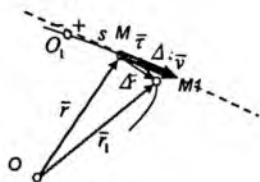
Bunda $\Delta s > 0$ bo'lsa, $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ vektor $\Delta \vec{r}$ bilan bir xil yo'naladi.

$\Delta \vec{r}$ nolga intilganda $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ vektorning yo'nalishi M nuqtada yoy koordinatasi ortadigan yo'nalishda trayektoriyaga o'tkazilgan urinmaga intiladi. Bu vektorning moduli limit holatida quyidagicha bo'ladi:

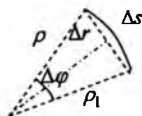
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Shunday qilib, radius vektordan yoy koordinatasi bo'yicha olingan hosila birlik bo'lib, trayektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi. Binobarin,

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}.$$



9.6-rasm



9.7-rasm

Natijada nuqtaning tezligi uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{r}.$$

$\frac{ds}{dt}$ hosila $\vec{v}$ tezlikning urinmadagi proyeksiyasi, v_r ni ifodalaydi va *tezlikning algebraik qiymati* deyiladi:

$$v_r = \frac{ds}{dt}.$$

v_r ning absolyut qiymati tezlikning moduliga teng bo'ladi:

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Nuqta tezligining moduli yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaning absolyut qiymatiga teng.

$\Delta s \rightarrow 0$ da: $\rho_1 \rightarrow \rho$ va $\Delta \varphi \rightarrow 0$,

ρ_1, ρ — egrilik radiusi, $\Delta \varphi$ — egrilik radiuslari orasidagi burchak, Δr — teng yonli uchburchakning asosi, Δs esa ρ radiusli yoy uzunligi.

Tezlik vektori quyidagi ifodaga teng bo'ladi:

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{r}.$$

Tezlik vektorining urinmadagi proyeksiyasi:

$$v_r = \dot{s}.$$

$\dot{s} > 0$ da tezlik vektori yoy koordinatasi o'sish tomoniga yo'nalgan bo'ladi, aks holda teskari tomonga yo'naladi.

9.1-masala. Moddiy nuqta harakati $x = 3t - 0,2 \sin(9,23t)$, $y = 0,325 - 0,2 \cos(9,23t)$ tenglamalar bilan berilgan (x, y — metrlar, t — sekundlar hisobida). Moddiy nuqtaning $t = 0,054\pi$ sekund bo'lgandagi tezligi aniqlansin.

Yechish: Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t - 0,2 \sin(9,23t)) = 3 - 0,2 \cdot 9,23 \cos(9,23t) = 3 - 1,846 \cos(9,23t),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0,325 - 0,2 \cos(9,23t)) = 0,2 \cdot 9,23 \sin(9,23t) = 1,846 \sin(9,23t).$$

$$t = 0,054\pi \text{ s da}$$

$$v_x = 3 - 1,846 \cdot \cos(9,23 \cdot 0,054\pi) = 3 \text{ m/s},$$

$$v_y = 1,846 \cdot \sin(9,23 \cdot 0,054\pi) = 1,846 \text{ m/s}.$$

Nuqta tezligining moduli: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$\text{Demak, } v = \sqrt{3^2 + 1,846^2} \text{ m/s} = 3,52 \text{ m/s}.$$

Javob: 3,52 m/s.

Nuqtaning tezlanishi

Nuqtaning tezlanishi – vaqt birligida nuqta tezligining o'zgarishini xarakterlovchi vektor kattalik.

Nuqta tezlanishini aniqlash usullari:

Harakati vektor usulida berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash.

M nuqtaning harakati $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan ifodalangan bo'lsin.

M nuqtaning t ondagi tezligini $\vec{v}$ va $t_1 = t + \Delta t$ ondagi tezligini $\vec{v}_1$ bilan belgilaylik (9.8-rasm):

$$t \Rightarrow \vec{v},$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v}.$$

Tezlik vektori orttirmasi $\Delta \vec{v}$ ning Δt vaqt oralig'iga nisbati nuqtaning shu vaqt oralig'idagi *o'rtacha tezlanish vektori* deyiladi:

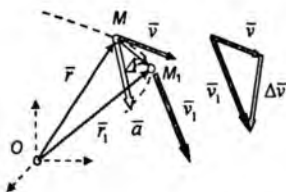
$$\vec{a}_{or} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanish vektori trayektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan. O'rtacha tezlanish vektorining Δt nolga intilgandagi limiti *nuqtaning berilgan ondagi tezlanish vektori* deyiladi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}.$$

Demak,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

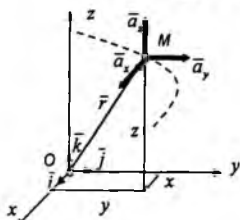


9.8-rasm

Nuqtaning tezlanish vektori uning tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki radius-vektoridan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Harakati koordinatalar usulida berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash. Hosil bo'lgan vektor ifoda va radius-vektor bilan koordinata orasidagi bog'lanishdan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.\end{aligned}$$



9.9-rasm

Bu yerda nuqtaning harakati murakkab bo'lmagani uchun $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar o'zgarmas kattaliklardir.

Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari (9.9-rasm):

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Nuqta tezlanishining biror o'qdagi proyeksiyasi nuqta tezligining shu o'qdagi proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki shu o'qqa mos koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

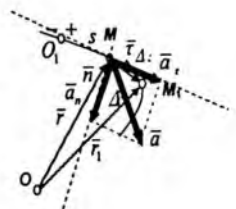
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Nuqta tezlanishining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, tezlanish moduli va tezlanish yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\vec{a}, z) = \frac{a_z}{a}.$$

Harakati tabiiy usulda berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash. Tezlanishning vektor ifodasi va harakat tabiiy usulda berilganda tezlikning ifodasidan foyda-



9.10-rasm

lanamiz (9.10-rasm).

$$\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)].$$

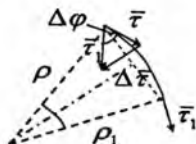
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{r}) = \ddot{s}\vec{r} + \dot{s} \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Birlik urinma vektorni murakkab funksiya ko'rinishida tasvirlaymiz. U holda birlik urinma vektorning vaqt bo'yicha hosilasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{r}}{ds}.$$

Birlik urinma vektorning s yoy koordinatasi bo'yicha hosilasining kattaligi quyidagicha bo'ladi (9.11-rasm):

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\rho \Delta \varphi} = \frac{1}{\rho}.$$



9.11-rasm

$\Delta s \rightarrow 0$ da egrilik radiusi $\rho_1 \rightarrow \rho$, egrilik radiuslari orasidagi burchak $\Delta \varphi \rightarrow 0$. Bunda surat $\vec{r}_1$ va $\vec{r}$ birlik vektorlar orasida hosil bo'lgan teng yonli uchburchakning asosi, maxraj esa ρ radiusli aylana yoyining uzunligi (9.11-rasm).

Birlik vektorning $\Delta \vec{r}$ orttirishi va birlik vektor $\vec{r}$ orasidagi burchak $\Delta \varphi \rightarrow 0$ da u 90° ga intiladi.

Shunday qilib, birlik urinma vektoridan yoy koordinatasi bo'yicha olingan hosila vektor bo'lib, u trayektoriyaga o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'ladi.

Tezlanishning (τ va n) tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari:

$$a_\tau = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Shunday qilib, nuqtaning to'liq tezlanishi ikkita tezlanishning vektor yig'indisidan iborat bo'lib, ularning birinchisi, agar $\ddot{s} > 0$ bo'lsa, trayektoriyaga urinma bo'ylab, yoy koordinatasi o'sish tomoniga yo'nalgan bo'ladi (aks holda, ya'ni $\ddot{s} < 0$ da yoy koordinatasi kamayish tomoniga yo'naladi) va *urinma tezlanish* deb ataladi, hamda ikkinchisi urinmaga normal bo'ylab egrilik markaziga (trayektoriya bo'tiq) tomoniga yo'nalgan *normal tezlanishdan* iboratdir.

Egri chiziqli harakatdagi *nuqtaning tezlanishi* urinma va normal tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Nuqtaning to'liq tezlanishi moduli:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Egrilik markaziga yo'nalgan urinmaga normal (perpendikulyar) bo'lgan $\vec{n}$ birlik vektorini kiritamiz. $\vec{n}$ vektor va oldin aniqlangan qiymatlaridan foydalanilsa, to'la tezlanish vektorlar yig'indisi ko'rinishida quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{a} = \vec{s}\vec{\tau} + \frac{s^2}{\rho}\vec{n}.$$

Tezlanish vektorining tashkil etuvchilari:

• *urinma (tangensial) tezlanish:* $\vec{a}_\tau = \vec{s}\vec{\tau}$, $\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}$, $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$.

• *normal (markazga intilma) tezlanish:*

$$\vec{a}_n = \frac{s^2}{\rho}\vec{n}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Nuqta harakatining xususiy hollari

1. *To'g'ri chiziqli tekis harakat.* Nuqtaning harakati davomida har doim $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo'lsin. U holda, $\frac{dv_\tau}{dt} = 0$ va $\frac{v^2}{\rho} = 0$. Bundan $v = |v_\tau| = \text{const}$ va $\rho = \infty$ kelib chiqadi. Demak, biz ko'rayotgan holda nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

2. *To'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakat.* Nuqtaning harakati davomida $\vec{a}_\tau \neq 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo'lsin. U holda, $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \vec{s} \neq 0$ va $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$. Bundan $v = |v_\tau| \neq \text{const}$ va $\rho = \infty$ kelib chiqadi. Demak, nuqtaning tezligi faqat miqdor jihatdan o'zgaradi va to'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'ladi. Tezlanish moduli:

$$a = |a_\tau| = \left| \frac{dv_\tau}{dt} \right| = |\vec{s}|.$$

Demak, urinma tezlanish tezlikning miqdor jihatdan o'zgarishini ifodalay ekan.

3. *Egri chiziqli tekis harakat.* Nuqtaning harakati davomida biror vaqt oralig'i uchun $\vec{a}_r=0$, $\vec{a}_n \neq 0$ bo'lsin. U holda, $a_r = \frac{dv_t}{dt} = \dot{s} = 0$ va $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$. Bundan $v = |v_t| = |\dot{s}| = \text{const}$ va $\rho \neq \infty$ kelib chiqadi. $v = \text{const}$ ekanligi nuqtaning tekis harakat qilishini bildiradi, $\rho \neq \infty$ ekanligi nuqtaning harakat trayektoriyasi egri chiziqdan iborat ekanligini bildiradi. Demak, bu holda nuqta egri chiziqli tekis harakat qiladi. Nuqtaning *egri chiziqli tekis harakat tenglamasi*:

$$s = s_0 + v_0 t.$$

Egri chiziqli tekis harakatda normal tezlanish vujudga keladi va tezlikning yo'nalish jihatdan o'zgarishini ifodalaydi.

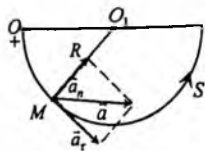
4. *Egri chiziqli o'zgaruvchan harakat.* Nuqtaning harakati davomida biror vaqt oralig'i uchun $\vec{a}_r \neq 0$, $\vec{a}_n \neq 0$ bo'lsin. Bunda nuqta egri chiziqli o'zgaruvchan harakatda bo'ladi va nuqtaning tezligi miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgaradi.

Agar $\vec{a}_r = \text{const}$ bo'lsa, nuqta tekis o'zgaruvchan harakatda bo'ladi. $\vec{v}$ vektor bilan $\vec{a}_r$ vektorlarning yo'nalishi ustma-ust tushsa, nuqta egri chiziqli tezlanuvchan harakatda bo'ladi. $\vec{v}$ vektor bilan $\vec{a}_r$ vektorlarning yo'nalishi qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, nuqta egri chiziqli sekinlanuvchan harakatda bo'ladi.

Nuqta egri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakatining tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_r t^2}{2}.$$

9.2-masala. Poyezdning boshlang'ich tezligi 15 m/s bo'lib, birinchi 30 s da $u = 600 \text{ m}$ yo'l bosadi. Poyezd radiusi $R = 1 \text{ km}$ bo'lgan aylanma yo'lda o'zgaruvchan harakat qiladi deb hisoblab, uning 30 s oxiridagi tezlik va tezlanishini aniqlang (9.12-rasm).



9.12-rasm

Yechish. Tekis o'zgaruvchan harakat tenglamalarini yozamiz:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_r t^2}{2}. \quad (1)$$

$$v = v_0 + a_t t. \quad (2)$$

Masala shartiga asosan $t = 0$ da $s_0 = 0$.

Demak, (1) dan

$$S = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (3)$$

(3) tenglamadan a_t urinma tezlanishni hisoblaymiz:

$$600 = 450 + 450 a_t, \quad a_t = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2.$$

(1) tenglamadan:

$$v = 15 \text{ m/s} + \frac{30}{3} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}.$$

Normal tezlanish esa quyidagicha aniqlanadi:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad \rho = R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{625}{1000} \text{ m/s}^2 = 0,625 \text{ m/s}^2.$$

To'la tezlanishni aniqlaymiz:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 0,708 \text{ m/s}^2.$$

Javob: $v = 25 \text{ m/s}$, $a = 0,708 \text{ m/s}^2$.

9.3-masala. Koordinatalar usulida berilgan M nuqtaning harakat qonuniga ko'ra trayektoriya tenglamasini toping, hamda $t = 1$ sekundda nuqta holati va berilgan paytga mos keladigan nuqta tezlik va tezlanishini aniqlang.

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} t^2, \quad y = 4 - 3 \sin \frac{\pi}{3} t^2, \quad t = 1 \text{ s}.$$

Yechish. Harakat trayektoriyasi tenglamasini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamalaridan vaqt, t ni yo'qotamiz. Harakat tenglamalaridan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\cos \frac{\pi}{3} t^2 = \frac{x}{3}, \quad \sin \frac{\pi}{3} t^2 = \frac{y-4}{-3}. \quad (1)$$

(1) tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} t^2 \right) = \frac{x^2}{3^2}, \quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} t^2 \right) = \frac{(y-4)^2}{(-3)^2}.$$

Qo'shib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1 \text{ yoki } x^2 + (y-4)^2 = 3^2.$$

Tenglamadan ko'rinadiki, nuqta trayektoriyasi markazi (0;4) nuqtada, radiusi $R=3$ bo'lgan aylanadan iborat.

Trayektoriyani rasmda ko'rsatamiz. Nuqtaning boshlang'ich va $t=t_1=1s$ vaqtidagi holatini aniqlaymiz.

$$t_0 = 0s \text{ da } x_0 = 0sm, y_0 = 4sm.$$

$$t_1 = 1s \text{ da } x_1 = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \cos 60^\circ = 1,5sm,$$

$$y_1 = (4 - 3\sin\frac{\pi}{3})sm = 1,39sm.$$

Demak, $t_1=1s$ dagi nuqtaning koordinatalari $x=1,5sm$, $y=1,39sm$ bo'lib, bu esa nuqtaning holatini aniqlaydi.

Nuqta tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyasini topamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3\cos\frac{\pi}{3}t^2) = -3\sin\frac{\pi}{3}t^2 \cdot \frac{\pi}{3}2t = -2\pi t \sin\frac{\pi}{3}t^2,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4 - 3\sin\frac{\pi}{3}t^2) = -2\pi t \cos\frac{\pi}{3}t^2.$$

Nuqta tezligining moduli

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\pi^2 t^2 \sin^2\frac{\pi}{3}t^2 + 4\pi^2 t^2 \cos^2\frac{\pi}{3}t^2} = \\ &= \sqrt{4\pi^2 t^2 (\sin^2\frac{\pi}{3}t^2 + \cos^2\frac{\pi}{3}t^2)} = \sqrt{4\pi^2 t^2} = 2\pi t \text{ sm/s.} \end{aligned}$$

$t=1s$ da

$$v_x = -2\pi \sin\frac{\pi}{3} \text{ sm/s} = -5,53 \text{ sm/s},$$

$$v_y = -2\pi \cos\frac{\pi}{3} \text{ sm/s} = -3,14 \text{ sm/s}.$$

$$v = 2\pi \text{ sm/s} = 6,28 \text{ sm/s}.$$

Nuqta tezlanishining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-2\pi t \sin\frac{\pi}{3}t^2) = -2\pi \sin\frac{\pi}{3}t^2 - \frac{4\pi^2 t^2}{3} \cos\frac{\pi}{3}t^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2\pi t \cos\frac{\pi}{3}t^2) = -2\pi \cos\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{4\pi^2 t^2}{3} \sin\frac{\pi}{3}t^2,$$

$t=1s$ da

$$a_x = (-2\pi \sin \frac{\pi}{3} - 4 \frac{\pi^2}{3} \cos \frac{\pi}{3}) sm / s^2 = -3,8\pi sm / s^2 = -11,03 sm / s^2,$$

$$a_y = (-2\pi \cos \frac{\pi}{3} + 4 \frac{\pi^2}{3} \sin \frac{\pi}{3}) sm / s^2 = 0,16\pi sm / s^2 = 5,02 sm / s^2.$$

$t=1s$ dagi nuqta tezlanishining moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{121,6 + 26,2} sm / s^2 = 12,1 sm / s^2.$$

$\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{a}_x, \vec{a}_y$ vektorlarining moduli nuqta tezligi va tezlanishining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalariga teng:

$$|\vec{v}_x| = v_x; |\vec{v}_y| = v_y; |\vec{a}_x| = a_x; |\vec{a}_y| = a_y.$$

$\vec{v}$ vektorning yo'nalishini aniqlaymiz. M nuqtadan Ox o'qiga parallel qilib, $\vec{v}_x$ vektorning modulini qo'yamiz. Bu vektor Ox o'qini manfiy tomoniga qarab yo'nalgan bo'ladi. Chunki, u manfiydir. $\vec{v}_x$ vektorning uchidan Oy o'qiga parallel qilib $\vec{v}_y$ vektorni modulini qo'yamiz. Keyin $\vec{v}_y$ oxiri bilan $\vec{v}_x$ boshini tutashtiramiz va $\vec{v}$ tezlik vektori hosil bo'ladi. Xuddi shunday usul bilan $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi ham aniqlanadi.

Urinma tezlanishning $t=1s$ dagi qiymatini aniqlaymiz:

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi t) = 2\pi sm / s^2 = 6,28 sm / s^2.$$

Normal tezlanishning $t=1s$ dagi qiymatini aniqlaymiz:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2} = \sqrt{146,41 - 39,44} sm / s^2 = 10,34 sm / s^2.$$

Trayektoriyaning egrilik radiusini aniqlaymiz:

$$t=1s \text{ da } \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{6,28^2}{10,34} sm = 3,8 sm.$$

9.4-masala. Harakat qonuni koordinatalar usulida berilgan M nuqtaning trayektoriya tenglamasini, hamda $t=1s$ da nuqta holati va berilgan paytga mos keladigan tezlik va tezlanishini aniqlang. Masofalar sm larda berilgan.

$$x = 6 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) - 2, \quad y = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 3.$$

Yechish: Harakat trayektoriyasi tenglamasini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamalaridan vaqt, t ni yo'qotamiz. Harakat tenglamalaridan quyidagilarni olamiz:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) = \frac{x+2}{6}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) = \frac{y-3}{6}.$$

Ikkala tomonni kvadratga ko'tarib, qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{(x+2)^2}{6^2} + \frac{(y-3)^2}{6^2} = 1 \text{ yoki } (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Nuqta trayektoriyasi radiusi $R = 6 \text{ sm}$ bo'lgan va markazi $O_1(-2, 3)$ bo'lgan aylanadan iborat ekan.

Trayektoriyani 9.13-rasmda ko'rsatamiz. Nuqtaning boshlang'ich va $t = t_1 = 1 \text{ s}$ bo'lgan paytdagi holatini aniqlaymiz:

$$t = 0 \text{ s da: } x_0 = 2 \text{ sm, } y_0 = 9 \text{ sm.}$$

$$t_1 = 1 \text{ s da:}$$

$$x_1 = 6 \sin \frac{\pi}{6} - 2 = 1 \text{ sm, } y_1 = 6 \cos \frac{\pi}{3} + 3 = 8,16 \text{ sm.}$$

Tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hisoblaymiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi t \cos \frac{\pi t^2}{6},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -2\pi t \sin \frac{\pi t^2}{6}.$$

Tezlik vektorining miqdori quyidagicha hisoblanadi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(2\pi t \cdot \cos \frac{\pi t^2}{6}\right)^2 + \left(-2\pi t \cdot \sin \frac{\pi t^2}{6}\right)^2} = 2\pi t \text{ sm/s}$$

$$t = 1 \text{ s da}$$

$$v_x = 2\pi \cdot \cos \frac{\pi}{6} \text{ sm/s} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sm/s} = \pi\sqrt{3} \text{ sm/s} \approx 5,44 \text{ sm/s,}$$

$$v_y = -2\pi \cdot \sin \frac{\pi}{6} \text{ sm/s} = -2\pi \frac{1}{2} \text{ sm/s} = -\pi \text{ sm/s} \approx -3,14 \text{ sm/s,}$$

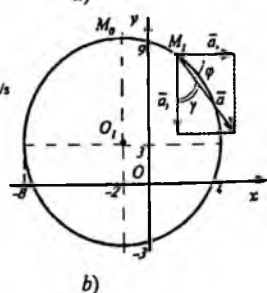
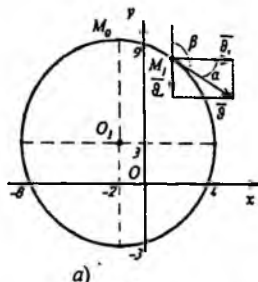
$$v = 6,28 \text{ sm/s.}$$

Tezlik vektorining $t = 1 \text{ s}$ dagi yo'nalishini aniqlaymiz:

$$\cos(\vec{v} \wedge OX) = \cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86 \Rightarrow \alpha = 30^\circ,$$

$$\cos(\vec{v} \wedge OY) = \cos \beta = \frac{v_y}{v} = -\frac{1}{2} = -0,5 \Rightarrow \beta = 120^\circ.$$

Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:



9.13-rasm

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\pi \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot l^2 - l \cdot \frac{2\pi l}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot l^2 \right) = 2\pi \left(\cos \frac{\pi}{6} \cdot l^2 - l \cdot \frac{\pi l}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot l^2 \right),$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2\pi \cdot \left(\sin \frac{\pi}{6} \cdot l^2 - l \cdot \frac{\pi l}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot l^2 \right).$$

Tezlanish vektorining miqdori

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2\pi)^2 + \left(\frac{2\pi^2 l^2}{3}\right)^2}.$$

$$t = 1s \text{ da } a_x = 2,14 \text{ sm/s}^2, \quad a_y = -6,9 \text{ sm/s}^2, \quad a = 7,22 \text{ sm/s}^2.$$

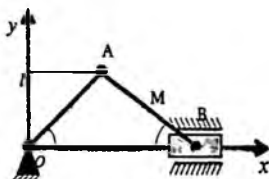
Tezlanish vektoring $t = t_1 = 1s$ paytdagi yo'nalishini aniqlaymiz:

$$\cos(\vec{a} \cdot O\alpha) = \cos \varphi = \frac{a_x}{a} = \frac{2,14}{7,72} = 0,2 \Rightarrow \varphi = 73^\circ,$$

$$\cos(\vec{a} \cdot O\gamma) = \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{a_y}{a} = -0,956 \Rightarrow \gamma = 17^\circ.$$

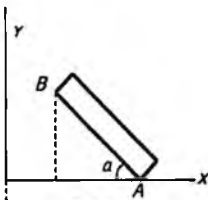
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. OA krivoship $\omega = 10 \text{ rad/s}$ doimiy burchak tezlik bilan aylanadi. Uzunlik $OA = AB = 80 \text{ sm}$. Shatun o'rtasidagi M nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriyasi, B polzunning harakat tenglamasi topilsin. Harakat boshlanishida B polzun o'ngdagi eng chetki holatda bo'lgan (9.14-rasm).



9.14-rasm

2-masala. Moddiy nuqta $x = 2t$, $y = 5t^2 - 1$ tenglamalarga ko'ra harakat qiladi (x, y -metrlar, t -sekundlar hisobida). Nuqtaning trayektoriya tenglamasi tuzilsin. $t = 1s$ dagi tezligi, tezlanishi hamda trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin va ular yo'nalishi trayektoriyada ko'rsatilsin.



9.15-rasm

3-masala. AB sterjen $x_A = 2 + t^2$, $y_A = 0$, $a = 0,25\pi$ qonunga ko'ra harakatlanadi. $AB = 3m$ ekanligini hisobga olgan holda, $t = 1s$ bo'lganda B nuqta absissasi aniqlansin (9.15-rasm).

4-masala. Moddiy nuqta $x = at$, $y = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t})$ qonunga muvofiq harakat qiladi. Nuqtaning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi va egrilik radiusi aniqlansin.

5-masala. Bug' mashinasi krivoship barmog'ining harakat tenglamalari ishga tushirish davrida $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ ko'rinishga ega. (x va y -santimetr, t -sekund hisobida). Barmoqning tezligi, urinma va normal tezlanishi aniqlansin.

Nazorat savollari

1. Kinematika nimani o'rgatadi?
2. Nuqta trayektoriyasi deb nimaga aytiladi?
3. Nuqta harakati berilishining qanday usullarini bilasiz va ular qanday bo'ladi?
4. Nuqta harakati qonuni koordinata usulida berilganda uning trayektoriyasi qanday aniqlanadi?
5. Nuqta tezligi qanday aniqlanadi va qanday yo'nalishga ega?
6. Nuqta tezligining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday? Nuqta tezligi moduli va yo'nalishi tezlik proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
7. Nuqta harakati qonuni tabiiy usulda berilganda uning tezligi qanday aniqlanadi?
8. Nuqta tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
9. Nuqta tezlanishining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi? Nuqta tezlanish moduli va yo'nalishi Dekart o'qlaridagi proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
10. Nuqta tezlanishining trayektoriya bosh normal va urinmasidagi proyeksiyalari nimaga teng?
11. Urinma tezlanish qachon nolga teng bo'ladi? Normal tezlanishchi?

12. Urinma va normal tezlanishlar orqali nuqtaning to'liq tezlanishi nimaga teng?

13. Tekis harakat nima? Tekis o'zgaruvchan harakat nima?

14. M nuqta ellips bo'yicha tekis harakat qiladi. Nuqtaning tezlanishi ellipsning qaysi nuqtalarida eng katta va eng kichik bo'ladi?

10. QATTIQ JISMNING SODDA HARAKATLARI. QATTIQ JISMNING ILGARILANMA VA QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATLARI

Qattiq jism kinematikasida asosan quyidagi masalalar ko'riladi:

Qattiq jismning tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan har ondagi holatini aniqlash;

Harakat tenglamalari ma'lum bo'lgan jismning yoki jism har bir nuqtasining kinematik xarakteristikalarini topish.

Qattiq jismning eng sodda holdagi harakatlarini ko'rib chiqamiz:

1. *Ilgarilanma harakat* (polzun, nasos porsheni, yo'lning to'g'ri chiziqli qismida harakatlanuvchi paravoz g'ildiragining sparnigi, lift kabinasi, kupe eshigi).

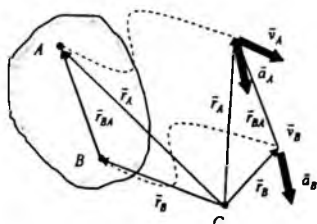
2. *Aylanma harakat* (maxovik, krivoship, koromislo, oddiy eshik).

3. *Tekis-parallel harakat* (shatun, relsning to'g'ri chiziqli qismida lokomotiv g'ildiragining harakatlanishi, shlifovka qiluvchi g'ildirak).

4. *Sferik harakat* (giroskop, shamirli tayanch).

5. *Harakatning umumiy holi yoki erkin uchish* (o'q, snaryad, tosh, jism).

Qattiq jismning ilgarilanma harakati – bu shunday harakatki, qattiq jismda olingan



10.1-rasm

ixtiyoriy to'g'ri chiziq kesmasi, harakati davomida o'z-o'ziga parallelligicha qoladi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining trayektoriyasi umumiy holda egri chiziqdan iborat (10.1-rasm).

Teorema. Qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalari bir xil trayektoriya chizib, ixtiyoriy vaqtda miqdor va yo'nalish jihatidan teng bo'lgan tezlik va tezlanishlarga ega bo'ladi.

Isbot. Jismda ixtiyoriy ikkita A va B nuqtalarni olib, ularning radius-vektorlarini o'tkazamiz hamda bu nuqtalarni $\vec{r}_{BA}$ radius-vektor bilan tutashtiramiz.

Ixtiyoriy vaqt davomida quyidagi vektor tenglik bajariladi:

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) + \vec{r}_{BA}.$$

Ixtiyoriy vaqt uchun $\vec{r}_{BA}$ vektorning qiymati va yo'nalishi doimo o'zgar-masdan qoladi (ilgarilanma harakat qoidasiga asosan). Nuqtalar orasidagi masofa ham o'zgarmaydi ($\vec{r}_{BA} = \text{const}$). Bundan:

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) + \text{const}, \quad (10.1)$$

Shunday qilib, qattiq jismning ilgarilanma harakati, qattiq jismda yotuvchi ixtiyoriy bir nuqtasining harakati orqali aniqlanadi. Bu nuqtaning hamma harakat parametrlari (trayektoriyasi, tezlik va tezlanishlari) nuqta kinematikasining tenglama va munosabatlari orqali yoziladi.

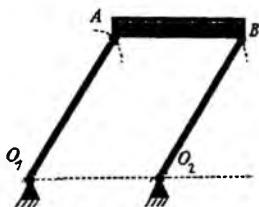
(10.1) ifodadan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila quyidagicha:

$$\frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_B(t)}{dt}, \quad (10.2)$$

Bundan ko'rinadiki, ixtiyoriy vaqt uchun A nuqtaning tezlik vektori B nuqtaning tezlik vektoriga teng bo'ladi. Ya'ni,

$$\vec{v}_A(t) = \vec{v}_B(t). \quad (10.3)$$

(10.2) ni yana bir marta differensiallab quyidagi munosabatni olamiz:



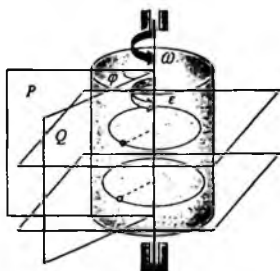
10.2-rasm

$$\frac{d\vec{r}_A(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{r}_B(t)}{dt^2}. \quad (10.4)$$

Bu munosabat ixtiyoriy vaqt uchun A nuqtaning tezlanish vektori B nuqtaning tezlanish vektoriga teng ekanligini ko'rsatadi. Ya'ni,

$$\vec{a}_A(t) = \vec{a}_B(t). \quad (10.5)$$

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati.



10.3-rasm

Bunda jismning barcha nuqtalari aylanish o'qi deb ataluvchi o'qqa nisbatan perpendikulyar tekisliklarda harakatlanadi va shu tekisliklarda yotuvchi aylanalar chizadi (10.3-rasm).

Aylanma harakatni berilishi.

Harakat aylanish o'qi orqali o'tuvchi qo'zg'almas tekislik bilan jism mahkam bog'langan Q tekisliklar orasidagi ikki yoqli φ burchak (aylanish burchagi)ning

o'zgarish qonuni orqali beriladi. Ya'ni

$$t \Rightarrow \varphi, \quad (10.6)$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta \varphi.$$

$\varphi = \varphi(t)$ munosabatga qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat tenglamasi yoki aylanish qonuni deyiladi.

Burchak tezlik – vaqt birligida aylanish burchagining o'zgarishini xarakterlovchi kattalik.

$\Delta \varphi$ ning Δt ga nisbati jismning Δt vaqtdagi o'rtacha burchak tezligi deyiladi:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega_{\text{avg}}.$$

$\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega \text{ yoki } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (10.7)$$

Jismning burchak tezligi aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Burchak tezlik aylanish tomoniga yo'nalgan va yoy strelkasi bilan ifodalangan bo'ladi.

Agar $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ bo'lsa, aylanish burchagi ortib boradi. Agar $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ bo'lsa, aylanish burchagi kamayib boradi.

Burchak tezlanish – vaqt birligida burchak tezlikning o'zgarishini xarakterlovchi kattalik.

$$t \Rightarrow \omega, \quad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega. \quad (10.8)$$

Bundan

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\varphi}. \quad (10.9)$$

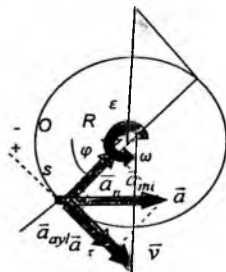
(10.9) munosabat Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha burchak tezlanishni ifodalaydi.

$\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \text{ yoki } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (10.10)$$

Berilgan onda biror qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning *burchak tezlanishi* burchak tezlikdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki berilgan o'q atrofidagi aylanma harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Burchak tezlanish $\ddot{\varphi} > 0$ da aylanish burchagining o'sish tomoniga yo'nalgan yoy strelkasi bilan ifodalanadi (10.4-rasm).



10.4-rasm

Agar $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ va $\frac{d\varphi}{dt}$ bir xil ishorali bo'lsa, burchak tezlik moduli oshadi (kattalashadi) va aylanish tezlanuvchan bo'ladi (burchak tezlik va burchak tezlanishi yo'nalishi bir tomonga yo'nalgan bo'ladi, 10.5-rasm).

Agar $d^2\varphi/dt^2$ va $d\varphi/dt$ ishoralari har xil bo'lsa, tezlik moduli kamayadi va aylanish sekinlanuvchan bo'ladi (burchak tezlik va burchak tezlanish yo'nalishlari qarama-qarshi bo'ladi, 10.5-rasm).

Jism harakati davomida burchak tezligi o'zgarmay qolsa, jism *tekis aylanma harakatda* deyiladi. Ya'ni

$$\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

Bu holda $\omega = \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$

Integrallaymiz: $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt$.

U holda

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (10.11)$$

Bu ifoda jism *tekis aylanma harakatining tenglamasi* deyiladi.

Jism harakati davomida burchak tezlanishi o'zgarmay qolsa, *jism tekis o'zgaruvchan aylanma harakatda* deyiladi. Ya'ni:

$$\varepsilon = \text{const.}$$

Bu holda $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \text{const.}$ Integrallasak: $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$.

U holda

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (10.12)$$

Bu ifoda jismning *tekis o'zgaruvchan aylanma harakat burchak tezligini* ifodalaydi. Buni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t \text{ yoki } d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t) dt.$$

Bu tenglamani integrallasak:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (10.13)$$

Bu tenglama jismning *tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasini* ifodalaydi.

Qattiq jismning aylanma harakatida nuqtasining tezligi

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiladigan jism ixtiyoriy nuqtasining trayektoriyasi radiusi nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa R ga teng bo'lgan aylanadan iborat. Nuqta tezligini aniqlash uchun tabiiy koordinatalar sistemasidan foydalanamiz:

$$v_r = \dot{s}. \quad (10.14)$$

Yoy koordinatasi aylana radiusi bilan quyidagicha bog'lanishda bo'ladi:

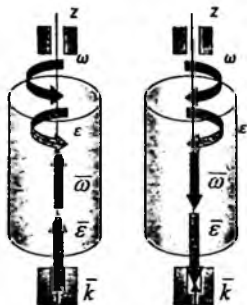
$$s = \varphi R. \quad (10.15)$$

U holda tezlikning aylanaga o'tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$v_r = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R. \quad (10.16)$$

Demak, tezlik moduli $v = \omega R$ formula bilan ifodalanadi va tezlik moduli aylan radiusiga perpendikulyar va burchak tezligi yo'nalishi bilan bir xil yo'naladi.

Bu formuladan ko'rinadiki, nuqtaning tezligi aylanish o'qigacha bo'lgan masofa (aylanish radiusiga) ga proporsional bo'ladi.



10.5-rasm

Qattiq jismning aylanma harakatida nuqtasining tezlanishi

Nuqta trayektoriyasi ma'lumligidan tezlanishini aniqlash uchun harakatni tabiiy usulda berilishidagi formulalardan foydalanamiz.

$$a_r = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \quad (10.17)$$

Tezlanishinig aylanaga o'tkazilgan urinma va normal o'qlardagi proyeksiyalari quyidagicha bo'ladi (10.5-rasm).

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \epsilon R, \\ a_n = \frac{1}{\rho} \left[\frac{d}{dt}(\varphi R) \right]^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{d\varphi}{dt} R \right]^2 = \omega^2 R. \quad (10.18)$$

Urinma tezlanish uchun hisoblash formulasi quyidagicha ifodalanadi:

$$a_{orl} = \epsilon R. \quad (10.19)$$

Bu tezlanish vektoriga *aylanma tezlanish* deyiladi va radiusga perpendikulyar ravishda burchak tezlanish yoy strelkasi yo'nalishi bilan bir xil yo'naladi.

Normal tezlanishga *markazga intilma tezlanish* ham deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$a_{mi} = \omega^2 R. \quad (10.20)$$

Bu formulalardan ko'rinadiki, nuqtaning bu tezlanishlari nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional bo'ladi.

Nuqtaning to'la tezlanishi - bu tezlanishlarning vektor yig'indisi ko'rinishida aniqlanadi:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{ayl}} + \vec{a}_{\text{mi}}. \quad (10.21)$$

To'la tezlanish va markazga intilma tezlanish yo'nalishlari orasidagi burchak radiusning qiymatiga bog'liq emas va quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\beta = \arctg\left(\frac{a_{\text{ayl}}}{a_{\text{mi}}}\right) = \arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \quad (10.22)$$

Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishini vektor ko'paytma shaklida ifodalash

Burchak tezlik vektori shunday yo'naladiki, uning uchidan qaraganimizda jism soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylanishi kerak.

z o'qining musbat yo'nalishini $\vec{k}$ birlik vektor yordamida berish mumkin, u holda burchak tezlik va burchak tezlanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k}. \quad (10.23)$$

Bunda ω_z va ε_z lar burchak tezlik va burchak tezlanish vektorlarining z o'qidagi proyeksiyalari.

Aylanma harakatdagi nuqta tezligi

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (10.24)$$

vektor ko'paytma orqali aniqlanadi va tezlikning kattaligi va yo'nalishini ifodalaydi (10.6-rasm).

Bu vektor ko'paytmaning moduli quyidagicha aniqlanadi:

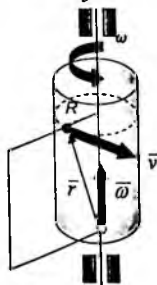
$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$$

yoki

$$v = \omega \cdot R.$$

Vektor ko'paytmadan hosil bo'lgan vektor yo'nalishi ikki usulda aniqlanadi:

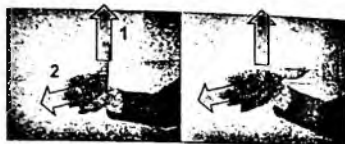
1. Vektor ko'paytmaning aniqlanishi bo'yicha vektor yo'nalishi ko'paytmani tashkil etuvchi



10.6-rasm

vektorlardan o'tkazilgan tekislikka perpendikulyar bo'lib, u birinchi vektorni ikkinchi vektorga qarab soat millariga teskari yo'nalishda va eng qisqa burchak bo'ylab burishdan hosil bo'lgan yo'nalishda yo'nalgan bo'ladi.

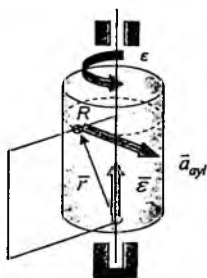
2. O'ng qo'l qoidasiga asosan quyidagicha aniqlanadi. Agar bosh barmoqni ko'paytmaning birinchi vektori yo'nalishida, qolgan barmoqlarni ikkinchi vektor bo'yicha yo'naltirsak va bosh barmoqni kaftimizga perpendikulyar bo'lguncha bursak, shu bosh barmoq yo'nalishi vektor ko'paytma vektori yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi (10.7-rasm).



10.7-rasm

Shunday qilib, burchak tezlik va radius vektorining vektor ko'paytmasi oldin olingan natijalarga ko'ra, aylanma harakatdagi nuqta tezligi kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi.

Nuqtaning aylanma tezlanishi vektor ko'paytma orqali aniqlanadi hamda aylanma harakat kattaligi va yo'nalishini aniqlaydi (10.8-rasm):



10.8-rasm

$$\vec{a}_{ayl} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}. \quad (10.25)$$

Bu vektor ko'paytmaning moduli:

$$|\vec{a}_{ayl}| = |\vec{\epsilon}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\epsilon}, \vec{r})$$

yoki

$$a_{ayl} = \epsilon R \quad (10.26)$$

Qaralayotgan vektor ko'paytma vektorining yo'nalishini vektor ko'paytmaning ta'rifidan yoki o'ng qo'l qoidasidan aniqlash mumkin.

Shunday qilib, burchak tezlanish va radius vektorining vektor ko'paytmasi oldin olingan natijalarga ko'ra, nuqtaning aylanma harakatdagi tezlanishini kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi.

Nuqtaning markazga intilma tezlanishi

Nuqtaning markazga intilma tezlanishi vektor ko'paytma orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{a}_{mi} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (10.27)$$

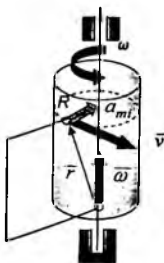
Bu vektor markazga intilma tezlanishning yo'nalishi va kattaligini aniqlaydi (10.9-rasm).

Vektor ko'paytmaning moduli esa quyidagicha:

$$|\vec{a}_{mi}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \sin(\vec{\omega}, \vec{v}). \quad (10.28)$$

Nuqtaning tezlik vektori burchak tezlik yotgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Shu sababli u quyidagicha aniqlanadi:

$$a_{mi} = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R. \quad (10.29)$$



10.9-rasm

Bu vektor ko'paytmaning yo'nalishini vektor ko'paytmaning ta'rifidan yoki o'ng qo'l qoidasidan foydalanib aniqlash mumkin.

Shunday qilib, haqiqatdan ham nuqtaning burchak tezligi bilan tezlik vektorining vektorial ko'paytmasi oldin olingan natijalarga ko'ra nuqtaning markazga intilma tezlanishining kattaligi va yo'nalishini to'la aniqlaydi.

Bu vektor ko'paytmani quyidagicha yozish ham mumkin:

$$\vec{a}_{mi} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

10.1-masala. Bug' turbinasi diskini ishga tushirish davridagi aylanish tenglamasini yozing. Aylanish burchagi vaqt kubiga proporsional va $t=3s$ bo'lganda, diskning burchak tezligi $\omega = 27\pi \text{ rad/s}$ ga to'g'ri keladi.

Yechish: Masala shartiga asosan:

$$\varphi(t) = kt^3 \quad \omega = \dot{\varphi} = 3kt^2.$$

$t=3s$ da $\omega = 27\pi$ va $t=3s$ da $\omega = 3kt^2 = 27k$ bo'lgani uchun, $27k = 27\pi$ yoki $k = \pi$ bo'ladi.

Demak, bug' turbinasining aylanma harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi = \pi t^3 \text{ rad}.$$

Javob: $\varphi = \pi t^3 \text{ rad}.$

10.2-masala. Radiusi $R=2\text{ m}$ bo'lgan maxovik tinch holatdan boshlab tekis tezlanish bilan aylanadi. To'g'inda yotuvchi nuqtalar $t=10\text{ s}$ dan keyin $v=100\text{ m/s}$ chiziqli tezlikka ega bo'ladi. G'ildirak to'g'inidagi nuqtaning $t=15\text{ s}$ bo'lgan vaqtdagi tezligi, urinma va normal tezlanishini toping.

Yechish: Tekis tezlanuvchan harakat tenglamasiga asosan, $\omega_0 = 0$ bo'lgani uchun:

$$\omega = \varepsilon t. \quad (1)$$

$$v_{10} = \omega R = \varepsilon t_{10} R. \quad (2)$$

$$\text{Bundan } \varepsilon = \frac{v_{10}}{R t_{10}} = 5 \text{ rad/s}^2.$$

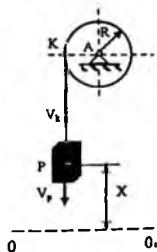
$t=15\text{ s}$ vaqt uchun (1) ifodadan quyidagilarni aniqlash mumkin:

$$\omega_{15} = \varepsilon \cdot t_{15} = 75 \text{ rad/s}, \quad v_{15} = \omega_{15} \cdot R = 150 \text{ m/s},$$

$$a_t = \varepsilon R = 10 \text{ m/s}^2, \quad a_{15n} = \omega_{15}^2 R = 11250 \text{ m/s}^2.$$

Javob: $v=150\text{ m/s}$, $a_t=10\text{ m/s}^2$, $a_n=11250\text{ m/s}^2$.

10.3-masala. Radiusi $R=10\text{ sm}$ bo'lgan A val unga ipga osilgan P tosh bilan aylantiriladi (10.10-rasm). Toshning harakati $x=100t^2$ tenglama bilan ifodalanadi. Bunda x – toshdan qo'zg'almas OO_1 gorizontalgacha bo'lgan, metrlar hisobida ifodalangan masofa, t – vaqt (sekund hisobida). T paytda valning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε hamda val sirtidagi nuqtaning to'la tezlanishi a aniqlansin.



10.10-rasm

Yechish: P tosh ilgari lanma harakat qilgani uchun uning tezligi quyidagicha aniqlanadi:

$$v_P = x' = 200t \text{ sm/s}. \quad (1)$$

Val to'g'inidagi nuqtalar ham shu tezlikka ega bo'ladi. Chunki, tosh bilan val cho'zilmaydigan arqon bilan bog'langan. Ya'ni:

$$v_P = v_K. \quad (2)$$

$v_K = \omega R$ va (1) va (2) ifodalarni e'tiborga olib yoza olamiz:

$$\omega = \frac{v_K}{R} = \frac{v_P}{R} = \frac{200t}{10} = 20t \text{ rad/s}^2, \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 10\sqrt{400 + 160000t^4} \text{ m/s}^2.$$

Javob: $\omega = 20t \text{ rad/s}^2$, $\varepsilon = 20 \text{ rad/s}^2$, $a = 200 \cdot \sqrt{1 + 400t^4} \text{ sm/s}^2$.

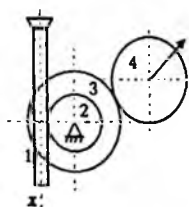
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Motor o'chirilgan paytda $40\pi \text{ rad/s}$ ga teng burchak tezlik bilan aylanayotgan samolyot propelleri to'xtagunga qadar 80 marta aylanadi. Propeller aylanishini tekis sekinlanuvchan deb hisoblab, motor o'chirilganidan propeller to'xtagunigacha qancha vaqt o'tishi aniqlansin.

2-masala. Shkivning gardishidagi A nuqta 50 sm/s tezlik bilan harakat qiladi. A nuqta bilan bir radiusda yotuvchi boshqa B nuqta esa 10 sm/s tezlik bilan harakatlanadi. AB masofa 20 sm ga teng. Shkivning ω burchak tezligi hamda d diametri aniqlansin.

3-masala. Maxovik to'g'ridagi nuqtaning to'la tezlanishi radius bilan 60° ga teng burchak hosil qiladi. Shu paytda nuqtaning urinma tezlanishi $\omega_r = 10\sqrt{3} \text{ m/s}^2$. Aylanish o'qidan $r = 0,5 \text{ m}$ masofada turgan nuqtaning normal tezlanishi topilsin. Maxovikning radiusi $R = 1 \text{ m}$.

4-masala. Tinch holatda bo'lgan jism tekis tezlanish bilan aylana boshlab, dastlabki 2 minutda 3600 marta aylanadi. Burchak tezligi va burchak tezlanishi aniqlansin.



10.11-rasm

5-masala. Strelkali indikator mexanizmidagi harakat o'lchov shtiftining 1 reykasidan 2 shesternyaga uzatiladi, 2 shesternyaning o'qiga 3 tishli g'ildirak o'rnatilgan, 3 g'ildirak esa strelka biriktirilgan 4 shesternya bilan tishlashadi (10.11-rasm). Agar shtiftning harakati, $x = a \sin kt$ tenglama bilan berilgan bo'lsa va tishli g'ildiraklarning radiuslari mos ravishda r_2, r_3 va r_4 bo'lsa, strelkaning

burchak tezligini aniqlang.

Nazorat savollari

1. Ilgarilanma harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Ilgarilanma harakatda qattiq jism nuqtalarining tezlik vektorlari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?

3. Ilgarilanma harakatda qattiq jism nuqtalarining tezlanish vektorlari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?

4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning harakat qonunini yozib bering?

5. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatda qattiq jismning burchakli tezligi deb nimaga aytiladi va u qanday aniqlanadi?

6. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatda qattiq jismning burchakli tezlanishi qanday aniqlanadi?

7. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakatda qattiq jismning harakat qonunini yozib bering.

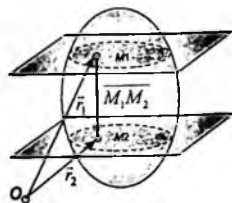
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatda qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari qanday bo'ladi?

9. Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining chiziqli tezliklari qanday aniqlanadi?

10. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatda qattiq jismning ixtiyoriy nuqtasining chiziqli tezlanishlari formulalarini yozib bering.

11. QATTIQ JISMNING TEKIS-PARALLEL HARAKATI

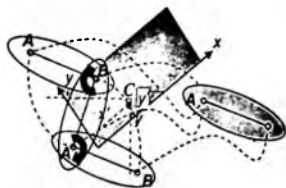
Qattiq jism harakatlanganda uning barcha nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlansa, qattiq jismning bunday harakatiga *tekis-parallel harakat* deyiladi. Bunday harakat qiluvchi qattiq jismlar deyarli har bir mashina va texnologik dastgohlarda uchraydi. Masalan, poyezdning barcha g'ildiraklari, krivoship shatun mexanizmining shatuni va hokazolar (11.1-rasm).



11.1-rasm

11.1-rasmda Oxy tekisligida qattiq jism tekislikka parallel harakat qilmoqda. Bunday harakatda jism nuqtasi har doim biror

Oxy tekisligida qoladi. Lekin shu jismda olingan ixtiyoriy AB kesma, o'z-o'ziga parallelligini saqlamagan holda harakatlanadi.



11.2-rasm

11.2-rasmdan ko'rinib turibdiki, AB kesma Ox o'qi bilan mutlaq boshqa burchak tashkil etgan hol tasvirlangan. Boshqacha qilib aytganda, shu qattiq jism ikkita oddiy harakatda ishtirok etadi: bittasi ilgarilama harakat, ikkinchisi aylanma harakat.

Bunday harakatda ham asosan ikkita masala yechiladi:

Birinci masalada shu qattiq jismning umumiy kinematikasi, ya'ni qaysi nuqtaligidan qat'iy nazar bo'lgan kinematik parametrlar, qattiq jismning burchak tezligi, burchak tezlanishi va qutb (polyus)ning harakat qonuni aniqlanadi.

Ikkinchi masalada shu qattiq jism ixtiyoriy nuqtasining kinematikasi, ya'ni uning trayektoriyasi, chiziqli tezligi va chiziqli tezlanishi aniqlanadi.

Agar shu ikkala masalani ixtiyoriy olingan vaqt uchun aniq tenglamalar orqali yecha olsak, qattiq jismning tekislikka parallel harakatining kinematikasini o'rgangan hisoblanamiz. Shu ikki masalani qanday yechish yo'llari bilan tanishib chiqamiz.

Dastlab, qattiq jismning birorta nuqtasini qutb deb tanlab olamiz. Qolgan barcha nuqtalarining harakatlari shu qutb nuqta orqali aniqlanadi. Qutbni tanlashda esa qaysi nuqtaning tezligi ma'lum bo'lsa, shu nuqtani qutb deb tanlab olinadi, agar tezligi nolga teng bo'lgan nuqta qutb deb qabul qilinsa, ishimiz yana ham a'lo bo'ladi.

Tekislikda Oxy qo'zg'almas koordinata o'qlarini o'tkazaylik (11.2-rasm). Agar qattiq jismdagi A nuqtaning harakat qonuni bizga ma'lum bo'lsa, uni qutb deb qabul qilaylik. Qattiq jismda ixtiyoriy boshqa B nuqtaning harakat qonunini aniqlash talab etilsin. U holda A nuqtani B nuqta bilan birlashtirsak, AB kesmaning harakati qattiq jismning tekis-parallel harakatining kinematikasini aniqlab beradi.

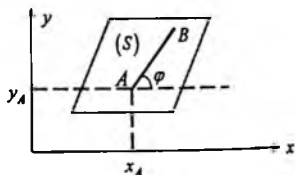
Qattiq jism tekislik-parallel harakat qilganda, masalan poyezd g'ildiragining harakati, tekislikka parallel harakatdan iborat bo'lganligi uchun, g'ildirakning markazini qutb deb qabul qilish mumkin, chunki u nuqtaning tezligi poyezdning tezligiga teng, u holda ixtiyoriy olingan vaqt uchun quyidagi tenglamalar sistemasi yoziladi:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Ushbu tenglamalar sistemasi, *tekis shakl harakatining tenglamalari* yoki *jism tekis-parallel harakatining tenglamalari* deyiladi. Ushbu tenglamalardan birinchi va ikkinchisi A qutb nuqtaning ilgarilanma harakat qonunini belgilab beradi, uchinchi funksiya esa jismning qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi. Demak, *har qanday tekislikka parallel harakat ikkita harakatlarning yig'indisidan iborat va ulardan biri qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat, ikkinchisi esa qutb atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo'lar ekan.*

Tekis shaklning harakat tenglamalari

s tekis shaklning Oxy tekisligidagi holati shu shaklda olingan biror AB kesmaning holati bilan aniqlanadi (11.3-rasm). O'z navbatida, agar A nuqtaning x_A, y_A koordinatalari va AB kesma bilan Ox o'qi orasidagi φ burchak ma'lum bo'lsa, AB kesmaning holati aniq bo'ladi. A nuqta *qutb* deb ataladi. Jismning harakatida x_A, y_A, φ lar vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi, ya'ni



11.3-rasm

$$\left. \begin{aligned} x_A &= f_1(t) \\ y_A &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

bo'ladi. x_A, y_A va φ lar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz, differensiallanuvchi funksiyalari bo'ladi.

(11.1) tenglamalar berilgan bo'lsa, istalgan t vaqt uchun s tekis shaklning Oxy harakat tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi.

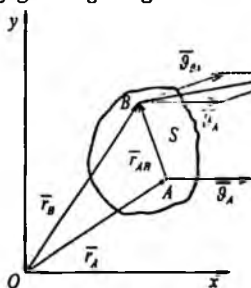
(11.1) tenglamalar *tekis shaklning harakat tenglamalari* deyiladi. Agar harakat davomida $\varphi = \text{const}$ bo'lsa, s tekis shakl ilgarilanma harakatda bo'ladi. Agar $x_A, y_A = \text{const}$ bo'lsa, s tekis shakl O nuqta atrofida aylanma harakat qiladi.

(11.1) ning uchinchi tenglamasidan t vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, s tekis shaklning O nuqta atrofidagi aylanma harakat *burchak tezligi* ω , ikki marta hosila olsak, ε *burchak tezlanishi* aniqlanadi:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash

Teorema: *Tekis shaklning biror nuqtasining tezligi, qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat chiziqli tezliklarining geometrik yig'indisiga teng.*



11.4-rasm

Isbot: Tekis shaklning Oxy tekisligidagi harakatini tekshiramiz (11.4-rasm). s tekis shaklning biror A nuqtasini qutb uchun tanlab, uning radius vektorini $\vec{r}_A$ bilan belgilaymiz, S tekis shaklning ixtiyoriy B nuqtasining radius vektorini $\vec{r}_B$. Rasmdan:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (11.2)$$

Bunda $\vec{r}_{AB}$ - B nuqtaning A nuqta atrofida aylanma harakat radius vektor. Nuqta haraktlanganda uning radius vektor, t vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi. B nuqtaning tezligi (11.2) dan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}, \\ \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \vec{v}_B, \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A, \quad \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_{AB}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

bu yerda $\vec{v}_{BA}$ - B nuqtaning A nuqta atrofidagi aylanma harakat tezligi:

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB}.$$

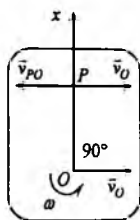
Bunda $\vec{\omega} \perp \overline{AB}$ bo'lgani uchun $\vec{v}_{AB}$ ning miqdori $v_{BA} = \omega \cdot AB$ bo'ladi. Bularning qiymatlarini (11.3) ga qo'ysak, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \quad (11.4)$$

Teorema isbotlandi.

Tezliklar oniy markazi

Berilgan onda tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasi *tezliklar oniy markazi* deyiladi. Tekis shaklning bunday nuqtasini topish uchun (11.4) formuladan foydalanamiz. Tekis shaklning biror O nuqtasining $\vec{v}_O$ ilgarilanma harakat tezligi va shu O nuqta atrofidagi aylanma harakat ω burchak tezligi berilgan bo'lsin (11.5-rasm). O nuqtani qutb nuqta deb olamiz. O nuqtadan $\vec{v}_O$ ga aylanma harakat yo'nalishiga tik chiziq o'tkazamiz. O'tkazilgan to'g'ri chiziq ustida shunday P nuqta topamizki, uning aylanish tezligi $\vec{v}_{PO}$ miqdor jihatidan qutb nuqta tezligiga teng bo'lsin, ya'ni $v_O = v_{PO}$ bo'lsin va yo'nalishi esa unga qarama-qarshi bo'lsin $\vec{v}_O = -\vec{v}_{PO}$.



11.5-rasm

Bu holda P nuqta tezligi quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = \vec{v}_{PO} - \vec{v}_{PO} = 0.$$

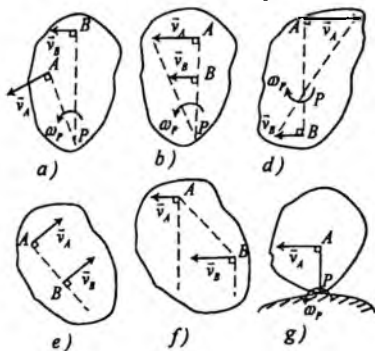
Shunday qilib, shu onda P nuqta tekis shaklning tezliklar oniy markazi bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $v_{PO} = v_O$ va bu holda $\omega \cdot OP = v_O$ bo'ladi. Bundan

$$OP = v_O / \omega.$$

Demak, tekis shaklning tezliklar oniy markazi, qutb nuqtadan uning tezligiga aylanish yo'nalishda tik o'tgan to'g'ri chiziqda qutb nuqtasidan v_O / ω masofada joylashgan bo'lar ekan.

Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari



11.6-rasm

1. Agar tekis shaklning biror A nuqtasining $\vec{v}_A$ tezligi va ikkinchi B nuqtasining $\vec{v}_B$ tezligining yo'nalishi berilgan bo'lsa, tezliklar oniy markazi shu A va B nuqtalardan tezliklarga o'tkazilgan tik chiziqlarni kesishgan nuqtasida bo'ladi (11.6-rasm, a);

2. Agar tekis shaklni ikki A va B nuqtalarini $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ tezliklari shu nuqtalarni

tutashtiruvchi AB ga tik, miqdorlari farqli bo'lsa ($v_A \neq v_B$), tezliklar oniy markazi tezliklarning uchini tutashtiruvchi chiziq bilan AB chiziq davomining kesishgan nuqtasida bo'ladi (11.6-rasm, b, d);

3. Agar tekis shaklning A va B nuqtalarining tezliklari teng va parallel bo'lsa, tezliklar oniy markazi ($AP = \infty$) cheksizlikda bo'ladi. Shu onda tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qiladi (11.6-rasm, e, f).

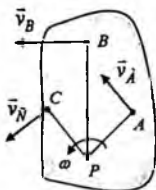
4. Amaliyotda ko'pincha tekis shakl s qo'zg'almas egri chizig'i ustida sirpanmasdan dumalaydi. Bu holda s ning egri chiziqqa tegib turgan nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi. Shu nuqta mazkur on uchun oniy markaz bo'ladi (11.6-rasm, g).

Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash

Berilgan onda tekis shaklning oniy markazi P ma'lum bo'lsin. P ni qutb nuqta uchun olib, (11.4) formulaga muvofiq tekis shaklning A , B , C nuqtalari tezliklarini topamiz:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{v}_{CP}. \quad (11.5)$$

Bu yerda $v_P = 0$ bo'lgani uchun $v_A = \omega_P \cdot AP$, $v_B = \omega_P \cdot BP$, $v_C = \omega_P \cdot CP$ yo'nalishlari $\vec{v}_A \perp \overline{AP}$, $\vec{v}_B \perp \overline{BP}$ va $\vec{v}_C \perp \overline{CP}$.



11.7-rasm

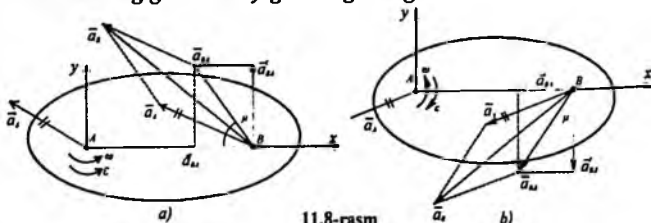
Agar tekis shaklning oniy markazi ma'lum bo'lsa, tekis shakl nuqtalarining shu ondagi tezliklari, oniy markazi atrofida huddi oddiy aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari kabi topiladi. Demak, tekis shaklning oniy markazi ma'lum bo'lganda, uning nuqtalari tezliklarining miqdorlari tekis shaklning aylanma harakat burchak tezligini nuqtalardan oniy markazgacha bo'lgan masofalarga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Tezliklar mos ravishda shu oraliqlarga aylanma harakat yo'nalishlarida tik yo'nalgan bo'ladi (11.7-rasm). (11.5) dan tekis shakl nuqtalarining oniy paytdagi tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP}.$$

Tekis shakl nuqtasining tezlanishi

Teorema: Tekis shaklning istalgan B nuqtasining tezlanishi ixtiyoriy ravishda tanlab olingan A qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi bilan qutb nuqta atrofida aylanma harakat tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.



11.8-rasm

Tekis shaklning A nuqtasini qutb deb olsak, ixtiyoriy B nuqtasining tezligi quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AB}. \quad (11.6)$$

(11.6) formuladan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\overline{AB}}{dt} \quad (11.7)$$

yoki

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}. \quad (11.8)$$

Bu formulani quyidagicha yozamiz

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \quad (11.9)$$

yoki

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \quad (11.10)$$

Bu tenglikdagi $\vec{a}_A$ tezlanish s tekis shakldan ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining ilgarilama harakat tezlanishi, $\vec{a}_{BA}$ esa B nuqtaning O qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezlanishini ifodalaydi. Teorema isbotlandi.

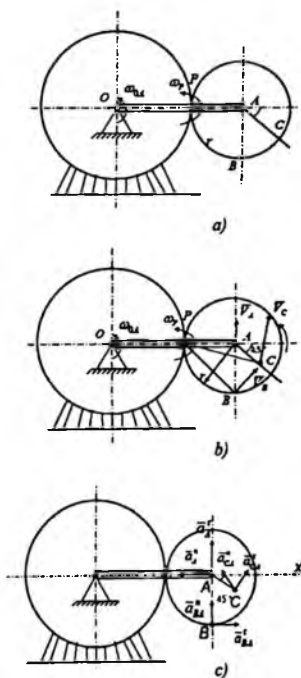
$$a_{BA}^t = \varepsilon \cdot AB, \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB. \quad (11.11)$$

(11.11) ni hisobga olib, aylanish radiusi AB bilan a_{BA} ning tashkil etgan burchagini μ harfi bilan belgilasak, quyidagi tenglikni olamiz:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|a_{BA}^t|}{|a_{BA}^n|} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (11.12)$$

Quyida qattiq jismning tekis-paralel harakatiga doir masalalarni ko'rib chiqamiz.

11.1-masala. R radiusli qo'zg'almas tishli g'ildirak bo'ylab dumalovchi $r=15 \text{ sm}$ radiusli tishli g'ildirak OA krivoship yordamida harakatga keltiriladi. Krivoship qo'zg'almas tishli g'ildirakning O



11.9-rasm

o'qi atrofida $\omega_{OI} = 2s^{-1}$ burchak tezlik va $\varepsilon_{OI} = 2s^{-2}$ burchak tezlanish bilan tekis tezlantuvchan harakat qiladi. B va C nuqtalarning tezlik va tezlantishlarini aniqlang. Bunda shatun uzunligi $AC = 8\text{ sm}$ va krivoship uzunligi $OA = 40\text{ sm}$ ga teng (11.9-rasm).

Yechish: Tekis-parallel harakatda tezlik va tezlantishlarni aniqlash usullaridan foydalanib, noma'lum v_B, v_C tezliklarni topamiz. Bunda biz P nuqtani tezliklarning oniy markazi deb tanlab olamiz. Chunki, har onda P nuqtaning tezligi nolga teng.

$$\vec{v}_B \perp BP, \quad \vec{v}_C \perp CP, \quad AP = r.$$

A nuqtaning tezligini aniqlaymiz. Buning uchun OA masofani ω_{OA} burchak tezlikka ko'paytiramiz:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 80\text{ sm/s}.$$

P nuqtaning burchak tezligini quyidagi formuladan aniqlaymiz:

$$\omega_P = \frac{v_A}{AP} = 5,3s^{-1}.$$

Pifagor teoremasiga asosan BP masofani aniqlab olamiz:

$$BP = \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2} = \sqrt{2r^2} = 21,2\text{ sm}.$$

$\triangle APC$ da CP masofani kosinuslar teoremasidan foydalanib topamiz:

$$CP = \sqrt{r^2 + (AC)^2 + 2r \cdot AC \cdot \cos 135^\circ} = 21,3\text{ sm}.$$

Natijada B va C nuqtalarning noma'lum v_B, v_C tezliklarini yuqoridagi ma'lumotlarga asoslanib aniqlaymiz. Ular quyidagilarga teng bo'ladi:

$$v_C = \omega_P \cdot CP = 113,42\text{ sm/s}, \quad v_B = \omega_P \cdot BP = 112,4\text{ sm/s}.$$

Endi B va C nuqtalarning tezlantishlarini aniqlaymiz, ya'ni, a_B, a_C noma'lumlarni topamiz. Buning uchun, tekis-parallel harakatda tezlantishlarni aniqlashni qutb va tezlantishlar oniy markazi usullaridan foydalanamiz.

A va B nuqtaning urinma va normal tezlantishini aniqlaymiz:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 160\text{ sm/s}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 80\text{ sm/s}^2.$$

$$a_{BA}^n = \omega_p^2 \cdot AB = 421,35 \text{ sm/s}^2,$$

$$\omega_p = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{r},$$

$$\varepsilon_p = \dot{\omega}_p = \frac{\dot{\omega}_{OA} \cdot OA}{r} = 5,3 \text{ rad/s}^2,$$

$$a_{BA}^t = \varepsilon_p \cdot AB = 5,3 \cdot r = 80 \text{ sm/s}^2,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n.$$

B nuqtaning barcha aniqlangan tezlanishlarini koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

Barcha tezlanishlarni Ox o'qidagi proyeksiyalari:

$$a_{Bx} = a_{BA}^t - a_A^n = -80 \text{ sm/s}^2.$$

Oy o'qidagi proyeksiyalari:

$$a_{By} = a_{BA}^n + a_A^t = 501,4 \text{ sm/s}^2.$$

B nuqtaning to'la tezlanishi quyidagiga teng bo'ladi:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 507,72 \text{ sm/s}^2.$$

C nuqtaning tezlanishi esa quyidagiga teng:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t.$$

C nuqtaning barcha aniqlangan tezlanishlarini koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_{Cx} = -a_A^n - (a_{CA}^n - a_{CA}^t) \cos 45^\circ = -288,9 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_{Cy} = a_A^t + (a_{CA}^n + a_{CA}^t) \cos 45^\circ = 610,2 \text{ sm/s}^2.$$

C nuqtaning tezlanishi $a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 675,1 \text{ sm/s}^2$ ga teng.

$$v_B = 112,36 \text{ sm/s}, \quad v_C = 113,42 \text{ sm/s},$$

Javob: $a_B = 507,72 \text{ sm/s}^2, \quad a_C = 675,1 \text{ sm/s}^2.$

11.2-masala. Tekis-parallel harakat qiladigan mexanik sistema berilgan. B va C nuqtalarning tezlik va tezlanishlari aniqlansin (11.10-rasm, a). Bunda berilgan masofalar: $AB = 20 \text{ sm}$, $AC = 10 \text{ sm}$, A nuqtaning tezlik va tezlanishi $v_A = 40 \text{ sm/s}$, $a_A = 20 \text{ sm/s}^2$ ga teng.

Yechish: B va C nuqtalarning tezliklarini aniqlaymiz. P nuqtani tezliklar oniy markazi sifatida tanlab olamiz. Chunki, shu nuqtaning tezligi nolga teng.

$$BP = AP \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = AP \cdot \sqrt{3} = 17,3 \text{ sm}$$

A nuqtaning tezligi orqali P nuqtaning burchak tezligini topib, B va C nuqtalarning tezliklarini aniqlaymiz:

$$v_A = \omega_P \cdot AP, \quad \omega_P = \frac{v_A}{AP} = 4 \text{ rad/s},$$

$$v_B = \omega_P \cdot BP = 69,3 \text{ sm/s},$$

$$v_C = CP \cdot \omega_P = 40 \text{ sm/s}.$$

B nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t,$$

$$a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 160 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_{BA}^t = AB \cdot \varepsilon_{BA}.$$

Tezlanishlarni Ox o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$-a_B \cdot \sin 30^\circ + a_A \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^n = 0.$$

Tezlanishlarni Oy o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ + a_A \cdot \sin 30^\circ - a_{BA}^t = 0, \quad a_B = \frac{a_A}{\dots}$$

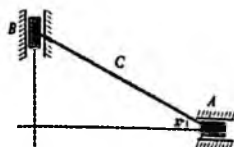
C nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t, \quad a_{CA}^n = \omega_{CA}^2 \cdot AC = 60 \text{ sm/s}^2,$$

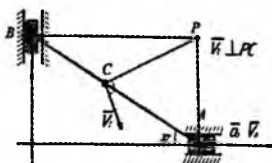
$$a_{CA}^t = \varepsilon_{CA} \cdot AC = 297 \text{ sm/s}^2, \quad a_{BA}^t = AB \cdot \varepsilon_{BA}, \quad \varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = 29,7 \text{ rad/s}^2.$$

Aniqlangan tezlanishlarni Ox va Oy koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz:

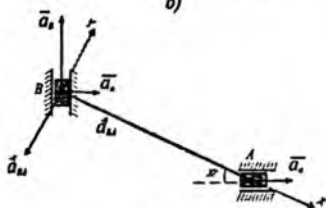
$$a_{CX} = a_{CA}^n + a_A \cos 30^\circ, \quad a_{CY} = -a_{CA}^t + a_A \sin 30^\circ,$$



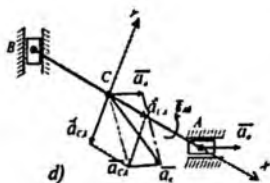
a)



b)



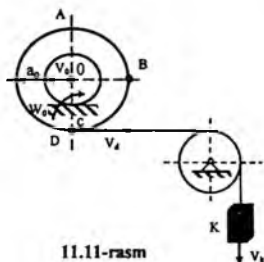
c)



11.10-rasm

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{(a_{CA}^n + a_a \cos 30^\circ)^2 + (-a_{CA}^t + a_a \sin 30^\circ)^2} = 329 \text{ sm/s}^2.$$

Javob: $v_B = 69,3 \text{ sm/s}$, $v_C = 40 \text{ sm/s}$, $a_B = 674,6 \text{ sm/s}^2$, $a_C = 329 \text{ sm/s}^2$.



11.11-rasm

11.3-masala. Cho'zilmaydigan ip bilan g'altakka bog'langan K yuk $x=r^2$ qonunga ko'ra vertikal pastga tushadi. Bunda g'altak qo'zg'almas gorizontal ip bo'ylab sirg'anmasdan yumalaydi. $t=0,5 \text{ s}$ paytga mos keluvchi rasmda tasvirlangan holat uchun g'altak gardishidagi A, B va D nuqtalarning tezlanishlari,

g'altakning burchak tezligi va burchak tezlanishi aniqlansin. $AD \perp OB$ va $OD = 2 \cdot OC = 0,2 \text{ m}$ (11.11-rasm).

Yechish: K jismning tezligini aniqlaymiz:

$$v_K = \dot{x} = 2t \text{ m/s}.$$

D nuqtaning tezligi ham shu v_K ga teng. Tezliklar oniy markazi C nuqtada joylashadi. $v_C = 0$ bo'lgani uchun

$$\omega_P = \frac{v_D}{CD} = \frac{v_D}{0,1} = 20t \text{ rad/s}.$$

$$t = 0,5 \text{ s da } \omega_P = 20 \text{ rad/s}^2.$$

O nuqtaning tezligini aniqlaymiz:

$$v_O = \omega_P \cdot OC = 20t \cdot 0,1 = 2 \text{ m/s},$$

$$\varepsilon_P = \omega_P' = 20 \text{ rad/s}^2.$$

O nuqtani qutb deb olamiz.

$$a_O = v_O' = 2 \text{ m/s}^2.$$

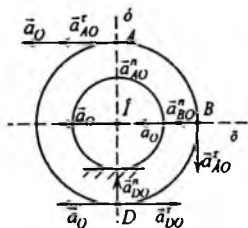
Tezlanishni qutb usulida aniqlaymiz:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t.$$

A nuqtaning O atrofida aylanma harakat tezlanishini aniqlaymiz:

$$a_{AO}^n = \omega_P^2 \cdot OA = 20 \text{ m/s}^2, \quad a_{AO}^t = \varepsilon_P \cdot OA = 4 \text{ m/s}^2.$$

Rasmdan foydalangan holda tezlanishni x va y o'qlariga proyeksiyalaymiz:



11.12-rasm

$$a_{Ox} = -a_O - a_{AO}^r = -6 \text{ m/s}^2, \quad a_{Oy} = -a_{AO}^n = -20 \text{ m/s}^2,$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = 20,88 \text{ m/s}^2.$$

Xuddi shunday usulda D va B nuqtalarning tezlanishlarini aniqlaymiz (11.12-rasm):

$$\vec{a}_D = \vec{a}_O + \vec{a}_{DO}^r + \vec{a}_{DO}^n, \quad a_{DO}^r = \omega_P^2 \cdot OD = 20 \text{ m/s}^2, \quad a_{DO}^n = \varepsilon_P \cdot OD = 4 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{Ox} = -a_O + a_{DO}^r = 2 \text{ m/s}^2, \quad a_{Oy} = a_{DO}^n = 20 \text{ m/s}^2, \quad a_D = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = 20,1 \text{ m/s}^2,$$

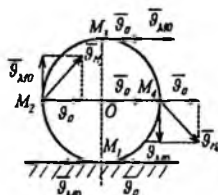
$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}^r + \vec{a}_{BO}^n, \quad a_{BO}^r = \omega_P^2 \cdot OB = 20 \text{ m/s}^2, \quad a_{BO}^n = \varepsilon_P \cdot OB = 4 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{Ox} = -a_O - a_{BO}^r = -22 \text{ m/s}^2, \quad a_{Oy} = a_{BO}^n = -4 \text{ m/s}^2, \quad a_B = \sqrt{a_{Ox}^2 + a_{Oy}^2} = 22,36 \text{ m/s}^2.$$

Javob: $a_A = 20,88 \text{ m/s}^2, \quad a_B = 22,36 \text{ m/s}^2, \quad a_D = 20,1 \text{ m/s}^2.$

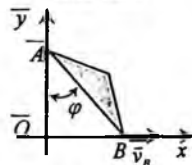
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $R=0,5 \text{ m}$ radiusli g'ildirak to'g'ri chiziqli yo'l sohasida sirpanmay g'ildiraydi. G'ildirak markazining tezligi o'zgarmas bo'lib, $v_O=10 \text{ m/s}$ ga teng. G'ildirakning vertikal va gorizontal diametrlarining uchlari bo'lmish M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalarning tezliklari va g'ildirakning burchak tezligini aniqlang (11.13-rasm).



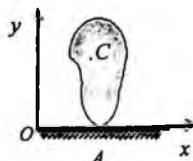
11.13-rasm

2-masala. Uchburchakning A va B uchlari harakat paytida O_x va O_y o'qlari bo'yicha sirpanadi. Agar $AB=5 \text{ m}$ va B nuqtasi $x_B=1 \text{ m}$ holatdan o'zgarmas $v_B=1 \text{ m/s}$ tezlik bilan harakat qilsa, $t_1=3 \text{ s}$ paytda φ burchakning qiymatini aniqlang (11.14-rasm).



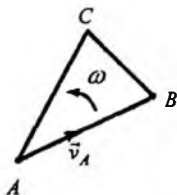
11.14-rasm

3-masala. Jism berilgan onda tekislikka tegib turgan nuqtasi atrofida aylanadi. Agar jismning C nuqtasi 6 m/s tezlikka ega bo'lib, $AC=22 \text{ sm}$ bo'lsa, jismning burchak tezligini hisoblang (11.15-rasm).



11.15-rasm

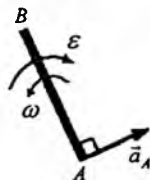
4-masala. ABC tekis shakl A nuqtasining tezligi $v_A=1 \text{ m/s}$, burchak tezligi $\omega=4 \text{ rad/s}$ va AB masofa $1,5 \text{ m}$ bo'lsa, B nuqtasining tezligini



11.16-rasm

toping (11.16-rasm).

5-masala. Uzunligi 2 m bo'lgan AB sterjen tekislik bo'ylab harakatlanadi. Agar uning burchak tezligi $\omega = 3\text{ rad/s}$, burchak tezlanishi $\varepsilon = 2\text{ rad/s}^2$ va A nuqtasining tezlanishi $a_A = 3\text{ m/s}^2$ bo'lsa, B nuqtasining tezlanishini hisoblang (11.17-rasm).



11.17-rasm

Nazorat savollari

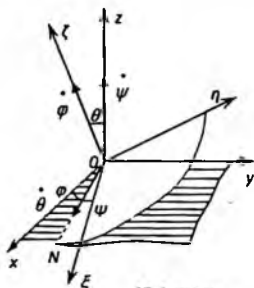
1. Tekis-parallel harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tekis-parallel harakatni nechta oddiy harakatga ajratish mumkin?
3. Tekis-parallel harakatdagi jismning burchak tezlik vektori qutbni qanday tanlanishiga bog'liq bo'ladimi?
4. Tekis shaklning harakat tenglamalarini yozib bering.
5. Tekis-parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezliklarini aniqlovchi vektor tenglamani yozib bering.
6. Qutb nima va u qanday tanlab olinadi?
7. Tekis-parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezliklarini proyeksiyalari haqidagi teoremani aytib bering.

12. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS NUQTA ATROFIDA AYLANMA HARA-KATI (SFERIK HARA-KAT)

Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat tenglamalari

Jism harakatlanayotganda uning bitta nuqtasi doimo qo'zg'almas qoladigan harakatga *qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat* yoki *sferik harakat* deyiladi.

Tayanch tekisligidagi nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan pildiroqning harakati yoki birgina sferik shamirli bog'lanish qo'yilgan jismning harakati sferik harakatga misol bo'la oladi. Sferik harakatni o'rganish uchun jism bilan birga



12.1-rasm

harakatlanadigan $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi va $Oxyz$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasini o'tkazamiz (12.1-rasm).

Jism bilan birga harakatlanuvchi $O\xi\eta$ tekislikning qo'zg'almas Oxy tekislik bilan kesishish chizig'i, ON tugunlar chizig'i deyiladi.

$O\xi$ va ON orasidagi burchak, ψ – *presessiya burchagi*, Ox va ON orasidagi burchak, φ – *sof aylanish burchagi*, Oz va $O\xi$ orasidagi burchak, θ – *nutatsiya burchagi* deyiladi. ψ, φ, θ burchaklarning musbat yo'nalishlari mos ravishda Oz , $O\xi$ va ON o'qlar uchlaridan qaraganda bu burchaklarning o'zgarishi soat mili aylanishiga teskari ko'rinadigan qilib olinadi. ψ, φ, θ – *Eyler burchaklari* deyiladi.

Eyler teoremasi. *Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi ixtiyoriy ko'chishini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi uchta o'q atrofida ketma-ket uchta aylantirish bilan bajarish mumkin.*

Jismning istalgan paytdagi holatini bir-biriga bog'liq bo'lmagan uchta Euler burchaklari vositasida aniqlash mumkin. Jismning harakati davomida bu burchaklar vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (12.1)$$

Bu tenglamalar qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jismning kinematik tenglamalari yoki *sferik harakat tenglamalari* deyiladi.

Oniy burchak tezlik

Eyler–Dalanber teoremasi: *Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishini shu qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida bir aylantirish bilan bajarish mumkin.*

Bu teoreмага ko'ra, jismning sferik harakati har onda o'z holatini o'zgartiruvchi va qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi oniy o'qlar atrofida oniy aylanishlar majmuasi deb qaralishi mumkin.

Bunda har bir oniy aylanish o'qi atrofidagi oniy aylanishning burchak tezligi sferik harakatdagi jismning burchak tezligi deb qaraladi va $\vec{\omega}$ bilan belgilanadi. $\vec{\omega}$ vektor oniy aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiriladi.

Harakat Eyler burchaklari orqali tekshiriladigan bo'lsa, sferik harakatni har onda uchta kesishuvchi o'qlar va (Ox, Oy, Oz) atrofidagi oniy aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu holda oniy burchak tezligi uchun quyidagi ifoda o'rinli bo'ladi:

$$\vec{\omega} = \vec{\psi} + \vec{\varphi} + \vec{\theta}.$$

Uning qo'zg'almas koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi ifodalar bilan aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Shuningdek, oniy burchak tezligining qo'zg'aluvchi koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini ham topish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{\eta} &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

(12.2) va (12.3) formulalar *Eylerning kinematik tenglamalari* deyiladi.

(12.2) va (12.3) ga ko'ra, oniy burchak tezlikning miqdori quyidagicha topiladi:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 + \omega_{\zeta}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta}. \quad (12.4)$$

Burchak tezlikning yo'nalishi bu holda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari orqali ifodalanadi:

$$\cos(\vec{\omega}, Ox) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, Oy) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, Oz) = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad (12.5)$$

yoki

$$\cos(\hat{\vec{\omega}}, O\xi) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\hat{\vec{\omega}}, O\eta) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\hat{\vec{\omega}}, O\zeta) = \frac{\omega_z}{\omega}. \quad (12.6)$$

Oniy burchak tezlanishi

Sferik harakatdagi jismning oniy burchak tezlanishi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt \quad (12.7)$$

Bunda $\vec{\omega}$ miqdor va yo'nalishi bo'yicha o'zgaruvchi vektordan iborat bo'lishini nazarda tutsak, sferik harakatdagi jismning biror ondagi burchak tezlanishi mazkur jismning shu ondagi burchak tezlik vektori uchining tezligi deb qaralishi mumkin, degan xulosaga kelamiz. Bu tezlikni $\vec{u}$ bilan belgilasak:

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt = \vec{u}. \quad (12.7)$$

Binobarin, oniy burchak tezlanish vektori burchak tezlik godografiga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi (12.2-rasm).

Agar $\vec{\omega}$ vektorning qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalari $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ bo'lib, qo'zgaluvchan o'qlardagi proyeksiyalari $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ ma'lum bo'lsa, oniy burchak tezlanishining shu o'qlardagi proyeksiyalari mos ravishda quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y, \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \quad (12.8)$$

yoki

$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi, \quad \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta, \quad \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta. \quad (12.9)$$

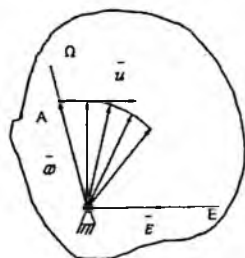
U holda burchak tezlanish vektorining moduli

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2} \quad (12.10)$$

formuladan, yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi:

$$\cos(\hat{\vec{\varepsilon}}, O\xi) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}, \quad \cos(\hat{\vec{\varepsilon}}, O\eta) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}, \quad \cos(\hat{\vec{\varepsilon}}, O\zeta) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \quad (12.11)$$

yoki

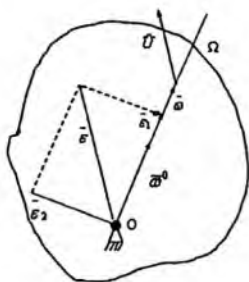


12.2-rasm

$$\cos(\vec{\varepsilon}, O\vec{F}) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}; \cos(\vec{\varepsilon}, O\vec{\eta}) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}; \cos(\vec{\varepsilon}, O\vec{\zeta}) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \quad (12.12)$$

Jismning oniy burchak tezlanishini topishda quyidagi uchinchi usulni ham qo'llash mumkin. Bu usulga ko'ra, aylanish oniy o'qi bo'yicha yo'nalgan $\vec{\omega}_0$ birlik vektor kiritib, $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}_0$ deb olsak, (12.7) formula quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2. \quad (12.13)$$



12.3-rasm

(12.13) da $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}_0$ - jism oniy burchak tezligi miqdorining o'zgarishini ifodalab, $\vec{\omega}_0$ ya'ni $\vec{\omega}$ bo'yicha yo'naladi. $\vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt}$ esa oniy burchak tezligi yo'nalishining o'zgarishini ifodalaydi va birlik vektorning hosilasi xossasiga ko'ra, $\vec{\omega}_0$ vektorga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi (12.3-rasm).

Binobarin $\vec{\varepsilon}_1$ va $\vec{\varepsilon}_2$ orasidagi burchak to'g'ri burchakdan iborat.

Shunga ko'ra, oniy burchak tezlanish miqdori quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}. \quad (12.14)$$

Yo'nalishini esa uning $\vec{\omega}$ bilan tashkil qilgan burchak kosinusi orqali aniqlash mumkin:

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (12.15)$$

Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezligi

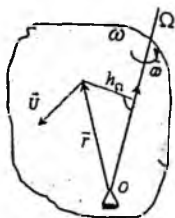
Jismning sferik harakatini har onda oniy burchak tezlik vektori bo'yicha yo'nalgan $O\Omega$ aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakat qiladi deb qarash mumkin. Shunga asosan, sferik harakatdagi jism M nuqtasining O qo'zgalmas markazga nisbatan radius vektorini $\vec{r}$, oniy burchak tezlik vektorini $\vec{\omega}$ bilan

belgilansa, mazkur nuqta tezligi, Eyer formulasiga ko'ra quyidagicha aniqlanadi (12.4-rasm):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.16)$$

(12.16) ga asosan tezlik miqdori

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\hat{\vec{\omega}}, \vec{r}) = \omega \cdot h_n \quad (12.17)$$



12.4-rasm

formuladan aniqlanadi, bunda h_n - M nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa.

Agar sferik harakatdagi jism M nuqtasining koordinatalari (x, y, z) yoki (ξ, η, ζ) hamda oniy burchak tezlik vektorining o'qlardagi proyeksiyalari $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ yoki $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ aniq bo'lsa, (12.16) dan tezlikning qo'zgalmas yoki qo'zgaluvchi koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \cdot \zeta - \omega_\zeta \cdot \eta \\ v_\eta &= \omega_\zeta \cdot \xi - \omega_\xi \cdot \zeta \\ v_\zeta &= \omega_\xi \cdot \eta - \omega_\eta \cdot \xi \end{aligned} \right\}. \quad (12.18)$$

Binobarin tezlik modulini aniqlashda quyidagi formulalardan foydalanish mumkin:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2}. \quad (12.19)$$

Tezlik yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi:

$$\cos(\hat{\vec{v}}, x) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\hat{\vec{v}}, y) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\hat{\vec{v}}, z) = \frac{v_z}{v}. \quad (12.20)$$

Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezlanishi

Bitta qo'zgalmas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jism nuqtasining tezlanishi quyidagi Rivals teoremasiga ko'ra aniqlanadi (12.5-rasm):

$$\vec{a} = \vec{a}^{om} + \vec{a}^{im}. \quad (12.21)$$

Bunda $\vec{a}^{om} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ - aylanma tezlanish, $\vec{a}^{im} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$ - o'qqa intilma tezlanish deyiladi. Vektor ko'paytma ta'rifga ko'ra:

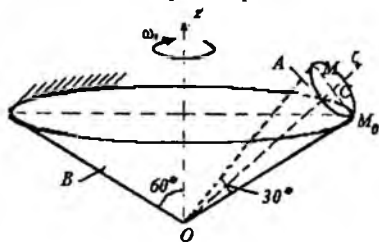
$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \varepsilon_{\eta} \zeta - \varepsilon_{\zeta} \cdot \eta + \omega_{\xi} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \xi \\ a_{\eta} &= \varepsilon_{\eta} \xi - \varepsilon_{\xi} \cdot \zeta + \omega_{\eta} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \eta \\ a_{\zeta} &= \varepsilon_{\xi} \cdot \eta - \varepsilon_{\eta} \cdot \xi + \omega_{\zeta} (\omega_{\xi} \cdot \xi + \omega_{\eta} \cdot \eta + \omega_{\zeta} \cdot \zeta) - \omega^2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

(12.25) formulada ξ, η, ζ harflarni mos ravishda x, y, z ga almashtirish bilan tezlanish vektorining qo'zg'almas o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi. Bu holda tezlanish moduli quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_{\xi}^2 + a_{\eta}^2 + a_{\zeta}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (12.26)$$

Yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi.

12.1-masala. A konus qo'zg'almas B konusning ichida sirpanmay g'ildiraydi; bunda A konusning $O\zeta$ simmetrik o'qi qo'zg'almas Oz o'q atrofida o'zgarmas $\omega_1 = 2 \text{ s}^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanib, O nuqta qo'zg'almay qoladi. Konuslarning o'q kesimlari shakl

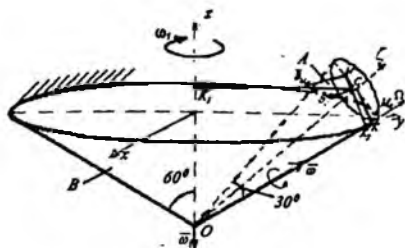


12.6-rasm

tekisligida joylashgan hamda $OM_0 = l = 50 \text{ sm}$, $M_0M = 20 \text{ sm}$ deb olib, A konusning burchak tezligi, burchak tezlanishi, M nuqtasining tezlik va tezlanishi topilsin. Burchaklar rasmda ko'rsatilgan (12.6-rasm).

Yechish: Bu masala qo'yilishi bo'yicha yuqorida ko'rsatilgan hollarning ikkinchisiga mos keladi; shuningdek, burchak tezlikning miqdori o'zgarmay qoladi. Shuni e'tiborga olib, ko'rsatilgan ketma-ketlik asosida masalani hal qilamiz.

1. $Oxyz$ qo'zg'almas koordinata sistemasini qo'zg'almas konusga bog'lab, qo'zg'aluvchi sistemaning Oz o'qini esa A konus simmetriya o'qi bo'ylab yo'naltiramiz.



12.7-rasm

2. A konusning oniy burchak tezligini aniqlaymiz. A konus qo'zg'almas B konus ichki sirtida sirpanmasdan dumalagani uchun aylanish oniy o'qi OX bu konuslar yasovchilarining urinish chizig'i OM_0 bo'ylab

yo'naladi (12.7-rasm).

A konusning C nuqtasini bir tomondan Oz o'q atrofida ω_1 burchak tezlik bilan, ikkinchi tomondan OX oniy o'q atrofida ω burchak tezlik bilan aylanishini e'tiborga olib, bu nuqta tezligini quyidagicha ifodalaymiz:

$$v_e = \omega_1 \cdot K_1C, \quad v_e = \omega \cdot h_n = \omega \cdot KC.$$

Bu tengliklarda K_1C va KC mos ravishda C nuqtadan Oz va OX o'qlargacha bo'lgan masofalar:

$$K_1C = OS \cdot \sin 45^\circ = l \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 45^\circ = 34,15 \text{ sm}, \quad KC = l \cdot \sin 15^\circ = 12,94 \text{ sm}.$$

U holda

$$v_e = 68,3 \text{ sm}, \quad \omega = v_e / KC = 5,28 \text{ s}^{-1}.$$

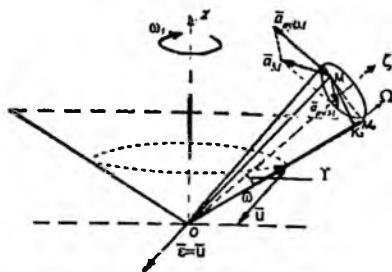
C nuqta tezligi yo'nalishiga ko'ra, $\vec{\omega}$ vektori $\overline{OM_0}$ bo'yicha yo'nalgan. $\omega_1 = \text{const}$ bo'lganidan $v_e = \text{const}$, binobarin $\omega = \text{const}$ bo'ladi.

3. A konus M nuqtasining tezligini topamiz. Konusning harakatini OX aylanish oniy o'qi atrofida oniy aylanma harakat deb qarash, (12.18) formulaga binoan:

$$v_M = \omega \cdot MK_2 = \omega \cdot M_0M \cdot \sin 75^\circ = 101,97 \text{ sm/s}.$$

$\vec{v}_M$ vektor MK_2 ga tik ravishda rasm tekisligidan o'tuvchi tomon yo'nalgan.

4. A konus burchak tezlanishini aniqlaymiz. Oniy burchak tezlanishini (12.8) formula asosida topamiz, ya'ni miqdor jihatdan o'zgarmas bo'lgan $\vec{\omega}$ vektor uchining tezligini aniqlaymiz. $\vec{\omega}$ vektorning uchi "radiusi" $\omega \sin 60^\circ$ ga teng, simmetriya o'qi, Oz bo'lgan aylana bo'ylab ω_1 burchak tezlikda harakatlanadi (12.8-rasm). Shunga ko'ra:



12.8-rasm

$$\varepsilon = u = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 60^\circ = 9,15 \text{ s}^{-2}.$$

$\vec{\varepsilon}$ vektori $\vec{u}$ vektorga parallel ravishda rasm tekisligiga tik yo'nalgan va O nuqtaga qo'yilgan.

5. A konus M nuqtasining tezlanishini topamiz. Bunda Rivals teoremasini ifodalovchi (12.22) formuladan foydalanamiz:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{orl} + \vec{a}_M^{inu}.$$

$$(12.23) \text{ ga binoan: } a_M^{orl} = \varepsilon \cdot OM \cdot \sin(\hat{\vec{\varepsilon}}, \overline{OM}) = \varepsilon \cdot OM \text{ (chunki}$$

$$\hat{\vec{\varepsilon}}, \overline{OM} = 90^\circ).$$

12.8-rasmdan:

$$OM = \sqrt{(OM_0)^2 + (M_0M)^2 - 2OM_0 \cdot M_0M \cdot \cos 75^\circ} = 48,81 \text{ sm}.$$

$$\text{Binobarin, } a_M^{orl} = \varepsilon \cdot OM = 446,6 \text{ sm/s}^2.$$

$\vec{a}_M^{inu}$ vektor rasm tekisligida joylashgan va OM ga tik yo'nalgan. (12.24) dan foydalanib, $\vec{a}_M^{inu}$ ni topamiz:

$$a_M^{inu} = \omega^2 \cdot MK_2 = 538,4 \text{ sm/s}^2.$$

$\vec{a}_M^{inu}$ vektor ham rasm tekisligida joylashib, MK_2 bo'ylab aylanish oniy o'qi tomon yo'nalgan. Tezlanish modulini aniqlashdan oldin, $\vec{a}_M^{orl}$ va $\vec{a}_M^{inu}$ vektor tashkil qilgan burchakni topamiz. $\vec{a}_M^{orl} \perp OM$, $\vec{a}_M^{inu} \perp OM_0$ ekanidan $(\hat{\vec{a}_M^{orl}}, \vec{a}_M^{inu}) = M \hat{O} M_0 = \gamma$.

$$\Delta MOK_2 \text{ dan: } \cos \gamma = \frac{OK_2}{OM} = \frac{OM_2 - K_2M_0}{OM} = \frac{50 - M_0M \cdot \sin 15^\circ}{48,81} = 0,92.$$

Tezlanishlar uchun kosinuslar teoremasini qo'llaymiz:

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\varphi})^2 + (a_M^{\theta})^2 - 2a_M^{\varphi} \cdot a_M^{\theta} \cdot \cos \gamma} = 216,57 \text{ sm/s}^2.$$

$\vec{a}_M$ vektor yo'nalishini aniqlash uchun bu vektorning MK_2 bilan tashkil qilgan α burchagini topamiz. Sinuslar teoremasiga binoan:

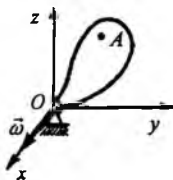
$$\frac{a_M}{\sin \gamma} = \frac{a_M^{\varphi}}{\sin \alpha}; \quad \sin \alpha = \frac{a_M^{\varphi} \cdot \sin \gamma}{a_M} = 0,808; \quad \alpha \approx 54^\circ.$$

Javob: Shunday qilib, berilgan onda M nuqta tezlanishi miqdori $a_M = 216,57 \text{ sm/s}^2$ ga teng bo'lib, rasm tekisligida yotadi va MM_0 kesma bilan $54^\circ + 15^\circ = 69^\circ$ burchak tashkil etadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Jism $\varphi = \pi \sin t$; $\theta = \pi \cos t$ va $\varphi = \pi$ qonun bo'yicha sferik harakat qilsa, uning burchak tezligining miqdori aniqlansin.

2-masala. Jism qo'zg'almas O nuqta atrofida o'zgarmas $\omega = 2 \text{ rad/s}$ burchak tezlik bilan aylanadi. Berilgan vaqtda aylanish oniy o'qi Ox o'qi bilan ustma-ust tushsa, koordinatalari, $x_A = 0$; $y_A = 0,2 \text{ m}$; $z_A = 0,4 \text{ m}$ bo'lgan A nuqta tezligining miqdori aniqlansin (12.9-rasm).



12.9-rasm

3-masala. Sferik harakatdagi jismning biror vaqtdagi oniy burchak tezlanishi $\vec{\varepsilon} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ga teng. Radius-vektori $\vec{r}_A = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ bo'lgan A nuqtaning aylanma (urinma) tezlanishi miqdori aniqlansin.

4-masala. Sferik harakatlanayotgan jismning biror ondagi burchak tezligi $\vec{\omega} = \vec{i} + \vec{j}$ va burchak tezlanishi $\vec{\varepsilon} = \vec{j} - \vec{k}$ ga teng bo'lsa, radius vektori $\vec{r}_N = 0,3\vec{i} + 0,2\vec{k}$ bo'lgan N nuqtasining tezlanishi hisoblansin.

Nazorat savollari

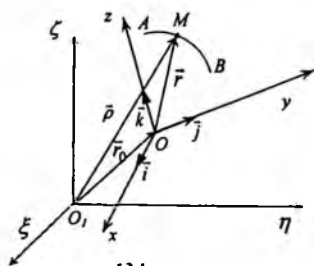
1. Sferik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Eyler burchaklari deb nimaga aytiladi?

3. Oniy burchak tezligi nima?
4. Oniy burchak tezlanishi nima?
5. Oniy burchak tezlanishi qanday tashkil etuvchilarga ajraladi?
6. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezligi qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasida qanday aniqlanadi?
7. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezlanishi qo'zg'almas koordinatalar sistemasida qanday aniqlanadi?
8. Sferik harakatdagi jism nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi?
9. Aylanma tezlanish nima?
10. O'qqa intilma tezlanish qanday aniqlanadi?

13. NUQTANING MURAKKAB HARAKATI. KORIO LIS TEZLANISHI

Nuqta bir vaqtning o'zida ikki yoki undan ortiq harakatda ishtirok etsa, uning bunday harakatiga *murakkab harakat* deyiladi. Moddiy nuqta yoki jismning murakkab harakatiga misollar: daryoda suzayotgan qayiq, harakatlanayotgan eskalator da yurayotgan kishi, harakatdagi kulisaning toshi, tebranayotgan silindrdagi porshen harakati va boshqalar. Qattiq jismning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan tekshiramiz. Masalan, harakatlanayotgan poyezd ichidagi harakatdagi jismning yerga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat. Jismning harakatini bevosita yerga nisbatan tekshirib bo'lmaydi. Bu harakatni poyezd bilan bog'langan qo'zg'aluvchi hamda yer bilan biriktirilgan qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan tekshirsak, harakatlanuvchi jismning murakkab harakatini ikkita oddiy harakatlarga keltirib tekshirgan bo'lamiz.

Nuqtaning qo'zg'almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan murakkab harakatini tekshiramiz. Buning uchun $O\xi\eta\zeta$ sistemaga nisbatan harakatlanuvchi $Oxyz$ koordinatalar



13.1-rasm

sistemasini olamiz (13.1-rasm). $O_1\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas sanoq sistemasi va u qanqaydir shartli qo'zg'almas jism bilan bog'langan (masalan, Yer bilan). $Oxyz$ qo'zg'aluvchi sanoq sistemasi va u qanqaydir qo'zg'aluvchi jism bilan bog'langan. M nuqtaning shu ikki sistemaga nisbatan harakatini tekshiramiz. Bu ikki sistemaga nisbatan M nuqtaning harakati

ikki xil bo'ladi. Bu ikki harakatni bir-biridan farq qilish uchun belgilashlar kiritiladi.

Harakatlanuvchi M nuqtaning qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatiga *nisbiy harakat* deyiladi. M nuqtani qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatsiz deb qarab, shu sistema bilan birgalikda qo'zg'almas $O_1\xi\eta\zeta$ sistemaga nisbatan harakatiga *ko'chirma harakat* deyiladi. Harakatlanuvchi M nuqtani bevosita $Oxyz$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatiga *murakkab* yoki *absolyut harakat* deyiladi. Nuqtaning nisbiy harakati tekshirilganda, qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini harakatda ekanligini nazarda tutib, harakatini faqat shu sistemaga nisbatan kuzatiladi. Bu kuzatilgan harakat trayektoriyasiga *nisbiy harakat trayektoriyasi* deyiladi. Nisbiy trayektoriya bo'ylab nuqtaning tezligiga *nisbiy tezlik*, nisbiy tezlikning o'zgarishini ifodalovchi tezlanishga *nisbiy tezlanish* deyiladi. Nisbiy tezlik $\bar{v}$, va nisbiy tezlanish $\bar{a}$, bilan belgilanadi. Yuqorida keltirilgan misolda jismning nisbiy harakati faqat poyezdga (poyezd bilan bog'langan sistemaga) nisbatan kuzatiladi. Jismning poyezdga nisbatan tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezlanish bo'ladi.

Harakati kuzatilayotgan paytda M nuqta qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasining biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan deb qarab, shu nuqtaning tezligiga *ko'chirma tezlik* va tezlanishiga *ko'chirma tezlanish* deyiladi. Ko'chirma tezlikni $\bar{v}_k$,

ko'chirma tezlanishni $\bar{a}_c$ deb belgilanadi. Keltirilgan misolda jism (nuqta) poyezdning biror nuqtasida joylashgan deb qarab, jismning poyezd bilan yerga nisbatan harakati ko'chirma harakat bo'ladi.

Nuqtaning bevosita $O\xi\eta\zeta$ qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan absolyut harakati tezligiga *absolyut tezlik*, tezlanishiga *absolyut tezlanish* deyiladi. Absolyut tezlik $\bar{v}_a$, absolyut tezlanish $\bar{a}_a$ bilan belgilanadi. Keltirilgan misolda poyezd ichidagi harakatlanayotgan jismning to'g'ridan-to'g'ri yer bilan bog'langan koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati absolyut harakat bo'ladi.

Qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinata sistemasining koordinata o'qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ deb belgilab, $\bar{v}$, va $\bar{a}$, ni quyidagi ko'rinishlarda yozamiz:

$$\bar{v}_r = v_{rx}\bar{i} + v_{ry}\bar{j} + v_{rz}\bar{k}, \quad (13.1)$$

$$\bar{a}_r = a_{rx}\bar{i} + a_{ry}\bar{j} + a_{rz}\bar{k}. \quad (13.2)$$

Ko'chirma va absolyut harakatlarning tezlik hamda tezlanishlari harakatlanuvchi $Oxyz$ sistemaning harakatiga bog'liq bo'ladi.

Keyingi misol sifatida harakatdagi suv kemasining palubasi ustida dumalayotgan sharning harakatini olaylik. Sharning palubaga nisbatan harakati nisbiy harakat, tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi esa nisbiy tezlanish bo'ladi. Suv kemasining qirg'oqqa nisbatan harakati shar uchun ko'chirma harakat hisoblanadi va palubaning shar egallagan joydagi tezligi ko'chirma tezlik, tezlanishi esa ko'chirma tezlanish hisoblanadi. Sharning qirg'oqqa nisbatan harakati absolyut harakat, tezligi absolyut tezlik, tezlanishi esa absolyut tezlanish bo'ladi.

Yana bir misol sifatida Oydagi nuqta(jism)ning harakatini keltirish mumkin. Nuqta Oyga nisbatan harakat qilib, o'z navbatida Oy ham yer atrofida aylanma harakat qiladi. Qo'zg'almas koordinatalar sistemasini Yer bilan bog'langan sanoq sistemasi, qo'zg'aluvchan koordinatalar sistemasini esa Oy bilan bog'langan sanoq sistemasi deb qarasak, Oydagi jismning Oyga nisbatan harakati nisbiy harakat, bu harakatdagi

trayektoriyasi nisbiy trayektoriya, tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezlanish bo'lib, Oydagi nuqtaning geometrik o'ri joylashgan nuqtaning Oy bilan birgalikdagi Yerga nisbatan harakati ko'chirma harakat, trayektoriyasi ko'chirma trayektoriya, tezligi ko'chirma tezlik, tezlanishi ko'chirma tezlanish bo'ladi. Oydagi nuqtani bevosita Yerga nisbatan harakati murakkab harakat, tezligi murakkab tezlik va tezlanishi murakkab tezlanish bo'ladi.

Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, nuqtaning murakkab harakati o'rganilayotganda (tekshirilganda) albatta uning nisbiy va ko'chirma harakatlarini alohida o'rganishga to'g'ri kelar ekan.

Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligi

Qo'zg'aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasi qo'zg'almas $O_0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koordinatalar sistemasiga nisbatan v_0 tezlik bilan ilgarilanma harakat qilsin. Harakatlanuvchi M nuqtaning $Oxyz$ sistemaga nisbatan nisbiy harakat tenglamalari (13.1) da berilgan bo'lib, harakat tekshirilayotgan onda uning nisbiy harakat trayektoriyasi AB egri chiziqdan iborat bo'ladi. $O_0\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ qo'zg'almas sistemaga nisbatan $\overline{OO_1} = \bar{r}_0(t)$, hamda $\overline{OM} = \bar{\rho}(t)$ deb belgilasak, 13.1-rasmdan M nuqtaning murakkab harakat radius vektori quyidagiga teng.

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \bar{r}. \quad (13.3)$$

Agar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ larni qo'zg'aluvchi koordinata o'qlarining birlik vektorlari desak, nisbiy harakat radius vektori quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (13.4)$$

(13.3) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (13.5)$$

Bu tenglikdagi qo'zg'aluvchan koordinatalarning birlik $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorlarining yo'nalishi o'zgaruvchi ekanligini e'tiborga olib, (13.5) dan t vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \right). \quad (13.6)$$

Bundan

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}_a; \quad \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{v}_o. \quad (13.7)$$

Eyler formulalariga asosan

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \quad (13.8)$$

(13.1), (13.2), (13.7), (13.8) larni hisobga olsak,

$$\vec{v}_o = \vec{v}_r + \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k}). \quad (13.9)$$

$$\vec{v}_o = \vec{v}_r + \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (13.10)$$

Bunda $\vec{\omega}_e \times \vec{r} = \vec{\omega}_e \times (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k})$.

M nuqtaning ko'chirma tezligi quyidagi ifodaga teng:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{r}. \quad (13.11)$$

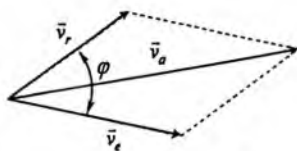
Agar ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa, $\vec{v}_e = \vec{v}_o$, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdan iborat bo'lsa, $\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\vec{v}_o = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (13.12)$$

(13.12) tenglik murakkab harakatdagi tezliklarni qo'shish teoremasini ifodalaydi.

Teorema. Nuqtaning murakkab harakatida uning absolyut tezligi ko'chirma va nisbiy tezliklarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi (13.2-rasm).



13.2-rasm

Boshqacha aytganda, nuqtaning absolyut tezligi uning ko'chirma va nisbiy tezlik vektorlariga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng bo'ladi.

Agar $\vec{v}_e$, $\vec{v}_r$ tezliklar qiymati va ular orasidagi burchak berilgan bo'lsa, absolyut tezlik moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$v_o = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \varphi}.$$

Agar:

- $\varphi = 0^\circ$ bo'lsa, $v_o = v_e + v_r$,
- $\varphi = 90^\circ$ bo'lsa, $v_o = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$,
- $\varphi = 180^\circ$ bo'lsa, $v_o = |v_e - v_r|$.

Tezlanishlarni qo'shish teoremasi (Koriolis teoremasi)

M nuqtaning absolyut tezlanishini aniqlash uchun (13.9) ifodadan vaqt bo'yicha bir marta hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \right) + \\ + 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} \right) + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Bunda $\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{a}_e$ — M nuqtaning absolyut tezlanishi.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i}), \\ \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{j}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j}), \\ \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_e \times \vec{k}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k}) \end{aligned}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} &= \vec{\varepsilon}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \vec{\omega}_e \times \\ &\times \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) = \vec{a}_e^r + \vec{a}_e^n. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{a}_0 - O \text{ qutbning tezlanishi.}$$

$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{a}_e^r + \vec{a}_e^n$ — M nuqtaning ko'chirma tezlanishi bo'lib, O nuqtaning tezlanishi hamda aylanma va o'qqa intilma tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Nisbiy tezlanish:

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}. \quad (13.14)$$

Koriolis tezlanishi:

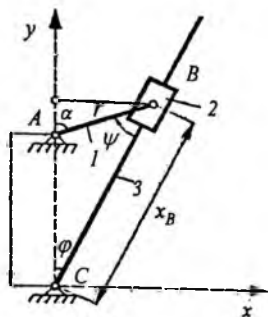
$$\vec{a}_k = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{g}_r). \quad (13.15)$$

Demak, M nuqtaning absolyut tezlanishi quyidagicha hisoblanadi:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + \vec{a}_r + \vec{a}_k. \quad (13.16)$$

(13.16) Koriolis teoremasini ifodalaydi.

Misol uchun 13.3-rasmda mashina va mexanizmlar nazariyasida o'rganiladigan kulisali mexanizm sxemasi tasvirlangan bo'lib, B tosh CB kulisa bo'ylab nisbiy va AB krivoship atrofida kulisa bilan birgalikda ko'chirma aylanma harakat qiladi. B toshning ushbu murakkab harakatida nisbiy va ko'chirma tezlanishlaridan tashqari Koriolis tezlanishi ham mavjud bo'ladi. Keyingi misollar quyida keltiriladi.



13.3-rasm

Koriolis teoremasi. *Ko'chirma harakati ilgariylanma bo'lgan murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy, ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.*

Agar ko'chirma harakat ilgariylanma harakatdan iborat bo'lsa ($\omega_r = 0$), (13.15) ga asosan Koriolis tezlanishi nolga teng bo'ladi ($\bar{a}_k = 0$). Bu holda Koriolis teoremasi quyidagicha bo'ladi:

Ko'chirma harakati ilgariylanma bo'lgan murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$\bar{a}_s = \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (13.17)$$

Koriolis tezlanishi

Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat burchak tezlik vektorini nisbiy harakat chiziqli tezlik vektoriga vektor ko'paytmasining ikkilanganiga teng:

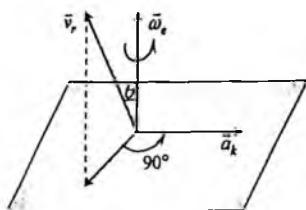
$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_r \times \bar{v}_r). \quad (13.18)$$

Koriolis tezlanishi nisbiy tezlikni ko'chirma harakat ta'siridan, aksincha ko'chirma harakat burchak tezligini nisbiy harakat ta'siridan o'zgarishini xarakterlaydi. Agar ko'chirma harakat ilgariylanma bo'lsa, $\omega_r = 0$ bo'lib, Koriolis tezlanishi hosil bo'lmaydi. Ko'chirma harakati aylanma bo'lgan nuqta murakkab

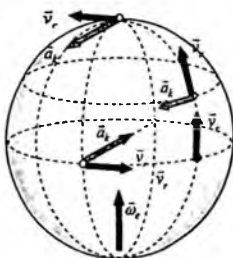
harakatiga doir masalani yechishda, ko'chirma, nisbiy tezlanishlardan tashqari Koriolis tezlanishini ham hisoblash talab etiladi. (13.18) formuladan Koriolis tezlanishining miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz.

Agar $\vec{\omega}$ bilan $\vec{v}_r$ orasidagi θ burchak berilgan bo'lsa, $\vec{a}_k$ Koriolis tezlanishining miqdori quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$a_k = 2\omega_r v_r \sin \theta. \quad (13.19)$$



13.4-rasm



13.5-rasm

Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat burchak tezlik vektori $\vec{\omega}_e$ bilan nisbiy harakat chiziqli tezlik vektori $\vec{v}_r$ ning vektor ko'paytmasi yo'nalishida yo'nalgan $\vec{a}_k$ vektor bo'lib, $\vec{\omega}$ bilan $\vec{v}_r$ yotgan tekislikka tik yo'naladi. $\vec{a}_k$ ning yo'nalishini aniqlash uchun $\vec{\omega}_e$ vektorni yo'nalishini o'zgartirmay tezlanishi izla-

nayotgan M nuqtaga parallel ko'chiramiz. Koriolis tezlanishi vektori uchidan qaraganda, $\vec{\omega}_e$ vektorni soat milining aylanishiga teskari aylanishda θ burchakka burib, $\vec{v}_r$ vektor bilan bir yo'nalishda ko'rinishi kerak. Koriolis tezlanishi yo'nalishini quyidagi *Jukovskiy qoidasi* asosida ham aniqlash mumkin. Nisbiy chiziqli tezlik vektorini ko'chirma harakat burchak tezligi yo'nalishiga perpendikulyar ixtiyoriy tekislikka proyeksiyalaymiz. Bu proyeksiya $\vec{v}_r$

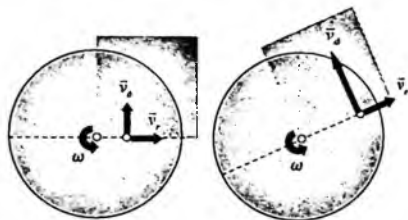
ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat aylanish yo'nalishida 90° ga buramiz (13.4-rasm). Bu yo'nalish Koriolis tezlanishining yo'nalishini ifodalaydi.

Koriolis tezlanishining vujudga kelish sabablari

Koriolis tezlanishini namoyon bo'lishining fizik mohiyatini aniqlash maqsadida bu jarayonni sifat tomonini ko'rsatuvchi

misol keltiramiz. Bu misolda nisbiy chiziqli tezlik vektori (qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasida) va ko'chirma harakat burchak tezligi vektori (qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini qo'zg'almas o'qlar atrofidagi aylanishi) ni atayin o'zgarmas deb olamiz:

Vaqtning qaysidir bir onida nuqta holati, nisbiy va ko'chirma tezlik vektorlari 13.6-rasmda ko'rsatilganidek berilgan bo'lsin (rasmda yuqoridan ko'rinishi). Ma'lum bir vaqt o'tgandan keyin nuqta aylanish o'qidan uzoqlashadi va ma'lum burchakka buriladi.



13.6-rasm

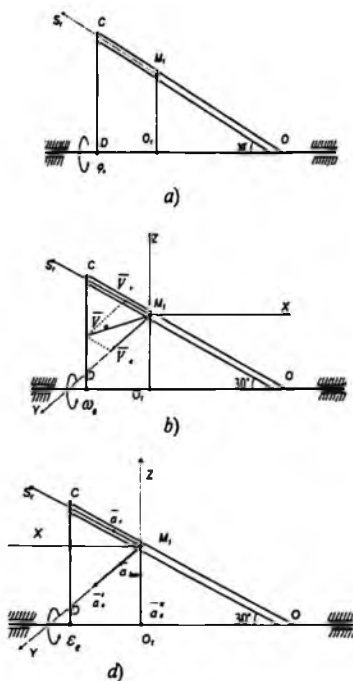
Natijada:

1. Ko'chirma harakat burchak tezligi mavjudligi sababli nisbiy chiziqli tezlik o'z yo'nalishini o'zgartiradi.
2. Nuqta bilan aylanish o'qi orasidagi o'zgartiruvchi nisbiy chiziqli tezlikni mavjudligi sababli ko'chirma chiziqli tezlik kattaligini o'zgartiradi.

Shunday qilib, Koriolis tezlanishini vujudga kelishiga quyidagi ikkita sabab bo'lishi mumkin deb hisoblasak bo'ladi:

1. Ko'chirma burchak tezlik nisbiy chiziqli tezlikka ta'sir etadi.
2. Nisbiy chiziqli tezlik ham o'z navbatida ko'chirma chiziqli tezlikka ta'sir etadi.

Bu esa Koriolis tezlanishini aniqlovchi formulada ikkiga teng koeffitsiyent orqali namoyon bo'ladi. Ya'ni: $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_t \times \vec{v}_r)$.



13.7-rasm

O'z o'qiga nisbatan aylanuvchi Yer sirtida harakatlanuvchi nuqtaning har xil holatlarda ko'rinishi Koriolis tezlanishi yo'nali-shini aniqlashga misol bo'la oladi.

Nuqtaning murakkab ha-rakatiga oid masalalarni ko'rib chiqamiz.

13.1-masala. To'g'ri burchakli uchburchak ko'-rinishidagi D shakl qo'z-g'almas o'q atrofida $\varphi_e = t^3 - 5t$, rad qonunga mu-vofiq aylanib, ko'chirma harakat qiladi. Shakl gipo-tenuzasi bo'ylab esa O nuq-tadan boshlab M sharcha $OM = S_r = 6(t + 0,5t^2)$ sm qonunga muvofiq nisbiy harakat qiladi. Bunda M shar-chaning harakatini murak-kab deb hisoblab, uning $t = 2s$ vaqt momentidagi

absolyut tezlik va absolyut tezlanishlarini aniqlang (13.7-rasm).

Yechish:

$$OM = S_r = 6(t + 0,5t^2) \text{ sm}, \quad \varphi_e = (t^3 - 5t) \text{ rad}, \quad t = 2s, \quad \alpha = 30^\circ, \quad v_a = ?, \quad a_a = ?.$$

M nuqtaning absolyut tezligini aniqlaymiz. Murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezligi nisbiy va ko'chirma harakat tezliklarining geometrik yig'indisidan iborat.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

Nisbiy harakat tezligini hisoblayotganda ko'chirma harakatni fikran to'xtatib turamiz. Aksincha, ko'chirma harakat tezligini hisoblayotganda nisbiy harakatni fikran to'xtatib turamiz.

1) Nisbiy harakat tezligi nisbiy harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Ya'ni,

$$v_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d6(1+0,5t^2)}{dt} = 6(1+t),$$

$t = 2s$ da $v_r = 6(1+2)sm/s = 18 sm/s$ ga teng bo'ladi.

Endi nuqtaning ko'chirma harakat tezligini topamiz.

2) Ko'chirma harakat burchak tezligi:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 3t^2 - 5 rad/s = 7 rad/s.$$

3) Ko'chirma harakat chiziqli tezligi:

$$v_e = \omega_e \cdot O_1M_1 = 84 sm/s.$$

4) Nisbiy va ko'chirma tezliklar orasidagi burchak 90° bo'lganligi sababli absolyut tezlik quyidagicha bo'ladi:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{84^2 + 18^2} sm/s = 85,9 sm/s.$$

Endi murakkab harakatdagi tezlanishlarni aniqlaymiz:

5) Ko'chirma harakat burchak tezlanishi:

$$\varepsilon_e = \dot{\omega} = 6t = 12 rad/s^2.$$

6) Nisbiy harakat to'g'ri chiziqli harakatdan iborat bo'lganligi sababli nisbiy tezlanish bitta tashkil etuvchidan iborat bo'ladi:

$$a_r = \ddot{S}_r = 6 sm/s^2.$$

7) Koriolis teoremasiga asosan, absolyut tezlanish quyidagi formulaga ko'ra aniqlanadi:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{kor} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^T + \vec{a}_e^n + \vec{a}_{kor}.$$

Ko'chirma harakatdagi tezlanishning tashkil etuvchilarini aniqlaymiz:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot O_1M_1 = 588 sm/s^2,$$

$$a_e^T = \varepsilon_e \cdot O_1M_1 = 144 sm/s^2.$$

8) Koriolis tezlanishi:

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 7 \cdot 18 \cdot \sin 30^\circ sm/s^2 = 126 sm/s^2.$$

9) Aniqlangan tezlanishlarni o'zaro perpendikulyar 3 ta o'qqa proyeksiyalab, izlanayotgan absolyut tezlanish modulini aniqlaymiz:

$$a_x = a_r \cdot \cos \alpha = 6 \cdot 0,87 \text{ sm/s}^2 = 5,2 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_y = a_{\text{kor}} + a_e' = (126 + 144) \text{ sm/s}^2 = 270 \text{ sm/s}^2,$$

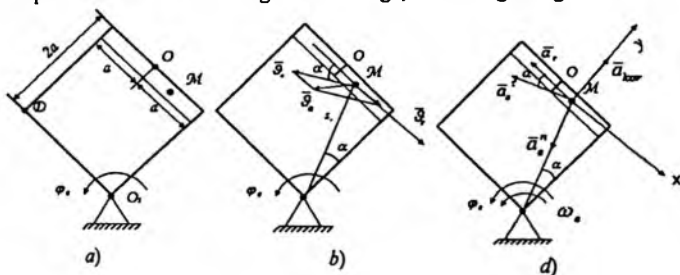
$$a_z = -a_e'' + a_r \cdot \sin \alpha = (-588 + 6 \cdot 0,5) \text{ sm/s}^2 = -585 \text{ sm/s}^2,$$

$$a_o = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(5,2)^2 + (270)^2 + (-585)^2} \text{ sm/s}^2 = 643,2 \text{ sm/s}^2.$$

Shunday qilib, biz izlayotgan M nuqtaning absolyut tezlik va absolyut tezlanishlari quyidagiga teng bo'lar ekan:

$$v_o = 85,9 \text{ sm/s}, a_o = 643,2 \text{ sm/s}^2.$$

13.2-masala. Qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi_r = 2t^3 - t^2$, rad qonunga muvofiq aylanma harakat qilayotgan kvadrat shaklidagi D jism berilgan (13.8-rasm). Kvadratning tomoni bo'ylab M nuqta O nuqtadan boshlab $OM = S_r = 18 \sin \frac{\pi}{4} \text{ sm}$ qonunga asosan nisbiy harakat qiladi. Murakkab harakat qilayotgan M nuqtaning $t_1 = \frac{2}{3} \text{ s}$ vaqt momentidagi absolyut tezlik va absolyut tezlanishi aniqlansin. Bunda kvadratning tomoni $2a$ ga, $a = 25 \text{ sm}$ ga teng.



13.8-rasm

Yechish: M nuqtaning absolyut tezligini aniqlash uchun tezliklarni qo'shish haqidagi teoremdan foydalanamiz. Bunda absolyut tezlik nisbiy va ko'chirma harakat tezliklarining geometrik yig'indisidan iborat.

$$\vec{v}_o = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

$t = \frac{2}{3} s$ da vaqt momentidagi $OM = 18 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \sin \frac{\pi}{6} sm = 9 sm$ ga teng.

$$\text{Bunda } \sin \alpha = \frac{16}{52,5} = 0,3, \quad \cos \alpha = \frac{2a}{0,14} = \frac{50}{52,5}.$$

Nisbiy harakat tezligi harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

$$v_r = \frac{dS_r}{dt} = 18 \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi t}{4}.$$

$$t = \frac{2}{3} s \text{ da: } v_r = 4,5 \cdot \pi \cdot \cos \frac{\pi}{6} sm/s = 12,24 sm/s.$$

Endi nuqtaning ko'chirma harakat tezligini topamiz. Buning uchun bizga ko'chirma harakat burchak tezligi va O_1M masofa kerak bo'ladi:

$$O_1M = \sqrt{(2a)^2 + (25-a)^2} = \sqrt{2500 + 256} sm = 52,5 sm.$$

Burchak tezlik esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 6t^2 - 2t = 1,3 s^{-1}.$$

U holda ko'chirma harakat tezligi quyidagicha bo'ladi:

$$v_e = \omega_e \cdot O_1M = 68,2 sm/s.$$

M nuqtaning absolyut tezligini kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlaymiz.

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e \cdot v_r \cdot \cos \alpha},$$

$$v_a = \sqrt{68,2^2 + 12,24^2 + 2 \cdot 86,2 \cdot 12,24 \cdot 0,95} sm/s = 52,8 sm/s.$$

Endi esa M nuqtaning absolyut tezlanishini aniqlaymiz. Murakkab harakatda nuqtaning absolyut tezlanishi nisbiy harakat tezlanishi, ko'chirma harakat tezlanishi va qo'shimcha Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k.$$

Har bir harakat tezlanishlarini alohida hisoblaymiz.

Nisbiy tezlik nisbiy harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng:

$$a_r = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = -18 \frac{\pi^2}{4^2} \sin \frac{\pi}{4} t.$$

$$t = \frac{2}{3} s \text{ da } a_r = -18 \frac{\pi^2}{16} \cdot \sin 30^\circ sm/s^2 = -5,5 sm/s^2.$$

Ko'chirma harakat aylanma harakat bo'lgani uchun ko'chirma tezlik urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi:
 $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$.

Burchak tezlanish $\epsilon_t = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (12t - 2)s^{-2} = 6s^{-2}$ ga teng.

$$a_e^t = \omega_e^2 \cdot OM = 88,7 \text{ sm/s}^2, \quad a_e^n = \epsilon_e \cdot OM = 315 \text{ sm/s}^2.$$

Endi Koriolis tezlanishini hisoblaymiz:

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega}_e \cdot \vec{v}_r], \quad a_k = 2\omega_e \cdot v_r \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r) = 2 \cdot 1,3 \cdot 12,25 \cdot \sin 90^\circ \text{ sm/s}^2 = 32,3 \text{ sm/s}^2$$

M nuqtaning absolyut tezlanishini aniqlash uchun topilgan barcha tezlanishlarni koordinata o'qlariga proyeksiyalarini topamiz.

$$\Sigma a_{ax} = -a_e - a_e^t \cdot \cos \alpha - a_e^n \sin \alpha = -331,41 \text{ sm/s}^2,$$

$$\Sigma a_{ay} = a_k - a_e^t \cdot \sin \alpha - a_e^n \cos \alpha = -168,7 \text{ sm/s}^2.$$

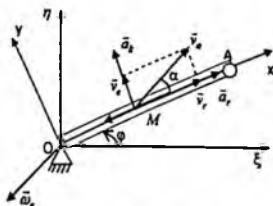
Topilgan barcha tezlanish proyeksiyalarini kvadratlari yig'indisini kvadrat ildizdan chiqarib, absolyut tezlanishni aniqlaymiz.

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{(331,41)^2 + (168,7)^2} \text{ sm/s}^2 = 371,87 \text{ sm/s}^2.$$

Javob: M nuqtaning absolyut tezlik va absolyut tezlanishlari quyidagilarga teng: $v_a = 71,89 \text{ sm/s}$, $a_a = -371,87 \text{ sm/s}^2$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Kema $36\sqrt{2} \text{ km/soat}$ tezlik bilan janubga qarab suzmoqda. Ikkinchi kema janubiy-sharqqa qarab kurs olib, 36 km/soat tezlik bilan bormoqda. Birinchi kema palubasida turgan kuzatuvchi tomonidan aniqlanadigan ikkinchi kema tezligining yo'nalishi va miqdori aniqlansin.

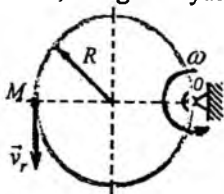


13.9-rasm

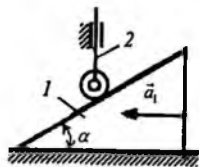
2-masala. OA kulisa o'zining O uchi atrofida o'zgarmas $\omega = 2s^{-1}$ burchak tezlik bilan aylanadi (13.9-rasm). M polzun OA kulisa bo'ylab O dan A ga qarab $s = OM = 2 + 3t^2 \text{ m}$ qonun aso-

sida harakat qiladi. Polzunning $t=1s$ dagi absolyut tezligi va tezlanishi topilsin.

3-masala. Radiusi $R=10\text{ sm}$ bo'lgan bir jinsli disk O qo'zg'almas nuqta atrofida $\varphi=2t$ qonunga ko'ra aylanadi. Diskning gardishi bo'ylab M nuqta $v_r=0,02\text{ m/s}$ o'zgarmas tezlik bilan harakatlansa, uning absolyut tezligini hisoblang (13.10-rasm).



13.10-rasm



13.11-rasm

4-masala. Uchburchak prizma-1 gorizontaal tekislik bo'ylab $a_1=0,7\text{ m/s}^2$ tezlanish bilan harakatlanadi. Uchiga g'ildirak o'rnatilgan 2-sterjen esa vertikal yuqoriga siljiydi (13.11-rasm). Agar $\alpha=35^\circ$ bo'lsa, 2-sterjenning tezlanishini aniqlang.

Nazorat savollari

1. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlik vektori qanday aniqlanadi?
2. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy tezlik vektori qanday aniqlanadi?
3. Murakkab harakatda ko'chirma tezlik vektori qanday belgilanadi?
4. Murakkab harakatdagi nuqtaning nisbiy tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
5. Murakkab harakatdagi nuqtaning ko'chirma tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Murakkab harakatdagi nuqtaning Koriolis tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
7. Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
8. Koriolis tezlanishining moduli va yo'nalishi qanday aniqlanadi?

III. DINAMIKA

14. DINAMIKAGA KIRISH. DINAMIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Kuchlar ta'sirida bo'lgan jismlarning harakatini uning massasi va harakatni yuzaga keltiruvchi sabablarga bog'liq ravishda tekshiradigan nazariy mexanikaning bo'limi *dinamika* hisoblanadi.

Dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri – *kuch*. Jismlarning harakati o'zgarmas kuchlar hamda miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgaruvchan kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi. Statikada asosan, o'zgarmas kuchlar o'rganilgan bo'lsa, dinamikada esa o'zgarmas kuchlar bilan birga o'zgaruvchan kuchlar ta'siri ham o'rganiladi. O'zgarmas kuchlarga jismning xususiy og'irligi yoki ishqalanish kuchi misol bo'la oladi. O'zgaruvchan kuch umumiy holda vaqtga, jismning holatiga, tezligiga bog'liq bo'ladi. Ya'ni:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (14.1)$$

Masalan, jismga davriy kuch yoki zarbali kuchlarning ta'sirini, elastik kuchning jism ko'chishiga proporsional ravishda ta'sirini, harakatdagi jismga muhitning ko'rsatadigan qarshiligini misol sifatida keltirish mumkin.

Jismlarning harakati uning inertlik xususiyatiga ham bog'liqdir. Turli jismlarga bir xil kuch bilan ta'sir etganda, jismlar har xil tezliklar bilan harakatlanadi. Bu tajribalardan bizga ma'lum. Jismlarning bu xususiyati *inertlik* deyiladi. Tezligi qancha kam bo'lsa, inertligi shuncha ko'p bo'ladi. Jism inertligini miqdor jihatdan ifodalovchi fizik kattalik massa deb ataladi. Massa skalyar, o'zgarmas va musbat kattalikdir.

Jismlarning harakati uning shakliga ham bog'liqdir. Jism shaklini jismni tashkil etuvchi zarralarning joylashuvi tashkil etadi. Shuning uchun moddiy nuqta tushunchasi kiritiladi. Statikadan ma'lumki, o'lchamlarining ahamiyati bo'lmagan, lekin massaga ega bo'lgan harakatdagi jism moddiy nuqta deyiladi. Dinamikada dastlab moddiy nuqtaning harakati o'rganiladi va undan keyin esa natijalar moddiy nuqtalar sistemasi va qattiq jismga tatbiq qilib o'rganiladi. Jismlarning harakatini o'rganishni

ularni tashkil etuvchi zarralarining harakatini o'rganishdan boshlaymiz.

Dinamika bo'limini 2 qismga ajratib ko'rib chiqamiz:

1. Moddiy nuqta dinamikasi.
2. Mexanik sistema va qattiq jism dinamikasi.

Dinamikaning asosiy qonunlari

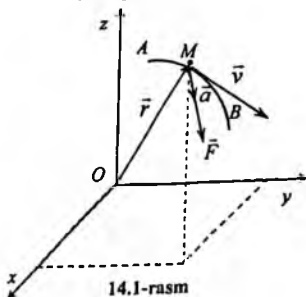
Dinamikaning asosiy qonunlari Galiley tomonidan kashf qilingan va klassik mexanika qonunlariga asoslangan bo'lib, u Isaak Nyuton tomonidan ta'riflangan. Dinamika qonunlari mexanik sistema harakatini ifodalashni hamma usullarini yozish, tahlil qilishni va ularni turli kuchlar bilan dinamik ta'sirlashuvining asosini tashkil etadi.

Shuni ta'kidlashimiz joizki, ushbu kitobning kirish qismida dinamika qonunlarining asoslarini yaratishda Sharqning buyuk allomalari hissasi va ularning ta'limotlari ta'siri beqiyos ekanligi qayd etib o'tilgan.

I qonun (Inersiya qonuni). *Tashqi ta'sirlardan holi bo'lgan moddiy nuqtaga biror kuch ta'sir etmaguncha, u o'zining tinch holati yoki to'g'ri chiziqli, teng o'lchovli harakatini saqlashga intiladi.*

Moddiy nuqta o'z tezligini o'zi o'zgartira olmaydi va o'z-o'ziga tezlik bera olmaydi. Tezligini o'zgartirish uchun tashqi ta'sir bo'lishi kerak. Moddiy nuqtaning bu xususiyati uning inertligini tashkil etadi. Bu qonunga inersiya qonuni, moddiy nuqta harakatiga esa inersion harakat deyiladi.

Inersiya qonunidan harakat va muvozanat holatlari inersiya bo'yi-cha ekvivalent ekanligi kelib chiqadi (Galilleyning nisbiylik qonuni). Inersiya qonuni o'rinli bo'lgan sanoq sistemasi inersial sanoq sistemasi deb deb ataladi. Moddiy nuqta o'zining harakat tezligi(kinematik holati)ni o'zgarishsiz saqlashga



14.1-rasm

intilish xususiyati uning inertligi deyiladi.

II qonun (Dinamikaning asosiy qonuni. Nyutonning II qonuni). *Moddiy nuqtaning kuch ta'sirida olgan tezlanishi shu kuch bilan bir yo'nalishda bo'lib, miqdori kuch miqdoriga proporsionaldir* (14.1-rasm),

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (14.2)$$

(14.2) tenglama *nuqta dinamikasining asosiy qonuni* (tenglamasi) deyiladi. Bu yerda m – moddiy nuqta massasi (inertlik o'lchovi) bo'lib, u o'zgarmas miqdordir), kg da o'lchanadi, miqdor jihatdan og'irlikning erkin tushish tezlanishi nisbatiga teng. m massa qancha katta bo'lsa, moddiy nuqta inertligi ham shuncha katta bo'ladi. $\vec{F}$ – nuqtaga ta'sir etuvchi kuch, Nyutonda (N) o'lchanadi. 1N shunday kuchki, uning ta'sirida 1 kg massali jism 1 m/s^2 tezlanish oladi. m massa qancha katta bo'lsa, moddiy nuqtaga $\vec{a}$ tezlanish berishi uchun shuncha katta $\vec{F}$ kuch qo'yish kerak bo'ladi.

Kinematikadan ma'lumki,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (14.3)$$

(14.3) ni hisobga olsak, (14.2) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (14.4)$$

Agar $\vec{v} = \text{const}$ bo'lsa, $\vec{F} = 0$ bo'ladi. Ya'ni moddiy nuqtaga kuch ta'sir etmasa, u inersion holatda bo'ladi. Kuch bilan tezlanish modullari orasidagi bog'lanishni e'tiborga olsak, (14.2) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F = ma.$$

Bundan:

$$a = \frac{F}{m}. \quad (14.5)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Har qanday jism bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida yerga bir xil, g tezlanish bilan tushadi. Bu tajribalar yordamida aniqlangan:

$$P = mg. \quad (14.6)$$

Bu yerda $g = 9.81\text{ m/s}^2$ erkin tushish tezlanishi deyiladi.

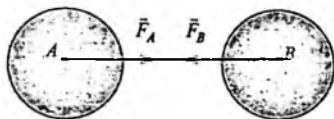
(14.6) formuladan:

$$m = \frac{P}{g}. \quad (14.7)$$

(14.7) formuladan ko'rinib turibdiki, moddiy nuqta massasi og'irligiga to'g'ri proporsional. Og'irligini tarozida o'lchab, massasini (14.7) formuladan aniqlash mumkin.

III qonun (Ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuni. Nyutonning III qonuni). *Har bir ta'sir o'ziga teng va qarama-qarshi yo'nalishdagi aks ta'sirni vujudga keltiradi.*

Ya'ni, ikkita moddiy nuqta miqdorlari teng, ularni tutash-tiruvchi bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi (14.2-rasm). Bu qonun bilan statikaning 4-aksiomasi bir xil.



14.2-rasm

$$\vec{F}_B = m_B \vec{a}_B. \quad (14.8)$$

$$\vec{F}_A = m_A \vec{a}_A. \quad (14.9)$$

III qonunga asosan:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B. \quad (14.10)$$

Bunda:

$$|\vec{F}_A| = -|\vec{F}_B|. \quad (14.11)$$

(14.8) va (14.9) va (14.10) formulalardan foydalanib, quyidagini hosil qilish mumkin:

$$m_A \vec{a}_A = -m_B \vec{a}_B. \quad (14.12)$$

Bundan:

$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{\vec{a}_B}{\vec{a}_A}. \quad (14.13)$$

IV qonun (Kuchlarning bir-biriga bog'liqsiz ta'sir etish qonuni). *Moddiy nuqtaning bir necha kuchlar ta'siridan olgan umumiy tezlanishi uning har qaysi kuchning alohida ta'siridan olgan tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.*

Moddiy nuqtaga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar qo'yilgan bo'lsin, u holda:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (14.14)$$

bo'ladi. (14.2) tenglamaga asosan:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i. \quad (14.15)$$

(14.14) va (14.2) tenglamalarni hisobga olsak:

$$m\vec{a} = m \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \quad (14.16)$$

yoki

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i. \quad (14.17)$$

Bu ifoda xulosamizning to'g'riligini ko'rsatadi. Bu qonundan asosan, qattiq jismga oid masalalarni yechishda keng foydalaniladi.

Erkin moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari

Moddiy nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida harakatlansin (14.1-rasm). Nyutonning II qonuniga asosan (14.2) tenglamani yozamiz:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$\vec{a}$ – tezlanish vektori; m – moddiy nuqta massasi.

Agar ta'sir kuchlari bir nechta bo'lsa, (14.14) tenglamaga asosan ularning teng ta'sir etuvchisi:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Kinematikadan ma'lumki, nuqtaning tezlanish vektori - $\vec{a}$, tezlik vektori - $\vec{v}$ va $\vec{r}$ - radius-vektori orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (14.18)$$

(14.18) tenglamalarni e'tiborga olsak, (14.2) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (14.19)$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (14.20)$$

(14.19) va (14.20) ko'rinishidagi differensial tenglamalar moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining vektorli ifodasidir. Ularni Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodalab, harakat differensial tenglamalarining quyidagi ko'rinishi hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (14.21)$$

F_x, F_y, F_z — F kuchning Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari.

(14.21) tenglama erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o'qlaridagi harakat differensial tenglamalari deyiladi.

Harakat differensial tenglamalarining tabiiy o'qlardagi ifodasini aniqlash uchun kuchlarning tabiiy o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlaymiz (14.3-rasm). Tabiiy koordinata o'qlarining birlik vektorlarini mos ravishda $\vec{\tau}^0, \vec{n}^0, \vec{b}^0$ deb belgilasak, tezlanish vektorining tabiiy o'qlardagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = a_r \vec{\tau}^0 + a_n \vec{n}^0 \quad (14.22)$$

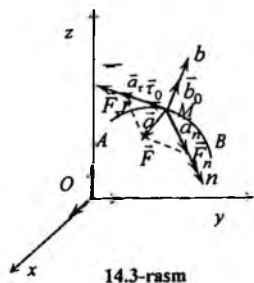
yoki

$$\vec{a} = a_r \vec{\tau}^0 + a_n \vec{n}^0 + 0 \cdot \vec{b}^0. \quad (14.23)$$

Kuchning tabiiy o'qlardagi ifodasi esa quyidagicha:

$$\vec{F} = F_r \vec{\tau}^0 + F_n \vec{n}^0 + F_b \vec{b}^0, \quad (14.24)$$

bu yerda F_r, F_n, F_b — moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning mos ravishda urinma, bosh normal va binormal o'qlardagi proyeksiyalari (tashkil etuvchilari).



(14.23) va (14.24) ni hisobga olgan holda dinamikaning asosiy tenglamasi (14.2) ni quyidagicha yozamiz:

$$F_r \vec{r}^0 + F_n \vec{n}^0 + F_b \vec{b}^0 = m \left(\frac{dv}{dt} \vec{r}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \right). \quad (14.25)$$

Mos birlik vektorlar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglash natijasida, erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi differensial tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$m \frac{dv}{dt} = F_r; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b. \quad (14.26)$$

(14.26) tenglamalarga *erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o'qlaridagi dinamik tenglamalari* deyiladi. Tenglamadagi $F_b = 0$ ifoda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch egriklik tekisligida yotishini ko'rsatadi. Haqiqatan ham shunday, chunki kuch tezlanish bilan bir yo'nalishda bo'lib, tezlanish egriklik tekisligida yotishi bizga kinematikadan ma'lum.

Silindrik koordinatalar sistemasida harakat differensial tenglamalarini r, φ, z o'zgaruvchilar orqali ifodalaymiz:

$$m a_r = F_r; \quad m a_\varphi = F_\varphi; \quad m a_z = F_z, \quad (14.27)$$

bu yerda

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2; \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}; \quad a_z = \ddot{z}. \quad (14.28)$$

(14.28) tenglamalarni (14.27) tenglamalarga qo'yilsa, harakat differensial tenglamasining silindrik koordinatalardagi ifodasi kelib chiqadi:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) &= F_\varphi \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \right\}. \quad (14.29)$$

(14.29) tenglamalar *erkin moddiy nuqta harakatining silindrik koordinatalar sistemasidagi harakat differensial tenglamalarini* ifodalaydi.

Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamalari

Agar nuqtaning harakati bog'lanishlar bilan cheklangan bo'lsa, bunday nuqta *bog'lanishdagi nuqta* deyiladi. Bizga statika bo'limidan ma'lumki, jismlar sirt, ip, zanjir, sterjen yoki sharnirlar vositasida bog'langan bo'lishi mumkin. Bog'lanishlar har qanday usul vositasida amalga oshirilgan bo'lsa ham, bu bog'lanishni analitik usulda ifodalash mumkin bo'ladi.

Agar moddiy nuqta bog'lanishda bo'lsa, (14.2), (14.21), (14.26) va (14.29) tenglamalardagi ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlari qo'shiladi.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}. \quad (14.30)$$

(14.30) tenglama *bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasidir*.

Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, bog'lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamalarini keltirib chiqaramiz:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + N_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + N_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + N_z \end{aligned} \right\}. \quad (14.31)$$

Agar moddiy nuqta silliq bo'lmagan sirt ustida harakatlansa, differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_t + N_t \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n \\ 0 &= F_b + N_b \end{aligned} \right\}. \quad (14.32)$$

(14.31) va (14.32) tenglamalar mos ravishda *bog'lanishdagi nuqtaning Dekart va tabiiy koordinata o'qlaridagi harakat differensial tenglamalaridir*.

Silindrik koordinatalar sistemasida bog'lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= F_r + N_r \\ m(r\ddot{\phi} - 2\dot{r}\dot{\phi}) &= F_\phi + N_\phi \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z \end{aligned} \right\} \quad (14.33)$$

Nazorat savollari

1. Dinamikaning asosiy tushunchalari nimadan iborat?
2. O'zgaruvchan kuchlar qanday parametrlarga bog'liq?
3. Jismning inertligi deganda nimani tushunasiz?
4. Moddiy nuqta nima?
5. Inersiya qonunini ta'riflang.
6. Dinamikaning asosiy qonunini tushuntiring.
7. Ta'sir va aks ta'sir tengligi qonunini ta'riflang.
8. Kuchlarning bir-biriga bog'liqsiz ta'sir etish qonunini ta'riflang.
9. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday?
10. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
11. Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishi qanday?
12. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday?
13. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday?
14. Bog'lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamasining tabiiy o'qlardagi ko'rinishini yozib bering.
15. Bog'lanishdagi moddiy nuqtaga qanday kuchlar ta'sir etadi?
16. Moddiy nuqta differensial tenglamalarini tuzishdan maqsad nima?

15. MODDIY NUQTA DINAMIKASI. MODDIY NUQTA DINAMIKASINING IKKI ASOSIY MASALASI

Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy (to'g'ri) masalasida nuqtaning massasi va kinematik harakat tenglamalari berilganda shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi aniqlanadi.

Moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy (teskari) masalasida nuqtaning massasi va unga ta'sir etuvchi kuchlar berilganda nuqtaning kinematik tenglamalari aniqlanadi.

Bu ikki masala ham *dinamikaning asosiy tenglamalari* yoki ularni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari yordamida yechiladi. Agar moddiy nuqta erkin bo'lmasa, statikadagi kabi ularga bog'lanishdan ozod qilish prinsipi qo'llaniladi. Natijada reaksiya kuchlari ham moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlar safiga qo'shiladi.

Dinamikaning birinchi masalasi differensiallash yo'li bilan yechiladi. Dinamikaning ikkinchi masalasining yechimi mos differensial tenglamalarni integrallash yo'li bilan amalga oshiriladi va bu yo'l differensiallashga nisbatan murakkabroq hisoblanadi.

Dinamikaning birinchi asosiy masalasi

Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch bilan tezlanishi orasidagi bog'liqlikni (14.2) tenglama bilan ifodaladik. Erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalaridan foydalanib, dinamikaning ikki asosiy masalasini yechamiz.

Nuqtaning massasi va harakat qonunlari berilganda ta'sir etuvchi kuchlarni aniqlash *dinamikaning birinchi asosiy masalasini* tashkil etadi. Bu masalaga nuqta dinamikasining to'g'ri masalasi deyiladi.

Harakat qonunining berilishiga qarab harakat differensial tenglamalari tuziladi va masala shartida so'ralgan kuchlar aniqlanadi.

Aniqlik uchun nuqtaning harakat qonuni Dekart koordinatalarida berilganda, birinchi asosiy masalaning yechilishini ko'rib chiqamiz.

Moddiy nuqtaning harakat qonuni va m massasi berilgan bo'lsin. Ya'ni:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (15.1)$$

Harakat qonunidan ikki marta hosila olib, tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, a_x, a_y, a_z larni aniqlaymiz va (14.21) harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

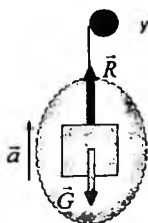
$$\left. \begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ F_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

(15.2) tenglamadan kuchning koordinata o'qlaridagi $F_x; F_y; F_z$ proyeksiyalarini aniqlaymiz. Kuchning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (15.3)$$

Kuchlarning yo'nalishini yo'naltiruvchi kosinuslar yordamida aniqlaymiz:

$$\cos(\vec{F}, \wedge Ox) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \wedge Oy) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \wedge Oz) = \frac{F_z}{F}. \quad (15.4)$$



15.1-rasm

15.1-masala. G og'irlikdagi lift kabinasi tros yordamida a tezlanish bilan ko'tarilmoqda. Trosning tarangligini aniqlang (15.1-rasm).

Yechish: 1. Sohani aniqlaymiz (lift kabinasi ilgarilanma harakatda bo'lganligi uchun, uni moddiy nuqta deb qaraymiz).

2. Bog'lanish(tros)ni tashlab, uni R - reaksiya kuchi bilan almashtiramiz.

3. Dinamikaning asosiy tenglamasini tuzib

olamiz:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{G} + \vec{R}$$

4. Dinamikaning asosiy tenglamasini y o'qiga proyeksiyalaymiz:

$$(y): ma_y = R - G.$$

Trosni reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$R = G + ma_y = G + \frac{G}{g} a_y = G \cdot \left(1 + \frac{a_y}{g}\right).$$

Trosni tarangligini aniqlaymiz:

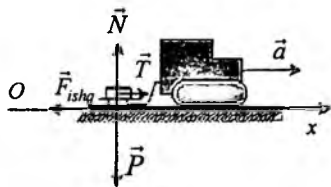
$$\vec{T} = -\vec{R},$$

$$T = R = G \cdot \left(1 + \frac{a_y}{g}\right).$$

Kabina tekis harakatdaligi uchun $a_y = 0$ va tros tarangligi uning og'irligiga teng: $T = G$.

Tros uzilsa $T = 0$ bo'ladi va kabinaning tezlanishi erkin tushish tezlanishiga teng bo'ladi: $a_y = -g$.

15.2-masala. Traktor yo'lining to'g'ri chiziqli bo'lagida $x = 10t^2 + 5t$, m qonun bilan harakatlanadi. U massasi 600 kg bo'lgan yukni tortadi (15.2-rasm). Agar yukning yerga ishqalanish koeffitsiyenti, $f = 0,04$ bo'lsa, traktorning yukni tortish kuchi aniqlansin.



15.2-rasm

Yechish: Traktorning harakat o'qini Ox bilan belgilaymiz. Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$F_x = ma_x, \quad (1)$$

bu yerda F_x – barcha kuchlarning Ox o'qidagi proyeksiyasi, a_x – tezlanishning Ox o'qidagi proyeksiyasi bo'lib, uni aniqlash uchun harakat qonunidan ikkinchi tartibli hosila olamiz. Birinchi tartibli hosilasi tezlikning Ox o'qidagi proyeksiyasiga teng. Ya'ni:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 20t + 5 \text{ (m/s)}.$$

Ikkinchi tartibli hosilasi tezlanishning Ox o'qidagi proyeksiyasiga teng. Ya'ni:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = 20(m/s^2). \quad (2)$$

Kuchlarning harakat o'qidagi proyeksiyasini aniqlaymiz:

$$F_x = T - F_{\text{ish}}. \quad (3)$$

(3) ifodani (1) ga olib borib qo'yamiz:

$$T - F_{\text{ish}} = ma_x, \quad (4)$$

bu yerda

$$F_{\text{ish}} = fN = fP = fmg. \quad (5)$$

(4) va (5) tenglamalardan T tortish kuchini aniqlaymiz:

$$T = F_{\text{ish}} + ma_x = fmg + ma_x = m(fg + a_x),$$

$$T = 600 \cdot (0,04 \cdot 9,8 + 20) kN = 12,2 kN.$$

Javob: $T = 12,2 kN$.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi

Nuqtaning massasi va unga ta'sir etuvchi kuchlar berilganda nuqtaning kinematik xarakteristikalarini, harakat qonunlarini aniqlash *dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini* tashkil etadi. Bu masala *nuqta dinamikasining teskari masalasi* deb ham yuritiladi.

Masalalarni yechish uchun turli ko'rinishda ifodalangan harakat differensial tenglamalarini integrallash kerak. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar umumiy holda vaqtga, nuqtaning holatiga va uning tezligiga bog'liq bo'lganligi uchun differensial tenglamalarni umumiy holda integrallash qiyin bo'ladi. Shuning uchun moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi faqat ba'zi xususiy hollarda aniq yechimga ega bo'ladi. Differensial tenglamalarni integrallash uchun aniq dinamik masalada qo'shimcha shart sifatida boshlang'ich shartlar berilgan bo'lishi lozim. Bunda integral o'zgarishlar boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Boshlang'ich shartlar vaqtning boshlang'ich payti, $t = t_0$ da nuqtaning holati va tezligining qabul qiladigan qiymatlaridir. Boshlang'ich paytda nuqta radius-vektori va tezligining qiymatlari, $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ bo'lsa, bu ifoda vektorli ko'rinishdagi *boshlang'ich shartlar* deyiladi.

Boshlang'ich shartlar Dekart koordinatalarida quyidagi

ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Tabiiy koordinatalarda esa boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$s = s_0, \dot{s} = \dot{s}_0.$$

Ta'sir etuvchi kuchlar o'zgarmas va o'zgaruvchan bo'lishi mumkin.

Ayrim sodda hollar uchun moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalarini integrallashni ko'rib chiqamiz.

1. Moddiy nuqtaga miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sir etgan hol. Ya'ni $\vec{F} = \overline{const}$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F \Leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (15.5)$$

(15.5) tenglamada $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (15.6)$$

kelib chiqadi. (15.6) tenglamani integrallaymiz:

$$\int dv = \frac{F}{m} \int dt + C_1 \Rightarrow v = \frac{F}{m} t + C_1. \quad (15.7)$$

(15.7) tenglamadagi integral o'zgarmasni boshlang'ich shartlardan aniqlaymiz:

$$t=0 \text{ da } v=v_0, C_1=v_0. \quad (15.8)$$

(15.8) ni (15.7) ga qo'ysak:

$$v = \frac{F}{m} t + v_0 \quad (15.9)$$

tenglama kelib chiqadi. $v = \frac{dx}{dt}$ ekanligini e'tiborga olib, (15.9) ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + v_0 \Rightarrow \int dx = \frac{F}{m} \int t dt + v_0 \int dt + C_2 \Rightarrow x = \frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2. \quad (15.10)$$

(15.10) tenglamada, $t=0$ da $x=x_0, C_2=x_0$ ga teng.

Demak:

$$x = \frac{F t^2}{m 2} + v_0 t + x_0. \quad (15.11)$$

(15.9) va (15.11) tenglamalardan nuqtaning kinematik xarakteristikalarini to'liq aniqlash mumkin.

2. Moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuch vaqtning funksiyasi bo'lgan hol. Ya'ni $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(t). \quad (15.12)$$

Tenglamani integrallaymiz:

$$\int_{v_0}^v dv = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt \Rightarrow v - v_0 = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt \Rightarrow v = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt. \quad (15.13)$$

(15.13) tenglamada belgilash kiritamiz:

$$f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt, \quad (15.14)$$

$$v = v_0 + f(t).$$

$v = \frac{dx}{dt}$ ifodani (15.14) tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + f(t), \quad (15.15)$$

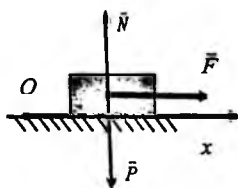
$$dx = v_0 dt + f(t) dt.$$

(15.15) tenglamani integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^x dx = v_0 \int_0^t dt + \int_0^t f(t) dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \int_0^t f(t) dt,$$

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t f(t) dt. \quad (15.16)$$

(15.14) va (15.16) tenglamalardan masalaning shartlarida qo'yilgan noma'lum kinematik xarakteristikalar aniqlanadi.



15.3-rasm

15.3-masala. Og'irligi P bo'lgan yuk muvozanat holatdan boshlab, unga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch ta'sirida silliq gorizont tekislik ustida harakatlanmoqda. $\vec{F}$ kuch vaqtga bog'liq holda o'zgaruvchan va uning moduli vaqtga proporsional ravishda o'zgaradi hamda $F = kt$ funksiya orqali aniqlanadi. Yukning harakat qonuni

aniqlansin (15.3-rasm).

Yechish: O nuqtani koordinata boshi qilib tanlaymiz. Bunda Ox o'qini harakat yo'nalishi bo'yicha yo'naltiramiz.

Yukning harakatini boshlang'ich shartlari: $t=0$ da $x=0$, $v_x=0$ bo'ladi.

Yukka $\vec{F}$ ta'sir etuvchi kuch, $\vec{P}$ og'irlik kuchi va $\vec{N}$ tekislikning reaksiya kuchini tasvirlaymiz (15.3-rasm). Bu kuchlarning Ox o'qiga proyeksiyalari quyidagicha:

$$F_x = kt, \quad R_x = 0, \quad N_x = 0.$$

U holda harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{dv_x}{dt} = kt,$$

$$\frac{P}{g} \cdot dv_x = k dt.$$

Bu tenglamani integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{P}{g} \cdot v_x = \frac{kt^2}{2} + C_1.$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib, $C_1 = 0$ ekanligini aniqlaymiz.

$v_x = \frac{dx}{dt}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k \cdot g}{2P} t^2$$

ekanligi kelib chiqadi. Tenglamaning har ikkala tomonini dt ga ko'paytiramiz:

$$dx = \frac{k \cdot g}{2P} t^2 dt.$$

O'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz va quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$x = \frac{k \cdot g}{6P} t^3 + C_2.$$

Boshlang'ich shartlar orqali $C_2 = 0$ ekanligini aniqlaymiz va yukning harakat qonunini yozamiz:

$$x = \frac{k \cdot g}{6P} t^3.$$

3. Moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuch tezlikning funksiyasi bo'lgan hol. Ya'ni $\bar{F} = \bar{F}(v)$.

Bunday hol asosan nuqta harakatida qarshilik kuchini hisobga olinganda uchraydi. Harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$m\ddot{x} = F(v) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F(v). \quad (15.17)$$

(15.17) tenglamani integrallaymiz:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}. \quad (15.18)$$

(15.18) tenglamaning chap tomonini $\varphi(v) = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}$ deb belgilasak va integrallasak,

$$\varphi(v) = t \quad (15.19)$$

kelib chiqadi.

(15.19) tenglamadan teskari funksiya $v = v(t)$ ni aniqlaymiz va $v = dx/dt$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = v(t). \quad (15.20)$$

(15.20) tenglamani integrallasak:

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt \quad (15.21)$$

hosil bo'ladi. Demak:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t) dt. \quad (15.22)$$

(15.17) tenglamaga o'zgartirish kiritamiz:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v. \quad (15.23)$$

(15.23) ifodani (15.17) ga qo'ysak:

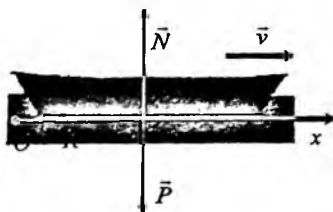
$$m \frac{v dv}{F(v)} = dx \quad (15.24)$$

kelib chiqdi. (15.24) ni integrallasak:

$$m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)} = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)}. \quad (15.25)$$

Masala shartining berilishiga qarab yuqorida keltirilgan tenglamalar yordamida noma'lumlar aniqlanadi.

15.4-masala. Massasi $m = 40 \text{ kg}$ bo'lgan qayiq $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ boshlang'ich tezlik bilan itarib yuborildi. Qayiqning kichik tezliklarida suvning qarshilik kuchi $R = \mu \cdot v$ formula orqali hisoblanadi. Qancha vaqtdan keyin qayiqning tezligi ikki marta kamayishini va shu vaqt ichida hamda qayiq to'xtaguniga qadar u qancha masofani bosib o'tishi aniqlansin. ($\mu = 9,1 \text{ kg/s}$ deb hisoblansin).



15.4-rasm

Yechish. Qayiqning dastlabki onda turgan o'rnini O nuqta deb belgilab, harakat yo'nalishida Ox o'qini o'tkazamiz (15.4-rasm). U holda boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi: $t = 0$ da $x = 0$ va $v_x = v_0$.

v_0 – qayiqning boshlang'ich tezligi. Qayiqni turtib yuboruvchi

kuch $t = 0$ onda ta'sir etadi.

Qayiqni trayektoriyani ixtiyoriy joyida tasvirlab, unga ta'sir etayotgan $\vec{R}$ og'irlik kuchi, $\vec{N}$ suvning qayiqqa ta'sir kuchi va $\vec{R}$ qayiqning harakatiga suvning qarshiligi, rasmda tasvirlangani kabi yo'naltiramiz.

Kuchlarning Ox o'qiga proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$\sum F_{kx} = -R = -\mu \cdot v_x.$$

Qayiqning harakat differensial tenglamasini tuzamiz. $v_x = v$ bo'lganligi uchun:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu \cdot v.$$

Bu tenglamadagi o'zgaruvchilarni ajratib, uning ikkala tomonidan tegishli chegaralar bo'yicha aniq integral olamiz. Bunda o'zgaruvchilarning quyi chegaralari boshlang'ich shartlarga muvofiq tanlanadi, yuqori chegaralari esa ixtiyoriy vaqt uchun olinadi.

Masalaning boshlang'ich shartlariga ko'ra, $t=0$ da $x=0$ va $v_x = v_0$.

Demak,

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = - \int_0^t \frac{\mu}{m} dt.$$

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t \Rightarrow t = \frac{m}{\mu} (\ln v_0 - \ln v) \Rightarrow t = \frac{m}{\mu} \ln \left(\frac{v_0}{v} \right).$$

$$t = t_1 \text{ onda } v = \frac{1}{2} v_0 \text{ ekanligidan: } t_1 = \frac{m}{\mu} \cdot \ln 2 \text{ s, } t_1 = \frac{40}{9.1} \cdot \ln 2 \text{ s} \approx 3 \text{ s}$$

Qayiqning $t_1 = 3 \text{ s}$ vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini aniqlaymiz. $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$. ekanligini e'tiborga olib, yozamiz: $mv \frac{dv}{dx} = -\mu \cdot v$.

U holda, boshlang'ich shartlarga ko'ra, $x=0$ da $v=v_0$ ekanligini inobatga olgan holda yozamiz:

$$-\frac{m}{\mu} \int_{v_0}^v dv = \int_0^x dx \Rightarrow x = \frac{m}{\mu} (v_0 - v).$$

$v = \frac{1}{2} v_0$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$x_1 = \frac{m}{\mu} \left(v_0 - \frac{1}{2} v_0 \right) = \frac{mv_0}{2\mu} \Rightarrow x_1 = \frac{40 \cdot 0.5}{2 \cdot 9.1} m \approx 1.1 m.$$

Qayiqning to'xtagunga qadar bosib o'tgan yo'li:

$$v=0 \text{ da } x_2 = \frac{m}{\mu} (v_0 - 0) = \frac{mv_0}{\mu} \Rightarrow x_2 = \frac{40 \cdot 0.5}{9.1} m \approx 2.2 m.$$

4. Moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan kuch nuqtaning holatiga bog'liq bo'lgan hol. Ya'ni $\vec{F} = \vec{F}(x)$.

Harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m \frac{dv}{dt} = F(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(x) \Rightarrow mv \frac{dv}{dx} = F(x). \quad (15.26)$$

(15.26) tenglamani boshlang'ich shartlardan foydalangan holda integrallaymiz:

$$\int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (15.27)$$

(15.27) tenglamaning o'ng tomonini $\psi(x)$ bilan belgilaymiz va quyidagicha yozamiz:

$$\psi(x) = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx \rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \psi(x). \quad (15.28)$$

(15.28) tenglamadan:

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)}. \quad (15.29)$$

(15.29) tenglamadagi v tezlikning algebraik qiymatini ifodalaydi. Shuning uchun ildiz ishorasi masalaning fizik ma'nosiga mos olinadi. Harakat qonunini aniqlash uchun tezlikning $v = dx/dt$ qiymatini hisobga olsak va tenglamani integrallasak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)},$$

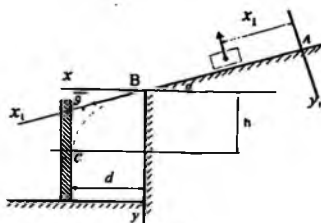
$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)}} = \int_0^t dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)}} = t. \quad (15.30)$$

(15.30) tenglamani integrallab, harakat qonuni, $x = x(t)$ aniqlanadi.

Masala shartlarining berilishiga qarab, moddiy nuqta dinamikasining ikkinchi asosiy masalasi mavzusiga oid masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

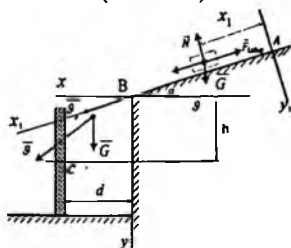
- Koordinata o'qlari tanlab olinadi;
- Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch va bog'lanish reaksiya kuchlari yo'naltiriladi;
- Harakat differensial tenglamalari tuzilib, boshlang'ich shartlardan foydalangan holda integrallanadi;
- Boshlang'ich shartlarni hisobga olgan holda, tenglamalar yechimlari keltiriladi.

O'zgarmas kuchlar ta'siri ostidagi moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalarini integrallashga oid quyidagi masalalarni ko'rib chiqaylik.



15.5-rasm

15.5-masala. Tosh gorizont bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak hosil qiluvchi qiya tekislik bo'ylab, AB oraliqda τ sekund davomida sirpanib harakatlanaadi. Uning boshlang'ich tezligi, $v_A = 0$ ga, toshning nishablik bo'ylab sirpanish ishqalanish koeffitsiyenti, $f = 0.3$ ga teng. Tosh B nuqtada v_B tezlikka ega bo'lib, T sekunddan keyin C nuqtadagi himoya devoriga borib uriladi. O'lchamlar: $d = 3\text{ m}$ va $h = 4\text{ m}$. Toshning A nuqtadan B nuqtagacha sirpanib tushish vaqti, τ va shu tushish yo'li, AB ning uzunligi, l aniqlansin. Masalani yechishda toshni moddiy nuqta deb olib, havoning qarshilik kuchi hisobga olinmasin (15.5-rasm).



15.6-rasm

Yechish: Dastlab AB oraliq uchun toshning harakatini ko'rib chiqamiz. Toshni moddiy nuqta deb hisoblab, unga ta'sir qilayotgan kuchlarni yo'naltiramiz (15.6-rasm). Bunda G – toshning og'irlik kuchi, N – tayanch tekisligining normal reaksiya kuchi, F_{ishq} – ishqalanish kuchi. AB oraliq uchun harakat

differensial tenglamalarini tuzamiz. Dinamikaning asosiy qonuniga ko'ra, toshning bu oraliqdagi harakat tenglamalari

$$ma = \sum_{k=1}^n F_{kx_1}, \quad m\ddot{x}_1 = \sum_{k=1}^n F_{kx_1}$$

bo'lib, bundan

$$m\ddot{x}_1 = G_1 \sin \alpha - F_{ishq},$$

bu yerda $F_{\text{ishq}} = f \cdot N$,

$$N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha,$$

$$F_{\text{ishq}} = fmg \cos \alpha.$$

$$m\ddot{x}_1 = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha,$$

$$\ddot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

$$\ddot{x}_1 = 9,8 \cdot (\sin 45^\circ - 0,3 \cos 45^\circ).$$

Tuzilgan differensial tenglamani vaqt bo'yicha ketma-ket integrallab, quyidagilarni olamiz:

$$\dot{x}_1 = 4,855t + C_1, \quad x_1 = 4,855 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Integrallash natijasida hosil bo'lgan integral o'zgarmaslarni boshlang'ich shartlardan aniqlaymiz:

$t=0$ da $x_{10}=0$, $\dot{x}_{10}=0$ boshlang'ich shartlarni integrallash natijasida hosil bo'lgan tenglamaga qo'yib, $C_1=C_2=0$ ekanini aniqlaymiz. Bunga ko'ra, harakat qonunlari quyidagi ko'rinishni egallaydi:

$$\dot{x}_1 = 4,855t, \quad x_1 = 4,855 \frac{t^2}{2}.$$

Toshning AB oraliqni tark etgan τ sekund vaqt momenti uchun $t=\tau$: $x_1=l$, $\dot{x}_1=v_B$ tengliklar o'rinli, ya'ni

$$l = 4,855 \frac{\tau^2}{2}, \quad v_B = 4,855\tau.$$

Endi BC oraliq uchun toshning harakatini qaraymiz. G og'irlik kuchini yo'naltirib, toshning harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = G.$$

Har ikkala differensial tenglamalarni ikki martadan integrallaymiz:

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_3 \Rightarrow x = C_3 t + C_4,$$

$$\ddot{y} = g \Rightarrow \dot{y} = gt + C_5 \Rightarrow y = \frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Topilgan tenglamalarga boshlang'ich shartlarni qo'yib, integral o'zgarmaslarni aniqlaymiz.

$$t=0 \text{ da } \begin{matrix} x_0=0, & \dot{x}_0=v_B \cos \alpha \\ y_0=0, & \dot{y}_0=v_B \sin \alpha \end{matrix}$$

Bu yerdan $C_3 = v_B \cos \alpha$, $C_4 = 0$, $C_5 = v_B \sin \alpha$, $C_6 = 0$ ekanligi ma'lum bo'ladi.

Topilgan integral o'zgarasmlarni tenglamalarga qo'yib, quyidagi harakat qonunini olamiz:

$$\begin{cases} x = v_B \cos \alpha \cdot t \\ y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

Toshning C nuqtaga kelib tushgan τ sekund vaqt momentida $t = T$: $x = d$, $y = h$ tengliklar bajariladi. U holda $d = v_B \cos \alpha \cdot T$, $h = \frac{gT^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot T$ tengliklar o'rinli bo'lib, bu

yerdan $T = \frac{d}{v_B \cos \alpha}$, $h = \frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 45^\circ} + v_B \sin \alpha \cdot \frac{d}{v_B \cos \alpha}$ bo'ladi.

Bundan

$$h = \frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 45^\circ} + d \tan \alpha,$$

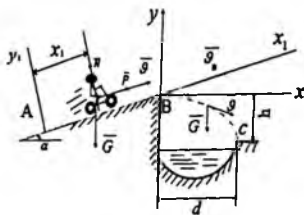
$$4 = 9,81 \cdot \frac{2^2}{2v_B^2 \cos^2 45^\circ} + 2 \tan 45^\circ \Rightarrow v_B = \sqrt{19,626} \text{ m/s} = 4,43 \text{ m/s}.$$

ekanligi ma'lum bo'ladi.

Topilgan v_B tezlikni AB oraliqdagi tenglamaga qo'yib, noma'lum τ va l ni aniqlaymiz:

$$\tau = \frac{v_B}{4,855} = 0,91 \text{ s}, \quad l = 4,855 \frac{\tau^2}{2} = 2 \text{ m}.$$

Demak, toshning AB oraliqdagi harakatlanish vaqti, $\tau = 0,91 \text{ s}$ va AB oraliq uzunligi, $l = 2 \text{ m}$ ekan.



15.7-rasm

15.6-masala. Motosikl A nuqtada $v_0 = 0$ tezlikka ega bo'lib, gorizontal bilan $\alpha = 30^\circ$ burchak hosil qiluvchi uzunligi l bo'lgan AB oraliq bo'ylab τ sekund davomida yuqoriga harakatlanadi (15.7-rasm). Motosikl butun AB oraliq davomida P kuch ta'sirida harakatlangan holda B nuqtada

$v_B = 0$ tezlikka ega bo'ladi va T sekund davomida havoda erkin harakatlanib, eni $d = 3m$ bo'lgan jarlikdan uchib o'tib, C nuqtaga v_C tezlik bilan kelib tushadi. Motosiklning motosiklchi bilan birgalikdagi massasi m ga teng. Motosiklchining AB masofani bosib o'tish vaqti - τ va B nuqtadan C nuqtaga erkin tushish vertikal balandligi - h aniqlansin. Masalani yechishda motosiklning motosiklchi bilan birgalikda moddiy nuqta deb hisoblab, harakatga qarshilik kuchlari inobatga olinmasin.

Yechish: AB oraliq uchun motosiklchining harakatini ko'rib chiqamiz. Motosiklning motosiklchi bilan birgalikda moddiy nuqta deb hisoblab, unga ta'sir qilayotgan kuchlarni yo'naltiramiz (15.7-rasm). Bunda G - og'irlik kuchi, N - reaksiya kuchi, P - tortish kuchi.

Dastlab, AB oraliq uchun harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$ma = \sum_{k=1}^n F_{kx_1}, \quad m\ddot{x}_1 = \sum_{k=1}^n F_{kx_1}.$$

$$m\ddot{x}_1 = P - mg \sin \alpha, \quad \ddot{x}_1 = \frac{P}{m} - g \sin \alpha, \quad \ddot{x}_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt}.$$

Tuzilgan differensial tenglamani vaqt bo'yicha ikki marta integrallab, quyidagilarni olamiz:

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) t + C_1, \quad x_1 = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Integrallash natijasida hosil bo'lgan integral o'zgarmaslarni aniqlash uchun boshlang'ich shartlarni yozamiz:

$$t=0 \text{ da } x_{10}=0, \quad \dot{x}_{10}=v_A=0.$$

Bu shartlarga ko'ra, integrallash doimiylari, $C_1=C_2=0$ ekanini ko'rish mumkin. Buni inobatga olsak, harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) t, \quad x_1 = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) \frac{t^2}{2}.$$

Motosiklning AB oraliqni tark etgan τ sekund vaqt momenti uchun $t=\tau$: $x_1=l$, $\dot{x}_1=v_B$ bo'lib,

$$\begin{cases} l = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) \frac{\tau^2}{2} \\ v_B = \left(\frac{P}{m} - g \sin \alpha \right) \tau \end{cases}$$

tengliklar o'rinli. Bu yerdan:

$$\frac{P}{m} - g \sin \alpha = \frac{v_B}{\tau}, \quad l = \frac{v_B}{\tau} \frac{\tau^2}{2} = \frac{\tau}{2} v_B, \quad \tau = \frac{2l}{v_B} = \frac{2 \cdot 40}{4,5} \text{ s} = 17,8 \text{ s}.$$

Endi BC oraliq uchun motosiklning harakatini qaraymiz. G og'irlik kuchini yo'naltirib, motosiklning harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -G,$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_3 \Rightarrow x = C_4 t + C_5,$$

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_6 \Rightarrow y = -\frac{gt^2}{2} + C_7 t + C_8.$$

Topilgan tenglamalarga boshlang'ich shartlarni qo'yib, integral o'zgaraslarni aniqlaymiz.

$$t=0 \text{ da } \begin{cases} x_0 = 0, & \dot{x}_0 = v_B \cos \alpha, \\ y_0 = 0, & \dot{y}_0 = v_B \sin \alpha. \end{cases}$$

Bundan: $C_3 = v_B \cos \alpha$, $C_4 = 0$, $C_6 = v_B \sin \alpha$, $C_8 = 0$.

Aniqlangan integral o'zgaraslarni tenglamalarga qo'yib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x = v_B \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_B \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

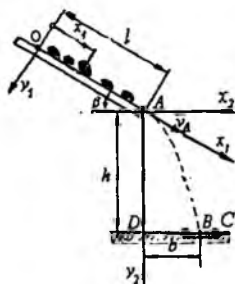
Motosiklning c nuqtaga kelib tushgan τ sekund vaqt momenti uchun $t = T$: $x = d$, $y = h$ lar o'rinli bo'lib, bundan:

$$d = v_B \cos \alpha \cdot T, \quad -h = v_B \sin \alpha \cdot T - \frac{gT^2}{2}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerdan esa:

$$T = \frac{d}{v_B \cos \alpha} = \frac{3}{4,5 \sin 30^\circ} = 0,77 \text{ s},$$

$$h = 9,8 \cdot \frac{0,77^2}{2} - 4,5 \sin 30^\circ \cdot 0,77 \text{ m} = 1,17 \text{ m}.$$



15.8-rasm

Demak, motosiklchi AB oraliqni $\tau=17,8s$ vaqtda bosib o'tib, $h=1,17m$ uzunlikka ega vertikal balandlikdan uchib tushar ekan.

15.7-masala. Rudalarni boyitish qurilmasining OA qismi gorizontal tekislik bilan $\beta=30^\circ$ burchak hosil qiluvchi qiya tekislikdan iborat. Qiya tekislikda rudaning bir bo'lagi tinch holatdan (O nuqtadan) harakatini boshladi va A nuqtada $v_A=2m/s$ tezlik bilan otildi (15.8-rasm). Qiya tekislikning sirpanishdagi ishqalanish koeffitsiyenti, $f=0,2$ ga teng. Rudaning bo'lagini moddiy nuqta deb qarab va havoning qarshiligini hisobga olmagan holda, rudaning harakat boshlaganidan to yerga tushgunigacha ketgan vaqti, qiya tekislik uzunligi, ya'ni $OA=l$ rudaning qancha masofaga borib tushishi, ya'ni d va $h=1m$ balandlikdan tushib, urilish paytdagi tezligi, $\bar{v}_B$ ning qiymati aniqlansin.

Yechish: Ruda bo'lagining OA qiya tekislik bo'ylab harakati davomida unga quyidagi kuchlar ta'sir etadi: og'irlik kuchi, $m\bar{g}$, normal reaksiya kuchi, $\bar{N}$ va sirpanishdagi ishqalanish kuchi, $\bar{F}_{ish}$. (15.8-rasm). Ruda qismining qiya tekislikdagi trayektoriyasi bo'ylab, Ox_1 o'qini yo'naltiramiz va harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{k=1}^3 F_{kx_1} \text{ yoki } m\ddot{x}_1 = mg \sin \beta - F_{ish}, \quad (1)$$

bu yerda

$$F_{ish} = f N; \quad N = mg \cos \beta. \quad (2)$$

(2) tenglamani (1) ga olib borib qo'ysak:

$$m\ddot{x}_1 = mg \sin \beta - f mg \cos \beta \text{ yoki } \ddot{x}_1 = g(\sin \beta - f \cos \beta). \quad (3)$$

(3) tenglamani ikki marta integrallaymiz:

$$\frac{dv_{x_1}}{dt_1} = g(\sin \beta - f \cos \beta);$$

$$dv_{x_1} = g(\sin \beta - f \cos \beta) dt_1;$$

$$\int dv_{x_1} = \int g(\sin \beta - f \cos \beta) dt_1.$$

Bir marta integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

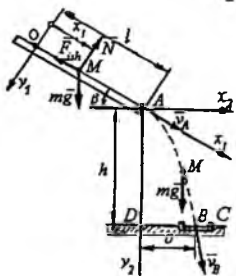
$$v_{x_1} = g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1 + C_1, \quad (4)$$

$$v_z = \frac{dx_z}{dt_1} \quad (5)$$

(5) ni (4) ga qo'yib yana integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1 + C_1 \rightarrow dx_1 = [g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1 + C_1] dt_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int dx_1 = \int [g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1 + C_1] dt_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$x_1 = g(\sin \beta - f \cos \beta) \frac{t_1^2}{2} + C_1 t_1 + C_2.$$



15.9-rasm

Integral o'zgarmlari, C_1, C_2 larni (4) va (6) tenglamalarga o'zgaruvchilarning boshlang'ich qiymatlarini qo'yib aniqlaymiz:

Boshlang'ich qiymatlar: $t_1 = 0$ da $x_1(0) = 0; v_{x_1}(0) = 0$.

Natijada quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$v_{x_1}(0) = C_1 = 0; x_1(0) = C_2 = 0.$$

Demak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ldi:

$$v_{x_1} = g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1, \quad (7)$$

$$x_1 = g(\sin \beta - f \cos \beta) \frac{t_1^2}{2}. \quad (8)$$

Ruda OA oraliqni bosib o'tishi uchun t_1 s. vaqt ketgan bo'lsa, (7) va (8) tenglamalarda $v_{x_1} = v_A; x_1 = l$ ga teng bo'ladi:

$$\begin{aligned} v_A &= g(\sin \beta - f \cos \beta)t_1, \\ x_1 = l &= g(\sin \beta - f \cos \beta) \frac{t_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) tenglamalardan OA oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqtni va OA oraliqning uzunligini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_A}{g(\sin \beta - f \cos \beta)} = \frac{2s}{9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)} = 0,622 \text{ s}, \\ l &= \frac{v_A^2}{2g(\sin \beta - f \cos \beta)} = \frac{2^2 \text{ m}}{2 \cdot 9,8(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ)} = 0,622 \text{ m}. \end{aligned} \quad (10)$$

Endi ruda bo'lagining AB oraliqdagi harakatini tekshiramiz. Bu oraliqda ruda faqat o'z og'irligi ta'sirida harakatlanadi. Harakat

differentensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= 0, & \ddot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{y}_1 &= mg & \ddot{y}_1 &= g. \end{aligned} \quad \text{yoki} \quad (11)$$

$\ddot{x}_1 = 0$ tenglamani ikki marotaba integrallaymiz:

$$\frac{dv_{x_1}}{dt_1} = 0; \quad dv_{x_1} = 0; \quad v_{x_1} = C_1. \quad (12)$$

$$\frac{dx_1}{dt_1} = C_1; \quad dx_1 = C_1 dt_1; \quad \int dx_1 = \int C_1 dt_1; \quad x_1 = C_1 t_1 + C_4. \quad (13)$$

Ruda bo'lagining AB oraliqdagi harakatida boshlang'ich shartlar quyidagidan iborat: $t_1 = 0$ da $x_1(0) = 0$ ga teng bo'lib, boshlang'ich tezlikning Ax_1 o'qdagi proyeksiyasi $v_{x_1}(0) = v_A \cos \beta$ ga teng. Bu qiymatlarni (12), (13) tenglamalarga qo'yib, integral o'zgarmlarini aniqlaymiz:

$$C_1 = v_A \cos \beta, \quad C_4 = 0.$$

U holda:

$$v_{x_1} = v_A \cos \beta, \quad (14)$$

$$x_1 = v_A t_1 \cos \beta. \quad (15)$$

Endi $\ddot{y}_1 = g$ tenglamani ikki marta integrallaymiz:

$$\frac{dv_{y_1}}{dt_1} = g; \quad \int dv_{y_1} = \int g dt_1; \quad v_{y_1} = g t_1 + C_5. \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt_1} &= g t_1 + C_5; & dy_1 &= (g t_1 + C_5) dt_1 \\ \int dy_1 &= \int (g t_1 + C_5) dt_1; & y_1 &= \frac{g t_1^2}{2} + C_5 t_1 + C_6 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Integral o'zgarmlari, C_5, C_6 larni aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan foydalanamiz:

$$t_1 = 0 \text{ da } y_1(0) = 0; \quad v_{y_1}(0) = v_A \sin \beta. \quad (18)$$

(18) shartlarni (17) ga olib borib qo'ysak:

$$C_5 = v_A \sin \beta, \quad C_6 = 0. \quad (19)$$

U holda

$$v_{y_1} = v_A \sin \beta + g t_1, \quad (20)$$

$$y_1 = v_A t_1 \sin \beta + \frac{g t_1^2}{2} \quad (21)$$

(21) tenglamada $y_1 = h = 1(m)$ ekanligini e'tiborga olsak, ruda bo'lagining AB oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqti, t_1 ni

aniqlaymiz:

$$h = v_A t_2 \sin \beta + \frac{g t_2^2}{2}; \quad 1 = 2 t_2 \sin 30^\circ + \frac{9,81 \cdot t_2^2}{2}; \quad t_2 = 0,361 s. \quad (22)$$

OB oraliqni bosib o'tish uchun ketgan vaqt:

$$t = t_1 + t_2 = 0,622 s + 0,361 s = 0,983 s.$$

(15) tenglamadan $t_2 = 0,361 s$ deb, yukning qancha masofaga tushganligini hisoblaymiz:

$$d = v_A t_2 \cos \beta = 2 \cdot 0,361 \cos 30^\circ m = 2 \cdot 0,361 \cdot 0,86 m = 0,625 m.$$

(14) va (20) tenglamalardan $t_2 = 0,361 s$ vaqt uchun ruda bo'lagi tezligining Ax_1, Ay_1 koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$v_{Ax_1} = v_A \cos \beta = 2 \cos 30^\circ m/s = 1,732 m/s,$$

$$v_{Ay_1} = v_A \sin \beta + g t_2 = 2 \sin 30^\circ m/s + 9,81 \cdot 0,361 m/s = 4,541 m/s.$$

Ruda bo'lagining DC tekislikka urilish paytdagi tezligi:

$$v_B = \sqrt{v_{Ax_1}^2 + v_{Ay_1}^2} = \sqrt{1,732^2 + 4,541^2} m/s = 4,86 m/s.$$

Tezlik vektori, $\vec{v}_B$ ning Ax_2 o'qiga og'ish burchagi:

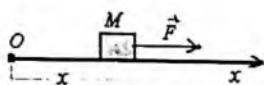
$$\alpha = \arccos \frac{v_{Ax_1}}{v_B} = \arccos \frac{1,732}{4,86} = 69,122^\circ = 69^\circ 7' 19''.$$

Javob: $t = 0,983 s$; $l = 0,622 m$; $d = 0,625 m$; $v_B = 4,86 m/s$.

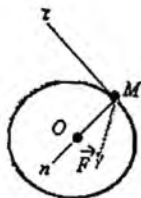
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi $m = 2 kg$ bo'lgan M jism $x = 10 \sin 2t (m)$ qonunga ko'ra $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda (15.10-rasm). $\vec{F}$ kuch modulining eng katta qiymati aniqlansin.

2-masala. Massasi $m = 1 kg$ bo'lgan moddiy nuqta radiusi $r = 2m$ bo'lgan aylana bo'ylab $v = 2t (m/s)$ tezlik bilan harakat qiladi (15.11-rasm). $t = 1s$ bo'lganda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi topilsin.

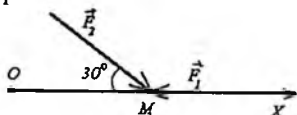


15.10-rasm

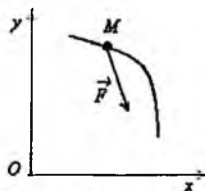


15.11-rasm

3-masala. Massasi $m = 5 \text{ kg}$ bo'lgan moddiy nuqta $F_1 = 3 \text{ N}$ va $F_2 = 10 \text{ N}$ kuchlar ta'sirida harakat qiladi (15.12-rasm). Moddiy nuqta tezlanishining Ox gorizontaal o'qdagi proyeksiyasi aniqlansin.

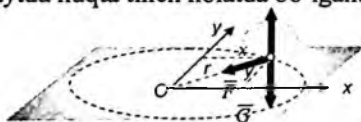


15.12-rasm

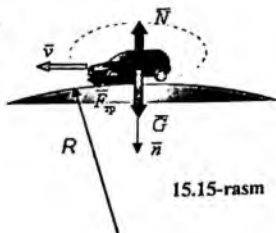


15.13-rasm

4-masala. Massasi $m = 2 \text{ kg}$ bo'lgan nuqta Oxy tekisligida $F_x = 2 \sin 0,5\pi t$ va $F_y = 5 \cos \pi t$ kuchlar ta'sirida harakat qiladi (15.13-rasm). Mazkur nuqtaning $t = 1 \text{ s}$ dagi tezligi topilsin. Boshlang'ich paytda nuqta tinch holatda bo'lgan.



15.14-rasm

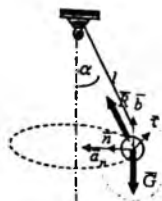


15.15-rasm

5-masala. m massali nuqta gorizontaal Oxy tekislikda $x = a \cdot \cos kt$, $y = b \cdot \cos kt$ qonun bilan harakatlanadi (15.14-rasm). Nuqtaning shu harakatini vujudga keltiruvchi kuchni aniqlang.

6-masala. Og'irligi G bo'lgan avtomobil egrilik radiusi R bo'lgan ko'prik bo'ylab v tezlik bilan harakatlanmoqda (15.15-rasm). Avtomobilning ko'priikka beradigan bosimi aniqlansin.

7-masala. Og'irligi G bo'lgan yuk uzunligi l bo'lgan trosqa osilgan va gorizontal tekislikda qandaydir tezlik bilan aylana bo'ylab harakatlanmoqda (15.16-rasm). Trosning vertikaldan og'ish burchagi α ga teng. Trosning tarangligi va yukning tezligi aniqlansin.



15.16-rasm

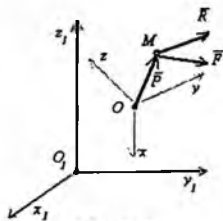
Nazorat savollari

1. Dinamikaning birinchi asosiy masalasining mohiyati nimadan iborat?
2. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasining mohiyati nimadan iborat?
3. Ta'sir kuchi o'zgarmas bo'lgan holda differensial tenglama qanday integrallanadi?
4. Boshlang'ich shartlar yordamida nimalar aniqlanadi?
5. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning moduli vaqtga bog'liq ravishda o'zgarsa, differensial tenglama qanday integrallanadi?
6. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning moduli nuqta holatiga bog'liq ravishda o'zgarsa, differensial tenglama qanday integrallanadi?
7. Kuch tezlikning funksiyasi bo'lgan holda harakat differensial tenglamasi qanday integrallanadi?
8. Integral doimiylarini aniqlash uchun qanday shartlar berilishi lozim?
9. Differensial tenglamalarini integrallash qanday tartibda bajariladi?

16. MODDIY NUQTANING NISBIY HARAKAT DINAMIKASI

Moddiy nuqtaning nisbiy harakat differensial tenglamalari

Biz yuqorida moddiy nuqtaning harakatini inersial sanoq sistemasiga nisbatan o'rgangan edik. Lekin ba'zi hollarda nuqtaning harakatini noinersial sanoq sistemasiga nisbatan o'rganishga to'g'ri keladi. Masalan, nuqtaning harakatdagi raketa, samolyot, kema yoki boshqalar bilan bog'langan koordinatalar sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini o'rganish kerak bo'lsin. Ta'sir etuvchi kuchlarni bilgan holda moddiy nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini bilish zarur. Nuqtaning bunday harakati nisbiy harakat deyiladi. Nuqtaning harakatini o'rganish uchun qo'zg'aluvchi $Oxyz$ va qo'zg'almas $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemalarini tanlab olamiz (16.1-rasm).



16.1-rasm

Masalani yechish uchun M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz. Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan nuqtaning qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat tenglamasi quyidagicha:

$$m\vec{a}_o = \vec{F} + \vec{R}, \quad (16.1)$$

bu yerda $\vec{F}$ – aktiv kuchlarning teng ta'sir etuvchisi; $\vec{R}$ – bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi.

Koriolis teoremasiga asosan:

$$\vec{a}_o = \vec{a}_* + \vec{a}_r + \vec{a}_k. \quad (16.2)$$

(16.2) ifodani (16.1) tenglamaga qo'ysak:

$$m(\vec{a}_* + \vec{a}_r + \vec{a}_k) = \vec{F} + \vec{R}, \quad (16.3)$$

bu yerda $\vec{a}_*$ – nuqtaning mutlaq tezlanish vektori; $\vec{a}_r$ – nuqtaning ko'chirma tezlanish vektori; $\vec{a}_r$ – nuqtaning nisbiy tezlanish vektori; $\vec{a}_k$ – nuqtaning Koriolis tezlanish vektori.

Qavslarni ochib tenglamaga belgilashlar kiritamiz:

$$m\vec{a}_x + m\vec{a}_y + m\vec{a}_z = \vec{F} + \vec{R} \quad (16.4)$$

$$m\vec{a}_x = \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}_x) + (-m\vec{a}_x), \quad (16.5)$$

bu yerda $\vec{\Phi}_x = -m\vec{a}_x$ – ko'chirma inersiya kuchi bo'lib, miqdor jihatdan nuqta massasi bilan ko'chirma tezlanish miqdori ko'paytmasiga teng va yo'nalishi esa ko'chirma harakat tezlanishi vektoriga qarama-qarshi yo'nalgan. $\vec{\Phi}_x = -m\vec{a}_x$ – Koriolis inersiya kuchi bo'lib, miqdor jihatdan nuqta massasi bilan Koriolis tezlanish miqdori ko'paytmasiga teng, yo'nalishi esa Koriolis tezlanish vektoriga qarama-qarshi yo'nalgan.

(16.5) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$m\vec{a}_x = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_x + \vec{\Phi}_x. \quad (16.6)$$

(16.6) tenglama nuqtaning inersial bo'lmagan sanoq sistemasiga nisbatan harakat differensial tenglamasi yoki *nisbiy harakat differensial tenglamasi* deyiladi. (16.6) tenglamani qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasining o'qlariga proyeksionalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_{x_1} + R_{x_1} + \Phi_{ex_1} + \Phi_{kx_1} \\ m\ddot{y}_1 &= F_{y_1} + R_{y_1} + \Phi_{ey_1} + \Phi_{ky_1} \\ m\ddot{z}_1 &= F_{z_1} + R_{z_1} + \Phi_{ez_1} + \Phi_{kz_1} \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

(16.7) tenglamalar nuqta *nisbiy harakat differensial tenglamasining Dekart koordinata o'qlaridagi ifodasidir*.

Demak, ta'sir etayotgan kuchlar qatoriga ko'chirma inersiya kuchi va Koriolis inersiya kuchlari qo'shilsa, moddiy nuqta qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan xuddi qo'zg'almas koordinatalar sistemasidagi kabi harakatlanadi.

Moddiy nuqta nisbiy harakatining xususiy hollari

1 hol. Ko'chirma harakat qo'zg'almas o'q atrofida notekis aylanma harakatdan iborat bo'lsin. Bu holda ko'chirma tezlanish:

$$\vec{a}_x = \vec{a}_x'' + \vec{a}_x' \quad (16.8)$$

bo'lgani uchun ko'chirma inersiya kuchi ham ikkita tashkil etuvchiga ajraladi:

$$\vec{\Phi}_c = \vec{\Phi}_c^* + \vec{\Phi}_k^*, \quad (16.9)$$

$$\vec{\Phi}_c^* = -m\vec{a}_c^*; \vec{\Phi}_k^* = -m\vec{a}_k^*, \quad (16.10)$$

$\vec{\Phi}_c^*$ – markazdan qochma inersiya kuchi; $\vec{\Phi}_k^*$ – aylanma inersiya kuchi.

(16.6) ko'rinishdagi tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\vec{a}_c = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_c^* + \vec{\Phi}_k^* + \vec{\Phi}_k. \quad (16.11)$$

Aylanma va markazdan qochma inersiya kuchlarining moduli quyidagicha hisoblanadi:

$$\Phi_c^* = m|\alpha_c^*| = mR|\varepsilon|. \quad (16.12)$$

$$\Phi_k^* = m\alpha_k^* = mR\omega^2. \quad (16.13)$$

R – nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa.

Koriolis inersiya kuchining moduli esa quyidagicha bo'ladi.

$$\Phi_k = 2m|\omega_c| \cdot |\vec{v}_c| \cdot \sin(\vec{\omega}_c \wedge \vec{v}_c). \quad (16.14)$$

2 hol. Ko'chirma harakat tekis aylanma harakatdan iborat bo'lsin.

U holda $\varepsilon_c = 0$, $\vec{\Phi}_c^* = 0$ bo'lib, differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\vec{a}_c = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_k^* + \vec{\Phi}_k. \quad (16.15)$$

3 hol. Ko'chirma harakat notekis, egri chiziqli ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsin. U holda $\omega_c = 0$ bo'lib, $\Phi_k = 0$ bo'ladi. Ko'chirma inersiya kuchining tashkil etuvchilari quyidagicha ifodalanadi:

$$\Phi_c^* = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad \Phi_k^* = m \frac{v^2}{\rho}. \quad (16.16)$$

Differensial tenglama ko'rinishi quyidagicha:

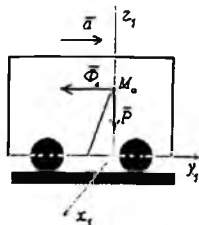
$$m\vec{a}_c = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_c^* + \vec{\Phi}_k^*. \quad (16.17)$$

4 hol. Ko'chirma harakat to'g'ri chiziqli, tekis ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsin. U holda $\alpha_c = 0$; $\Phi_c^* = 0$ va $\Phi_k = 0$ bo'ladi. Differensial tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$m\vec{a}_c = \vec{F} + \vec{R}. \quad (16.18)$$

Nisbiy harakat differensial tenglamasi bilan absolyut harakat differensial tenglamasi bir xil ko'rinishga ega. Bu holda $O_1 x_1 y_1 z_1$ qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi ham inersial sistema bo'ladi va har qanday mexanik tajriba bilan ham bunday sanoq

sistemasining harakatini seza olmaymiz. Masalan, to'g'ri chiziqli tekis harakatdagi kemada hamma tomoni berk kayutada o'tirgan odam kema harakatdami yoki yo'qmi bila olmaydi. Bu natija Galiley tomonidan aniqlangan bo'lib, *klassik mexanikaning nisbiylik nazariyasi* deyiladi.



16.2-rasm

16.1-masala. Vagon gorizontal yo'lining to'g'ri chiziqli sohasida o'ng tomonga qarab o'zgarmas $\bar{a}$ tezlanish bilan harakat qiladi. Vagon bilan birgalikda harakatlanayotgan M moddiy nuqta biror vaqtdan so'ng vertikal bo'ylab erkin

harakat qilib tusha boshlaydi (16.2-rasm). Vagonga nisbatan nuqtaning trayektoriyasi aniqlansin.

Yechish: Rasmda ko'rsatilganidek, qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasi, $O_1x_1y_1z_1$, vagon bilan birgalikda harakatlanadi (O_1z_1 o'qi vertikal bo'ylab yuqoriga yo'naltirilgan bo'lib, moddiy nuqtaning boshlang'ich holati M_0 dan o'tadi). Nuqta erkin tusha boshlagan balandligi nuqtasini $z_0 = h$ deb belgilaymiz.

Masala shartiga asosan boshlang'ich nisbiy tezlik nolga teng:

$$v_r = 0. \quad (1)$$

Ko'chirma inersiya kuchi moduli esa

$$\Phi_r = m a_r \quad (2)$$

bo'lib, yo'nalishi vagon harakatiga qarama-qarshi chap tomonga gorizontal bo'ylab yo'nalgan. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lgani uchun Koriolis inersiya kuchi nolga teng:

$$\Phi_k = 0. \quad (3)$$

Nuqta erkin harakatda bo'lgani uchun bog'lanish reaksiya kuchlari ham 0 ga teng: $N=0$. Nisbiy harakat differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -m a_r, \quad m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -mg, \quad (4)$$

yoki

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2}=-a_e, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2}=-g. \quad (5)$$

(4) va (5) tenglamalarni integrallasak:

$$\frac{dx_1}{dt}=C_1; \quad \frac{dy_1}{dt}=-a_e t+C_2; \quad \frac{dz_1}{dt}=-gt+C_3. \quad (6)$$

C_1, C_2, C_3 integral o'zgarmaslari boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. (1) ifodaga asosan $t=0$ da $v_x=0$. Shuning uchun $C_1=C_2=C_3=0$ bo'ladi. Demak (6) differensial tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\frac{dx_1}{dt}=0, \quad \frac{dy_1}{dt}=-a_e t, \quad \frac{dz_1}{dt}=-gt. \quad (7)$$

Ikkinchi marta integrallanganda:

$$x_1=C_4, \quad y_1=-\frac{a_e t^2}{2}+C_5, \quad z_1=-\frac{gt^2}{2}+C_6. \quad (8)$$

Boshlang'ich shartlardan, ya'ni $t=0$ da $x_{10}=0, y_{10}=0, z_{10}=h$ ekanligidan foydalanib, C_4, C_5, C_6 larni aniqlaymiz. Bu yerda $C_4=C_5=0; C_6=h$ bo'lib, (8) tenglamaga olib borib qo'ysak:

$$x_1=0, \quad y_1=-\frac{a_e t^2}{2}, \quad z_1=h-\frac{gt^2}{2}. \quad (9)$$

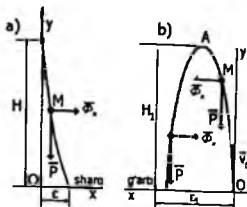
(9) tenglamadan ko'rinib turibdiki, M nuqta nisbiy trayektoriyasi vertikal $O_1 y_1 z_1$ tekislikda yotadi. Tenglamalardan vaqtga bog'liq bo'lmagan tenglamani hosil qilamiz:

$$a_e z_1 - g y_1 = a_e h, \quad \frac{z_1}{h} - \frac{g y_1}{a_e h} = 1. \quad (10)$$

(10) tenglamadan ma'lum bo'ladiki, M nuqtaning nisbiy trayektoriyasi $O_1 y_1$ hamda $O_1 z_1$ o'qlarini $-\frac{a_e h}{g}$ va h masofalarda kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqdan iborat ekan.

Yer aylanishining erkin tushayotgan nuqtaning og'ishiga ta'siri

Unchalik katta bo'lmagan (Yerning radiusiga nisbatan) H balandlikdan Yerga tushib kelayotgan nuqtaning harakatini tekshirib ko'ramiz. Tushishdagi og'irlik kuchini o'zgarmas deb hisoblaymiz va havoning qar-shiligini e'tiborga olmaymiz. Oy o'qini vertikal yuqoriga, Ox o'qini sharq tomonga gorizont



16.3-rasm

yozamiz:

$$m\ddot{x} = \Phi_x, \quad m\ddot{y} = -P = -mg. \quad (16.19)$$

Boshlang'ich shartlar:

$$t = 0 \text{ da } x = 0, y = H, v_x = 0, v_y = 0.$$

Differensial tenglamaning ikkinchisini tegishli chegaralarda aniq integrallab, quyidagini yozamiz,

$$v_y = \dot{y} = -gt, \quad y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Φ_x kuchning modulini aniqlashda, yuqorida aytilganidek, Φ_x yo'nalishini belgilashda v_y ga nisbatan juda kichik bo'lganligi sababli v_x tezlikni hisobga olmaymiz (chunki Φ_x kuchning moduli $\bar{P}$ og'irlik kuchidan juda kichik) va taqribiy yechimni aniqlash uchun, $v = |v_y| = gt$ deb hisoblaymiz. Nuqtaning $\bar{v}$ tezligi vertikal pastga (MO chizig'i bo'yicha, 16.3-rasm, b) yo'nalgan va Yerning o'qi bilan $\alpha = 90^\circ - \lambda$ (λ — Yerning kengligi) burchak tashkil etadi. Natijada, $\Phi_x = 2m\omega g t \cos \lambda$ bo'ladi va (16.19) ning birinchi tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\ddot{x} = 2(\omega g \cos \lambda) \cdot t.$$

Qavs ichidagi qiymat o'zgarmas bo'lgani uchun, bu tenglamani integrallab, aniqlaymiz:

$$\dot{x} = (\omega g \cos \lambda) \cdot t^2 + C_1, \quad x = \frac{\omega g \cos \lambda}{3} \cdot t^3 + C_1 t + C_2.$$

Boshlang'ich shartlarga asosan C_1 va C_2 larning qiymatlarini qo'yamiz. Shunday qilib, havoda erkin tushib kelayotgan nuqtaning nisbiy harakatini taqriban aniqlovchi harakat qonuni quyidagicha bo'lar ekan:

$$x = \frac{\omega g \cos \lambda}{3} t^3, \quad y = H - \frac{g}{2} t^2.$$

Nuqtaning ushbu harakat qonunidan ko'rinib turibdiki, uning trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat emas ekan va haqiqatdan ham u sharq tomonga qarab og'ar ekan. Yuqoridagi tenglamalardan t vaqtini yo'qotib yuborsak, nuqta trayektoriyasining taqribiy tenglamasi kelib chiqadi (kubsimon yarim parabola),

$$x^2 = \frac{8\omega^2}{9g} \cos^2 \lambda (H - y)^3.$$

Bu tenglamada $y=0$ deb hisoblasak, nuqtaning Yerga kelib tushgandagi sharqqa tomon ε og'ishi kelib chiqadi:

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2H^3}{g}} \quad (16.20)$$

Ko'rinib turibdiki, ε og'ish Yer sharining ω burchak tezligiga to'g'ri proporsional bo'lib, juda kichkina qiymatni tashkil etar ekan. Yerning turli joylarida tadqiqotchilar tomonidan olib borilgan qator tajribalar natijasida (16.20) formula bo'yicha hisoblashlar to'g'ri ekanligi tasdiqlandi. Endi, O punktdan vertikal yuqoriga qarab v_0 tezlik bilan otib yuborilgan jismning harakatini ko'rib chiqamiz. Nuqtaning yuqoriga bo'lgan harakatida Φ , kuchning yo'nalishi birinchi yaqinlashuvda g'arbga qarab yo'naladi. U holda Ox o'qini g'arb tomonga yo'naltirsak, differensial tenglama o'z ko'rinishini saqlab qoladi, lekin boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi: $t=0$ da $x=0$, $y=0$, $v_x=0$, $v_y=v_0$. Ushbu shartlarga ko'ra tenglamalarning ikkinchisidan

$$v_y = \dot{y} = v_0 - gt \quad \text{va} \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (16.21)$$

kelib chiqadi. U holda, oldingi masaladagi kabi $v=v_0$ deb hisoblasak,

$$\Phi_x = 2m\omega (v_0 - gt) \cos \lambda$$

va (16.19) ning birinchi tenglamasi

$$\ddot{x} = 2\omega \cos \lambda (v_0 - gt).$$

Ushbu tenglama nuqtaning pastga qarab qiladigan harakatini ham ifodalaydi, chunki, Φ , kuchining yo'nalishini o'zgarishi, $v_y = v_0 - gt$ ning o'zgarishi orqali hisobga olinadi. Oxirgi tenglamani integrallab, quyidagi natijani olamiz:

$$x = \omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{2}{3} g t^3 \right). \quad (16.22)$$

Tenglamada $y=0$ (ya'ni, nuqta Yerga qaytib tushdi) deb hisoblab, nuqtaning parvoz vaqtini aniqlaymiz. $t_1 = 2v_0/g$ bo'ladi. Hamda Galiley formulasiga asosan $v_0 = \sqrt{2gH_1}$, bu yerdagi H_1 – nuqtaning ko'tarilishdagi balandligi, (16.22) tenglamadan nuqtaning Yerga qaytib tushgandan keyingi og'ishini aniqlaymiz:

$$\varepsilon_1 = \omega \cos \lambda \frac{4v_0^2}{3g^2} \text{ yoki } \varepsilon_1 = \frac{8}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2H_1^3}{g}}. \quad (16.23)$$

(16.21) va (16.23) formulalardan $H_1 = H$ bo'lganda $\varepsilon_1 = 4\varepsilon$ ekanligini aniqlaymiz. Agar nuqtaning harakati yana davom etsa (masalan, O nuqta Yerning sathidan yuqorida bo'lsa), u holda nuqtaning trayektoriyasi B punktdan boshlab muntazam ravishda sharq tomonga og'ib boradi. Yuqoridagi barcha hisoblashlar havosiz fazo uchun isbot qilingan. Shu sababli ular orqali Yerning aylanishini pastga tushib kelayotgan nuqtaga bo'lgan ta'sirini faqatgina ma'lum (birinchi yaqinlashishdagi) aniqlikda ifodalayd xolos (lekin, qoniqarli darajada aniqlik beradi).

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Bug'doy o'ruvchi kombaynning qirquvchi a $x = 0,05 \cos 10\pi t$ qonunga muvofiq to'g'ri chiziqli harakat qiladi sekunda, x – metr hisobida). Pichoqni harakatga keltiruvchi A aniqlansin. Pichoq og'irligi, $G = 100 N$. Erkin tushish tezligi $g = 10 m/s^2$ deb qabul qilingan.

2-masala. Tosh shaxtaga boshlang'ich tezliksiz tushib keladi Toshning shaxta tubiga urilishidan chiqqan tovush toshning tushish boshlagan vaqtdan $t = 6,5 s$ dan keyin eshitiladi. Tovush tezligi $330 m/s$ ga teng. Shaxta chuqurligi topilsin.

3-masala. Og'ir jism gorizontal 30° burchak ostida og'gan silliq tekislik bo'ylab pastga tushadi. Agar jismning boshlang'ich paytdagi tezligi, 2 m/s ga teng bo'lsa, jism $9,6\text{ m}$ yo'lni qancha vaqtda bosib o'tishi topilsin.

4-masala. Gorizontal yo'lda 10 m/s tezlik bilan boruvchi tramvay vagoni tormozlanganda u qancha vaqtda va qanday masofani o'tib to'xtaydi? Tormozlanish vaqtida vagon harakatiga ko'rsatiladigan qarshilik vagon og'irligining $0,3$ qismini tashkil qiladi.

5-masala. A samolyot yerdan 4000 m balandlikda 140 m/s gorizontal tezlik bilan uchadi. Berilgan B nuqtaga samolyotdan boshlang'ich nisbiy tezliksiz yuk tashlash kerak. Bu yukni B nuqtadan gorizontal to'g'ri chiziq bo'ylab o'lchanadigan qanday x masofada tashlash kerak? Havoning qarshiligi hisobga olinmasin.

6-masala. Massasi 10^7 kg bo'lgan kema 16 m/s tezlik bilan harakatlanadi. Suvning qarshiligi kema tezligining kvadratika proporsional va 1 m/s tezlikda $3 \cdot 10^4\text{ N}$ ga teng. Kemaning tezligi 4 m/s ga teng bo'lishi oldida u qanday masofani bosib o'tadi? Kema bu masofani qancha vaqtda bosib o'tadi?

Nazorat savollari

1. Inersial va noinersial sanoq sistemasi nima?
2. Ko'chirma inersiya kuchi nima?
3. Koriolis inersiya kuchi nima?
4. Nisbiy harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
5. Markazdan qochirma inersiya kuchini tushuntiring.
6. Aylanma inersiya kuchini tushuntiring.
7. Klassik mexanikaning nisbiylik nazariyasini tushuntiring.
8. Nisbiylik nazariyasi kim tomonidan aniqlangan?
9. Yer aylanishini jismning harakatiga ta'siri qanday?

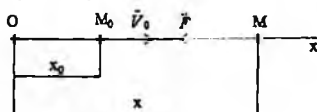
TEBRANMA HARAKATLAR

17. MODDIY NUQTANING TO'G'RI CHIZIQLI TEBRANMA HARAKATI

Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Tebranma harakat turlarini o'rganish mexanika, fizika va texnika fanlarining aniq masalalarini yechish uchun juda zarurdir. Turli qurilmalar va mexanizmlarning qismlari kuchlar ta'sirida tebranish oladi. Tebranishning me'yoridan oshishi natijasida falokatlar ro'y berishi mumkin. Ayrim hollarda esa, masalan radiotexnika sohalarida, tebranishlardan unumli foydalaniladi. Tebranish sodir bo'ladigan jarayonlarning mohiyati turlicha bo'lishiga qaramay, ularning xarakterli xususiyatlari bir xil qonuniyatlarga bo'ysunadi. Masalan, mayatnik, prujinaga osilgan yuk yoki suvdagi kemanding chayqalishi bir xil differensial tenglama bilan ifodalanishi mumkin.

Dastlab moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatini o'rganamiz. Ox o'qining boshi M moddiy nuqtaning muvozanat holatida bo'lsin.



17.1-rasm

Massasi m bo'lgan nuqtaga qaytaruvchi F kuch ta'sir etsin (17.1-rasm). Moddiy nuqtani muvozanat holatiga qaytarishga intiluvchi kuchga qaytaruvchi kuch deyiladi. Bu

kuch hamma vaqt moddiy nuqtaning muvozanat holatiga qarab yo'naladi va moddiy nuqtaning koordinatasiga bog'liq holda o'zgaradi:

$$F = -cx, \quad (17.1)$$

bu yerda c – birlilik koeffitsiyenti bo'lib, moddiy nuqtani bir birlik masofaga siljitish uchun kerak bo'lgan kuchni ifodalaydi va N/m da o'lchanadi. Bunday kuchga prujinaning elastiklik kuchi misol bo'la oladi. Moddiy nuqta boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan bo'lib, v_0 boshlang'ich tezlikka ega bo'lsin. Moddiy nuqta harakat differensial tenglamasini

tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x. \quad (17.2)$$

(17.1) ni (17.2) ga qo'ysak, tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{x} = -F \rightarrow m\ddot{x} = -cx \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (17.3)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m}. \quad (17.4)$$

U holda (17.3) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (17.5)$$

(17.5) tenglama *moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat differensial tenglamasini* ifodalaydi. Bu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (17.6)$$

C_1 va C_2 integral o'zgarmaslari bo'lib, ular boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Boshlang'ich shartlar quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$t=0 \quad \text{da} \quad x=x_0, \quad v=v_0. \quad (17.7)$$

(17.6) tenglamadan birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (17.8)$$

(17.7) ifodani (17.6) va (17.8) tenglamalarga qo'yib, integral o'zgarmaslarni aniqlasak, natijada $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$ ekanligi kelib chiqadi.

C_1 va C_2 ning qiymatlarini (17.6) ga qo'yamiz va moddiy nuqtaning tebranma harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (17.9)$$

Agar integral o'zgarmaslarini $C_1 = a \sin \alpha$, $C_2 = a \cos \alpha$ ko'rinishda ifodalasak, (17.5) differensial tenglamaning yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (17.10)$$

Bu tenglamada a - tebranish amplitudasi, $kt + \alpha$ - tebranish fazasi, α - tebranish boshlang'ich fazasi deyiladi. Ular quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad (17.11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{v_0}. \quad (17.12)$$

(17.10) yechimdan ko'rinib turibdiki, chiziqli qaytaruvchi kuch ta'sirida moddiy nuqta garmonik tebranma harakat qiladi.

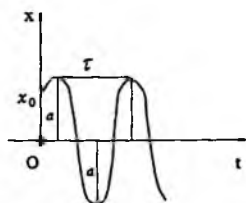
T tebranish davrini aniqlaymiz. Sinus va kosinus trigonometrik funksiyalarning davri 2π ga tengligidan, T o'zgarganda tebranish fazasi 2π ga o'sadi.

Demak:

$$k(t+T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi. \quad (17.13)$$

Bu tenglamani yechsak:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (17.14)$$



17.2-rasm

Tebranish doiraviy takroriyliigi (chastotasi), k ning qiymatini qo'ysak:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (17.15)$$

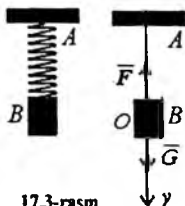
(17.15) tenglamada x_0 va v_0 lar qatnashmaydi. Demak, tebranish davri harakatning boshlang'ich shartlariga bog'liq bo'lmaydi. Tebranish takroriyliigi, ν moddiy nuqtaning massasi va qaytaruvchi kuchni xarakterlovchi bikrlikka bog'liq:

$$\nu = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{T}. \quad (17.16)$$

Erkin tebranma harakat grafigini tasvirlaymiz (17.2-rasm).

17.2-rasmdagi x_0 moddiy nuqtaning boshlang'ich paytdagi og'ishi, T nuqtaning bir marotaba to'liq tebranishi uchun ketgan vaqti, ya'ni tebranish davridir.

Og'irlik kuchi ta'sirida moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati



17.3-rasm

Massasi m bo'lgan moddiy nuqta AB prujinaga ilingan. Og'irlik kuchi ta'sirida prujinaning statik cho'zilishi f_n ga teng. Koordinata boshini moddiy nuqtaning statik muvozanat holatidagi vaziyatida deb qabul qilib, uning harakatini tekshiramiz (17.3-rasm).

Prujinaning elastiklik kuchi $F = c(y + f_n)$

ga teng.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{y} = G - F. \quad (17.16)$$

$\bar{G}$ – moddiy nuqtaning og'irlik kuchi. Jismning muvozanat holatida $G = cf_n$. (17.16) tenglamaga kuchlarning ifodalarini qo'ysak, quyidagi kelib chiqadi:

$$m\ddot{y} = cf_n - c(y + f_n), \quad (17.17)$$

$$m\ddot{y} = cf_n - cy - cf_n.$$

Ifodani soddalashtirib, yuqoridagi belgilashni qo'yamiz:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (17.18)$$

(17.18) tenglama *erkin tebranma harakat differensial tenglamasini* ifodalaydi. Uning yechimi (17.6) ko'rinishda ifodalanadi. Ya'ni:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (17.19)$$

Integral o'zgarmaslari, $C_1 = y_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$ bo'lib, ularni o'miga qo'yib, (17.19) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (17.20)$$

Bundan ko'rinib turibdiki, og'irlik kuchi jismning muvozanat holatini o'zgartirar ekan. Agar bizga prujinaning statik deformatsiyasi, f_n berilgan bo'lsa, tebranish doiraviy takroriyliqi:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c}{G}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = \sqrt{\frac{cg}{cf_n}} = \sqrt{\frac{g}{f_n}}. \quad (17.21)$$

Demak, (17.21) ifodani (17.20) ga olib borib qo'ysak, og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan moddiy nuqtaning harakat qonuni kelib chiqadi. Ya'ni:

$$y = y_0 \cos \sqrt{\frac{g}{f_n}} t + \frac{v_0}{k} \sin \sqrt{\frac{g}{f_n}} t.$$

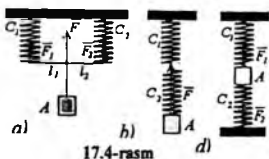
Teburanish davrini aniqlaymiz:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{f_n}}} = 2\pi \sqrt{\frac{f_n}{g}}.$$

Demak, $T = 2\pi \sqrt{\frac{f_n}{g}}.$

Prujinalar parallel, ketma-ket ulangan va yuk prujinalar orasiga osilgan hollarda ularni ekvivalent prujina bilan almashtirish.

Bikrliklari c_1 va c_2 bo'lgan prujinalar har xil ko'rinishlarda ulangan bo'lib, ularni ekvivalent bitta prujina bilan almashtirishni ko'rib chiqamiz (17.4-rasm. a), b), d)).



17.4-rasm

1. Prujinalar o'zaro parallel ulangan hol.

Prujinalarni bitta ekvivalent prujina bilan almashtiraylik. Prujina-larning A yuk ta'siridagi deformatsiyalarini mos ravishda f_1 va f_2 bilan belgilaymiz (17.4-rasm, a). Prujinalar o'zaro parallel bo'lganligidan, ulardan har birining deformatsiyasi bilan ekvivalent prujina deformatsiyasi f bir xil bo'lishi kerak:

$$f = f_1 = f_2. \quad (17.22)$$

Bu deformatsiyalar tufayli hosil bo'lgan elastik kuchlarini mos ravishda F, F_1, F_2 deylik. U holda:

$$F = F_1 + F_2 \quad (17.23)$$

bo'lishi kerak (bunda l_1 va l_2 masofalar $\bar{F}$ kuch qo'yilgan nuqtadan prujinalargacha bo'lgan masofalar, c_1 va c_2 prujinalar bikrliklari).

(17.23) tenglikni $f = f_1 = f_2$ ga hadma-had bo'lsak,

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

D va E yuklarni tutashtiruvchi sterjen qirqib tashlansa, D yuk $\bar{v}_0$ boshlang'ich tezlik bilan harakatlana boshlaydi. D yukning statik muvozanat holatini koordinata boshi deb olib, Ox o'qini harakat yo'nalishi bo'yicha vertikal pastga yo'naltiramiz. D yukning M holatida unga qo'yilgan D yukning og'irlik kuchi, $\bar{F}_D$ va ekvivalent prujinaning elastiklik kuchi, $\bar{F}$ ni rasmda tasvirlaymiz. Boshlang'ich shartlarni aniqlaymiz. Masala shartiga ko'ra, boshlang'ich paytda prujina D va E yuklar ta'sirida mos ravishda, f_{st}^D va f_{st}^E statik deformatsiya olib, D yukning M_0 holatida boshlang'ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$t = 0 \text{ da } x = x_0 = f_{st}^E, \quad v = v_0. \quad (1)$$

D yukning Ox o'qi bo'ylab harakati differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m_D \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{xi}, \quad (2)$$

bu yerda $\sum_{i=1}^n F_{xi}$ ifoda D yukka ta'sir etuvchi kuchlarning Ox o'qidagi proyeksiyasi bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = P_D - F. \quad (3)$$

Elastiklik kuchi:

$$F = c(x + f_{st}^D). \quad (4)$$

Og'irlik kuchi:

$$P_D = c f_{st}^D. \quad (5)$$

(4) va (5) tenglamalarni (3) ga olib borib qo'ysak, harakat differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$m_D \frac{d^2 x}{dt^2} = c f_{st}^D - cx - c f_{st}^D \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m_D} x = 0. \quad (6)$$

Bu yerda $k^2 = \frac{c}{m_D}$ belgilash kiritsak, (6) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (7)$$

(7) tenglamadan ko'rinib turibdiki, D yuk erkin tebranma harakat qiladi. Bu differensial tenglamaning yechimi quyidagi

ko'rinishda yoziladi:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (8)$$

Hisoblashlarni bajarib, (8) tenglamaga qo'yamiz.

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{1800 \cdot 600}{1800 + 600} \text{ N/m} = 450 \text{ N/m}, \quad (9)$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{450}{1,5}} \text{ s}^{-1} = 17,3 \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{v_0}{k} = \frac{0,4}{17,3} \text{ m} = 0,023 \text{ m}, \quad m_E g = c f_{st}^E.$$

Bizga ma'lumki,

$$x_0 = f_{st}^E = \frac{m_E g}{c} = \frac{0,5 \cdot 9,8}{450} \text{ m} = 0,011 \text{ m}. \quad (10)$$

(9) va (10) ifodalarni (8) ga olib borib qo'ysak, D yukning harakat qonuni kelib chiqadi:

$$x = 0,011 \cos 17,3t + 0,023 \sin 17,3t \text{ (m)}. \quad (11)$$

D yuk erkin tebranma harakatda bo'lgani uchun tebranish davri:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m_D}{c}} = 0,6\pi \text{ s} \quad (12)$$

bo'ladi.

Tebranish amplitudasi esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = \sqrt{(0,011)^2 + (0,023)^2} \text{ m} = 0,0255 \text{ m} \approx 2,55 \text{ m}. \quad (13)$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Og'irligi $Q = 2 \text{ kN}$ bo'lgan yuk teng o'lchovli $v = 5 \text{ m/s}$ tezlik bilan pastga tushirilayotganda po'lat arqon blok oboymasiga siqilib qolib, yuk tushirilayotgan po'lat arqonning yuqori uchi to'satdan to'xtab qoldi. Po'lat arqonning og'irligini hisobga olmay, yukning keyingi tebranishida trosning eng katta tortilish kuchi aniqlansin. Po'lat arqonning bikrlilik koeffitsiyenti $c = 4 \cdot 10^6 \text{ N/m}$.

2-masala. Massasi $m = 20 \text{ kg}$ bo'lgan yuk bikrligi $c = 400 \text{ N/m}$ prujinaga osilgan holda vertikal to'g'ri chiziq bo'ylab tebranadi. Yukning tezlanishi 4 m/s^2 ga yetganda uning og'irlik markazi

statik muvozanat holatidan qanchaga uzoqlashishini toping.

3-masala. Massasi $m=0,5\text{ kg}$ ga teng bo'lgan yuk prujinaga osilgan holda $\ddot{y}+55y=0$ qonun bo'yicha tebranma harakat qiladi. Prujinaning bikrlilik koeffitsiyentini aniqlang.

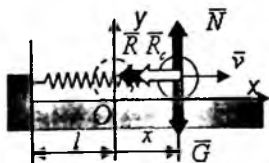
4-masala. Moddiy nuqta $x=12\cos 3t-15\sin 3t\text{ (sm)}$ qonun bilan tebranma harakat qilsa, tebranish amplitudasini hisoblang.

Nazorat savollari

1. Erkin tebranma harakat qanday kuch ta'sirida sodir bo'ladi?
2. Erkin tebranma harakat sodir bo'lishi uchun qaysi shartlar bajarilishi shart?
3. Erkin tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Erkin tebranma harakat qonuni qanday ifodalanadi?
5. Erkin tebranma harakat davri, amplitudasi, boshlang'ich fazasi qanday ifodalanadi?
6. Parallel ulangan prujinalarga ekvivalent prujina bikrligi qanday formula bilan aniqlanadi?
7. Ketma-ket ulangan prujinalarga ekvivalent prujina bikrligi qanday formula bilan aniqlanadi?
8. Yuk prujinalar orasiga osilganda prujinalarga ekvivalent prujina bikrligi qanday formula bilan aniqlanadi?

18. MUHIT QARSHILIK KUCHI TA'SIRIDA MODDIY NUQTANING ERKIN TEBRANMA HARAKATI

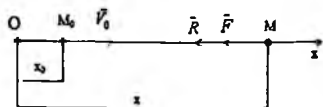
So'nuvchi tebranma harakat



18.1-rasm

Tabiatda va texnikada jismga qaytaruvchi kuchdan tashqari muhitning qarshilik kuchi ham ta'sir etadi. Bunday kuchlarga ishqalanish kuchi, havoning qarshilik kuchi misol bo'la oladi. Bu kuchlar harakatning tez so'nishiga

olib keladi.



18.2-rasm

Muhit qarshiligining tebranma harakatga ta'sirini ko'rib chiqamiz. Massasi m bo'lgan M moddiy nuqtaga qaytaruvchi $\vec{F}$ kuchdan tashqari tezlikning funksiyasi bo'lgan va harakat

yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan $\vec{R}$ – qarshilik kuchi ta'sir etsin (18.2-rasm). Nuqtaning kichik tezliklarida qarshilik kuchi tezlikning birinchi darajasiga proporsional ravishda o'zgaradi. Ya'ni:

$$R = \mu v, \quad F = cx, \quad (18.1)$$

bu yerda μ —muhit qarshiligining proporsionallik koeffitsiyenti.

Moddiy nuqta boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan va v_0 tezlikka ega bo'lsin. Moddiy nuqta uchun harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad (18.2)$$

$$m\ddot{x} = -F - R \quad (18.3)$$

(18.1) ni (18.3) ga qo'ysak:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu v \Rightarrow m\ddot{x} + cx + \mu \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0 \quad (18.4)$$

hosil bo'ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}. \quad (18.5)$$

Belgilashlarni (18.4) tenglamaga olib borib qo'ysak:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \quad (18.6)$$

hosil bo'ladi. (18.6) tenglama muhit qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat differensial tenglamasidir. Bu tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (18.7)$$

C_1, C_2 – integral o'zgarasmalari. λ_1, λ_2 – quyidagi xarakteristik tenglamaning yechimi bo'ladi:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0. \quad (18.8)$$

Ya'ni:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}, \quad (18.9)$$

bu yerda $n = \frac{\mu}{2m}$ muhit qarshilik kuchini xarakterlaydi, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ esa qaytaruvchi kuchni xarakterlaydi. (18.8) tenglamadan ko'rinadiki, (18.6) tenglamaning umumiy yechimini tuzishda quyidagi uchta holni ko'rish mumkin.

1. Muhitning qarshiligi kichik bo'lgan hol, ya'ni $k > n$.

Bu holda (18.8) xarakteristik tenglamaning yechimi mavhumdir:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}, \quad (18.10)$$

yoki

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1, \quad (18.11)$$

bu yerda $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ va $i = \sqrt{-1}$.

(18.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (18.12)$$

bunda C_1 , C_2 integral o'zgarmaslaridir. Ular boshlang'ich shartlardan aniqlanadi:

$$t = 0 \text{ da } x = x_0, \quad \dot{x} = v_0. \quad (18.13)$$

Bu hol uchun tezlikning harakat o'qidagi proyeksiyasi:

$$\dot{x} = -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} k_1 (C_2 \cos k_1 t - C_1 \sin k_1 t) \quad (18.14)$$

(18.12) va (18.14) tenglamalarga (18.13) ni qo'yib, C_1 , C_2 larni aniqlaymiz:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}. \quad (18.15)$$

Demak, (18.12) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} k_1 t \right). \quad (18.16)$$

(18.16) tenglama muhit qarshilik kuchi ta'sirida moddiy nuqta erkin tebranma harakatining kichik qarshiliklar bo'lgan hol uchun harakat qonunidir. Agar integral o'zgarmaslarini

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= a_1 \sin \beta \\ C_2 &= a_1 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

ko'rinishda ifodalasak, (18.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = a_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \beta). \quad (18.18)$$

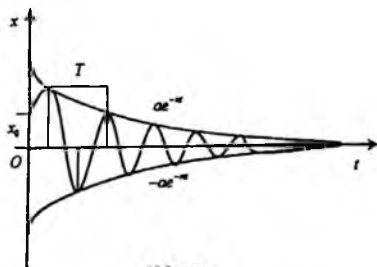
(18.18) tenglama erkin garmonik tebranma harakat tenglamasidan vaqt o'tishi bilan tez kamayuvchi e^{-nt} ko'paytma bilan farq qiladi. Chunki, $t \rightarrow \infty, e^{-nt} \rightarrow 0$. Shuning uchun (18.18) qonun bilan tebranuvchi moddiy nuqtaning harakati so'nuvchi tebranma harakat deyiladi. a_1 va β integral doimiylari (18.13) boshlang'ich shartlardan aniqlanadi. Buning uchun (18.15) va (18.17) tenglamalardan foydalanamiz:

$$a_1 \sin \beta = x_0 \text{ va } a_1 \cos \beta = \frac{v_0 + nx_0}{k_1}. \quad (18.19)$$

(18.19) tenglamadan:

$$a_1 = \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \quad \text{tg } \beta = \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \quad (18.20)$$

So'nuvchi tebranma harakat grafigi $a_1 e^{-nt}$ va $-a_1 e^{-nt}$ egri chiziq'larga urinib o'tuvchi so'nuvchi sinusoida grafigi ko'rinishida tasvirlanadi (18.3-rasm).



18.3-rasm

Grafikdan aniq ko'rinib turibdiki, M nuqtaning tebranishi davriy emas. Chunki e^{-nt} – eksponensial kattalik bo'lib, davriy funksiya emas.

Tebranish davri shartli ravishda qabul qilingan. So'nuvchi tebranma harakat davri erkin tebranma harakat davridan birmuncha kattadir. Lekin, qarshilik kuchi juda kichik bo'lganda tebranish davri taxminan $T_1 \approx T$ deb olinadi:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (18.21)$$

(18.18) tenglamadagi $A = a e^{-nt}$ ifoda so'nuvchi tebranish amplitudasi deyiladi. So'nuvchi tebranish amplitudasi vaqt o'tishi bilan kamayib borib tufayli, tebranish fazasi 2π ga o'zgarganda nuqta o'zining avvalgi muvozanat holatidan eng katta chetga chiqishini takrorlay olmaydi.

Tebranishlar amplitudasining kamayish qonunini ko'rib chiqamiz. M nuqtaning t_1 paytda O muvozanat holatidan eng katta og'ishi x_1 bo'lsin, $t_1 + \frac{T_1}{2}$ vaqtda esa x_2 bo'lsin. U holda:

$$x_1 = e^{-n t_1} a_1, \quad x_2 = e^{-n \left(t_1 + \frac{T_1}{2}\right)} a_1 = e^{-\frac{n T_1}{2}} x_1. \quad (18.22)$$

Demak, har yarim davr o'tishi bilan tebranishlar amplitudasi, maxraji, $q = e^{-\frac{n T_1}{2}}$ bo'lgan geometrik progressiya kabi kamayib boradi. $q = e^{-\frac{n T_1}{2}}$ — so'nish dekrementi deyiladi. $D = |\ln q| = \frac{n T_1}{2}$ kattalik esa *logarifmik dekrement* deyiladi. Tekshirishlardan shunday xulosaga kelinadiki, kichik qarshiliklar tebranish davriga o'z ta'sirini ko'rsatib, geometrik progressiya qonuni asosida harakatni so'ndiradi.

2. Muhit qarshiligi katta bo'lgan hol, ya'ni $n > k$.

Bu holda (18.8) tenglamaning yechimi haqiqiy va turli bo'lib, quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (18.23)$$

(18.6) tenglamaning umumiy yechimi:

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t \right). \quad (18.24)$$

Yangi belgilashlar kiritdik, ya'ni:

$$C_1 = a_1 \operatorname{sh} \beta; \quad C_2 = a_1 \operatorname{ch} \beta. \quad (18.25)$$

U holda umumiy yechim quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = a e^{-nt} \operatorname{sh} \left(\sqrt{n^2 - k^2} t + \beta \right). \quad (18.26)$$

U holda umumiy tenglamadan ko'rinib turibdiki, katta qarshiliklar bo'lgan holda umumiy yechimda trigonometrik funksiyalar ishtirok etmaydi. Bu holda M nuqtaning harakati aperiodik (nodavriy) harakatdan iborat bo'ladi, chunki giperbolik sinus funksiyasi davriy bo'lmagan funksiyadir. Giperbolik

funksiyaning formulalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\operatorname{sh} wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}; \quad \operatorname{ch} wt = \frac{e^{wt} + e^{-wt}}{2}. \quad (18.27)$$

Agar (18.27) tenglamani (18.24) ga qo'ysak, (18.6) tenglama yechimi quyidagicha yoziladi:

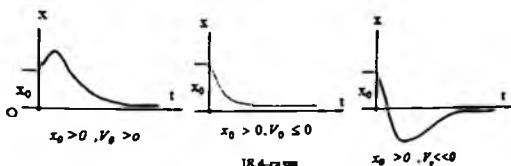
$$x = e^{-wt} (C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt}), \quad (18.28)$$

bu yerda $w = \sqrt{n^2 - k^2}$ ga teng. Integral o'zgarmaslari, C_1 va C_2 , (18.13) boshlang'ich shartlardan aniqlanadi:

$$C_1 = \frac{v_0 + x_0 (n + \sqrt{n^2 - k^2})}{2\sqrt{n^2 - k^2}}, \quad C_2 = \frac{v_0 + x_0 (n - \sqrt{n^2 - k^2})}{2\sqrt{n^2 - k^2}}. \quad (18.29)$$

(18.29) formuladan ko'rinadiki, harakat tebranma bo'lmaydi, vaqt o'tishi bilan x kamayib, nolga intilib boradi, ya'ni $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$.

Boshlang'ich shartlarning qanday bo'lishiga qarab, uning grafigi 18.4-rasmda tasvirlangan hollardan biri kabi bo'ladi.



3. Chegaraviy hol, ya'ni $n = k$.

Bu holda xarakteristik (16.8) tenglama ikkita teng, haqiqiy ildizga ega bo'ladi. Ya'ni:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n \quad (18.30)$$

bo'lib, (18.6) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (18.31)$$

(18.13) boshlang'ich shartlardan foydalanib, integral doimiylarini hisoblaymiz:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 + n x_0. \quad (18.32)$$

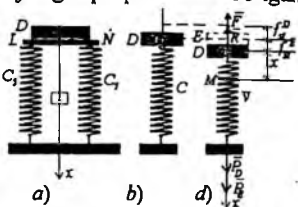
Demak, (18.6) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (v_0 + nx_0)t]. \quad (18.33)$$

Bu hol ham davriy bo'lmagan xarakterga ega bo'lib, uning grafigi katta qarshiliklar bo'lgan hol grafigidan (18.4-rasm) deyarli farq qilmaydi. Bu holda ham nuqta harakati tebranma harakat bo'lmay, aperiodik harakatdan iborat bo'ladi.

18.1-masala. O'zaro parallel bo'lgan ikkita bir xil prujina LN sterjen bilan biriktirilgan bo'lib, ularning massasi, $m_D = 5 \text{ kg}$ bo'lgan D yuk ta'siridan olgan statik deformatsiyasi, $f_{st}^D = 2 \text{ sm}$. D yuk ustiga $m_E = 5 \text{ kg}$ massali E yuk qo'yilishi bilan yuklarning harakatiga tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo'lgan

$R = 60 \text{ v (N)}$ qarshilik kuchi ta'sir qila bosh-laydi (18.5-rasm, a). O koordinata boshini D va E yuklarning statik mu-vozanat holatida olib va o'qni vertikal bo'yicha pastga yo'naltirib, yuklarning birgalikdagi harakat qonuni topilsin. LN sterjen



18.5-rasm

massasi va dempfer qismlarining massasi hisobga olinmasin.

Yechish: O'zaro parallel ulangan va birliliklari teng ikki prujinani ularga ekvivalent bo'lgan bitta prujina bilan almashtiramiz (18.5-rasm, b):

$$c = c_1 + c_1 = 2c_1. \quad (1)$$

Koordinata o'qini masala shartida ta'kidlangani kabi tanlaymiz. D va E yuklarni M nuqta deb qaraymiz (18.5-rasm, d). M nuqtaga D va E yuklarning og'irlik kuchlari, $\bar{P}_D$, $\bar{P}_E$, muhitning qarshilik kuchi, $\bar{R}$ va prujina elastik kuchi, $\bar{F}$ ta'sir qiladi. Bu kuchlar 18.5-rasmda tasvirlangan. Boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$t = 0, x = x_0 = -f_{st}^E, v = v_0 = 0. \quad (2)$$

Bunda f_{st}^E ekvivalent prujinaning E yuk ta'siridagi statik deformatsiyasi:

$$f_{st}^E = \frac{P_E}{c} = \frac{m_E g}{c}. \quad (3)$$

M moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$(m_D + m_E) \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix}. \quad (4)$$

Bu tenglamada $\sum F_{ix} = P_D + P_E - F - R$ bo'lishini e'tiborga olsak, (4) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(m_D + m_E) \frac{d^2 x}{dt^2} = P_D + P_E - F - R. \quad (5)$$

Bunda $F = cf$; $F = c(f_{st}^D + f_{st}^E + x)$; $R = 60v = 60 \frac{dx}{dt}$; $P_D + P_E = c(f_{st}^D + f_{st}^E)$ bo'lganligini e'tiborga olgan holda (5) ifoda quyidagicha yoziladi:

$$(m_D + m_E) \frac{d^2 x}{dt^2} + 60 \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (6)$$

Tenglamaning ikki tomonini $(m_D + m_E)$ ga bo'lib, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{60}{m_D + m_E} \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m_D + m_E} x = 0. \quad (7)$$

Belgilashlar kiritamiz. Ya'ni:

$$\frac{c}{m_D + m_E} = k^2, \quad \frac{60}{m_D + m_E} = 2n. \quad (8)$$

(8) ni (7) ga qo'ysak, differensial tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0. \quad (9)$$

(9) differensial tenglamaning yechimini yozishdan avval (8) dan n va k laming qiymatlarini aniqlab taqqoslaymiz:

$$n = \frac{60}{2(m_D + m_E)} = 3s^{-1}.$$

Masalaning shartiga ko'ra, prujinalarning D yuk ta'siridagi statik deformatsiyasi $f_{st}^D = 2(sm) = 0,02(m)$ ga teng. U holda $P_D = c_1 \cdot f_{st}^D$ tenglikdan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$c_1 = e \frac{P_D}{f_{st}^D} = \frac{m_D g}{f_{st}^D} = \frac{5 \cdot 9,8}{0,02} N/m = 2450 N/m.$$

Prujinalar parallel ulangani uchun ekvivalent prujina bikrligi,

$$c = 2c_1 = 4900 N/m.$$

(8) tenglamadan k ni hisoblaymiz:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D + m_E}} = \sqrt{\frac{4900}{10}} \text{ s}^{-1} = 22,3 \text{ s}^{-1}.$$

Demak, $n < k$ - kichik qarshiliklar bo'lgan hol bo'lib, (9) differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + v_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \quad (10)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(10) tenglamadagi tegishli hisoblashlarni bajaramiz:

$$x_0 = -f'' = -\frac{m_E g}{C} = -0,01(m), \quad \sqrt{k^2 - n^2} = 21,93 \text{ s}^{-1}, \quad \frac{nx_0 + v_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = -0,0014(m). \quad (11)$$

Ushbu qiymatlarni (10) ga qo'yib, D va E yuklarning birgalikdagi harakat qonunini aniqlaymiz:

$$x = -e^{-3t} (0,01 \cos 21,93t + 0,0014 \sin 21,93t) (m).$$

Shunday qilib, yuklar so'nuvchi tebranma harakat qilar ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi $m\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$ ko'rinishida bo'lsa, harakat nodavriy (aperiodik) bo'lishi uchun nuqta massasining maksimal qiymatini toping.

2-masala. Moddiy nuqtaning so'nuvchi tebranma harakat qonuni $x = ae^{-0,3t} \sin(0,4t + \alpha)$ bo'lsa, qarshilik kuchi hisobga olinmagandagi erkin tebranishlar chastotasini aniqlang.

Nazorat savollari

1. So'nuvchi tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?

2. So'nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasining yechimlari nechta ko'rinishda ifodalanadi?

3. So'nish dekrementini tushuntiring.

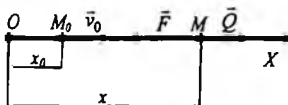
4. So'nuvchi tebranma harakat davri, amplitudasi, boshlang'ich fazasi qanday ifodalanadi?

5. So'nuvchi tebranma harakat grafigi qanday?

6. Aperiodik harakatni tushuntiring?

19. MODDIY NUQTANING MAJBURIY TEBRANMA HARAKATI

Moddiy nuqtaga qaytaruvchi kuchdan tashqari uyg'otuvchi kuch ham ta'sir etsin. (19.1-rasm).



19.1-rasm

Uyg'otuvchi kuch vaqtning davriy funksiyasi bo'lsin. Ya'ni:

$$Q = H \sin(pt + \delta), \quad (19.1)$$

bu yerda H – uyg'otuvchi kuch amplitudasi, p – doiraviy takroriy son, δ – boshlang'ich faza.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = F_x + Q_x. \quad (19.2)$$

Kuchlarni proyeksiyalaymiz:

$$m\ddot{x} = -F + Q. \quad (19.3)$$

(19.1) tenglamalarni (19.3) ga qo'yamiz:

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta), \quad (19.4)$$

$$m\ddot{x} + cx = H \sin(pt + \delta) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta). \quad (19.5)$$

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}.$$

(19.5) tenglamaga qo'yamiz

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (19.6)$$

(19.6) tenglama moddiy nuqtaning *majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini* ifodalaydi.

Moddiy nuqtaning qaytaruvchi va uyg'otuvchi kuch ta'siridagi harakati xususiy tebranishli, k – takroriy sonli erkin tebranma harakat va p – takroriy sonli majburiy tebranma harakatdan tashkil topgan. Differensial tenglama ikkinchi tartibli, bir jinsli bo'lmagan tenglamadir. Bu tenglamani integrallashda ikki hol ko'riladi: $p \neq k$ va $p = k$ bo'lgan hol.

a) Xususiy tebranish va uyg'otuvchi kuch takroriy sonlari teng bo'lmagan, $p \neq k$ hol uchun (19.6) tenglamaning yechimini ko'ramiz.

Uning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$x = x_1 + x_2, \quad (19.7)$$

bu yerda x_1 yechim $\ddot{x} + k^2 x = 0$ tenglamaning umumiy yechimi, x_2 yechim esa (19.6) tenglamaning xususiy yechimidir.

Umumiy yechim:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (19.8)$$

yoki

$$x_1 = a \sin(kt + \alpha). \quad (19.9)$$

Xususiy yechim:

$$x_2 = A \sin(pt + \delta) + B \cos(pt + \delta). \quad (19.10)$$

Bu yerda A va B doimiy kattaliklar bo'lib, ularni shunday tanlash kerakki, (19.6) tenglama ayniyatga aylansin. (19.9) va (19.10) tenglamalarni (19.6) ga qo'yish orqali ayniyat hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} -Bp^2 \cos(pt + \delta) - Ap^2 \sin(pt + \delta) + \\ + k^2 (B \cos(pt + \delta) + A \sin(pt + \delta)) = h \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (19.11)$$

Ayniyat o'rinli bo'lishi uchun $\sin(pt + \delta)$ va $\cos(pt + \delta)$ lar oldidagi koeffitsiyentlar teng bo'lishi zarur:

$$B(k^2 - p^2) = 0; \quad A(k^2 - p^2) = h.$$

Bundan:

$$B = 0, \quad A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Demak, xususiy yechim

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (19.12)$$

(19.8), (19.9) va (19.12) larni (19.7) ga qo'ysak:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (19.13)$$

yoki

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (19.14)$$

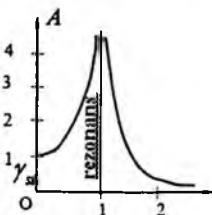
hosil bo'ladi. Bu yerda C_1 va C_2 - integrallash doimiylari. Agar

$p < k$ bo'lsa, uyg'otuvchi kuch bilan majburiy tebranma harakat fazalari bir xil bo'ladi, $p > k$ bo'lsa, (19.12) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi). \quad (19.15)$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, uyg'otuvchi kuch takroriy soni, p xususiy tebranish takroriy sonidan katta bo'lib, majburiy tebranish uyg'otuvchi kuchga nisbatan π fazaga farq qiladi. Majburiy tebranish amplitudasi o'zgarmas miqdor bo'lib, $\frac{p^2}{k^2}$ nisbat bilan orasidagi bog'liqlikni tekshiramiz. Ma'lumki, majburiy tebranish amplitudasi

$$A = \frac{h}{|k^2 - p^2|} = \frac{\gamma_s}{|1 - (p/k)^2|}. \quad (19.16)$$



19.2-rasm

bu yerda $\gamma_s = \frac{h}{k^2} = \frac{H/m}{c/m} = \frac{H}{c}$ —

nuqtaga uyg'otuvchi kuchning maksimal qiymatiga teng o'zgarmas kuch ta'sir etganda, nuqtaning muvozanat holatidan statik og'ishini ifodalaydi. Agar

$$\eta = \frac{A}{\gamma_s} = \frac{1}{|1 - (p/k)^2|} \text{ belgilash kiritsak,}$$

η kattalik *dinamiklik koeffitsiyenti*

deyiladi va u majburiy tebranma harakat amplitudasi statik og'ishidan necha marta ortiq bo'lishini ifodalaydi. $\frac{p^2}{k^2}$ nisbatga bog'liq ravishda A amplitudaning o'zgarish grafigi 19.2-rasmda keltirilgan. Grafikdan ko'rinadiki, $\frac{p^2}{k^2} \rightarrow 1$ da dinamiklik koeffitsiyenti cheksizlikka intilib, juda katta qiymatga erishadi.

Harakat qonunini aniqlash uchun boshlang'ich shartlardan, ya'ni $t=0$ da $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$ dan foydalanib, (19.13) tenglamadagi integral o'zgaraslarini, C_1 va C_2 ni aniqlaymiz:

$$x_0 = C_1 + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta \text{ yoki } C_1 = x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta. \quad (19.17)$$

(19.13) tenglamadan hosila olamiz va boshlang'ich shartlardan foydalanib, C_1 ni aniqlaymiz:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta), \quad (19.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta, \\ C_2 &= \frac{1}{k} \left(v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta \right). \end{aligned} \quad (19.19)$$

Demak, harakat qonuni

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2} \left(\cos kt \cdot \sin \delta + \frac{p}{k} \sin kt \cdot \cos \delta \right) + \\ &+ \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (19.20)$$

Tenglamadan ko'rinib turibdiki, majburiy tebranish boshlang'ich shartlarga bog'liq emas.

b) Xususiy tebranish va uyg'otuvchi kuch takroriy sonlari teng bo'lgan hol ($p=k$) uchun (19.5) tenglamaning yechimini ko'ramiz. Bu holda ham (19.7), (19.8) va (19.9) formulalardan foydalanamiz. (19.5) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$x_2 = At \sin(kt + \delta) + Bt \cos(kt + \delta). \quad (19.21)$$

x_2 va $\ddot{x}_2$ lar qiymatlarini (19.5) tenglamaga olib borib qo'ysak:

$$-2Bk \sin(kt + \delta) + 2Ak \cos(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta) \quad (19.22)$$

kelib chiqadi. Bir xil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab, A va B ni aniqlaymiz:

$$-2Bk = h, \quad 2Ak = 0. \quad (19.23)$$

(19.23) dan:

$$B = -\frac{h}{2k}, \quad A = 0. \quad (19.24)$$

(19.24) tengliklarni (19.21) tenglamaga olib borib qo'ysak, (19.5) tenglamaning $p=k$ bo'lgan holi uchun xususiy yechimi kelib chiqadi. Ya'ni:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta). \quad (19.25)$$

(19.8), (19.9) va (19.25) larni (19.7) ga olib borib qo'ysak, tenglamaning yechimi kelib chiqadi:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta), \quad (19.26)$$

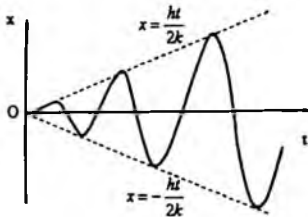
$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta).$$

(19.26) tenglamadan ko'rinib turibdiki, biz tekshirayotgan tebranma harakatning bu hoida ikkala tebranish ustma-ust tushadi. O'zgarmas amplitudali xususiy tebranish xarakteri $p \neq k$ holidagi kabi o'zgarmasdan qoldi. Majburiy tebranish fazasi uyg'otuvchi kuch fazasidan $\frac{3}{2}\pi$ ga farq qiladi. Demak:

$$x_2 = -\frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta) = \frac{ht}{2k} \sin\left(kt + \delta + \frac{3}{2}\pi\right). \quad (19.27)$$

Nuqtaning majburiy tebranma harakati amplitudasi o'suvchi, $\frac{ht}{2k}$ ga teng bo'lgan garmonik te-

ranma harakat kabi bo'ladi. Demak, $p = k$ da *rezonans hodisasi* ro'y beradi, ya'ni $t \rightarrow \infty$ da tebranish amplitudasi cheksiz orta boradi. Bu hodisa vibratsion texnika, mashinalar dinamikasi, akustika, radiotexnika va inshootlarni dinamik hisoblashda katta ahamiyatga ega.



19.3-rasm

Grafigi sinusoida bo'lib, quyidagi $\frac{ht}{2k}$, $-\frac{ht}{2k}$ qonun bilan ifodalanuvchi to'g'ri chiziqlarga urinib o'tadi (19.3-rasm).

Integrallash o'zgarmaslari, C_1 va C_2 lar boshlang'ich shartlardan aniqlanadi, ya'ni: $t=0$ da $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$. (19.26) tenglamadan C_1 ni aniqlaymiz:

$$x_0 = C_1, \quad C_2 = x_0. \quad (19.28)$$

(19.26) tenglamadan hosila olamiz:

$$\dot{x} = v = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{h}{2k} \cos(kt + \delta) + \frac{ht}{2k} \sin(kt + \delta). \quad (19.29)$$

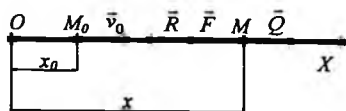
(19.29) tenglamadan C_2 ni aniqlaymiz:

$$\dot{x}_0 = C_2 k - \frac{h}{2k} \cos \delta \Rightarrow C_2 = \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{h}{2k} \cos \delta \right). \quad (19.30)$$

Demak, boshlang'ich shartlarga mos holda (19.5) tenglamaning yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = \dot{x}_0 \cos kt + \frac{1}{k} \left(v_0 + \frac{h}{2k} \cos \delta \right) \sin kt - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta). \quad (19.31)$$

20. MUHITNING QARSHILIK KUCHI TA'SIRIDAGI MODDIY NUQTANING MAJBURIY TEBRANMA HARAKATI



20.1-rasm

Massasi m bo'lgan M moddiy nuqtaga qaytaruvchi kuch, $F = cx$, tezlikka proporsional bo'lgan muhitning qarshilik kuchi, $\bar{R} = \mu \bar{v}$ va uyg'otuvchi kuch,

$Q = H \sin(pt + \delta)$ ta'sir etsin. Moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakat qiladi va boshlang'ich vaqtda koordinata boshidan x_0 masofada joylashgan va $\bar{v}_0$ tezlikka ega (20.1-rasm).

Nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = R + F + Q.$$

$$m\ddot{x} = -cx - \mu v + H \sin(pt + \delta). \quad (20.1)$$

Tenglamaning har ikkala tomonini m ga bo'lamiz:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} v + \frac{c}{m} x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta). \quad (20.2)$$

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$\frac{H}{m} = h, \quad \frac{\mu}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2. \quad (20.3)$$

(20.3) ni (20.2) ga olib borib qo'ysak, quyidagi formula kelib chiqadi:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (20.4)$$

(20.4) tenglama muhit qarshilik kuchini hisobga olganda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakat differensial tenglamasidir. Uning yechimi ikkita tenglama yechimlarining yig'indisidan iborat, ya'ni:

$$x = x_1 + x_2. \quad (20.5)$$

Bu yerda x_1 ni (18.6) differensial tenglamaning yechimi deb olamiz. Bu tenglama muhit qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati differensial tenglamasi bo'lib, tebranishning har bir hollari uchun yechimlari to'liq holda yuqoridagi mavzularda keltirilgan. Kichik qarshiliklar bo'lgan holda (18.6) tenglamaning yechimi (18.12) ga teng, ya'ni:

$$x_1 = e^{-\alpha t} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (20.6)$$

(20.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi x_1 bo'lib, quyidagi ko'rinishda qidiriladi:

$$x_1 = D \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (20.7)$$

Noma'lum integral doimiylar, D va ε ni aniqlash uchun (20.7) tenglamadan birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\dot{x}_1 = Dp \cos(pt + \delta - \varepsilon), \quad (20.8)$$

$$\ddot{x}_1 = -Dp^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (20.9)$$

(20.7), (20.8), (20.9) ifodalarni (20.4) tenglamaga qo'ysak:

$$\begin{aligned} -Dp^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nDp \cos(pt + \delta - \varepsilon) + \\ + Dk^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) = h \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (20.10)$$

(20.10) tenglamaning o'ng tomonini quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} h \sin(pt + \delta) &= h \sin(pt + \delta - \varepsilon + \varepsilon) = \\ &= h \sin(pt + \delta - \varepsilon) \cos \varepsilon + h \cos(pt + \delta - \varepsilon) \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (20.11)$$

(20.11) ni (20.10) ga qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} D(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nDp \cos(pt + \delta - \varepsilon) = \\ = h \cos \varepsilon \sin(pt + \delta - \varepsilon) + h \sin \varepsilon \cos(pt + \delta - \varepsilon). \end{aligned} \quad (20.12)$$

Bu ayniyat bajarilishi uchun (20.12) tenglamaning o'ng va chap tomonlaridagi mos trigonometrik funksiyalar, ya'ni: $\sin(pt + \delta - \varepsilon)$ va $\cos(pt + \delta - \varepsilon)$ hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtiramiz:

$$D(k^2 - p^2) = h \cos \varepsilon, \quad 2npD = h \sin \varepsilon. \quad (20.13)$$

(20.13) tenglamalardan D ni osongina aniqlash mumkin:

$$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (20.14)$$

(20.13) tenglamalarni o'zaro bo'lsak,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \quad (20.15)$$

kelib chiqadi.

Demak, majburiy tebranishlar qonuni quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x_1 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4k^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (20.16)$$

(20.4) tenglamaning umumiy yechimi kichik qarshiliklar ($k > n$) bo'lgan holda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4k^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon), \quad (20.17)$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Yechimdan ko'rinish turibdiki, muhit qarshiligi bo'lgan holdagi majburiy tebranishlar qonuni xususiy tebranishlar va majburiy tebranishlarning yig'indisidan iborat ekan. e^{-nt} ko'paytma xususiy tebranishni tez so'nishini ifodalaydi. Shuning uchun ko'p hisoblarda majburiy tebranishga ahamiyat beriladi. Katta qarshiliklar va chegaraviy hollarda (20.4) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishlarda ifodalanadi:

$$x = e^{-nt} (C_1 \operatorname{ch} \sqrt{n^2 - k^2} t + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{n^2 - k^2} t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4k^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (20.18)$$

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4k^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (20.19)$$

(20.17), (20.18) va (20.19) tenglamalardagi C_1, C_2 lar integrallash doimiylari bo'lib, ularni boshlang'ich shartlardan, ya'ni $t=0$ da $x=x_0$; $v=v_0$ dan foydalanib aniqlanadi. (20.17) tenglamadan C_1, C_2 integral o'zgarmlarini aniqlaymiz:

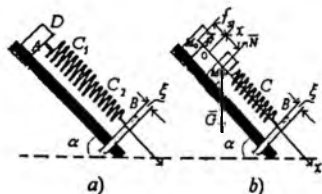
$$C_2 = \frac{1}{k} (v_0 + nx_0 - nD \sin(\delta - \varepsilon) - pD \cos(\delta - \varepsilon)), \quad (20.20)$$

$$C_1 = x_0 - D \sin(\delta - \varepsilon).$$

Katta qarshiliklar va chegaraviy hollarda ham (20.4) tenglamaning yechimidagi o'zgarmlar boshlang'ich shartlardan topiladi.

(20.17) tenglamadan ko'rinadiki, $t \rightarrow \infty$ da nuqtaning harakati

faqat $x = D \sin(pt + \delta - \varepsilon)$ qonun bo'yicha ifodalanuvchi majburiy tebranma harakatdan iborat bo'lib qoladi. Majburiy tebranma harakatdan farqli erkin tebranma harakat juda kichik qarshilik kuchi bo'lganda ham so'nuvchi xarakterga ega bo'ladi.



20.2-rasm

20.1-masala. Ketma-ket ulangan, bikrlilari

$$c_1 = 12 \text{ N/sm} \quad \text{va} \quad c_2 = 8 \text{ N/sm}$$

bo'lgan deformatsiyalanmagan prujinalarning B uchi qo'zg'almas bo'lib, uning A uchiga D yuk biriktirilgan va $m_D = m = 2 \text{ kg}$ (20.2-rasm, a).

Shu paytda prujinaning B uchi qiya tekislik bo'ylab $\xi = 2 \sin 5t$ (sm) qonunga ko'ra harakatlana boshlaydi, $\alpha = 30^\circ$. Yukning statik muvozanat holatini koordinata boshi deb olib, uning harakat qonuni aniqlansin.

Yechish: Ketma-ket ulangan prujinalarni ularga ekvivalent prujina bilan almashtiramiz. Ekvivalent prujina bikrligi

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 4,8 \text{ N/sm} = 480 \text{ N/m}. \quad (1)$$

Koordinata o'qini masala shartiga muvofiq ravishda o'tkazamiz (20.2-rasm, b).

D yukni M nuqtada olamiz. M nuqtaga D yukning $\vec{G}$ og'irlik kuchi va $\vec{F}$ prujinaning elastiklik kuchi ta'sir etadi. Boshlang'ich shartlar quyidagicha:

$$t = 0, \quad x = x_0 = -f_{st}, \quad v = v_0 = 0. \quad (2)$$

$$\sum F_x = G \sin \alpha - F. \quad (3)$$

(3) tenglamani e'tiborga olib, M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = G \sin \alpha - F. \quad (4)$$

Bunda:

$$\begin{aligned} F &= cf = c(f_{st} + x - \xi), \\ G \sin \alpha &= c \cdot f_{st}, \\ \xi &= 0,02 \sin 5t. \end{aligned} \quad (5)$$

Ushbu qiymatlarni (4) tenglamaga qo'yib, yukning harakat differensial tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x + c \cdot 0,02 \sin 5t. \quad (6)$$

(6) tenglamani hadma-had m ga bo'lsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{c}{m} x + \frac{c}{m} \cdot 0,02 \sin 5t. \quad (7)$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{0,02 \cdot c}{m}, \quad p = 5 s^{-1}. \quad (8)$$

Natijada differensial tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin pt. \quad (9)$$

Bu tenglama yechimini yozishdan avval k va p ni taqqoslaymiz:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{480}{2}} s^{-1} = 15,6 s^{-1}. \quad (10)$$

$k > p$ ekan. Demak, (9) tenglama yechimi quyidagicha ifodalanadi:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{ph}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (11)$$

(11) tenglamada tegishli hisoblashlarni bajaramiz:

$$x_0 = -f_{st} = -\frac{mg \sin \alpha}{c} = -\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{480} m = -0,02 m,$$

$$h = \frac{0,02 \cdot c}{m} = \frac{0,02 \cdot 480}{2} m/s^2 = 4,8 m/s^2,$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{4,8}{240 - 25} m = 0,02 m, \quad \frac{p}{k} \cdot \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{5}{15,6} \cdot 0,02 m = 0,0064 m.$$

Bu qiymatlarni (11) tenglamaga qo'yib, D yukning harakat qonunini hosil qilamiz:

$$x = -0,02 \cos 15,6t - 0,0064 \sin 15,6t + 0,02 \sin 5t, \quad m. \quad (12)$$

D yukning harakati majburiy tebranma harakatdan iborat bo'lar ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Birkliklari, $c_1 = 2 \text{ N/m}$, $c_2 = 4 \text{ N/m}$, $c_3 = 6 \text{ N/m}$ bo'lgan uchta ketma-ket ulangan prujinaga yuk osilgan. Mazkur prujinalarga ekvivalent prujining birklik koeffitsiyenti aniqlansin.

2-masala. Elastik yerga o'rnatilgan mashina fundamentining erkin tebranishlari davri aniqlansin. Fundamentning mashina bilan birga massasi, $M = 90 \text{ t}$, fundamentning yerga tegib turgan yuzi, $S = 15 \text{ m}^2$, Yerning birklik koeffitsiyenti, $\beta = \lambda S$ (bu yerda $\lambda = 30 \text{ N/sm}^2$ — Yerning solishtirma birkligi).

3-masala. Massasi $m = 20 \text{ g}$ bo'lgan yuk, $9,8 \text{ N/sm}$ birklik koeffitsiyentli prujinaga ilingan bo'lib, $S = H \sin pt$ kuch ta'sirida turadi, bunda $H = 20 \text{ N}$, $p = 50 \text{ rad/s}$. Boshlang'ich paytda $x_0 = 2 \text{ sm}$, $v_0 = 10 \text{ sm/s}$. Koordinata boshi yukning statik muvozanat holatida tanlangan. Yukning harakat tenglamasi topilsin.

4-masala. $m_1 = 2 \text{ kg}$ massali yuk birklik koeffitsiyenti $c = 98 \text{ N/m}$ bo'lgan prujinada osilib turibdi. Biror payt m_1 yukka $m_2 = 0,8 \text{ kg}$ massali yuk qo'shildi. Yuklarning birgalikdagi harakati tenglamasi va tebranishlari davri aniqlansin.

Nazorat savollari

1. Majburiy tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
2. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
3. Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi yechimi qanday ko'rinishda ifodalanadi?
4. Rezonans hodisasi qachon ro'y beradi?
5. Muhit qarshiligi bo'lgan holda majburiy tebranma harakat qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?
6. Muhit qarshiligi bo'lgan hol uchun majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
7. Muhit qarshiligi bo'lgan hol uchun majburiy tebranma harakat differensial tenglamasi yechimi qanday ko'rinishda ifodalanadi?

MEXANIK SISTEMA DINAMIKASI

21. MEXANIK SISTEMAGA KIRISH. MEXANIK SISTEMAGA TA'SIR ETUVCHI KUCHLAR KLASSIFIKATSIYASI

Ta'rif 1. Bir-biri bilan ma'lum munosabatda bog'langan, har bir nuqtasining harakati va holati boshqa nuqtalarining holati va harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami *mexanik sistema* deyiladi.

Ta'rif 2. Agar mexanik sistema nuqtalari orasidagi masofa doimo o'zgarmasdan qolsa, bunday sistema *o'zgarmas mexanik sistema* deyiladi. O'zgarmas mexanik sistemaga misol tariqasida absolyut qattiq jismni olish mumkin. Mexanik sistema erkin yoki bog'lanishda bo'lishi mumkin.

Ta'rif 3. Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralanmagan bo'lsa, bunday mexanik sistema *erkin mexanik sistema* deyiladi. Erkin mexanik sistemaga quyosh sistemasi misol bo'ladi.

Ta'rif 4. Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralangan bo'lsa, bunday mexanik sistema *bog'lanishdagi mexanik sistema* deyiladi. Bog'lanishdagi mexanik sistemaga mashina mexanizmlari misol bo'la oladi. Mashina mexanizmlari qismlari o'zaro sterjenlar, shamirlar, tasmalar, tishli g'ildiraklar vositasida bog'lanadi.

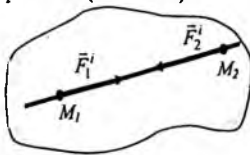
Ta'rif 5. Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar ichki va tashqi kuchlardan iboratdir. Mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning o'zaro bir-biriga ko'rsatadigan ta'sir kuchlari *ichki kuchlar* deyiladi. Ichki kuchlar $\vec{F}^i$ bilan belgilanadi. Mexanik sistema tarkibiga kirmaydigan nuqta yoki jismlarning sistema nuqtalariga ko'rsatadigan ta'sir kuchlari *tashqi kuchlar* deyiladi. Tashqi kuchlar $\vec{F}^e$ bilan belgilanadi.

Ichki kuchlar xossalari

1. Ichki kuchlarning bosh vektori nolga teng.

Dinamikaning ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuniga asosan sistemani tashkil qiluvchi nuqtalari miqdor jihatdan teng va bir

to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan bir-biriga ta'sir etadi. Masalan, M_1 va M_2 nuqtalarga ta'sir etuvchi ichki kuchlar $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$ bo'lsin (21.1-rasm).



21.1-rasm

Bu kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng.

$$\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0. \quad (21.1)$$

Bundan mexanik sistemaning N ta nuqtasi uchun:

$$\vec{R}^i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i = 0 \quad (21.2)$$

ekanligi kelib chiqadi.

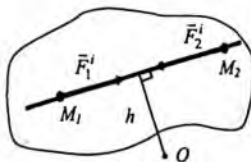
Demak, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi ichki kuchlarning geometrik yig'indisi, ya'ni ichki kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'ladi.

(21.2) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, quyidagi ifodalar kelib chiqadi:

$$R_x^i = \sum F_{kx}^i = 0, \quad R_y^i = \sum F_{ky}^i = 0, \quad R_z^i = \sum F_{kz}^i = 0. \quad (21.3)$$

2. Ichki kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng.

M_1 va M_2 nuqtalarga ta'sir etuvchi ichki kuchlar, $\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i$ larning biror O markazga nisbatan momenti nolga teng (21.2-rasm).



21.2-rasm

$$\vec{m}_O(\vec{F}_1') + \vec{m}_O(\vec{F}_2') = 0. \quad (21.4)$$

Buni mexanik sistema uchun umumlashtirsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\vec{M}_O' = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k') = 0. \quad (21.5)$$

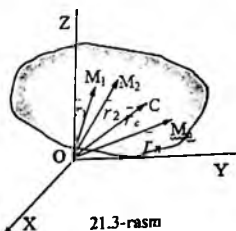
(21.5) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:

$$M_x' = \sum_{k=1}^n m_x(\vec{F}_k') = 0, \quad M_y' = \sum_{k=1}^n m_y(\vec{F}_k') = 0, \quad M_z' = \sum_{k=1}^n m_z(\vec{F}_k') = 0. \quad (21.6)$$

Ichki kuchlarning bu xossalardan ichki kuchlar o'zaro muvozanatlashadi, degan natija kelib chiqmaydi, chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo'yilgan. Ichki kuchlar sistema nuqtalarining o'zaro ko'chishiga ta'sir qiladi, ya'ni jismning deformatsiyasiga sabab bo'ladi. Mutlaq qattiq jism uchun ichki kuchlar muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil qiladi.

Mexanik sistema massasi va massalar markazi

Mexanik sistema harakati, ta'sir etuvchi kuchlardan tashqari, massasiga va massaning sistema bo'ylab taqsimlanishiga ham bog'liq. Mexanik sistema $M_1, M_2, \dots, M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo'lib, ularning massalari mos ravishda $m_1, m_2, \dots, m_n$ bo'lsin (21.3-rasm).



21.3-rasm

Mexanik sistema nuqtalari massalarining algebraik yig'indisiga *sistema massasi* deyiladi va quyidagicha ifodalanadi:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (21.7)$$

Massaning taqsimlanishi birinchi navbatda massalar markazi yoki mexanik sistema inersiya markazining holati bilan xarakterlanadi. Mexanik sistema N ta nuqtadan iborat bo'lib, massalar markazi yoki sistema inersiya markazi, C nuqtaning

holati tanlab olingan koordinata sistemasiga nisbatan $\vec{r}_c$ radius-vektor bilan aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{M}, \quad (21.8)$$

bu yerda $m_k (k=1,2,\dots,N)$ - mexanik sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalar massalari, $\vec{r}_k (k=1,2,\dots,N)$ - O markazga nisbatan moddiy nuqtalarning radius-vektorlari, $\sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k$ - O markazga nisbatan nuqtalar massalarining statik momentlarining yig'indisi.

(21.8) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (21.9)$$

(21.7) va (21.9) formulalardan ko'ramizki, sistema massalar markazining holati unga ta'sir etuvchi kuchlarga emas, sistema nuqtalari massalarining taqsimlanishiga bog'liq bo'ladi. (21.8) va (21.9) tenglamalarning surat va maxrajini erkin tushish tezlanishi, g ga ko'paytirsak, og'irlik kuchi maydonida qattiq jismning og'irlik markazi aniqlanadi. Ya'ni:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k g \vec{r}_k}{\sum m_k g} = \frac{\sum P_k \vec{r}_k}{\sum P_k} \quad (21.10)$$

kelib chiqadi. (21.8) va (21.10) formulalardan ko'rinib turibdiki, og'irlik markazi va massalar markazi bir xil formulaga ega bo'lgani bilan mazmun jihatdan farq qiladi. Og'irlik markazi jismga ta'sir etuvchi og'irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining qo'yilish nuqtasidir. Sistema og'irlik kuchi maydonida harakatlanganidagina og'irlik markazi mavjud bo'ladi. Sistema massalar markazi esa unga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq emas. Massalar markazi har qanday moddiy nuqtalar sistemasiga tegishli bo'lib, u sistemadagi massa taqsimlanishini xarakterlaydi. Sistema massalar markazi og'irlik markaziga nisbatan kengroq tushunchadir. (21.8) va (21.9) formulalarni quyidagicha yozamiz:

$$M\vec{r}_c = \sum m_k \vec{r}_k, \quad (21.11)$$

$$Mx_c = \sum m_k x_k, \quad My_c = \sum m_k y_k, \quad Mz_c = \sum m_k z_k. \quad (21.12)$$

(21.11) sistemaning qutbga nisbatan, (21.12) tenglamalar esa Oxy , Oxz , Oyz tekisliklarga nisbatan *statik momentlari* deyiladi. Sistema massalar markazini qutb deb olsak, sistemaning unga nisbatan statik momenti

$$M\vec{\rho}_c = \sum m_k \vec{\rho}_k = 0$$

bo'ladi. Sistemaning massalar markazidan o'tuvchi ixtiyoriy tekislikka nisbatan statik momenti ham nolga teng bo'ladi.

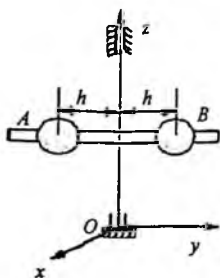
Mexanik sistema va qattiq jismning inersiya momenti

Massalar markazining holati sistemada massa taqsimlanishini to'liq xarakterlamaydi. Masalan, Oz o'qidan h masofada turuvchi, bir xil massali A va B sharlar holatini bir xil masofaga o'zgartirsak, sistema massalar markazining holati o'zgarmaydi (21.4-rasm). Lekin, sistemada massa taqsimlanishi o'zgaradi, ya'ni sistemaning o'z o'qi atrofida aylanishi tezlashadi yoki sekinlashadi. Mexanik sistemaning aylanma harakatidagi massa taqsimlanishini xarakterlaydigan miqdor uning inersiya momentidir. Inersiya momenti nuqtaga, o'qqa va tekislikka nisbatan bo'lishi mumkin.

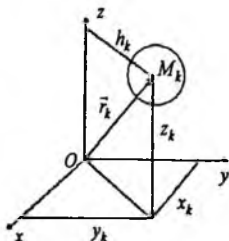
Mexanik sistemaning biror o'qqa (nuqtaga, tekislikka) nisbatan *inersiya momenti* deb sistema har bir nuqtasi massasini shu nuqtadan mazkur o'qqacha (nuqttagacha, tekislikkacha) bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmasining butun sistema nuqtalari soni bo'yicha olingan yig'indisiga aytiladi (21.5-rasm).

$$I_o = \sum m_k h_k^2, \quad (21.13)$$

$m_k - M_k$ zarrachaning massasi, $h_k - M_k$ zarrachadan Oz o'qigacha bo'lgan masofa, I_o - Oz o'qiga nisbatan sistemaning inersiya momenti.



21.4-rasm



21.5-rasm

21.5-rasmdan $k_k^2 = x_k^2 + y_k^2$ ekanligini e'tiborga olsak va (21.13) ga olib borib qo'ysak hamda xuddi shunday tartibda Ox , Oy o'qlariga nisbatan inersiya momentlarini hisoblasak, quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:

$$I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (21.14)$$

(21.14) tenglama koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlarini ifodalaydi. Koordinata boshi, O nuqtaga nisbatan inersiya momenti quyidagiga teng bo'ladi:

$$I_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (21.15)$$

(21.14) tengliklarni hadma-had qo'shsak va (21.5) ni e'tiborga olsak,

$$I_o = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z) \quad (21.16)$$

hosil bo'ladi. Bu formula nuqtaga va shu nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpendikulyar o'qlarga nisbatan inersiya momentlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Sistemaning Oxy , Oyz , Oxz tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$I_{Oxy} = \sum m_k x_k^2 z_k^2, \quad I_{Oyz} = \sum m_k y_k^2 z_k^2, \quad I_{Oxz} = \sum m_k x_k^2 y_k^2. \quad (21.17)$$

(21.17) ni hadma-had qo'shib (21.5) ifodani e'tiborga olsak,

$$I_o = I_{Oxy} + I_{Oyz} + I_{Oxz} \quad (21.18)$$

kelib chiqadi.

Qattiq jismning inersiya momentini hisoblash uchun uni juda kichik bo'lakchalardan tashkil topgan deb qarab, (21.13) – (21.17) formulalarda m_i lar o'liga Δm_i larni qo'yamiz. Bo'lakchalar sonini o'rttirib borib, $N \rightarrow \infty$ $\Delta m_i \rightarrow 0$ bo'lgandagi inersiya momentining limitini hisoblash lozim bo'ladi. Masalan, biror o'q o'qiga nisbatan qattiq jismning inersiya momenti quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$I_z = \lim_{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^N \Delta m_i h_i^2 = \int_{(M)} h^2 dm. \quad (21.19)$$

Qattiq jismning inersiya momentlari quyidagicha ifodalanadi:

a) o'qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm. \quad (21.20)$$

b) nuqtaga nisbatan inersiya momenti:

$$I_O = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (21.21)$$

c) tekislikka nisbatan inersiya momenti:

$$I_{Oxz} = \int_{(M)} x^2 dm, \quad I_{Oxy} = \int_{(M)} y^2 dm, \quad I_{Oyz} = \int_{(M)} z^2 dm. \quad (21.22)$$

Ko'pincha qattiq jismning o'qqa nisbatan inersiya momenti inersiya radiusi orqali quyidagicha aniqlanadi:

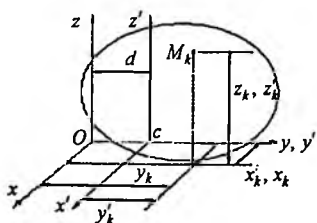
$$I_x = M \rho_x^2, \quad (21.23)$$

bu yerda ρ_i – qattiq jismning o'qqa nisbatan inersiya radiusi, M – qattiq jism massasi.

Qattiq jismning tajribalardan yoki hisoblashlardan o'qqa nisbatan inersiya momenti ma'lum bo'lsa, (21.23) formuladan uzunlik birligida o'lchanadigan inersiya radiusini aniqlash mumkin:

$$\rho_i = \sqrt{\frac{I_i}{M}}. \quad (21.24)$$

Jismning parallel o'qlarga nisbatan inersiya momentlari orasidagi bog'lanish. Gyuygens-Shteyner teoremasi



21.6-rasm

Teorema: *Jismning biror o'qqa nisbatan inersiya momenti jism massalar markazidan o'tib, berilgan o'qqa parallel o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan jism massasini mazkur o'qlar orasidagi masofa kvadratiga ko'paytmasining yig'indisiga*

teng (21.6-rasm).

Ya'ni:

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + M d^2. \quad (21.25)$$

Isbot: Bizga ma'lumki, (21.3) formulaga asosan:

$$I_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (21.26)$$

21.4-rasmda belgilanishiga ko'ra:

$$x'_k = x_k, \quad y'_k = y_k + d. \quad (21.27)$$

(21.27) ifodani (21.26) ga olib borib qo'ysak:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \sum m_k \left[x_k'^2 + (y_k' + d)^2 \right] = \sum m_k \left[x_k'^2 + y_k'^2 + 2y_k' \cdot d + d^2 \right] = \\ &= \sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) + 2d \sum m_k y_k' + \sum m_k d^2. \end{aligned} \quad (21.28)$$

(21.28) tenglamadagi har bir hadlar quyidagicha ifodalanadi:

$$\sum m_k (x_k'^2 + y_k'^2) = I_{Cz'}.$$

Bu ifoda massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentini ifodalaydi.

Butun sistema massasi: $\sum m_k = M$.

Sistemaning massalar markazini ifodalovchi C nuqta $Cx'y'z'$ koordinatalar sistemasining boshida olingani uchun $y_c = 0$. Demak,

$$\sum m_k y_k' = M y_c = 0.$$

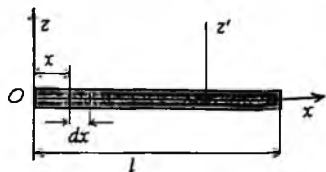
Bularni (21.28) tenglamaga olib borib qo'ysak, $I_{Oz} = I_{Cz'} + M d^2$ kelib chiqadi. **Teorema isbotlandi.**

Teoremdan ko'rinadiki, sistemaning massalar markazi orqali o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momenti, unga parallel bo'lgan ixtiyoriy o'qlarga nisbatan aniqlangan inersiya momentlari orasida eng kichigi hisoblanar ekan.

Ayrim bir jinsli sodda jismlarning inersiya momentlarini hisoblash

1. Bir jinsli sterjenning inersiya momenti

Massasi M va uzunligi l bo'lgan bir jinsli ingichka sterjenning bir uchidan o'tib, sterjen o'qiga perpendikulyar bo'lgan Oz o'qqa nisbatan inersiya momenti hisoblansin (21.7-rasm).



21.7-rasm

Sterjenning $h = x$ masofada elementar dx bo'lagini olamiz.

Bo'lak massasi $dm = \rho dx$ teng bo'lib, bu yerda $\rho = \frac{M}{l}$ sterjenning birlik uzunligiga mos keluvchi massadir. Oz o'qini yo'naltiramiz va (21.19) formulaga asosan yozamiz:

$$I_{Oz} = \int_0^l h^2 dm = \int_0^l \rho dm = \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}. \quad (21.29)$$

Demak,

$$I_{Oz} = \frac{Ml^2}{3}. \quad (21.30)$$

(21.25) Gyuygens-Shteyner teoremasidan foydalanib, sterjenning massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblasak:

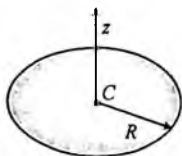
$$I_{Cx} = I_{Oz} - M d^2 = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}. \quad (21.31)$$

Demak,

$$I_{Cx} = \frac{Ml^2}{12}. \quad (21.32)$$

2. Ingichka bir jinsli halqaning inersiya momenti

Massasi M , radiusi R bo'lgan bir jinsli halqaning massalar markazidan halqa tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Cz o'qqa nisbatan inersiya momenti hisoblansin (21.8-rasm).



21.8-rasm

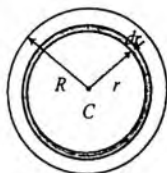
$$I_{Cz} = \sum m_i h_i^2 = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = MR^2. \quad (21.33)$$

Demak,

$$I_{Cz} = MR^2. \quad (21.34)$$

3. Bir jinsli doiraviy yupqa plastin-kaning inersiya momenti

Massasi M , radiusi R bo'lgan bir jinsli doiraviy yupqa plastinkaning massalar markazidan o'tuvchi va doiraviy yupqa plastinkaning tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Cz o'qqa nisbatan inersiya momenti hisoblansin (21.9-rasm).



21.9-rasm

Inersiya momentini hisoblash uchun doiraviy yupqa plastinkadan kengligi $- dr$, radiusi $- r$ bo'lgan elementar halqa ajratamiz. Elementar halqa yuzi $2\pi r dr$, massasi $dm = 2\pi \rho r dr$. Bu yerda $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ doiraviy yupqa plastinkaning birlik yuzasiga mos keluvchi massa bo'lib, (21.34) ifodadan elementar halqa uchun inersiya momenti:

$$dI_{Cz} = r^2 dm = 2\pi \rho r^3 dr. \quad (21.35)$$

Doiraviy yupqa plastinka uchun inersiya momenti:

$$I_{Cz} = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 = \frac{MR^2}{2}. \quad (21.36)$$

$$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2}. \quad (21.37)$$

4. Bir jinsli sharning inersiya momenti

Radiusi R , massasi M bo'lgan bir jinsli sharchaning massalar markazi va massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentlari hisoblansin.

a) Sharning massalar markaziga nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz. Inersiya momentini hisoblash uchun shardan kengligi - dr , radiusi - r bo'lgan elementar hajmda shar qatlamini ajratamiz. Shar qatlamining hajmi $4\pi r^2 dr$, massasi $dm = 4\pi \rho r^2 dr$. Bu yerda $\rho = \frac{M}{V}$ ifoda sharning birlik yuzasiga mos keluvchi massa bo'lib, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ shar hajmiga teng. Demak,

$$\rho = \frac{3}{4\pi R^3} M. \quad (21.38)$$

Sharning massalar markaziga nisbatan inersiya momentining integral ko'rinishdagi ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$I_0 = \int_V r^2 dm = 4\pi \rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi \rho R^5,$$

yoki

$$I_0 = \frac{3}{5}MR^2.$$

Chunki, shar massasi quyidagiga teng:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \quad (21.39)$$

b) Sharning massalar markazidan o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz. Simmetriya tushunchasidan sharning massalar markazidan o'tuvchi koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari o'zaro teng bo'ladi:

$$I_x = I_y = I_z. \quad (21.40)$$

(21.16) formulaga asosan:

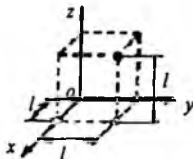
$$3I_x = 2I_0 \text{ yoki } I_x = \frac{2}{3}I_0. \quad (21.41)$$

(21.39) ni (21.41) ga qo'ysak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2. \quad (21.42)$$

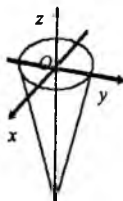
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi 2 kg bo'lgan moddiy nuqtaning koordinatalari $x=0,7\text{ m}$, $y=0,5\text{ m}$, $z=0,3\text{ m}$ bo'lsa, Oxy tekislikka nisbatan inersiya momentini toping?

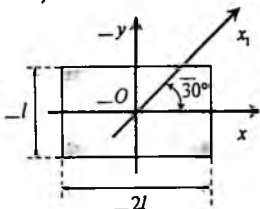


21.10-rasm

2-masala. Massasi 4 kg dan uchta moddiy nuqtalar tomonlari $l=0,4\text{ m}$ li kubning uchlarida joylashgan bo'lib, mexanik sistemani tashkil qilsa, sistemaning koordinatalar boshiga nisbatan inersiya momentini hisoblang (21.10-rasm).



21.11-rasm



21.12-rasm

3-masala. Bir jinsli bo'lgan konus shaklidagi jismning Oy, Oz o'qlariga nisbatan I_x – markazdan qochma inersiya momentining qiymatini hisoblang (21.11-rasm).

4-masala. Massasi 5 kg , o'lchamlari, $l=0,4\text{ m}$ bo'lgan bir jinsli yupqa plastinaning markaziy Ox , o'qiga nisbatan inersiya momentini hisoblang (21.12-rasm).

Nazorat savollari

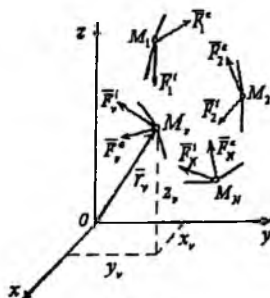
1. Mexanik sistema deb nimaga aytiladi?
2. Erkin va bog'lanishdagi mexanik sistema deb nimaga aytiladi?
3. Qanday kuchlarga ichki va tashqi kuchlar deyiladi?
4. Ichki kuchlar xossalari qanday?
5. Mexanik sistema massasi qanday aniqlanadi?
6. Mexanik sistema massalar markazining koordinatalari formulasini yozing.
7. Nuqtaga nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?
8. O'qqa nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?
9. Tekislikka nisbatan inersiya momenti qanday hisoblanadi?
10. Gyuygens-Shteyner teoremasi qanday ta'riflanadi?
11. Bir jinsli sterjenning inersiya momenti qanday hisoblanadi?
12. Ingichka bir jinsli halqaning inersiya momentini hisoblang.
13. Bir jinsli doiraviy yupqa plastinkaning inersiya momenti qanday aniqlanadi?
14. Bir jinsli sharning inersiya momenti qanday aniqlanadi?

22. MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA UCHUN DINAMIKANING UMUMIY TEOREMALARI

Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema. Mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari

$M_1, M_2, \dots, M_N$ nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistemaning ixtiyoriy M_i nuqtasiga ta'sir etuvchi tashqi kuchni $\vec{F}_i^e$ va ichki kuchni $\vec{F}_i^i$ bilan belgilaymiz. Nuqtaning $Oxyz$ koordinata o'qiga nisbatan radius-vektori $\vec{r}_i$ ga teng (22.1-rasm).

Nuqta harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:



22.1-rasm

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}^* + \vec{F}^*, \quad (22.1)$$

bunda $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$, mazkur nuqtaning tezlanishi.

(22.1) tenglamaning $Oxyz$ Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x^* + F_x^*, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y^* + F_y^*, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z^* + F_z^*. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Xuddi shuningdek, sistemaning har bir nuqtasi uchun (22.1) tenglama o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_1^* + \vec{F}_1^*, \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_2^* + \vec{F}_2^*, \\ &\dots\dots\dots, \\ m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} &= \vec{F}_k^* + \vec{F}_k^*. \end{aligned} \quad (22.3)$$

(22.3) tenglamaning chap va o'ng tomonini hadma-had qo'shsak, quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^*. \quad (22.4)$$

(22.4) tenglamaning $Oxyz$ Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^N F_{kx}^e + \sum_{k=1}^N F_{kx}^i \\ \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^N F_{ky}^e + \sum_{k=1}^N F_{ky}^i \\ \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= \sum_{k=1}^N F_{kz}^e + \sum_{k=1}^N F_{kz}^i \end{aligned} \right\} \quad (22.5)$$

(22.2) va (22.5) tenglamalar sistemasi mexanik sistemaning *harakat differensial tenglamalari* deyiladi.

Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori. Kuch impulsi

Mexanikada moddiy nuqta, mexanik sistemaning harakat o'lchovlari sifatida uning harakat miqdori olinadi. Moddiy nuqtaning massasini uning berilgan ondagi tezlik vektoriga ko'paytmasiga teng $\vec{q}$ vektor *nuqtaning harakat miqdori* deyiladi. Ya'ni:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (22.6)$$

$\vec{q}$ – vektor tezlik vektori bilan bir tomonga yo'naladi. (22.6) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, nuqta harakat miqdorining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari kelib chiqadi:

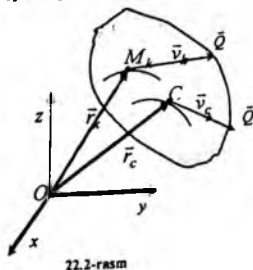
$$q_x = mv_x = mx, \quad q_y = mv_y = my, \quad q_z = mv_z = mz. \quad (22.7)$$

Mexanik sistema harakat miqdori har bir nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig'indisiga teng.

$\vec{Q}$ vektor *sistemaning harakat miqdori* yoki *harakat miqdorining bosh vektori* deyiladi (22.2-rasm).

Ya'ni:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k. \quad (22.8)$$



Bu yerda $\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt}$ ekanligini va (21.8) tenglamani e'tiborga olsak, (22.8) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \bar{r}_k = M \frac{d\bar{r}}{dt} = M\bar{v},$$

$$\bar{Q} = M\bar{v}. \quad (22.9)$$

(22.9) tenglamadan ma'lumki, mexanik sistema harakat miqdori sistema massasi bilan sistema massalar markazi tezligining ko'paytmasiga teng yoki sistemaning harakat miqdori butun sistema massasi mujassamlashgan sistema massalar markazining harakat miqdoriga teng.

(22.8) va (22.9) tenglamalarni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, sistema harakat miqdorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi:

$$Q_x = \sum_{k=1}^N m_k v_{kx} = Mv_x, \quad Q_y = \sum_{k=1}^N m_k v_{ky} = Mv_y, \quad Q_z = \sum_{k=1}^N m_k v_{kz} = Mv_z. \quad (22.10)$$

Mexanik harakatning vektorli o'lchovi sifatida harakat miqdori olinadi. Berilgan nuqtaga boshqa moddiy ob'ektlarning har ondagi mexanik ta'sirini xarakterlovchi o'lchov sifatida kuch olinadi. Lekin kuch ta'sirining effekti uning har ondagi miqdor va yo'nalishigagina bog'liq bo'lmay, balki uning ta'sir vaqtiga ham bog'liq bo'ladi. Miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lgan $\bar{F}$ kuch bilan uning ta'sir vaqti, t ning ko'paytmasiga teng vektor *kuchning impulsi* deyiladi:

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot t. \quad (22.11)$$

Kuch impulsi o'zaro mexanik ta'sirning vektorli o'lchovi bo'lib, uning yo'nalishi kuchning yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi va berilgan vaqt ichida moddiy nuqta (mexanik sistema) ga boshqa moddiy ob'ektlarning ta'sirini ifodalaydi.

SI birliklar sistemasida kuch impulsi $N \cdot s$ bilan o'lchanadi.

Ta'rif. Agar ta'sir etuvchi kuch $\bar{F} = \bar{F}(t)$ vaqtning funksiyasidan iborat bo'lsa, kuchning dt vaqt ichidagi ta'siri *kuchning elementar impulsi* deb ataladi. Ya'ni:

$$d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt. \quad (22.12)$$

Kuch elementar impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari:

$$dS_x = F_x \cdot dt, \quad dS_y = F_y \cdot dt, \quad dS_z = F_z \cdot dt. \quad (22.13)$$

Chekli vaqt oralig'idagi kuch impulsini aniqlash uchun (22.12) tenglamani integrallaymiz:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (22.14)$$

Kuch impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlash uchun (22.13) tenglamalarni integrallaymiz:

$$S_x = \int_0^t F_x dt, \quad S_y = \int_0^t F_y dt, \quad S_z = \int_0^t F_z dt. \quad (22.15)$$

Kuch impulsining moduli va yo'nalishlari uning proyeksiyalari orqali quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}, \quad \cos(\vec{S}, \vec{i}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\vec{S}, \vec{j}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\vec{S}, \vec{k}) = \frac{S_z}{S}. \quad (22.16)$$

Miqdor va yo'nalishi o'zgarmas bo'lgan kuch uchun kuch impulsining koordinata o'qlaridagi proyeksiyasini (22.11) tenglamadan aniqlaymiz:

$$S_x = F_x \cdot t, \quad S_y = F_y \cdot t, \quad S_z = F_z \cdot t, \quad (22.17)$$

bu yerda F_x, F_y, F_z lar $\vec{F}$ kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari.

Teng ta'sir etuvchi kuchning impuls

Agar M nuqtaga bir nechta $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ kuchlar ta'sir etsa, bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n. \quad (22.18)$$

(22.18) tenglamaning ikki tomonini dt ga ko'paytirib, vaqt t_1 dan t_2 ga o'zgarganda integrallaymiz:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_3 dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n dt. \quad (22.19)$$

(22.19) tenglamaning har bir hadi mos kuchlar impulsini tashkil etadi. Ya'ni:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \dots + \vec{S}_n. \quad (22.20)$$

Demak, chekli vaqt oralig'ida teng ta'sir etuvchi kuchning impulsi tashkil etuvchi kuchlarning shu vaqt oralig'idagi impulslarining geometrik yig'indisiga teng ekan.

(22.20) tenglamaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} S_x &= S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \dots + S_{nx}, \\ S_y &= S_{1y} + S_{2y} + S_{3y} + \dots + S_{ny}, \\ S_z &= S_{1z} + S_{2z} + S_{3z} + \dots + S_{nz}. \end{aligned} \quad (22.21)$$

(22.21) tenglamalardan ko'rinadiki, teng ta'sir etuvchi kuchning o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi kuchlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng ekan.

Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

Moddiy nuqtaning $\vec{F}$ kuch ta'siridagi harakat differensial tenglamasi vektor usulida berilgan bo'lsin:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (22.22)$$

(22.22) tenglamaning ikkala tomonini dt ga ko'paytirsak:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \quad (22.23)$$

(22.12) tenglamani e'tiborga olsak, (22.23) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$d(m\vec{v}) = d\vec{S}. \quad (22.24)$$

(22.23) yoki (22.24) tenglamalar moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishini ifodalaydi. Ya'ni: *nuqta harakat miqdorining differensial nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar impulsiga teng.*

(22.24) ifodani koordinata o'qlariga proyeksiyalasak,

$$d(mv_x) = F_x dt, \quad d(mv_y) = F_y dt, \quad d(mv_z) = F_z dt. \quad (22.25)$$

(22.7) va (22.13) ifodalarni e'tiborga olsak, (22.25) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$dq_x = dS_x, \quad dq_y = dS_y, \quad dq_z = dS_z. \quad (22.26)$$

Demak, nuqta harakat miqdorining biror koordinata o'qidagi proyeksiyasining differensial nuqtaga ta'sir etuvchi kuch

elementar impulsining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.

Chekli vaqt ichida nuqta harakat miqdorining o'zgarishini aniqlash uchun (22.23) tenglamani integrallaymiz (22.3-rasm):

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} dt, \quad (22.27)$$

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}. \quad (22.28)$$

(22.28) tenglamaning koordinata o'qlaridagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\left. \begin{aligned} m v_x - m v_{0x} &= S_x \\ m v_y - m v_{0y} &= S_y \\ m v_z - m v_{0z} &= S_z \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

Amaliyotda asosan masalalar (22.29) formulalardan foydalanilgan holda yechiladi. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema $\vec{F}$ kuch faqat vaqtning funksiyasidan iborat yoki miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'lgan hollarda o'rinli bo'ladi. Harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning foydalanib, nuqtaning harakat differensial tenglamalarining bi-rinchi integrallarini aniqlash mumkin.

Agar $\vec{F}=0$ bo'lsa, ya'ni nuqtaga hech qanday kuchlar ta'sir etmasa (yoki ta'sir etuvchi kuchlar nolga ekvivalent bo'lsa), u holda (22.23) ga ko'ra

$$d(m\vec{v}) = 0.$$

Binobarin,

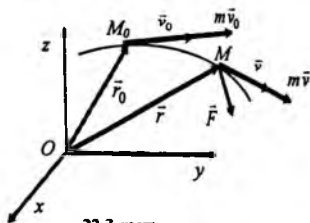
$$m\vec{v} = \vec{c} = \text{const} \quad (22.30)$$

yoki (22.27) ga ko'ra

$$m\vec{v} = m\vec{v}_0 \quad (22.31)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

(22.30) yoki (22.31) tengliklar harakat miqdorining saqlanish qonunini bildirib, nuqta harakat differensial tenglamasining birinchi vektorli integralini ifodalaydi. (22.30) da massa



22.3-rasm

o'zgarish bo'lgani uchun ko'rilyotgan holda $\bar{v} = \text{const}$ bo'ladi, ya'ni nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Bu natija dinamikaning birinchi qonuni (inersiya qonuni)ni ifodalaydi. Agar kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, ya'ni, $F_x = 0$, u holda (22.29) ga asosan, quyidagi tenglik o'rinli:

$$m\dot{v}_x - m\dot{v}_x = 0.$$

Binobarin,

$$v_x = v_{x0} = C_1 \quad \text{yoki} \quad \dot{x} = C_1. \quad (22.32)$$

(22.32) dan ko'ramizki, ta'sir etuvchi kuchning biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, nuqta tezligining mazkur o'qdagi proyeksiyasi o'zgarishsiz qoladi.

Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

N ta moddiy nuqtalardan tashkil topgan sistema nuqtalariga ichki va tashqi kuchlar ta'sir etsin. U holda (22.1) tenglamadan:

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^* + \vec{F}_v^* \quad (v=1..N)$$

ekanligini nazarda tutib, sistemaning harakat differensial tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}(m_v \vec{v}_v) = \vec{F}_v^* + \vec{F}_v^* \quad (v=1..N). \quad (22.33)$$

Sistemaning har bir nuqtasi uchun (22.33) tenglamani qo'llab, hadma-had qo'shsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{d}{dt} \sum m_v \vec{v}_v = \sum \vec{F}_v^* + \sum \vec{F}_v^*. \quad (22.34)$$

(22.8) ga ko'ra, $\sum m_v \vec{v}_v = \vec{Q}$ ifoda sistemaning harakat miqdoriga teng. Ichki kuchlarning xossasiga ko'ra, $\sum \vec{F}_v^* = 0$ bo'ladi. $\sum \vec{F}_v^* = \vec{R}^*$ tashqi kuchlarning bosh vektoriga tengligini hisobga olsak, (22.34) tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^*. \quad (22.35)$$

(22.35) tenglama sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishidir.

Teorema: Sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sistemaga ta'sir etuvchi tashqi

kuchlarning bosh vektoriga teng.

(22.35) tenglamada ichki kuchlar qatnashmaydi. Haqiqatan ham, ichki kuchlar sistema ayrim nuqtalarining harakat miqdori o'zgarishiga ta'sir etsada, sistema harakat miqdorining o'zgarishiga bevosita emas, bilvosita ta'sir etadi. Agar sistemaga tashqi kuchlar ta'sir etmasa yoki tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa ($\vec{R} = 0$), (22.35) tenglamadan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0,$$

ya'ni

$$\vec{Q} = \text{const.} \quad (22.36)$$

(22.36) tenglik *mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni* deb ataladi. Bu tenglikdan ko'ramizki, agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning harakat miqdori miqdor va yo'nalish jihatidan o'zgarmas bo'ladi.

(22.35) ni Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning skalyar ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z. \quad (22.37)$$

Demak, *sistema harakat miqdorining biror o'qdagi proyeksiyasidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng.*

(22.35) tenglamaning chap va o'ng tomonini dt ga ko'paytirib, integrallasak:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{R} dt. \quad (22.38)$$

(22.38) tenglama *sistema harakat miqdorining chekli vaqt oraliq'ida o'zgarishi haqidagi teoremani* ifodalaydi.

Teorema: *Sistema harakat miqdorining chekli vaqt oraliq'ida o'zgarishi sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt ichidagi impulsiga teng.*

(22.38) ni qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proyek-

siyalab, quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$Q_x - Q_{sx} = \int_0^t R_x^* dt, \quad Q_y - Q_{sy} = \int_0^t R_y^* dt, \quad Q_z - Q_{sz} = \int_0^t R_z^* dt. \quad (22.39)$$

Demak, chekli vaqt ichida biror qo'zg'almas koordinata o'qlari bo'yicha sistema harakat miqdorining o'zgarishi, shu vaqt ichida sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori impulsining mazkur o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi.

Agar tashqi kuchlar bosh vektorining biror Ox o'qidagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, ya'ni $R_x^* = 0$ bo'lsa, (22.39) tenglamadan quyidagi kelib chiqadi:

$$Q_x - Q_{sx} = 0.$$

Binobarin,

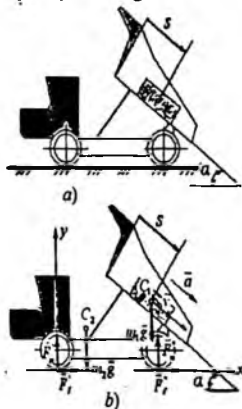
$$Q_x = Q_{sx} = \text{const.} \quad (22.40)$$

bo'ladi. (22.40) tenglik berilgan o'q bo'yicha sistema harakat miqdorining saqlanish qonunini ifodalaydi.

Demak, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proyeksiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining mazkur o'qdagi proyeksiyasi o'zgarmas bo'ladi.

22.1-masala. Agar kuzovdan yukning sirpanib tushish qonuni, $S = \frac{at^2}{2}$ va yukning massasi, $m_1 = 10T$, yuksiz samosval massasi, $m_2 = 21T$, $\alpha = 50^\circ$ parametr $a = 3.7 \text{ m/s}^2$ berilgan bo'lsa, samosvalning kuzovidagi yukni tushirish paytida qo'zg'almas g'ildirak va yer o'rtasida hosil bo'ladigan ishqalanish kuchi, F , hamda samosvalning yerga tushadigan bosimlarining yig'indisi, F_n , aniqlansin (22.4-rasm a).

Yechish: Mexanik sistema, samosval va yukka ta'sir etayotgan tashqi kuchlar quyidagilardan iborat: yukning og'irlik kuchi, $m_1 g$, samosvalning og'irlik kuchi,



22.4-rasm

m_2g , yerning normal reaksiya kuchlari, F'_x va F''_x , orqa, oldi g'ildiraklarga qo'yilgan F'_y , F''_y kuchlar (22.4-rasm, b). Bu kuchlar yer ustida g'ildirakning dumalashidan hosil bo'ladi.

Kuzovidagi yukni tushirish vaqtida g'ildiraklarda hosil bo'ladigan ishqalanish kuchlari hisobiga samosval harakatlanmaydi. Faqatgina yuk kuzov ustida harakatlanadi. Shuning uchun sistemaning harakat miqdori yukning harakat miqdoriga teng bo'ladi. Ya'ni:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 = m_1 \vec{v}. \quad (1)$$

Yuk kuzov ko'tarilganda tinch holatdan ilgarilanma harakat bilan sirpanib tusha boshlaydi. Demak, $s_0 = 0$, $v_0 = 0$. Yukning berilgan harakat qonunidan ma'lumki, u tekis tezlanuvchan harakat qiladi. Parametr $a = 3,7 \text{ m/s}^2$ yukning tushish tezlanishi bo'ladi. Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning (22.37) tenglamasini qo'llab yechamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= R'_x, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R'_y, \\ \frac{dQ_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(m_1 v_x) = F'_x + F''_x. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_y}{dt} &= \frac{d}{dt}(m_1 v_y) = F'_y + F''_y - m_1 g - m_2 g, \\ m_1 a_x &= F_x, \quad m_1 a_y = -(m_1 + m_2)g + F_y, \end{aligned} \quad (3)$$

bu yerda a_x va a_y — tezlanishning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, $a_x = a \cos \alpha$ va $a_y = -a \sin \alpha$, F_x — ishqalanish kuchlarining yig'indisi, $F_y = F'_y + F''_y$, F_y — samosvaldan yerga tushadigan bosimlar yig'indisi, $F_x = F'_x + F''_x$.

Endi talab etilgan F_y va F_x noma'lumlarni aniqlaymiz.

$$F_y = m_1 a \cos \alpha = 10 \cdot 3,7 \cdot \cos 50^\circ \text{ kN} = 23,783 \text{ kN},$$

$$F_x = R_x = (m_1 + m_2)g - m_1 \sin \alpha = ((10 + 21) \cdot 9,81 - 10 \cdot 3,7 \cdot \sin 50^\circ) \text{ kN} = 275,766 \text{ kN}.$$

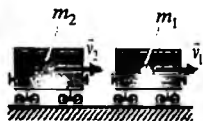
Yuk kuzov ustida sirpanib tushayotganda samosvalning yerga tushadigan bosimlarining yig'indisi, samosvalning yuk bilan birgalikdagi og'irligidan 9,32% kam ekan.

Javob: $F_y = 23,783 \text{ kN}$, $F_x = 275,766 \text{ kN}$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi $0,4\text{ kg}$ bo'lgan moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s=3\text{ m}$ qonun bo'yicha harakat qilsa, 2 s dan keyin unga ta'sir qiluvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisining impulsini toping.

2-masala. Massalari $m_1 = 4 \cdot 10^4\text{ kg}$ va $m_2 = 3 \cdot 10^4\text{ kg}$ ga teng bo'lgan ikki vagon $v_1 = 2\text{ m/s}$ va $v_2 = 3\text{ m/s}$ tezliklar bilan gorizontaal temir yo'lda harakatlanadi. Bir qancha vaqtdan keyin 2-vagon 1-vagonga yetib olib, ular birgalikda harakatlansa, qarshilik kuchlarini hisobga olmay, ularning keyingi umumiy tezligini toping (22.5-rasm).



22.5-rasm

Nazorat savollari

1. Harakat differensial tenglamasining vektorli ifodasi qanday ko'rinishda yoziladi?
2. Kuch impulsini tushuntiring.
3. Teng ta'sir etuvchi kuchning impulsi qanday aniqlanadi?
4. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorini tushuntiring.
5. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday?
6. Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli vaqt oralig'ida o'zgarishi qanday ifodalanadi?
7. Moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni qanday ta'riflanadi?
8. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday?
9. Mexanik sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli vaqt oralig'ida o'zgarishi qanday ifodalanadi?
10. Mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni nimani ifodalaydi?

$$M\ddot{a} = \sum \vec{F}_i^* \quad (23.9)$$

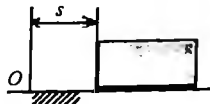
(23.9) tenglama ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning differensial tenglamasining vektor ko'rinishi hisoblanadi. Koordinata o'qlariga proyeksiyalab, differensial tenglamaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini hosil qilamiz:

$$M\ddot{x} = \sum F_{ix}^*; \quad M\ddot{y} = \sum F_{iy}^*; \quad M\ddot{z} = \sum F_{iz}^*; \quad (23.10)$$

(23.9) va (23.10) differensial tenglamalardan bitta moddiy nuqtaning harakatini tekshirishda foydalanish mumkin.

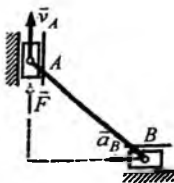
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi $m=2\text{kg}$ bo'lgan jism gorizontal yo'lda $s=3t^2+2$ qonuni bo'yicha harakat qiladi. Jismga ta'sir qiluvchi kuchlar bosh vektorining qiymatini hisoblang (23.1-rasm).



23.1-rasm

2-masala. Ikki vaznsiz polzun, A va B massasi 4kg bo'lgan bir jinsli sterjenga bog'langan holda $\vec{F}$ kuchi ta'sirida gorizontal va vertikal yo'naltiruvchilari bo'ylab o'zgarmas $\vec{v}_A$ tezlik bilan harakatlanadi. B polzunning tezlanishi 4m/s^2 bo'lganda A polzunga ta'sir qiluvchi reaksiya kuchini aniqlang (23.2-rasm).



23.2-rasm

Nazorat savollari

1. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teoremani ta'riflang.
2. Massalar markazining harakati haqidagi teoremaning afzalligi nimadan iborat?
3. Mexanik sistema massalar markazi harakatining saqlanish qonuni qanday?
4. Mexanik sistema massalar markazining harakat differensial tenglamalari qanday ifodalanadi?
5. Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning differensial tenglamalari qanday ko'rinishda yoziladi?

24. MODDIY NUQTA HARAKAT MIQDORI MOMENTI VA SISTEMANING KINETIK MOMENTI

Massasi m , harakat tezligi v ga teng M nuqtaning biror O markazga nisbatan radius-vektori $\vec{r}$ ga teng bo'lsin. O markazga nisbatan nuqta harakat miqdorining momenti deb,

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (24.1)$$

ga teng vektor kattalikka aytiladi (24.1-rasm, a).

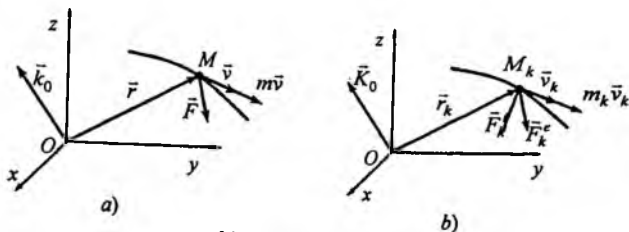
M nuqta harakat miqdorining momenti, $\vec{k}_O$ moment markazi O nuqtaga qo'yiladi. Koordinatalar boshini O markazda olib, qo'zg'almas x, y, z o'qlarini o'tkazsak, (24.1) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (24.2)$$

Bu tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, o'qlarga nisbatan harakat miqdorining momentlarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} k_x &= M_x(m\vec{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \\ k_y &= M_y(m\vec{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \\ k_z &= M_z(m\vec{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \quad (24.3)$$

SI birliklar sistemasida harakat miqdorining momenti $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ yoki $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ bilan o'lchanadi. Mexanik sistema barcha nuqtalaridan O markazga nisbatan harakat miqdori momentlarining geometrik yig'indisiga teng vektor sistemaning O markazga nisbatan kinetik momenti yoki sistema harakat miqdorining bosh momenti deyiladi (24.1-rasm, b).



24.1-rasm

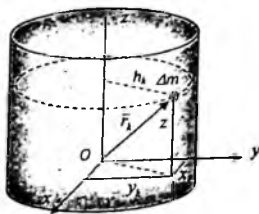
$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_N \vec{v}_N) = \sum \vec{r}_N \times m_N \vec{v}_N. \quad (24.4)$$

Sistemaning kinetik momenti, $\vec{K}_O$ moment markazi O nuqtaga qo'yiladi. Agar mexanik sistema nuqtalari biror hajm (sirt yoki chiziq) bo'yicha uzluksiz taqsimlangan bo'lsa, u holda (24.4) da yig'indi o'rniqa massaning qanday taqsimlanishiga mos integral olinadi. (24.4) tenglamani koordinata o'qlariga proyeksiyalab, mos o'qlarga nisbatan sistemaning kinetik momentini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_N \vec{v}_N) = \sum m_N(y_N \dot{z}_N - z_N \dot{y}_N), \\ K_y &= \sum M_y(m_N \vec{v}_N) = \sum m_N(z_N \dot{x}_N - x_N \dot{z}_N), \\ K_z &= \sum M_z(m_N \vec{v}_N) = \sum m_N(x_N \dot{y}_N - y_N \dot{x}_N). \end{aligned} \quad (24.5)$$

Sistemaning harakat miqdori uning massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatini, kinetik momenti esa uning aylanma harakatini xarakterlaydi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti



24.2-rasm

Oz o'qi atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanuvchi jismning Oz o'qiga nisbatan kinetik momenti K_z ni (24.5) formulaga asosan yozamiz (24.2-rasm).

$$K_z = \sum M_z(m_N \vec{v}_N). \quad (24.6)$$

Jism Oz o'qi atrofida aylanganda M_N nuqta tezligi, $v_N = h_N \omega$ bo'lib, harakat miqdori vektori, $m_N \vec{v}_N$,

yo'nalishi h_N ga perpendikulyar bo'lib, Oz o'qiga perpendikulyar tekislikda yotadi. Harakat miqdori momenti M_N nuqta uchun quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$M_z(m_N \bar{v}_N) = h_N m_N v_N = m_N h_N^2 \omega. \quad (24.7)$$

(24.6) tenglamani jismning hamma nuqtalari uchun qo'llasak,

$$K_z = \sum M_z(m_N \bar{v}_N) = \sum h_N m_N v_N = \sum m_N h_N^2 \omega = \omega \sum m_N h_N^2 = \omega I_z. \quad (24.8)$$

Demak,

$$K_z = \omega I_z.$$

Xulosa qilib aytganda, *qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti jismning mazkur o'qqa nisbatan inersiya momenti bilan burchak tezligining ko'paytmasiga teng.*

Agar sistema qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi bir necha jismdan tashkil topgan bo'lsa, uning kinetik momenti quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$K_z = I_{1z} \omega_1 + I_{2z} \omega_2 + \dots + I_{nz} \omega_n. \quad (24.9)$$

bu yerda: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — har bir jismning burchak tezligi; $I_{1z}, I_{2z}, \dots, I_{nz}$ — jismlarning Oz o'qqa nisbatan inersiya momentlari.

Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqida teorema

M nuqtaning massasi, m ga teng bo'lib, $\vec{F}$ kuch ta'sirida $\vec{v}$ tezlik bilan harakatlanin. Nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini yozamiz:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Tenglamaning har ikkala tomonini nuqtaning radius-vektori $\vec{r}$ ga vektorli ko'paytirsak:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (24.10)$$

Chap tomonidagi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

bu yerda $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ekanligini e'tiborga olsak, $\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$ ifoda nolga teng. Ya'ni $\vec{r} \times m\vec{v} = 0$, chunki $\vec{v} \parallel m\vec{v}$.

$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$ tenglikni (24.2) ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (24.11)$$

(24.1) ga ko'ra, $\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ vektori nuqtaning O markaziga nisbatan harakat miqdori momentini ifodalaydi. Statika bo'limidan bizga ma'lumki, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ ifoda O nuqtaga nisbatan $\vec{F}$ kuch momentini ifodalaydi. Bundan

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (24.12)$$

yoki

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (24.13)$$

tenglama o'rinli bo'ladi.

(24.12) yoki (24.13) tenglamalar nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi:

Teorema: Moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas markazga nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng.

(24.13) tenglamani Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, nuqta harakat miqdorining koordinata o'qlariga nisbatan momentlari o'zgarishi haqidagi teoremani hosil qilamiz:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\vec{F}); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\vec{F}); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}). \quad (24.14)$$

Ya'ni moddiy nuqta harakat miqdorining biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning shu o'qqa nisbatan momentiga teng.

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teorema

L ta nuqtadan iborat mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan barcha bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha kuchlarni

(jumladan, bog'lanish reaksiya kuchlarini) $\vec{F}_N^*$ tashqi va $\vec{F}_N^i$ ichki kuchlarga ajratamiz. Natijada sistema nuqtalarini erkin deb qarab, har bir nuqta uchun harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m_N \vec{v}_N) = \vec{M}_O(\vec{F}_N^*) + \vec{M}_O(\vec{F}_N^i), \quad (N=1,2,\dots,L). \quad (24.15)$$

Bu tenglamalarni qo'shsak,

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{M}_O(m_N \vec{v}_N) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_N^*) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}_N^i) \quad (24.16)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Tenglamaning chap tomonidagi ifodada

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_N \vec{v}_N)$$

sistemaning kinetik momentini ifodalaydi. (24.16) tenglamaning o'ng tomonidagi ifodada

$$\vec{M}_O^* = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_N^*)$$

tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan bosh momenti deyiladi. Ichki kuchlarning xossasiga asosan ularning O nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng:

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_N^i) = 0.$$

Shunday qilib, (24.16) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^*. \quad (24.17)$$

(24.17) tenglama sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi:

Teorema: *Sistemaning biror qo'zg'almas nuqtaga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.*

(24.17) tenglamaning ikkala tomonini qo'zg'almas Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^*, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^*, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^*, \quad (24.18)$$

bu yerda K_x, K_y, K_z lar mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarga nisbatan

sistemaning kinetik momentlari. M_x^*, M_y^*, M_z^* lar esa mazkur o'qlarga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momentlarini ifodalaydi.

(24.18) tenglamalar qo'zg'almas koordinata o'qlariga nisbatan sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi:

Teorema: *Sistemaning biror qo'zg'almas o'qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o'qqa nisbatan bosh momentiga teng.*

Qo'zg'almas o'z o'qi atrofida aylanma harakat differensial tenglamasini keltirib chiqarish uchun (24.18) tenglamaga (24.8) ifodani qo'ysak:

$$\frac{d(I_x \omega)}{dt} = M_x^*, \quad I_x \frac{d\omega}{dt} = M_x^*, \quad I_x \varepsilon = M_x^*, \quad I_x \ddot{\varphi} = M_x^*. \quad (24.19)$$

(24.19) tenglama qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning harakat differensial tenglamasini ifodalaydi.

Xulosa qilib aytganda, sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan jismlarning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma, sferik, giroskoplarning harakatini o'rganishda samarali foydalanish mumkin.

Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni

Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremadan quyidagi natijalarni olamiz:

1. Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror markazga nisbatan bosh moment vektori nolga teng bo'lsa, sistemaning shu nuqtaga nisbatan kinetik moment vektori miqdor va yo'nalish jihatdan o'zgarmas bo'ladi. Ya'ni, $\vec{M}_O = 0$ bo'lsa, (24.17) tenglamadan quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0, \quad \vec{K}_O = const. \quad (24.20)$$

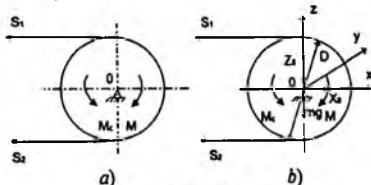
2. Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o'qqa (masalan, Oz o'qqa) nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lsa, sistemaning shu o'qqa nisbatan kinetik momenti harakat davomida o'zgarmasdan qoladi. Ya'ni, $M_z^* = 0$ bo'lsa, (24.18) ga asosan $\frac{dK_z}{dt} = 0$ bo'ladi, bundan

$$K_z = \text{const} \quad (24.21)$$

kelib chiqadi.

(24.20) va (24.21) tenglamalar sistema kinetik momentining saqlanish qonunini ifodalaydi.

24.1-masala. Massasi $m = 0,7 T$, diametri $d = 0,5 m$ bo'lgan tasmasli konveyer barabani tinch holatdan harakatga keltirildi. Barabanning harakat boshlanganidan $t = 3 s$ dan keyingi burchak tezligi, ω aniqlansin (24.3-rasm, a). Barabanning aylanish o'qiga nisbatan inersiya radiusi, $i = 0,23 m$, aylantiruvchi moment, $M = 0,75 kN \cdot m$, qarshilik kuchi momenti, $M_c = 25 N \cdot m$, tasmaning tortilish kuchlari, $S_1 = 5 kN$ va $S_2 = 2,7 kN$ ga teng.



24.3-rasm

Yechish: Baraban qo'zg'almas Oy o'qi atrofida aylanma harakatda bo'lgani uchun harakat differensial tenglamasi (24.19) tenglamadan foydalangan holda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$I_z \varepsilon = \sum M_z(\vec{F}_i^*) \quad (1)$$

Barabanga quyidagi tashqi kuchlar va momentlar ta'sir etadi (24.3-rasm, b): $m\vec{g}$ – og'irlik kuchi, M – aylantiruvchi moment, M_c – qarshilik kuchlar momenti, $\vec{S}_1$ va $\vec{S}_2$ – tasmalarning tortilish kuchlari, $\vec{X}_0$ va $\vec{Z}_0$ – podshipnikdagi reaksiya kuchining tashkil etuvchilari.

Aylanish o'qi, O_y ga nisbatan barabanning inersiya momenti:

$$I_y = m l^2. \quad (2)$$

Shu o'qqa nisbatan tashqi kuchlar momentlarining yig'indisi:

$$\sum M_i(\vec{F}_i) = M - M_c - S_1 \frac{D}{2} + S_2 \frac{D}{2} = M - M_c - 0,5(S_1 - S_2)D \quad (3)$$

(1) tenglamani (2) va (3) tenglamalarni hisobga olgan holda quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\varepsilon = \frac{\sum M_i(\vec{F}_i)}{m l^2} = \frac{M - M_c - 0,5(S_1 - S_2)D}{m l^2} = \text{const} \quad (4)$$

Barabanning burchak tezlanishi, ε o'zgarmas bo'lgani uchun u tekis tezlanuvchan harakat qiladi va burchak tezligi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (5)$$

Baraban tinch holatdan harakatga keltirilgani uchun boshlang'ich burchak tezligi, $\omega_0 = 0$ bo'ladi. (5) tenglamadan:

$$\omega = \varepsilon t \quad (6)$$

kelib chiqadi.

(6) tenglamaga (4) tenglamadagi ε ning qiymatini olib kelib qo'ysak:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{M - M_c - 0,5(S_1 - S_2)D}{m l^2} t = \frac{0,75 - 0,025 - 0,5(5 - 2,7)0,5}{0,7 \cdot 0,23^2} \cdot 3 = 12,15 \text{ s}^{-1}$$

Javob: $\omega = 12,15 \text{ s}^{-1}$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi $m = 0,4 \text{ kg}$ bo'lgan moddiy nuqta $y = 3t^2$ qonun bilan O_y o'qi bo'ylab harakat qilsa, $t = 3 \text{ s}$ da nuqtaning O markazga nisbatan harakat miqdori momentini toping.

2-masala. Massasi $m = 8 \text{ kg}$ bo'lgan yupqa devorli quvur $\omega = 8 \text{ rad/s}$ burchak tezlik bilan gorizont tekislikda dumalaydi. Agar quvurning radiusi $r = 0,1 \text{ m}$ bo'lsa, uning kinetik momentini aylanish oniy o'qiga nisbatan toping (24.4-rasm).



24.4-rasm

Nazorat savollari

1. Moddiy nuqta harakat miqdorining momenti va sistemaning kinetik momenti qanday aniqlanadi?
2. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga nisbatan kinetik momenti qanday formula bilan hisoblanadi?
3. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ta'riflang.
4. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremani ta'riflang.
5. Nuqta harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremaning koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday ifodalanadi?
6. Sistema kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremaning koordinata o'qlaridagi ifodasi qanday ifodalanadi?
7. Sistema kinetik momentining saqlanish qonunini ta'riflang.
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi jismning harakat differensial tenglamasi qanday?

25. ISH VA QUUVVAT

Kuchning ishi va quvvati

Kuchning biror ko'chishda ta'sirini ifodalovchi asosiy xarakteristikasi, uning shu ko'chishda bajargan ishidir. Kuchning elementar ishini, chekli oraliqdagi ishini va quvvatni ko'rib chiqamiz.

1. Kuchning elementar ishi

$\vec{F}$ kuchning cheksiz kichik elementar ds ko'chishda bajargan dA elementar ishi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$dA = F_i ds. \quad (25.1)$$

Bu yerda: F_i nuqta tezligining yo'nalishiga yoki tezlik bo'yicha yo'nalgan elementar ko'chishga $\vec{F}$ kuchning proyeksiyasidir. Elementar ish skalyar miqdor bo'lib, uning ishorasi F_i

proyeksiyasining qiymati orqali belgilanadi. Agar $F_t > 0$ bo'lsa, elementar ish $dA > 0$ va aksincha $F_t < 0$ bo'lsa, elementar ish $dA < 0$ bo'ladi. shakldan $F_t = F \cdot \cos \varphi$ bo'lib, φ -kuch bilan tezlik orasidagi burchak. Bu ifodani (25.1) ga olib borib qo'ysak,

$$dA = F \cos \varphi ds \quad (25.2)$$

kelib chiqadi. (25.2) tenglamada F va ds qiymatlari musbat bo'lganligi uchun, elementar ish dA qiymati $\cos \varphi$ ning qiymatiga bog'liqdir. Agar φ burchak o'tkir bo'lsa, $dA > 0$ va aksincha φ burchak o'tmas bo'lsa, $dA < 0$ bo'ladi.

Demak, *kuchning elementar ishi - kuchning elementar ko'chishga proyeksiyasining elementar ko'chishga ko'paytmasiga teng.*

φ burchakning ayrim qiymatlari uchun (25.2) tenglamadan foydalanib elementar ishni hisoblaymiz:

$$\varphi = 0, \quad dA = F ds;$$

$$\varphi = 90^\circ, \quad dA = 0;$$

$$\varphi = 180^\circ, \quad dA = -F ds. \quad (25.3)$$

(25.3) ifodadan ko'rinib turibdiki, kuch elementar ko'chishga perpendikulyar bo'lsa, elementar ish nolga teng bo'ladi. Kuchning normal tashkil etuvchisi $\vec{F}_n$ ning bajargan elementar ishi doim nolga tengdir. Elementar ishni hisoblashning boshqa formulalarini keltiramiz. Nuqta kinematikasidan bizga ma'lumki:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (25.4)$$

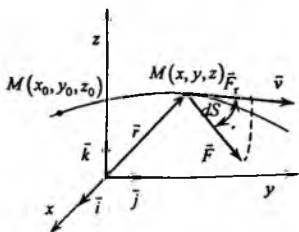
Bundan:

$$ds = |d\vec{r}| = v dt. \quad (25.5)$$

(25.5) ifodani (25.2) ga olib borib qo'ysak,

$$dA = F |d\vec{r}| \cos \varphi = \vec{F} d\vec{r}. \quad (25.6)$$

(25.6) tenglamadan *kuchning elementar ishi - kuchning, kuch qo'yilgan nuqta radius-vektori differensialiga skalyar*



25.1-rasm

ko'paytmasiga tengligi, (25.4) tenglamadan $d\vec{r} = \vec{v}dt$ ni (25.6) ga qo'ysak,

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} dt \cdot \vec{v} \quad (25.7)$$

(25.7) tenglamadan kuchning elementar ishi - elementar kuch impulsining nuqtaning tezligiga skalyar ko'paytmasiga tengligi, agar $\vec{F}$ kuchni va $\vec{r}$ -radius-vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodalasak, (25.8) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \\ \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \end{aligned} \quad (25.8)$$

(25.8) ifodadan:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (25.9)$$

(25.8) va (25.9) ifodalarni (25.6) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (25.10)$$

(25.10) tenglama elementar ishning analitik ifodasidir.

2. Chekli oraliqda kuchning bajargan ishi

Nuqtaning M_0 holatidan M holatiga o'tishida F kuchning bajargan ishini hisoblash uchun M_0M oraliqni n ta elementar ko'chishlarga bo'lamiz. U holda ishni quyidagi formula bilan ifodalaymiz:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n dA_k; \quad (25.11)$$

bu yerda dA_k - har bir elementar ko'chishda kuchning bajargan ishi. M_0M oraliqda kuchning bajargan ishini hisoblash uchun (25.2), (25.7), (25.10) tenglamalarni integrallaymiz. Ya'ni:

$$A = \int_{M_0}^M F ds, \quad A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A = \int_{M_0}^M F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (25.12)$$

(25.12) tenglamalar yordamida kuchning chekli oraliqda bajargan to'liq ishi hisoblanadi.

3. Teng ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi

Agar $\vec{R}$ kuchni $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi deb qarash, u holda:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \quad (25.13)$$

bo'lib, (25.6) tenglamaga (25.13) ni qo'y sak:

$$dA = \vec{R} d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N) d\vec{r} = \vec{F}_1 d\vec{r} + \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \vec{F}_N d\vec{r}. \quad (25.14)$$

Demak, *teng ta'sir etuvchi kuchning elementar ko'chishda bajaragan elementar ishi tashkil etuvchi kuchlarning alohida-alohida elementar ko'chishda bajaragan elementar ishlarining algebraik yig'indisiga teng.*

Chekli ko'chishda bajaragan ishini hisoblash uchun har bir kuchning chekli oraliqdagi ishlari hisoblanib, algebraik yig'indisi olinadi. Ya'ni:

$$dA = \int_{M_0}^M \vec{R} d\vec{r} = \int_{M_0}^M \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_0}^M \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_0}^M \vec{F}_N d\vec{r}. \quad (25.15)$$

SI birliklar sistemasida ish birligi qilib Joule qabul qilingan.

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Agar kuchning tezlik yo'nalishiga proyeksiyasi F_t o'zgarmas bo'lsa, (25.12) tenglamadan:

$$A = F_t \cdot s \quad (25.16)$$

kelib chiqadi. Bu yerda s -nuqtaning bosib o'tgan yo'li.

$F_t = F \cdot \cos \varphi$ ifodani (25.16) ga qo'y sak:

$$A = F s \cos \varphi. \quad (25.17)$$

(25.17) formulada F va φ o'zgaruvchan bo'lgan holda ham $F \cos \varphi$ o'zgarmas miqdordir. Bu shart faqatgina F va φ o'zgarmas bo'lgandagina o'rinli.

Agar $\varphi = 0^\circ$ yoki $\varphi = 180^\circ$ bo'lsa, (25.17) tenglamadan:

$$A = \pm F s. \quad (25.18)$$

Kuch o'zgarmas bo'lib, uning yo'nalishi doimo trayektoriyaga urinma bo'lsa, (25.18) formula to'g'ri chiziqli va egri chiziqli harakatlar uchun o'rinlidir.

4. Quvvat

Kuchning quvvati uning vaqt birligi ichida bajaradigan ishi bilan baholanadi. Ta'rifga ko'ra quvvatni hisoblash formulasi quyidagicha aniqlanadi:

$$W = \frac{dA}{dt}. \quad (25.19)$$

(25.7) formuladan foydalanib quvvatni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

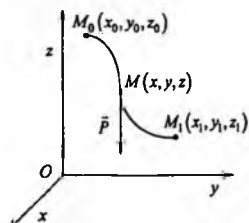
$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \varphi. \quad (25.20)$$

Demak, quvvat kuch va tezlikning skalyar ko'paytmasidan iborat ekan. (25.20) formuladan ko'rinib turibdiki, quvvat o'zgarmasligi uchun tezlik qancha katta bo'lsa, kuch shuncha kichik bo'ladi. Masalan, lokomotivning tortish kuchini oshirish uchun poyezdning tezligini kamaytirish lozim.

SI birliklar sistemasida quvvat birligi qilib Vatt qabul qilingan.

$1 \text{ Vatt} = 1 \text{ Joul} / \text{s}$ bo'ladi.

Kuchning ishini hisoblashga misollar



25.2-rasm

g'an ishini ko'ramiz.

Ishni hisoblash uchun nuqtaning harakatini o'rganish zarur. Tabiatda shunday kuchlar borki, ularning bajargan ishlarini nuqtaning boshlang'ich va oxirgi holatini bilgan holda sodda hisoblanadi. Og'irlik kuchining, Guk qonuni bo'yicha o'zgaruvchi elastiklik kuchining, qattiq jismning turli harakatlarida biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajar-

Og'irlik kuchining bajargan ishi

Massasi m bo'lgan moddiy nuqtaning og'irligi $\vec{P}$ o'zgarmas bo'lib, vertikal pastga yo'nalgan (25.2-rasm). Qiymati $P = mg$. $Oxyz$ koordinata o'qlariga harakatlanuvchi nuqtaning og'irlik kuchini proyeksiyalaymiz. Ya'ni:

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg. \quad (25.21)$$

Nuqta M_0 holatdan M ga kelguncha $\vec{P}$ kuchning bajargan ishini hisoblaymiz. (25.21) ifodani (25.12) formulaga olib borib qo'ysak,

$$A = \int_{M_0}^M F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1) \quad (25.22)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $h = z_0 - z_1$ ekanligini e'tiborga olsak, (25.22) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A = mgh \quad (25.23)$$

Agar nuqta yuqoriga ko'tarilayotgan bo'lsa, og'irlik kuchining bajargan ishi manfiy bo'ladi. Umumiy holda og'irlik kuchining bajargan ishi quyidagiga teng:

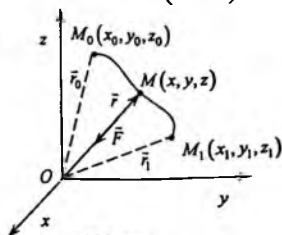
$$A = \pm mgh, \quad (25.24)$$

yoki

$$A = \pm Ph. \quad (25.25)$$

(25.24) va (25.25) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, og'irlik kuchining bajargan ishi nuqtaning trayektoriyasiga bog'liq emas.

Nuqta M_0 holatdan M ga kelguncha nuqtalar ustma-ust tushsa yoki bitta gorizontal tekislikda yotsa $\vec{P}$ kuchning bajargan ishi nolga teng.



25.3-rasm

Chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishi

Chiziqli elastiklik kuchi yoki *chiziqli tiklovchi kuch* deb Guk qonuni bo'yicha ta'sir etuvchi kuchga aytiladi.

Ya'ni:

$$\vec{F} = c\vec{r}, \quad (25.26)$$

bu yerda $\vec{r}$ – M nuqtadan statik muvozanat holatidagi nuqttagacha bo'lgan masofa. Bu nuqtada kuch nolga teng bo'ladi. c – qattqlik koeffitsiyenti.

Koordinata boshini nuqtaning statik muvozanat holatidagi nuqtada olsak, u holda (25.26) tenglamaning o'qlardagi proyeksiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz. \quad (25.27)$$

Nuqta M_0 holatdan M ga kelguncha kuchning bajargan ishini hisoblaymiz. (25.27) ifodani (25.12) ifodaga olib borib qo'ysak,

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz = -c \int_{M_0}^{M_1} (x dx + y dy + z dz) = -c \int_{r_0}^{r_1} r dr \quad (25.28)$$

kelib chiqadi.

(25.28) tenglamada $x dx + y dy + z dz = r dr$ ga teng bo'lib, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ga teng. Tenglamani integrallab, kuchning bajargan ishini hisoblaymiz. Ya'ni:

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2). \quad (25.29)$$

(25.29) tenglama yordamida chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishini hisoblaymiz. Agar M_0 nuqta statik muvozanat holatidagi nuqta bilan ustma-ust tushsa, u holda $r_0 = 0$ va nuqtaning O dan M ga ko'chishda kuchning bajargan ishi

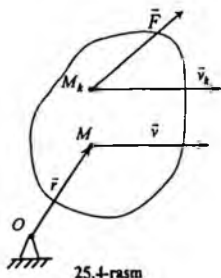
$$A = -\frac{c}{2}r^2. \quad (25.30)$$

(25.30) tenglamada r – harakati tekshirilayotgan nuqta va statik muvozanat nuqtasi orasidagi eng qisqa masofa.

$r = \lambda$ belgilash kiritamiz. U holda (25.30) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2. \quad (25.31)$$

(25.31) tenglama chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishini hisoblash formulasini ifodalaydi.



ko'ramiz.

Qattiq jismning turli harakatlarida biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi

Qattiq jismning biror nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning elementar va to'liq ishini hisoblash uchun formulalar keltirib chiqaramiz. Avvalo qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatini, so'ngra harakatning umumiy hollarini

a) Qattiq jism ilgarilanma harakat qilganda hamma nuqtalarining tezliklari miqdor va yo'nalish jihatdan bir xil bo'ladi (25.4-rasm).

Agar qattiq jismning M , nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchni $\vec{F}$ deb, nuqtaning tezligi $\vec{v}_k = \vec{v}$ ekanligini hisobga olsak, elementar ishini hisoblaymiz. Ya'ni:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v}_k dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (25.32)$$

bu yerda $\vec{r}$ – qattiq jism ixtiyoriy nuqtasining radius-vektori. Chekli ko'chishda bajarilgan to'liq ish teng:

$$A = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (25.33)$$

b) Qattiq jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qilganda M nuqtasining tezligini vektor ifodasini yozamiz (25.5-rasm).

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (25.34)$$

$\vec{F}$ kuchning elementar ishi quyidagi formuladan aniqlanadi. Ya'ni:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt, \quad (25.35)$$

bu yerda

$$\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}). \quad (25.36)$$

(25.36) ni (25.35) ga qo'ysak:

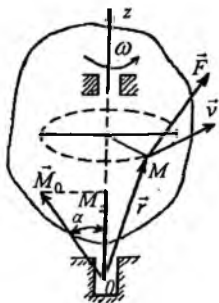
$$dA = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O dt = \omega dt M_O \cos \alpha. \quad (25.37)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O$

kuchning O nuqtaga nisbatan momenti. Oz aylanish o'qiga nisbatan kuchning momenti: $M_O \cos \alpha = M_z$, formula bilan aniqlanadi. $\omega dt = d\varphi$ ekanligini hisobga olib (25.37) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$dA = M_z d\varphi. \quad (25.38)$$

(25.38) formula qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning elementar ishini hisoblash formulasi.



25.5-rasm

To'liq ish quyidagi formula bilan aniqlanadi:

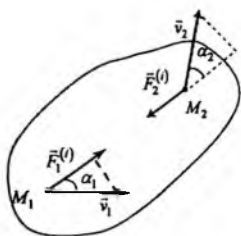
$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \quad (25.39)$$

Xususiylashtirishda, aylanish o'qiga nisbatan kuch momenti o'zgarmas bo'lsa, ya'ni $M_z(\vec{F}) = \text{const}$, u holda ishni quyidagi formula bilan aniqlaymiz. Ya'ni:

$$A = M_z \varphi, \quad (25.40)$$

bu yerda φ – jismning burilish burchagi.

Qattiq jism ichki kuchlarining bajargan ishi



25.6-rasm

Qattiq jismning har qanday ko'chishida ichki kuchlarning bajargan ishi nolga tengdir. Qattiq jismning ixtiyoriy ikki M_1 va M_2 nuqtalarini olamiz (25.6-rasm). Ichki kuchlar jism nuqtalarining o'zaro ta'sir kuchlari bo'lgani uchun M_1 va M_2 nuqtalar uchun quyidagi tenglik o'rinalidir:

$$\vec{F}_1^{(i)} = -\vec{F}_2^{(i)}. \quad (25.41)$$

$\vec{F}_1^{(i)}$ kuch bo'ylab yo'nalgan $\vec{l}_0$ birlik vektorni kiritamiz. U holda:

$$\vec{F}_1^{(i)} = \vec{l}_0 F_1^{(i)}, \quad \vec{F}_2^{(i)} = \vec{l}_0 F_2^{(i)} = -\vec{l}_0 F_1^{(i)}. \quad (25.42)$$

$\vec{F}_1^{(i)}, \vec{F}_2^{(i)}$ kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig'indisi quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = \vec{F}_1^{(i)} \vec{v}_1 dt + \vec{F}_2^{(i)} \vec{v}_2 dt = F_1^{(i)} dt (\vec{v}_1 \vec{l}_0 - \vec{v}_2 \vec{l}_0). \quad (25.43)$$

(25.43) tenglamada qavs ichidagi vektorlarning skalyar ko'paytmasini ochib chiqsak:

$$dA_1^{(i)} + dA_2^{(i)} = F_1^{(i)} dt (v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2) = 0 \quad (25.44)$$

hosil bo'ladi. Chunki, kinematikadan ma'lumki qattiq jism ixtiyoriy ikki nuqtasi tezligining ularni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdagi proyeksiyalari tengdir. (25.44) tenglamadagi qavs ichidagi ifoda shu proyeksiyalardir. Ishoralari turli va miqdorlari teng bo'lgani uchun nolga teng. Demak:

$$\sum dA_i^{(i)} = 0 \quad (25.45)$$

Biz bilamizki, har qanday mexanik sistema uchun ichki kuchlar bosh momenti va bosh vektori nolga teng. Faqat qattiq jismlar uchun ichki kuchlar bajargan ishlarining yig'indisi nolga tengdir. Umumiy holda boshqa mexanik sistema uchun o'rinni emas.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Dvigatelining tortish kuchi 3000 N bo'lgan motorli qayiq 8 m/s tezlik bilan harakat qilsa, dvigatel tortish kuchining quvvatini *kwt* larda hisoblang.

2-masala. Bikrlik koeffitsiyenti $c = 120 \text{ N/m}$ bo'lgan prujinaning uchi 0,02 m ga cho'zilgan bo'lsa, prujina elastiklik kuchining bajargan ishini hisoblang.

3-masala. Massasi 40 kg bo'lgan bir jinsli silindr $\omega = 6 \text{ rad/s}$ burchak tezlik bilan gorizontal tekislikda to'g'ri chiziqli bo'ylab sirpanmasdan dumalaydi. Agar dumalab ishqalanish koeffitsiyenti $\delta = 0,01$ bo'lsa, dumalashga qarshilik qiluvchi kuchning quvvatini hisoblang.

Nazorat savollari

1. Kuchning elementar ishi qanday formulalar bilan hisoblanadi?
2. Teng ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi qanday hisoblanadi?
3. Chekli oraliqda kuchning bajargan ishi nimaga teng?
4. Quvvat nima?
5. Og'irlik kuchining bajargan ishi nimaga teng?
6. Chiziqli elastiklik kuchining bajargan ishi qanday aniqlanadi?
7. Qattiq jism ichki kuchlarining bajargan ishi nimaga teng?
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasiga ta'sir etuvchi kuchning bajargan ishi nimaga teng?

26. KINETIK ENERGIYA

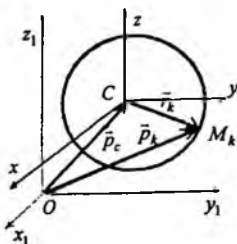
Nuqta va sistema kinetik energiyasi

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb, nuqta massani tezligi kvadratiga ko'paytmasining yarmiga aytiladi, ya'ni $\frac{mv^2}{2}$ yoki $\frac{m\vec{v}^2}{2}$. Kinetik energiya skalyar, musbat

miqdordir. Chunki, istalgan vektorning skalyar kvadrati vektor modulining kvadratiga tengdir.

Kinetik energiyaning SI sistemasida o'lchovi, $1\text{Joul} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$ dan iborat.

Mexanik sistema kinetik energiyasi sistemani tashkil etuvchi har bir nuqtalar kinetik energiyalarining yig'indisiga teng:



26.1-rasm

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} \quad (26.1)$$

Mexanik sistemaning kinetik energiyasi nuqtalar tezliklarining yo'nalishiga bog'liq emas. Faqatgina sistema nuqtalari tinch holatda bo'lsa, kinetik energiya nolga teng bo'lishi mumkin.

Sistema kinetik energiyasini hisoblash (Kyonig teoremasi)

Mexanik sistema harakatini massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatini ko'chirma harakatga va koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakatini nisbiy harakatga ajratamiz. Sistemaning M_k nuqtasi uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\vec{p}_k = \vec{p}_c + \vec{r}_k \quad (26.2)$$

(26.2) dan hosila olsak:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_c + \vec{v}_k \quad (26.3)$$

bu yerda

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} \quad (26.4)$$

(26.4) tenglama yordamida nisbiy harakat tezligi aniqlanadi.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini ilgarilanma harakatda bo'lgani uchun $\vec{\omega} = 0$ qiymatini (26.1) ga qo'ysak, sistema kinetik energiyasi kelib chiqadi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} + \vec{v}_c \sum m_k \vec{v}_k \quad (26.5)$$

bu yerda

$$\vec{v}_c \sum m_k \vec{v}_k = \vec{v}_c \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_c \frac{d}{dt} (\sum m_k \vec{r}_k) = 0.$$

Chunki:

$$\sum m_k \vec{r}_k = \text{const} = 0.$$

(26.5) tenglamada $\sum m_k = M$ sistemaning massasi bo'lib,

$T_c^{(r)} = \sum \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}$ ifoda esa koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikda ilgarilanma harakat qiluvchi sistemaning nisbiy harakat kinetik energiyasi.

Demak, (26.5) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + T_c^{(r)}. \quad (26.6)$$

(26.6) tenglama *Kyonig teoremasini* ifodalaydi:

Teorema: Murakkab harakatdagi sistemaning kinetik energiyasi butun sistema massasi mujassamlashgan deb qaraladigan massalar markazi kinetik energiyasi bilan sistemaning massalar markaziga nisbatan kinetik energiyalarining yig'indisiga teng.

Qattiq jism kinetik energiyasi

a) Ilgarilanma harakatda qattiq jismning hamma nuqtalarining tezliklari teng bo'lgani uchun $\vec{v}_k = \vec{v}$ bo'lib, kinetik energiyasi quyidagicha yoziladi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = M \frac{v^2}{2}. \quad (26.7)$$

(26.7) formuladan ko'rinib turibdiki, ilgarilanma harakatda sistema kinetik energiyasi massasi bir nuqtaga joylashgan nuqta kinetik energiyasi kabi aniqlanadi.

b) Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyani hisoblash uchun biror M_k nuqtasini

olib, uning tezligini quyidagicha ifodalaymiz:

$$v_k = \omega \cdot h_k,$$

bu yerda h_k – nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan eng qisqa masofa, ω – jismning burchak tezligi.

Bundan foydalanib, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z. \quad (26.8)$$

Demak:

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}. \quad (26.9)$$

(26.9) tenglamada I_z – qattiq jismning Oz aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti bo'lib, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentining burchak tezlik kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng.

c) Tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasini hisoblash uchun Kyonig teoremasidan foydalanamiz. Bu holda qattiq jism nuqtalarini massalar markazi atrofida ω burchak tezligi bilan aylanishidan:

$$T_C^{(v)} = I_{Cz} \frac{\omega^2}{2}. \quad (26.10)$$

(26.10) tenglamada I_{Cz} – massalar markazidan o'tuvchi jismning harakat tekisligiga perpendikulyar Cz o'qiga nisbatan inersiya momenti.

(26.6) formulaga asosan:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}. \quad (26.11)$$

(26.11) tenglamadan ko'rinib turibdiki, tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi, massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat kinetik energiyasi va harakat tekisligiga perpendikulyar, massalar markazidan o'tuvchi, o'q atrofidagi aylanma harakat kinetik energiyalarining yig'indisidan iborat.

Qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasini ilgarilanma harakatda bo'lgani uchun $\vec{\omega} = 0$ qiymatini (26.1) ga qo'ysak, sistema kinetik energiyasi kelib chiqadi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2} + \vec{v}_c \sum m_k \vec{v}_k \quad (26.5)$$

bu yerda

$$\vec{v}_c \sum m_k \vec{v}_k = \vec{v}_c \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_c \frac{d}{dt} (\sum m_k \vec{r}_k) = 0.$$

Chunki:

$$\sum m_k \vec{r}_k = \text{const} = 0.$$

(26.5) tenglamada $\sum m_k = M$ sistemaning massasi bo'lib,

$T_c^{(r)} = \sum \frac{m_k \vec{v}_k^2}{2}$ ifoda esa koordinatalar sistemasiga nisbatan massalar markazi bilan birgalikda ilgarilanma harakat qiluvchi sistemaning nisbiy harakat kinetik energiyasi.

Demak, (26.5) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + T_c^{(r)}. \quad (26.6)$$

(26.6) tenglama *Kyonig teoremasini* ifodalaydi:

Teorema: Murakkab harakatdagi sistemaning kinetik energiyasi butun sistema massasi mujassamlashgan deb qaraladigan massalar markazi kinetik energiyasi bilan sistemaning massalar markaziga nisbatan kinetik energiyalarining yig'indisiga teng.

Qattiq jism kinetik energiyasi

a) Ilgarilanma harakatda qattiq jismning hamma nuqtalarining tezliklari teng bo'lgani uchun $\vec{v}_k = \vec{v}$ bo'lib, kinetik energiyasi quyidagicha yoziladi:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = M \frac{v^2}{2}. \quad (26.7)$$

(26.7) formuladan ko'rinib turibdiki, ilgarilanma harakatda sistema kinetik energiyasi massasi bir nuqtaga joylashgan nuqta kinetik energiyasi kabi aniqlanadi.

b) Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyani hisoblash uchun biror M_k nuqtasini

olib, uning tezligini quyidagicha ifodalaymiz:

$$v_k = \omega \cdot h_k,$$

bu yerda h_k – nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan eng qisqa masofa, ω – jismning burchak tezligi.

Bundan foydalanib, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} I_z. \quad (26.8)$$

Demak:

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}. \quad (26.9)$$

(26.9) tenglamada I_z – qattiq jismning oz aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti bo'lib, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentining burchak tezlik kvadratiga ko'paytmasining yarmiga teng.

c) Tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasini hisoblash uchun Kyonig teoremasidan foydalanamiz. Bu holda qattiq jism nuqtalarini massalar markazi atrofida ω burchak tezligi bilan aylanishidan:

$$T_C^{(r)} = I_{Cz} \frac{\omega^2}{2}. \quad (26.10)$$

(26.10) tenglamada I_{Cz} – massalar markazidan o'tuvchi jismning harakat tekisligiga perpendikulyar Cz o'qiga nisbatan inersiya momenti.

(26.6) formulaga asosan:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{Cz}\omega^2}{2}. \quad (26.11)$$

(26.11) tenglamadan ko'rinib turibdiki, tekis-parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasi, massalar markazi bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat kinetik energiyasi va harakat tekisligiga perpendikulyar, massalar markazidan o'tuvchi, o'q atrofidagi aylanma harakat kinetik energiyalarining yig'indisidan iborat.

$$T = \frac{v^2}{4g}(2Q + 3P + P) = \frac{v^2}{4g}(Q + 2P). \quad (5)$$

(1) tenglamaning o'ng tomonidagi ichki va tashqi kuchlarning bajargan ishlarini hisoblaymiz. Ipning tortilish kuchining bajargan ishi nolga teng bo'lgani uchun, ip bilan tortilgan barcha qattiq jism uchun $\sum A_i = 0$ tenglik o'rinlidir. Blok og'irligi $\bar{P}$ kuchning va o'qning $\bar{R}_0$ reaksiya kuchlarining bajargan ishlari nolga teng, chunki ular qo'zg'almas O nuqtaga qo'yilgan. G'ildirakning og'irligi, $\bar{P}$ ning yo'nalishi ko'chishga perpendikulyar bo'lgani uchun, $\bar{N}$; $\bar{F}$ kuchlarning yo'nalishi tezliklar oniy markaziga qo'yilgani uchun bajargan ishlari nolga teng. Bu masalada ishni $\bar{Q}$ kuch va tekislikda g'ildirakning yumalashiga qarshilik qiluvchi juft kuch momenti, M , bajaradi. Ya'ni:

$$\sum A_i = Q \cdot h - M \cdot \varphi. \quad (6)$$

(6) tenglamadagi φ burchak M yuk h masofaga tushganda B g'ildirakning burilish burchagidir.

Ma'lumki,

$$M_k = kN = kP = \text{const}, \quad \varphi = \frac{h}{R} \quad (7)$$

ga teng. (7) tenglikni (6) ga qo'ysak,

$$\sum A_i = Q \cdot h - kP \frac{h}{R} \quad (8)$$

kelib chiqadi. (5) va (8) tenglamani (1) ga qo'ysak,

$$\frac{v^2}{4g}(Q + 2P) = h \left(Q - \frac{k}{R} P \right);$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh \left(Q - \frac{k}{R} P \right)}{Q + 2P}} \quad (9)$$

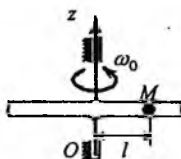
(9) tenglama M yukning h balandlikdan tushish tezligini ifodalaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

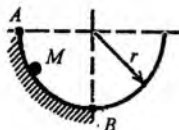
1-masala. Inersiya momenti, $I_0 = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bo'lgan naycha Oz o'qi atrofida aylanadi (26.3-rasm). Agar naycha ichidagi massasi $m = 0,2 \text{ kg}$ bo'lgan sharcha ichki kuchlar ta'sirida harakat qilib, Oz

o'qi ostiga kelganda burchak tezlik, $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ bo'lsa, sharcha qanday l masofaga kelganda burchak tezlik 2 rad/s ga tushib qoladi?

2-masala. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta radiusi $r = 0,25 \text{ m}$ bo'lgan yarim silindr ichki sirti bo'ylab og'irlik kuchi ta'sirida harakat qiladi (26.4-rasm). Agar A nuqtada uning tezligi nolga teng bo'lsa, B nuqtada qanday tezlikka erishadi?



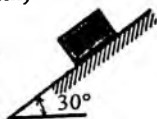
26.3-rasm



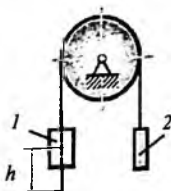
26.4-rasm

3-masala. Massasi $m = 1,2 \text{ kg}$ bo'lgan jism tinch holatdan qiya tekislik bo'ylab boshlang'ich tezliksiz pastga tusha boshladi (26.5-rasm). Agar ishqalanish koeffitsiyenti, $f = 0,2$ bo'lsa, 3 m masofa bosib o'tganda jismning kinetik energiyasi qancha bo'ladi?

4-masala. Massalari $m_1 = 3 \text{ kg}$ va $m_2 = 2 \text{ kg}$ bo'lgan ikki yuk cho'zilmaydigan ip yordamida blokka osilgan bo'lib, 1-yuk tinch holatdan $h = 2 \text{ m}$ pastga tushgan paytda uning tezligini hisoblang (26.6-rasm).



26.5-rasm



26.6-rasm

Nazorat savollari

1. Nuqta kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
2. Sistema kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
3. Ilgarilanma harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
4. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
5. Tekis-parallel harakat kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
6. Kyonig teoremasini ta'riflang.
7. Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishdagi ifodasi qanday?
8. Nuqta kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli oraliqdagi ifodasi qanday?
9. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensial ko'rinishdagi ifodasi qanday?
10. Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning chekli oraliqdagi ifodasi qanday?

27. MODDIY NUQTA VA MEXANIK SISTEMA UCHUN DALAMBER PRINSIPI

Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Erkin bo'lmagan, massasi m bo'lgan moddiy nuqtaga $\vec{F}^{(e)}$ aktiv kuch ta'sir etsin (27.1-rasm).

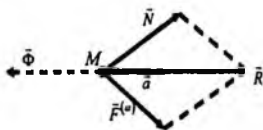
Moddiy nuqtani fikran bog'lanishdan ozod qilib, $\vec{N}$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz. U holda dinamiikaning asosiy qonuni quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + \vec{N}. \quad (27.1)$$

(27.1) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{N} + (-m\vec{a}) = 0. \quad (27.2)$$

Belgilash kiritamiz:



27.1-rasm

$$-m\vec{a} = \vec{\Phi}.$$

(27.3) ifodani (27.2) ga olib borib qo'ysak, (27.4) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

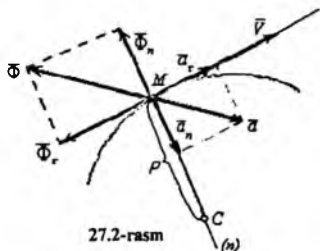
$$\vec{F}^{(a)} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0. \quad (27.4)$$

Miqdor jihatdan massa bilan tezlanishning ko'payitmasiga teng bo'lib, yo'nalish jihatdan tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan $\vec{\Phi}$ kuch *inersiya kuchi* deyiladi. (27.4) tenglama erkin bo'lmagan moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi.

Demak, erkin bo'lmagan moddiy nuqtaga harakati davomida ta'sir etuvchi $\vec{F}^{(a)}$ aktiv kuchlar va $\vec{N}$ reaksiya kuchlari shartli qo'yilgan $\vec{\Phi}$ inersiya kuchi bilan har onda muvozanatlashadi.

Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi yordamida dinamikaning birinchi asosiy masalalarini yechish qulaydir.

Harakat qonunlari berilganda ta'sir kuchlarini aniqlash masalasi osongina yechiladi. (27.4) tenglamadan ko'rinib turibdiki, dinamika masalalari statika masalalariga keltirib yechiladi. Dalamber prinsipidan foydalanib masalalar yechilganda nuqtaning tezlanishi yo'nalishini bilish lozim.



27.2-rasm

Agar nuqta to'g'ri chiziqli harakat qilsa, tezlanish yo'nalishi aniqdir. Bunda inersiya kuchi vektori $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ bo'lib, moduli $\Phi = ma$ ga teng. Nuqta to'g'ri chiziqli tekis harakat qilsa, $\vec{\Phi} = 0$ bo'ladi. Agar nuqta egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlanga, inersiya kuchi urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi. Urinma inersiya kuchi

$$\vec{\Phi}_r = -m\vec{a}_r \quad (27.5)$$

bo'lib, urinma tezlanish $\vec{a}_r$ ga qarama-qarshi yo'naladi (27.2-rasm).

Normal inersiya kuchi

$$\vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n \quad (27.6)$$

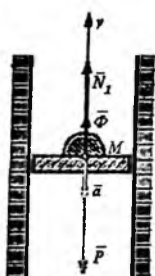
bo'lib, normal tezlanish $\vec{a}_n$ ga qarama-qarshi yo'naladi (27.2-rasm). (27.3) ifodani 27.2-rasmga ko'rsatilganidek, urinma

inersiya kuchi va normal inersiya kuchlarini egri chiziqli trayektoriyaning bosh normal, urinma va binormal o'qlariga proyeksiyalasak:

$$\Phi_x = -ma_x = -m \frac{dv}{dt} = -m\dot{s}, \quad \Phi_s = -ma_s = -m \frac{v^2}{\rho}. \quad (27.7)$$

Xuddi shunday (27.3) ifodani Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalasak:

$$\Phi_x = -ma_x = -m\ddot{x}, \quad \Phi_y = -ma_y = -m\ddot{y}, \quad \Phi_z = -ma_z = -m\ddot{z}. \quad (27.8)$$



27.3-rasm

Aktiv $\vec{F}^{(a)}$ va $\vec{N}$ reaksiya kuchlari ta'sirida harakatlanuvchi M nuqtaning inersiya kuchi nuqtaga qo'yilgan bo'lmay bog'lanishlarga qo'yiladi. Dinamika masalalarini D'alamber prinsipi yordamida yechish usulini nazariy mexanikaning mustaqil *kinetostatika* bo'limi deb ham yuritish mumkin. Ma'nosi shundan iboratki, dinamika masalalarini yechish uchun nuqtaning harakat differensial tenglamalarini tuzishda statika usullaridan foydalaniladi.

27.1-masala. Og'irligi 100 N bo'lgan yuk gorizontald platformada $a = 5\text{ m/s}^2$ tezlanish bilan harakatlanmoqda (27.3-rasm). Quyidagi hollar uchun yukning platformaga ko'rsatadigan bosimi aniqlansin:

1. Tezlanishi vertikal pastga yo'nalgan hol uchun.
2. Tezlanishi vertikal yuqoriga yo'nalgan hol uchun.

Yechish: Yukni M moddiy nuqta deb qarab, platforma a tezlanish bilan vertikal pastga tushganida inersiya kuchi, Φ ni vertikal yuqoriga yo'naltiramiz (27.3-rasm). M moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar quyidagilar: Moduli $\Phi = ma = \frac{P}{g}a$ ga teng bo'lgan va shartli qo'yilgan Φ inersiya kuchi, $\vec{P} = m\vec{g}$ og'irlik kuchi va platformaning $\vec{N}$, reaksiya kuchi.

D'alamber prinsipiga asosan, M moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi $\vec{P}, \vec{N}$, va Φ kuchlar muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil etadi. 2-hol uchun muvozanat tenglamasini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0, \quad N - P + \Phi = 0.$$

Ushbu tenglamadan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$N_1 = P - \Phi = P - \frac{P}{g}a = P\left(1 - \frac{a}{g}\right),$$

$$N_1 = 100 \cdot \left(1 - \frac{5}{9,8}\right) N = 51 N.$$

Demak, $N_1 = 51 N$.

Yukning platformaga ko'rsatadigan bosimi, dinamikaning qonuniga asosan, modul jihatdan platforma tomonidan yukka ta'sir etuvchi reaksiya kuchiga teng bo'lib, yo'nalishi qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Shuning uchun platformaning reaksiya kuchini aniqlash bilan yukning platformaga ko'rsatadigan bosimini aniqlagan bo'lamiz. Yuqoridagi tenglamadan ko'rinish turibdiki, bosim kuchi og'irlik kuchidan inersiya kuchining moduliga teng miqdorda kichik ekan. Agar $a = g$ bo'lsa, yukning platformaga ko'rsatadigan bosimi nolga teng. Agar platforma a tezlanish bilan yuqoriga ko'tarilsa, inersiya kuchi Φ pastga qarab yo'naladi. U holda muvozanat tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$N_1 - P - \Phi = 0,$$

$$N_1 = P + \Phi = P + \frac{P}{g}a = P\left(1 + \frac{a}{g}\right),$$

$$N_1 = 100 \cdot \left(1 + \frac{5}{9,8}\right) N = 151 N.$$

Demak, $N_1 = 151 N$.

Javob: 1-hol uchun $N_1 = 51 N$, 2-hol uchun $N_1 = 151 N$.

Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi

Massalari mos ravishda $m_1, m_2, \dots, m_n$ bo'lgan, n ta nuqtadan iborat mexanik sistemaning har bir nuqtasi uchun Dalamber prinsipini qo'llaymiz. Sistemaning ixtiyoriy M_i nuqtasiga tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\vec{F}_k^{(e)}$ (aktiv va reaksiya kuchlari), ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\vec{F}_k^{(i)}$ ta'sir etsin. Shartli ravishda nuqtaga inersiya kuchi, Φ_i ni qo'yamiz.

$\vec{F}_k^{(e)}$, $\vec{F}_k^{(i)}$ va Φ_i kuchlar o'zaro muvozanatlashadi. Ya'ni:

$$\vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)} + \vec{\Phi}_k = 0. \quad (27.9)$$

(27.9) tenglamani sistemaning hamma nuqtalari uchun qo'llasak:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)} + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0. \quad (27.10)$$

Demak, *erkin bo'lmagan mexanik sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi tashqi va ichki kuchlar qatoriga inersiya kuchlarini qo'shsak, ular har onda o'zaro muvozanatlashadi.*

(27.9) tenglama *mexanik sistema uchun Dalamber prinsipini* ifodalaydi. Ichki kuchlar xossasiga asosan yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)} = 0. \quad (27.11)$$

(27.10) tenglamaga asosan:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k = 0, \quad (27.12)$$

bu yerda $\vec{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}$ – tashqi kuchlarning bosh vektori, $\vec{R}^{(m)} = \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k$

– inersiya kuchlarining bosh vektori.

U holda (27.12) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\vec{R}^{(e)} + \vec{R}^{(m)} = 0. \quad (27.13)$$

Mexanik sistemada biror O nuqtani qutb deb olib, (27.9) tenglamaning ikkala tomonini qutbga nisbatan nuqtaning holatini ifodalovchi radius-vektor, $\vec{r}_k$ ga vektor ko'paytiramiz:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} + \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(e)}) + \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(i)}) + \vec{m}_k (\vec{\Phi}_k) = 0. \quad (27.14)$$

(27.14) ifodani mexanik sistemaning hamma nuqtalari uchun qo'llasak, quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(i)}) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{\Phi}_k) = 0. \quad (27.15)$$

Ichki kuchlar xossasiga asosan:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(i)}) = 0. \quad (27.16)$$

(27.16) ifodaga asosan (27.15) tenglamani yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{\Phi}_k) = 0, \quad (27.17)$$

bu yerda $\vec{M}_*^{(e)} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_* (\vec{F}_k^{(e)})$ – tashqi kuchlarning o qutbga nisbatan bosh momenti, $\vec{M}_*^{(u)} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_* (\vec{\Phi}_k)$ – inersiya kuchlarining o qutbga nisbatan bosh momenti. Demak:

$$\vec{M}_*^{(e)} + \vec{M}_*^{(u)} = 0. \quad (27.18)$$

(27.13) va (27.18) tenglamalar sistemasi harakat miqdorining va kinetik momentining o'zgarishi haqidagi teoremlarga ekvivalent tenglamalardir:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \vec{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}, \\ \frac{d\vec{K}_*}{dt} &= \vec{M}_*^{(e)} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_* (\vec{F}_k^{(e)}). \end{aligned} \quad (27.19)$$

(27.13) va (27.18) tenglamalarni (27.19) bilan taqqoslasak,

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}^{(u)} &= -\frac{d\vec{Q}}{dt} \\ \vec{M}_*^{(u)} &= -\frac{d\vec{K}_*}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (27.20)$$

(27.20) tenglamadan ko'rinib turibdiki, inersiya kuchlarining bosh vektori mexanik sistema harakat miqdoridan, bosh momenti kinetik momentdan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarga teng bo'lib, yo'nalishlari ularga qarama-qarshidir.

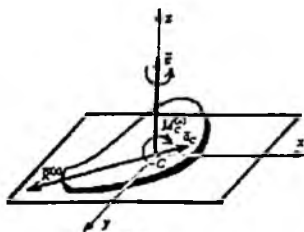
(27.12) va (27.17) tenglamalarni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'siridagi mutlaq qattiq jism muvozanatining zaruriy va yetarlilik shartini ifodalovchi statikaning muvozanat tenglamalariga o'xshash sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_x (\vec{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_x (\vec{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_y (\vec{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_y (\vec{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \Phi_{kz} &= 0, & \sum_{k=1}^n m_z (\vec{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_z (\vec{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (27.21)$$

Agar kuchlar bir tekislikda yotsa, yoki parallel bo'lsa, yohud ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishsa, (27.21) tenglamadagi tenglamalar soni kamayadi. Istalgan o'zgaruvchi mexanik sistemaning harakatini to'liq o'rganish uchun (27.21) tenglama

zarurdir, lekin yetarli emas. Ammo mutlaq qattiq jism uchun (27.21) tenglama yetarli bo'lib, jismning harakatini to'liq aniqlaydi.

Bu usul bilan sistema harakati vaqtida yuzaga keladigan reaksiya kuchlarini aniqlash qulay. Chunki, tenglamalarni tuzishda ichki kuchlar hisobga olinmaydi. Amaliyotda (27.13) (27.18) va (27.21) tenglamalarni qo'llash uchun inersiya kuchlarining bosh vektori, $\vec{R}^{(n)}$ va bosh momenti, $\vec{M}_C^{(n)}$ larni hisoblash sodda formulalari avvaldan aniq bo'lishi lozim.



27.4-rasm

Statika bo'limida kuchlar qanday sodda holga keltirilgan bo'lsa, inersiya kuchlari ham xuddi shunday usulda sodda holga keltiriladi, ya'ni ixtiyoriy tanlab olingan markazga fikran kuchlar parallel ko'chiriladi. Natijada, keltirish markazida kuchlarga teng kuch va tashkil etuvchilari shu kuchlarga teng juftlar hosil bo'ladi. Barcha inersiya kuchlarini va momentlarini qo'shsak, keltirish markazida inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti kelib chiqadi.

Inersiya kuchlarining bosh vektori:

$$\vec{R}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = - \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k, \quad (27.22)$$

bu yerda

$$\vec{a}_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}. \quad (27.23)$$

(27.23) ifodani (27.22) ga olib borib qo'ysak,

$$\vec{R}^{(n)} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (27.24)$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_C.$$

Bizga ma'lum bo'lgan ifodani (27.24) ga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\ddot{\vec{R}}^{(n)} = \frac{d^2}{dt^2} (M\vec{r}_c) = -M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

yoki

$$\ddot{\vec{R}}^{(n)} = -M\ddot{\vec{a}}_c, \quad (27.25)$$

bu yerda M – jism massasi, $\ddot{\vec{a}}_c$ – massalar markazi tezlanishi.

Demak, ixtiyoriy harakatdagi jism inersiya kuchlarining bosh vektori, sistema massasi va massalar markazi tezlanishining ko'paytmasiga teng bo'lib, tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'naladi. Inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblash ancha murakkab. Tekis-parallel harakat qiluvchi qattiq jism uchun inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz.

Keltirish markazi deb simmetriya tekisligida ixtiyoriy O nuqtani olamiz va shu markazga nisbatan inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz:

$$\vec{M}_0^{(n)} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k (\vec{\Phi}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{\Phi}_k = - \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \ddot{\vec{a}}_k. \quad (27.26)$$

bu yerda $\vec{r}_k$ – keltirish markazi O ga nisbatan jism bo'lakchasining radius-vektori, m_k – bo'lakchanning massasi, $\ddot{\vec{a}}_k$ – bo'lakchanning tezlanishi.

Kinematika bo'limidan bizga ma'lumki,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{a}}_k &= \ddot{\vec{a}}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k, \\ \vec{m}_k (\vec{\Phi}_k) &= -\vec{r}_k \times m_k \ddot{\vec{a}}_k = -\vec{r}_k \times (\ddot{\vec{a}}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k - \omega^2 \vec{r}_k) = \\ &= \ddot{\vec{a}}_0 \times m_k \vec{r}_k - \vec{\varepsilon} m_k r_k^2, \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (27.27)$$

Chunki,

$$\vec{r}_k \times \vec{r}_k = 0; \quad \vec{r}_k \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k) = \vec{\varepsilon} r_k^2 - \vec{r}_k \cdot (\vec{r}_k \cdot \vec{\varepsilon}) = \vec{\varepsilon} r_k^2. \quad (27.28)$$

(27.28) o'rinni, chunki $\vec{r}_k \perp \vec{\varepsilon}$ bo'lgani uchun $\vec{r}_k \cdot \vec{\varepsilon} = 0$.

Demak (27.27) tenglamani hisobga olgan holda, (27.26) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\vec{M}_0^{(n)} = \ddot{\vec{a}}_0 \times \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k - \vec{\varepsilon} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (27.29)$$

Massalar markazini va o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblash formulalarini e'tiborga olsak, (27.29) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\vec{M}_0^{(n)} = \vec{r}_c \times M\ddot{\vec{a}}_c - I_c \vec{\varepsilon}, \quad (27.30)$$

bu yerda $\vec{r}_c$ – keltirish markazi O nuqtaga nisbatan massalar

markazining radius-vektori, I – keltirish markazi O nuqtadan o'tuvchi, harakat tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan Ox o'qiga nisbatan inersiya momenti.

Agar keltirish markazi deb massalar markazini olsak, u holda $\vec{r}_c = 0$ bo'ladi va (27.30) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

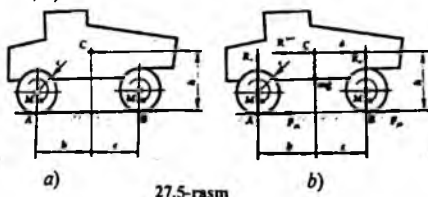
$$\vec{M}_O^{(n)} = -I_z \vec{\epsilon}. \quad (27.31)$$

(27.31) tenglamadagi minus ishorasi moment vektori, $\vec{M}_O^{(n)}$ ning yo'nalishi burchak tezlanish vektori, $\vec{\epsilon}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishini bildiradi.

Xulosa qilib aytganda, inersiya kuchlari sistemasi massalar markaziga qo'yilgan (27.25) tenglamada ifodalangan bosh vektorga va jismning simmetriya tekisligida yotuvchi (27.31) tenglamada ifodalangan juftga keltiriladi (27.4-rasm).

27.2-masala. Samosval mashinaning to'rtta g'ildiraklariga bir xil tormozlovchi M moment qo'yilgan (27.5-rasm, a). Samosval g'ildiraklarining radiusi R , massasi m ga teng bo'lib, massalar markazi C nuqtaga joylashgan. Rasmdagi b, c, h o'lchamlar berilgan. Samosvalning $\vec{a}$ sekinlanishi va juft g'ildiraklarning yerga ko'rsatadigan bosimlari, $\vec{F}_A$ va $\vec{F}_B$ aniqlansin.

Yechish: Samosvalga tormoz berilganda quyidagi tashqi kuchlar ta'sir etadi: $m\vec{g}$ og'irlik kuchi, yerning normal reaksiya kuchlari, $\vec{R}_A$ va $\vec{R}_B$, juft g'ildiraklarning ishqalanish kuchlari, $\vec{F}_A$ va $\vec{F}_B$ (27.5-rasm, b).



27.5-rasm

Mexanik sistema uchun tormozlovchi moment ichki kuch hisoblanadi. Samosval ilgarilanma harakatda bo'lgani uchun inersiya kuchlari massalar markaziga qo'yilgan birgina $\vec{R}^{(n)}$ ga keltiriladi. Uning moduli, $R^{(n)} = ma$ bo'lib, yo'nalishi sekinlanish,

$\bar{a}$ ga qarama-qarshidir. Dalamber prinsipining tenglamasini tekislikda ta'sir etuvchi kuchlar uchun tuzamiz:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{ix}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \Phi_{ix} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{iy}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \Phi_{iy} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A (\bar{F}_k^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_B (\bar{\Phi}_k^{(e)}) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

(1) tenglamani tuzamiz:

$$\begin{aligned}-R^{(n)} + F_{\mu} + F_{\beta} &= 0, \\ -mg + R_A + R_B &= 0, \\ R^{(n)} \cdot h - mg \cdot b + R_B (b+c) &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

(2) tenglamadagi noma'lumlar sonini kamaytirish maqsadida samosvalning juft g'ildiraklari uchun qo'shimcha muvozanat shartlari kiritamiz:

$$F_{\mu} \cdot R - 2M = 0, \quad F_{\beta} \cdot R - 2M = 0. \quad (3)$$

(3) tenglamalarni hadma-had qo'shsak,

$$F_{\mu} + F_{\beta} = 4M / R \quad (4)$$

kelib chiqadi. (4) ni (2) ga qo'yamiz. U holda:

$$\begin{aligned}-ma + 4M / R &= 0, \\ -mg + R_A + R_B &= 0, \\ mah - mg b + R_B (b+c) &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

(5) dan:

$$\begin{aligned}a &= 4M / (mR), \\ R_B &= (mgb - mah) / (b+c) = (mgb - 4Mh / R) / (b+c), \\ R_A &= mg - R_B = (mgc + 4Mh / R) / (b+c).\end{aligned}\quad (6)$$

Dinamikaning ta'sir va aks ta'sir tengligi qonuniga asosan juft g'ildiraklarning yerga ko'rsatadigan bosimi miqdor jihatdan yerning normal reaksiya kuchiga teng bo'lib, yo'nalishi unga qarama-qarshi yo'naladi.

Demak:

$$F_B = (mgb - 4Mh / R) / (b+c), \quad F_A = (mgc + 4Mh / R) / (b+c).$$

Javob: $a = 4M / (mR)$,

$$F_B = (mgb - 4Mh / R) / (b+c), \quad F_A = (mgc + 4Mh / R) / (b+c).$$

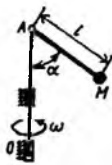
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Massasi $m=0,5\text{kg}$ bo'lgan moddiy nuqta vertikal prujina uchida $x=20+2\sin 15t$ (sm) qonun bo'yicha tebransa, $t=2\text{s}$ da prujinaning zo'rqiishini aniqlang (27.6-rasm).

2-masala. Uzunligi $l=1\text{m}$ bo'lgan sterjen uchidagi M massali moddiy nuqta $\omega=5\text{rad/s}$ burchak tezlik bilan tekis aylanadi (27.7-rasm). Sterjenning massasini hisobga olmay, uning vertikal bilan hosil qilgan burchagini aniqlang.



27.6-rasm



27.7-rasm

Nazorat savollari

1. Aktiv kuchlarni tushuntiring.
2. Inersiya kuchlari deb qanday kuchlarga aytiladi?
3. Moddiy nuqta uchun D'alamber prinsipi qanday ta'riflanadi?
4. Mexanik sistema uchun D'alamber prinsipi qanday ta'riflanadi?
5. Prinsiplarning afzalligi nimadan iborat?
6. Kinetostatika usulini tushuntiring.

28. BOG'LANISHLAR KLASSIFIKATSIYASI. ASOSIY TUSHUNCHALAR

Ma'lumki, qattiq jismning muvozanatini tekshirish uchun umumiy holda oltita muvozanat tenglamalari tuziladi va ularni yechib, noma'lum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Ammo bir qancha jismlardan iborat mexanizmlarni olsak, bunday sistemaning n ta qismlari uchun $6n$ ta tenglamani tuzish lozim. Albatta bu

tenglamalarni yechish noqulaydir. Natijalarni aniq holda topish uchun hamma vaqt ham imkoniyat bo'lavermaydi. Shuning uchun boshqa usul qo'llashga to'g'ri keldi. Bunday masalalarni birinchi marotaba to'la ravishda Lagranj o'zining "Analitik mexanika" asarida hal etgan. Analitik mexanikada mexanik sistemaning harakatini va muvozanatini tekshirish uchun umumiy, yagona usullar keltirib chiqarildi. Bu usullarni mexanik sistemalarga tatbiq etish bilan birga elektromexanik hodisalarga ham tatbiq qilishda samarali foydalanildi.

Bizga ma'lumki, sistema erkin bo'lsa, nuqtalarining ko'chishi ixtiyoriy bo'ladi. Bog'lanishdagi sistema uchun nuqtalarning ko'chishi cheklangan bo'ladi. Bog'lanishdagi mexanik sistema va uning harakat differensial tenglamalari bilan o'tgan mavzularda tanishgan edik. Mavzuning ba'zi jihatlarini bilan quyida tanishib o'tamiz.

Bog'lanishlar klassifikatsiyasi

Moddiy nuqta erkin, yoki bog'lanishsiz deyiladi, agar uning harakati boshlang'ich shartlar va unga qo'yilgan aktiv kuchlar bilan aniqlansa. Aktiv kuchlar reaksiya kuchlaridan tashqari hamma kuchlar bo'lib, boshlang'ich shartlar nuqtaning boshlang'ich holati va boshlang'ich tezligidir.

Ta'rif. Erkin moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema *erkin sistema* deyiladi.

Quyosh sistemasi bunga misol bo'ladi, chunki hamma planetalarning harakati butun olam tortilish kuchi ta'sirida bo'ladi.

Agar moddiy nuqtaning harakatiga boshlang'ich shartlar va aktiv kuchlarga bog'liq bo'lmagan cheklar qo'yilgan bo'lsa, moddiy nuqta *erkin bo'lmagan*, yoki *bog'lanishdagi nuqta* deyiladi.

Ta'rif. Erkin bo'lmagan moddiy nuqtalardan tashkil topgan mexanik sistema erkin bo'lmagan sistema yoki *bog'lanishdagi sistema* deyiladi.

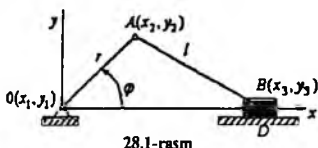
Har qanday ixtiyoriy mexanizm bog'lanishdagi sistemaga misol bo'la oladi.

Boshlang'ich shartlar va unga qo'yilgan aktiv kuchlarga bog'liq bo'lmagan mexanik sistemaning harakatini chegaralovchi sabab *bog'lanish* deyiladi.

Bog'lanishlar tenglama yoki tengsizlik ko'rinishida ifodalanadi va *bog'lanishlar tenglamasi (tengsizligi)* deyiladi. Bu tenglamalar, mexanik sistema nuqtalariga qo'yilgan bog'lanishlarning matematik ifodasi vaqt, sistema nuqtalarining koordinatalari va ularning hosilalariga bog'liq bo'ladi.

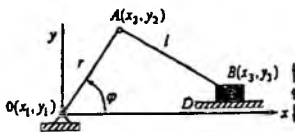
1. Statsionar va statsionar bo'lmagan bog'lanishlar

Vaqt o'tishi bilan o'zgaraydigan bog'lanish *statsionar bog'lanish* deyiladi. Bog'lanish tenglamalari vaqtga aniq bog'liq bo'lmaydi. Misol uchun krivoship-shatun mexanizmining ixtiyoriy holatini O , A va B nuqtalarning holati orqali aniqlanadi (28.1-rasm). Mexanik sistema uchun beshta bog'lanish tenglamasini tuzamiz:



28.1-rasm

$$\left. \begin{aligned} x_1 = y_1 = y_3 &= 0 \\ x_1^2 + y_1^2 - r^2 &= 0 \\ (x_2 - x_3)^2 + y_2^2 - l^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$



28.2-rasm

Bog'lanish tenglamalari, mexanizmining ixtiyoriy harakatida, O nuqtaning qo'zg'almasligini, B nuqtaning Ox o'qi bo'ylab sirpanishini, OA va AB masofalarning o'zgarishini va uchta

nuqtalar koordinatalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. (28.1) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, ular vaqtga bog'liq emas. Demak, bu bog'lanish statsionar bog'lanishdir. Vaqt o'tishi bilan o'zgaradigan bog'lanish *statsionar bo'lmagan (nostatsionar) bog'lanish* deyiladi. Bog'lanish tenglamasi vaqtga aniq bog'liq bo'ladi. Buni 28.2-rasmdagi misolda ko'rishimiz mumkin. Vertikal bo'ylab $y = a \sin kt$ qonuni bo'yicha garmonik tebranma

harakat qiluvchi krivoship-shatun mexanizmining B polzuni stolning ustida sirpanadi (28.2-rasm).

Sistemaning bog'lanish tenglamalari quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1 = 0 \\ y_3 - a \sin kt &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

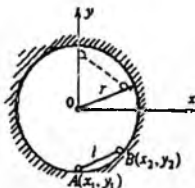
Keltirib chiqarilgan bog'lanish tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u aniq vaqtga bog'liq:

$$y_3 - a \sin kt = 0. \quad (28.3)$$

Demak bu bog'lanish statsionar bo'lmagan bog'lanishdir.

2. Bo'shatmaydigan va bo'shatadigan bog'lanishlar

Ta'rif. Sistema nuqtalarining butun harakati davomida o'z ta'sirini saqlab qoladigan bog'lanishlar *bo'shatmaydigan bog'lanishlar* deyiladi. Vaqt oralig'ida ta'sirini o'zgartiradigan bog'lanishlar *bo'shatadigan bog'lanishlar* deyiladi. Bo'shatmaydigan bog'lanishlar tenglamasi tenglik ishorasi bilan beriladi. Bo'shatadigan bog'lanishlar tengsizlik ishorasi bilan beriladi. A va B nuqtalaridan iborat ixtiyoriy sistema uzunligi l bo'lgan qattiq sterjen bilan mahkamlangan bo'lib, vertikal tekislikda joylashgan aylanada sirpanadi (28.3-rasm).



28.3-rasm

Aniqki, ko'rilayotgan sistema ayrim boshlang'ich shartlar va kuchlarda aylanadan ajramagan holda harakat qiladi. Ayrim hollarda bog'lanishdan ajragan holda tushib ketadi. Ikkala holni birgalikda ko'rib, sistemaning holatini x_1, y_1, x_2, y_2 koordinatalar orqali ifodalasak, quyidagi bog'lanish kelib chiqadi:

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - r^2 &\leq 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 &\leq 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

(28.4) da tengsizlik bilan ifodalangan bog'lanishlar

bo'shatadigan bog'lanishlar. Shuni aytib o'tish kerakki, amaliyotda ko'pincha bo'shatmaydigan bog'lanishlar uchraydi.

3. Golonom va nogolonom bog'lanishlar

Golonom (geometrik) va nogolonom (kinematik) bog'lanishlarni ko'rib chiqamiz. Mexanik sistemaning holatini chegaralovchi bog'lanish *golonom bog'lanish* deyiladi. Golonom bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga faqat sistema nuqtalarining koordinatalari kiradi. Lekin, koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalar kirmaydi. Nogolonom bog'lanishda mexanik sistema nuqtalarining tezliklari cheklanadi. Nogolonom bog'lanishni ifodalovchi tenglamaga sistema nuqtalarining koordinatalari va koordinatalardan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalar kiradi. Nogolonom bog'lanishni ifodalovchi differensial tenglamalarni integrallab bo'lmaydi.

Nazorat savollari

1. Bog'lanishlar klassifikatsiyasini tushuntiring.
2. Erkin va erkin bo'lmagan mexanik sistemalarni tushuntiring.
3. Statsionar va statsionar bo'lmagan bog'lanishlar deb qanday bog'lanishlarga aytiladi?
4. Bo'shatmaydigan va bo'shatadigan bog'lanishlarni tushuntiring.
5. Golonom va nogolonom bog'lanishlar qanday bog'lanishlar?

29. MUMKIN BO'LGAN KO'CHISH PRINSIPI

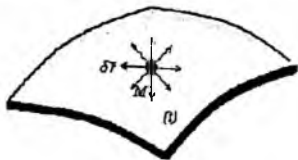
Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari

Agar mexanik sistemaga bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsa, u erkin istalgan yo'nalishda ko'cha olmaydi, chunki bog'lanishlar sistema nuqtalarining faqatgina ayrim yo'nalishlarda ko'chish imkonini berishi mumkin. Erkin bo'lmagan mexanik sistema uchun *mumkin bo'lgan ko'chish* tushunchasi kiritiladi.

Ta'rif. *Mumkin bo'lgan ko'chish* deb, berilgan holatida, bog'lanishlarni o'zgartirmasdan sistema nuqtalarining faraz

qilinadigan cheksiz kichik ko'chishlari tushuniladi.

Shu qatori erkin bo'lmagan moddiy nuqta uchun ham mumkin bo'lgan ko'chish tushunchasini kiritamiz. Nuqta yoki mexanik sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishi tushunchasi sof geometrik tushunchadir. Nuqta yoki mexanik sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishi, nuqta yoki mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'lmay, ularga qo'yilgan bog'lanishlarning xarakteriga bog'liqdir. Mumkin bo'lgan ko'chishda nuqta yoki sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar saqlanadi va geometrik ko'chishga ta'sir etmaydi.



29.1-rasm

M moddiy nuqta bo'shatmaydigan, statsionar, golonomli bog'lanishda qo'zg'almas sirtga joylashgan bo'lib, bog'lanish tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (29.1)$$

(29.1) bog'lanish tenglamasidan ko'rinib turibdiki, M nuqtaning birinchi ikkita koordinatasini ixtiyoriy qiymat qabul qiluvchi erkin o'zgaruvchilar deb olib, uchinchisini bog'lanish tenglamasidan ularning funksiyasi sifatida ko'rish mumkin. Sirtga M nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi biror holatini olamiz (29.1-rasm) va fikran vaqtni to'xtatib, shu vaziyatda nuqtani ham qotiramiz.

Nuqtaning haqiqiy harakatini, unga ta'sir etayotgan kuchlarni va trayektoriyasini e'tiborga olmay, uning shu holatidan qo'yilgan bog'lanishlar ta'sirida qaysi yo'nalishda ko'chishini ko'ramiz. Biz ko'rayotgan misolda bog'lanish sirt bo'lgani uchun nuqta istalgan yo'nalishda sirt bo'ylab ko'chishi mumkin. M nuqtaning sirt bo'ylab ixtiyoriy yo'nalishda cheksiz kichik ko'chishi vektori *mumkin bo'lgan ko'chish vektori* deyiladi. Bu vektor M nuqtada sirtga urinma ravishda ixtiyoriy tomonga yo'naladi. Demak, mumkin bo'lgan ko'chish vektori sirtga urinma tekislikda yotadi. 29.1-rasmda $\delta \vec{r}$ vektor bilan belgilangan bo'lib, bu yerda $\vec{r}$ nuqtaning koordinatalar boshiga nisbatan radius-vektori. M nuqtaning cheksiz kichik ko'chishi bilan haqiqiy ko'chishini farq

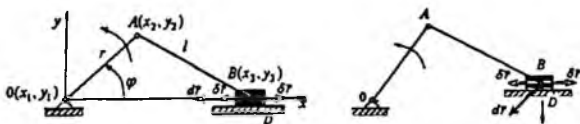
qilish kerak. Haqiqiy ko'chish, $d\vec{r}$ yagona bo'lib, birgina bog'lanishlarga bog'liq bo'lmay, boshlang'ich shartlarga va nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarga ham bog'liqdir. Biz ko'rgan misolda sirt (statsionar bog'lanishda) qo'zg'almas bo'lib, haqiqiy harakat trayektoriyasi sirt ustida yotib, $d\vec{r}$ haqiqiy ko'chish vektori ham sirt ustida yotadi va biror mumkin bo'lgan ko'chish vektori, $\delta\vec{r}$ bilan ustma-ust tushadi.

Agar vaqt o'tishi bilan sirt (statsionar bo'lmagan bog'lanishda) o'zi ham biror qonun bilan harakatlansa, ya'ni bog'lanish (29.2) tenglama bilan ifodalansa, haqiqiy harakat trayektoriyasi sirt ustida yotmaydi:

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (29.2)$$

Haqiqiy ko'chish vektori, $d\vec{r}$ ham sirtga urinma tekislikda yotmaydi. Mumkin bo'lgan ko'chish vektori, $\delta\vec{r}$ esa to'xtatilgan vaqt va to'xtatilgan bog'lanishda aniqlanadi, yo'nalishi o'zgarmaydi, shuning uchun $d\vec{r}$ haqiqiy ko'chish vektori, $\delta\vec{r}$ mumkin bo'lgan ko'chish vektori bilan ustma-ust tushmaydi.

29.2-rasmning a) chizmasida statsionar golonimli bog'lanish keltirilgan bo'lib, haqiqiy ko'chish bilan sistema biror nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi bitta o'q bo'ylab bir tomonga yoki qarama-qarshi tomonga yo'nalgan, b) chizmada statsionar bo'lmagan golonimli bog'lanish bo'lib, haqiqiy ko'chish bilan sistema biror nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi ustma-ust tushmaydi.



29.2-rasm

Agar $d\vec{r}$ haqiqiy ko'chish, harakat qonuni, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ko'rinishdagi funksiyaning differensialidan iborat bo'lsa, mumkin bo'lgan ko'chish, $\delta\vec{r}$ funksiyaning variatsiyasidan iborat.

Ma'lumki:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (29.3)$$

o'rinli. $\delta\vec{r}$ vektor uchun yozamiz:

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}. \quad (29.4)$$

(29.4) tenglamadagi δx , δy , δz lar nuqtaning x, y, z koordinatalarining variatsiyalaridir. Funksiya qanday differensialansa, variatsiyasini ham shunday hisoblanadi. Sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishi nuqtalarning variatsiyalarining analitik ifodalari orqali aniqlanadi.

Mumkin bo'lgan ko'chishda kuchning bajargan ishi haqida tushuncha. Umumlashgan kuch. Ideal bog'lanishlar

Golonom sistemaga ta'sir etuvchi hamma kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishini hisoblaymiz. Sistemaning M_k nuqtasiga ta'sir etuvchi kuch $\vec{F}_k$ bo'lsin. Bu kuchning $\delta\vec{r}_k$ mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishi

$$\delta A_k = \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = F_k \delta s_k \cos(\vec{F}_k, \delta\vec{r}_k), \quad (29.5)$$

bu yerda $\delta\vec{r}_k$ vektorning moduli M_k nuqtaning mumkin bo'lgan ko'chishda chizgan trayektoriyasining δs_k yoyiga teng, ya'ni:

$$|\delta\vec{r}_k| = \delta s_k. \quad (29.6)$$

(29.5) tenglamani proyeksiyalari orqali ifodalasak:

$$\delta A_k = F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k. \quad (29.7)$$

Sistemaning hamma nuqtalari uchun (29.5) va (22.7) tenglamalarni yozib hadma-had qo'shsak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\delta A = \sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = \sum F_k \delta s_k \cos(\vec{F}_k, \delta\vec{r}_k) = \sum F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k. \quad (29.8)$$

Sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishini qisqacha *mumkin ish* deb yuritamiz. Mumkin ishini golonomli sistemaning umumlashgan koordinatalari orqali ifodalaymiz. Sistema n ta nuqtadan tashkil topgan bo'lib, erkinlik darajasi p ga teng. Sistemaning ixtiyoriy M_k nuqtasini (29.6) tenglamaga asosan umumlashgan koordinata orqali ifodalasak, $q_j (j=1, 2, 3, \dots, p)$ ga teng. Radius vektorini ham umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}. \quad (29.9)$$

Natijada sistemaning har bir nuqtasining radius-vektori uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_p), \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (29.10)$$

Bu funksiyani Teylor qatoriga yoyib, sistemaning har bir nuqtasining mumkin bo'lgan ko'chishi, $\delta \vec{r}_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) ni umumlashgan koordinata q_j ($j=1, 2, 3, \dots, p$) larning bir-biriga bog'liq bo'lmagan δq_j ($j=1, 2, 3, \dots, p$) variatsiyalari orqali ifodasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_p} \delta q_p, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (29.11)$$

(29.11) ifodani (29.8) tenglamaga olib borib qo'yib, umumiy ko'paytuvchi, δq_j ($j=1, 2, 3, \dots, p$) ni qavsdan tashqariga chiqarsak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_p} \right) \delta q_p. \quad (29.12)$$

Belgilash kiritamiz:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \left(F_{k1} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{k2} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{k3} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (29.13)$$

U holda (29.12) tenglamadagi mumkin ish, δA quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_p \delta q_p. \quad (29.14)$$

(29.14) tenglama tuzilishidan (29.7) tenglama bilan bir xil.

Demak (29.14) tenglamadagi umumlashgan koordinata variatsiyalari oldidagi koeffitsiyentlar, $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, umumlashgan koordinatalarga mos umumlashgan kuchlar deyiladi.

Sistemaning bitta umumlashgan koordinatasini o'zgartirib, qolgan koordinatalarni o'zgartirmasdan mumkin bo'lgan ko'chish beramiz, ya'ni:

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_p = 0. \quad (29.15)$$

Kuchlarning shu mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan mumkin ishini $\delta A'$ desak:

$$\delta A' = Q_1 \delta q_1 \Rightarrow Q_1 = \frac{\delta A'}{\delta q_1}. \quad (29.16)$$

kelib chiqadi. Bu Q , umumlashgan kuchdir.

Ma'lumki, bog'lanishlar sistemaning ko'chish erkinligini chegaralab, harakatining xarakterini o'zgartiradi. Harakatni to'liq tekshirish uchun bog'lanish reaksiyalarini o'rganib chiqish lozim. Kuchlar aktiv kuchlarga va bog'lanish reaksiya kuchlariga ajraladi. Bog'lanishlar ideal va ideal bo'lmagan bog'lanishlarga ajraladi.

Sistemaning M_i nuqtasiga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning (ichki va tashqi) teng ta'sir etuvchisini $\bar{F}_i$ bilan, bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisini $\bar{R}_i$ bilan, barcha kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\bar{F}_i$ bilan belgilaymiz.

Demak:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i. \quad (29.17)$$

Sistema nuqtalariga ko'chish berib, kuchlarning bajargan elementar ishlarini hisoblaymiz:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k. \quad (29.18)$$

Ta'rif. Har qanday mumkin bo'lgan ko'chishda bog'lanish reaksiya kuchlarining bajargan elementar ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, sistema *ideal bog'lanishda* deyiladi. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0. \quad (29.19)$$

Ideal bog'lanishdagi sistemaga misol qilib, mutlaq qattiq jism nuqtalari, g'adir-budur sirt ustida mutlaq qattiq jismning sirpanmasdan dumalashi, mutlaq silliq tekislik ustidagi sistemaning harakati, sistemaning mahkamlangan nuqtalarini keltirish mumkin.

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi

Mutlaq qattiq jismlar muvozanatining zaruriy va yetarlilik shartlari geometrik statikadan ma'lum. Lekin jismlar sistemasining muvozanatini tekshirishda ularni bo'laklab, har biri uchun muvozanat tenglama tuzishga to'g'ri keladi. Jismlar soni ortgan sari tenglamalar soni ham ortib boradi. Masalani bu usulda yechish murakkablashadi. Analitik statikada mutlaq qattiq jismlarning muvozanati tekshirish mumkin bo'lgan ko'chishlar

prinsipiga asoslanadi. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi istalgan mexanik sistema muvozanatining zaruriy va yetarlilik shartlarini ifodalaydi. Ya'ni, *ideal, bo'shatmaydigan, statsionar bog'lanishdagi mexanik sistema muvozanatda bo'lishi uchun, aktiv kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan elementar ishlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.*

Demak, mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_k = 0, \quad (29.20)$$

bu yerda $\vec{F}_k^{(a)}$ – sistemaning k nuqtasiga qo'yilgan aktiv (tashqi va ichki) kuchlarning teng ta'sir etuvchisi. Birinchi navbatda sistema muvozanatda bo'lsa, (29.20) tenglama o'rinli ekanligini isbot qilamiz. Bu prinsipning zaruriy shartidir. Ideal, bo'shatmaydigan, statsionar bog'lanishdagi mexanik sistema muvozanatda bo'lsin. Bu shuni ko'rsatadiki, sistemaning har bir nuqtasi muvozanatda bo'ladi. Bo'shatish prinsipidan foydalangan holda sistemaning k nuqtasi uchun $\vec{F}_k^{(a)}$ aktiv kuchlar qatoriga $\vec{N}_k$ bog'lanish reaksiya kuchlarini qo'shib, geometrik statikaning muvozanat tenglamasini yozamiz:

$$\vec{F}_k^{(a)} + \vec{N}_k = 0. \quad (29.21)$$

(29.2) tenglamani hadma-had ixtiyoriy mumkin bo'lgan ko'chishga ko'paytirib, sistemaning hamma nuqtalari uchun quyidagicha yozamiz.

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^{(a)} \delta \vec{r}_k + \vec{N}_k \delta \vec{r}_k) = 0. \quad (29.22)$$

Sistema ideal bog'lanishda bo'lgani uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\sum_{k=1}^n \vec{N}_k \delta \vec{r}_k = 0. \quad (29.23)$$

U holda (29.22) tenglamadan (29.20) tenglama kelib chiqadi. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(a)} \delta \vec{r}_k = 0.$$

Prinsipning zaruriy sharti isbot qilindi. Yetarlilik shartini, ya'ni (29.20) tenglama o'rinli bo'lsa, sistema muvozanatda bo'lishini

isbot qilamiz. Faraz qilaylik (29.20) tenglama o'rinli bo'lib, lekin sistemaning birinchi nuqtasi tinch holatdan harakatga kelgan bo'lsin. U holda nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\bar{R}_1 = \bar{F}_1^{(a)} + \bar{N}_1$ ga teng bo'lib, noldan farqlidir. $\bar{R}_1$ kuchi ta'sirida tinch holatdagi birinchi nuqta uning ta'sir chizig'i bo'ylab haqiqiy ko'chish oladi. Biz ko'rayotgan holda bu ko'chish mumkin bo'lgan ko'chish, $\delta \bar{r}_1$ bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun:

$$\bar{R}_1 \cdot \delta \bar{r}_1 = R_1 \cdot |\delta \bar{r}_1| > 0$$

yoki

$$\bar{F}_1^{(a)} \delta \bar{r}_1 + \bar{N}_1 \delta \bar{r}_1 > 0 \quad (29.24)$$

ga teng. Qolgan nuqtalar tinch holatda deb, quyidagi tenglikni yozamiz:

$$\bar{F}_i^{(a)} \delta \bar{r}_i + \bar{N}_i \delta \bar{r}_i = 0, \quad i = (2, 3, \dots, n). \quad (29.25)$$

(29.24) va (29.25) ifodalarni hadma-had qo'shsak:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i^{(a)} \delta \bar{r}_i + \bar{N}_i \delta \bar{r}_i) > 0 \quad (29.26)$$

kelib chiqadi. Demak, (29.25) tenglamaga biror musbat tengsizlikni qo'shsak, tengsizlik kelib chiqadi. (29.26) tengsizlikka, muvozanatdan bitta nuqta emas, bir necha nuqta chiqsa ham, to'g'ri kelimiz. Sistema ideal bog'lanishda bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

bo'ladi. Demak (29.26) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} \delta \bar{r}_i > 0. \quad (29.27)$$

(29.27) tengsizlik bajarilsa, (29.20) tenglama o'rinsiz bo'lib qoladi. Bu bo'lishi mumkin emas. Demak sistemaning birorta ham nuqtasi harakatlanmaydi va prinsipning yetarlilik sharti isbotlanadi.

(29.20) tenglamaning skalyar ifodasini yozamiz:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} \cdot \delta \bar{r}_i \cdot \cos(\bar{F}_i^{(a)}, \delta \bar{r}_i) = 0$$

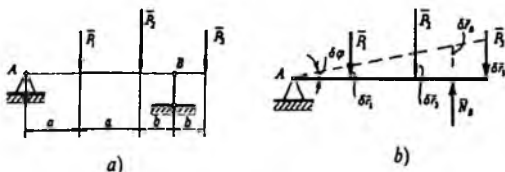
yoki

$$\sum_{i=1}^n (F_x^{(i)} \delta x_i + F_y^{(i)} \delta y_i + F_z^{(i)} \delta z_i) = 0. \quad (29.28)$$

Masalani yechishda (29.28) tenglamaning istalganidan foydalanish mumkin. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini istalgan kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun qo'llash mumkin.

29.1-masala. AB balka A va B tayanchlarga joylashgan bo'lib, unga vertikal $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ kuchlar ta'sir etsin. (29.3-rasm, a). B shamirdagi bog'lanish reaksiya kuchi aniqlansin.

Yechish: Masalani yechish uchun B tayanchni bog'lanishdan ozod qilib, uning ta'sirini $\bar{N}_B$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz (29.3-rasm, b) va bu kuchni aktiv kuchlar qatoriga qo'shamiz.



29.3-rasm

Sistemaning erkinlik darajasi bitta. AB balkani A shamir atrofida $\delta\varphi$ burchakka buramiz. Natijada $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ va $\bar{N}_B$ lar ta'sir etuvchi nuqtalari mos ravishda δr_1 , δr_2 , δr_3 va δr_B mumkin bo'lgan ko'chishlar oladi. Ya'ni

$$\left. \begin{aligned} \delta r_1 &= a\delta\varphi; \delta r_2 = 2a\delta\varphi \\ \delta r_B &= (2a+b)\delta\varphi \\ \delta r_3 &= 2(a+b)\delta\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga asosan yozamiz:

$$-P_1\delta r_1 - P_2\delta r_2 - P_3\delta r_3 + N_B\delta r_B = 0. \quad (2)$$

(1) tenglamani (2) ga qo'ysak, (3) tenglama kelib chiqadi:

$$[-P_1a - 2P_2a - 2P_3(a+b) + N_B(2a+b)]\delta\varphi = 0. \quad (3)$$

(3) tenglamada $\delta\varphi \neq 0$ bo'lgani uchun yozishimiz mumkin:

$$-P_1a - 2P_2a - 2P_3(a+b) + N_B(2a+b) = 0. \quad (4)$$

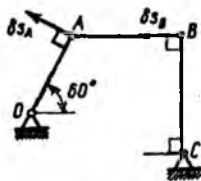
(4) tenglamadan $\bar{N}_B$ reaksiya kuchini aniqlaymiz:

$$N_B = \frac{P_1 a + 2P_2 a + 2P_1 (a+b)}{2a+b}.$$

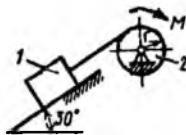
Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. To'rt zvenoli mexanizm AB shatunining A va B nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlari, δS_A va δS_B larning nisbatini aniqlang (29.4-rasm).

2-masala. Og'irligi 200 N bo'lgan 1-yukni bir tekisda yuqoriga tortish uchun radiusi, $r=0,2\text{ m}$ bo'lgan 2-barabanga momenti nechaga teng bo'lgan juft kuch qo'yish lozim? (29.5-rasm).



29.4-rasm



29.5-rasm

Nazorat savollari

1. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishlari qanday aniqlanadi?
2. Mumkin bo'lgan ko'chishda kuchning bajargan ishi qanday aniqlanadi?
3. Umumlashgan kuch qanday aniqlanadi?
4. Ideal bog'lanish shartini tushuntiring.
5. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini tushuntiring.

30. LAGRANJNING II TUR DIFFERENSIAL TENGLAMALARI

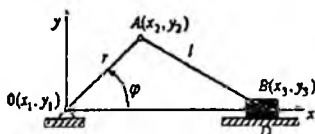
Umumlashgan koordinatalar va mexanik sistemaning erkinlik darajasi

Mexanik sistema $3n$ ta koordinataga ega bo'lgan n ta nuqtadan iborat bo'lib, nuqtalariga s ta gonomli (statsionar, bo'shatmaydigan) bog'lanishlar qo'yilgan bo'lsin:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, s. \quad (30.1)$$

Agar $s=3n$ bo'lsa, u holda

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1 = z_1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 - l^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30.2)$$



30.1-rasm

ko'rinishdagi $3n$ ta tenglamadan mexanik sistemaning $3n$ ta nuqtasining koordinatalari aniqlanadi. Bu koordinatalar doimiy qiymatga ega bo'lgani uchun mexanik sistema harakat-

lanmaydi. Mexanik sistema harakatlanishi uchun $s < 3n$ bo'lishi kerak. Bu holda gonom sistemaning $3n$ ta nuqtalarining hammasi ham bir-biriga bog'liq bo'lmagan nuqtalar bo'lmaydi. Chunki, (30.2) ko'rinishdagi s ta tenglamada s ta koordinatani $3n-s$ koordinatalar orqali ifodalash mumkin. Demak, ko'rilyotgan gonomli mexanik sistemaning biror hisob sistemasiga nisbatan holatini aniqlash uchun $3n$ koordinatalardan $3n-s$ olish kifoya. 30.1-rasmdagi krivoship-shatun mexanizmida O , A , B nuqtalarning oltita koordinatasi bir-biri bilan (30.1) tenglamadagi beshta tenglama bilan bog'langan. Sistemaning aniq holatini aniqlash uchun birgina koordinatasining o'zgaruvchilarini (x_2, y_2 yoki y_1) bilsak yetarlidir, qolganlari hammasi (30.2) tenglamadan topiladi.

Gonom sistemaning holatini aniqlash uchun bog'liqsiz

koordinatalar o'rnida sistemaga tegishli nuqtaning koordinatalarini olish shart emas, istalgan parametrlarni olish mumkin.

Ta'rif. Mexanik sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar golonomli bo'shatmaydigan bo'lsa, sistema nuqtalarining holatini aniqlovchi bog'liqsiz parametrlar soni *sistemaning erkinlik darajasi* deyiladi.

30.1-rasmdagi krivoship-shatun mexanizmida mexanizmnining holatini bir qiymatli aniqlovchi bog'liqsiz koordinatalar, x_1, x_2 yoki y_1 . Lekin bog'liqsiz koordinatalar o'rnida bularni olish shart emas. Mexanizmnining holatini aniqlovchi istalgan parametrlarni olish mumkin. Misol uchun, OA krivoshipning burilish burchagi, φ ni olsak, ko'rilyotgan mexanizm bitta erkinlik darajaga ega bo'ladi.

Ta'rif. Sistemaning holatini bir qiymatli aniqlaydigan, birligiga bog'liq bo'lmagan, sistemaning erkinlik darajasiga teng parametrlar *golonom sistemaning umumlashgan koordinatalari* deyiladi.

Masalan, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat qiluvchi qattiq jism bitta erkinlik darajaga ega bo'lgani uchun uning holati bitta umumlashgan koordinata, ya'ni o'q atrofida aylanish burchagi, φ orqali aniqlanadi. Tekis-parallel harakat qiluvchi qattiq jismning erkinlik darajasi 3 ta qo'zg'almas tekislikka parallel o'tkazilgan ixtiyoriy kesimdagi og'irlik markazining 2 ta koordinatasi, x_c va y_c , kesim yuziga perpendikulyar og'irlik markazidan o'tuvchi o'q atrofida aylanish burchagi, φ . Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat qiluvchi qattiq jism uchta erkinlik darajaga ega bo'lgani uchun uning holati uchta umumlashgan koordinata bilan aniqlanadi, ya'ni φ, ψ, θ .

Golonom, statsionar bog'lanishga ega n ta nuqtadan iborat mexanik sistemaning erkinlik darajasi, p bo'lsin. Golonomli sistemaning umumlashgan koordinatalarini, $q_1, q_2, \dots, q_p$ bilan belgilaymiz. Har bir nuqtaning koordinatalarini umumlashgan koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_p) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_p) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_p) \end{aligned} \right\} \quad (30.3)$$

$(k=1, 2, 3, \dots, n)$

30.1-rasmdagi krivoship-shatun mexanizmining erkinlik darajasi birga teng bo'lib, umumlashgan koordinatasi, $q = \varphi$. Mexanizmning A va B nuqtalari koordinatalarining tenglamasi quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= r \cos \varphi \\ y_2 &= r \sin \varphi \\ x_3 &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

Ko'ramizki, (30.3) $3n$ tenglamadan $q_1, q_2, \dots, q_p$ ga teng p umumlashgan koordinatani ayirsak, $x_k; y_k; z_k (k=1, 2, 3, \dots, n)$ nuqtalarning $3n - p = s$ tenglamasini hosil qilamiz. Bu statsionar golonomli bog'lanish tenglamalari. Golonomli mexanik sistemaning harakat tenglamasi umumlashgan koordinatalar orqali quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_p = q_p(t). \quad (30.5)$$

Umumlashgan koordinatalardan olingan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar quyidagicha:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2} \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.6)$$

(30.6) dagi ifodalar mos ravishda *umumlashgan tezlik* va *umumlashgan tezlanish* deb ataladi.

Umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari

Dinamikaning umumiy tenglamasidan umumlashgan koordinatalarda sistemaning harakat differensial tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Erkinlik darajasi p ga teng bo'lgan ideal, golonom, bo'shatmaydigan bog'lanishli n ta nuqtadan iborat mexanik sistemani qaraylik. Sistemaning holatini inersial koordinata o'qlariga nisbatan $q_j (j=1, 2, \dots, p)$ umumlashgan koordinatalar orqali aniqlab, sistema nuqtalarining koordinata boshiga nisbatan radius-vektorlarini ham umumlashgan koordinatlarning funksiyalari ko'rinishida ifodalaymiz, ya'ni (29.10) formulaga asosan:

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k(q_1, q_2, \dots, q_p), \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (30.7)$$

(29.11) tenglamaga asosan yozamiz:

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (30.8)$$

$\bar{F}_k^{(a)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) aktiv kuchlar ta'siridagi mexanik sistemaga D'alamber va mumkin bo'lgan ko'chish prinsiplarini qo'llab, dinamikaning umumiy tenglamasini yozamiz. Ya'ni:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (30.9)$$

(30.9) tenglamaga (30.8) ni olib kelib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\sum_{j=1}^n \delta q_j \left[\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{\Phi}_k) \right] \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0. \quad (30.10)$$

Agar δq_j oldidagi koeffitsiyentlar alohida-alohida nolga teng bo'lsa, ma'lumki, δq_j ($j=1, 2, \dots, p$) o'zaro erkli bo'lgani uchun (30.10) tenglama o'rinli bo'ladi. Demak:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{\Phi}_k) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.11)$$

(30.11) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.12)$$

Bu yerda $\sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = -Q_j$ ga teng. (28.12) formulaga asosan:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, 3, \dots, p), \quad (30.13)$$

bu yerda Q_j – umumlashgan aktiv kuchlar. (30.13) tenglamaning chap tomonidagi ifoda umumlashgan inersiya kuchlarini ifodalaydi. Ya'ni:

$$Q_j^{(a)} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.14)$$

(30.13) va (30.14) tenglamalarni (30.12) ga qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$Q_j^{(a)} = -Q_j \quad (j=1, 2, 3, \dots, p). \quad (30.15)$$

Tenglamaga ayrim o'zgartirishlar kiritamiz:

$$\bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \ddot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right). \quad (30.16)$$

(j=1,2,3,...,p)

Quyidagi tenglik o'rinli ekanligini isbotlaymiz:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}, \quad (30.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}. \quad (30.18)$$

Ma'lumki:

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_p), \\ \dot{\bar{r}}_k &= \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_p} \dot{q}_p. \end{aligned} \quad (30.19)$$

$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ (j=1,2,...,p) ko'paytuvchi umumlashgan tezlikka bog'liq

bo'lmay, umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lgani uchun (30.19) tenglamadan quyidagicha xulosaga kelish mumkin:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j}.$$

Demak, (30.17) tenglama isbotlandi. $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ (j=1,2,...,p) ifoda

umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lgani uchun quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_i = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i. \quad (30.20)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\ddot{\bar{r}}_k = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \ddot{q}_i. \quad (30.21)$$

Demak,

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^p \frac{d}{dq_j} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i. \quad (30.22)$$

(30.20) va (30.21) tenglamalarning o'ng tomonlarini tengligini e'tiborga olsak, (30.18) ifodaning to'g'riligi kelib chiqadi. (30.16) tenglamaga qaytib, (30.17) va (30.18) larni qo'ysak:

$$\bar{a}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - \dot{\bar{r}}_k \cdot \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_j}$$

yoki

$$\ddot{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\dot{r}_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\dot{r}_k^2}{2} \right). \quad (30.23)$$

Bu yerda $\ddot{r}_k = \ddot{v}_k$ (30.23) tenglamani (30.14) ga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$Q_j^{(m)} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} \right), \quad j=1, 2, \dots, p$$

Bu yerda $T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}$ sistema kinetik energiyasi bo'lgani uchun tenglama quyidagi ko'rinishni oladi. Ya'ni:

$$Q_j^{(m)} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.24)$$

(30.24) ifodani (30.15) tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, p). \quad (30.25)$$

(30.25) tenglama umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari yoki Lagranjning II tur differensial tenglamalari deyiladi.

Sistema nuqtalariga ta'sir etayotgan kuchlar potentsialli kuchlardan iborat, ya'ni $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ bo'lsa, (30.25) dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (30.26)$$

hosil bo'ladi.

$$L = T + U = T - \Pi \quad \text{-- Lagranj funksiyasini kiritsak,} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

bo'lgani uchun (30.26) dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad (30.27)$$

kelib chiqadi.

(30.26), (30.27) tenglamalar potentsialli kuchlar ta'siridagi mexanik sistema uchun Lagranjning II tur differensial tenglamalarini ifodalaydi.

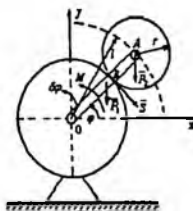
Tenglamaning afzalligi shundan iboratki, *birinchidan* gonom mexanik sistema qanday harakat qilmasin, dinamika masalalarini

yechish uchun yagona sodda usuldir, *ikkinchidan* (30.26) da keltirilgan tenglamalar soni sistema nuqtalarining soniga bog'liq bo'lmay, sistemaning erkinlik darajasiga bog'liqdir, *uchinchidan*, sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar umumlashgan kuchlar ko'rinishida berilgan bo'lib, ularga faqat aktiv kuchlar kiradi. Ideal sistema uchun bog'lanish reaksiya kuchlari ishtirok etmaydi. Sistemaga ishqalanish kuchi ta'sir etganda ham ulami aktiv kuchlar qatoriga qo'shib, Lagranjning II tur differensial tenglamalaridan foydalanib masalalarni yechish mumkin.

Lagranjning II tur tenglamasini tatbiq etib hal qilinadigan masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Berilgan sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi.
2. Umumlashgan koordinatalar tanlab olinadi.
3. Sistemaning kinetik energiyasi hisoblanadi va u umumlashgan tezliklar orqali ifodalanadi.
4. Umumlashgan kuch aniqlanadi.
5. Lagranjning II tur tenglamalari tuziladi.
6. Tuzilgan tenglamadan kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

30.1-masala. Episiklik mexanizm vertikal tekislikda joylashgan bo'lib, OA krivoshipning og'irligi P_1 ga teng bo'lib, unga o'zgarmas aylantiruvchi M moment qo'yilgan (30.2-rasm). Krivoshipning burchak tezlanishi ϵ va g'ildiraklarning urinish nuqtasidagi S zo'riqish aniqlansin. G'ildiraklar o'qlari orasidagi masofa l ga, qo'zg'aluvchi g'ildirakning radiusi r ga, og'irligi P_2 ga teng. Krivoship bir jinsli sterjen, qo'zg'aluvchi g'ildirak bir jinsli disk deb qaralsin.



30.2-rasm

Yechish: Episiklik mexanizm holati OA krivoshipning burilish burchagi, φ ga bog'liq bo'lib, sistemaning erkinlik darajasi birga teng. Burilish burchagi, φ ni umumlashgan koordinata deb qabul qilamiz. Demak, $q_1 = \varphi$. U holda krivoshipning burchak tezligi,

$$\dot{q}_1 = \dot{\varphi} = \omega$$

bo'ladi.

Topishimiz kerak bo'lgan burchak tezlanish

$$\varepsilon = \ddot{q}_1 = \ddot{\varphi}$$

bo'ladi.

Erkinlik darajasi birga teng bo'lgani uchun bitta Lagranjning II tur tenglamasi tuziladi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad (1)$$

Sistema kinetik energiyasini hisoblaymiz:

$$T = T_1 + T_2, \quad (2)$$

bu yerda T_1 – krivoshipning kinetik energiyasi, T_2 – qo'zg'aluvchi g'ildirakning kinetik energiyasi. Krivoship (30.2-rasm) aylanma harakat va qo'zg'aluvchi g'ildirak tekis-parallel harakat qilgani uchun ularning kinetik energiyalari quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_o \omega^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} J_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1^2, \quad (3)$$

bu yerda J_o – krivoshipning O aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti; J_A – qo'zg'aluvchi g'ildirakning A aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti; ω_1 – qo'zg'aluvchi g'ildirakning A aylanish o'qiga nisbatan burchak tezligi; v_A – qo'zg'aluvchi g'ildirakning A markazining tezligi.

Krivoship bir jinsli sterjen, qo'zg'aluvchi g'ildirak esa bir jinsli disk bo'lgani uchun inersiya momentlari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$J_o = \frac{1}{3} P l^2; \quad J_A = \frac{1}{2} P_1 r^2. \quad (4)$$

Tezliklarni umumlashgan tezliklar, ya'ni $\dot{\varphi} = \omega$ orqali ifodalaymiz. Qo'zg'aluvchi g'ildirak qo'zg'almas g'ildirak ustida sirpanmasdan dumalagani uchun B nuqta tezliklar oniy markazidir. Demak,

$$v_A = l\omega = r\omega_1 \quad (5)$$

$$v_A = l\dot{\varphi}, \quad \omega_1 = \frac{v_A}{r} = \frac{l}{r} \dot{\varphi}.$$

(5) va (4) ifodalarni (3) tenglamaga, so'ngra (2) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$T = \frac{I^2}{12g} (2P_1 + 9P_1) \dot{\varphi}^2. \quad (6)$$

(6) tenglamadan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{l^2}{6g} (2P_1 + 9P_2) \bar{\varphi}. \quad (7)$$

Umumlashgan kuch, Q_1 ni hisoblaymiz. Buning uchun OA krivoshipga soat miliga teskari yo'nalishda $\delta\varphi$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. Sistemaga $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ kuchlar va momenti M ga teng juft kuch ta'sir etadi. $\bar{P}_1$ – krivoshipning og'irligi, $\bar{P}_2$ – qo'zg'aluvchi g'ildirakning og'irligi. Shuning uchun $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ kuchlarning va momenti M ga teng juft kuchning $\delta\varphi$ mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishlari

$$\delta A = M \delta\varphi - P_1 \frac{1}{2} \cos\varphi \delta\varphi - P_2 l \cos\varphi \delta\varphi$$

yoki elementar ishni yana quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 = Q_1 \delta\varphi,$$

$$Q_1 \delta\varphi = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos\varphi] \delta\varphi \quad (8)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos\varphi]$$

(7) va (8) qiymatlarni (1) tenglamaga olib borib qo'ysak,

$$\frac{l^2}{6g} (2P_1 + 9P_2) \bar{\varphi} = \frac{1}{2} [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos\varphi]. \quad (9)$$

(9) tenglamadan krivoshipning burchak tezlanishi, ε ni aniqlaymiz:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3g [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos\varphi]}{l^2 (2P_1 + 9P_2)}. \quad (10)$$

G'ildiraklarning urinish nuqtasidagi $\bar{S}$ zo'riqishni aniqlaymiz. Shu zo'riqish hisobiga qo'zg'aluvchi g'ildirak krivoshipga nisbatan aylanma harakat qiladi. Qo'zg'aluvchi g'ildirakning A aylanish o'qiga nisbatan nisbiy harakati uchun kinetik momentning o'zgarishi haqidagi teoremdan foydalanib, $\bar{S}$ ni aniqlaymiz:

$$J_A \varepsilon_1 = m_A (\bar{S}) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r^2 \varepsilon_1 = S r. \quad (11)$$

Qo'zg'aluvchi g'ildirakning burchak tezlanishi, ε_1 va krivoshipning burchak tezlanishi, $\varepsilon = \ddot{\omega} = \ddot{\varphi}$ orasidagi bog'lanishni

e'tiborga olgan holda quyidagi tenglamani yozamiz:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r} \ddot{\phi}. \quad (12)$$

(10) va (12) ifodani (11) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$S = \frac{1}{2} \frac{P_1 l}{g} \ddot{\phi} = \frac{3}{2} \frac{P_2 [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi]}{l(2P_1 + 9P_2)}. \quad (13)$$

Javob:

Krivoshpning

burchak

tezlanishi:

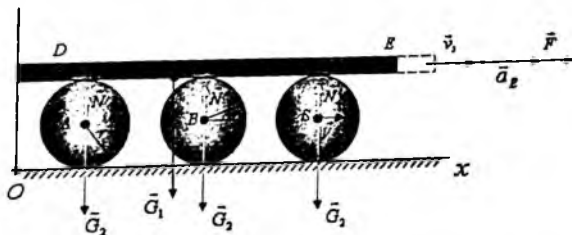
$$\varepsilon = \frac{3g[2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi]}{l^2(2P_1 + 9P_2)}.$$

G'ildiraklarning urinish nuqtasidagi zo'riqish:

$$s = \frac{3}{2} \frac{P_2 [2M - (P_1 + 2P_2) l \cos \varphi]}{l(2P_1 + 9P_2)}.$$

30.2-masala. m_1 massali DE sterjen har birining massasi m_2 bo'lgan uchta g'altak ustida yotadi. Sterjenning o'ng tomoniga gorizontaal ravishda yo'nalgan kuch qo'yilgan (30.3-rasm). U sterjen va g'altaklarni harakatga keltiradi. DE sterjenning tezlanishi aniqlansin. G'altaklar bir jinsli doiraviy silindr deb hisoblansin. Sterjen bilan g'altaklar, shuningdek, g'altaklar bilan gizontal tekislik orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin.

Yechish: Tekshirilayotgan sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar ideal. Sistemaning holati DE sterjen E nuqtasining koordinatasi, x_E umumlashgan koordinata orqali bir qiymatli aniqlanadi. Demak, sistemaning erkinlik darajasi birga teng.



30.3-rasm

DE sterjen tezlanishini aniqlash uchun Lagranjning II tur tenglamasini tuzish kerak. Buning uchun avval sistema kinetik energiyasini hisoblaymiz. Sistema kinetik energiyasi sterjen va g'altaklar kinetik energiyalarining yig'indisiga teng:

$$T = T_{\text{de}} + T_{\text{g'ol}} \quad (1)$$

G'altaklar tekis-parallel harakatda. Shuning uchun ularning kinetik energiyasi:

$$T_{\text{g'ol}} = 3 \left(\frac{1}{2} m_1 v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2 \right) \text{ yoki } T_{\text{g'ol}} = 3 \left(\frac{1}{2} m_1 v_s^2 + \frac{1}{4} m_1 r^2 \omega^2 \right). \quad (3)$$

G'ildiraklarning tekislik bilan urinish nuqtalari tezliklar oniy markazi bo'lgani uchun

$$v_s = \omega r, \quad v_E = \omega \cdot 2r. \quad (4)$$

(4) dan:

$$v_s = \frac{1}{2} v_E. \quad (5)$$

(4) ifodani (3) ga qo'yib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$T_{\text{g'ol}} = 3 \left(\frac{1}{8} m_1 v_E^2 + \frac{1}{16} m_2 v_E^2 \right) = \frac{9}{16} m_2 v_E^2.$$

(2) va (6) ni (1) ifodaga qo'yamiz:

$$T = \frac{v_E^2}{16} (9m_1 + 8m_2) = \frac{8m_1 + 9m_2}{16} \dot{x}_E^2.$$

Endi sistemaga x_E umumlashgan koordinata bo'yicha δx_E mumkin bo'lgan ko'chish berib, umumlashgan kuchni aniqlaymiz. Sistemaga qo'yilgan kuchlarning mumkin bo'lgan ko'chishdagi ishlarining yig'indisini hisoblaymiz:

$$\delta A = F \delta x_E.$$

Umumlashgan kuchni aniqlash formulasi, $Q_{x_E} = \frac{\delta A}{\delta x_E}$ ga ko'ra:

$$Q_{x_E} = F.$$

Sistemaning erkinlik darajasi birga teng bo'lgani sababli, Lagranjning II tur tenglamasi bitta bo'ladi. Ya'ni (7) ifodadan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_E} = Q_{x_E}. \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_E} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} = \frac{8m_1 + 9m_2}{8} \dot{x}_E, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} \right) = \frac{a_E}{8} (8m_1 + 9m_2). \quad (10)$$

(8) va (10) ni (9) ga qo'yamiz:

$$\frac{a_E}{8} (8m_1 + 9m_2) = F.$$

Bu ifodadan DE sterjenning tezlanishi, a_E kelib chiqadi:

$$a_E = \frac{8F}{8m_1 + 9m_2} \quad (m/s^2).$$

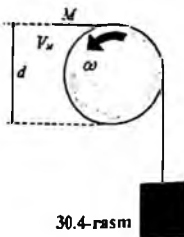
Javob: DE sterjening tezlanishi: $a_E = \frac{8F}{8m_1 + 9m_2} \quad (m/s^2).$

Mustaqil yechish uchun masalalar

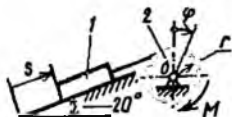
1-masala. Diametri $d_1 = 0,8m$ bo'lgan baraban $\varphi_1 = 3 + \frac{1}{4}t^4$ qonunga ko'ra aylanib, yukni ko'taradi (30.4-rasm). $t = 1s$ bo'lganda baraban M nuqtasining tezligini aniqlang.

2-masala. Mexanik sistema massasi $m = 15kg$ bo'lgan 1-jism va aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti $J_0 = 3 kg \cdot m^2$ ga teng

2-silindrdan iborat (30.5-rasm). Agar silindrning radiusi $r = 0,15m$ bo'lib, $M = 16Nm$ momentli juft kuch ta'sirida aylansa va sistemaning kinetik energiyasi $T = 30 J$ bo'lsa, 1-jismning a_1 tezlanishini aniqlang.



30.4-rasm



30.5-rasm

Nazorat savollari

1. Umumlashgan koordinatalar qanday belgilanadi?
2. Mexanik sistemaning erkinlik darajasi nimani ifodalaydi?
3. Umumlashgan kuchlar, umumlashgan tezlik va umumlashgan tezlanish deb nimaga aytiladi?
4. Umumlashgan koordinatalarda mexanik sistemaning harakat differensial tenglamalari qanday ko'rinishda yoziladi?
5. Lagranjning II tur differensial tenglamalarini ifodalab bering.
6. Potensialli kuchlar ta'siridagi sistema uchun Lagranjning II tur differensial tenglamalari qanday ifodalanadi?
7. Lagranjning II tur differensial tenglamalarining afzalligi nimalardan iborat?

GLOSSARIY

ATAMA VA UNING MA'NOSI	ТЕРМИН И ЕГО ЗНАЧЕНИЯ	TERM AND ITS MEANING
Statika – moddiy jismlarning muvozonati, ularga qo'yilgan kuchlarni qo'shish, ayirish va kuchlarni ta'sir jihatidan teng bo'lgan ekvivalent kuchlar sistemasiga almashtirish masalalari ko'riladi	Статика – раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел	Statics – section of theoretical mechanics, which sets forth the general theory of forces and studies the conditions for the equilibrium of material bodies
Mexanik harakat – jismlarning boshqa jismlarga nisbatan harakati	Механическое движение – изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела	Mechanical movement – the change in the course of time of the mutual position in the space of material bodies or the mutual position Parts of a given body
Mexanika – jismlarning mexanik harakati va o'zaro mexanik ta'siri to'g'risidagi ilmiy ta'limot	Механика – наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел	Mechanics – the science of mechanical motion and the mechanical interaction of material bodies
Absolyut qattiq jism – har qanday ta'sirda ham ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmasdan qoladigan jism	Абсолютно твердое тело – материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остаются неизменным	The rigid body – a material body in which the distance between any two points is always the same
Kuch – jismlarning bir-birlariga ko'rsatgan o'zaro ta'sirlarining miqdoriy o'lchovi	Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного	Force – a vector quantity that is a measure of the mechanical action

	материального тела на другое	of one material body on another
Bog'lanishlar – jismlarning fazoda yoki tekislikdagi harakatiga qo'yilgan to'siqlar (cheklar)	Связи – тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела	Relationship – bodies that limit the movement of the body in question
Bog'lanishlar reaksiyasi – jism harakatiga qo'yilgan to'siqlar (bog'lanishlar)ning jismga ta'sir kuchi (momenti)	Реакция связей – сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении	Reaction of the relationship – the strength with which the connection acts on the body, preventing it from moving in one direction or another
Erkin qattiq jism – harakatlanishiga hech qanday to'siq bo'lmagan jism	Свободное твердое тело – твердое тело, на перемещения которого не наложено никаких ограничений	Free rigid body – a solid body whose movements are not subject to any restrictions
Deformatsiya – kuchlar ta'sirida jismlarning shakli, o'lchami va hajmining o'zgarishi	Деформация – изменение взаимного расположения точек твердого тела, при котором меняется расстояние между ними, в результате внешних воздействий	Deformation – the change in the relative position of the points of a rigid body, at which the distance between them changes, as a result of external influences
Kuchning ta'sir chizig'i – kuch yo'nalgan to'g'ri chiziq	Линия действия силы – прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу	Line of the action of power – direct, along which the vector representing force
Kuchlar sistemasi – mexanik sistema (jism)ga ta'sir etuvchi kuchlar	Система сил – любая совокупность сил, действующих на	System of power – any set of forces acting on a

to'plami	механическую систему	mechanical system
Kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi – jismga ta'sir etadigan kuchlar sistemasining jismga ta'sirini almashtira oladigan yagona kuch	Равнодействующая системы сил – сила, эквивалентная данной системе сил	Resultant system of power – force equivalent to this system of forces
Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi – jismga ta'sir etganda jismning muvozanati o'zgaraydigan kuchlar sistemasi	Уравновешенная система сил – система сил, которая, будучи приложенной к свободному твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния	Balanced system of power – a system of forces that, when applied to a free solid body at rest, does not lead it out of this state
Ekvivalent kuchlar sistemasi – jismga ta'siri bir xil bo'lgan turli kuchlar sistemasi	Эквивалентная система сил – системы сил, одинаково действующие на тело	Equivalent system of power – force systems that act on the body equally
Kesishuvchi kuchlar sistemasi – ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan kuchlar sistemasi	Система сходящихся сил – система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке	System reconverging – a system of forces whose lines of action intersect at one point
Og'irlik markazi – jismni tashkil etgan nuqtalar og'irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisi (jismning og'irligi) qo'yilgan nuqta	Центр тяжести – неизменно связанная с твёрдым телом точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, действующих на частицы этого тела при любом положении тела в пространстве	Center of gravity – invariably connected with the solid body point through which the resultant of the forces of gravity acting on the particles of this body at any position of the body in space

Juft kuch – o'zaro parallel, yo'nalishi qarama-qarshi, modul jihatdan teng bo'lgan va bir to'g'ri chiziqda yotmagan ikki kuchdan iborat bo'lgan sistema	Пара сил – две равные по величине и противоположные по направлению параллельные силы, приложенные к одному телу	Pair of power – two equal in magnitude and opposite in the direction of parallel forces, applied to one body
Juft kuch yelkasi – juft kuchlarning ta'sir chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa	Плечо пары сил – расстояние между линиями действия сил пары	Shoulder pair(vapour)s power – the distance between the lines of action of the forces of the pair
Ishqalanish kuchi – ishqalanuvchi sirtlarning notekisligi va sirtlar chetlaridagi molekullarning o'zaro ta'siri tufayli vujudga keladigan, harakatga teskari yo'nalgan kuch	Сила трения – Сила сопротивления при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы	Power of friction – the force of resistance in the relative displacement of one body over the surface of another under the influence of an external force
Ishqalanish koeffitsiyenti – ishqalanuvchi yuzalarning materialiga va yuzalarining holatiga bog'liq bo'lgan koeffitsiyent	Коэффициент трения – коэффициент трения, количественная характеристика силы, необходимой для скольжения или движения одного материала по поверхности другого	Factor of friction – coefficient of friction, a quantitative characteristic of the force necessary to slip or move one material over the surface of another
Ishqalanish burchagi – tangensi ishqalanish koeffitsiyentiga teng bo'lgan kattalik	Угол трения – угол, образующийся при отклонении сил реакции двух тел от общей нормали к их поверхности контакта из	Angle of friction – the angle formed when the reaction forces of two bodies deviate from the common

	за наличия сил трения	normal to their contact surface due to the presence of frictional forces
Trayektoriya – jism yoki nuqtaning fazoda (tekislikda) harakatlanishi natijasida qoldirgan izi	Траектория – линия, которую описывает точка при своем движении	Path – the line that the point describes in its motion
Nuqtaning tezligi – nuqtaning harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila	Скорость точки – кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиуса вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчета	Velocity of the point – the kinematic measure of the motion of a point, equal to the time derivative of the radius of the vector of this point in the considered reference frame
Nuqtaning tezlanishi – nuqta tezligining vaqt bo'yicha o'zgarishini xarakterlovchi kattalik	Ускорение точки – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчета	Speedup of the point – the measure of the change in the velocity of a point, equal to the time derivative of the velocity of this point in the reference frame
Ilgarilanma harakat – jismdan olingan ixtiyoriy kesma, jismning harakati davomida o'zining oldingi holatiga nisbatan parallel holda ko'chadigan harakat	Поступательное движение – движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной самой себе	Translational motion – movement of the body, in which the straight line connecting any two points of this body moves, remaining parallel to itself
Aylanma harakat –	Вращательное движение	Rotational

jismning harakati davomida jismga tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning (yoki jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi) qo'zg'almasdan qolishi(o'q, atrofidagi aylanma harakat)	– движение твердого тела, при котором две его точки остаются всё время неподвижными	motion – the motion of a rigid body, in which two of its points remain immovable all the time
Burilish burchagi – jismga biriktirilgan qo'zg'aluvchan tekislik bilan jism harakati o'rganilayotgan qo'zg'almas tekislik orasidagi burchak	Угол поворота – угол между двумя последовательными положениями полуплоскости, неизменно связанной с телом и проходящей через его ось вращения	Angle of rotation – the angle between two successive positions of the half-plane, invariably connected with the body and passing through its axis of rotation
Burchak tezlik – oniy aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan, elementar burilish burchagining, ushbu burilish uchun ketgan elementar vaqtga nisbati bilan aniqlanuvchi aylanma harakatning kinematik o'lchovi	Угловая скорость – величина, характеризующая быстроту вращения твердого тела	Angular velocity – a quantity characterizing the speed of rotation of a rigid body
Burchak tezlanish – aylanma harakat burchak tezligidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli yoki aylanma harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila	Угловое ускорение – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости твердого тела	Angular acceleration – a quantity characterizing the rate of change in the angular velocity of a solid body
Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi harakati – tekshirilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan	Движение твердого тела вокруг неподвижной точки – движение тела, при котором одна из его точек остается все время	Rigid body motion around a fixed point – the motion of a body in which one of its

qattiq jismning aylanma harakati davomida uning bitta nuqtasining qo'zg'almasdan qolishi	неподвижной в рассматриваемой системе отсчета	points remains immovable all the time in the reference system under consideration
Oniy aylanish o'qi – qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan jismning shu nuqta atrofida bir holatdan unga cheksiz yaqin bo'lgan holatga o'tadigan to'g'ri chiziq	Мгновенная ось вращения – прямая, поворотом вокруг которой тело, имеющее неподвижную точку, перемещается из данного положения в положение, бесконечно близкое к данному	The instantaneous axis of rotation – a straight line by turning around which a body having a fixed point moves from a given position to a position infinitely close to a given one
Tekis-parallel harakat – jism harakati davomida uning hamma nuqtalarining berilgan qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan tekislikda harakatlanishi (ko'chishi)	Плоскопараллельное движение – движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости	Plane-parallel movement – the motion of a rigid body, in which all its points move parallel to some fixed plane
Tezliklar oniy markazi – tekis-parallel harakatdagi jismning berilgan vaqt momentida(onda) tezligi nolga teng bo'lgan nuqtasi	Мгновенный центр скоростей – точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю	Instant Center speeds – the point of a plane figure whose velocity at a given time is zero
Tezlanishlar oniy markazi – tekis shaklning berilgan vaqt momentida (onda) tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasi	Мгновенный центр ускорений – точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю	Instant acceleration Center – the point of a plane figure whose acceleration at a given time is zero
Murakkab harakat – nuqta(jism)ning bir	Сложное движение – движение точки или тела,	Compound motion – the

vaqtning o'zida bir nechta harakatlarda ishtirok etishi	исследуемое одновременно в основной и подвижной (подвижных) системах отсчёта	motion of a point or a body, investigated simultaneously in the main and mobile (moving) frames of reference
Absolyut harakat – nuqta(jism)ning asosiy sanoq (qo'zg'almas) sistemasiga nisbatan harakati	Абсолютное движение – движение точки(тела) по отношению к неподвижной системе отсчета	Absolute motion – movement of a point (body) with respect to a fixed frame of reference
Nisbiy harakat – nuqta(yoki jism) ning qo'zg'aluvchan sanoq sistemasiga nisbatan harakati	Относительное движение – движение точки (или тела) по отношению к подвижной системе отсчёта	Relative motion – the motion of a point (or body) with respect to a moving frame of reference
Absolyut tezlik – absolyut harakatdagi tezlik	Абсолютная скорость – скорость точки по отношению к неподвижной системе отсчета	Ground speed – speed of a point with respect
Nisbiy tezlik – nisbiy harakatdagi tezlik	Относительная скорость – скорость точки по отношению к подвижной системе отсчета	Relative speed – speed of a point with respect to a moving reference frame
Ko'chirma tezlik – ko'chirma harakatdagi tezlik	Переносная скорость – скорость той, неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка	Portable speed – the speed of the one that is invariably connected with the moving frame of reference of the point of space with which at a given time the moving point

Absolyut tezlanish – absolyut harakatdagi tezlanish	Абсолютное ускорение – ускорение точки по отношению к неподвижной системе отсчета	The absolute acceleration – acceleration of a point with respect
Eyler burchaklari – jismga birlashtirilgan qo'zg'aluvchan koordinatalar sistemasining qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyati (holati)ni aniqlovchi bir- biriga bog'liq bo'lmagan erkin o'zgaruvchi burchaklar	Углы Эйлера – углы, описывающие поворот абсолютно твердого тела в трёхмерном евклидовом пространстве	Euler angles – angles describing the rotation of an absolutely rigid body in a three- dimensional Euclidean space
Nisbiy tezlanish – nisbiy harakatdagi tezlanish	Относительное ускорение – ускорение точки по отношению к подвижной системе отсчета	The relative acceleration – acceleration of a point with respect to a moving reference system
Ko'chirma tezlanish – ko'chirma harakatdagi tezlanish	Переносное ускорение – ускорение той, неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка	Portable acceleration – acceleration of the one that is invariably connected with the moving frame of reference of the point of space with which at a given moment of time the moving point coincides with the moving point
Koriolis tezlanishi – murakkab harakatda ko'chirma harakat	Кориолисовое ускорение – при сложном движении точки —	Coriolis acceleration – with a complex

ilgarilama harakatdan iborat bo'lgan holda mavjud bo'lgan tezlanish. Ko'chirma harakat burchak tezlik vektorini nisbiy harakat chiziqli tezlik vektoriga ko'paytmasining ikkilanganiga teng bo'lgan vektor kattalik	составляющая ее абсолютного ускорения, равная удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки	motion of a point, the component of its absolute acceleration is equal to twice the vector product of the angular velocity of the mobile motion by the relative velocity of the point
Dinamika – moddiy jismlarning harakatini shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlar bilan birgalikda o'rganadigan bo'lim	Динамика – раздел механики, в котором изучается движение тел под действием приложенных к ним сил	Dynamics – section of mechanics, in which the motion of bodies is studied under the action of forces applied to them
Massa – 1. Jismdagi modda miqdori; 2. Jismlarning inertlik va gravitatsion xususiyatlarini belgilovchi asosiy kattalik	Масса – одна из основных физических характеристик материи, являющаяся мерой её инерционных и гравитационных свойств	Weight – one of the basic physical characteristics of matter, which is a measure of its inertial and gravitational properties
Ko'chish – trayektoriyani boshlang'ich va oxirgi nuqtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq	Перемещение – вектор, соединяющий положения движущейся точки в начале и в конце некоторого промежутка времени	Displacement – a vector connecting the positions of the moving point at the beginning and at the end of a certain time interval
Erkin harakat – jismning fazoda istalgan tomonga harakatlana olishi yoki jism harakatiga hech qanday	Свободное движение – перемещение тела в пространстве, не ограниченное другими телами	Free movement – moving body in space, not limited to other bodies

to'siq (chek)ning yo'qligi		
Tebbranma harakat – muvozanat tomon yo'nalgan kuchlar ta'siridagi jism (nuqta)ning harakati	Колебательное движение – механические колебания – это движения, которые повторяются через определенные промежутки времени. Если промежутки времени одинаковые, то такие колебания называются периодическими	Vibration motion – mechanical vibrations are movements that repeat at regular intervals. If the time intervals are the same, then such oscillations are called periodic
Tebbranma harakat tenglamasi – jism(nuqta)ning tebranma harakatini ifodalovchi tenglama	Уравнение колебательного движения – функция, выражающая зависимость координаты точки от времени	The equation of oscillatory motion – function expressing the dependence of the coordinate of a point on time
Garmonik yoki erkin tebranma harakat – harakat qonuni $X = A \cos kt + B \sin kt$, ko'rinishda bo'lgan harakat	Гармонические или свободное колебания – периодические изменения физической величины, происходящие по закону синуса $X = A \cos kt + B \sin kt$,	Float – periodic changes in physical quantity, occurring according to the law of the sine $X = A \cos kt + B \sin kt$,
So'nuvchi tebranma harakat – muhitning qarshiligi tufayli vaqt o'tishi bilan so'nadigan tebranma harakat	Затухающее колебательное движение – колебательное движение, амплитуда которого уменьшается со временем	Damped oscillatory motion – vibrational motion, the amplitude of which decreases with time
Majburiy tebranma harakat – doimiy ta'sir etib turuvchi kuch (kuchlar) ta'siridagi tebranma harakat	Вынужденное колебательное движение – колебательное движение, вызванное действием	Forced oscillation motion – vibrational motion caused by the

	вынуждающей силы	action of a driving force
Uyg'otuvchi (majburlovchi) kuch – jism(nuqta)ning majburiy tebranma harakatini vujudga keltiruvchi kuch	Вынуждающая сила – переменная во времени и не зависящая от состояния механической системы сила, вызывающая колебания этой системы	Driving force – variable in time and the force that does not depend on the state of the mechanical system, which causes the oscillations of this system
Tebranish amplitudasi – tebranayotgan jismning muvozanat vaziyatidan eng chetga chiqish masofasi	Амплитуда колебаний – наибольшее отклонение (от среднего) значения величины, совершающей гармонические колебания	Amplitude of oscillation – the greatest deviation (from the average) value of a quantity that performs harmonic oscillations
Tebranish chastotasi – bir sekunddagi tebranishlar soni	Частота колебаний – число полных колебаний за единицу времени	Oscillation frequency – number of total oscillations per unit time
Doiraviy(siklik) chastota – 2π sekund vaqt ichidagi nuqtaning to'la tebranishlari soni	Круговая (циклическая) частота – число полных колебаний за 2π секунд	Circular frequency – number of complete oscillations in 2π seconds
Rezonsans hodisasi – majburiy tebranma harakat chastotasi bilan erkin (xususiy) tebranma harakat chastotasi o'zaro mos (teng) kelib tebranma harakat amplitudasining keskin ortib ketishi	Явление резонанса – явление резкого возрастания амплитуды колебаний	The phenomena of rezonance – the phenomenon of a sharp increase in the amplitude of the oscillations
Tebranish davri – bir	Период колебаний –	The period of

to'la tebranish uchun ketgan vaqt	время одного полного колебания	oscillation – the time of one complete swing
Tebranish fazasi – garmonik tebranma harakat tenglamasidagi sin yoki cos larning argumenti bo'lgan $(\omega t + \varphi_0)$ ifoda. Eslatma: Bu yerda φ_0 boshlang'ich faza deyiladi	Фаза колебаний – периодически изменяющийся аргумент функции, описывающей колебательный процесс $(\omega t + \varphi_0)$ здесь φ_0 начальная фаза	The phase of the oscillation – periodically changing argument of the function describing the oscillatory process $\lgan (\omega t + \varphi_0)$, φ_0 – initial phase
Mexanik sistema massasi – sistemani hosil qiluvchi nuqtalar massalarining yig'indisi	Масса механической системы – сумма масс материальных точек, образующих систему	Weight of the mechanical sustem – the sum of the masses of the material points forming the system
Inersiya momenti – mexanik sistema yoki qattiq jismning nuqta yoki biror o'q atrofidagi aylanma harakatida massalar taqsimotini xarakterlovchi kattalik	Момент инерции – величина, характеризующая распределение масс в теле и являющаяся наряду с массой мерой инертности тела при непоступательном движении	Moment of inertia – a quantity that characterizes the distribution of masses in the body and is, along with the mass, a measure of the inertia of the body in an uneventful movement
Moddiy nuqtaning harakat miqdori – nuqta massasini uning tezligiga ko'paytmasi orqali aniqlanuvchi vektor kattalik	Количество движения материальной точки – мера механического движения, равная для материальной точки произведению её массы на скорость	The amount of movement of a material point – the measure of mechanical motion, equal for the material point to the product of its mass by the

		speed
Mexanik sistemaning harakat miqdori – sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig'indisidan tashkil topgan vektor kattalik	Количество движения механической системы – геометрическая сумма количеств движения точек системы	The amount of movement of the mechanical system – the geometric sum of the number of motions of the points of the system
Kuch impulsu – moddiy nuqta yoki mexanik sistemaga vaqt birligi ichida ta'sir etuvchi kuch	Импульс силы – мера действия силы в определённый промежуток времени	Impulse force – measure the action of force in a certain period of time
Massalar markazi – massalar markazining geometrik o'rni	Центр масс – (центр инерции) тела (системы материальных точек), точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе	The center of mass – (the center of inertia) of the body (a system of material points), a point whose position characterizes the distribution of masses in the body or mechanical system
Kuchning ishi – kuchning o'z ta'siridan ko'chishiga ko'paytmasi	Работа силы – мера действия силы, зависящая от численной величины и направления силы F и от перемещения s точки ее приложения	Work force – a measure of the action of the force, depending on the numerical magnitude and direction of the force F and on the displacement s of its application point
Quvvat – vaqt birligi ichida bajarilgan ish	Мощность – механическая величина,	Power – a mechanical

	определяющая количество работы в единицу времени	quantity that determines the amount of work per unit of time
Moddiy nuqta kinetik energiyasi – nuqta massasini tezlik kvadrati ko'paymasining yarmi	Кинетическая энергия материальной точки – скалярная мера механического движения, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат её скорости	The kinetic energy of a point – scalar measure of mechanical motion, equal to half the product of the mass of the material point per square of its velocity
Sistemaning kinetik energiyasi – sistema nuqtalari kinetik energiyalarining yig'indisi	Кинетическая энергия системы – величина, равная сумме кинетических энергий всех точек механической системы	The kinetic energy of the system – the value equal to the sum of the kinetic energies of all points of the mechanical system
Mexanik bog'lanishlar – tekshirilayotgan mexanik sistemaning holatiga yoki harakatiga qo'yilgan cheklanishlar	Механические связи – ограничения, налагаемые на положение или движение механической системы	Mechanical connection – restrictions imposed on the position or motion of the mechanical system
Tashqi kuchlar – mexanik sistemaga boshqa sistemalar (tashqi) tomonidan ko'rsatiladigan ta'sir kuchlari	Внешние силы – внешними называется силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы	External forces – external forces are called forces acting on points of the system from the side of points or bodies that are not part of this system
Ichki kuchlar – sistema nuqtalarining o'zaro ta'sir	Внутренние силы – внутренними называются	Internal forces – internal forces are

kuchlari	силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы	called forces acting on points of the system from the side of other points or bodies of the same system
Mexanik sistemaning muvozanati – tekshirilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan sistemaning barcha nuqtalarining kuchlar ta'sirida tinch holatda bo'lishi	Равновесие механической системы – состояние механической системы, при котором все ее точки под действием приложенных сил остаются в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчета	The equilibrium of a mechanical sustem – the state of the mechanical system, in which all its points under the action of the applied forces remain at rest in relation to the reference frame in question.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Hibbeler R.C. Engineering mechanics statics & dynamics. Twelfth edition. © 2016 by. Published by Pearson Prentice Hall.
2. Szolga V.I. Theoretical mechanics. Berlin, part-1, 2013. – 204 p.
3. Szolga V.I. Theoretical mechanics. Berlin, part-2, 2013. – 261 p.
4. Meriam J.L., Kraige L.G. Engineering Mechanics. Dynamics. 2012. – 260 p.
5. Ferdinand P., Beer E., Johnston R., David Jr., Mazurek F. Vector mechanics for engineers. Statics and Dynamics, California Polytechnic State University-San Luis Obispo, 2011. – 271 p.
6. Ёрозбоев М.Т. Назарий механика. Дарслик. – Т.: «Ёқитувчи», 1979. – 510 б.
7. Рашидов Т.Р., Шоziётлов Ш., Мўминов К.В. Назарий механика асослари. Дарслик. – Т.: «Ёқитувчи», 1990. – 412 б.
8. Rashidov T.R., Shoziyotov Sh., Mo'minov Q., Jumayev N. Nazariy mexanika. Darslik. – Т.: “VNESHINVESTPROM”, 2020. – 584 b.
9. Шоҳайдарова П., Шоziётлов Ш., Зоиров Ж. Назарий механика. Ёқув қўлланма. – Т.: «Ёқитувчи», 1992. – 407 б.
10. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 352 с.
11. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебное пособие для ВТУЗов. 20-е изд. – М.: 2010. – 416 с.
12. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Физматлит, 1960. – 487 с.
13. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами, (Бутенин Н.В., Лурье А.И., Меркин Д.Р. тахрири остида). Ёқув қўлланма. – Т.: «Ёқитувчи», 1989. – 468 б.
14. Яблонский А.А. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами, (тўлдирилган ва қайта ишланган 4-нашридан таржима). Ёқув қўлланма. – Т.: «Ёқитувчи», 2002. – 416 б.
15. Кеpe O.E. va boshqalar. Nazariy mexanikadan qisqa masalalar to'plami. – Т.: Yangi asr avlodi. Toshkent, 2008. – 314 б.

16. Мирсаидов М.М. ва бошқалар. Назарий механиканинг қисқа курси. Ўқув қўлланма. – Т.: «Ўзбекистон», 2008. – 200 б.

17. Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., G'iyasova N.T. Nazariy mexanika. O'quv qo'llanma. – Т.: “ILM ZIYO”, 2009. – 224 b.

18. Mirsaidov M.M., Sobirjonov T.M. “Nazariy mexanika” (Matematik dasturlashtirish asoslari bilan). O'quv qo'llanma. Farg'ona: “Classic”, 2020. – 288 b.

19. Mirsaidov M.M., Mavlonov T.M., Xudaynazarov Sh.O., Donayev B.D. “Nazariy mexanika. Statika”. – Т.: Zamin nashr, 2021. – 270 b.

20. Каримов К.А., Умурзаков А.Х. Теория и конструкции фрикционных механизмов с управляемым трением // Монография. – Т.: ПТУ, 2014. - 147 с.

21. Каримов К.А., Каримов Р.И., Ахмедов А.Х. Развитие теоретических основ механизмов с управляемыми параметрами и связями. Монография. – Т.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2016. - 326 с.

22. Каримов К.А., Хабибуллаева Х.Н. “Харакат дифференциал тенгламаларини интеграллаш”. Ўқув қўлланма. – Т.: ТДТУ, 2010. – 176 б.

23. Каримов К.А., Хабибуллаева Х.Н. “Тебранма ҳаракатлар”. Ўқув қўлланма. – Т.: ТДТУ 2012. – 216 б.

ELEKTRON RESURLAR

1. www.gov.uz – O'zbekiston Respublikasi hukumat portali
2. www.lex.uz – O'zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma'lumotlari milliy bazasi
3. www.ilm.uz
4. www.zivonet.uz
5. www.bmstu.ru
6. www.books.google.ru
7. www.natlib.uz
8. www.eqworld.ipmnet.ru
9. www.ruscommech.ru
10. www.lib.ru

MUNDARIJA

Kirish.....	3
-------------	---

I. STATIKA

1. Statikaning asosiy tushunchalari va aksiomalari	29
2. Bog'lanish va bog'lanish reaksiyalari	35
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasi. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanati	41
4. Nuqtaga va o'qqa nisbatan kuch momenti. Juft kuch. Juft momenti	56
5. Ishqalanish	72
6. Fazodagi kuchlar sistemasi. Fazodagi kuchlar sistemasining nuqtaga va o'qqa nisbatan momenti.....	79
7. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari	89
8. Og'irlik markazi.....	99

II. KINEMATIKA

9. Nuqta kinematikasi. Harakat qonunining berilish usullari. Harakat qonunining berilishiga qarab tezlik va tezlanishlarni aniqlash.....	107
10. Qattiq jismning sodda harakatlari. Qattiq jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatlari	127
11. Qattiq jismning tekis-parallel harakati	138
12. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakati (sferik harakat).....	151
13. Nuqtaning murakkab harakati. Koriolis tezlanishi	162

III. DINAMIKA

14. Dinamikaga kirish. Dinamikaning asosiy tushunchalari ...	177
15. Moddiy nuqta dinamikasi. Moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi	186
16. Moddiy nuqtaning nisbiy harakat dinamikasi.....	207
Tebbranma harakatlar	216
17. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakati.....	216
18. Muhit qarshilik kuchi ta'sirida moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati.....	226
19. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati	235
20. Muhitning qarshilik kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati	240
Mexanik sistema dinamikasi.....	246
21. Mexanik sistemaga kirish. Mexanik sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar klassifikatsiyasi	246
22. Moddiy nuqta va mexanik sistema uchun dinamikaning umumiy teoremlari.....	258
23. Mexanik sistema massalar markazining harakati haqidagi teorema	270
24. Moddiy nuqta harakat miqdori momenti va sistemaning kinetik momenti.....	273
25. Ish va quvvat.....	281
26. Kinetik energiya.....	291
27. Moddiy nuqta va mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi	299
28. Bog'lanishlar klassifikatsiyasi. Asosiy tushunchalar.....	309
29. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi	313
30. Lagranjning II tur differensial tenglamalari	323
Glossariy.....	335
Foydalanilgan adabiyotlar.....	353

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
----------------	---

I. СТАТИКА

1. Основные понятия и аксиомы статики	29
2. Связи и их реакции	35
3. Система сходящихся сил. Проекция силы на ось и на плоскость. Равновесие системы сходящихся сил	41
4. Моменты силы относительно точки и оси. Теория пар сил. Моменты пары сил	56
5. Трение (сцепление и трение скольжения).....	72
6. Системы пространственных сил. Моменты пространственных силы относительно точки и оси	79
7. Уравнение равновесия пространственной произвольной системы сил.....	89
8. Центр тяжести	99

II. КИНЕМАТИКА

9. Кинематика точки. Способы задания движения точки. Определение скорости и ускорений точки.....	107
10. Простейшие движения твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.....	127
11. Плоско-параллельное движение твердого тела	138
12. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение).....	15
13. Сложное движение точки. Ускорение Кориолиса	162

III. ДИНАМИКА

14. Введение в динамику. Основные понятия динамики.....	177
15. Динамика материальной точки. Две основные задачи динамики материальной точки.....	186
16. Динамика относительного движения материальной точки	207
17. Прямолинейное колебательное движение материальной точки	216
18. Свободные колебания материальной точки под действием силы сопротивления среды.....	226
19. Вынужденные колебания материальной точки	235
20. Вынужденные колебания материальной точки под действием силы сопротивления среды.....	240
21. Динамика механических систем. Классификация действующих сил на механическую систему.....	246
22. Общая теорема динамики для материальной точки и механических систем	258
23. Теорема о движении центра масс механической системы.....	270
24. Момент количества движения материальной точки и кинетический момент системы	273
25. Работа силы. Мощность.....	281
26. Кинетическая энергия.....	291
27. Принцип Даламбера для точки и системы	299
28. Классификация связей. Основные понятия	309
29. Принцип возможных перемещений	313
30. Уравнения Лагранжа второго рода.....	323
Глоссарий.....	335
Литература.....	353

O'quv nashr

**KARIMOV KAMOLXON ABBOSOVICH,
AXMEDOV AZAMAT XAITOVICH,
KARIMOVA ANORGUL RUZIMOVNA**

NAZARIY MEXANIKA

**Muharrir: X. Tahirov
Texnik muharrir: T. Raxmatullayev
Musahhih: N. Ismatova
Sahifalovchi: A. Muhammad**



ISBN 978-9943-7445-4-7

