

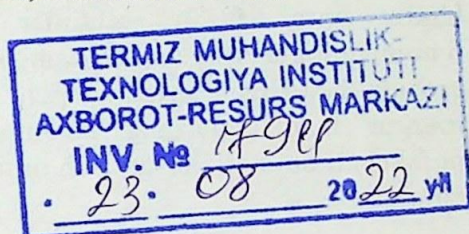
A. B. Begmatov, M. I. Ruzmatov

**KO'P FAZALI
MUHITLAR MEXANIKASI
ASOSLARI**

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

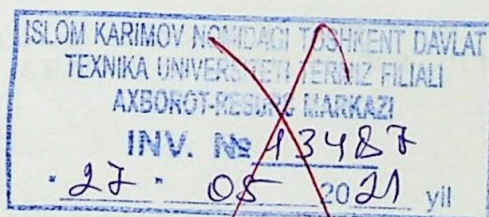
MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI

Handwritten signature
Begmatov A. B., Ruzmatov M. I.



KO'P FAZALI MUHITLAR MEXANIKASI
ASOSLARI

O'quv qo'llanma



Toshkent - "NIF MSH" - 2020

UDK: 531
BBK: 22.314
B 38

Begmatov A. B., Ruzmatov M. I.

Ko'p fazali muhitlar mexanikasi asoslari/o'quv qo'llanma/.Toshkent:
"NIF MSH", 2020, 76 bet.

Ushbu qo'llanma «5A140303 – suyuqlik va gaz mexanikasi» mutaxassisligi bo'yicha magistr bosqichi o'quv rejasining mutaxassislik fanlari blokida qayd etilgan ko'p fazali muhitlar mexanikasi asoslari fanining boshlang'ich qismiga bag'ishlangan. Unda ko'p fazali muhitlar uchun saqlanish tenglamalari fenomenologik yondoshuv hamda fazoviy o'rtachalashtirish usullari asosida keltirilgan. Monodispers to'qnashuvsiz aralashmalar uchun mazkur tenglamalarning ko'rinishi berilgan va misol tariqasida pufakchali suyuqliklar aralashmasida kichik sinusoidal qo'zg'olishlar qaralgan.

Taqrizchilar:

Ko'jayev I. K.

– texnika fanlari doktori, katta ilmiy hodim

Zakirov A.X.

– fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI TOMONIDAN NASHRGA TAVSIYA ETILGAN.**

ISBN 978-9943-6791-5-3

© Begmatov A. B., Ruzmatov M. I. 2020.

© "NIF MSH", 2020.

KIRISH

Suyuqlik va gazning turli xil aralashmalarini, odatda, ikki toifaga ajratiladi: gomogen va geterogen aralashmalar. Tashkil etuvchilari molekulalar darajasida aralashib ketgan muhitlarni *gomogen* aralashmalar deb ataladi. Makroskopik (molekulyar masshtablarga nisbatan) qo'shiluvchilar bor bo'lgan aralashmalar *geterogen, bir jinsli bo'lmagan yoki Ko'p fazali aralashmalar* deb ataladi. Aerozollar, suspenziyalar, emulsiyalar, gaz pufakchali suyuqliklar, suyuqlik va gaz bilan to'yingan gruntlar va h. geterogen muhitga misol bo'ladi. Kolloid aralashmalar (kolloidlar) va mitsellyar eritmalar gomogen va geterogen aralashmalarga nisbatan oraliq holatni egallaydi.

Geterogen aralashmalardan biri dispers aralashma deb ataluvchi ikki fazali muhit Ko'proq O'rganilgan.

Dispers aralashmalarning quyidagi turlari qoraladi:

- suspenziyalar suyuqlikning qattiq zarrachalar bilan aralashmasi;
- emulsiyalar-suyuqlikning boshqa suyuqlik tomchilari bilan aralashmasi;
- gazning qattiq zarrachalar yoki suyuqlik tomchilari bilan aralashmasi (gazning suyuqlik tomchilari bilan aralashmasini aerozol deb ataladi);
- pufakchali muhitlar-suyuqlikning gaz yoki bug' pufakchalari bilan aralashmasi.

Ko'pincha har qanday dispers aralashmani suspenziya deb ataladi.

Dispers aralashmadagi qo'shiluvchilar tomchi, pufakcha va qattiq zarrachalarni dispers zarrachalar yoki dispers faza deb ataladi. Mazkur dispers fazani O'rab olgan tashuvchi (asosiy) fazani dispersiyali (dispersion) faza deb ataladi.

Asosiy farazlar.

1. Aralashmadagi qo'shiluvchilar kattaligi (dispers zarrachalar, pufakchalar, tomchilarning diametri, kovakli muhitlardagi g'ovaklar diametri va h.) molekulyar kinetik

(molekulalar orasidagi masofa, molekulalarning O'rtacha erkin ko'chish masofasi va h.) O'lchovlarga qaraganda Ko'p marta katta. Demak qo'shiluvchilardan molekulalar katta miqdorda mavjud.

2. Birinchi farazda zikr qilingan qo'shiluvchilarning kattaligi aralashmaning O'rtacha yoki makroskopik parametrlari sezilarli darajada O'zgarishi mumkin bo'lgan masofalarga qaraganda Ko'p marta kichik.

Birinchi faraz qo'shiluvchilar masshtabida, ya'ni alohida qo'shiluvchi ichidagi yoki uning atrofidagi jarayonlarni O'rganish uchun tutash muhit mexanikasining klassik tushuncha va tenglamalaridan foydalanish imkonini beradi.

Ikkinchi faraz esa mazkur tushunchalar va tenglamalardan geterogen aralashmadagi makroskopik jarayonlarni O'rganishda foydalanish imkonini beradi.

Ushbu qo'llanmada Ko'p fazali muhitlar mexanikasi tenglamalari yuqorida qayd etilgan farazlar O'rinli deb, fenomenologik yondashuv va O'rtachalashtirish usuli asosida olinadi. Qo'llanmada indeksli belgilash ishlatiladi. Vektor va tenzor miqdorlarning tashkil etuvchilari yuqori indekslar yordamida belgilanadi. Ushbu indekslarning qaytarilishi yig'indi amalini bildiradi. Muayyan harf ustidagi «-» yoki «->» belgilar vektor miqdorlarni anglatadi. Quyi indekslar bilan muhit fazalarining nomeri belgilangan. Mazkur belgilashlardan mustasno hollar matnda alohida izohlanadi.

I BOB. KO'P TEZLIKLI KONTINIUMNING FENOMENOLOGIK NAZARIYASI

1.1. Fenomenologik saqlanish tenglamalari

Ko'p tezlikli kontinium N ta kontiniumning majmuidan iborat bo'ladi. Ushbu kontiniumlarning har biri O'z tashkil etuvchisiga (faza yoki komponentasiga) tegishli bo'lib, aralashma egallagan butun hajmni to'ldiradi. Mazkur hajmning har bir nuqtasida har bir kontinium uchun odatdagi usul bilan zichlik (keltirilgan) ρ_i (i -nchi tashkil etuvchining qaralayotgan aralashmaning bir birlik hajmidagi massasi), tezlik $\vec{v}_i$ ($i=1,2,\dots,n$) va boshqa parametrlar aniqlanadi. Shunday qilib aralashma egallagan hajmning har bir nuqtasida N ta zichlik ρ_i , N ta tezlik $\vec{v}_i$ va h aniqlanadi.

Mazkur miqdorlar yordamida aralashmani xarakterlovchi parametrlar, ya'ni aralashma zichligi ρ va aralashmaning O'rtacha massaviy (barisentrik) tezligi $\vec{v}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i, \rho \vec{v} = \sum_{i=1}^N \rho_i \vec{v}_i \quad (1.1.1)$$

Ayrim hollarda tashkil etuvchilarning aralashma yoki butun muhitning massa markaziga nisbatan olingan tezliklari -diffuziya tezliklari $\vec{w}_i$ qaraladi

$$\vec{w}_i = \vec{v}_i - \vec{v}, \sum_{i=1}^N \rho_i \vec{w}_i = 0 \quad (1.1.2)$$

Ko'p tezlikli tutash muhit mexanikasida i -nchi tashkil etuvchi va umuman muhit bilan bog'langan individual (substansional) hosilalardan foydalaniladi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \\ \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Bu yerda va bundan keyin ham qaytariluvchi yuqori indekslar bo'yicha yig'indi hisoblanadi:

$$v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^3 v_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Tashkil etuvchilar uchun saqlanish tenglamalari.

Aralashmalar mexanikasi massaning, impulsning va energiyaning saqlanish qonunlari asosida quriladi. Shu sababli aralashmaning S sirt bilan chegaralangan, fazoda fiksirlangan biror V hajmda har bir tashkil etuvchining massasi, impulsi va energiyasi uchun balans munosabatlar yoziladi. Bunda ajratilgan hajm bilan aralashmaning qolgan qismi va V hajmdagi tashkil etuvchilarning o'zaro massa, impuls hamda energiya almashishi (o'zaro ta'siri) hisobga olinadi.

1. Massaning saqlanish tenglamalari. Fazoda fiksirlangan biror V hajmdagi i -nchi fazaning t ondagi massasi $\int_V \rho_i dV$ ni M_i deb, $t + \Delta t$ ondagi massasini $M_{i+\Delta t}$ ko'rinishda belgilasak, i -nchi fazaning bir birlik vaqt davomidagi o'zgarishi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_{i+\Delta t} - M_i}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV$ tenglik bilan aniqlanadi. Mazkur o'zgarish i -nchi fazaning V hajmning sirti S orqali o'tishi va fazaviy O'tishlar hisobiga yuz beradi. Bu ushbu

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i v_i^n dS + \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^N J_{ji} dV \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.1.4)$$

tenglik bilan ifodalanadi. Bu yerda J_{ji} — bir birlik hajmda, bir birlik vaqt davomida j -nchi tashkil etuvchidan i -nchi tashkil etuvchiga o'tgan ($j \rightarrow i$) massa intensivligi ($i \rightarrow j$, agar $J_{ij} < 0$ bo'lsa). Ushbu bobda $\bar{n}$ qaralayotgan S sirtga tashqi birlik normal vektor. Agar $J_{ii} = 0$ deb belgilash kiritsak, turli fizik-kimyoviy o'tishlardagi massaning saqlanish qonuni

$$J_{ii} = -J_{ji} \quad (1.1.5)$$

ko'rinishda yoziladi.

Ushbu

$$\int_S \bar{A} \cdot \bar{n} dS = \int_V (\nabla^k A_k) dV \equiv \int_V \text{div}(\bar{A}) dV \quad (1.1.6)$$

Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalanib, (1.1.4) dan quyidagi uzluksiz harakat sodir bo'ladigan sohaning har bir nuqtasida o'rinli bo'lgan uzluksizlik (massa) differensial tenglamalarini olamiz:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho_i \bar{v}_i = \sum_{j=1}^N J_{ji} \quad (i=1,2,\dots,N). \quad (1.1.7)$$

Agar (1.1.7) da i bo'yicha yig'indi olsak va (1.1.1), (1.1.2) formulalardan foydalansak, butun aralashma uchun uzluksizlik tenglamasi kelib chiqadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (1.1.8)$$

2. Har bir tashkil etuvchining impulsar tenglamasini (1.1.4) ga o'xshab

$$\int_V \frac{\partial(\rho_i \bar{v}_i)}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i \bar{v}_i v_i^n dS + \int_S \bar{\sigma}_i^n dS + \int_V \rho_i \bar{g}_i dV + \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{P}_{ji} dV \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1.9)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\bar{\sigma}_i^n$ -normali $\bar{n}$ bo'lgan yuzachada (i -nchi fazada yotuvchi) aniqlangan kuchlanish vektori [Sedov L.I.]. Tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi i -nchi tashkil etuvchining S sirti orqali o'tayotgan impulsiga, ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilar σ_i^{kl} tenzori va $\bar{g}_i$ vektori bilan xarakterlanuvchi tashqi sirt va massaviy kuchlarga mos keladi; $\bar{P}_{ij}$ — i -nchi va j -nchi tashkil etuvchilar orasidagi impuls almashish intensivligi. Turli o'zaro almashishlar uchun (1.1.5) ga o'xshash saqlanish qonuni

$$\bar{P}_{ji} = -\bar{P}_{ij}, P_{ii} = 0 \quad (1.1.10)$$

o'rinli bo'ladi.

Impuslarning differensial tenglamasi Gauss-Ostrogradskiy formulasi (1.1.6) yordamida (1.1.9) integral munosabatlardan olinadi:

$$\frac{\partial(\rho_i \bar{v}_i)}{\partial t} + \nabla^k \rho_i \bar{v}_i v_i^k = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \sum_{j=1}^N \bar{P}_{ji} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1.1.11)$$

Bu yerda kuchlanish vektori uchun o'rinli bo'lgan $\bar{\sigma}_i^n = \bar{\sigma}_i^k n^k$ asosiy munosabatdan [3] foydalanilgan.

Bu tenglamalarni (1.1.3) va (1.1.7) yordamida

$$\rho_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \sum_{j=1}^N (\bar{P}_{ji} - J_{ji} \bar{v}_i), (i=1,2,\dots,N) \quad (1.1.12)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Butun aralashma uchun sirt kuchlari tenzori σ^{kl} va massaviy kuchlar vektori $\bar{g}$ quyidagicha kiritiladi

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i, \rho \bar{g} = \sum_{i=1}^N \rho_i \bar{g}_i \quad (1.1.13)$$

Endi (1.1.2) va (1.1.13) larni e'tiborga olib, (1.1.11) da i bo'yicha yig'indi amalini bajarilsa, butun aralashma uchun impuls tenglamasi olinadi:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}^k + \rho \bar{g} - \sum_{i=1}^N \nabla^k (\rho_i w_i^k \bar{w}_i) \quad (1.1.14)$$

3. Aralashmaning solishtirma ichki energiyasi E (aralashmaning bir birlik massasiga mos keluvchi) sifatida, odatda, ichki u va kinetik energiya K larning yig'indisi qabul qilinadi: $E = u + K$.

Agar aralashmaning ichki energiyasi

$$\rho u = \sum_{i=1}^N \rho_i u_i \quad (1.1.15)$$

formula bilan (u_i -tashkil etuvchi muhitlarning solishtirma ichki energiyasi), kinetik energiyasi esa faqat makroskopik harakat bilan aniqlansa, ya'ni

$$\rho K = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i v_i^2}{2} \quad (1.1.16)$$

bo'lsa, aralashma energiyasi ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$\rho E = \sum_{i=1}^N \rho_i \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^N \rho_i E_i, \quad E_i = u_i + \frac{v_i^2}{2} \quad (1.1.17)$$

Aralashmaning kinetik energiyasini (1.1.16) va (1.1.2) formulalardan foydalanib

$$\rho K = \frac{\rho v^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i w_i^2}{2} \quad (1.1.18)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak $\rho K \neq \frac{1}{2} \rho v^2$, ya'ni Ko'p tezlikli muhitning kinetik energiyasi nafaqat butun muhitning $\bar{v}$ tezlik

bilan harakati, balki tashkil etuvchi muhitlarning nisbiy harakatlari tezliklari bilan ham aniqlanadi.

Yuqoridagi (1.1.4) va (1.1.9) balans tenglamalariga o'xshab, tashkil etuvchi muhitlar energiyasi uchun

$$\int_V \frac{\partial(\rho_i E_i)}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i E_i v_i^n dS + \int_S c_i^n dS + \int_V (\rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i) dV + \int_V \sum_{j=1, j \neq i}^N E_{ji} dV - \int_S q_i^n dS, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1.1.19)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu yerda tenglikning O'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi i -nchi tashkil etuvchining S sirt orqali o'tuvchi energiyasi oqimi; ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilar tashqi sirt $\bar{c}_i$ (xususiyl holda $c_i^n = \bar{c}_i^n \cdot \bar{v}_i$) va massaviy kuchlarga mos keluvchi energiya oqimi; E_{ji} -energiya almashuvi ($j \rightarrow i$) intensivligi; beshinchi qo'shiluvchi S sirt orqali o'tuvchi issiqlik oqimi ($\bar{q}$ vektor bilan aniqlanadi). Bu yerda ham energiyaning saqlanishi qonuniga ko'ra

$$E_{ji} = -E_{ij}, E_{ii} = 0 \quad (1.1.20)$$

munosabatlarni yozish mumkin.

Gauss-Ostrogradskiy formulasi (1.1.6) ni qo'llash natijasida (1.1.19) dan tashkil etuvchi fazalar energiyasi differensial tenglamalari kelib chiqadi

$$\frac{\partial(\rho_i E_i)}{\partial t} + \nabla^k \rho_i E_i v_i^k = \bar{\nabla} \cdot (\bar{c}_i - \bar{q}_i) + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_{j=1}^N E_{ji}, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1.1.21)$$

Individual hosila (1.1.3) va fazalar uzluksizlik tenglamalari (1.1.6) yordamida (1.1.21) tenglamalarni ushbu ko'rinishda yozish mumkin

$$\rho_i \frac{d}{dt} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{c}_i - \bar{q}_i) + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_{j=1}^N \left[E_{ji} - J_{ji} \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) \right], \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1.1.22)$$

Bu yerda (1.1.2), (1.1.8) va (1.1.20) ni e'tiborga olib i bo'yicha yig'indi olinsa, butun aralashmaning energiya tenglamasi hosil bo'ladi

$$\rho \frac{dE}{dt} + \sum_{i=1}^N \nabla^k (\rho_i w_i^k E_i) = \nabla^k (c_i^k - q_i^k) + \rho g^k v^k + \sum_{i=1}^N \rho_i g_i^k w_i^k,$$

$$E = u + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i w_i^2}{2}, c^k = \sum_{i=1}^N c_i^k, g^k = \sum_{i=1}^N g_i^k \quad (1.1.23)$$

Eslatma. (1.1.6), (1.1.9) va (1.1.19) balans munosabatlardan (1.1.7), (1.1.11) va (1.1.21) differensial tenglamalarni keltirib chiqarganda V hajm ixtiyoriy ekanligi e'tiborga olinadi va integral ostidagi miqdorlarning uzluksiz bo'lishi talab qilinadi.

1.2. Gomogen aralashmalar uchun diffuziya nazariyasi (diffuzion yaqinlashuv)

Gomogen aralashmada uning komponentasi deb ataluvchi tashkil etuvchilarining aralashishi va O'zaro ta'siri molekulyar va atomlar darajada bo'ladi. Komponentalarning nisbiy tezligi kichik bo'lib, ularni faqat mazkur komponentalarning konsentratsiyasini aniqlaganda hisobga olish kerak bo'ladi; nisbiy tezlik hisobiga paydo bo'ladigan dinamik va inersiya effektlarini esa e'tiborga olmasa ham bo'ladi. Bu,

$$c^k = \sigma^{kl} v^l, q_1 = q_2 = \dots = q_k \quad (1.2.1)$$

munosabatlar o'rinli bo'lganda, aralashmalar mexanikasi tenglamalarida diffuziya tezligi w_i^k ga nisbatan ikkinchi tartibli miqdorlarni tashlab yuborish bilan teng kuchlidir. Natijada Ko'pkomponentali aralashmalar mexanikasi tenglamalari ushbu ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho_i \bar{v} = \sum_j J_{ji} - \bar{\nabla} \cdot \rho_i \bar{w}_i, \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \rho \bar{v} = 0, \quad \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \nabla^t \bar{\sigma}^k + \rho \bar{g},$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \nabla^t (\sigma^{kl} v^l - q^k) + \rho g^k v^k - \sum_{i=1}^N \nabla^k \rho_i u_i w_i^k$$

Butun aralashmaning kuchlanish tenzori σ^{kl} va ichki energiya u larni aniqlovchi reologiya va holat tenglamalari yozilganda lokal termodinamik muvozanat o'rinli, ya'ni har bir nuqtada muhitning harorati T ni aniqlash mumkin deb hisoblanadi. Deformatsiya tezligi tenzori e^{mn} o'rtacha massaviy (barisentrik) tezlik $\bar{v}$ bilan aniqlanadi, ya'ni

$$e^{mp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^m}{\partial x^p} + \frac{\partial v^p}{\partial x^m} \right), \quad (m, p = 1, 2, 3) \quad (1.2.3)$$

Aralashma tarkibining ta'siri esa reologiya va holat tenglamalariga kiruvchi fizik-ximik parametrlar (yopishqoqlik koeffisienti, elastiklik moduli, issiqlik sig'imi va h.) orqali bevosita hisobga olinadi:

$$\sigma^{kl} = \sigma^{kl}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, e^{mp}, T, \chi^1, \chi^2, \dots, \chi^q) \\ \rho u = \sum \rho_i u_i(\rho_1, T, \chi^1, \chi^2, \dots, \chi^q) \quad (1.2.4)$$

Bu yerda $\chi^1, \dots, \chi^q$ – qo'shimcha fizik-ximik parametrlar. Faqat komponentalar konsentratsiyasi $\frac{\rho_i}{\rho}$ ga bevosita ta'sir qiluvchi va diffuziya tezligi $\bar{w}_i$ yoki diffuziya oqimi $\rho_i \bar{w}_i$ orqali tavsiflanuvchi komponentalarning nisbiy harakati xaotik harakat qilayotgan molekulalarning to'qnashuvi (diffuziya mexanizmi) bilan aniqlanadi. Diffuziya qonunlari esa diffuziya oqimi $\rho_i \bar{w}_i$ va komponentalar konsentratsiyasi, harorat, bosim gradientlari orasidagi munosabatni beradi. Ushbu diffuziya qonunlari komponentalar nisbiy harakati inersiyasini hisobga olmaydi. Diffuzion yaqinlashuv asosida qaraladigan Ko'p komponentali aralashmalar modellari o'z mohiyati bilan bir tezlikli bo'lgani uchun, ushbu yondoshuvni Ko'pincha bir suyuqlikli yaqinlashuv deb ataladi.

1.3. Geterogen aralashmalarining o'ziga xos jihatlari haqida

Geterogen aralashmalar (suspensiya, emulsiya, pufakchali suyuqliklar, suv bilan to'yingan gruntlar, kompozit materiallar va h.) tashkil etuvchilari (fazalari) ning tezliklari bir xil bo'lmaydi hamda Ko'pincha nisbiy tezlik $\bar{w}_i$ va fazalar tezligi $\bar{v}$, (yoki o'rtacha massaviy tezlik $\bar{v}$) bir xil tartibga ega bo'ladi. Shu sababli geterogen aralashmalar, fazalarning tezliklari ustma-ust tushmaganligi natijasida paydo bo'ladigan dinamik effektlarni hisobga oluvchi, Ko'p tezlikli (Ko'p suyuqlikli) modellar asosida

qaraladi. Bu holda saqlanish tenglamalari (1.1.7), (1.1.12) va (1.1.22) formulalar bilan beriladi. Har bir komponentasi butun aralashma hajmini ($V_1 = V_2 = \dots = V_N = V$) egallovchi gomogen aralashmalardan farqli O'laroq, geterogen aralashmaning har bir fazasi aralashma hajmi V ning faqat bir qismini egallaydi ($V_1 + V_2 + \dots + V_N = V$). Bundan esa geterogen aralashmalar nazariyasida har bir faza egallagan hajm ulushini aniqlovchi miqdorlar- i -nchi fazaning hajm konsentratsiyasi $\alpha_i (i=1,2,\dots,N)$ ni kiritishga zaruriyat tug'iladi :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1, (\alpha_i \geq 0) \quad (1.3.1)$$

Shu munosabat bilan keltirilgan zichliklar ρ_i dan tashqari fazalarning haqiqiy zichligi ρ_i^0 (i -nchi fazaning bir birlik hajmidagi i -nchi faza massasi) aniqlanadi

$$\rho_i^0 = \frac{\rho_i}{\alpha_i} \quad (1.3.2)$$

Geterogen aralashmalarda fazalar makroskopik (molekulyar kattaliklarga nisbatan) qo'shiluvchilar yoki ularning atrofini o'rab olgan makroskopik kattalikdagi hajmni egallagan muhit tarzida bo'ladi. Shu sababli har bir fazaning deformatsiyasi nafaqat aralashma egallagan sohaning tashqi chegarasining ko'chishi bilan (gomogen aralashmalar kabi), balki fazalararo chegaralarning ko'chishi bilan ham bog'liq. Bu esa kuchlanish tenzori - σ_{ij} larni aniqlash uchun fazalarning tarkibini (qo'shiluvchilarning shakli va kattaligi, ularning joylashishi va h.) hisobga oluvchi munosabatlarni ushbu fazalarning birgalikdagi deformatsiyasi va harakati shartlarini jalb etishni taqozo qiladi.

Izoh. Geterogen muhitni tashkil qiluvchilardan biri suyuqlik (gaz) ichidagi qattiq jism zarrachalari, boshqa suyuqlik tomchilari, gaz pufakchalari(suyuqlik tomchilari) va h. odatda, suyuqlik egallagan hajmga qaraganda ancha kichik hajmni egallaydi. Shuni e'tiborga olib, mazkur suyuqlik (gaz) asosiy yoki tashuvchi faza deb ataladi va odatda birinchi faza deb belgilanadi.

Ko'pincha $\alpha_i^k \ll 1, (i = 2, 3, \dots, N; 1 \leq k \leq 2)$ shartni qanoatlantiruvchi qolgan $N-1$ ta fazalarni qo'shiluvchi fazalar deb ataladi.

Mustahkamlik effektlari ahamiyatsiz bo'lgan hollarda (emulsiya, suspenziya, pufakchali suyuqliklar va h.) birgalikdagi deformatsiya shartlari ancha soddaroq bo'ladi va hajm konsentratsiyasi- α_i larni aniqlovchi tenglamalarga keltiriladi. Ko'pincha bunday tenglamalar fazalar bosimining tengligi yoki fazalardan biri siqilmasligi shartidan iborat bo'ladi.

Geterogen muhitlarda fazalarning nisbiy harakatini tavsiflovchi qonunlar ham murakkabroq bo'ladi. Chunki ular fazalarning makroskopik sistemalar sifatida o'zaro ta'siri bilan (masalan tashuvchi suyuqlik yoki gazning qo'shiluvchilarning zarrachalari atrofidagi harakati) aniqlanadi. Bu jarayonlar kuchlar yordamida va fazalar inersiyasini izchil hisobga olish bilan tavsiflanadi.

Shunday qilib Ko'p fazali harakatlarni Ko'p tezlikli (Ko'p suyuqlikli) model asosida o'rganish fazalarning birgalikdagi harakati shartlarini berishga va fazalararo ta'sirlarini tavsiflovchi miqdorlar (J_{ji}, P_{ji}, E_{ji}) ni hamda fazalar ichidagi ta'sirlarni tavsiflovchi miqdorlar (σ_i^k, c_i^k, q_i^k) larni aniqlashga keltiriladi.

Ayrim hollarda (fazalar nisbiy harakatining inersiya effektlari muhim bo'lmaganda) geterogen aralashmalar harakatini diffuziya modeli asosida qarash mumkin. Bunga yetarli darajada konsentratsiyali suspenziya yoki emulsiyalarning uncha katta bo'lmagan tezlik bilan harakati misol bo'la oladi.

To'yingan g'ovak muhitlarda fazalarning nisbiy harakatini aniqlovchi Darsi qonuni

$$\rho_i \bar{w}_i = -k_i \bar{\nabla} p \quad (1.3.3)$$

ham geterogen muhitni inersiyasiz diffuziya qonuni asosida qarash mumkin bo'lgan holga misol bo'la oladi.

1.4. Impuls va energiyaning fazalararo almashuvi. Ichki kuchlar ishi

Saqlanish tenglamalari (1.1.7), (1.1.12) va (1.1.22) asosida geterogen aralashma fazalarining O'zaro ta'sirini batafsilroq ko'ramiz.

i -nchi va j -nchi fazalar orasidagi impulsalar almashuvi intensivligini ikkita qo'shiluvchining yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\bar{P}_{ji} = -\bar{P}_{ij} = \bar{R}_{ji} + J_{ji} \bar{v}_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j) \quad (1.4.1)$$

Bu yerda $\bar{R}_{ji}$ -aralashmaning bir birlik hajmiga nisbatan olingan fazalararo kuch. U ishqalanish kuchi, bosim, fazalar yopishishi va h. hisobiga hosil bo'ladi. Bundan tashqari impulsalar almashishi fazaviy o'tishlar hisobiga ham yuz beradi. Masalan $j \rightarrow i$ o'tish natijasida $J_{ji} \bar{v}_{ji}$ impuls j -nchi fazadan i -nchi fazaga o'tadi. Bunda $\bar{v}_{ji} - (j \rightarrow i)$ o'tish natijasida i -nchi fazada hosil bo'lgan massa tezligi yoki impulsini xarakterlovchi miqdor. Fazaviy almashishlar fazalararo chegarada yuz bergani uchun $\bar{v}_{ji}$ ni i -nchi fazaning j -nchi faza chegarasidagi tezligi deb qarab, $\bar{v}_{ji} = \bar{v}_{ij}$ tenglik qabul qilinadi. Bundan

$$\bar{R}_{ji} = -\bar{R}_{ij} \quad (1.4.2)$$

tenglik kelib chiqadi.

Energiya almashishi intensivligini ham bir necha qo'shiluvchilar yig'indisi ko'rinishida yoziladi

$$E_{ji} = W_{ji} + Q_{ji} + J_{ji} \left(u_{ji} + \frac{1}{2} v_{ji}^2 \right), E_{ji} = -E_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j) \quad (1.4.3)$$

bu yerda W_{ji} -fazalararo kuchlar (ishqalanish, bosim va h.) bajargan ish va Q_{ji} - fazalar (i -nchi va j -nchi) orasidagi chegaradan issiqlik o'tishi hisobiga i -nchi fazaga oqib kelgan energiya'ni beradi. $J_{ji} \left(u_{ji} + \frac{1}{2} v_{ji}^2 \right)$ esa j -nchi fazadan i -nchi fazaga o'tgan massa bilan birga o'tgan ichki va kinetik energiya; $u_{ji} - (j \rightarrow i)$ o'tish natijasida i -nchi fazada hosil bo'lgan massaning solishtirma ichki energiyasi. U i -nchi fazaning j -nchi faza

chegarasiidagi solishtirma energiyasi deb qabul qilinadi. Ushbu ichki energiya fazalararo chegarada uzilishga ega, ya'ni

$$u_{ji} \neq u_{ij} \quad (1.4.4)$$

Shunday qilib impulslar va energiya tenglamalari ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$\rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \sum (\bar{R}_{ji} + J_{ji} (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)) + \rho_i \bar{g}_i \quad (1.4.5.)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i}{dt} (u_i + \frac{v_i^2}{2}) &= \nabla^k (c_i^k - q_i^k) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[W_{ji} + Q_{ji} + J_{ji} \left(u_{ji} - u_i + \frac{v_{ji}^2 - v_i^2}{2} \right) \right] + \rho_i g_i^k v_i^k \end{aligned} \quad (1.4.6.)$$

Impulsar tenglamasi (1.4.5) dan i -nchi fazaning kinetik energiyasi (tirik kuch teoremasi) tenglamasi kelib chiqadi:

$$\rho_i \frac{d_i}{dt} (\frac{v_i^2}{2}) = \bar{v}_i \cdot \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_{j=1}^N [\bar{R}_{ji} \cdot \bar{v}_i + J_{ji} (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_i] \quad (1.4.7)$$

Fazaning energiya tenglamasi (1.4.6) dan (1.4.7) ni ayirsak, ichki energiya tenglamasini olamiz

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d u_i}{dt} &= \bar{\nabla} \cdot (\bar{c}_i - \bar{q}_i) - \bar{v}_i \cdot \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \\ &+ \sum_{j=1}^N [W_{ji} - \bar{R}_{ji} \cdot \bar{v}_i + Q_{ji} + J_{ji} (u_{ji} - u_i) + \frac{1}{2} J_{ji} (v_{ji} - v_i)^2] \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Fazaviy o'tish ($j \rightarrow i$) jarayonida j -nchi faza $\frac{1}{2} J_{ji} v_{ji}^2$ miqdordagi kinetik energiya'niya'ni yo'qotadi. Ushbu energiyaning $\frac{1}{2} J_{ji} v_i^2$ ga teng qismi mazkur o'tish yuz bergan massada (i -nchi faza holatida) qoladi. Haqiqatan qolgan $\frac{1}{2} J_{ji} (v_{ji}^2 - v_i^2)$ qismi i -nchi fazaning solishtirma energiyasini o'zgartirishga sarf bo'ladi: (1.4.7) tenglamadan ko'rinib turibdiki, $J_{ji} (\bar{v}_{ji} \cdot \bar{v}_i - v_i^2)$ ga teng qismi i -nchi fazaning kinetik energiyasini o'zgartirishga va (1.4.8) ga ko'ra $\frac{1}{2} J_{ji} (v_{ji} - v_i)^2$ esa solishtirma ichki energiya'ni o'zgartirishga ketadi.

Fazaning ichki energiyasi tenglamasi (1.4.8) formal balans munosabatlardan olindi. Uning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilarni aniqlash katta qiyinchiliklar bilan bog'liq bo'lishi mumkin. Shu sababli Ko'pincha issiqlik oqimi tenglamasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Ushbu

$$\rho_i \frac{d u_i}{dt} = \rho_i A_i + \rho_i Q_i + \sum_{j=1}^N J_{ji} (u_j - u_i) \quad (1.4.9)$$

tenglama chegaraviy shartlarga va i -nchi fazaga nisbatan tashqi shartlarga bog'liq emas, shuningdek boshqa fazalarning holatiga esa oshkor ravishda bog'liq emas; A_i va Q_i lar i -nchi fazaning birlik massasiga nisbatan olingan bir birlik vaqt davomidagi ichki kuchlar ishi va issiqlik oqib kelishini aniqlovchi miqdorlar. Ushbu miqdorlar postulat tarzida aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \rho_i Q_i &= -\nabla^k q_i^k + \sum_{j=1}^N Q_{ji}, \\ \rho_i A_i &= \nabla^k c_i^k - v_i^j \cdot \nabla^k \sigma_i^{kj} + \sum_{j=1}^N [W_{ji} - R_{ji}^k \cdot v_i^k + \frac{1}{2} J_{ji} (v_j - v_i)^2] \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Fazalar holatining termodinamik tenglamalari

Ko'p fazali muhitdagi har bir fazaning mexanik va termodinamik xossalari, odatda bir fazali muhit (ya'ni ushbu faza butun hajmni egallaganda) uchun o'rinli bo'lgan munosabatlar bilan aniqlanadi. Har bir faza doirasida lokal muvozanat navjudligi faraz sifatida qabul qilinadi (butun aralashma uchun lokal muvozanat bo'lishi shart emas) va i -nchi faza egallagan hajmning har bir nuqtasida uning harorati T_i kiritiladi. Ushbu faraz ichki energiya u_i , entropiya S_i , entalpiya i_i , erkin energiya φ_i , termodinamik potensial Z_i larni kiritish imkonini beradi. Bu funksiyalar sifatida muhitning bir fazali holati uchun o'rinli bo'lgan funksiyalar olinadi va ular muvozanatli termodinamika tenglamalari bilan bog'langan bo'ladi. Fazalarni ikki parametrlili (ρ_i^0, T_i yoki p_i, T_i) muhit deb qaraladi va Gibbs formulasi ham o'rinli deb qabul qilinadi:

$$T_i \frac{d S_i}{dt} = \frac{d u_i}{dt} + p_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_i^0} \right) \quad (1.4.11)$$

18.11.18

Florida Shar tanzorini 20 iratik

$$\left(\frac{1}{3} \sigma_i^{kk} = -\alpha_i p_i, \tau_i^{kk} = 0, \tau_i^{kl} = \tau_i^{lk} \right)$$

Ko'p hollarda fazalar bir xil bosimga ega (bir bosimli yoki umumiy bosimli aralashma) deb qarash mumkin

$$p_1(\rho_1^0, T_1) = p_2(\rho_2^0, T_2) = \dots = p_N(\rho_N^0, T_N) = p \quad (1.4.13)$$

Fazalararo ta'sir kuchining ifodasini umumiy holda keltirish imkoniyati yo'q, chunki u hatto yakka sferaning yopishqoq siqilmaydigan suyuqlikda o'zgaruvchan tezlik bilan harakati uchun ham olinmagan. Lekin, i -nchi faza bilan o'zaro ta'sir qiluvchi kuchlar yig'indisida faza oqim naychasining kengayishi hisobiga hosil bo'ladigan qismi — $p \nabla \alpha_i$ ni ajratib yozish maqsadga muvofiqligiga ilk bor X.A.Raxmatulin tomonidan e'tibor berilgan:

$$\sum_{i=1}^N \bar{R}_{ji} = p \bar{\nabla} \alpha_i + \sum_{i=1}^N \bar{F}_{ji}, \quad \bar{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij} \quad (1.4.14)$$

Izoh. oqim naychasining kengayishi hisobiga hosil bo'ladigan kuch haqida keyingi bobda batafsilroq to'xtaladi.

17 INV. № 13487
"27" 08 2021 yil

fazalarning birgalikdagi deformatsiyasini tavsiflovchi munosabatlardir.

Ichki kuchlar ishi.

Har bir faza ichki kuchlarining ishi odatda ikkiga ajratiladi:

- ichki bosim kuchlarining faza materialining siqilishiga yoki kengayishiga olib keladigan aksiga qaytariluvchi ishi;

- ichki siljish kuchlarining (yopishqoq suyuqlik bo'lgan holda) kinetik energiyaning dissipatsiyasiga olib keluvchi ishi.

Ushbu ishlar, deformatsiyalanmaydigan materialdan iborat faza uchun yoki siljish deformatsiyalari aksiga qaytarilmaydigan faza uchun kiritilgan makroskopik parametrlar orqali, quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho_i A_i = \frac{\alpha_i p_i}{\rho_i^0} \cdot \frac{d_i \rho_i^0}{dt} + \tau_i^{kl} e_i^{kl} + \sum_{j=1}^N [\bar{F}_{ji} \cdot (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i) + J_{ji} \frac{(v_{ji} - v_i)^2}{2}], \quad (1.4.15)$$

$$\bar{v}_{ji} = \bar{v}_j, \tau_i^{kl} e_i^{kl} = \tau_i^{kl} \nabla^k v_i^l, e_i^{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial x^l} + \frac{\partial v_i^l}{\partial x^k} \right)$$

Bu yerda birinchi qo'shiluvchi bosim kuchlarining aksiga qaytariluvchi ishi, qolgan qo'shiluvchilar esa dissipativ kuchlarning ishi:

- $\tau_i^{kl} e_i^{kl}$ - makroskopik yopishqoqlik kuchlari hisobiga dissipatsiya;

- $\bar{F}_{ji} \cdot (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)$ - fazalararo tezliklar muvozanatsizligi tufayli fazalararo kuchlarning bajargan ishi hisobiga dissipatsiya;

- $\frac{1}{2} J_{ji} (v_{ji} - v_i)^2$ - fazaviy o'tishlarda ($j \rightarrow i$) impulslarning nuvozanatsiz almashishi hisobiga kinetik energiyaning dissipatsiyasi.

Bundan fazalararo kuchlar $\bar{R}_{ji}$ larning faqat $\bar{F}_{ji}$ ga teng qismlari dissipatsiyaga ishlaydi.

Issiqlik oqimi tenglamasi (1.4.9) da A_i va Q_i dan tashqari u_{ji} larni ham berish kerak. Fazaviy o'tishlar mavjud bo'lganda, odatda, ushbu fazalararo muvozanat sharti o'rinli bo'ladi

$$u_{ji} = u_{is} = u_i(p, T_s(p)) \quad (1.4.16)$$

$T_s(p)$ - fazalarning to'yinish (muvozanat) harorati.

1.5. Umumiy bosimli yopishqoq siqiluvchan fazalar aralashmasining harakat tenglamalari sistemasi

Yuqoridagi mulohazalarni va (1.4.10), (1.4.14), (1.4.15) tenglamalarni e'tiborga olinsa, Ko'p tezlikli va Ko'p haroratli, fazalari umumiy bosimli geterogen aralashmaning tenglamalar sistemasi ushbu ko'rinishni oladi;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i \bar{v}_i &= \sum_{j=1}^N J_{ji}, \\ \rho_i \frac{d_i \bar{v}_i}{dt} &= -\alpha_i \bar{\nabla} p + \nabla^k \bar{\tau}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \sum_{j=1}^N [\bar{F}_{ji} + J_{ji} (\bar{v}_j - \bar{v}_i)], \\ \rho_i \frac{d_i u_i}{dt} &= \frac{\alpha_i p}{\rho_i^0} \cdot \frac{d_i \rho_i^0}{dt} + \sum_{j=1}^N [\bar{F}_{ji} \cdot (\bar{v}_j - \bar{v}_i) + J_{ji} \frac{(v_j - v_i)^2}{2} + \\ &+ J_{ji} (u_j - u_i) + Q_{ji}] + \tau_i^{kl} e_i^{kl} - \nabla^k q_i^k, \\ p_1(\rho_1^0, T_1) &= p_2(\rho_2^0, T_2) = \dots = p_N(\rho_N^0, T_N) = p, \\ u_i &= u_i(\rho_i^0, T_i), \alpha_i + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1 \\ \rho_i &= \alpha_i \rho_i^0, J_{ji} = -J_{ij}, \bar{F}_{ji} = -\bar{F}_{ij}, \bar{v}_{ij} = \bar{v}_{ji} \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} [Q_{ji} + Q_{ij} + J_{ji} (i_j - i_{ij})] &= 0, i_j = u_j + \frac{p}{\rho_j^0} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

bu yerda oxirgi tenglik to'la energiya o'zgarishi ichki fazalararo jarayonlar hisobiga yuz bermasligi tufayli o'rinni bo'ladi.

Impulslar va energiya tenglamalarini quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i v_i^l}{dt} &= \nabla^k (-\alpha_i p \delta^{kl} + \tau_i^{kl}) + \rho_i g_i^l + p \nabla^l \alpha_i + \sum_{j=1}^N [F_{ji}^l + J_{ji} (v_j^l - v_i^l)], \\ \rho_i \frac{d_i}{dt} (u_i + \frac{v_i^2}{2}) &= \nabla^k (-\alpha_i p v_i^k + \tau_i^{kl} v_i^l - q_i^k) + \rho_i g_i^k v_i^k - p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \\ &+ \sum [F_{ji}^k v_j^k + Q_{ji} + J_{ji} (u_j + \frac{p}{\rho_j^0} - u_i + \frac{v_j^2 - v_i^2}{2})] \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Bu yerdan (1.4.5) va (1.4.6) tenglamalardagi fazalar ichidagi (σ_i^{kl}, c_i^k) va fazalararo (R_{ji}^k, W_{ji}) o'zaro ta'sirlarning ifodalari olinadi:

$$\begin{aligned}\sigma_i^{kl} &= -\alpha_i p \delta^{kl} + \tau_i^{kl}, c_i^k = \sigma_i^{kl} v_l^j, \\ \sum_{j=1}^N \bar{R}_j &= p \bar{\nabla} \alpha_i + \sum_{j=1}^N \bar{F}_j, \\ \sum_{j=1}^N W_j &= -p \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{1}{\rho_i^0} \sum_{j=1}^N J_j \right) + \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^k \cdot \bar{v}_j^k\end{aligned}\quad (1.5.3)$$

1.6. Uzilish sirtlari

Geterogen aralashmalar harakati sodir bo'layotgan sohalarda muhit parametrlari jiddiy o'zgarishi mumkin bo'lgan, biroq qalinligi qo'shiluvchilar kattaligida yoki hatto undan ham kichik tartibli yupqa qatlamlar (tutash muhit mexanikasi nuqtai-nazaridan qalinligi nolga teng) hosil bo'lishi mumkin.

Bunday yupqa qatlamlarda geterogen muhitlar mexanikasi tushunchalari va tenglamalari ma'noga ega emas. Shu munosabat bilan oqim parametrlarining uzilish sirti qaraladi. Ushbu uzilish sirtlaridagi shartlarni keltirib chiqarish usuli tutash muhit mexanikasi [3] va suyuqlik va gazlar mexanikasi bo'yicha darsliklarda [4] beriladi. Mazkur yupqa qatlamlarda (sirtlarda) fazaviy o'tishlar yuz bermaydi deb hisoblab, uzilish sirtlaridagi shartlar qayd etilgan usul bilan (1.1.4), (1.1.9) va (1.1.19) tenglamalardan olinadi:

$$\begin{aligned}\rho_i^+ (v_i^{n+} - D) &= \rho_i^- (v_i^{n-} - D) \equiv m_i, \\ \sum_{i=1}^N m_i [v_i]_D &= \sum_{i=1}^N [\sigma_i^n]_D, \\ \sum_{i=1}^N m_i \left[u_i + \frac{v_i^2}{2} \right]_D &= \sum_{i=1}^N [c_i^n - q_i^n]_D ([\varphi]_D = \varphi^+ - \varphi^-)\end{aligned}\quad (1.6.1)$$

Bu yerda + va - yuqori indekslar belgilangan miqdorlarning uzilish sirti S_n ning turli tomonlaridagi qiymatini bildiradi, $[]_D$ orqali qavs ichidagi ifodaning S_n sirtidagi sakrashi belgilangan; D - uzilish sirti S_n ga tegishli nuqtaning normal $\bar{n}$ bo'ylab ko'chish tezligi; $\bar{n}$ va $\bar{\tau}$ ushbu nuqtada S_n ga o'tkazilgan normal va urinma birlik vektorlar.

Bu sistema yordamida uzilish sirti S_* ning bir tomonidagi parametrlar orqali S_* ning ikkinchi tomonidagi oqimning barcha parametrlarini aniqlash uchun fazalarning fizik-mexanik xossalari va ularning mazkur yupqa qatlamdagi o'zaro ta'siri to'g'risidagi ma'lumotlarni jalb qilish lozim bo'ladi.

Umumiy bosimli geterogen aralashma uchun, agar $\tau_i^{kl} = 0, q_i^k = 0$ bo'lsa, (1.6.1) shartlarni (1.5.3) ni hisobga olib quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i [v_i^a]_D &= -[p]_D, \sum_{i=1}^N m_i [v_i^r]_D = 0, \\ \sum_{i=1}^N m_i [i_i + \frac{v_i^2}{2}]_D &= 0, \quad i_i = u_i + \frac{\rho}{\rho_i} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

1.7. Termodinamik kuchlar va oqimlar orasidagi chiziqli fenomenologik munosabatlar haqida

Yuqorida qaralgan saqlanish tenglamalari sistemasida tashqi massaviy kuchlar $\bar{g}_i$ dan tashqari fazalar ichidagi o'zaro ta'sirni aniqlovchi (τ_i^{kl}, q_i^k) va fazalararo ta'sirni aniqlovchi ($J_{ji}, \bar{v}_{ji}, \bar{F}_{ji}, Q_{ji}$) funksiyalar qatnashadi. To'la tenglamalar sistemasini olish uchun ushbu kuchlar berilishi lozim. Bulardan biri $-\bar{v}_{ji}$ (i -nchi va j -nchi fazalarning fazalararo chegarasidagi tezlik) fazalarning kuchlar orqali o'zaro ta'siri natijasida sodir bo'ladigan dissipatsiyalanuvchi kinetik energiyani ushbu fazalar o'rtasida taqsimlanishini aniqlaydi. Ushbu kinetik energiya dissipatsiyasi intensivligi χ_{ij} va χ_{ji} koeffitsientlari yordamida taqsimlanadi:

$$\chi_{ji} = \frac{\bar{F}_{ji} \cdot (\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)}{\bar{F}_{ji} \cdot (\bar{v}_j - \bar{v}_i)}, \chi_{ji} + \chi_{ij} = 1 \quad (1.7.1)$$

Agar i -nchi fazada fazalararo ta'sir tufayli dissipatsiya yuz bermasa (bu siljish deformatsiyasi sodir bo'lmaydigan hollarda bo'lishi mumkin),

$$\bar{v}_{ji} = \bar{v}_{ij} = \bar{v}_i, \chi_{ij} = 1, \chi_{ji} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (1.7.2)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Sistemaning termodinamik muvozanatsizlik holati ushbu sistemaning termodinamik muvozanatli holatidan kichik chetlanishi natijasi bo'lgan hollarda fazalar va aralashma izotrop hossalari deb quyidagi chiziqli fenomenologik munosabatlarni yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\tau_i^{kl} &= \sum_{j=1}^2 \left[\xi_{ji} e_j^{kl} \delta^{kl} + 2\mu_{ji} (e_j^{kl} - \frac{1}{3} e_j^{mm} \delta^{kl}) \right], \\ q_i^k &= \sum_{j=1}^2 [\lambda_{ji} \nabla^k T_j] + \frac{\eta_i}{T} (v_1^k - v_2^k), (i=1,2), \\ F_{12}^k &= - \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\eta_j}{T^2} \nabla^k T_j \right] + K_F (v_1^k - v_2^k), \\ Q_{12} &= K_Q (T_1 - T_2) + \beta \lambda_{12} (T_1 - T_s), \\ J_{12} &= \beta (T_1 - T_2) + K_J \lambda_{12} (T_1 - T_s)\end{aligned}\quad (1.7.3)$$

Bu munosabatlar yopishqoqlik kuchlanishlari τ_i^{kl} uchun umumlashgan Nave-Stoks qonunini, issiqlik oqimlari q_i^k uchun umumlashgan Fure qonunini va fazalararo kuchlar $\bar{F}_{12}$ ni, fazalararo issiqlik almashuvi Q_{12} ni hamda J_{12} uchun fazaviy o'tishlar kinetikasi qonunlarini aniqlaydi.

Ushbu munosabatlarda o'n beshta manfiy bo'lmagan fenomenologik koeffitsientlar ($\xi_{ji} = \xi_{ij}, \mu_{ji} = \mu_{ij}, \lambda_{ji} = \lambda_{ij}, K_F, K_Q, K_J, \beta (i, j=1,2)$) qatnashadi.

Ular fazalarning xossalari va aralashma strukturasi bog'liq bo'lib, eksperimentdan yoki mikro harakatlarni batafsil o'rganish natijasida aniqlanadi. Mazkur koeffitsientlar soni ko'p bo'lgani uchun keltirilgan chiziqli munosabatlardan foydalanish jiddiy qiyinchiliklarga olib keladi. Shu sababli geterogen muhitlar uchun fazalar ichidagi va fazalararo o'zaro ta'sirlarni aniqlovchi xususiy, biroq aniq ko'rinishga ega qonunlarni berish dolzarb muammodir. Shunday qonunlarni olish mumkin bo'lgan usullardan biri keyingi bobda qaraladi.

Izoh. Ikki fazali aralashma uchun keltirilgan (1.7.3) chiziqli munosabatlarni yuqorida qabul qilingan farazlardan tashqari Kyurining simmetriya prinsipi va onzagerning o'zarlik prinsipidan [Sedov L.I.] foydalanib yozilgan.

II BOB. GETEROGEN ARALASHMALARDA (KO'P FAZALI MUHITLARDI) FAZOVII O'RTACHALASHTIRISH

Birinchi bobning oxirida qayd qilingan aralashmalar mexanikasi uchun dolzarb masalani hal qilish yo'llaridan biri o'rtachalashtirish usuli hisoblanadi. Ushbu usul fazalararo o'zaro ta'sirlarni tavsiflovchi miqdorlarning tarkibini oydinlashtirish hamda ularni nazariy va eksperimental usullar bilan aniqlash imkonini beradi. Mazkur usulni qo'llash jarayonida fazaviy mikro va makromasshtab tushunchalaridan foydalaniladi. Fazaviy mikromasshtab tartibi qo'shiluvchilar (vklyucheniya) va birjinslilikni buzuvchi fazalar (neodnorodnosti) kattaliklari (tomchi, zarracha, pufakcha, g'ovaklar diametri, parda qatlam qalinligi va h.) tartibiga teng masofalar.

Mikromasshtabli vaqt-qo'shiluvchilarning parametrlari o'zgarishining xarakterli vaqti.

Fazaviy mikromasshtablar molekulyar kinetik masshtablarga (molekulalararo masofaga) qaraganda ancha katta deb qaraladi. Shu sababli mikroharakatni tavsiflaydigan parametr va tenglamalar sifatida tutash muhit mexanikasidan ma'lum parametrlar va tenglamalar qaraladi. Ular mikroparametr va mikrotenglamalar deyiladi va shtrixli belgilar ($\rho'_i, \bar{v}'_i, \nabla' \rho'_i$) bilan belgilanadi.

2.1. Mikroharakat tenglamalari. Fazalararo sirtlardagi shartlar

1. Fazalardagi jarayonlarni tavsiflovchi tenglamalar.

Mulohazalar soddaroq bo'lishi uchun bundan keyin ikki fazali aralashma qaraladi va i -nchi faza egallagan nuqtalarda quyidagi mikrotenglamalar o'rinli deb hisoblanadi:

$$\frac{\partial(\rho'_i e'_i)}{\partial t} + \nabla'^k \rho'_i e'_i v'^k_i = \rho'_i \frac{d'e'_i}{dt} = \nabla'^k \psi'^k_i + \rho'_i F'_i \quad (2.1.1)$$

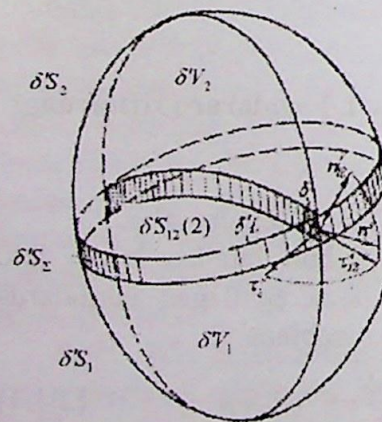
Bu yerda tutash muhit mexanikasining 4 ta asosiy tenglamasi (Sedov L.I.) umumiy ko'rinishda yozilgan :

- 1) $e'_i = 1, \psi'^k_i = 0, F'_i = 0$ - uzluksizlik tenglamasi,
- 2) $e'_i = \bar{v}'_i, \psi'^k_i = \bar{\sigma}'^k_i, F'_i = \bar{g}_i$ - impuls tenglamasi,
- 3) $e'_i = u'_i + \frac{1}{2}(v'_i)^2, \psi'^k_i = \bar{\sigma}'^k_i \bar{v}'_i - q'^k_i, F'_i = \bar{g}_i \bar{v}'_i$ -energiya tenglamasi
- 4) $e'_i = [\bar{r}' \times \bar{v}'_i], \psi'^k_i = [\bar{r}' \times \bar{\sigma}'^k_i], F'_i = [\bar{r}' \times \bar{g}_i]$ — impuls momenti tenglamasi

r' - fiksirlangan O nuqtadan qarayotgan nuqttagacha bo'lgan masofa, $\rho'^0_i, \bar{v}'_i, \sigma'^{kl}_i, \bar{q}'^k_i, u'_i$ - mos ravishda oniy zichlik, tezlik, kuchlanish tenzori, issiqlik oqimi vektori va ichki energiyaning $\delta'V \ll a^3$ hajmlar va $\delta't \ll t_0$ (a va t_0 qo'shiluvchilarning xarakterli chiziqli kattaligi va ular harakatining xarakterli vaqti) vaqtlardagi o'rtacha qiymati; $d'x^k \ll a$,

$$\sigma'^{kl}_i = \sigma'^{lk}_i, \sigma'^{kl}_i = -p'_i \delta^{kl}_i + \tau'^{kl}_i, \quad (2.1.2)$$

2. Fazalararo sirtlardagi jarayonlarni tavsiflovchi tenglamalar.



Rasm 2.1

Fazalararo chegaradagi qalinligi molekullarning o'zaro ta'siri radiusi δ_Σ ($\delta_\Sigma \sim 10^{-8} \text{ M}$) tartibidagi yupqa qatlamda molekular nafaqat o'z fazasi molekulari bilan, balki qo'shni faza molekulari bilan ham o'zaro ta'sirda bo'ladi. Shu sababli ushbu qatlamda moddaning fizik-ximik xossalari va reaksiyasi mazkur moddaning δ_Σ dan ancha katta masofalardagi

xossalaridan tubdan farq qilishi mumkin. Bu esa mazkur qatlamlarni Gibbsga ergashib alohida qarashni taqozo etadi. Shunday qilib Σ -faza deb ataluvchi sirt fazasi tushunchasiga kelinadi. rasm 2.1. da $\delta V = \delta V_1 + \delta V_2 + \delta V_\Sigma$ mikrohajm $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_\Sigma$ sirt bilan chegaralangan (qamrab olingan), $(\delta V_\Sigma \ll \delta V_i, \delta S_\Sigma \ll \delta S_i, \delta \Sigma \ll a)$; δV_i - i -nchi faza ($i=1,2$) egallagan hajm, δV_Σ -sirt faza egallagan hajm va δS_Σ uning yon sirti. Kiritilgan sirt fazasi - Σ -fazada impulsni tashlab yuborish mumkin (hajm va massa cheksiz kichik bo'lgani tufayli), biroq o'zaro ta'sir kuchlarining zichligi $\bar{\sigma}_\Sigma$ ikkala faza molekularining yaqinligi tufayli fazalar ichidagi σ_i^{kl} tenzori bilan aniqlangan kuchlarga qaraganda ancha katta bo'lishi mumkin. Fazalararo sirt S_{ij} ($i=1,2; i \neq j$) deb belgilaymiz va unga o'tqazilgan tashqi normal i -nchi fazadan j -nchi fazaga (birinchi indeks bilan belgilangan) yo'nalgan deb hisoblaymiz. Shunday qilib i -nchi faza $S_i + S_{ij}$ sirt bilan chegaralangan V_i hajmni egallaydi.

Yuqoridagi mulohazalardan $\bar{\sigma}'_i \delta S_\Sigma$ bilan bir xil tartibli kuchlarni tashlab yuborish mumkinligi, lekin ushbu

$$\bar{\sigma}'_\Sigma (\bar{n}') \delta S_\Sigma = \bar{\sigma}'_\Sigma (\bar{n}') \delta_\Sigma \delta l = \bar{\Sigma}' (\bar{n}') \delta l$$

sirt kuchlarini hisobga olish lozimligi kelib chiqadi ($\bar{n}'$ -chegaraviy sirt δS ga tashqi birlik normal). Mazkur kuchlarning bosh vektori

$$\Delta \bar{\sigma}'_\Sigma = \frac{1}{\delta S_{12}} \oint \bar{\Sigma}'(\bar{n}') d'l \quad (2.1.3)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu tenglikda δL fazalararo sirtning qaralayotgan elementi δS_{12} ni chegaralovchi yopiq kontur; $\bar{\Sigma}$ -sirt taranglik kuchining intensivligi.

Fazalararo sirt fazalarning o'zaro ta'sirini tavsiflaydigan shartlar saqlanish qonunlari asosida beriladi. Ushbu qonunlar S_{12} sirtning har bir nuqtasida o'rinli bo'lgan quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\xi'_1 + \xi'_2 = 0, \xi'_1(x') + \xi'_2(x') = \Delta \sigma'_{\Sigma, \xi'_1(x')} + \xi'_2(x') = \Delta \varepsilon'_\Sigma \quad (2.1.4)$$

Bu yerda

$$\Delta \varepsilon_{\Sigma} = \frac{1}{\delta S_{12}} \frac{d}{dt} (U'_{\Sigma} \delta S_{12}) - W'_{\Sigma} \quad (2.1.4a)$$

Σ - fazaning ta'sirini sirt energiyasi $U'_{\Sigma} \delta S_{12}$ ning o'zgarishi va sirt tarangligi hisobiga bajarilgan ish $W'_{\Sigma} \delta S_{12}$ orqali ifodalovchi miqdor;

U'_{Σ} - fazalararo sirtning bir birlik yuzasiga nisbatan olingan ichki energiya;

$$W'_{\Sigma} = \frac{\Sigma'}{\delta S_{12}} \frac{d}{dt} (\delta S_{12}), \quad (2.1.4b)$$

δS_{12} - fazalararo sirt elementi.

Bu tenglamalardagi massa oqimi ξ'_i , impuls oqimi $\xi_i^{(z)'}$, energiya oqimi $\xi_i^{(e)'}$ hamda sirt kuchlarining ishi va issiqlik oqimlarini ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \xi'_i &= -\rho_i^0 (\bar{v}'_i \cdot \bar{n}'_i - N'_i), (N'_i = -N'_2) \\ \xi_i^{(z)'} &= \xi'_i \bar{v}'_i + \bar{\sigma}_i^{rk} n_i^{rk}, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\xi_i^{(e)'} = \xi'_i (u'_i + \frac{1}{2} (v'_i)^2) + \bar{\sigma}_i^{rk} n_i^{rk} \cdot \bar{v}'_i - q_i^{rk} n_i^{rk}, (i=1,2; \bar{n}'_1 = -\bar{n}'_2)$$

Bu yerda N'_i - fazalararo sirt S_{12} ning i - nchi fazaga tashqi birlik normal $\bar{n}'_i$ bo'ylab ko'chishi (agar S_{12} ga tegishli M nuqta shu nuqtada o'tqazilgan tashqi birlik normal vektor $\bar{n}'_i$ bo'ylab ko'chsa, $N'_i > 0$). Keyingi mulohazalarda $\bar{n}' = n'_2$ deb, ya'ni $\bar{n}'$ ikkinchi fazaga nisbatan tashqi normal deb qaraladi

$$\bar{\sigma}_i^{rn} = \bar{\sigma}_i^{rk} n_i^{rk}, q_i^{rn} = q_i^{rk} n_i^{rk}, v_i^{rn} = v_i^{rk} n_i^{rk} (\bar{n}' = \bar{n}'_2 = -\bar{n}'_1) \quad (2.1.6)$$

Σ sirtning vaqt davomida o'zgarishi tufayli yuz beradigan energiyaning o'zgarishini $(\Delta \varepsilon'_{\Sigma})$ e'tiborga olmasa ham bo'ladigan hollarda (2.1.4) tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladi :

$$\begin{aligned} \rho_i^0 (v_i^{rn} - N') &= \rho_2^0 (v_2^{rn} - N') = \xi'_1 = -\xi'_2, (N' = N'_2) \\ \bar{\sigma}_2^{rn} - \bar{\sigma}_1^{rn} &= \xi'_2 (\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2) + \Delta \bar{\sigma}'_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$q_2^{rn} - q_1^{rn} = \xi'_2 [u'_2 - u'_1 + \frac{1}{2} (v'_2)^2 - \frac{1}{2} (v'_1)^2] + \bar{\sigma}_2^{rn} \cdot \bar{v}'_2 - \bar{\sigma}_1^{rn} \cdot \bar{v}'_1$$

Amalda impulslar tenglamasida normal kuchlanishlarning fazaviy o'tishlar tufayli sakrashi $\xi'_2 (\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2)$ ni tashlab yuborsa bo'ladi, ya'ni impulslar tenglamasini

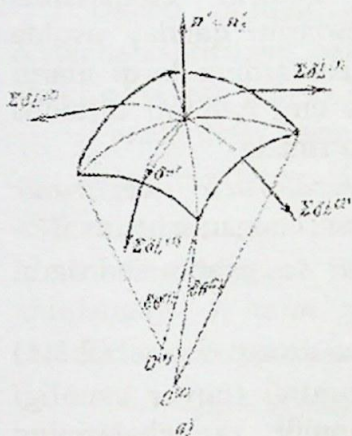
$$\bar{\sigma}_2'^n = \bar{\sigma}_1'^n + \Delta \bar{\sigma}_\Sigma' \quad (2.1.7a)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar fazalarning biri suyuqlik yoki gaz bo'lib, fazaviy o'tishlar va sirt tarangligi mavjud bo'lmasa ($\xi_1' = \xi_2' = 0, \Delta \bar{\sigma}_\Sigma' = 0$), S_{12} sirtida tezlikning nafaqat normal tashkil etuvchilari, balki urinma tashkil etuvchilarni ham uzluksiz deb qabul qilish mumkin. Bu holda (2.1.7) tenglamalardan S_{12} sirtida

$$\bar{v}_1' = \bar{v}_2', \bar{\sigma}_1'^n = \bar{\sigma}_2'^n, q_1'^n = q_2'^n \quad (\xi_1' = \xi_2' = 0, \Delta \bar{\sigma}_\Sigma' = 0) \quad (2.1.7b)$$

shartlar O'rinni bO'lishi kelib chiqadi.



Rasm 2.2

Fazalarning biri suyuqlik yoki gaz bo'lgan holda fazalararo sirt (Σ -faza) ni ixtiyoriy δl chizig'i bo'ylab $\Sigma' \delta l$ ga teng taranglikka ega bo'lgan yupqa elastik parda deb qarash mumkin (Σ' -sirt taranglik koeffitsienti, n/m). Mazkur sirt taranglik kuchi δl chizig'ining normali va fazalararo sirtning urunmasi bO'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Bu holda sirt taranglik kuchi (2.1.3) ni hisoblash mumkin. Buning uchun fazalararo sirtida to'g'riburchakli kichik $\delta' S_{12}$ element ajratamiz (Rasm 2.2). Ushbu elementni chegaralovchi

$\delta L^{(1)}$ va $\delta L^{(2)}$ chiziqlarning egrilik radiuslari $a^{(1)}$ va $a^{(2)}$, egrilik markazlari $O^{(1)}$ va $O^{(2)}$, qutb burchaklari $\delta \theta^{(1)}$ va $\delta \theta^{(2)}$ bo'lsin, ya'ni $\delta' L = 2(\delta L^{(1)} + \delta L^{(2)})$, $\delta L^{(1)} = a^{(1)} \delta \theta^{(1)}$, $\delta L^{(2)} = a^{(2)} \delta \theta^{(2)}$.

Ushbu munosabatlardan foydalanib, sirt taranglik kuchlarining sirt normaliga proeksiyasi topiladi:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_\Sigma^n &= \frac{1}{\delta' S_{12} \delta l} \oint \Sigma'^n d'l = \frac{2 \Sigma'}{\delta L^{(1)} \cdot \delta L^{(2)}} \left(-\delta L^{(2)} \cdot \frac{\delta \theta^{(1)}}{2} - \delta L^{(1)} \cdot \frac{\delta \theta^{(2)}}{2} \right) = \\ &= -\Sigma' \left(\frac{1}{a^{(1)}} + \frac{1}{a^{(2)}} \right) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Agar $\delta' S_{12}$ ni sferaning elementi deb qarash mumkin bo'lsa ($\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = a$), sirt taranglik kuchining normalga proeksiyasi (sirt bosimi yoki Laplas bosimi $\Delta\sigma_{\Sigma}^n$)

$$\Delta\sigma_{\Sigma}^n = -2\Sigma' / a \quad (2.1.9)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

2.2. O'rtachalashtirilgan parametrlar va ularning xossalari

O'rtachalashtirilgan tenglamalarni keltirib chiqarishda harakatning o'rtacha tavsiflovchi parametrlarini qanday usulda kiritish unchalik muhim emas. Mazkur usullarning farqi ularni asoslashda, asosiy farazlarni tanlashda va eng muhimi o'rtacha miqdorlarni tajribada aniqlash usullarida ko'rinadi.

Asosiy gipotezalar. Fazalar va fazalararo chegaralar bo'yicha o'rtachalashtirish. δs sirt bilan chegaralangan δV -makrohajm va elementar tekis makrosirt δs ushbu shartlarni qanoatlantirsin

$$\delta V \approx (\delta x)^3, \quad \delta s \approx (\delta x)^2, \quad L \gg \delta x \gg a \gg \delta' x \quad (2.2.1)$$

Bu yerda L — masalaning xarakterli uzunligi (quvur uzunligi yoki diametri, biror ta'sir natijasida muhit zarrachalarining nuayyan holatidan chetlanishi (buni qo'zg'alish deb ataymiz), o'rnishining xarakterli masofasi va hokazo), a — aralashma hosil bulvchi qo'shiluvchilarning (vklyucheniy) kattaligi (tomchi yoki ifakcha radiusi, yupqa parda qalinligi va hakazo)

Biror ixtiyoriy M nuqta atrofida ajratilgan δV hajm va δs tekis sirtlarning geometrik markazlari

$$\bar{r} = \frac{1}{\delta V} \int \bar{r}' dV = \frac{1}{\delta s} \int \bar{r}' d's \quad (2.2.2)$$

mazkur M nuqta bilan ustma-ust tushsin. Ushbu hajm va tekis sirtning i - nchi fazaga ($i=1,2$) mos keluvchi qismlarini δV_i va δs_i orqali,

$$\delta V = \delta V_1 + \delta V_2, \quad \delta s = \delta s_1 + \delta s_2, \quad (2.2.3)$$

va δV hajm ichidagi fazalararo sirtini esa δS_1 orqali belgilaymiz.

O'rtachalashtirilgan miqdorlar manoga ega bo'lishi uchun va ularni tavsiflash mikromashtabli miqdorlarni tavsiflashga qaraganda haqiqatan osonroq bo'lishi uchun mazkur o'rtachalashtirilgan miqdorlar barqaror, regulyar va nufuzli bo'lishini taminlash lozim.

Bu esa quydagilarni taqazo qiladi.

Birinchidan aralashma harakat qilayotgan sohaning r radius-vektor bilan aniqlanuvchi ixtiyoriy nuqtasi atrofida yuqorida zikr qilingan kichik ($\delta V \ll L^3$) lekin yetarli darajada nufuzli δV ($\delta V \gg a^3$) hajm va δs ($L^2 \gg \delta s \gg a^2$) tekis sirt mavjud.

Ushbu nufuzli δV va δs larning barcha nuqtalarida o'rtachalashtirilgan parametrlarning qiymati δx ga va δs ning shakliga (sfera, kub va h.) bog'liq emas.

Fazalarning hajm konsentratsiyasi α_{V_i} , sirt konsentratsiyasi α_{s_i} , nisbiy fazalararo sirt (yoki aralashmaning bir birlik hajmidagi Σ -faza sirti) S_{12} larni hamda δV_i , δs_i va δS_{12} bo'yicha o'rtachalashtirilgan turli miqdorlarni r radius-vektor bilan aniqlangan δV hajm yoki δs sirt markaziga mos keluvchi miqdorlar deb qarash mumkin. Bu yerda

$$\alpha_{V_i} = \frac{\delta V_i}{\delta V} (\alpha_{V_1} + \alpha_{V_2} = 1), \alpha_{s_i} = \frac{\delta s_i}{\delta s} (\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} = 1),$$

$$S_{12} = \frac{\delta S_{12}}{\delta V} \quad (2.2.4)$$

Ikkinchidan, ushbu

$$\langle \phi'_i \rangle_{V_i} = \frac{1}{\delta V_i} \int \phi'_i dV_i, \langle \phi'_i \rangle_{s_i} = \frac{1}{\delta s_i} \int \phi'_i d's_i,$$

$$S_{12} \langle \phi'_i \rangle_{12} = \frac{1}{\delta V} \int \phi'_i d's$$

$$(2.2.5)$$

O'rtachalashtirilgan miqdorlar L tartibga ega masofalarda regulyar funksiyalar bo'lsin.

$$\frac{\partial \langle \phi'_i \rangle_{V_i}}{\partial x} \sim \frac{\partial \langle \phi'_i \rangle_{s_i}}{\partial x} \sim \frac{\phi_0}{L} \quad (2.2.6)$$

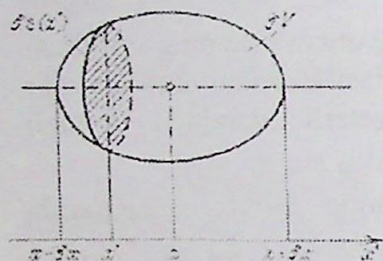
Bu yerda ϕ — qaralayotgan jarayondagi biror miqdor, ϕ_0 uning xarakterli qiymati

Ushbu farazlardan.

$$\langle \varphi'_i \rangle_{V_i} = \langle \varphi'_i \rangle_{S_i} = \langle \varphi'_i \rangle_i, \quad \alpha_{i1} = \alpha_{i2} = \alpha_i (\alpha_1 + \alpha_2 = 1) \quad (2.2.7)$$

$$\langle \varphi' \rangle_V = \langle \varphi' \rangle_S = \langle \varphi' \rangle = \alpha_1 \langle \varphi'_1 \rangle_1 + \alpha_2 \langle \varphi'_2 \rangle_2 \quad (2.2.8)$$

$$\langle \varphi' \rangle_{V_i} = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \varphi'_i dV, \quad \langle \varphi' \rangle_{S_i} = \frac{1}{\delta S} \int_{\delta S} \varphi'_i dS$$



Rasm 2.3

tengliklar o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Masalan,

$$\langle \varphi'_i \rangle_{V_i} = \langle \varphi'_i \rangle_{S_i}$$

tenglik quyidagicha isbotlanadi. δV hajmning tekis o'zaro parallel kesimlari oilasi $\delta S(x')$ ($x - \delta x \leq x' \leq x + \delta x$) bo'lsin. Har bir shunday kesimda, uning $\delta S_i(x')$ qismi i -nchi fazani kesib o'tadi (rasm 2.3).

Bundan

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_i \rangle_{V_i} &= \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \varphi'_i dV = \frac{1}{\delta V} \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \int_{\delta S_i} \varphi'_i dS dx' \\ &= \frac{1}{\delta V} \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \langle \varphi'_i \rangle_{S_i} \delta S_i(x') dx' \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. So'nggi integralda o'rta qiymat to'g'risidagi teoremdan foydalansak, ushbu

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_i \rangle_{V_i} &= \left[\langle \varphi'_i \rangle_{S_i} + O\left(\frac{\delta x}{L}\right) \delta x \right] \frac{1}{\delta V} \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \delta S_i(x') dx' = \\ &= \langle \varphi'_i \rangle_{S_i} + O\left(\frac{\delta x}{L}\right) \approx \langle \varphi'_i \rangle_{S_i}, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

tenglik, ya'ni fazalar ichida hajm va sirt bo'yicha o'rtaqalashtirilgan miqdorlar teng ekanligi kelib chiqadi.

Uchinchidan ixtiyoriy V makrohajmlar va S makrosirtlar uchun φ'_i dan V_i, S_i va S_{i2} bo'yicha olingan integrallarni mos o'rtaqalashtirilgan miqdorlar ($\langle \varphi'_i \rangle_{V_i}, \langle \varphi'_i \rangle_{S_i}, \langle \varphi'_i \rangle_{S_{i2}}$) dan olingan integrallar bilan almashtirish mumkin:

$$\int_{V_i} \varphi'_i d'V = \int_V \alpha_{V_i} <\varphi'_i>_{V_i} dV, \quad (2.2.10)$$

$$\int_{S_i} \varphi'_i d's = \int_S \alpha_{S_i} <\varphi'_i>_{S_i} ds, \quad \int_{S_{12}} \varphi'_i d's = \int_V s_{12} <\varphi'_i>_{12} dV$$

Izoh. α_i — skalyar miqdor bo'lib turli yo'nalishdagi (markazi berilgan nuqtada bo'lgan) barcha makrokesimlar uchun bir xil bo'ladi:

$$\alpha_{S_i} = \frac{\delta s_i(\bar{n})}{\delta s(n)}$$

Fazalar bo'yicha o'rtachalashtirilgan miqdorning asosiy xossalari.

1. Fazalar bo'yicha o'rtachalashtirish miqdorlarning tenzor xarakterini va rangini o'zgartirmaydi.

Haqiqatan, agar $\varphi_i^m = \varphi_i^k \cdot n^k$ bo'lsa, berilgan nuqtada o'rinli bo'lgan

$$\int_{\partial V_i} \varphi_i^m d'V = n^k \int_{\partial V_i} \varphi_i^k d'V = \delta V_i n^k <\varphi_i^k> = \delta V_i <\varphi_i^m>$$

tenglikdan ushbu xossa kelib chiqadi:

$$<\varphi_i^m>_i = <\varphi_i^k>_i n^k, \quad <\varphi_i^k>_i = <\varphi_i^k>_i, \quad <\varphi_i^k>_i = <\varphi_i^k>_i n^k \quad (2.2.11)$$

2. O'rtachalashtirish fazalar bo'yicha amalga oshirilganda (δV_i hajm yoki δs_i sirt bo'yicha) vaqt bo'yicha olingan hosilaning o'rtacha qiymati mos funksiya'ning o'rta qiymatidan olingan vaqt bo'yicha hosilaga teng bo'lmaydi:

$$<\frac{\partial \varphi'_i}{\partial t}>_i \neq \frac{\partial <\varphi'_i>_i}{\partial t} \quad (2.2.12)$$

Bu yerda φ'_i - ixtiyoriy differensiallanuvchi skalyar, vektor yoki tenzor funksiya. Bunday funksiya uchun qo'zg'almas $\delta s = \delta s_1(t) + \delta s_2(t)$ sirt bilan chegaralangan va fazoda fiksirlangan $\delta V = \delta V_1(t) + \delta V_2(t)$ makrohajm uchun ushbu tenglik o'rinli

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V_i(t)} \varphi'_i d'V = \int_{\delta V_i(t)} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} d'V + \int_{\delta s_1 + \delta s_2} \varphi'_i N'_i d's, \quad N'_i|_{s_{12}} = 0$$

Bundan (2.2.4) va o'rtacha miqdorning (2.2.5) tarifiga ko'ra,

$$\frac{\partial}{\partial t} [<\varphi'_i>_i \delta V_i] = <\frac{\partial \varphi'_i}{\partial t}>_i \delta V_i + \delta S_{12} <\varphi'_i N'_i>_{12}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. O'rtacha miqdorlar δV hajmining qo'zg'almas markaziga mos keltirilgani uchun chap tomonda hususiy hosila yozilgan. Tenglikning ikkala tomonini δV ga bo'lsak va hajm konsentratsiyasi α_i va nisbiy fazalararo sirt $s_{12} = \delta s_{12} / \delta V$ ni kiritsak, ushbu formulani olamiz

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i < \varphi'_i >_i = \alpha_i < \frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} > + s_{12} < \varphi'_i N'_i >_{12} \quad (2.2.13)$$

Bu yerda $\varphi'_i = 1$ uchun o'rinli bo'lgan $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = s_{12} < N'_i >_{12}$ munosabatdan foydalansak, (2.2.13) ushbu

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial t} < \varphi'_i >_i = \alpha_i < \frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} >_i + s_{12} [< \varphi'_i N'_i >_{12} - < \varphi'_i >_i < N'_i >_{12}] \quad (2.2.14)$$

ko'rinishini oladi.

Agar (2.2.13) ni $i=1$ va $i=2$ lar uchun yozib, ularni $\overline{n}_1 = -\overline{n}_2$ tenglikni va (2.2.8) formulani e'tiborga olib qo'shsak, aralashmaning o'rtacha miqdorlari uchun

$$\frac{\partial < \varphi' >}{\partial t} = < \frac{\partial \varphi'}{\partial t} > + s_{12} < (\varphi'_1 - \varphi'_2) N'_1 >_{12} \quad (2.2.15)$$

munosabatni olamiz. Bundan φ' uzluksiz bo'lsa, aralashma bo'yicha o'rtachalashtirilgan miqdor $< \varphi' >$ dan olingan hosila, uning hosilasi $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ ning aralashma bo'yicha o'rtachalashtirilgan qiymatiga teng. Biroq fazaviy miqdorlar (φ'_i) uchun, ular uzluksiz bo'lgan taqdirda ham bunday tenglik, (2.2.14) formulaga asosan, o'rinli bo'lmaydi.

3. Fazalar bo'yicha o'rtachalashtirish amalga oshirilganda fazoviy koordinatalar bo'yicha hosilaning o'rtacha qiymati o'rtachalashtirilgan miqdorning hosilasiga teng emas:

$$< \nabla^k \varphi'_i >_i \neq \nabla^k < \varphi'_i >_i \quad (2.2.16)$$

Gauss-Ostrogradskiy teoremasiga ko'ra ixtiyoriy differensiallanuvchi vektor yoki tenzor funksiya $\varphi_i^{(n)} = \varphi_i^{(k)} n_i^{(n-k)}$ berilgan bo'lsa, $S_i + S_{12}$ sirt bilan chegaralangan i -nchi faza hajmi V_i uchun

$$\int_{V_i} \nabla^{ik} \varphi_i' dV = \int_{S_i + S_{12}} \varphi_i' n_i^k ds = \int_{S_i} \varphi_i' n_i^k ds + \int_{S_{12}} \varphi_i' n_i^k ds$$

tenglik o'rinli. Bu yerdagi integrallarni (2.2.10) dan foydalanib, o'rtachalashtirilgan miqdordan olingan integrallar bilan almashtiramiz

$$\int_V \alpha_i < \nabla^{ik} \varphi_i' >_i dV = \int_S \alpha_i < \varphi_i'^{ik} >_i n^k ds + \int_{S_{12}} < \varphi_i'^{ik} n_i^k >_{12} dV$$

ushbu tenglikda sirt bo'yicha olingan integralni hajm bo'yicha integral bilan almashtirgandan so'ng hosil bo'lgan tenglik ixtiyoriy makroskopik hajm V uchun o'rinli. Bundan (2.2.13) ga o'xshash

$$\alpha_i < \nabla^{ik} \varphi_i' >_i = \nabla^k \alpha_i < \varphi_i' >_i + s_{12} < \varphi_i'^{ik} >_{12} \quad (2.2.17)$$

formula va (2.2.15) kabi olinadigan

$$< \nabla^{ik} \varphi_i' > = \nabla^k < \varphi_i' > + s_{12} < (\varphi_2' - \varphi_1') n_i^k >_{12} \quad (2.2.18)$$

formula kelib chiqadi. Demak (2.2.16) tengsizlik va vaq bo'yicha hosilaga oid aytilgan tasdiqlar Bu yerda ham o'rinli.

Bu rasm 2.4 da keltirilgan misolda yaqqol ko'rinadi. Rasmda birinchi fazada kamayuvchi $\left(\frac{\partial \varphi_2'}{\partial x} < 0\right)$, ikkinchi fazada (shtrix-langani qatlam)

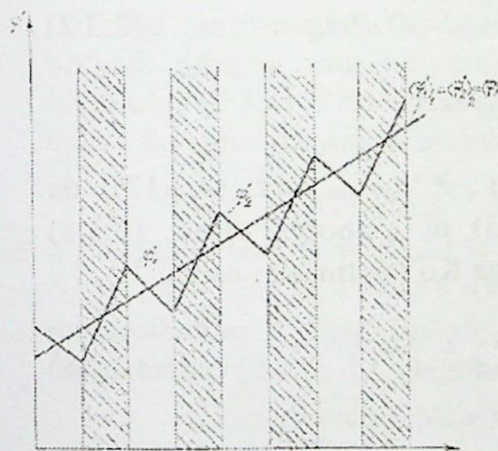
o'suvchi $\left(\frac{\partial \varphi_2'}{\partial x} > 0\right)$ chiziqlar keltirilgan.

Ularga mos kelgan

$$< \varphi' > = < \varphi_1' > = < \varphi_2' >$$

chiziqning monoton o'suvchanligi ko'rinib turibdi. Demak ushbu holda

$$< \frac{\partial \varphi_1'}{\partial x} >_1 < 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} < \varphi_1' >_1 > 0$$



Rasm 2.4

2.3. O'rtachalashtirilgan saqlanish tenglamalari

1. O'rtachalashtirilgan saqlanish tenglamalarining umumiy ko'rinishi.

Agar aralashmalar mikroharakatini tavsiflovchi (2.1.1) saqlanish tenglamalarini elementar makrohajm δV_i bo'yicha integrallansa, (2.2.5) o'rtachalashtirish qoidalariga ko'ra, mazkur (2.1.1) tenglamalar ushbu ko'rinishni oladi :

$$\langle \rho_i^o \frac{d_i e_i'}{dt} \rangle_i = \langle \frac{\partial}{\partial t} \rho_i^o e_i' + \nabla^k \rho_i^o e_i' v_i^k \rangle_i = \langle \nabla^k \psi_i^k \rangle_i + \langle \rho_i^o F_i' \rangle_i \quad (2.3.1)$$

Fazalararo chegaralardagi (2.1.4) tenglamalarni δS_{12} fazalararo sirt bo'yicha integrallash natijasida esa

$$\langle \xi_1' e_1' \rangle_{12} + \langle \xi_2' e_2' \rangle_{12} + \langle \psi_1^k n_1^k \rangle_{12} + \langle \psi_2^k n_2^k \rangle_{12} = \langle \Psi_\Sigma' \rangle_{12}, \quad (2.3.2)$$

$$\Psi_\Sigma' = \{0; \Delta \sigma_\Sigma'; \Delta \varepsilon_\Sigma'\}$$

tenglamani olamiz.

Agar (2.2.13) munosabatda $\phi_i' = \rho_i^o e_i'$ va (2.2.17) da $\phi_i^k = \rho_i^o e_i' v_i^k$ deb olsak va (2.2.13) ni e'tiborga olsak, (2.3.1) tenglamalarning chap tomonini α_i ga Ko'paytmasini ushbu

$$\begin{aligned} \alpha_i < \frac{\partial \rho_i^o e_i'}{\partial t} + \nabla^k \rho_i^o e_i' v_i^k \rangle_i = \frac{\partial}{\partial t} \alpha_i < \rho_i^o e_i' \rangle_i + \\ + \nabla^k \alpha_i < \rho_i^o e_i' v_i^k \rangle_i - s_{12} < \rho_i^o e_i' (N_i' - \bar{v}_i' n_i') \rangle_{12} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

O'rtacha massaviy miqdorlar uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \rho_i^o &= \langle \rho_i^o \rangle_i, \rho_i^o e_i = \langle \rho_i^o e_i' \rangle_i, \rho_i^o \bar{v}_i = \langle \rho_i^o \bar{v}_i' \rangle_i, \rho_i^o u_i = \langle \rho_i^o u_i' \rangle_i \\ J_{12} &= -J_{21} = s_{12} < \xi_2' \rangle_{12} = -s_{12} < \xi_1' \rangle_{12} = -s_{12} < \rho_1^o (v_1^{in} - N_2') \rangle_{12} = \\ &= -s_{12} < \rho_2^o (v_2^{in} - N_1') \rangle_{12}, J_{ii} e_{ii} = s_{12} < \xi_i' e_i' \rangle_{12} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Izoh. Bu yerda $J_{ii} e_{ii} = s_{12} < \xi_i' e_i' \rangle_{12}$ formula bilan aniqlanuvchi e_{ii} miqdorlar fazalararo sirt S_{12} orqali fazaviy o'tish hisobiga i -nchi fazaga kelayotgan (ketayotgan) massa uchun e_i' ning o'rtacha qiymatini belgilaydi.

Endi qaralayotgan miqdorlarning o'rtacha miqdorlardan chetlanishini $\Delta e'_i = e'_i - e_i$ deb belgilansa, ushbu tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\langle \rho_i^0 \Delta e'_i \rangle_i = 0, \langle \rho_i^0 e'_i v_i^{rk} \rangle_i = \rho_i^0 e_i v_i^k + \langle \rho_i^0 \Delta e'_i \Delta v_i^{rk} \rangle_i \quad (2.3.5)$$

Natijada (2.3.3)

$$\alpha_i \langle \rho_i^0 \frac{d'e'_i}{dt} \rangle_i = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i^0 \alpha_i e_i) + \nabla^k (\rho_i^0 \alpha_i e_i v_i^k + \alpha_i \langle \rho_i^0 \Delta e'_i \Delta v_i^{rk} \rangle_i) - J_{ji} e_{ji} \quad (2.3.6)$$

ko'rinishni oladi.

Agar (2.3.6) da $e'_i = 1$ bo'lsa, i -nchi faza uchun massaning saqlanish tenglamasini olamiz.

$$\frac{\partial (\rho_i^0 \alpha_i)}{\partial t} + \nabla_k \rho_i^0 \alpha_i v_i^k = J_{ji}, J_{12} = -J_{21}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (2.3.7)$$

Bu tenglamadan foydalanib mikrozarrachalar traektoriyasi bo'ylab olingan vaqt bo'yicha hosilalarning o'rtacha massaviy qiymatini (2.3.4) o'rtacha miqdorlar orqali ifodalovchi (2.3.6) ni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\alpha_i \langle \rho_i^0 \frac{d'e'_i}{dt} \rangle_i = \rho_i^0 \alpha_i \frac{d e_i}{dt} + \nabla^k \alpha_i \langle \rho_i^0 \Delta e'_i \Delta v_i^{rk} \rangle_i - J_{ji} (e_{ji} - e_i) \quad (2.3.8)$$

Ushbu tenglik va (2.2.17) formulaga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$\alpha_i \langle \nabla^{rk} \psi_i^{rk} \rangle_i = \nabla^k \alpha_i \langle \psi_i^{rk} \rangle_i + s_{12} \langle \psi_i^{rk} n_i^{rk} \rangle_{12}$$

munosabatdan foydalansak, o'rtachalashtirilgan saqlanish tenglamalari (2.3.1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \rho_i^0 \alpha_i \frac{d e_i}{dt} &= \nabla^k \psi_i^k + P_{ji}^{(e\psi)} - J_{ji} e_i + \rho_i^0 \alpha_i F_i = \\ &= \nabla^k \psi_i^k + R_{ji}^{(\psi)} + J_{ji} (e_{ji} - e_i) + \rho_i^0 \alpha_i F_i \\ &(i, j = 1, 2; i \neq j) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$P_{12}^{(e\psi)} + P_{21}^{(e\psi)} = 0, (R_{12}^{(\psi)} + R_{21}^{(\psi)} + J_{12} e_{12} + J_{21} e_{21} = 0) \quad (2.3.9a)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} \rho_i^0 e_i &= \langle \rho_i^0 e'_i \rangle_i, \quad \rho_i^0 F_i = \langle \rho_i^0 F'_i \rangle_i, \quad R_{ji}^{(\psi)} = s_{12} \langle \psi_i^{rk} n_i^{rk} \rangle_{12}, \\ \psi_i^k &= \alpha_i \langle \psi_i^{rk} \rangle_i - \alpha_i \langle \rho_i^0 \Delta e'_i \Delta v_i^{rk} \rangle_i, \quad P_{ji}^{(e\psi)} = R_{ji}^{(\psi)} + J_{ji} e_{ji} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_i' &= \bar{v}_i', & u_i' &+ \frac{1}{2}(v_i')^2, & \left[\bar{r}' \times \bar{v}_i' \right] \\
 \psi_i'^k &= \bar{\sigma}_i'^k, & \sigma_i'^{kj} v_i'^j &- q_i'^k, & \left[\bar{r}' \times \bar{\sigma}_i'^k \right] \\
 F_i' &= \bar{g}_i', & g_i'^j v_i'^j &, & \left[\bar{r}' \times \bar{g}_i' \right]
 \end{aligned}
 \quad (2.3.9b)$$

Izoh 1. (2.3.9b) ning birinchi ustuni i -nchi faza uchun impulsning, ikkinchi ustuni – energiyaning va uchinchi ustuni impuls momentining saqlanish tenglamalariga mos miqdorlarni beradi.

Izoh 2. Σ -faza uchun saqlanish tenglamalari (2.3.9a) da fazalararo sirtning ta'siri (q. (2.1.3), (2.1.4a) va (2.1.4b)) e'tiborga olinmagan:

$$\Delta \sigma_{\Sigma}' = 0, \Delta \varepsilon_{\Sigma}' = 0, \langle \Delta \Psi_{\Sigma}' \rangle_{12} = 0 \quad (2.3.10)$$

Faza massasining yuqorida olingan (2.3.7) o'rtachalashtirilgan tenglamasi umumiy ko'rinishda yozilgan (2.3.9) saqlanish tenglamasidan ham $e_i' = 1, \psi_i'^k = 0, F_i' = 0$ bo'lganda kelib chiqadi. Agar (2.3.9a) va (2.3.9) larda $e_i', \psi_i'^k, F_i'$ larni (2.3.9b) ning birinchi ustunidagi qiymatlari bilan almashtirsak, i -nchi faza hamda Σ — faza uchun impuls tenglamalari olinadi:

Bu yerda fenomenologik yondashuvdan farqli O'laroq, kuchlanish tenzori $\rho_i \frac{d_i \bar{v}_i}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \bar{P}_{ji} - J_{ji} \bar{v}_i + \rho_i \bar{g}_i = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \bar{R}_{ji} - J_{ji} (\bar{v}_i - \bar{v}_{ji}) + \rho_i \bar{g}_i$

($i, j = 1, 2; i \neq j$)

$$(2.3.11)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{12} + \bar{P}_{21} &= 0, & (\bar{R}_{12} + \bar{R}_{21} &= J_{12}(\bar{v}_{21} - \bar{v}_{12})), & \bar{P}_{ji} &= \bar{R}_{ji} + J_{ji} \bar{v}_{ji}, \\
 J_{ji} \bar{v}_{ji} &= s_{12} \langle \bar{\sigma}_i'^k v_i'^j \rangle_{12}, & \sigma_i'^{kj} &= \alpha_j \left[\langle \sigma_i'^{kj} \rangle_i - \langle \rho_i^v \Delta v_i'^k \Delta v_j'^j \rangle_i \right], & (2.3.11a) \\
 \bar{R}_{ji} &= s_{12} \langle \bar{\sigma}_i'^k n_i'^k \rangle_{12}
 \end{aligned}$$

$\sigma_i'^{kj}$ va fazalararo ta'sirlarni xarakterlovchi J_{ji}, P_{ji} miqdorlarning ifodalari keltirilgan. Chunonchi $\bar{P}_{ji}$ fazalararo kuch $\bar{R}_{ji}$ hamda fazaviy o'tishlar $J_{ji} \bar{v}_{ji}$ hisobiga fazalararo impuls almashishini aniqlaydi, $J_{ji}(\bar{v}_{ji} - \bar{v}_i)$ esa reaktiv kuch. Yuqorida kuchlanishlarning fazaviy o'tishlar tufayli yuz beradigan

sakrashini e'tiborga olmasa ham bo'ladi (q.(2.1.7a)) deb qayd etilgan edi. Bundan va (2.3.10) ga ko'ra

$$\overline{R}_{21} + \overline{R}_{12} = 0 \quad (2.3.12)$$

deb qabul qilish mumkin.

O'rtacha kuchlanish tenzori σ_i^{ij} aralashmada ajratilgan hajmning chegaraviy sirti $\mathcal{S}$ bo'ylab i -nchi fazaga ta'sirini aniqlaydi. Ushbu tenzorning birinchi qo'shiluvchisi $\langle \sigma_i^{ij} \rangle_i$ -i-nchi fazaning o'rtacha kuchlanish tenzorini, ikkinchi qo'shiluvchisi

$$\Pi_i^{ki} = -\alpha_i \langle \rho_i^{(0)} \Delta v_i^{(k)} \Delta v_i^{(i)} \rangle_i \quad (2.3.13)$$

esa impulsining pulsatsiyali ko'chishini aniqlaydi va pulsatsiya kuchlanishi tenzori deb ataladi.

O'rtacha kuchlanish tenzorining simmetrikligi

$$\sigma_i^{ki} = \sigma_i^{ik} \quad (2.3.14)$$

mikrokuchlanishlar tenzorining simmetrikligidan kelib chiqadi.

Dispers aralashma laminar harakat qilganda, dispers fazaning betartib (xaotik) harakati deyarli sezilmas darajada bo'lsa ($\Delta v_2^i = 0$), tashuvchi (asosiy) faza tezliklarining pulsatsiyasi fazalarning nisbiy harakatiga (sirpanishiga) bog'liq bo'ladi. Bu holda asosiy faza tezliklari pulsatsiyasining xarakterli qiymati

$$\Delta v_1^i \sim v_1 - v_2$$

tartibga ega bo'ladi va mazkur pulsatsiyalar qamrab olgan hajm esa dispers (qo'shiluvchi) faza hajmi tartibida bo'ladi.

Shunday qilib

$$\alpha_2 \rho_2^0 \langle \Delta v_2^{(k)} \Delta v_2^{(i)} \rangle_2 = 0, \quad \alpha_1 \langle \rho_1^{(0)} \Delta v_1^{(k)} \Delta v_1^{(i)} \rangle_1 \sim \alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 (v_1 - v_2)^2$$

Impulslarning makroskopik ko'chishi $\rho_i^0 \alpha_i v_i^k v_i^i, (i, j=1,2)$ miqdorlar bilan aniqlanadi. Shu sababli $\alpha_2 \ll 1$ va $|\bar{v}_1 - \bar{v}_2|/v_i \ll 1$ bo'lganda, pulsatsiya impulslarining ko'chishi makroskopik impulslarning ko'chishiga nisbatan ancha kichik bo'ladi.

2. Fazalararo bosim kuchlarining bosh vektori.

Fazalarning impulslar tenglamasi (2.3.11) ning o'ng tomonidagi fazalarning sirt kuchlari bosh vektori (q. (2.2.17))

$$\alpha_i \langle \nabla^{(k)} \bar{\sigma}_i^{(k)} \rangle_i = \nabla^k \alpha_i \langle \bar{\sigma}_i^{(k)} \rangle_i + \bar{R}_{\mu} \quad (2.3.15)$$

ni batafsilroq qaraylik. Bu yerdagi fazalararo o'zaro ta'sir kuchini

$$\bar{R}_{\mu} = s_{12} \langle \bar{\sigma}_1^{(k)} n_1^{(k)} \rangle_{12} = \bar{R}_{12}^{(p)} + \bar{R}_{\mu}^{(r)},$$

$$\bar{R}_{12}^{(p)} = -s_{12} < p'_i \bar{n}'_i >_{12}, \quad \bar{R}_{12}^{(\tau)} = s_{12} < \tau'_i n'_i >_{12} \quad (2.3.16)$$

ko'rinishda, ya'ni bosim kuchlari ta'siri bilan bog'liq $\bar{R}_{12}^{(p)}$ va fazalararo sirtdagi kuchlanish tenzorining deviatori $\bar{R}_{12}^{(\tau)}$ ning ta'siri bilan bog'liq kuchlarning yig'indisi sifatida yozish mumkin.

Kuchlanish tenzorining gidrostatik qismi $< \sigma'_{ikk} >_i$ i -nchi fazadagi o'rtacha bosimni beradi:

$$< p'_i >_i \equiv p_i = -\frac{1}{3} (< \sigma'_{11} >_i + < \sigma'_{22} >_i + < \sigma'_{33} >_i) \quad (2.3.17)$$

Bosim kuchlarining bosh vektori $\bar{R}_{12}^{(p)}$ ni batafsilroq yoritish uchun birinchi fazaning bosim pulsatsiyalari yo'q bo'lgan ($\Delta p'_i = 0$) aralashmani qaraymiz. Bu holda ixtiyoriy δV_i hajmdagi (p'_i) bosimning taqsimlanishi ushbu

$$p'_i = p_i + (\nabla^k p_i) \Delta x'^k + O((\Delta x')^2) \quad (2.3.18)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda p_i va $\nabla^k p_i$ o'rtachalashtirilgan miqdorlar $< p'_i >_i$ va $\nabla^k < p'_i >_i$ larning qaralayotgan δV hajmning markazidagi fiksirlangan qiymati ($\Delta \bar{x}' = (\Delta x'^1, \Delta x'^2, \Delta x'^3)$ mazkur markazdan boshlab hisoblanadi).

Bundan

$$\begin{aligned} -\bar{R}_{21}^{(p)} = s_{12} < p'_i n'_i >_{12} &= \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V_i} [p_i + (\nabla^k p_i) \Delta x'^k] \bar{n}'_i d's = \\ &= \frac{1}{\delta V} \left\{ p_i \int_{\delta V_i} \bar{n}'_i d's + \nabla^k p_i \int_{\delta V_i} \Delta x'^k \bar{n}'_i d's - p_i \int_{\delta V_i} \bar{n}'_i d's - \nabla^k p_i \int_{\delta V_i} \Delta x'^k \bar{n}'_i d's \right\} \end{aligned}$$

Birinchi va ikkinchi integrallarga Gauss-Ostrogradskiy formulasini qo'llasak, birinchi integral nolga tengligi va ikkinchi integral esa

$$\int_{\delta V_i} \frac{\partial}{\partial x^m} (\Delta x'^k) \bar{e}^m d'V = \delta^{km} \bar{e}^m \delta V_i = \bar{e}^k \alpha_i \delta V \quad (\bar{x}' = x'^k \bar{e}^k)$$

tenglik bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Endi (2.2.10) formulalarni eslasak va Gauss-Ostrogradskiy formulasidan foydalansak, uchinchi va to'rtinchi integrallarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_{\delta V_i} n'_i d's = \int_{\delta V_i} \alpha_i \bar{n} ds = \int_{\delta V_i} (\nabla^m \alpha_i) \bar{e}^m d'V = (\bar{\nabla} \alpha_i) \delta V,$$

$$\int_{\partial V} \Delta x'^k \bar{n}_i' d's = \int_{\partial V} \alpha_i \Delta x'^k \bar{n} ds = \int_{\partial V} \frac{\partial (\alpha_i \Delta x'^k)}{\partial x^m} \bar{e}^m dV = \\ = \bar{\nabla} \alpha_i \int_{\partial V} \Delta x'^k dV + \bar{e}^m \alpha_i \delta^{km} \delta V = \bar{e}^k \alpha_i \delta V$$

Bu yerda $\Delta x'^k$ qaralayotgan makrohajm δV ning markazidan hisoblangani uchun so'ngi integral nolga teng.

Shunday qilib fazalararo sirt kuchining bosim bilan aniqlanuvchi qismi ($\Delta p_i' = 0$ bo'lganda) ushbu formula bilan aniqlanadi:

$$\bar{R}_{21}^{(p)} = -\alpha_i \bar{\nabla} p_i + p_i \bar{\nabla} \alpha_i + \alpha_i \bar{\nabla} p_i = p_i \bar{\nabla} \alpha_i \quad (2.3.19)$$

Mazkur natija (1.4.14) formula yozilganda qilingan farazni asoslaydi. Ushbu oqim naychasi ko'ndalang kesimi yuzasining o'zgarishi bilan bog'liq (biroq aralashmaning tarkibiga bog'liq bo'lmagan) kuchga ilk bor X.A.Raxmatulin tomonidan e'tibor berilgan.

Umumiy holda $\bar{R}_{\beta}^{(p)}$ kuch tarkibida bosimning kichik masshtabli pulsatsiyalari $\Delta p_i'$ tufayli aralashma tarkibiga bog'liq boshqa kuchlar ham bo'ladi. Xususan zarrachalarning suyuqlikdagi aylanma harakatida Magnus kuchi, ikkinchi fazaning birinchi fazaga nisbatan tezlanma harakatidagi qo'shib olinga massalar kuchi va h.k. Ularning yig'indisini $\Delta \bar{R}_{21}^{(p)}$ bilan belgilasak,

$$\bar{R}_{\beta}^{(p)} = p_i \bar{\nabla} \alpha_i + \Delta \bar{R}_{\beta}^{(p)}, \quad \bar{R}_{\beta} = p_i \bar{\nabla} \alpha_i + \Delta \bar{R}_{\beta}^{(p)} + \bar{R}_{\beta}^{(e)} \quad (2.3.20)$$

bo'ladi. Bu impulsar tenglamasining o'ng tomonini ikki xil ko'rinishda yozish imkonini beradi:

$$\rho_i \frac{d_i \bar{v}_i}{dt} = -\bar{\nabla} \alpha_i p_i + \nabla^k \alpha_i < \bar{\tau}_i'^k >_i + \bar{R}_{\beta} + \nabla^k \bar{\Pi}_i^k + J_{\beta} (\bar{v}_{\beta} - \bar{v}_i) + \rho_i \bar{g}_i = \\ = -\alpha_i \bar{\nabla} p_i + \nabla^k \alpha_i < \bar{\tau}_i'^k >_i + \Delta \bar{R}_{\beta}^{(p)} + \bar{R}_{\beta}^{(e)} + \nabla^k \bar{\Pi}_i^k + J_{\beta} (\bar{v}_{\beta} - \bar{v}_i) + \rho_i \bar{g}_i \quad (2.3.21)$$

3. Fazalar energiyasining o'rtachalashtirilgan tenglamasi. Fazalarning pulsatsiyali harakatining energiya tenglamasi.

Fazalarning energiya tenglamasi (2.3.9) dan $e_i', \psi_i'^k, F_i'$ o'rniga (2.3.9b) ning ikkinchi ustunidagi miqdorlarni qo'yib olinadi. Ushbu mikromasshtabli tenglamadan fazalar energiyasining

O'rtachalashtirilgan tenglamasini hosil qilish uchun i -nchi fazaning o'rtacha kinetik energiyasi u_i , ushbu fazaning pulsatsiyali (kichik masshtabli) harakatining o'rtacha solishtirma kinetik energiyasi k_i va mazkur harakatda tashqi massaviy kuchlarning ishi H_i larni kiritiladi:

$$\rho_i^o k_i = \frac{1}{2} \langle \rho_i^o (v_i')^2 \rangle, -\frac{1}{2} \rho_i^o v_i^2 = \frac{1}{2} \langle \rho_i^o (\Delta v_i')^2 \rangle = -\frac{1}{2\alpha_i} H_i^{mm} \quad (2.3.22)$$

$$\rho_i^o H_i = \langle \rho_i^o \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i \rangle - \rho_i^o \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i = \langle \rho_i^o g_i^{tm} \Delta v_i^{tm} \rangle = \langle \rho_i^{tb} \Delta g_i^{tm} \Delta v_i^{tm} \rangle$$

i -nchi faza va aralashmaning to'la energiyasi uchta qo'shiluvchi -ichki energiya, makroharakatning kinetik energiyasi va pulsatsiyali (kichik masshtabli) harakatning kinetik energiyasining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$E_i = u_i + \frac{1}{2} v_i^2 + k_i, \quad E = u + K + k,$$

$$\rho u = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2, \quad \rho K = \frac{1}{2} (\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2), \quad \rho k = \rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 \quad (2.3.23)$$

o'rtachalashtirilgan fazalararo energiya oqimini ham uchta o'shiluvchining yig'indisi sifatida yozish mumkin:

$$E_{ji} = W_{ji} + Q_{ji} + J_{ji} (u_{ji} + \frac{1}{2} v_{ji}^2 + \frac{1}{2} (\delta v_i)^2),$$

$$W_{ji} = s_{12} \langle \sigma_i^{kl} n_i^{lk} v_i^{ll} \rangle_{12}, \quad Q_{ji} = -s_{12} \langle q_i^{kl} n_i^{lk} \rangle_{12},$$

$$J_{ji} u_{ji} = s_{12} \langle \xi_i^{ll} u_i^{ll} \rangle_{12}, \quad J_{ji} (\delta v_i)^2 = \langle \xi_i^{ll} (\bar{v}_i - \bar{v}_{ji})^2 \rangle_{12}$$

(2.3.24)

Bu yerda W_{ji} fazalararo kuchlarning ishi hisobiga, Q_{ji} esa S_{12} fazalararo sirt orqali issiqlik almashishi hisobiga va nihoyat E_{ji} fazaviy o'tishlar hisobiga fazalararo energiya almashuvini aniqlaydi.

Yuqorida kiritilgan o'rtacha miqdorlardan tashqari, ajratilgan elementar hajmning tashqi chegarasi α_i bo'ylab i -nchi fazaning o'rtachalashtirilgan energiya almashuvini aniqlovchi, c_i^k va q_i^k miqdorlarni kiritamiz:

$$c_i^k = \alpha_i \left[\langle \sigma_i^{kl} v_i^{ll} \rangle - \langle \rho_i^o (u_i' + \frac{1}{2} (v_i')^2) \Delta v_i^{lk} \rangle \right] =$$

$$= \sigma_i^{kl} v_i^l + \alpha_i \left[\langle \sigma_i^{kl} \Delta v_i^{kl} \rangle_i - \langle \rho_i^{(p)} (\Delta u_i^l + \frac{1}{2} (\Delta v_i^l)^2) \Delta v_i^{kl} \rangle_i \right], \quad (2.3.25)$$

$$q_i^k = \alpha_i \langle q_i^{kl} \rangle_i$$

Endi i -nchi fazaning to'la energiyasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d}{dt} (u_i + k_i + \frac{v_i^2}{2}) &= \nabla^k (c_i^k - q_i^k) + E_{\mu} - J_{\mu} (u_i + k_i + \frac{v_i^2}{2}) + \\ &+ \rho_i g_i^l v_i^l + \rho_i H_i, \quad E_{21} + E_{12} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Ushbu tenglamada yangi qo'shiluvchi k_i paydo bo'lganligi munosabati bilan i -nchi fazaning ichki energiyasi tenglamasini O'rtachalashtirish lozim bo'ladi. Bu tenglama (2.1.1) ning ikkinchi (impulslar tenglamasi) va uchinchi tenglamalari (energiya tenglamasi) yordamida (I bob, § 1 q.) hosil qilinadi:

$$\rho_i^{(p)} \frac{d u_i}{dt} = \sigma_i^{kl} \nabla^k v_i^l - \nabla^k q_i^k = \frac{\rho_i^{(p)}}{\rho_i^{(o)}} \frac{d \rho_i^{(o)}}{dt} + \tau_i^{kl} \nabla^k v_i^l - \nabla^k q_i^k \quad (2.3.27)$$

Ushbu i -nchi fazaning ichki energiya tenglamasiga O'rtachalashtirish amalini qo'llaymiz

$$\begin{aligned} \langle \rho_i^{(p)} \frac{d u_i}{dt} \rangle_i &= \langle \sigma_i^{kl} \nabla^k v_i^l \rangle_i - \langle \nabla^k q_i^k \rangle_i, \\ \langle \sigma_i^{kl} \nabla^k v_i^l \rangle_i &= \rho_i^{(o)} A_i = \rho_i^{(p)} A_i^{(p)} + \rho_i^{(r)} A_i^{(r)}, \\ A_i^{(p)} &= \langle \frac{\rho_i^{(p)}}{\rho_i^{(o)}} \frac{d \rho_i^{(o)}}{dt} \rangle_i, \quad A_i^{(r)} = \langle \tau_i^{kl} \nabla^k v_i^l \rangle_i \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Bu yerda A_i — ichki kuchlarning i -nchi fazaning bir birlik massasida bir birlik vaqt davomida bajargan ishi; $A_i^{(p)}$ — ichki bosim kuchlarining siqilish yoki kengayish bilan bog'liq ishi, $A_i^{(r)}$ esa yopishqoqlik yoki siljish ichki kuchlanishlarining ishi.

Endi (2.3.8) va (2.2.17) formulalardan foydalanib (mos ravishda $c_i^l = u_i^l$ va $\varphi_i^k = q_i^k$ uchun), (2.3.28) dan i -nchi faza uchun o'rtachalashtirilgan issiqlik oqimi tenglamasini olamiz:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d u_i}{dt} &= \rho_i A_i - \nabla^k q_i^k + Q_{\mu} - \nabla^k \Gamma_i^k + J_{\mu} (u_{\mu} - u_i), \\ \Gamma_i^k &= \alpha_i \langle \rho_i^{(p)} u_i^l \nabla v_i^{lk} \rangle_i = \alpha_i \langle \rho_i^{(p)} \Delta u_i^l \Delta v_i^{lk} \rangle_i \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Ushbu tenglamani va impulsar tenglamasidan kelib chiqadigan, ko'rinishi (1.4.7) bilan bir xil tirik kuch tenglamasini to'la energiya tenglamasi (2.3.26) dan ayirsak, pulsatsiyali (kichik masshtabli) harakatning energiya tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{d_i k_i}{dt} &= \sigma_i^{ki} \nabla^k v_i^j - \rho_i A_i + W_{ji} - R_{ji}' v_i^j + \nabla^j \Lambda_i' + \rho_i H_i + J_{ji} (k_{ji} - k_i), \\ \Lambda_i^k &= -\alpha_i \left[\frac{1}{2} \langle \rho_i'' (\Delta v_i^j)^2 \Delta v_i^k \rangle_i - \langle \sigma_i'^{km} \Delta v_i'^m \rangle_i \right], \\ k_{ji} &= \frac{1}{2} (v_{ji} - v_i)^2 + \frac{1}{2} \delta v_i^2 \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Bu yerda Λ_i' pulsatsiyali harakat hisobiga va mazkur harakatda sirt kuchlarining ishi hisobiga hosil bo'lgan energiya oqimi.

Shunday qilib o'rtachalashtirish usuli fazalarning pulsatsiyali harakati ta'sirini hisobga olish imkonini va fazalardagi kuchlanish tenzori, fazalararo o'zaro ta'sirning intensivligi, turli xil energiya oqimlari kabi makroskopik miqdorlarni aniqlovchi ifodalarni olish imkonini berdi.

III BOB. MONODISPERS TO'QNASHUVSIZ ARALASHMALAR MEXANIKASI TENGLAMALARI

3.1. Dispers aralashmalar. Uyalar tushunchasi

Agar ikki fazali aralashmaning tashuvchi (asosiy) fazasi suyuqlik yoki gazdan iborat bo'lib, ikkinchi qo'shiluvchi fazani esa dispers zarrachalar deb ataluvchi tomchi, pufakcha yoki qattiq jism zarrachalari tashkil etsa, bunday aralashmani dispers aralashma deb ataladi. Qo'shiluvchi fazani odatda dispers faza deb ataladi va ikkinchi faza ($i=2$) deb belgilanadi. Dispers faza alohida dispers zarrachalar (tomchilar, pufakchalar, qattiq jism zarrachalari) hajmlarining yig'indisiga teng V_2 hajmni egallaydi.

1. Ixtiyoriy elementar hajmdagi dispers zarrachalarning shakli va kattaligi bir xil bo'lgan ikki fazali dispers aralashma monodispers aralashma deb ataladi. Elementar makrohajmlardagi dispers zarrachalar kattaligi turli bo'lgan ikki fazali aralashma polidispers aralashma deb ataladi.

2. Monodispers to'qnashuvsiz aralashmalar harakatini qaralganda, kirish qismida kiritilgan ikkita asosiy farazdan tashqari, quyidagilar ham o'rinli deb qabul qilinadi:

3. Aralashma monodispers, ya'ni har bir elementar makrohajmda dispers faza radiusi a ga teng bo'lgan sferik zarrachalardan iborat va uning hajmi konsentratsiyasi $\alpha_2 \ll 1$ shartni qanoatlantiradi;

4. Dispers zarrachalarning xaotik (pulsatsiyali) va ichki (aylanma harakat va deformatsiya) harakatlarining energiyasi va boshqa effektlarini hisobga olmasa ham bo'ladi.

5. Zarrachalarning bevosita o'zaro ta'siri va to'qnashuvlarini hisobga olmasa bo'ladi.

6. Zarrachalarning parchalanishi, bir-biriga yopishishi yuz bermaydi va yangi zarrachalar hosil bo'lmaydi.

Uyalar. Uyalarining turlari. Dispers aralashmada ixtiyoriy δV makrohajmni ajratib, uni $\delta V = \delta V_1 + \delta V_2$ ta (δV hajmdagi

dispers zarrachalar soniga teng) uyalarga (yacheykalarga) bo'lish mumkin. Bunda δN_r mazkur δV hajm ichida to'raligicha yotuvchi zarrachalar soni, δN_s esa δV ning sirti δS bilan kesishuvchi uyalar soni bo'lib, $1 \ll \delta N_s \ll \delta N$ deb hisoblanadi.

Dispers aralashmalar mexanikasida dispers zarrachalarning sonli konsentratsiyasi (aralashmaning bir birlik hajmidagi dispers zarrachalar soni) tushunchasi ham kiritiladi:

$$n = \frac{\delta N}{\delta V} \approx \frac{\delta N_r}{\delta V} \quad (3.1.1)$$

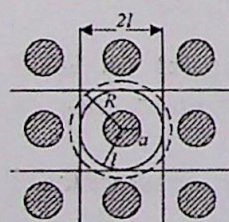
Radiusi a bo'lgan sferik zarrachalarning monodispers aralashmasi dispers fazasining hajmi konsentratsiyasi α_2 sonli konsentratsiya n orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\alpha_2 = \frac{\delta V_2}{\delta V} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \delta N}{\delta V} = \frac{4}{3}\pi a^3 n \quad (3.1.2)$$

Rasm 3.1.da yacheykalarga bo'lishning eng sodda – a radiusi sferik zarrachalar muntazam va tekis joylashgan hol keltirilgan. Uyalar muntazam joylashgan hollarda tashuvchi fazaning pulsatsiyali harakati faqat l radiusi sfera (rasmga qarang) ichidagina bo'ladi va ushbu sferaning tashqarisida esa bunday qo'zg'olishlar yuz bermaydi deb qarash mumkin. Ushbu holda

$$n = \frac{1}{8l^3}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 n = \frac{\pi}{6} \left(\frac{a}{l}\right)^3, \quad s_{12} = \frac{dS_{12}}{dV} = \frac{4\pi a^2}{8l^3} = \frac{\pi a^2}{2l^3}$$

bo'ladi.



Rasm 3.1

Agar jismda zarrachalar orasidagi masofalar ma'lum darajada tekis taqsimlansa, lekin zarrachalarning joylashish yo'nalishi betartib (xaotik) bo'lsa, tashuvchi faza to'la qo'zg'atilgan (rasmda R radiusi sfera) deb qarash mumkin. Ilmiy adabiyotlarda mazkur sxemalardan birmuncha murakkabroqlari ham ko'rilgan. Dispers faza konsentratsiyasi yetarli

darajada yuqori (katta) bo'lgan aralashmalarda dispers zarrachalar fazasidagi nisbiy minimal o'tkazuvchi kesimni xarakterlovchi hamda α_2 va zarrachalarning shakli va joylashishiga bog'liq

miqdor α_1 qaraladi (α_1 — zarrachalar orasidagi o'rtacha o'tkazuvchi kesimga teng).

Zarrachalar markazining ixtiyoriy davriy joylashishini α_2 (hajm konsentratsiyasi) va α_1 (nisbiy minimal O'tkazuvchi kesim) parametrlari yordamida tavsiflash mumkin. Zarrachalar markazi kubik (zichligi eng kichik) va tetraedrik (zichligi eng katta) joylashgan hollar uchun mazkur parametrlar quyidagicha bo'ladi:

$$(\alpha_2)_{\text{cub}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,524, \quad (\alpha_1)_{\text{cub}} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,215$$

$$(\alpha_2)_{\text{tet}} \approx 0,740, \quad (\alpha_1)_{\text{tet}} \approx 0,096$$

Zarrachalarning real joylashishi esa ushbu ikki hol orasida bo'ladi deb qarash mumkin. Zarrachalar markazlari ixtiyoriy davriy joylashgan hol uchun M.A.Goldshtik ushbu munosabatlarni taklif etgan:

$$\alpha_1 = 1 - b\alpha_2^{\frac{2}{3}}, \quad b \approx \frac{1}{2}(b_{\text{cub}} + b_{\text{tet}}) \approx 1,16$$

$$\alpha_2 \approx \frac{1}{2}(\alpha_{2\text{cub}} + \alpha_{2\text{tet}}) \approx 0,63, \quad \alpha_2^{-\frac{1}{2}} \approx 0,126$$

3.2. Fazalar massasining saqlanish qonuni

Fazalar massasining saqlanish tenglamalari (2.3.7) ni dispers zarrachalar sonidan foydalanib, ushbu

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 v_1^k)}{\partial x^k} = nj_{21}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 v_2^k)}{\partial x^k} = nj_{12}, \quad (3.2.1)$$

$$\rho_i = \alpha_i \rho_i^0, \quad nj_{ij} = J_{ij} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda j_{ij} - bitta dispers zarrachaga mos keluvchi $i \rightarrow j$ yo'nalishidagi fazaviy o'tish tezligi.

Yuqoridagi oltinchi farazni e'tiborga olsak, dispers zarrachalarning soni uchun ushbu

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv_2^k)}{\partial x^k} = 0 \quad (3.2.2)$$

uzluksizlik tenglamasi o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Fazalarning dispers zarrachalar sirtidagi tezligining radial tashkil etuvchilarini w_{1a} va w_{2a} deb belgilaymiz. Ular fazalarning birgalikdagi deformatsiyasini xarakterlaydi va fazalar almashishi tufayli bir-biridan farqlanadi. w_{1a} va w_{2a} zarrachalar radiusining tezligi $\frac{d_2 a}{dt}$ (ushbu hol uchun N' ga teng)ni aniqlaydi hamda fazalararo chegaradagi massaning saqlanish tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\rho_{1a}^0(w_{1a} - \dot{a}) = \rho_{2a}^0(w_{2a} - \dot{a}) = \frac{j_{21}}{4\pi a^2}, \quad \left(\dot{a} = \frac{d_2 a}{dt} \right) \quad (3.2.3)$$

Bu yerda ρ_{1a} -fazalarning fazalararo chegaradagi o'rtacha zichligi bo'lib, keyingi mulohazalarda $\rho_{1a}^0 \cong \rho_i^0$ deb qabul qilinadi.

Massaning saqlanish tenglamalari (3.2.1) da $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ekanligini eslab, mazkur tenglamani va hajmiy konsentratsiya'ning oqim chizig'i bo'ylab o'zgarishini quyidagicha yozish mumkin:

$$\alpha_i \frac{d_1 \rho_i^0}{dt} + \rho_i^0 \frac{d_1 \alpha_i}{dt} = n j_n - \rho_i^0 \alpha_i \frac{\partial v_i^k}{\partial x^k}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$$

$$\frac{d_2 \alpha_2}{dt} = \frac{d_2}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 n \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{d_2 n}{dt} + 4 \pi a^2 n \frac{d_2 a}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial v_2^k}{\partial x^k} + \frac{3\alpha_2}{a} \frac{d_2 a}{dt}$$

Agar $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ bo'lishini hisobga olsak va j_{21} ni (3.2.3)

dan keltirib qo'ysak, mazkur tenglamalar

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \frac{d_1 \rho_1^0}{dt} &= -\rho_1^0 \frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_1 v_1^k + \alpha_2 v_2^k) + \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a} \rho_1^0, \\ \alpha_2 \frac{d_2 \rho_2^0}{dt} &= -\frac{3\alpha_2 w_{2a}}{a} \rho_2^0, \quad \frac{d_2 \alpha_2}{dt} - \frac{3\alpha_2}{a} \frac{d_2 a}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial v_2^k}{\partial x^k}, \\ \frac{d_2 a}{dt} &= w_{1a} - \frac{j_{21}}{4\pi a^2 \rho_1^0} = w_{2a} - \frac{j_{12}}{4\pi a^2 \rho_2^0} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

ko'rinishni oladi.

3.3. Fazalar deformatsiyasining birgalik tenglamasi

Agar dispers zarrachalar siqilmas bo'lsa ($\rho_2^0 = \text{const}$), deformatsiyaning birgalik sharti

$$w_{2a} = 0 \quad (3.2.5)$$

tenglik bilan ta'minlanadi. Bu holda fazaviy o'tishlar kinetikasi ham ma'lum bo'lsa, ya'ni j_{21} berilsa, w_{1a} va $\frac{d_2 a}{dt}$ miqdorlar (3.2.3) dan bir qiymatli aniqlanadi.

Pufakchali aralashmalarda ρ_2^0 o'zgaruvchan va $w_{2a} \neq 0$ bo'lgani uchun fazalarning birgalikdagi deformatsiyasining dinamik tenglamalarini jalb qilish lozim bo'ladi. Ushbu tenglamalarni pufakchalarning radial pulsatsiyasini tadqiq qilib olish mumkin. Shu munosabat bilan quyidagi masalani qaraymiz.

Siqilmas suyuqlikning pufakcha atrofidagi sferik simmetriyaga ega harakati. Reley-Lamb tenglamasi. Butun fazoni egallagan va cheksiz uzoqlikdagi nuqtalarda harakatsiz holatda bo'lgan siqilmas suyuqlikning vaqt davomida o'zgaruvchi $r = a(t)$ radiusi sferik pufakcha atrofidagi harakatini qaraymiz. Massaviy kuchlar mavjud emas deb hisoblasak, tezlik maydoni

$$\vec{w}' = w'(r', t) \frac{\vec{r}'}{r'}, \quad w'_\theta = w'_\varphi = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, siqilmaydigan suyuqlik uchun Nave-Stoks va uzluksizlik tenglamalari ushbu

$$\rho_1^0 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + w' \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial r'} + \mu_1 \left[\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) - \frac{2w'}{r'^2} \right], \quad (3.3.1)$$

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 w') = 0 \quad (\rho_1^0, \mu_1 = \text{const})$$

ko'rinishni oladi.

Bu yerda $\vec{r}'$ -boshi $a(t)$ -radiusli pufakcha markazi bilan ustma-ust tushgan radius-vektor, μ_1 -suyuqlikning dinamik yopishqoqlik koeffitsienti.

Ma'lumki $r = \text{const}$ sirtlardagi kuchlanishlar

$$\vec{\sigma}' = \sigma'''\vec{n}, \quad \sigma''' = -p' + 2\mu_1 \frac{\partial w'}{\partial r'}$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Shuning uchun dispers zarrachalar sirtidagi $r' = a$ chegaraviy shartlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
 w' &= w_{1a}, \quad \sigma_{1a}'' = -p_{1a} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial r'} \right)_{r=a}, \quad \sigma_{2a}'' = -p_{2a}, \\
 \xi_2 &= -\xi_1 = \rho_1^0 (\dot{a} - w_{1a}) = \rho_2^0 (\dot{a} - w_{2a}), \quad (\dot{a} = N'), \\
 \sigma_{2a}'' - \sigma_{1a}'' &= \xi_2 (w_{1a} - w_{2a}) - \frac{2\Sigma}{a} \approx -\frac{2\Sigma}{a}
 \end{aligned}
 \quad (3.3.2)$$

Bu yerda $\sigma_{2a}'' = -p_{2a}$ tenglik $\mu_1 \ll \mu_2$ (μ_1 -gazning dinamik yopishqoqlik koeffitsienti), ekanligini e'tiborga olib yozilgan.

Uzluksizlik tenglamasining $w'|_{r=a} = w_{1a}$ shartni qanoatlantiruvchi

$$w' = w_{1a} \frac{a^2}{r^{1,2}} \quad (3.3.3)$$

ko'rinishdagi yechimi mavjudligini va $\bar{w}$ potentsialli vektor ekanligini ko'rish qiyin emas:

$$w' = \nabla^2 \varphi' = A \frac{x'^k}{r'^3}, \quad \varphi' = -\frac{A}{r'} \quad (A(t) = w_{1a} a^2) \quad (3.3.4)$$

Bu yerda tezlik potentsiali φ Laplas tenglamasini va $\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r'} \right)_{r=a} = w_{1a}$ shartni qanoatlantiradi. Agar (3.3.3) ni Nave-Stoks tenglamasiga qo'ysak, kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng bo'ladi. Bundan ushbu holda (3.3.1) tenglama uchun Koshi-Lagranj integrali

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{w'^2}{2} + \frac{p'}{\rho_1^0} = F(t) \quad (3.3.5)$$

o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Chegaraviy shartlarni va tezlik potentsialining ko'rinishini e'tiborga olib quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned}
 r' = a: \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= -\frac{w_{1a} a^2 + 2w_{1a} a \dot{a}}{a}, \quad w' = w_{1a}, \quad p' = p_{1a}, \quad \frac{\partial w'}{\partial r'} = -\frac{2w_{1a}}{a}; \\
 r' = \infty: \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= 0, \quad w' = 0, \quad p' = p_{2a}
 \end{aligned}$$

Ushbu ifodalar yordamida Koshi-Lagranj integrali va (3.3.2) shartlardan klassik Reley-Lamb tenglamasi olinadi:

$$\begin{aligned}
 a\dot{w}_{1a} + \frac{3}{2}w_{1a}^2 &= \frac{p_{1a} - p_{2a}}{\rho_1^0}, \quad \dot{a} = w_{1a} + \frac{\xi_2}{\rho_1^0}, \\
 p_{1a} &= p_{2a} - \frac{4\mu_1 w_{1a}}{a} - \frac{2\Sigma}{a}
 \end{aligned}
 \quad (3.3.6)$$

Eslatma. Suyuqlikda bosimning taqsimlanishi (3.3.4) formulani e'tiborga olib, Koshi-Lagranj integrali (3.3.5) dan topiladi.

Aralashmada pufakchaning yakka emasligi (pufakchaning chekli hajm konsentratsiyasi) va mazkur sferik shaklini saqlagan pufakchalar atrofida suyuqlik $\vec{W}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ tezlik bilan harakat qilishi e'tiborga olinsa, pufakchali aralashma uchun deformatsiyaning birgalik tenglamasi umumlashgan Reley-Lamb tenglamasi bilan aniqlanadi (R.I. Nigmatullin, 1978)

$$(1 - \varphi^{(1)})a \frac{d_2 w_{1a}}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - \frac{2\Sigma}{a}}{\rho_1^0} - \frac{4\mu_1 w_{1a}}{a\rho_1^0} - (1 - \varphi^{(2)})\frac{3w_{1a}^2}{2} + (1 - \varphi^{(3)})\frac{w_{1a}^2}{4} \quad (3.3.7)$$

Bu yerda $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}$ miqdorlar aralashmada yakka pufakcha emas, balki chekli konsentratsiya mavjudligini hisobga olish uchun kiritilgan koeffitsientlardir; p_1 va p_2 fazalardagi o'rtacha bosimlar.

Pufakchalar yacheykasimon joylashgan bo'lib, ular orasidagi masofalar lokal-tekis taqsimlansa va $\alpha_2^4 \ll 1$ O'rinli bo'lsa, mazkur koeffitsientlar uchun ushbu

$$\varphi^{(1)} \cong \frac{1}{\alpha_1} \left(1,1\alpha_2^{\frac{1}{3}} - \alpha_2 \right), \quad \varphi^{(2)} \cong \frac{1}{\alpha_1} \left(1,5\alpha_2^{\frac{1}{3}} - 1,3\alpha_2 \right), \quad \varphi^{(3)} \cong \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (3.3.8)$$

formulalar O'rinli.

Agar pufakchalar orasidagi masofalar xaotik (betartib) taqsimlansa va $\alpha_2^2 \ll 1$ bo'lsa, $\varphi^{(1)} \cong 3,6\alpha_2$, $\varphi^{(2)} \cong 12\alpha_2$ deb olish mumkin.

3.4. Keltirilgan kuchlanishlar tenzori. Dispers zarrachaga ta'sir etuvchi kuchlar. Dispers aralashmada impuls va energiyaning ko'chishini tavsiflovchi vektorlar

O'rtachalashtirilgan kuchlanish tenzorlari va fazalararo kuchlarni dispers aralashmalar uchun birmuncha batafsilroq qaraymiz. Buning uchun rasm 3.2 da tasvirlangan tashqi normal $\vec{n}$ bo'lgan ixtiyoriy elementar tekis makrokesim $\delta s(\vec{n})$ ni

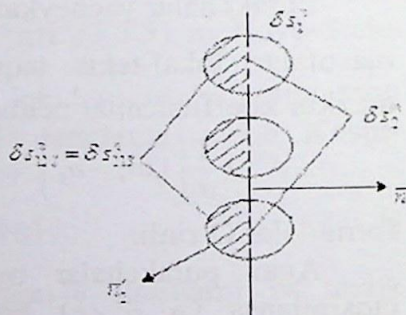
qaraymiz. Uning $\delta s_1 = \alpha_1 \delta s$ qismi birinchi (tashuvchi) faza orqali va $\delta s_2 = \alpha_2 \delta s$ qismi esa dispers zarrachalar orqali o'tadi. Ushbu fazalarning δs_i kesimidagi o'rtacha zo'riqishlar δs kesimning markaziga mos keltirilgan o'rtacha $\langle \sigma_i' \rangle_i^n$ kuchlanishlar bilan ifodalanadi:

$$\langle \sigma_i' \rangle_i^n = \frac{1}{\delta s_i} \int \sigma_i'^n(\bar{n}) d's \quad (\bar{\sigma}_i'^n(\bar{n}) = \bar{\sigma}_i'^k n^k, \quad i=1,2) \quad (3.4.1)$$

Fazalararo chegaraning δs kesim bilan ajratilgan δs_{12s} qismidagi o'rtacha kuchlanishlarni ham δs markaziga mos keltiriladi

$$(\bar{\sigma}_i')_{12s}^n = \frac{1}{\delta s_{12s}} \int \bar{\sigma}_i'^n d's; \quad (\bar{\sigma}_i'^n(\bar{n}) = \bar{\sigma}_i'^k n^k, \quad i=1,2) \quad (3.4.2)$$

Nihoyat, mazkur o'rtachalashtirilishlar natijasida zarrachalarning tenzor xarakter va tenzor rangi o'zgarmaydi deb (postulat sifatida) qabul qilinadi. Aralashmada ixtiyoriy olingan δV makrohajmdagi fazalararo sirt δS_{12} ikki qismdan tashkil topadi: birinchi qism δS_{12V} makrohajm δV ichida to'raligicha yotuvchi (δN_V ta) zarrachalarning sirtlaridan iborat; ikkinchi



Rasm 3.2.

δS_{12s} qism esa chegaraviy sirt δV hajm sirti δS bilan kesilgan dispers zarrachalarning sirtlaridan iborat.

Shunday qilib, fazalararo sirt $\delta S_{12} = \delta S_{12V} + \delta S_{12s}$. Demak, fazalararo sirt kuchlari ham ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'ladi:

$$\bar{R}_{12} = s_{12} \langle \bar{\sigma}_i'^k n_i^k \rangle_{12} = \frac{1}{\delta V} \int \bar{\sigma}_i'^n d's = \frac{1}{\delta V} \int \bar{\sigma}_i'^k n_i^k d's + \frac{1}{\delta V} \int \bar{\sigma}_i'^k n_i^k d's. \quad (3.4.3)$$

δS_{12V} sirt a radiusli δV_V ta sferaning sirtidan tashkil topgani uchun bitta zarrachaga mos keluvchi o'rtacha kuchni

$$\bar{f}_{ji} = \frac{1}{\delta N_V} \sum_{v=1}^{\delta N_V} \int_{\zeta_{12}(v)} \bar{\sigma}'^k n_i'^k d's = \frac{1}{n \delta V} \int_{\delta S_{12V}} \bar{\sigma}'^k n_i'^k d's \quad (n = \frac{\delta N_V}{\delta V})$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\zeta_{12}(v) = 4\pi a^2 - v$ nchi zarrachaning sirti.

O'rtachalashtirishning uchinchi xossasiga ko'ra o'rinli bo'lgan tenglikdan hamda Ostrogradskiy - Gauss formulasidan foydalansak

$$\int_{\delta S_{12S}} \bar{\sigma}'^k n_i'^k d's = \int_{\delta S} (\bar{\sigma}'^k)_{12S} n^k ds = \int_{\delta V} \nabla^k (\bar{\sigma}'^k)_{12S} dV = \nabla^k (\bar{\sigma}'^k)_{12S} \delta V$$

fazalararo kuch ushbu

$$\bar{R}_{ji} = n \bar{f}_{ji} + \nabla^k (\bar{\sigma}'^k)_{12S}$$

formula bilan aniqlanadi.

Dispers muhitlar qaralganda impulsning $\delta S_{i*} = \delta S_i + \delta S_{12S}$ sirt orqali o'tishini aniqlovchi, keltirilgan kuchlanish tenzori deb ataluvchi δs kesimga nisbatan olingan miqdor σ_i^{kl} kiritiladi:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i^n &= \frac{1}{\delta S} \left[\int_{\delta S_i} \bar{\sigma}_i'^n d's + \int_{\delta S_i} \rho_i'^n \Delta \bar{v}_i' \Delta v_i'^n d's + \int_{\delta S_{12S}} \bar{\sigma}_i'^k n_i'^k d's \right] = \\ &= \alpha_i < \bar{\sigma}_i' >_i^n + \alpha_i \bar{\Pi}_i^n + (\bar{\sigma}_i')_{12S}^n = \bar{\sigma}_i^m + (\bar{\sigma}_i')_{12S}^n \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Shu munosabat bilan i -nchi fazadagi sirt kuchlarining bosh vektori o'rtachalashtirilgan kuchlar orqali ikki xil ko'rinishda ifodalanadi:

$$\begin{aligned} \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \bar{R}_{ji} &= \alpha_i < \nabla^k \bar{\sigma}_i'^k >_i + \nabla^k \alpha_i \bar{\Pi}_i^k \equiv \nabla^k \bar{\sigma}_i^{kl} + n \bar{f}_{ji}, \\ \sigma_i^{kl} &= \alpha_i (< \sigma_i' >_i^{kl} + \Pi_i^{kl}), \quad \bar{R}_{ji} = n \bar{f}_{ji} + \nabla^k (\bar{\sigma}_i')_{12S}^k, \quad \sigma_i^{kl} = \sigma_i^{kl} + (\sigma_i')_{12S}^{kl} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Kapillyar kuchlanishlar va juda katta intensivli fazaviy almashishlar yo'q bo'lsa, $\bar{\sigma}_i'(\bar{n}_i') = -\bar{\sigma}_i'(\bar{n}_i')$ tenglik o'rinli bo'ladi va quyidagi qisqaroq belgilashlar kiritiladi:

$$\begin{aligned} (\sigma_i')_{12S}^{kl} &= -(\sigma_i')_{12S}^{kl} \equiv \sigma_{21S}^{kl} = -\sigma_{12S}^{kl}, \quad (\sigma_i')_{12S}^{kl} = -\sigma_{21S}^{kl}, \\ \sigma_{1i}^{kl} &= \alpha_i < \sigma_i' >_i^{kl} + \alpha_i \Pi_i^{kl} + \sigma_{21S}^{kl} = \sigma_i^{kl} + \sigma_{21S}^{kl}, \\ \sigma_{2i}^{kl} &= \alpha_2 < \sigma_2' >_2^{kl} + \alpha_2 \Pi_2^{kl} + \sigma_{12S}^{kl} = \sigma_2^{kl} - \sigma_{21S}^{kl} \end{aligned}$$

Agar dispers zarrachalarning bevosita o'zaro ta'siri (5nchi faraz) bo'lmasa, dispers fazaning keltirilgan kuchlanishi nolga teng bo'ladi:

$$\sigma_{2s}^{ij} = 0 \quad (3.4.6)$$

Kichik konsentratsiyali dispers faza zarrachalarining yacheykasimon joylashish sxemasi doirasida tashuvchi fazaning quyidagi ikkita limit holati uchun yuqoridagi kuchlanishlar aniqlangan:

1. Tashuvchi fazaning harakati siqilmaydigan ideal suyuqlikning potentsialli harakati bilan bir xil bo'lgan inersiya rejimi ($Re_\mu \rightarrow \infty$). Ushbu rejimda aralashmaning bir o'lchamli makroskopik harakatiga tadbiquan keltirilgan kuchlanish ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$\begin{aligned} \sigma_{1s}^{ki} &= -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_{1s}) \delta^{ki} + \alpha_2 \Pi^{ki}, \quad p_{1s} = p_2 - \frac{2\Sigma}{a}, \\ \Pi^{ki} &= -\rho_1^0 \left(w_{1s}^k \delta^{ki} + \frac{1}{2} w_{12}^k w_{12}^i \right), \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

$$Re_\mu = \frac{2a\rho_1^0 w}{\mu_1}, \quad w = (w_{1s}, w_{12}), \quad \vec{w}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

2. Sudraluvchi rejim — tashuvchi fazaning kichik masshtabli harakati o'ta yopishqoq ($Re_\mu \ll 1$), siqilmaydigan suyuqlikning Stoks oqimi bilan bir xil bo'ladi. Bu holda

$$\sigma_{1s}^{ki} = -p_1 \delta^{ki} + \sigma_{\mu}^{ki}, \quad \sigma_{\mu}^{ki} = -\frac{4}{a} \mu_1 \alpha_2 w_{1s}^k \delta^{ki} + 2\mu_1 \left(e^{ki} - \frac{1}{3} e^{mm} \delta^{ki} \right), \quad (3.4.8)$$

$$e^{ki} = \frac{1}{2} (\nabla^k v_1^i + \nabla^i v_1^k), \quad v_1^k = \alpha_1 v_1^k + \alpha_2 v_2^k$$

Bu yerda μ — aralashmaning effektiv yopishqoqlik koeffitsienti, v_1 — aralashmaning hajmiy o'rtacha tezligi.

Dispers faza sferik shakldagi qattiq zarrachalardan iborat bo'lganda μ Eynshteyn formulasi bilan aniqlanadi:

$$\mu = \mu_1 \left(1 + \frac{5}{2} \alpha_2 \right) \quad (3.4.9)$$

Ushbu limit formulalar, yopishqoqlik va inersiya kuchlarini hisobga olib, siqiluvchan suyuqlik uchun umumlashtirilgan.

Aralashmaning bir o'lchamli harakati uchun u quyidagicha yoziladi:

$$\sigma_{\mu}^{kl} = - \left[\alpha_1 p_1 + \alpha_2 \left(p_2 - \frac{2\Sigma}{a} \right) \right] \delta^{kl} + \alpha_2 H^{kl} + \sigma_{\mu}^{kl} \quad (3.4.10)$$

Agar aralashmalar pufakchali bo'lsa, (3.4.10)da Eynshteyn formulasiga o'rniga

$$\mu = \mu_1(1 + \alpha_2) \quad (3.4.11)$$

formuladan foydalanish lozim bo'ladi.

Siqilmaydigan tashuvchi fazaning bir o'lchamli harakati uchun (3.4.8) formula, (3.2.4)ning birinchisini ($\rho_1^0 = \text{const}$) e'tiborga olsak,

$$\bar{\sigma}_{\mu}^l = \sigma_{\mu}^{11} \bar{e}^l, \quad \sigma_{\mu}^{11} = \frac{4(\mu - \mu_1)}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x}$$

ko'rinishni oladi. Demak hajm konsentratsiyasi α_2 kichik, ya'ni (3.4.1) ga ko'ra $\mu - \mu_1 \approx 0$ bo'lsa, kuchlanishning yopishqoqlik hisobiga hosil bo'ladigan qismini tashlab yuborsa bo'ladi:

$$\sigma_{\mu}^{11} \approx 0 \quad (3.4.12)$$

Sirt kuchlari ishining oqimi keltirilgan vektori c_i^n va issiqlik oqimi keltirilgan vektori q_i^n lar ham shunga o'xshash kiritiladi:

$$c_i^n = \frac{1}{\delta} \left[\int_{\delta_i} \bar{\sigma}_i^{nn} \bar{v}_i' d's + \int_{\delta_{21s}} \bar{\sigma}_i'(\bar{n}_i') \bar{v}_i' d's \right],$$

$$q_i^n = \frac{1}{\delta} \left[\int_{\delta_i} q_i^{nn} d's + \int_{\delta_{21s}} \bar{q}_i \bar{n}_i' d's \right] \quad (3.4.13)$$

5-nchi faraz o'rinli bo'lganda (zarrachalarning bevosita o'zaro ta'siri yo'q bo'lsa)

$$c_{2s}^k = q_{2s}^k = 0$$

deb qarash mumkin.

Fazalar orasidagi muvozanatsizlik muhim kasb etgan jarayonlarda (ularning tezliklari, bosimlari va harorati ustma-ust tushmagan hollarda), yopishqoqlik va issiqlik o'tkazuvchanlikning jarayonga ta'siri, Ko'pincha, yupqa fazalararo chegara atrofida kuchliroq bo'ladi. Mazkur, qalinligi zarrachalar kattaligi tartibida bo'lgan yupqa qatlamda mikrotezlik va mikroharoratlarning gradientlari sohaning boshqa qismlariga

qaraganda ancha katta bo'ladi. Yopishqoqlik va issiqlik o'tkazuvchanlik faqat fazalararo ta'sirni aniqlovchi ($\tilde{f}_{12}, q_{21}, h_{21}, j$) parametrlarda seziladi. Bunday jarayonlar uchun (3.4.12) ni inobatga olib, (3.4.10) va (3.4.13) munosabatlarni ushbu

$$\begin{aligned}\sigma_{1r}^{kl} &= -(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_{1w}) \delta^{kl} + \alpha_2 \Pi^{kl}, \\ q_{1r}^k &= 0, \quad c_{1r}^k = -\alpha_1 p_1 v_1^k - \alpha_2 p_{1w} v_2^k + \alpha_2 \Pi^{kl} v_2^l,\end{aligned}\quad (3.4.14)$$

soddalashtirilgan ko'rinishda yozish mumkin.

Tashuvchi suyuqlik tomonidan zarrachaga ta'sir qiluvchi kuch. Dispers aralashmadagi zarrachaga ta'sir qiluvchi $\tilde{f}_{12}$ kuch turli usullar bilan hisoblanadi. Agar harakat tenglamasini tashuvchi fazaning makroskopik tezligi $\tilde{v}_1$ bilan harakat qiluvchi noinersial koordinat sistemasida (unda zarracha $\tilde{w}_{21}$ tezlik va $d_2 \tilde{w}_{21} / dt$ tezlanish bilan harakat qiladi) qaralsa, impuls tenglamarida tashqi massaviy kuchga barcha nuqtalarda bir hil bo'lgan $\rho_1^0 d_2 \tilde{v}_1 / dt$ inersiya kuchini qo'shish lozim bo'ladi:

$$\begin{aligned}-\tilde{f}_{21} &= \tilde{f}_{12} = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_1^0 \left(\frac{d_2 \tilde{v}_1}{dt} - \tilde{g}_1 \right) + \tilde{f} = \tilde{f}_{11} + \tilde{f}_s, \\ \tilde{f}_{11} &= \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_1^0 \left(\frac{d_2 \tilde{v}_1}{dt} - \tilde{g}_1 - w_{21}^k \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x^k} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_1^0 \left(\frac{d_1 \tilde{v}_1}{dt} - \tilde{g}_1 \right) \\ f_s &= f_m + f_\mu, \quad f_m = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_1^0 \left(\frac{d_2 \tilde{v}_1}{dt} - \frac{d_2 \tilde{v}_2}{dt} + \frac{3}{a} \frac{d_2 a}{dt} \tilde{w}_{12} \right), \\ \tilde{f}_\mu &= C_\mu \pi a^2 \frac{\rho_1^0 w_{12}^2}{2 w_{12}}, \quad C_\mu = C_\mu(\text{Re}_{12}, \alpha_2), \quad \text{Re}_{12} = \frac{2a \rho_1^0 w_{12}}{\mu_1}, \\ \tilde{w}_{12} &= \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\end{aligned}\quad (3.4.15)$$

Bu yerdagi $\tilde{f}_{11}$ Arximed kuchi deb ataladi; $\tilde{f}_{12}$ qo'shib olingan massa kuchi ($\tilde{w}_{12}$ tezlik bilan xarakterlanuvchi kichik masshtabli harakatda inersiya effektlari hisobiga paydo bo'ladi), $\tilde{f}_\mu$ — tashuvchi suyuqlikning yopishqoqligi tufayli hosil bo'lgan ishqalanish kuchi, uni ifodalovchi formuladagi $C_\mu = C_\mu(\text{Re}_{12}, \alpha_2)$ parametr eksperimentdan aniqlanadi. Ushbu parametrning analitik ifodasini ikki holda: siqilmas ideal suyuqlikning potentsialli harakati va siqilmas yopishqoq suyuqlikning sudraluvchi harakati (Stoks oqimi) uchun yozish mumkin.

Zarrachalar yoki tomchilar ($\mu_2 \gg \mu_1$) majmui atrofiga suyuqlikning sudraluvchi harakati qaralsa ($Re_{12} \ll 1$), qarshilik koeffitsienti uchun umumlashgan Stoks qonuni o'rinli bo'ladi:

$$C_{\mu} = c_{\mu}^0 \psi_{\alpha}, c_{\mu}^0 = \frac{24}{Re_{12}}, (\bar{f}_{\mu}^0 = 6\pi\mu_1 a \bar{w}_{12}) \quad (3.4.16)$$

Bu yerda c_{μ}^0 va f_{μ}^0 lar yakka zarracha bo'lgan holga mos keladi, ψ_{α} -zarrachalar soni bittadan Ko'p bo'lganda ($\alpha_2 > 0$) kiritiladigan tuzatish koeffitsienti ($\alpha_2 \rightarrow 0, \psi_{\alpha} \rightarrow 1$). Zarrachalar yacheyka sxemasi bo'yicha davriy yoki muntazam joylashganda ψ_{α} ushbu

$$\psi_{\alpha} = [1 - \beta(\alpha_2)]^{-1}, \beta = \frac{3\left(\alpha_2^{\frac{1}{3}} - \alpha_2\right)}{2\alpha_1} \approx \frac{3\alpha_2^{\frac{1}{3}}}{2} \quad (3.4.16 a)$$

formula (J.Happel, H.Brenner, 1965; R.I.Nigmatullin, 1978) bilan aniqlanadi.

Zarrachalar xaotik joylashgan hol uchun esa (G.Batchelor, 1972; A.M.Golovin, V.E.Chijov, 1978; Yu.A.Buevich, 1973; R.I.Nigmatullin, 1978)

$$\psi_{\alpha} = (1 - \alpha_2)^{-m}, m \approx 5 \quad (3.4.16 b)$$

formula olingan.

Ichida qo'zg'almas pufakchalar ($\mu_2 \ll \mu_1$) xaotik joylashgan ideal siqilmas suyuqlikning potentsialli harakati qaralganda ham (3.4.16 b) formulaga kelinadi, biroq bu holda $m=1$ bo'ladi.

3.5. Fazalarning impuls, energiya va issiqlik oqimi tenglamalari

1. Fazalarning impuls tenglamalari.

Fazalar impuls, energiya va issiqlik oqimi tenglamalari (2.3.11) yoki (2.3.21) ni (3.4.5) va (3.4.6) larni hisobga olib, ushbu

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} &= \frac{\partial \bar{\sigma}_1^k}{\partial x^k} + n \bar{f}_{21} + n j_{21} (\bar{v}_{1a} - \bar{v}_1) + \rho_1 \bar{g}_1, \\ \rho_2 \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} &= n \bar{f}_{12} + n j_{12} (\bar{v}_{2a} - \bar{v}_2) + \rho_2 \bar{g}_2, \\ \bar{f}_{21} + \bar{f}_{12} + j_{21} \bar{v}_{1a} + j_{12} \bar{v}_{2a} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Amalda fazaviy o'tishda qatnashayotgan massa impulsining fazalararo chegaradan o'tish jarayonida o'zgarishini hisobga olmasa bo'ladi:

$$|j_{12}(\vec{v}_{2s} - \vec{v}_{1s})| \ll f_{12} \quad (3.5.2)$$

Shu sababli bundan keyin

$$\vec{v}_{1s} = \vec{v}_{2s} = \vec{v}_s, \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \vec{f} \quad (3.5.3)$$

tengliklar o'rinli deb hisoblanadi.

Fazalararo ta'sir kuchi $\vec{f}_{12}$ ning (3.4.15) ko'rinishdagi ifodasidan foydalanilsa, fazalar impulsi tenglamasi (3.5.1) ni bir oz boshqacharoq ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} &= \alpha_1 \frac{\partial \vec{\sigma}_{1s}^k}{\partial x^k} - \alpha_1 n \vec{f}_s + \alpha_1 n j_{21} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \rho_1 \vec{g}_1, \\ \rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} &= \alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{2s}^k}{\partial x^k} + \alpha_2 n \vec{f}_s + \alpha_2 n j_{12} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \rho_2 \vec{g}_2 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Bundan yuqorida (3.4.15) formula bilan aniqlangan fazalararo o'zaro ta'sir kuchini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} n \vec{f}_{12} &= \alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{1s}^k}{\partial x^k} + \alpha_1 n \vec{f}_s + \alpha_2 n j_{21} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \\ n \vec{f}_{21} &= \alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{2s}^k}{\partial x^k} - \alpha_2 n \vec{f}_s + \alpha_2 n j_{12} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \vec{f}_s = \vec{f}_m + \vec{f}_\mu \end{aligned} \quad (3.5.4 a)$$

Bazida $\alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{1s}^k}{\partial x^k}$ kuchni Arximed kuchi deb atashadi.

Agar $\vec{f}_s = \vec{f}_m + \vec{f}_\mu$ ekanligi va $\vec{f}_m$ ning (3.4.15) formuladagi ko'rinishini e'tiborga olsak, (3.5.4) tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \left(\rho_1 + \frac{1}{2} \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \right) \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} - \frac{1}{2} \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} &= \alpha_1 \frac{\partial \vec{\sigma}_{1s}^k}{\partial x^k} - \vec{F} + \alpha_1 n j_{21} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \rho_1 \vec{g}_1, \\ -\frac{1}{2} \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} + \left(\rho_2 + \frac{1}{2} \rho_1^0 \alpha_1 \alpha_2 \right) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} &= \alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{2s}^k}{\partial x^k} + \vec{F} + \alpha_2 n j_{12} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \rho_2 \vec{g}_2, \\ \vec{F} &= \alpha_1 n (\vec{f}_\mu + \vec{f}_s), \vec{f}_s = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho_1^0 \frac{3}{a} \frac{d_2 a}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{aligned}$$

Ushbu tenglamalar esa fazalar tezlanishiga nisbatan yechiladi:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right) \rho_1 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} = \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right) \left[\frac{\partial \vec{\sigma}_{1*}^k}{\partial \vec{x}^k} - n j_{21} \vec{w}_{12} \right] - \vec{F} + \\
& + \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right) \rho_1 \vec{g}_1 + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \rho_2 \vec{g}_2, \\
& \left(1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right) \rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = \frac{3}{2} \alpha_2 \left[\frac{\partial \vec{\sigma}_{1*}^k}{\partial \vec{x}^k} - n j_{21} \vec{w}_{12} \right] + \vec{F} + \\
& + \frac{\alpha_2}{2} \rho_1 \vec{g}_1 + \left(1 + \frac{\alpha_2}{2}\right) \rho_2 \vec{g}_2
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Bazida dispers faza tenglamasini ushbu ko'rinishda yozish qulayroq bo'ladi:

$$(\rho_1^0 + 2\rho_2^0) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = 3\rho_1^0 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} + \frac{2\vec{F}}{\alpha_1 \alpha_2} + 2(\rho_2^0 \vec{g}_2 - \rho_1^0 \vec{g}_1) \tag{3.5.6}$$

Fazalarning mazkur harakat tenglamalarini quyidagi ikki holda birmuncha soddaroq ko'rinishda yozish mumkin:

1. Aralashmaning asosiy tashuvchi fazasi gazdan, qo'shiluvchi fazasi esa kichik konsentratsiyali ($\alpha_2 \ll 1$) qattiq jism zarrachalaridan yoki tomchilardan iborat bo'lsin ($\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \ll 1$).

Bu holda zarrachalar radiusining o'zgarish tezligi kichik bo'lgani tufayli $\dot{f}_a$ ni tashlab yuborish mumkin. Natijada aralashma impulsleri tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d_1 \vec{v}_1}{dt} &= \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_2\right) \frac{\partial \vec{\sigma}_{1*}^k}{\partial \vec{x}^k} - \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_2\right) [n \vec{f}_\mu + n j_{21} \vec{w}_{12}] + \\
&+ \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_2\right) \rho_1 \vec{g}_1 + \frac{\alpha_2}{2} \rho_1 \vec{g}_2, \\
\rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} &= \frac{3}{2} \alpha_2 \frac{\partial \vec{\sigma}_{1*}^k}{\partial \vec{x}^k} + \left(1 - \frac{3}{2} \alpha_2\right) n \vec{f}_\mu - \frac{3}{2} \alpha_2 n j_{21} \vec{w}_{12} + \frac{\alpha_2}{2} \rho_1 \vec{g}_1 + \rho_2 \vec{g}_2, \\
n \vec{f}_m &= \frac{\alpha_2}{2 \alpha_1} \left(\frac{\partial \vec{\sigma}_{1*}^k}{\partial \vec{x}^k} - n \vec{f}_\mu - n j_{21} \vec{w}_{12} + \rho_1 \vec{g}_1 \right)
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

2. Pufakchali suyuqlik. Qo'shiluvchi faza – pufakchalarning ya'ni ikkinchi fazaning hajm konsentratsiyasi kichik $\alpha_2^2 \ll 1$ va

$\left(\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\right)^{-1} \ll 1, |w_{1z} - \dot{a}| \ll \dot{a}$ bo'lsin. Bu holda fazalarning impuls tenglamalari (3.5.5) ni

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d_1 \bar{v}_1}{dt} &= \frac{\partial \bar{\sigma}_{1r}^k}{\partial x^k} + \rho_1 \bar{g}_1, \quad \frac{d_2 \bar{v}_2}{dt} = \frac{3}{\rho_1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{1r}^k}{\partial x^k} + \frac{3}{2\pi a^3 \rho_1^0} (\bar{f}_\mu + \bar{f}_a) + \bar{g}_1, \\ n \bar{f}_\mu &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{1r}^k}{\partial x^k} - n \bar{f}_\mu \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu yerda $|\bar{f}_a| \gg |j_{21} \bar{w}_{12}|$ ekanligi hisobga olingan.

2. Fazalarning energiya tenglamasi.

Geterojen aralashma bir birlik hajmining to'la energiyasi ρE ushbu hajmdagi tashuvchi va dispers fazalar to'la energiyalarining hamda Σ -faza — yupqa ($\delta_z \sim 10^{-9}$ m) fazalararo qatlam ichki energiyasining yig'indisiga teng:

$$\rho E = \rho_1 E_1 + \rho_2 E_2 + 4\pi a^2 n U_z \quad (3.5.9)$$

bunda U_z — Σ -faza bir birlik yuzasining ichki energiyasi, ya'ni Σ -faza ichki energiyasi fazalararo sirt yuzasiga proporsional deb hisoblanadi. Σ -fazaning massasi, impulsi va kinetik energiyalarini nolga teng deb qabul qilinadi. Dispers fazaning xaotik va ichki harakatlari energiyasining kichikligidan (faraz 4) $k_z = 0$ tenglik o'rinni bo'ladi. Shunday qilib (2.3.23) — fazalarning to'la energiyasi uchun olingan formula

$$E_1 = u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + k_1, \quad E_2 = u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (3.5.10)$$

ko'rinishini oladi.

Yuqorida kiritilgan fazalar energiyasining keltirilgan oqimi tushunchasidan foydalanib, energiyaning saqlanish tenglamalari (2.3.26) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d_1 E_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (c_{1*}^k - q_{1*}^k) + n(h_{z1} + q_{z1}) + nj_{21}(E_{1a} - E_1) + \rho_1 \bar{g}_1 \cdot \bar{v}_1, \\
\rho_2 \frac{d_2 E_2}{dt} &= n(h_{z2} + q_{z2}) + nj_{12}(E_{2a} - E_2) + \rho_2 \bar{g}_2 \cdot \bar{v}_2, \\
n \frac{d_z}{dt} (4\pi a^2 U_z) &= -n(h_{z1} + h_{z2} + q_{z1} + q_{z2} + j_{21}E_{1a} + j_{12}E_{2a}), (E_{1a} \equiv E_{j1})
\end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Bunda h_{zj} va q_{zj} -fazalararo kuchlarning bitta dispers zarrachaga mos keluvchi ishi va fazalararo sirtidagi i -nchi faza tomonga oquvchi issiqlik oqimi; E_{1a} - i -nchi fazaning fazaviy o'tish yuz bergan (yoki yuz berayotgan) massasining solishtirma energiyasi. Ushbu energiya fazalararo sirtidagi E_1 ning o'rtacha qiymatiga teng deb qabul qilinadi. U ichki energiya u_{1a} , makromasshtab va mikromasshtab kinetik energiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$E_{1a} = u_{1a} + \frac{1}{2} v_a^2 + k_{1a}, (v_a \approx v_{1a}, k_{1a} \approx w_{1a}^2), E_{2a} = u_{2a} + \frac{1}{2} v_a^2, (k_{2a} = 0). \quad (3.5.12)$$

Fazaviy o'tish yuz bergan massaning fazalararo chegaradan o'tayotganida hosil bo'lgan kinetik energiyaning o'zgarishini hisobga olmasa ham bo'ladi, ya'ni

$$E_{2a} - E_{1a} \approx u_{2a} - u_{1a} \quad (3.5.13)$$

Mikroharakat kinetik energiyasi tenglamasi fazalarning impulsar tenglamalaridan olinadi:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{d_1}{dt} \left(\frac{\bar{v}_1^2}{2} \right) &= \bar{v}_1^i \frac{\partial \bar{\sigma}_{1p}^{ij}}{\partial x^k} + n \bar{f}_{21} \cdot \bar{v}_1 + nj_{21} \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_a - \bar{v}_1) + \rho_1 \bar{g}_1 \cdot \bar{v}_1, \\
\rho_2 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{\bar{v}_2^2}{2} \right) &= n \bar{f}_{12} \cdot \bar{v}_1 + nj_{12} \bar{v}_2 \cdot (\bar{v}_a - \bar{v}_2) + \rho_2 \bar{g}_2 \cdot \bar{v}_2
\end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Fazalararo ish va issiqlik almashuvi.

Dispers zarracha sirtidagi o'rtacha harorat $T_a = T_z = T_{1a} = T_{2a}$ bo'lsin. Bu holda fazalararo sirtidan i -nchi faza tomonga issiqlik oqimi uchun

$$q_{zi} = 4\pi a^2 \beta_{zi} (T_a - T_i) = 4\pi a^2 Nu_i \lambda_i \frac{T_a - T_i}{2a}, \left(Nu_i = \frac{2a\beta_{zi}}{\lambda_i} \right) \quad (3.5.15)$$

munosabat o'rinli deb qabul qilinadi. Ushbu formulada $\beta_{\Sigma i} - \Sigma$ -faza va i -nchi faza orasidagi issiqlik almashuvi koeffitsienti; Nu_i - Nusselt soni, tajribadan yoki qo'shimcha mulohazalardan aniqlanuvchi o'lchovsiz parametr.

Fazalarning fazalararo sirtidagi o'rtacha radial bosimlari p_{1a}^r va p_{2a}^r lardan foydalanib (q. (3.3.2)-(3.3.6)), fazalararo kuchning bitta zarrachaga mos kelgan ishini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} h_{21} &= \vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_2 + 4\pi a^2 p_{1a}^r w_{1a}, \quad \left(p_{1a}^r = p_{1a} + 4\mu_1 \frac{w_{1a}}{a} \right), \\ h_{22} &= \vec{f}_{12} \cdot \vec{v}_2 - 4\pi a^2 p_{2a}^r w_{2a}, \quad \left(p_{2a}^r \approx p_2 = p_{1a} + \frac{4\mu_1 w_{1a}}{a} + \frac{2\Sigma}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Bu yerda tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchilar dispers zarrachaning $\vec{v}_2$ tezlik bilan ko'chishida fazalararo kuchlarning bajargan ishi, ikkinchi qo'shiluvchilar fazaviy o'tish jarayonida yuz bergan radial ko'chish yoki pufakchalarning kengayishi (siqilishi) natijasida bajarilgan ish.

Yuqorida qaralgan (3.2.4) kinetik tenglamalarning to'rtinchisi va ikkinchisi inobatga olinsa, ushbu

$$\begin{aligned} 4\pi a^2 p_{1a}^r w_{1a} &= 4\pi a^2 p_{1a}^r \frac{d_2 a}{dt} + j_{21} \frac{p_{1a}^r}{\rho_1^0}, \\ 4\pi a^2 p_{2a}^r w_{2a} &= -\frac{4}{3} \pi a^3 \frac{p_2}{\rho_2^0} \frac{d_2 \rho_2^0}{dt} \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

munosabatlar hosil bo'ladi.

Ushbu munosabatlardan va (3.5.16) dan

$$\begin{aligned} h_{21} + h_{22} &= 4\pi a^2 (p_{1a}^r - p_{2a}^r) \frac{d_2 a}{dt} + j_{21} \left(\frac{p_{1a}^r}{\rho_1^0} - \frac{p_{2a}^r}{\rho_2^0} \right) = \\ &= -\Sigma \frac{d_2}{dt} (4\pi a^2) + j_{21} \frac{p_{1a}^r}{\rho_1^0} + j_{12} \frac{p_2}{\rho_2^0} \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

tenglikni olamiz. Bundan foydalanib, Σ -fazaning energiya tenglamasi (3.5.11)ni issiqlik oqimi tenglamasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{d_2}{dt}(4\pi a^2 U_z) = -(q_{z1} + q_{z2}) - j_{21} \left(u_{1a} + \frac{p_{1a}}{\rho_1^0} + \frac{4\mu_1 w_{1a}}{a\rho_1^0} \right) - j_{12} \left(u_{2a} + \frac{p_{2a}}{\rho_1^0} \right) + A_z, \quad A_z = \Sigma \frac{d_2}{dt}(4\pi a^2) \quad (3.5.19)$$

Bu yerda tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi Σ -fazaga keluvchi yoki undan ketuvchi issiqlik, ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilar fazaviy o'tishlar sodir bo'lganda Σ faza orqali o'tuvchi massa hisobiga Σ -fazaga keluvchi yoki ketuvchi energiya, A_z - Σ -fazadagi ichki (kapillyar) kuchlarning bitta dispers zarrachaga mos kelgan ishi.

3. Fazalarning issiqlik oqimi tenglamasi.

Σ -fazaning issiqlik energiyasini tashlab yuborsa ham bo'ladi (o'ta kichik massa tufayli). Bundan tashqari yopishqoqlik kuchlanishlarining ishini ham inobatga olmay, faqat Σ -fazaning sirt tarangligi tufayli hosil bo'ladigan ushbu

$$\frac{d_2}{dt}(4\pi a^2 U_z) = \Sigma \frac{d_2}{dt}(4\pi a^2) \quad (3.5.20)$$

elastiklik energiyasini hisobga olinsa, fazalararo chegaradagi issiqlik oqimi tenglamasi (3.5.19) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(q_{z1} + q_{z2}) + j_{21} \left(u_{1a} + \frac{p_{1a}}{\rho_1^0} \right) + j_{12} \left(u_{2a} + \frac{p_{2a}}{\rho_1^0} \right) = 0 \quad (3.5.21)$$

Ikkinchi fazaning energiya tenglamasi (3.5.11) dan kinetik energiya tenglamasi (3.5.14) ni ayirsak va (3.5.16) hamda (3.5.17) larni e'tiborga olsak, dispers faza uchun issiqlik oqimi tenglamasi kelib chiqadi:

$$\rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} = nq_{z2} + nj_{12}(u_{2a} - u_2) + \rho_2 A_2, \quad \left(\rho_2 A_2 = \frac{\alpha_2 p_2}{\rho_2^0} \frac{\alpha_2 \rho_2^0}{dt} \right) \quad (3.5.22)$$

Tashuvchi faza issiqlik oqimi tenglamasi shunga o'xshash olinadi:

$$\rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = \left(\frac{\partial q_{1a}}{\partial x^k} + nq_{z1} \right) + nj_{21}(u_{1a} - u_1) + \rho_1 A_1 \quad (3.5.23)$$

Bu yerda keltirilgan issiqlik oqimi q_n^k va ichki kuchlar ishi $\rho_1 A_1$ lar berilishi lozim. Ushbu ichki kuchlar ishini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\rho_1 A_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\rho_1^0} \frac{d_1 \rho_1^0}{dt} + \tau_{\mu}^{kl} e^{kl} + \rho_1 A_{1r} + \rho_1 A_{1v}, \quad \tau_{\mu}^{kl} = 2\mu \left(e^{kl} - \frac{1}{3} e^{mn} \delta^{kl} \right) \quad (3.5.24)$$

Bu yerda A_{1r}, A_{1v} kichik masshtabli radial va ilgarilama harakatlarda yopishqoqlik kuchlarining ishi; tenglikning O'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi tashuvchi fazaning siqilishida yoki kengayishida ichki bosim kuchlarining ishi; $\tau_{\mu}^{kl} e^{kl}$ - makroskopik deformatsiya jarayonida yopishqoqlik siljish kuchlanishining ishi (dissipatsiya).

IV BOB. GAZ PUFACHALARI ARALASHGAN SUYUQLIKDA KICHIK QO'ZG'ALISHLAR TARQALISHINING CHIZIQLI NAZARIYASI

4.1. Pufakchali suyuqliklar gidromexanikasi tenglamalari

2-bobda monodispers aralashmalar uchun massaning, impulsning va energiyaning saqlanish qonunlari asosida o'rtachalashtirilgan tenglamalar olindi. Xususan pufakchali suyuqliklar va tashuvchi faza gaz, dispers faza esa qattiq zarra yoki suyuqlik tomchilaridan iborat bo'lgan dispers aralashmalar uchun impulsar tenglamasi birmuncha batafsil qaraldi. Ushbu bobda muayyan shartlar o'rinli bo'lgan hol uchun pufakchali suyuqliklarning gidromexanika tenglamalari sistemasi keltiriladi va mazkur sistema asosida kichik sinusoidal qo'zg'olishlar ta'sirida hosil bo'ladigan to'lqinlar qaraladi. Quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin :

1) Tashqaridan issiqlik oqib kelmaydi, ya'ni $q_n^k = 0$ va bunda tashuvchi fazaning harorati o'zgarmas $T_1 = T_0 = const$;

2) Yopishqoqlik fazalarning o'zaro ta'siridagina namoyon bo'ladi ($\sigma_{ij}^{kl} = 0$);

3) Pufakchanning hajmiy koeffitsienti $\alpha_2 \ll 1$ va $\sigma_1^{ij} = -p_1 \delta^{ij}$;

4) Tashuvchi faza - suyuqlikning siqiluvchanligi kichik va birinchi yaqinlashuv chiziqli, ya'ni akustik siqiluvchanlik o'rinli deb qaraladi.

Mazkur shartlar o'rinli bo'lsa, (3.1.2), (3.2.1) -(3.2.3), (3.3.7) va (3.5.8) formulalarga asosan pufakchali suyuqlik uchun quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^k}{\partial x^k} = -n j_{12}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^k}{\partial x^k} = n j_{12}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2^k}{\partial x^k} = 0,$$

$$\frac{d_2 a}{dt} = w_{12} + \frac{j_{12}}{4\pi a^2 \rho_1^0} = w_{22} + \frac{j_{12}}{4\pi a^2 \rho_2^0}$$

$$\left(\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \rho_2^0 = \frac{\rho_2}{\alpha_2}, \rho_1^0 = \frac{\rho_1}{1 - \alpha_2} \right),$$

$$(1 - \varphi^{(1)}) a \frac{d_2 w_{1a}}{dt} = \frac{p_2 - p_1 - 2 \sum / a}{\rho_1^0} - \frac{4 \mu_{np} w_{1a}}{a \rho_1^0} - \quad (4.1.1)$$

$$- (1 - \varphi^{(2)}) \frac{3 w_{1a}^2}{2} + (1 - \varphi^{(3)}) \frac{w_{12}^2}{4},$$

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1^i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{1r}^{ki}}{\partial x^k} + \rho_1 g_1^i.$$

$$\frac{d_2 v_2^i}{dt} = \frac{3}{\rho_1} \frac{\partial \sigma_{1r}^{ki}}{\partial x^k} + \frac{3}{2 \pi a^3 \rho_1^0} f_{rr}^i + \frac{3 \alpha_1^2}{a} w_{1a} w_{12}^i + g_2^i.$$

Agar pufakchalar politropiya xususiyatiga ega bo'lsa,

4-shart o'rinli bo'lgani tufayli holat tenglamalari ushbu ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\rho_1^0 = \rho_{10}^0 + \frac{p_1 - p_0}{C_1^2}; \quad \frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2^0}{\rho_{20}^0} \right)^\gamma, \quad (4.1.2)$$

Bu yerda γ - politropiya ko'rsatkichi.

Izoh. Yuqoridagi (4.1.1) tenglamalar sistemasida yopishqoqlik koeffitsienti μ_1 o'rniga effektiv yopishqoqlik koeffitsienti μ_{np} yozilgan. Buni yopishqoqlik dissipatsiyasidan boshqa dissipatsiyalarni (issiqlik, fazaviy o'tishlar va h.) hisobga olish uchun qilingan. Ushbu μ_{np} koeffitsient pufakchanning radial tebranma harakati yuz berganda, ya'ni harakatning asosiy xarakteristikalari tebranish chastotasi va amplituda bo'lganda kiritiladi. Agar pufakcha uchun Pekle soni ushbu

$$\sqrt{Pe_2} \gg 1, \quad Pe_2 = \frac{2 a_0}{v_2^{(r)}} \sqrt{\frac{3 \chi p_0}{\rho_1^0}}$$

shartni qanoatlantirsa,

$$\mu_{np} = \mu_1 + \mu^{(r)}, \quad \mu^{(r)} = \frac{3(\gamma_2 - 1)}{4\sqrt{2}} \rho_1^0 a_0 \sqrt{v_2^{(r)} \omega}. \quad (4.1.3)$$

deb qabul qilinadi. Bu yerda a_0 - pufakchanning boshlang'ich holatdagi radiusi, ρ_0 - suyuqlikning boshlang'ich holatdagi bosimi, $v_2^{(r)}$ va γ_2 - mos ravishda gazning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti va adiabata ko'rsatkichi.

4.2. Kichik qO'zg'alishlar tarqalishining chiziqli nazariyasi

1. Effektiv yopishqoqli bir tezlikli sxema. Xarakteristikalar

Monodispers aralashmada kichik qo'zg'alishlarning tarqalishini bir tezlikli ($v_1 = v_2 = v$) sxema asosida qaraymiz. Bunda pufakcha radiusi kichik, suyuqlikning yopishqoqlik koeffitsienti esa katta bo'lgani tufayli, pufakchanning suyuqlikka nisbatan harakatini e'tiborga olmasa ham bo'ladi deb hisoblanadi. Qo'zg'alish yuz bermasdan avval aralashmaning barcha parametrlari x koordinatasiga bog'liq emas deb, harakat x o'qi yo'nalishida yuz beradigan holni qaraymiz. Yuqorida keltirilgan shartlar o'rinli bo'lsa va massaviy kuchlarning ta'siri hisobga olinmasa, (4.1.1) dagi yoki (3.5.8) dagi tashuvchi fazaning impulsar tenglamasini va suyuqlik uchun massaning saqlanish qonunini ((3.2.4) ning birinchi tenglamasini e'tiborga olib) ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \approx \rho_1^0 \alpha_1$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \rho_1^0}{\partial t} + \alpha_1 v \frac{\partial \rho_1^0}{\partial x} + \rho_1^0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3\alpha_1 w_{10}}{a} \rho_1^0 \quad (4.2.1)$$

“Pufakchali” suyuqliklar harakatining tenglamalar sistemasining qolgan tenglamalari α_1, a, w_{10} larning o'zgarishini aniqlaydi. Agar (4.1.2) ning birinchi tenglamasi - akustik siqiluvchanlik tenglamasida zichlikning hosilalarini bosim p orqali ifodalansa, (4.2.1) tenglamalar sistemasidan tashuvchi fazaning siqiluvchanligidan tashqari pufakchalarning w_{20} radial tezlik orqali ifodalanuvchi hajm deformatsiyasi ham e'tiborga olingan ikkita differensial tenglama hosil bo'ladi. Ushbu tenglamalarda faqat v va p ning hosilalari qatnashadi. Shu sababli to'la sistema xarakteristikalarining bir qismini (4.2.1) asosida aniqlansa bo'ladi. Ma'lumki xarakteristikalarni aniqlash uchun quyidagi tenglamalar sistemasi yoziladi:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\
 \rho_1^0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha_1 v}{C_1^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{C_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a} \rho_1^0, \\
 dt \frac{\partial v}{\partial t} + dx \frac{\partial v}{\partial x} &= dv, \\
 dx \frac{\partial p}{\partial x} + dt \frac{\partial p}{\partial t} &= dp.
 \end{aligned}
 \tag{4.2.2}$$

Ushbu sistemadagi v va p ning xususiylar xosilalari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinant-xarakteristik determinantni nolga tenglab,

$$\begin{vmatrix}
 \rho & \rho v & 1 & 0 \\
 0 & \rho_1^0 & \frac{\alpha_1 v}{C_1^2} & \frac{\alpha_1}{C_1^2} \\
 dt & dx & 0 & 0 \\
 0 & 0 & dx & dt
 \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik yo'nalishlar aniqlanadi. Mazkur determinantning birorta ustunini erkin hadlardan ((4.2.2) sistemaning o'ng tomoni) iborat ustun bilan almashtirib nolga tenglashtirilsa,

$$\begin{vmatrix}
 0 & \rho v & 1 & 0 \\
 \frac{3\alpha_2 w_{1a}}{a} \rho_1^0 & \rho_1^0 & \frac{\alpha_1 v}{C_1^2} & \frac{\alpha_1}{C_1^2} \\
 dv & dx & 0 & 0 \\
 dp & 0 & dx & dt
 \end{vmatrix} = 0,$$

xarakteristiklardagi shartlar olinadi.

Birinchi tenglamadan xarakteristik yo'nalishlar

$$\frac{dx}{dt} = v \pm C_1 \left(C_1 = \frac{C_1}{\alpha} \right)
 \tag{4.2.3a}$$

tenglamalar bilan aniqlanishi kelib chiqadi. Ushbu tenglikdan foydalanib, ikkinchi tenglamadan xarakteristikdagi shartlar olinadi:

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho C_f \frac{dv}{dt} = \frac{3\alpha_2 w_{10}}{a} \rho C_f^2 \quad (4.2.3b)$$

Shunday qilib (4.2.1) sistema giperbolik tipga tegishli. Qaralayotgan jarayonni tavsiflovchi sistemaning qolgan tenglamalari uchun oqish chiziqlari $\left(\frac{dx}{dt} = v\right)$ xarakteristika bo'lib, ular bo'ylab aniqlovchi shartlar sifatida α_2, a, w_{10} larning individual hosilalarini ifodalovchi tenglamalar qaraladi ((3.2.4) ning so'nggi tenglamasi va Reley-Lamb tenglamasi).

2. Kichik qo'zg'alishlar uchun chiziqli tenglamalar

Qo'zg'atilmagan muhit (parametrlari quyi "0" indeks bilan belgilangan, $v_0 = 0$) bilan bog'liq koordinata sistemasiga nisbatan impuls, massa va pufakchalar sonli konsentratsiyasi uchun chiziqilashtirilgan tenglamalar ushbu

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -n_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2.3)$$

ko'rinishga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bundan esa

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (4.2.4)$$

$$dn = \frac{n_0}{\rho_0} d\rho \quad (4.2.5)$$

munosabatlar kelib chiqadi. Ushbu tenglamaning chap tomonini tashuvchi faza bosimi p va a orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan aralashma zichligi $\rho = \rho_1^0 \alpha_1 = \rho_1^0 (1 - \alpha_2)$, pufakchalar konsentratsiyasi $\alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n$ va suyuqlikning akustik siqiluvchanlik tenglamasidan (q. (4.1.2)) hamda

$$d\rho = d(\alpha_1 \rho_1^0) = d(\rho_1^0 (1 - \alpha_2)) = \alpha_1 d\rho_1^0 - \rho_1^0 d\alpha_2, \quad (4.2.6)$$

$$d\rho = -\rho_1^0 d\alpha_2 + \alpha_{10} C_1^{-2} d\rho,$$

$$d\alpha_2 = 4\pi a_0^3 n_0 da + \frac{4}{3} \pi a_0^3 dn = \alpha_{20} \left(3 \frac{da}{a_0} + \frac{dn}{n_0} \right)$$

munosabatlardan

$$d\rho = \alpha_{10}^2 C_1^{-2} d\rho - 3\rho_0 \alpha_{20} a_0^{-1} da \quad (4.2.7)$$

tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Fazalarning birgalikdagi deformatsiyasi tenglamasi (Reley-Lamb tenglamasi) va fazalararo chegaradagi massaning saqlanish qonuni chiziqlashtirilgandan so'ng ushbu ko'rinishni oladi:

$$(1 - \varphi_1^0) \rho_0 \rho_{10}^0 \frac{\partial w_{1a}}{\partial t} + \frac{4\mu}{a_0} w_{1a} = p_2 - p + \frac{2\Sigma}{a_0^2} (a - a_0), \quad (4.2.8)$$

$$\left(w_{1a} - \frac{\partial a}{\partial t} \right) \rho_{10}^0 = \left(w_{2a} - \frac{\partial a}{\partial t} \right) \rho_{20}^0 = \xi_{21}$$

4.3. Erimaydigan gaz pufakchali suyuqlikda kichik sinusoidal qo'zg'alishlar

Fazaviy o'tishlarni va sirt tarangligini e'tiborga olmasdan, dissipatsiya'ni effektiv yopishqoqlik koeffitsienti orqali hisobga olish mumkin bo'lgan holni qaraymiz:

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{2\Sigma}{a_0} \ll p_0, \quad \mu = \mu_{\text{eff}} \quad (4.3.1)$$

Bundan tashqari pufakchalar politrop gazdan iborat:

$$\frac{p_2}{p_{20}} = \left(\frac{\rho_2^0}{\rho_{20}^0} \right)^\chi, \quad (4.3.1a)$$

χ politropa ko'rsatgichi. Yuqoridagi (4.3.1) va (4.3.1a) shartlardan

$$\frac{\rho_2^0}{\rho_{20}^0} = \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1/\chi}$$

$$dp_2 = -3\chi p_0 a_0^{-1} da \quad (p_{20} = p_0) \quad (4.3.1b)$$

$$p_2 = p_0 - \frac{3\chi p_0}{a_0} (a - a_0); \quad w_{1a} = \frac{da}{dt}$$

munosabatlar o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Endi (4.2.6) - (4.2.8) lardan quyidagi ikkita bir jinsli tenglamalarni olish mumkin:

$$\frac{\alpha_{10}^2}{C_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{3\rho_0 \alpha_{20}}{a_0} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3.2)$$

$$[1 - \varphi_0^{(1)}] \rho_0 \rho_{10}^0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{4\mu_{\text{eff}}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{3\chi p_0}{a_0} (a - a_0) + (p - p_0) = 0$$

(4.3.2) tenglamalar sistemasining to'liq soni k , va kompleks chastota ω bilan aniqlanuvchi sinusoidal to'liqlar ko'rinishdagi yechimini qaraymiz:

$$p = p_0 + Ae^{i(k_*x + p_0t)}, \quad a = a_0 + Be^{i(k_*x + p_0t)} \quad (4.3.2a)$$

$$0 < A \ll p_0, \quad 0 < B \ll a_0, \quad k_* = k + ik_*, \quad \omega = \omega + i\omega_*$$

Ushbu yechimlarni (4.3.2) ga qo'ysak, quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini olamiz

$$A \left[\frac{\alpha_{10}^2}{C_1^2} (-\omega_*^2) + k_*^2 \right] + B \frac{3\rho_0 \alpha_{20}^2}{a_0} \omega_*^2 = 0$$

$$(1 - \varphi_0^{(1)}) \alpha_0 \rho_{10}^0 B (-\omega_*^2) + \frac{4\mu_{\text{sh}}}{a_0} B i \omega_* + \frac{3\chi p_0}{a_0} B + A = 0$$

Ushbu birjinsli tenglamalar sistemasining yechimi mavjud bo'lishi shartidan k_* va ω_* larni bog'lovchi xarakteristik tenglama kelib chiqadi

$$\frac{k_*^2}{\omega_*^2} = \frac{\alpha_{10}^2}{C_1^2} + \frac{1}{C_0^2} \left[1 - \frac{\omega_*^2}{\omega_r^2} + i \left(\frac{\omega_*}{\chi \omega_\mu} \right) \right]^{-1} \quad (4.3.3)$$

Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$$\omega_r^{-2} = [1 - \varphi_0^{(1)}] \frac{\rho_{10}^0 a_0^2}{3\chi p_0}, \quad \omega_\mu = \frac{3p_0}{4\mu_{\text{sh}}},$$

$$\omega_a = \sqrt{[1 - \varphi_0^{(1)}] \frac{3p_0}{\rho_{10}^0 a_0^2}}, \quad C_0 = \sqrt{\chi} C_a,$$

$$C_a = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_{10}^3 \alpha_{10} \alpha_{20}}}, \quad C_f = \frac{C_1}{\alpha_{10}}.$$

Majburiy tebranishlarga mos keluvchi ω to'liqlarni ($\omega > 0, \omega_* = 0$) qarash bilan chegaralansak, (4.3.3) xarakteristik tenglamani ushbu

$$k^2 + 2ikk_* - k_*^2 = \omega_*^2 \left\{ \frac{1}{C_f^2} + \frac{1}{C_c^2} \frac{1 - \frac{\omega_*^2}{\omega_r^2} - i \frac{\omega_*}{\chi \omega_\mu}}{[(1 - \frac{\omega_*^2}{\omega_r^2})^2 + (\frac{\omega_*}{\chi \omega_\mu})^2]} \right\}; \quad \omega_* = \omega \quad (4.3.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin, Bu yerda C_c - muvozanatlik tovush tezligi va C_f - muzlatilgan tovush tezligi deb ataladi.

Bundan ko'rinib turibdiki, faqat quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

$$a) k \leq 0, k_{\infty} > 0, \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} \geq 0,$$

$$b) k \geq 0, k_{\infty} < 0, \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k} \leq 0.$$

Demak pufakchali cuyuqlikda ω - to'liqlarning amplitudasi ularning fazaviy tezligi yo'nalishida o'smaydi va har bir ω -chastota uchun ikkita $k^{(1)}$ va $k^{(2)}$ to'liq sonlari mavjud bo'lib, $k^{(1)} = -k^{(2)}$ bo'lgani uchun ular qarama-qarshi tomonga yo'nalgan ikkita simmetrik to'liqlarni beradi.

Dissipatsiya mavjud bo'lmagan ($\mu_{\gamma_0} = 0$) holni qaraymiz. Bunda (4.3.4) ga ko'ra $\omega_{\mu} = \infty$ va shu sababli (4.3.4) ning o'ng tomoni haqiqiy miqdor bo'ladi. Demak, bu holda $k_{\infty} = 0$ bo'lib, fazaviy tezlik

$$C(\omega) = -\frac{\omega}{k} = \pm \frac{C_f^2 C_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)}{\sqrt{C_f^2 + C_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)}}; \quad \omega < \omega_r \text{ yoki } \omega_c < \omega$$

(4.3.5)

yoki

$$C(\omega) = \pm C_f \sqrt{\frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2}}; \quad \omega_c^2 = \left(1 + \frac{C_f^2}{C_0^2}\right) \omega_r^2$$

$\omega < \omega_r \text{ yoki } \omega_c < \omega$

(4.3.6)

munosabat bilan aniqlanishini ko'rish qiyin emas.

Fazaviy tezlik $C(\omega)$ o'zgarishining ω chastotaga qanday bog'liq ekanligi rasmda keltirilgan (shtrixli chiziqlar). Rasmdan va (4.3.6) dan $C(\omega)$ ning $\omega \rightarrow 0$ va $\omega \rightarrow \infty$ da

$$C(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \pm C_f \left(1 + \frac{C_f^2}{C_0^2}\right)^{-1} = C_c; \quad C(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = \pm C_f$$

tengliklar bilan aniqlanishini ko'rish mumkin.

Shuningdek (4.3.6) dan

$$C(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_r, -0} \rightarrow 0; \quad C(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \omega_c, -0} \rightarrow \infty$$

Bunda birinchi hol ($C \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$) to'liqin uzunligi $\lambda = 0$ bo'lgan maxsuslik (virojdennaya) ω — to'liqinga mos keladi.

Ikkinchi hol ($C \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$) esa uzunligi $\lambda = \infty$ bo'lgan ω -to'liqinga mos keladi. Ushbu $\omega_r < \omega < \omega_c$ tenglik o'rinli bo'lgan va shaffofsizlik diapazoni deb ataluvchi holni qaraylik. Bunda (4.2.12)dan $k = 0$ va

$$k_{\omega} = \pm \frac{\omega}{C_f} \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_r^2}}, \quad \omega_r < \omega < \omega_c;$$

$$C(\omega) = -\frac{\omega}{k} = \infty, \quad \lambda = \infty$$

ekanligini ko'ramiz.

Shunday qilib $\mu_{\omega} = 0$ bo'lgan holda chastotaning uchta diapazoni o'rinli bo'ladi:

$0 < \omega < \omega_r$ — past chastotali diapazon;

$\omega_r < \omega < \omega_c$ - shaffofsizlik diapozoni;

$\omega_c < \omega$ - yuqori chastotali diapazon.

Shaffofsizlik diapozonida so'nish dekrementi k_{ω} ning qiymatlari katta bo'lgani tufayli fazaviy tezlik $C(\omega)$ va to'liqin uzunligi λ cheksiz katta bo'ladi. Ushbu diapazondan tashqarida ($\omega < \omega_r$ va $\omega > \omega_c$) $k_{\omega} = 0$ bo'lib, o'zgarmas amplitudali yugiruvchi to'liqlar mavjud bo'ladi.

Dissipatsiya'ni hisobga olish ($\mu_{\omega} \neq 0$) $C(\omega)$ va k_{ω} larni jiddiy o'zgartiradi. (Rasmda uzluksiz chiziqlar) Dissipatsiya chiziqlari silliq va uzluksiz bo'lib, $\lambda \rightarrow \infty$ da ham $C(\omega) \neq 0$, ya'ni maxsus — to'liqlar mavjud emasligini ko'rish mumkin.

4.4. Ikki to'liqinli tenglama, Bussinesk va Kleyn-Gordon tenglamalari

Agar $\mu_{\Phi} = 0$ bo'lsa, (4.3.2) tenglamalar sistemasini bosimga nisbatan bitta tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun avval (4.3.2) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$ ni birinchi tenglamaga keltirib qo'ysak va (4.2.7) tenglamaga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$a - a_0 = \frac{a_0}{3\rho_0\alpha_{20}} \left[-(\rho - \rho_0) + \alpha_{10}^2 \frac{p - p_0}{C_1^2} \right]$$

munosabatni e'tiborga olsak, ushbu tenglamani olamiz

$$\frac{1}{C_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \omega_r^2 \left[\frac{p - p_0}{C_e^2} - (\rho - \rho_0) \right] = 0$$

Bu yerda

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3\chi p_0}{(1 - \varphi_0^{(1)})\rho_{10}^0 a_0^2}}, \quad \frac{1}{C_e^2} = \frac{1}{C_f^2} + \frac{1}{C_0^2}, \quad C_0^2 = \frac{\chi p_0}{\rho_{10}^0 \alpha_{10} \alpha_{20}}$$

Ushbu tenglamani ikki marta t bo'yicha differensiallansa va (4.2.5) tenglik

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

e'tiborga olinsa, ikki to'liqinli tenglama deb ataluvchi tenglama hosil buladi:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_e^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{C_e^2}{\omega_r^2 C_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_f^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

Bu tenglamani spektrning past va yuqori chastotali qismlari uchun soddaroq ko'rinishda yozish mumkin.

Spektrning past chastotali $\left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} = \varepsilon \ll 1 \right)$ qismida $C_0 \ll C_1$ bo'lsa, qaralayotgan holda ($\mu_{\Phi} = 0, k_{\infty} = 0$) (4.3.4) dan

$$k^2 = \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{\omega_*}{\omega_r} \right)^2 + \left(\frac{\omega_*}{\omega_r} \right)^4 + O(\varepsilon^3) \right] = \frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{\omega_*}{\omega_r} \right)^2 + O(\varepsilon^2) \right], \quad \beta = \left(\frac{C_0}{\omega_r} \right)^2$$

tenglikni olish mumkin. Bundan qabul qilingan aniqlik bilan

$$\beta k_*^2 - \left(\frac{\omega_*}{\omega_r} \right)^2 = \beta^2 k_*^4 + O(\epsilon^3) \quad (4.4.2)$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi.

Agar bosimning o'zgarishi (4.3.2a) qoida bilan yuz berishi hisobga olinsa, k_*^2 va ω_*^2 larga mos ravishda $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ operatorlar mos keladi. Demak (4.4.2) dispersion munosabatga ushbu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \beta C_0^2 \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} \quad (4.4.3)$$

chiziqli Bussinesk tenglamasi deb ataluvchi tenglama mos keladi.

Spektrning yuqori chastotali qismida, ya'ni $\frac{\omega_*^2}{\omega_r^2} \gg 1$ bo'lganidan,

(4.3.4) dan

$$k_*^2 = \frac{\omega_*^2}{C_f^2} - \frac{\omega_r^2}{C_0^2}$$

dispersiya munosabatini olamiz. Unga esa ushbu

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_f^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\beta C_f^2 (p - p_0) \quad (4.4.4)$$

Kleyn-Gordon tenglamasi deb ataluvchi tenglama mos keladi.

Past chastotaga mos kelgan chiziqli Bussinesk tenglamasi tashuvchi faza siqiluvchanligi sezilmas darajada bo'lgan holdagi evolyutsiyasini, yuqori chastotaga mos kelgan Kleyn-Gordon tenglamasi esa, to'liq tarqalishi tezligi C_f sof suyuqlikdagi tovush tezligidan deyarli farq qilmaydigan hollardagi jarayonlarni tavsiflaydi.

Adabiyotlar

1. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. -М.: Наука, 1978. -336 с.
2. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. ч.1.- М.: Наука, 1987. -464 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.: Наука, 1970. -492 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть II,- М.: Физматгиз, 1963. -728 с.

MUNDARIJA

1.Kirish.....	3
I.BOB.Ko'p tezlikli kontiniumning fenomenologik nazariyasi.....	5
1.1.Fenomenologik saqlanish tenglamalari.....	5
1.2.Gomogen aralashmalar uchun diffuziya nazariyasi.....	10
1.3.Geterogen aralashmalarining o'ziga xos jihatlari.....	11
1.4.Impuls va energiyaning fazalararo almashuvi. Ichki kuchlar ishi.....	14
1.5.Umumiy bosimli yopishqoq siqiluvchan fazalar aralashmasining harakat tenglamalari sistemasi.....	19
1.6.Uzilish sirtlari.....	20
1.7.Termodinamik kuchlar va oqimlar orasidagi chiziqli fenomenologik munosabatlar haqida.....	21
II.BOB.Geterogen aralashmalarda (Ko'p fazali muhitlarda) fazoviy o'rtachalashtirish.....	23
2.1.Mikroharakat tenglamalari.Fazalararo sirtlardagi shartlar.....	23
2.2.O'rtachalashtirilgan parametrlar va ularning xossalari.....	28
2.3.O'rtachalashtirilgan saqlanish tenglamalari.....	34
III.BOB.Monodispers to'qnashsiz aralashmalar mexanikasi tenglamalari.....	43
3.1.Dispers aralashmalar.Uyalar tushunchasi.....	43
3.2.Fazalar massasining saqlanish qonuni.....	45
3.3.Fazalar deformatsiyasining birgalik tenglamasi.....	46
3.4.Keltirilgan kuchlanishlar tenzori.Dispers zarrachaga ta'sir etuvchi kuchlar.Dispers aralashmada impuls va energiyaning ko'chishini tavsiflovchi vektorlar.....	49
3.5.Fazalarning impuls,energiya va issiqlik oqimi tenglamalari.....	55
IV.BOB.Gaz pufakchalari aralashgan suyuqlikda kichik qo'zg'alishlar tarqalishining chiziqli nazariyasi.....	63
4.1.Pufakchali suyuqliklar gidromexanikasi tenglamalari.....	63
4.2.Kichik qo'zg'alishlar tarqalishining chiziqli nazariyasi.....	65
4.3.Erimaydigan gaz pufakchali suyuqlikda kichik sinusoidal qo'zg'alishlar.....	68
4.4.Ikki to'liqlik tenglama, Bussinesk va Kleyn-Gordon tenglamalari.....	72
ADABIYOTLAR.....	74

Begmatov A. B.

Ruzmatov M. I.

KO'P FAZALI MUHITLAR MEXANIKASI ASOSLARI

O'quv qo'llanma

Toshkent · "NIF MSH" · 2020

Muharrir

Bakirov N. F.

Texnik muharrilar

Yoqubov A.F.

Hoshimbekova U.Sh.

Musahhih

Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.

Bosishga 30.11.2020. da ruxsat etildi. Bichimi 60x84.

"Times New Roman" garniturası.

Ofset bosma usulida bosildi.

Shartli bosma tabog'i 5. Nashr bosma tabog'i 4.75.

Adadi 100 nusxa.

"NIF MSH" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.

Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko'chasi, 6-uy.