



**СОВРЕМЕННЫЕ
НЕФТЕГАЗОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ**

Ю. М. Молокович

**НЕРАВНОВЕСНАЯ
ФИЛЬТРАЦИЯ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ
В НЕФТЕПРОМЫСЛОВОЙ
ПРАКТИКЕ**



Ю. М. Молокович

**НЕРАВНОВЕСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ
И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ
В НЕФТЕПРОМЫСЛОВОЙ ПРАКТИКЕ**



Москва ♦ Ижевск

2006

УДК 620



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №06-05-78057

Молокович Ю. М.

Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 214 с.

В книге излагаются теоретические основы неравновесной фильтрации, а также применение теории при определении фильтрационных параметров окрестности скважины и решении некоторых вопросов технологии извлечения нефти из карбонатных коллекторов трещиновато-пористого типа.

Книга предназначена научным работникам, инженерам, геологам-нефтяникам и студентам соответствующих вузов.

ISBN 5-93972-517-1

© Ю. М. Молокович, 2006

© Институт компьютерных исследований, 2006

Оглавление

Предисловие.....	6
Введение.....	7
Часть I. Теоретические основы	12
Глава 1. Простейшие модели нестационарной фильтрации.....	12
§1. Некоторые основные положения.....	12
§2. Модели фильтрации в “равномерных” (модель Щелкачёва) и “неравномерных” (модель Христиановича) по строению коллекторах.....	13
§3. Модель фильтрации в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта).....	16
§4. Модель фильтрации при релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме	22
§5. Модель с неравновесным законом фильтрации.....	24
Глава 2. Законы сохранения и уравнения неравновесной фильтрации.....	31
§6. Законы сохранения.....	31
§7. Определяющие соотношения. Система уравнений линейной неравновесной фильтрации	34
Глава 3. Особенности линейной неравновесной фильтрации.....	40
§8. Поверхности разрыва основных гидродинамических параметров.....	40
§9. Уравнения линейной неравновесной фильтрации.....	50
§10. Исследования одномерной линейной неравновесной фильтрации.....	59
§11. Классификация моделей линейной неравновесной фильтрации. Корректность постановок краевых задач.....	64
Глава 4. Решение основных задач прямолинейно-параллельной фильтрации.....	69
§12. Модель Щелкачёва.....	69
§13. Модель Христиановича	72
§14. Модель фильтрации в релаксационно-сжимаемой насыщенной пористой среде.....	78
§15. Модель с неравновесным законом фильтрации.....	84
§16. Применение метода разделения времени по процессам	87

Часть II. Пьезометрия окрестности скважины	92
Глава 5. Кривая восстановления давления в основных моделях филь- трации.....	92
§17. КВД в модели классического упругого режима модели Щелка- чёва)	93
§18. КВД при неравномерном строении пористой среды (модель Христиановича)	106
§19. КВД в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта).....	111
§20. КВД при релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объеме.....	116
§21. КВД при неравновесном законе фильтрации.....	118
§22. КВД в трещиновато-пористой среде при фильтрации по нерав- новесному закону	123
§23. КВД при неравновесном законе фильтрации и релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объеме.....	128
§24. Кривая падения дебита	129
Глава 6. Зондирование окрестности скважины периодическими возму- щениями.....	132
§25. АЧХ и ФЧХ в модели классического упругого режима (модель Щелкачёва).....	132
§26. АЧХ и ФЧХ при неравномерном строении пористой среды (мо- дель Христиановича).....	138
§27. АЧХ и ФЧХ в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта).....	143
§28. АЧХ и ФЧХ при неравновесном законе фильтрации.....	148
§29. АЧХ и ФЧХ в трещиновато-пористой среде при фильтрации по неравновесному закону.....	153
Часть III. Промысловый эксперимент	161
Глава 7. КВД и КПД в терригенных коллекторах	161
§30. Обработка и анализ результатов.....	161
Глава 8. КВД в карбонатных коллекторах.....	167
§31. Обработка и анализ результатов.....	167
Глава 9. Периодическое гидродинамическое воздействие в карбонатных коллекторах	180
§32. Основные понятия и определения.....	180
§33. Определение переходной функции и оптимального диапазона частот при массообмене между блоками и трещинами	184

ОГЛАВЛЕНИЕ

§34. Определение ФП окрестности скважины по экспериментальной комплексной передаточной функции (КПФ)	187
Глава 10. Экспериментальная оценка эффективности гидродинамического периодического воздействия со стороны добывающей скважины на параметры разработки	197
§35. Выбор объекта исследования, требования к нему и методика эксперимента	197
§36. Анализ результатов исследований скважин на режимах стационарное нагнетание — стационарный и периодический отборы....	200
§37. Анализ результатов исследования скважин на режимах истощение — стационарный и периодический отборы	203
Глава 11. Математическое моделирование влияния частоты периодического гидродинамического воздействия со стороны добывающей скважины на параметры разработки	205
§38. Решение и анализ результатов	205
Литература	213

Предисловие

Предлагаемая вниманию специалистов монография написана известным ученым в области нефтегазовой подземной гидромеханики, профессором Ю. М. Молоковичем. В книге приводятся основные модели неравновесной фильтрации слабосжимаемой жидкости. Различные разделы теории неравновесной фильтрации читались автором в виде спецкурсов студентам механико-математического факультета Казанского государственного университета, и это оказало существенное влияние на стиль и содержание изложения материала. В смысле методологии и используемого подхода данная книга не относится к чисто математическим. В ней большую роль играют приложения к пьезометрии окрестности нефтяных и газовых скважин, а также обобщается опыт практических расчетов, накопленный автором и другими исследователями. Эти обстоятельства придают книге особую ценность.

Книга оставляет нам добрую память о замечательном коллеге, многие года плодотворно работавшем в области гидромеханики.

Книга рассчитана на широкий круг инженерно-технических и научных работников, аспирантов и студентов, занимающихся разработкой нефтяных и газовых месторождений.

Д.т.н., профессор

К. С. Басниев

Введение

Предлагаемая вашему вниманию монография посвящена различным аспектам неравновесной фильтрации однородной капельной жидкости в однородной слабо сжимаемой пористой среде. Она написана по результатам, полученным представителями Казанской школы подземной гидродинамики. Книга состоит из трех частей: теоретических основ неравновесной фильтрации, пьезометрии окрестности скважин и некоторым вопросам технологии извлечения нефти из карбонатных коллекторов трещиновато-пористого типа.

Систематическое изучение автором неравновесной фильтрации относится к середине 70-х годов прошлого столетия; связаны эти исследования с рядом факторов, важнейшие из которых следующие. Во-первых, группа учёных Казанского университета под руководством заведующего кафедрой радиоэлектроники профессора Непримерова Н.Н., занимаясь вопросами рациональной разработки нефтяных месторождений, в частности, накопила богатейший материал по экспериментальному исследованию пластов и скважин гидродинамическими методами [15,16]. Во-вторых, достоверность и надёжность этого материала обеспечивалась высокоточными манометрами и дебитомерами, спроектированными и воплощёнными в металле инженерами кафедры радиоэлектроники. В-третьих, практически все кривые восстановления давления (КВД) и падения дебита (КПД), полученные на скважинах, вскрывающих терригенные отложения, и обработанные по известной методике, основанной на классическом упругом режиме фильтрации, имели двухзвенное строение с изломом, а не однозвенное, как это следует из теории упругого режима. Аналогичные разрозненные результаты имели место и по другим нефтяным месторождениям Советского Союза. К лету 1976 г., для выяснения таких результатов, были специально подобраны нагнетательные скважины, вскрывающие однопластовые терригенные системы с чётко выдержанной литологической однородностью. Эксперименты, проведённые на таких скважинах, дали тот же результат.

Итак, КВД и КПД, перестроенные в полулогарифмических координатах, имеют два прямолинейных звена с точкой излома, причём наклон звена к оси абсцисс, соответствующего малым временам, меньше, нежели наклон звена, соответствующий большим временам. Из этого факта был сделан вывод о том, что в начальные моменты времени коэффициенты проницаемости, упругоёмкости и пьезопроводности пласта принимают динамические значения, превышающие их статические значения. Таким образом, при переходе из одного равновесного состояния (до снятия КВД или КПД) в другое равновесное состояние (после их снятия) участвуют по крайней

мере три временных механизма: эволюционный и два релаксационных, один из которых связан с законом фильтрации, другой — поведением количества жидкости в элементарном объёме.

Основные результаты по этим вопросам изложены в книге [11]. Там же сделан вывод о том, что нестационарную фильтрацию капельной жидкости в терригенных коллекторах при определённых условиях можно отнести к неравновесным процессам с экспоненциальными ядрами релаксации, аналогичным тем, которые изучаются в теории вязкоупругости (см., например, [1,17]).

Далее, используя принципы детерминизма, локального действия, суперпозиции и затухающей памяти, применяемые во многих разделах механики сплошных сред, были построены определяющие соотношения между силами сопротивления движению жидкости и скоростью фильтрации, а также между количеством жидкости в элементарном объёме и давлением в нём [12]. В этой книге также введены и детально изучены модели неравновесной фильтрации с произвольными ядрами релаксации. В ней, в частности, исследованы вопросы корректности постановок краевых задач, условия возникновения поверхностей разрывов основных гидродинамических параметров, перемещение этих поверхностей и поведение на них скачков давления, скорости фильтрации и количества жидкости в элементарном объёме.

С начала 90-х годов прошлого столетия по инициативе начальника ЦНИПР НГДУ Ямашнефть объединения Татнефти Фархуллина Р. Г., выпускника кафедры радиоэлектроники Казанского университета, были проведены детальные исследования фильтрации в окрестности скважин, вскрывающих трещиновато-пористые среды. Им было отмечено, что вид экспериментальных КВД, перестроенных в полулогарифмических координатах, существенно отличается от вида КВД, соответствующего модели Баренблатта [2]. В связи с этим в последующие годы на площадях Ямашнефти нами были подвергнуты всестороннему исследованию скважины, вскрывающие Турнейский, Кизеловский, Башкирский ярусы, относящиеся к карбонатным коллекторам трещиновато-пористого типа. Анализ полученного материала подтвердил неравновесный характер закона фильтрации и релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме. Теоретическая КВД, полученная на основе обобщённой модели Баренблатта, учитывающей отмеченные выше факторы, качественно совпала с экспериментальными КВД. Каждая из них, как правило, характеризуется прямолинейными отрезками различного наклона к оси абсцисс; причём отрезок, имеющий меньший наклон и отвечающий малым временам, плавно переходит в отрезок с большим наклоном, соответствующий большим временам. Точка выхода на прямолинейный отрезок, соответствующий большим временам, указывает на прекращение обмена жидкостью между блоками и трещинами. Таким образом, после пуска скважины

в эксплуатацию через определённое время давления в блоках и трещинах выравниваются, и массообмен жидкостью между ними полностью прекращается.

Основные результаты по исследованию скважин, вскрывающих карбонатные коллекторы, а также рекомендации по оптимальной выработке трещиновато-пористых сред изложены в книге [10].

Детальное и всестороннее исследование особенностей фильтрации в окрестности скважин, работающих как в терригенных, так и карбонатных коллекторах, позволило расширить круг моделей фильтрации [9].

Приведённый выше краткий обзор результатов, изложенных в монографии, подтверждает решающую роль промыслового эксперимента в понимании процессов фильтрации в нефтяных пластах, особенно сложного строения, и указывает на его громадное влияние на развитие фундаментальных основ теории фильтрации. К большому сожалению, в последнее время наметилась тенденция к свёртыванию промыслового эксперимента, в частности, по изучению гидродинамических особенностей фильтрации в окрестности скважин и небольших их групп с различными режимами их работы.

Основные обозначения

A — коэффициент обмена жидкостью между блоками и трещинами.

$Ei(-z)$ — интегральная показательная функция.

$f(t)$ — оригинал.

$f^*(s) = s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ — изображение по Лапласу–Карсону; s — параметр преобразования.

$\bar{f} = k_{sl}^* / \mu_e k_l^*$ — доля воды в потоке.

h — толщина пласта.

$I_0(z), I_1(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента первого рода соответственно нулевого и первого порядков.

$K_0(z), K_1(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента второго рода соответственно нулевого и первого порядков.

k — коэффициент проницаемости.

k_l — коэффициент абсолютной проницаемости.

k_{sl}^*, k_{nl}^* — коэффициенты относительных фазовых проницаемостей по воде и нефти соответственно.

$L(t)$ — характерная граница влияния галереи.

m — коэффициент пористости.

m_1, m_2 — коэффициенты пористости трещин и блоков соответственно.

p — давление.

p_1, p_2 — давления в трещинах и блоках соответственно.

$q = \rho_0 A(p_2 - p_1)$ — массовый обмен жидкостью между блоками и трещинами.

Q — дебит скважины.

$R(t)$ — характерный радиус зоны влияния скважины.

S_l — водонасыщенность.

T — период циклических возмущений.

V_0 — скорость распространения фронта возмущений.

$\vec{w}$ — вектор скорости фильтрации.

$\beta = m_0 \beta_{ж} + \beta_c$ — коэффициент упругоёмкости пласта.

$\beta_c, \beta_{ж}$ — коэффициенты сжимаемости пористой среды и жидкости соответственно.

β_1, β_2 — коэффициенты упругоёмкости трещин и блоков соответственно.

$\beta_l = \beta_{s,l} S_l + \beta_{n,l} (1 - S_l), \beta_{s,l} = m_l / m (\beta_l + \beta_s m), \beta_{n,l} = \beta_l + \beta_n m$ —

коэффициенты сжимаемости поровой среды, воды и нефти соответственно.

$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$ — функция Дирака; $\delta(t) = \frac{d\chi(t)}{dt}$.

δ — сдвиг начальной фазы колебаний.

$\gamma = 1,781...$ — постоянная Эйлера.

$\kappa = k / \mu \beta$ — коэффициент пьезопроводности пласта.

$\kappa_1 = k_1 / \mu \beta_1$ — коэффициент пьезопроводности трещин.

$\kappa_{12} = k_1 / \mu \beta_2$ — коэффициент пьезопроводности трещин, учитывающий только упругоёмкость блоков.

$\kappa' = \kappa_1 \tau_1 / (\tau_1 + \tau_2) = \kappa_1 \beta_1 / (\beta_1 + \beta_2)$ — коэффициент пьезопроводности, учитывающий суммарное действие трещин и блоков.

μ, μ_s, μ_n — вязкость жидкости, воды и нефти соответственно.

θ_p, θ_m — постоянные размерности времени.

ρ — плотность жидкости.

$\sigma = kh / \mu$ — коэффициент гидропроводности пласта.

$\sigma_1 = k_1 h / \mu$ — коэффициент гидропроводности трещин.

τ — постоянная размерности времени.

$\tau_1 = \beta_1 / A, \tau_2 = \beta_2 / A$ — постоянные размерности времени.

τ_p, τ_w — постоянные размерности времени.

ω — круговая частота.

[] — символ скачка.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

ГЛАВА 1. Простейшие модели нестационарной фильтрации [9]

§ 1. Некоторые основные положения

п. 1.1. Фильтрация, изучающая движение жидкостей и газов в горных породах, является одним из разделов механики насыщенных пористых сред. Теория фильтрации применяется в различных областях народного хозяйства, таких как мелиорация, артезианское водоснабжение, добыча нефти и газа и многих других.

В дальнейшем будут рассматриваться только одножидкостные системы, течение жидкости в которых происходит в изотермических условиях. Жидкость имеет постоянную вязкость, её плотность зависит только от порового давления и определяется следующим соотношением:

$$\rho(p) = \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} \cong \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0)]. \quad (1.1)$$

Пористая среда по своим свойствам изотропна, она слабосжимаема, её коэффициент пористости зависит от порового давления и характеризуется выражением

$$m(p) = m_0 + \beta_c(p - p_0). \quad (1.2)$$

Проницаемость пористой среды предполагается постоянной.

п. 1.2. При изучении особенностей фильтрации будем использовать идеи и методы механики сплошной среды. Следовательно, рассматривается не истинное движение жидкости в пористой среде, а осреднённое её течение по некоторому элементарному объёму. Под элементарным объёмом будем понимать предельно малый, физически допустимый объём, выделенный из общего объёма насыщенной пористой среды; причём свойства элементарного и общего объёмов совпадают. Количество жидкости в элементарном объёме будет также зависеть от давления в нём, и, используя формулы (1.1) и (1.2), его можно выразить соотношением

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0\beta(p - p_0). \quad (1.3)$$

Очевидно, размер элементарного объёма определяется строением горной породы; он тем больше, чем она сложнее. Этим фактором определяются особенности фильтрационного движения жидкости, а следовательно, и построение математических моделей фильтрации.

§ 2. Модели фильтрации в “равномерных” (модель Щелкачёва) и “неравномерных” (модель Христиановича) по строению коллекторах

п. 2.1. Модель Щелкачёва. Модель классического упругого режима широко используется в теории фильтрации и её приложениях, чему посвящено значительное количество работ. В этой связи отметим лишь основополагающую монографию одного из основателей теории нестационарной фильтрации В. Н. Щелкачёва [21]. В двухтомной монографии [21] помимо исчерпывающего фактического материала содержится ещё и весьма обширная библиография.

Нестационарная фильтрация по модели Щелкачёва описывается следующей системой уравнений:

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \text{div } \bar{w} + \frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0\beta P; \quad (1.6)$$

эта система легко сводится к уравнению пьезопроводности

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Здесь P характеризует отклонение давления от первоначального невозмущённого и непосредственно отвечает за нестационарный процесс перераспределения давления в области фильтрации.

Модели Щелкачёва присущ ряд характерных черт; ниже остановимся лишь на основных из них. Во-первых, закон Дарси (1.4) хорошо описывает ползущее течение жидкости в так называемых “регулярных” по строению структурах, т.е. в коллекторах такой структуры строения, которые удовлетворительно моделируются пучком слабосжимаемых капилляров одного диаметра и одинаковой упругоёмкости. Продольное сечение одного из капилляров изображено на рисунке 1.1; там же приведены и некоторые

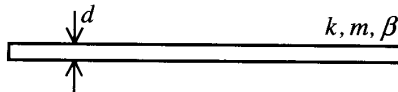


Рис. 1.1

его характеристики. Во-вторых, скорость фильтрации ($\bar{w}$) и градиент давления ($\text{grad } P$), а также количество жидкости в элементарном объёме ($m\rho$) и нестационарная часть давления (P) в нём связаны между собой “равновесными” соотношениями (1.4) и (1.6) соответственно. Эти связи таковы,

что при скачкообразном изменении одной из величин в некоторый момент времени мгновенно, в тот же момент времени изменяется и другая на пропорциональную величину. В-третьих, уравнение пьезопроводности (1.7) относится к уравнениям параболического типа, которые описывают нестационарные процессы, обладающие бесконечной скоростью распространения возмущений ($V_0 = \infty$); таким образом, вся рассматриваемая область мгновенно охватывается фильтрацией. В-четвёртых, при постановках краевых задач для уравнения (1.7) допустимо рассогласование граничных условий, соответствующих начальному моменту времени, с начальным условием, взятым на той же границе.

Замечание. Для установившейся фильтрации уравнения неразрывности (1.5) и пьезопроводности (1.7) соответственно запишутся так:

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0, \quad (1.9)$$

$$\Delta P = 0. \quad (1.10)$$

При этом все отмеченные особенности модели Щелкачёва сохраняются.

п. 2.2. Модель Христиановича. Большинство коллекторов имеет весьма сложное строение, что не позволяет в ряде случаев отнести их к регулярным по строению средам. Для моделирования пористых сред сложного строения С. А. Христианович предложил использовать набор капилляров слабосжимаемых капиллярных трубок одинаковой упругоёмкости с периодическими расширениями и сужениями. Одна из таких трубок изображена на рис. 1.2, там же указаны размеры расширяющихся и сужающихся

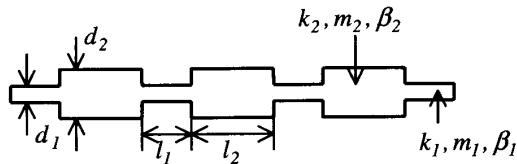


Рис. 1.2

частей и расстояний между ними, а также указаны коэффициенты проницаемости, пористости и упругоёмкости соответствующих частей трубок. Считается, что коэффициент пористости расширяющихся частей трубок m_2 значительно превышает коэффициент пористости сужающихся их частей m_1 , т.е. $m_2 \gg m_1$; следовательно, жидкость в основном содержится в расширяющихся частях пучка таких трубок. Проницаемость такого пучка определяется проницаемостью сужающихся частей, т.е. коэффициентом проницаемости k_1 . В такой неравномерной системе наряду с силой трения, пропорциональной скорости фильтрации, будет ещё действовать “выталкивающая” сила, пропорциональная (по Христиановичу) градиенту давле-

ния. В этих условиях закон фильтрации в неравномерной по структуре пористой среде запишется так:

$$\tau \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p; \quad (1.11)$$

здесь k — коэффициент проницаемости сужающихся частей (индекс опущен), τ — постоянная величина размерности времени, значение которой по экспериментальным промысловым данным [15] имеет порядок $1 \div 10^3$ с. В рассматриваемой модели считается, что количество жидкости в элементарном объёме определяется соотношением (1.6).

Очевидно, из закона фильтрации (1.11) следует, что неравномерность строения пористой среды будет проявляться только при нестационарном течении жидкости.

Итак, неустановившаяся фильтрация по модели Христиановича описывается системой уравнений (1.9), (1.5), (1.6) или следующим, эквивалентным ей, телеграфным уравнением вида:

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) относится к гиперболическому типу уравнений, описывающих нестационарные процессы с конечной скоростью распространения возмущений

$$V_0 = \sqrt{\kappa/\tau}. \quad (1.13)$$

Таким образом, если на некоторой границе первоначально невозмущённой области фильтрации в некоторый момент времени налагаются условия, способствующие возникновению фронта возмущений (например, давление на этой границе области изменено скачком), то перемещающийся с конечной скоростью V_0 фронт возмущения разобьёт всю область на возмущённую (охваченную фильтрацией) и невозмущённую части. Кроме этого, при переходе через фронт возмущения будут меняться скачкообразно давление, скорость фильтрации и количество жидкости в элементарном объёме. Причём, как будет показано в п. 8.4, в любой момент времени, включая и начальный, следующие связи между этими скачками:

$$[w] = \frac{k}{\mu \sqrt{\kappa \tau}} [P] = \beta \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} [P], \quad (1.14)$$

$$[m\rho] = \rho_0 \beta [P]. \quad (1.15)$$

И наконец, при постановках краевых задач для уравнения (1.12) допускается рассогласование граничных условий с начальными, о котором указывается в конце п. 2.1.

Заметим, что по прошествии времени, когда в законе фильтрации (1.11) вклад члена $\tau \partial \bar{w} / \partial t$ становится незначительным по сравнению с вкладом $\bar{w}$ и им можно пренебречь (т.е. течение жидкости описывается

законом Дарси (1.4)), то в эти моменты времени телеграфное уравнение (1.12) переходит (в асимптотическом смысле) в уравнение пьезопроводности (1.7).

И последнее. Закон фильтрации (1.11) и уравнение (1.12) можно записать в эквивалентных им формах соответственно, а именно

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \int_0^t \text{grad } P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau}, \quad (1.16)$$

$$\kappa \int_0^t \Delta P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau} = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.17)$$

В этом нетрудно убедиться, если результат дифференцирования по времени соотношения (1.16) (уравнения (1.17)) умножить на τ , а затем сложить с исходным выражением.

Заметим, что интегральные члены в соотношениях (1.16) и (1.17) представляют собой соответственно свёртки функций $\text{grad } P$ и ΔP с функцией $\exp(-t/\tau)$. Тогда, используя определение свёртки

$$\int_0^t f(t') \varphi(t-t') dt' = \int_0^t f(t-t') \varphi(t') dt' = f * \varphi, \quad (1.18)$$

перепишем выражения (1.16) и (1.17) следующим образом:

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P * \exp(-t/\tau), \quad (1.19)$$

$$\kappa \Delta P * \exp(-t/\tau) = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Соотношения (1.19) и (1.20) по форме напоминают запись закона Дарси (1.4) и уравнения пьезопроводности (1.7) соответственно.

§ 3. Модель фильтрации в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта)

п. 3.1. К “неравномерной” по структуре строения пористой среде можно отнести трещиновато-пористые коллекторы. Они, как правило, представляют собой обычную пористую горную породу, пронизанную системой хорошо развитых мелких трещин (рис. 1.3). Её схематически считают

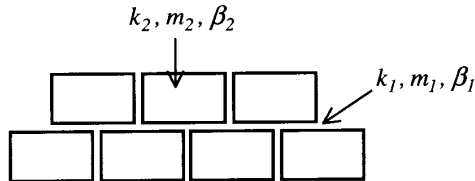


Рис. 1.3

состоящей из пористых блоков и гидродинамически связанных между собой системой трещин. В простейшем случае считается, что такая “неравномерная” пористая структура обладает следующими свойствами. Во-первых, объём пустот пористых блоков намного превышает объём трещин. Поэтому предполагается, что жидкость в основном находится в пористых блоках. Во-вторых, гидропроводность трещин значительно превышает гидропроводность блоков. В результате чего фильтрация жидкости осуществляется в основном по трещинам. В-третьих, в элементарном объёме (“точке” с её ближайшей окрестностью) достаточно полно представлены как поры, так и трещины. Это даёт основание считать, что каждая “точка” (в порах и трещинах) характеризуется двумя различными давлениями, проницаемостями, пористостями и упругоёмкостями, соответствующими давлению, проницаемости, пористости и упругоёмкостями, в трещинах и блоках.

Таким образом, Баренблатт Г. И. с соавторами [2] считают, что коллектор “неравномерной” структуры состоит из слабосжимаемых пористых блоков с коэффициентами проницаемости k_2 , упругоёмкости β_2 и пористости m_2 ; слабodeформируемых трещин “равномерного” строения, имеющих коэффициенты проницаемости k_1 , упругоёмкости β_1 и пористости m_1 ; причём $k_1 \gg k_2$, а $m_2 \gg m_1$. Далее, скоростью фильтрации в блоках $\bar{w}_2$ пренебрегается по сравнению со скоростью фильтрации в трещинах $\bar{w}_1$ ($\bar{w}_1 \gg \bar{w}_2 \approx 0$); при этом фильтрация по трещинам подчиняется закону Дарси. Массообмен жидкостью между блоками и трещинами предполагается пропорциональным разности давлений в блоках p_2 и трещинах p_1 .

п. 3.2. Итак, следуя Баренблатту Г.И., опишем неустановившуюся фильтрацию в трещиновато-пористой среде следующей системой уравнений:

$$\bar{w}_1 = -\frac{k_1}{\mu} \text{grad } P_1, \quad \bar{w}_2 = 0; \quad (1.21)$$

$$\rho_0 \text{div} \bar{w}_1 + \frac{\partial(m_1 \rho)}{\partial t} - q = 0, \quad \frac{\partial(m_2 \rho)}{\partial t} + q = 0; \quad (1.22)$$

$$m_1 \rho = m_{10} \rho_0 + \rho_0 \beta_1 P_1, \quad (1.23)$$

$$m_2 \rho = m_{20} \rho_0 + \rho_0 \beta_2 P_2;$$

$$q = \alpha \frac{\rho_0 k_2}{\mu l^2} (P_2 - P_1) = \rho_0 A (P_2 - P_1) \quad (1.24)$$

или эквивалентной ей системой:

$$P_2 = P_1 + \tau_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \tau_1 \kappa_1 A P_1, \quad (1.25)$$

$$P_1 = P_2 + \tau_2 \frac{\partial P_2}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Здесь $P_{1,2} = p_{1,2} - p_0$ — отклонения давлений в трещинах и блоках от их начальных значений, q характеризует обмен жидкостью между блоками и трещинами. Далее, рассматривая связь (1.26) как уравнение первого порядка относительно P_2 и решая это уравнение при нулевых начальных данных, получим

$$P_2 = \int_0^t P_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2}, \quad (1.27)$$

которое в свёрточной записи имеет вид

$$P_2 = P_1 * \exp(-t/\tau_2). \quad (1.28)$$

Подставляя теперь равенства (1.27) и (1.28) в уравнение (1.25), найдём соответственно следующие уравнения относительно функции P_1 :

$$\kappa_1 \tau_1 \Delta P_1 + \int_0^t P_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} = P_1 + \tau_1 \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad (1.29)$$

$$\kappa_1 \tau_1 \Delta P_1 + P_1 * \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) = P_1 + \tau_1 \frac{\partial P_1}{\partial t}. \quad (1.30)$$

И наконец, нетрудно показать, что функции P_1 и P_2 удовлетворяют одному и тому же уравнению вида

$$\kappa' \Delta \left(P_{1,2} + \tau_2 \frac{\partial P_{1,2}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(P_{1,2} + \tau' \frac{\partial P_{1,2}}{\partial t} \right). \quad (1.31)$$

Выделим отдельно случай пренебрежимо малой упругоёмкости трещин по сравнению с упругоёмкостью блоков ($\beta_1 \ll \beta_2$, $\tau_1 = 0$). Тогда уравнения (1.29), (1.30) и (1.31) соответственно запишутся так:

$$\kappa_{12} \tau_2 \Delta P_1 + \int_0^t P_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} = P_1, \quad (1.32)$$

$$\kappa_{12} \tau_2 \Delta P_1 + P_1 * \exp(-t/\tau_2) = P_1, \quad (1.33)$$

$$\kappa_{12} \Delta \left(P_{1,2} + \tau_2 \frac{\partial P_{1,2}}{\partial t} \right) = \frac{\partial P_{1,2}}{\partial t}, \quad (1.34)$$

при этом очевидно, что

$$\kappa_1 \tau_1 = \frac{k_1}{\mu \beta_1} \frac{\beta_1}{A} = \frac{k_1}{\mu \beta_2} \frac{\beta_2}{A} = \kappa_{12} \tau_2.$$

п. 3.3. Отметим следующее. Во-первых, согласно принятой модели фильтрации только трещины имеют непосредственную гидродинамическую связь с границами области фильтрации, блоки такой связи не имеют. Это обстоятельство находит своё отражение в постановках граничных условий (как для давления, так и для расходов) в трещинах и блоках на границе области фильтрации.

Во-вторых, асимптотическая оценка уравнения (1.29) в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, показывает, что вкладом интегрального члена и P_I можно пренебречь по сравнению с вкладом остальных членов. Тогда в эти моменты времени нестационарное фильтрационное течение жидкости в упругоёмких трещинах будет описываться (в асимптотическом смысле) уравнением пьезопроводности вида

$$\kappa_I \Delta P_I = \frac{\partial P_I}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Следовательно, возникшее в начальный момент времени фильтрационное возмущение распространяется с бесконечно большой скоростью ($V_0 = \infty$). Таким образом, вся рассматриваемая область мгновенно охватывается фильтрацией; при этом в постановках краевых условий для уравнения (1.29) допустимо рассогласование граничных условий с начальным условием. Далее, согласно (1.21) блоки не реагируют на изменение условий, формирующих течение жидкости в начальные моменты времени, т.е. фильтрация в упругоёмких трещинах в эти моменты времени происходит автономно, независимо от блоков; массообмен жидкостью между блоками и трещинами практически отсутствует. По прошествии значительного времени давления в трещинах и блоках выравниваются и в асимптотическом смысле удовлетворяют уравнению пьезопроводности вида

$$\kappa' \Delta P_{I,2} = \frac{\partial P_{I,2}}{\partial t}. \quad (1.36)$$

При этом очевидно, что обмен жидкостью между блоками и трещинами в любой фиксированной точке пласта с ростом времени сначала монотонно возрастает от нулевого значения до некоторого максимального, а затем монотонно убывает до нулевого значения.

В-третьих, из такого же асимптотического анализа уравнения (1.34) получим, что в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, соответствующее фильтрационное течение в неупругих трещинах будет описываться (в асимптотическом смысле) уравнением эллиптического типа, имеющего вид

$$\Delta P_I - \frac{P_I}{\kappa_{I2} \tau_2} = 0. \quad (1.37)$$

Из этого факта следует: 1) Фильтрационные возмущения распространяются с бесконечно большой скоростью ($V_0 = \infty$). 2) Если в начальный момент времени $t = 0$ произошло скачкообразное изменение граничных условий, то мгновенно (“хлопком”) формируется новое, отличное от нулевого, начальное условие $P(x, y, z, 0 + 0)$, являющееся решением уравнения (1.37), удовлетворяющее новым граничным условиям. Это обстоятельство указывает на то, что в постановках краевых задач для уравнения (1.34) недопустимо рассогласование граничных условий с начальным. 3) В моменты вре-

мени, близкие к $t = 0 + 0$, в неупругоёмких трещинах осуществляется некое стационарное течение жидкости, соответствующее новым граничным условиям. 4) Упругоёмкие блоки мгновенно реагируют на изменение давления в неупругоёмких трещинах максимальным обменом жидкостью между ними.

Далее, по прошествии значительного времени давления в трещинах и блоках выравниваются и удовлетворяют (в асимптотическом смысле) уравнению пьезопроводности вида

$$\kappa_{12} \Delta P_{1,2} = \frac{\partial P_{1,2}}{\partial t}. \quad (1.38)$$

При этом массообмен жидкостью между блоками и трещинами с ростом времени монотонно убывает от максимального значения до нулевого.

п. 3.4. Покажем, что фильтрации в трещиновато-пористой среде по модели Баренблатта (1.21)–(1.24) путём осреднения её по насыщенному элементарному объёму можно сопоставить эквивалентное течение жидкости в однородной пористой среде. Для этого поступим следующим образом. Сначала сложим оба уравнения в (1.12), в результате получим

$$\rho_0 \operatorname{div} \bar{w}_1 + \frac{\partial (mp)}{\partial t} = 0, \quad (1.39)$$

где $m = m_1 + m_2$. Затем, складывая оба соотношения в (1.23), найдём элементарное количество жидкости в эквивалентной однородной пористой среде:

$$mp - m_0 \rho_0 = \rho_0 (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2), \quad (1.40)$$

где $m_0 \rho_0 = (m_{10} + m_{20}) \rho_0$. Далее, используя связь (1.27) между функциями P_2 и P_1 , окончательно получим выражение, характеризующее поведение количества жидкости в элементарном объёме однородной среды:

$$mp - m_0 \rho_0 = \rho_0 \left[\beta_1 P_1 + \beta_2 \int_0^t P_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} \right] \quad (1.41)$$

или в виде свёртки:

$$mp - m_0 \rho_0 = \rho_0 [\beta_1 P_1 + \beta_2 P_1 * \exp(-t/\tau_2)]. \quad (1.42)$$

Такое поведение количества жидкости в элементарном объёме однородной среды в дальнейшем будем называть релаксационным. Характерной особенностью такого поведения является то, что оно зависит как от давления, так и явным образом от времени через функцию $\exp(-t/\tau_2)$, называемую экспоненциальным ядром релаксации.

Таким образом, систему уравнений (1.21), (1.39) и (1.41), описывающую фильтрацию в упругоёмких трещинах, можно трактовать как систему уравнений, характеризующую течение жидкости в однородной пористой среде с релаксационным поведением элементарного количества жидкости

по закону (1.41). Исключая все искомые величины, кроме функции P_1 , из системы (1.21), (1.39), (1.41), получим уравнение (1.29).

Отметим, что в начальные моменты времени суммарное элементарное количество жидкости определяется (в асимптотическом смысле) соотношением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta_1 P_1, \quad (1.43)$$

т.е. ведёт себя как упругое тело с коэффициентом упругоёмкости, равным

$$\beta_{дин} = \beta_1. \quad (1.44)$$

По прошествии значительного времени оно определяется (в асимптотическом смысле) выражением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0(\beta_1 + \beta_2)P_1, \quad (1.45)$$

т.е. ведёт себя как упругое тело с коэффициентом упругоёмкости, равным

$$\beta_{см} = \beta_1 + \beta_2; \quad (1.46)$$

очевидно $\beta_{дин} < \beta_{см}$. Если упругоёмкостью трещин можно пренебречь по сравнению с упругоёмкостью блоков, т.е. $\beta_2 \gg \beta_1 \approx 0$, то элементарное количество жидкости в эквивалентной однородной пористой среде характеризуется соотношением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta_2 \int_0^t P_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) dt' = \rho_0\beta_2 P_1 * \exp(-t'/\tau_2). \quad (1.47)$$

При этом динамический коэффициент упругоёмкости $\beta_{дин} = 0$, а элементарное количество жидкости в начальный момент времени ведёт себя как несжимаемое тело.

п. 3.5. Для описания нестационарного движения жидкости в кавернозных породах с успехом может быть использована модель фильтрации Баренблатта. В этом плане представляет интерес работа [22]. В ней пласт кавернозного строения схематически представляется, во-первых, пористой средой, составляющей главный канал течения жидкости, и, во-вторых, равномерно распределённые каверны, свободно сообщающиеся с главным каналом. В статье [22] выведена система дифференциальных уравнений, определяющая изменения давления в главном канале (p_1) и кавернах (p_2) при нестационарной фильтрации однородной капельной жидкости для случая несжимаемых пор ($m_1 = m_{10}$) и каверн ($m_2 = m_{20}$):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \kappa_1 \Delta p_1 - \beta \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = H(p_1 - p_2). \quad (1.48)$$

Здесь κ_1 — коэффициент пьезопроводности главного канала, $\beta = m_{20}/m_{10}$ — безразмерный коэффициент, равный отношению общего объёма всех каверн к поровому объёму главного канала, H — коэффициент, характеризующий сопротивление обмену жидкостью между кавернами и главным каналом, размерность его равна $1/t$.

Сравнения решений системы (1.48) для случая прямолинейно-параллельной фильтрации при определённых начальном и граничных условиях с соответствующими результатами лабораторных экспериментов при тех же условиях показали хорошую их согласованность. Это позволило авторам статьи сделать вывод об обоснованности системы (1.48).

Перепишем систему уравнений (1.48) в обозначениях, применяемых в нашей литературе, используя при этом следующие их определения и связи с коэффициентами системы (1.48): $\beta_{ж}$ — коэффициент сжимаемости жидкости, $\beta_1 = m_{10}\beta_{ж}$ и $\beta_2 = m_{20}\beta_{ж}$ — коэффициенты упругоёмкости главного канала и каверн соответственно, $H = l/\tau_2 = A/\beta_2$, $\beta H = l/\tau_1$, $\kappa_1/\beta H = \kappa_1 \tau_1$. После несложных преобразований система уравнений (1.48) запишется так:

$$P_2 = P_1 + \tau_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \kappa_1 \tau_1 \Delta P_1, \quad P_1 = P_2 + \tau_2 \frac{\partial P_2}{\partial t}; \quad (1.49)$$

здесь $P_{1,2} = p_{1,2} - p_0$.

Нетрудно видеть, что система (1.49) с точностью до содержания коэффициентов совпадает с системой уравнений (1.25), (1.26), описывающей нестационарную фильтрацию в трещиновато-пористых средах по модели Баренблатта.

Итак, упругоёмкие трещины соответствуют основному каналу течения капельной жидкости; упругоёмкие блоки — упругим кавернам. Обмен жидкостью между основным каналом и кавернами характеризуется соотношением

$$q = \rho_0 A(P_2 - P_1). \quad (1.24)$$

п. 3.6. Заметим, что движение жидкости в слоистом пласте, когда один из пропластков имеет небольшие толщину и коэффициент пористости, но обладает значительно большим коэффициентом проницаемости по сравнению с соответствующими характеристиками другого пропластка, то в этом случае нестационарную фильтрацию также можно удовлетворительно описать моделью Баренблатта.

§ 4. Модель фильтрации при релаксационном поведении жидкости в элементарном объёме

п. 4.1. В п. 3.4 была установлена эквивалентность фильтрации в трещиновато-пористой среде по модели Г.И. Баренблатта и фильтрации по закону Дарси (1.4) в однородной пористой среде, элементарное количество жидкости в которой изменяется по закону (1.47). При этом динамический коэффициент упругоёмкости насыщенной пористой среды всегда меньше её статического коэффициента упругоёмкости ($\beta_{дин} < \beta_{ст}$). Обобщим эти результаты на случай, когда динамический и статический коэффициенты

упругоёмкости насыщенной пористой среды являются произвольными ограниченными величинами. Пористая среда подобного типа может быть смоделирована пучком эластичных капилляров одинакового внутреннего диаметра, но каждый капилляр имеет различную упругоёмкость.

Итак, рассмотрим модель фильтрации, предусматривающую, во-первых, равномерное строение пористой среды, во-вторых, фильтрационное течение подчиняется закону Дарси (1.4), в-третьих, поведение количества жидкости в элементарном объёме имеет релаксационный характер и описывается в простейшем случае следующим соотношением:

$$\begin{aligned} m\rho - m_0\rho_0 &= \rho_0\beta\frac{\theta_p}{\theta_m}P + \rho_0\beta\left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right)\int_0^t P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right)\frac{dt'}{\theta_m} = \\ &= \rho_0\beta\left[\frac{\theta_p}{\theta_m}P + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right)P * \exp\left(-\frac{t}{\theta_m}\right)\right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

или эквивалентным ему дифференциальным выражением

$$m\rho - m_0\rho_0 + \theta_m \frac{\partial(m\rho - m_0\rho_0)}{\partial t} = \rho_0\beta\left(P + \theta_p \frac{\partial P}{\partial t}\right). \quad (1.51)$$

Из соотношения (1.50) видно, что в начальные моменты времени ($t > 0+0$) элементарное количество жидкости определяется (в асимптотическом смысле) равновесным соотношением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta\frac{\theta_p}{\theta_m}P, \quad (1.52)$$

т.е. элементарное количество жидкости ведёт себя как упругоёмкий элемент, характеризующийся динамическим коэффициентом упругоёмкости, равным $\theta_{дин} = \beta\theta_p/\theta_m$. По прошествии времени, когда вкладом в уравнения (1.50) членов, содержащих производные по времени, можно пренебречь (ввиду их малости), то элементарное количество жидкости будет определяться (в асимптотическом смысле) равновесным соотношением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta P. \quad (1.6)$$

В этом случае оно ведёт себя как упругоёмкий элемент, характеризующийся статическим коэффициентом упругоёмкости, равным $\beta_{ст} = \beta$.

Необходимо отметить следующее: если динамический коэффициент упругоёмкости равен нулю ($\theta_p = 0$), то, согласно равенству (1.52), количество жидкости в элементарном объёме в начальные моменты времени ($t = 0+0$) равняется постоянной величине $m_0\rho_0$ и, следовательно, ведёт себя как неупругое (несжимаемое) тело.

Итак, нестационарную фильтрацию по простейшей модели, учитывающей равномерное строение пористой среды, закон фильтрации Дарси и

релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме, можно описать системой уравнений (1.4), (1.5) и (1.50). Исключая из этой системы уравнений все искомые величины, кроме P , после несложных преобразований, получим

$$\kappa \theta_m \Delta P + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) \int_0^t P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} = \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) P + \theta_p \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.53)$$

Уравнение (1.53) можно преобразовать и к другой форме записи, эквивалентной исходной, а именно:

$$\kappa \Delta \left(P + \theta_m \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(P + \theta_p \frac{\partial P}{\partial t} \right). \quad (1.54)$$

Заметим, что с точностью до обозначений уравнения (1.53) и (1.54) совпадают соответственно с уравнениями (1.29) и (1.31).

Далее, если динамический коэффициент упругоёмкости $\beta_{дин}$ равен нулю ($\theta_p = 0$), то уравнения (1.53) и (1.54) соответственно запишутся так:

$$\kappa \theta_m \Delta P + \int_0^t P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} = P, \quad (1.55)$$

$$\kappa \Delta \left(P + \theta_m \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.56)$$

И последнее. Асимптотический анализ уравнения (1.53) показывает, что в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, нестационарное фильтрационное течение жидкости будет описываться уравнением пьезопроводности вида

$$\kappa \frac{\theta_m}{\theta_p} \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.57)$$

Следовательно, фильтрационные возмущения распространяются с бесконечной скоростью ($V_0 = \infty$), и вся рассматриваемая область мгновенно становится областью фильтрации. В постановках краевых задач для уравнения (1.53) допускается рассогласование граничных условий с начальным условием.

Из такого же асимптотического анализа уравнения (1.55) следует, что соответствующее фильтрационное течение, когда динамический коэффициент упругоёмкости равен нулю ($\beta_{дин} = 0$, $\theta_p = 0$), будет описываться в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, уравнением эллиптического типа, а именно

$$\kappa \theta_m \Delta P - P = 0. \quad (1.58)$$

Тогда, очевидно, фильтрационные возмущения распространяются с бесконечной скоростью ($V_0 = \infty$), вся рассматриваемая область мгновенно охватывается фильтрацией; в пласте осуществляется (в асимптотическом смысле) некое стационарное фильтрационное течение, соответствующее

новым граничным условиям. Таким образом, при скачкообразном изменении граничных условий в начальный момент времени сформируется новое начальное условие $P|_{t=0+0}$, являющееся решением уравнения (1.58) и удовлетворяющее новым граничным условиям. Здесь в постановках краевых задач для уравнения (1.55) недопустимо рассогласование граничных и начальных условий.

И наконец, по прошествии значительного времени, согласно так называемому принципу затухающей памяти [12] (подробное изложение будет дано позже, в § 7), релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме практически прекращается, и давление будет удовлетворять уравнению пьезопроводности (1.7).

п. 4.2. Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = \left\{ 1 - \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \exp\left(-\frac{t}{\theta_m}\right) \right\} \chi(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (1.59)$$

Очевидно, функция $\varphi(t)$ при $t = 0$ терпит скачок первого рода, равный

$$[\varphi]_0 = \varphi(0) = \theta_p / \theta_m. \quad (1.60)$$

Согласно определению обобщённой производной [4] для функции она запишется так:

$$\frac{\tilde{d}\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + [\varphi]_0 \delta(t), \quad (1.61)$$

где $\frac{d\varphi}{dt}$ — обычная производная; очевидно, что $\tilde{d}\chi(t)/dt = \delta(t)$. Нетрудно

убедиться в том, что обобщённая производная функции $\varphi(t)$ равна

$$\frac{\tilde{d}\varphi}{dt} = \frac{\theta_p}{\theta_m} \delta(t) + \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m^2} \exp\left(-\frac{t}{\theta_m}\right). \quad (1.62)$$

Тогда соотношение (1.50) представимо в виде следующей свёртки:

$$mp - m_0 \rho_0 = \rho_0 \beta \frac{\tilde{d}\varphi}{dt} * P. \quad (1.63)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \rho_0 \beta \frac{\tilde{d}\varphi}{dt} * P &= \rho_0 \beta \int_0^t \left\{ \frac{\theta_p}{\theta_m} \delta(t-t') + \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m^2} \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \right\} P dt' = \\ &= \rho_0 \beta \frac{\theta_p}{\theta_m} \int_0^t P \delta(t-t') dt' + \rho_0 \beta \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \int_0^t P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} = \\ &= \rho_0 \beta \frac{\theta_p}{\theta_m} P + \rho_0 \beta \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) \int_0^t P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m}. \end{aligned}$$

Таким образом, нестационарная фильтрация по закону Дарси в равномерной по строению пористой среде при простейшем релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме описывается следующей системой уравнений:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \text{div } \vec{w} + \frac{\tilde{\partial}(m\rho)}{\partial t} = 0, \quad (1.64)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \frac{\tilde{d}\varphi}{dt} * P \quad (1.63)$$

или эквивалентным ей уравнением в свёртках

$$\kappa \Delta P = \frac{\tilde{d}\varphi}{dt} * P = \varphi * \frac{\tilde{\partial} P}{\partial t}. \quad (1.65)$$

В уравнении неразрывности фильтрационного потока учтён тот факт, что количество жидкости в элементарном объёме ($m\rho$) при $t=0$ изменяется скачком; поэтому надлежит использовать обобщённую производную вместо обычной.

§ 5. Модель с неравновесным законом фильтрации

п. 5.1. Как отмечалось в п. 2.1, фильтрация по закону Дарси (1.4) может быть смоделирована пучком эластичных капилляров одного диаметра и одинаковой упругоёмкости. Если аналогичный пучок имеет периодические расширения и сужения, то в законе Дарси появляется дополнительное слагаемое $\tau \partial \vec{w} / \partial t$, которое их и учитывает (см. п. 2.2). Реальные пористые среды зачастую имеют весьма сложное строение и, в частности, слоистое, причём со слоями различной проницаемости и примерно одинаковой упругоёмкости. Очевидно, при мгновенном изменении условий, формирующих фильтрационное течение, в первую очередь начнёт реагировать жидкость в слоях с лучшей проницаемостью. Затем, по прошествии некоторого времени, заметный вклад в фильтрацию станет вносить и жидкость, находящаяся в слоях с худшей проницаемостью. Следовательно, элементарный объём будет обладать переменным во времени коэффициентом проницаемости. Закон фильтрации в этом элементарном объёме (в простейшем случае) может быть охарактеризован следующим неравновесным выражением, записанным в дифференциальной форме:

$$\tau_w \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} = -\frac{k}{\mu} \left(\text{grad } P + \tau_p \frac{\partial \text{grad } P}{\partial t} \right). \quad (1.66)$$

Рассматривая соотношение (1.66) как уравнение первого порядка относительно скорости фильтрации $\bar{w}$ и решая его при нулевом начальном значении скорости фильтрации, найдём

$$\begin{aligned}\bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} \text{grad } P - \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \text{grad } P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \\ &= -\frac{k}{\mu} \left\{ \frac{\tau_p}{\mu} \text{grad } P + \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \text{grad } P * \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} \right\}.\end{aligned}\quad (1.67)$$

Выражение (1.66) можно также рассматривать как уравнение первого порядка относительно $\text{grad } P$, решение которого при нулевом начальном значении градиента давления запишется так:

$$\begin{aligned}\text{grad } P &= -\frac{\mu}{k} \frac{\tau_w}{\tau_p} \bar{w} - \frac{\mu}{k} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p}\right) \int_0^t \bar{w} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_p}\right) \frac{dt'}{\tau_p} = \\ &= -\frac{\mu}{k} \left\{ \frac{\tau_w}{\tau_p} \bar{w} + \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p}\right) \bar{w} * \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_p}\right) \frac{dt'}{\tau_p} \right\}.\end{aligned}\quad (1.68)$$

Очевидно, что все три формы записи неравновесного закона фильтрации эквивалентны.

Анализ неравновесного закона фильтрации, записанного в форме (1.67), показывает, что при временах, близких к $t = 0 + 0$, он определяется равновесным законом Дарси вида

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} \text{grad } p \quad (1.69)$$

с динамическим коэффициентом проницаемости, равным $k_{дин} = k \tau_p / \tau_w$. Очевидно, по прошествии значительного времени в неравновесном законе фильтрации, записанном в форме (1.66), членами, содержащими производные по времени, можно пренебречь (ввиду их малости). Следовательно, в эти моменты времени имеет место равновесный закон Дарси (1.4) со статическим коэффициентом проницаемости, равным $k_{см} = k$.

п. 5.2. Итак, нестационарную фильтрацию по модели, учитывающей равновесное поведение элементарного количества жидкости и простейший неравновесный закон фильтрации, можно описать следующей системой уравнений: (1.67), (1.5) и (1.6). Исключая из этой системы все искомые величины, кроме давления, получим

$$\kappa \frac{\tau_p}{\tau_w} \Delta P + \kappa \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \Delta P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.70)$$

или

$$\kappa \frac{\tau_p}{\tau_w} \Delta P + \kappa \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \Delta P * \exp\left(\frac{t}{\tau_w}\right) = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.71)$$

Уравнения (1.70) и (1.71) можно записать в эквивалентной им форме, а именно

$$\kappa \Delta \left(P + \tau_p \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + \tau_w \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (1.72)$$

Заметим, что уравнение (1.72) с точностью до обозначений совпадает с уравнениями (1.31) и (1.54).

Далее, если динамический коэффициент проницаемости равен нулю ($k_{дин} = 0$, $\tau_p = 0$), то уравнения (1.70)–(1.72) соответственно запишутся так:

$$\kappa \int_0^t \Delta P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1.73)$$

$$\kappa \Delta P * \exp\left(-\frac{t}{\tau_w}\right) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1.74)$$

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t} + \tau_w \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}; \quad (1.75)$$

при этом уравнения (1.73) и (1.74) с точностью до обозначений совпадают соответственно с уравнениями (1.12) и (1.20).

Из анализа уравнения (1.70) следует, что в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, оно приводится к уравнению пьезопроводности вида

$$\kappa \frac{\tau_p}{\tau_w} \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1.76)$$

по форме совпадающим с уравнением (1.57). Таким образом, в случае отличном от нуля динамического коэффициента пьезопроводности ($\tau_p \neq 0$) фильтрационные возмущения распространяются с бесконечной скоростью ($V_0 = \infty$). Следовательно, вся рассматриваемая область мгновенно охватывается фильтрацией. Если же динамический коэффициент проницаемости равен нулю ($k_{дин} = 0$, $\tau_p = 0$), то рассматриваемое фильтрационное течение характеризуется уравнением (1.75), относящимся к гиперболическому типу. В этом случае фильтрационные возмущения распространяются с конечной скоростью, равной $V_0 = \sqrt{\kappa/\tau_w}$. Таким образом, вся рассматриваемая область разбивается фронтом возмущений на возмущённую и невозмущённую части.

Отметим некоторые особенности фильтрации, когда динамический коэффициент проницаемости равен нулю, и выскажем соображения модельного представления такого фильтрационного течения. При равенстве нулю динамического коэффициента проницаемости ($\tau_p = 0$) закон фильтрации (1.68) приводится к виду

$$\tau_w \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \quad (1.77)$$

при этом пористая среда имеет равномерное строение, а коэффициент упругоёмкости пласта постоянен. Выражение (1.77) аналогично закону фильтрации (1.11), обязанному неравномерному строению пористой среды при той же её упругоёмкости. При этом, как отмечалось в п.2.2, в пористой среде неравномерного строения фильтрационные возмущения распространяются с конечной скоростью, а рассматриваемая область разбивается фронтом возмущений на охваченную фильтрацией и невозмущённую части. Очевидно, в рассматриваемом случае на фронте возмущения, перемещающемся с конечной скоростью V_0 , реализуется скачок давления, а следовательно, и скачок скорости фильтрации. Скачок давления в свою очередь вызывает и соответствующее скачкообразное изменение на фронте возмущений элементарного количества жидкости при постоянной упругоёмкости пористой среды. (Отметим, что если увеличение количества жидкости в элементарном объёме превысит его упругоёмкие возможности, то, очевидно, произойдёт гидроразрыв элементарного объёма – разрыв непрерывности.) Подобная ситуация, по-видимому, будет наблюдаться при течении жидкости в пучке эластичных капилляров одного диаметра, имеющих постоянную и одинаковую упругоёмкость. Скачкообразное изменение на фронте возмущений количества жидкости вызовет соответствующее скачкообразное изменение диаметра пучка капилляров. Таким образом, в каждом капилляре пучка одновременно будет развиваться некая неравномерная структура постоянной упругоёмкости, граница неравномерности которой будет перемещаться совместно с фронтом возмущений.

п. 5.3. Введём теперь в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \left\{ 1 - \frac{\tau_w - \tau_p}{\tau_w} \exp\left(-\frac{t}{\tau_w}\right) \right\} \chi(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (1.78)$$

Тогда соотношение (1.65) представимо в виде следующей свёртки:

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \frac{\tilde{d}\psi}{dt} * \text{grad } P. \quad (1.79)$$

Следовательно, нестационарное течение жидкости в упругой пористой среде сложного строения по простейшему неравновесному закону фильтрации в элементарном объёме описывается следующей системой уравнений:

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \frac{\tilde{d}\psi}{dt} * \text{grad } P, \quad (1.79)$$

$$\rho_0 \text{div } \bar{w} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$$m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0\beta P. \quad (1.6)$$

п. 5.4. Ниже фильтрационную модель Баренблатта обобщим на случай течения жидкости по упругим трещинам различной толщины, имеющим расширения и сужения, т.е. трещинам, образующим своеобразную “слоистую” структуру. Движение жидкости по таким трещинам будем описывать (в простейшем случае) следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{w}_l &= -\frac{k_l}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} \text{grad } P_l - \frac{k_l}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \text{grad } P_l \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \\ &= -\frac{k_l}{\mu} \left\{ \frac{\tau_p}{\tau_w} \text{grad } P_l - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \text{grad } P_l * \exp\left(-\frac{t}{\tau_w}\right) \right\} = \\ &= -\frac{k_l}{\mu} \text{grad } P_l * \frac{\tilde{d}\psi}{dt}, \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$\bar{w}_2 = 0;$$

$$\text{div } \bar{w}_l + \beta_l \frac{\partial P_l}{\partial t} - A(P_2 - P_l) = 0, \quad \beta_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + A(P_2 - P_l) = 0. \quad (1.81)$$

Из приведённой системы нетрудно получить уравнение для определения превышения давления в трещинах P_l , а именно

$$\begin{aligned} \kappa_l \frac{\tau_l \tau_p}{\tau_w} \nabla^2 P_l + \kappa_l \tau_l \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \nabla^2 P_l \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \\ = -\int_0^t P_l \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} + P_l + \tau_l \frac{\partial P_l}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.82)$$

или

$$\begin{aligned} \kappa_l \tau_l \left\{ \frac{\tau_p}{\tau_w} \Delta P_l + \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \Delta P_l * \exp\left(-\frac{t}{\tau_w}\right) \right\} = \\ = -P_l * \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + P_l + \tau_l \frac{\partial P_l}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

а также в форме

$$\kappa_I \tau_I \Delta P_I * \frac{d\psi}{dt} = -P_I * \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + P_I + \tau_I \frac{\partial P_I}{\partial t}. \quad (1.84)$$

При этом связь между отклонениями давлений в блоках P_2 и трещинах P_I определяется формулой

$$P_2 = \int_0^t P_I \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} = P_I * \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right). \quad (1.85)$$

И наконец, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют отклонения P_I и P_2 , запишется так:

$$\begin{aligned} & \kappa_I \tau_I \Delta \left[P_{I,2} + (\tau_2 + \tau_p) \frac{\partial P_{I,2}}{\partial t} + \tau_2 \tau_p \frac{\partial^2 P_{I,2}}{\partial t^2} \right] = \\ & = (\tau_I + \tau_2) \frac{\partial P_{I,2}}{\partial t} + (\tau_I \tau_w + \tau_2 \tau_w + \tau_I \tau_2) \frac{\partial^2 P_{I,2}}{\partial t^2} + \tau_I \tau_2 \tau_w \frac{\partial^3 P_{I,2}}{\partial t^3}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

ГЛАВА 2. Законы сохранения и уравнения фильтрации [12,8]

§ 6. Законы сохранения

п. 6.1. Закон сохранения массы. Рассмотрим конечный неподвижный объём Ω изотропной слабосжимаемой пористой среды постоянной проницаемости, заполненный однородной вязкой капельной жидкостью. Объём ограничен поверхностью Σ , внутри него отсутствуют источники и стоки. Соотношение $M = \int_{\Omega} m \rho d\Omega$ характеризует массу жидкости всего объёма Ω .

В данном случае закон сохранения массы жидкости базируется на нулевом балансе двух факторов. Во-первых, изменение в единицу времени количества жидкости в объёме Ω за счёт его упругоёмкости, т.е. $\int_{\Omega} \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} d\Omega$, и, во-вторых, протекающей за тот же промежуток времени массы жидкости через поверхность Σ , т.е. $\int_{\Sigma} \bar{w} \cdot \bar{n} d\Sigma \equiv \rho_0 \int_{\Sigma} \bar{w} \cdot \bar{n} d\Sigma$. Следовательно, математически закон сохранения массы жидкости в интегральной форме запишется так:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} \bar{w} \cdot \bar{n} d\Sigma = 0. \quad (2.1)$$

Если в объёме Ω скорость фильтрации $\vec{w}$ дифференцируема, то, используя формулу Остроградского–Гаусса, получим закон сохранения массы жидкости в дифференциальном виде, а именно

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{w} = 0; \quad (2.2)$$

соотношение (2.2) называют уравнением неразрывности фильтрационного потока.

п. 6.2. Закон сохранения количества движения. Количество движения жидкости в объёме Ω определяется выражением $\vec{K} = \int_{\Omega} \rho \vec{w} d\Omega$. Глав-

ный вектор объёмных сил запишется так: $\vec{Q}_{\Omega} = \int_{\Omega} m \rho \vec{f} d\Omega$, а главный вектор

поверхностных сил равен $\vec{Q}_{\Sigma} = \int_{\Sigma} m \vec{p}_{\Sigma} d\Sigma = \int_{\Sigma} m \vec{n} \cdot \vec{\bar{P}} d\Sigma$; здесь $\vec{f}$ и $\vec{p}_{\Sigma}$ —

плотности соответственно объёмных и поверхностных сил, $\vec{\bar{P}}$ — тензор напряжений. Тогда теорема об изменении количества движения жидкости в объёме Ω представима в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega} m \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\Sigma} \vec{p}_{\Sigma} d\Sigma. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) можно также записать в форме уравнения движения в напряжениях:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega} m \rho \vec{f} d\Omega + \int_{\Sigma} m \vec{n} \cdot \vec{\bar{P}} d\Sigma. \quad (2.4)$$

Следуя Н. Е. Жуковскому [20], будем полагать, что:

I^0 . Движение жидкости относится к ползущим течениям; тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{w} d\Omega \equiv 0. \quad (2.5)$$

2^0 . Жидкость считается идеальной, следовательно, $\vec{\bar{P}} = -p_{\text{нор}} \vec{\bar{E}}$, где $p_{\text{нор}}$ — давление в жидкости, находящейся в порах. Таким образом,

$$\vec{Q}_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} m p_{\text{нор}} \vec{n} d\Sigma. \quad (2.6)$$

(Вязкость жидкости будет учтена в дальнейшем при определении связи между силой сопротивления (силой трения) и скоростью фильтрации.)

3⁰. К объёмным силам отнесём, во-первых, вес жидкости с плотностью силы веса $\vec{g}$, во-вторых, поверхностные силы трения жидкости о поверхность пор; плотность этих сил обозначим через $\vec{d}$. Тогда имеем $\vec{f} = \vec{g} + \vec{d}$, и

$$\int_{\Omega} mp \vec{f} d\Omega = \int_{\Omega} mp (\vec{g} + \vec{d}) d\Omega. \quad (2.7)$$

В результате проведения линеаризации в соотношениях (2.5) и (2.7), а также введения приведённого давления $p_{прив} \equiv p = p_{ноп} + \rho_0 gz$ и с учётом (1.6) уравнение (2.4) запишется так:

$$\rho_0 \int_{\Omega} \vec{d} d\Omega - \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = 0. \quad (2.8)$$

И наконец, придадим соотношению (2.8) стандартную форму записи законов сохранения, вводя изменение импульса силы сопротивления (трения):

$$\int_{\Omega} \vec{d} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{d\vec{J}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{J} \right\} d\Omega,$$

где $\vec{v}$ — истинная скорость течения жидкости, $\vec{\nabla}$ — дифференциальный оператор “набла”. Далее, учитывая то обстоятельство, что для ползущих течений жидкости (скорость $\vec{v}$ весьма мала) вклад конвективной производной по сравнению с локальной пренебрежимо мал, предыдущее соотношение запишем в виде

$$\int_{\Omega} \vec{d} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{d\vec{J}}{dt} d\Omega \cong \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} d\Omega.$$

Следовательно, выражение (2.8) можно также представить в форме

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega - \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = 0 \quad (2.9)$$

или

$$\rho_0 \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} d\Omega - \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = 0. \quad (2.10)$$

Очевидно, соотношения (2.8), а также (2.9) или (2.10) выражают математическую формулировку теоремы об изменении количества движения для ползущих течений жидкости в пористой среде.

Замечание. Учитывая ползучесть течения жидкости, можно также записать аналогичную цепочку и для члена $\int_{\Omega} \frac{\partial (mp)}{\partial t} d\Omega$, входящего в уравнение (2.1), а именно

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (mp)}{\partial t} d\Omega \cong \int_{\Omega} \frac{d(mp)}{dt} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} mp d\Omega.$$

Тогда закону сохранения массы жидкости (2.1) можно придать другую форму записи:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m \rho d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} \vec{w} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0. \quad (2.11)$$

При условии дифференцируемости гидростатического давления p по формуле Остроградского–Гаусса имеем $\int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \text{grad } P d\Omega$, где $P = p - p_0$; тогда из соотношения (2.8) ((2.10)) получим

$$\vec{d} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } P. \quad (2.12)$$

п. 6.3. Закон сохранения момента количества движения и энергии. Выполнение теоремы об изменении момента количества движения следует из симметричности тензора напряжений $\vec{\bar{P}}$.

В дальнейшем будем рассматривать неравновесную фильтрацию в изотермических условиях, т.е. $T = \text{const}$. Этим самым обеспечивается выполнение закона сохранения энергии.

п. 6.4. Итак, законы сохранения (например, (2.2) и (2.12)) дают четыре уравнения. В эти уравнения входят восемь неизвестных: $\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$, $m\rho$, $\vec{d}(d_x, d_y, d_z)$ и p . Для замыкания системы (2.2), (2.12) следует ввести определяющие соотношения для величин $m\rho$ и $\vec{d}$, которые и замкнут её.

Например, пусть плотность силы трения пропорциональна первой степени скорости фильтрации, т.е. $\vec{d} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \vec{w}$, тогда имеет место закон

Дарси (1.4). Если к тому же количество жидкости в элементарном объёме определяется соотношением (1.6), тогда система уравнений (2.2), (2.12) будет замкнутой, и она сводится к уравнению пьезопроводности (1.7).

§ 7. Определяющие соотношения.

Система уравнений линейной неравновесной фильтрации

п. 7.1. Общие принципы неравновесной фильтрации. Общие принципы детерминизма, локального действия, суперпозиции и затухающей памяти, являющиеся общими для многих разделов механики сплошной среды [1,19], распространим на неравновесную фильтрацию. Изложим эти принципы применительно к релаксационному поведению количества жидкости в элементарном объёме и скорости фильтрации.

Принцип детерминизма (ПД). Величина массы жидкости $m\rho$ в некоторой фиксированной “точке” пористой среды (элементарном объёме) оп-

ределяется всей предысторией изменения давления вплоть до рассматриваемого момента времени t . Это означает, что m_P в данный момент времени t зависит лишь от прошлых и настоящего изменений давления в точке и не зависит от будущих изменений.

Принцип локального действия (ПЛД). Величина m_P в данной точке однозначно определяется историей изменения давления в произвольно малой окрестности этой точки. Таким образом, принцип локального действия исключает влияние на величину m_P истории изменения давления в “точках”, лежащих вдали от точки изменения m_P .

Принцип суперпозиций (ПС). В условиях линейности и аддитивности реакции количества жидкости на изменения давления принцип суперпозиции формулируется так: полное количество жидкости m_P в элементарном объёме равно сумме частных количеств жидкости $\Delta m_i \rho_i$ в этой точке.

Принцип затухающей памяти (ПЗП). Влияние прошлого изменения давления на текущее количество жидкости слабее для более отдалённого прошлого, нежели недавнего. Иначе говоря, уменьшение темпа изменения давления во времени до нуля обуславливает асимптотическое стремление зависимости m_P от P к “равновесной”: $m_P = m_0 \rho_0 + \rho_0 \beta P$.

Практически этот принцип устанавливает существование некоторого характерного времени, определяющего собой меру временного промежутка памяти данного насыщенного объёма, в частности, минимально необходимого для проведения базового эксперимента.

Очевидно, не представляет труда перефразировать приведённые выше принципы на случай поведения импульса силы сопротивления ($\vec{J}$) в элементарном объёме в зависимости от изменения в этом объёме скорости фильтрации ($\vec{w}$). Для этого следует заменить в тексте принципов m_P и P на $\vec{J}$ и $\vec{w}$ соответственно.

п.7.2. Получим сначала определяющее соотношение для m_P . Пусть в момент времени $t = t_0$ в насыщенном элементарном объёме (в фиксированной “точке”) давление P подверглось изменению на бесконечно малую величину ΔP . В результате чего в этом объёме произошло изменение массы жидкости, и оно характеризуется соотношением

$$\Delta\{(m_P) - (m_0 \rho_0)\}(t) = \rho_0 \beta \Phi(t - t_0) \Delta P(t_0) \quad t \geq t_0, \quad (2.13)$$

где $\Phi(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$ и в силу ПД $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Итак, формула (2.13) определяет массу жидкости в момент времени $t \geq t_0$ после изменения давления на ΔP в момент времени t_0 . Эта формула показывает, что величина $m_P - m_0 \rho_0$ зависит лишь от разности $t - t_0$ и не зависит явно от момента t_0 . Отмеченное свойство является следствием предположения о независимости параметров системы во времени [17]. Та-

ким образом, функция $\Phi(t)$ характеризует “память” массы жидкости в элементарном объёме (ядро релаксации).

Пусть далее в элементарном объёме давление изменяется на величину $\Delta P(t_n)$ последовательно в последующие моменты времени t_n . Тогда, согласно ПС, результирующее изменение массы жидкости в нём в момент времени t будет равняться

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \sum_n \Phi(t - t_n) \Delta P(t_n), \quad t \geq t_n. \quad (2.14)$$

Очевидно, при непрерывном изменении давления на величину $dP(t)$ количество жидкости элементарного объёма представимо интегральной формой вида

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \int_{-\infty}^t \Phi(t - t') dP(t'). \quad (2.15)$$

Следует заметить, что в силу ПЛД определяющие соотношения записываются для фиксированной точки. Это позволяет при выводе определяющих соотношений опускать в них пространственные координаты, а частные производные по времени обозначать как обыкновенные.

Нижний предел интегрирования в формуле (2.15) указывает на то, что количество жидкости элементарного объёма в момент времени t определяется всей предысторией изменения давления в нём на величину $dP(t)$.

Если в момент времени $t' = \tau$ давление скачкообразно изменилось на величину $[P]_\tau$, то полное изменение массы жидкости, очевидно, запишется так:

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \left\{ [P]_\tau \Phi(t - \tau) + \int_{-\infty}^t \Phi(t - t') \frac{dP(t')}{dt'} dt' \right\}. \quad (2.16)$$

Нетрудно показать, что при использовании определения обобщённой производной, а также свойств свёртки и формализма свёрточной алгебры [4] масса жидкости в элементарном объёме может быть охарактеризована одним из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} m\rho - m_0\rho_0 &= \rho_0\beta \left\{ \Phi(t - \tau) [P]_\tau + \int_{-\infty}^t \Phi(t - t') \frac{dP(t')}{dt'} dt' \right\} = \\ &= \rho_0\beta \left\{ \int_{-\infty}^t \Phi(t - t') \dot{P}(t') dt' \right\} = \rho_0\beta \Phi * \dot{P} = \\ &= \rho_0\beta \dot{\Phi} * P = \rho_0\beta \left\{ \Phi(0)P(t) + \int_0^t P(t - t') \frac{d\Phi(t')}{dt'} dt' \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Последняя формула в (2.17) показывает, что при $\Phi(0) \neq 0$ скачок давления приводит к скачку массы жидкости в момент времени $t = \tau$:

$$[m\rho]_\tau = \rho_0\beta \Phi(0) [P]_\tau. \quad (2.18)$$

Дифференцируя теперь первое выражение в формулах (2.17) по t , найдём

$$\frac{d(m\rho)}{dt} = \rho_0 \beta \left\{ \frac{d\Phi(t-\tau)}{d(t-\tau)} [P]_{\tau} + \Phi(0) \frac{dP(t)}{dt} + \int_{-\infty}^t \frac{d\Phi(t-t')}{d(t-t')} \frac{dP(t')}{dt'} dt' \right\}.$$

Откуда для скачка временной производной от $m\rho$ при $t = \tau$ получим

$$\left[\frac{d(m\rho)}{dt} \right]_{\tau} = \rho_0 \beta \left\{ \frac{d\Phi(0)}{dt} [P]_{\tau} + \Phi(0) \left[\frac{dP}{dt} \right]_{\tau} \right\}. \quad (2.19)$$

Нетрудно убедиться в том, что соотношению

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta P \quad (1.6)$$

соответствует обобщённая функция

$$\Phi(t) = \chi(t). \quad (2.20)$$

Действительно, подставим (2.20) в предпоследнее выражение формул (2.17), найдём

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \frac{\tilde{d}\chi}{dt} * P = \rho_0\beta \delta * P = \rho_0\beta P.$$

Также несложно показать, что обобщённой функции

$$\Phi(t) \equiv \varphi(t) = \left\{ 1 - \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \exp\left(-\frac{t}{\theta_m}\right) \right\} \chi(t) \quad (1.57)$$

отвечает простейшее релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме (1.48).

п. 7.3. Перейдём теперь к выводу определяющего соотношения для импульса силы сопротивления $\bar{J}$.

Применяя процедуру, использованную при нахождении зависимости (2.17), получим определяющее соотношение для импульса силы сопротивления $\bar{J}$ от изменения скорости фильтрации $\bar{w}$ в элементарном объёме, а именно

$$\begin{aligned} \bar{J} &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \left\{ F(t-t') [\bar{w}]_{\tau} + \int_0^t F(t-t') d\bar{w}(t') \right\} = \\ &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \int_0^t F(t-t') \frac{\tilde{\partial} \bar{w}}{\partial t} dt' = -\frac{\mu}{k\rho_0} F * \frac{\tilde{\partial} w}{\partial t} = \\ &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{\tilde{d}F}{dt} * \bar{w} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \left\{ F(0) \bar{w}(t) + \int_0^t \bar{w}(t-t') \frac{dF(t')}{dt'} dt' \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь $F(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и, согласно ПД, $F(t) = 0$ при $t < 0$; она является функцией “памяти” импульса силы сопротивления в элементарном объёме (ядро релаксации), $[\bar{w}]_{\tau}$ — скачок скорости фильтрации в момент времени $t = \tau$.

Из последней формулы в (2.21) видно, что при $F(0) \neq 0$ скачок скорости фильтрации при $t = \tau$ приводит к скачку импульса силы сопротивления в тот же момент времени:

$$[\bar{J}]_{\tau} = -\frac{\mu}{k\rho_0} F(0)[\bar{w}]_{\tau}. \quad (2.22)$$

Для скачка временной производной имеет место соотношение

$$\left[\frac{d\bar{J}}{dt} \right]_{\tau} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \left\{ \frac{dF(0)}{dt} [\bar{w}]_{\tau} + F(0) \left[\frac{d\bar{w}}{dt} \right]_{\tau} \right\}. \quad (2.23)$$

В качестве иллюстрации покажем, что обобщенной функции

$$F(t) = t \chi(t) \quad (2.24)$$

соответствует закон Дарси (1.4). В самом деле, подставляя функцию (2.24) в предпоследнюю формулу (2.20), получим

$$\bar{J} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{dF}{dt} * \bar{w} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \chi * \bar{w} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \int_{-\infty}^t \bar{w}(t') dt'. \quad (2.25)$$

Остаётся теперь продифференцировать выражение (2.25) по t и вспомнить связь (2.12), в результате чего найдём

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \text{grad } P = -\frac{\mu}{k} \bar{w}; \quad (2.26)$$

откуда следует закон Дарси. Нетрудно также показать, что простейшему неравновесному закону фильтрации (1.65) соответствует обобщённая функция

$$F(t) = \{t + (\tau_w - \tau_p) [1 - \exp(-t/\tau_p)]\} \chi(t). \quad (2.27)$$

В частности, при $\tau_p = 0$ и $\tau_w = \tau$ соотношение 2.26 запишется так:

$$F(t) = (t + \tau) \chi(t); \quad (2.28)$$

закон фильтрации в этом случае имеет вид (1.11).

п. 7.4. Система уравнений. Линейная неравновесная фильтрация описывается следующей замкнутой системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m\rho d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} \bar{w} \cdot \bar{n} d\Sigma &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega - \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} p\bar{n} d\Sigma &= 0, \\ m\rho - m_0\rho_0 &= \rho_0 \beta \left\{ \Phi(0)P(x, y, z; t) + \int_0^t \frac{d\Phi(t')}{dt'} P(x, y, z; t-t') dt' \right\}, \\ \bar{J} &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \left\{ F(0)\bar{w}(x, y, z; t) + \int_0^t \frac{dF(t')}{dt'} \bar{w}(x, y, z; t-t') dt' \right\}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

а также в свёртках

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m \rho d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} \bar{w} \cdot \bar{n} d\Sigma &= 0, \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega - \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} p \bar{n} d\Sigma &= 0, \\
 m\rho - m_0\rho_0 &= \rho_0 \beta \frac{\tilde{d}\Phi}{dt} * P = \rho_0 \beta \Phi * \frac{\tilde{\partial} P}{\partial t}, \\
 \bar{J} &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{\tilde{d}F}{dt} * \bar{w} = -\frac{\mu}{k\rho_0} F * \frac{\tilde{\partial} \bar{w}}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

В области дифференцируемости полей давления и скорости фильтрации система уравнений (2.30) запишется так:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{w} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} P &= 0, \\
 m\rho - m_0\rho_0 &= \rho_0 \beta \frac{d\Phi}{dt} * P = \rho_0 \beta \Phi * \frac{\partial P}{\partial t}, \\
 \bar{J} &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{dF}{dt} * \bar{w} = -\frac{\mu}{k\rho_0} F * \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Исключая теперь из системы уравнений (2.31) все искомые величины, кроме давления, найдём

$$\kappa \Delta P = \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right\}. \tag{2.32}$$

Таким образом, получили уравнение неравновесной фильтрации в области дифференцируемости давления.

Нетрудно показать, что для соотношений (2.20) и (2.24) система уравнений (2.31) преобразуется к виду

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P, \quad \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{w} = 0, \quad m\rho = m_0\rho_0 + \rho_0 \beta P. \tag{2.33}$$

Как известно, система (2.33) описывает равновесную нестационарную фильтрацию капельной жидкости в упругой пористой среде. Данная система эквивалентна уравнению пьезопроводности

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{1.7}$$

ГЛАВА 3. Особенности линейной неравновесной фильтрации [12,8]

§ 8. Поверхность разрыва основных гидродинамических параметров

п. 8.1. Поверхность разрыва. Важнейшей особенностью неравновесной фильтрации является возможность существования в области течения жидкости подвижных поверхностей, на которых терпят разрыв основные гидродинамические параметры (давление, скорость фильтрации и др.) и их производные. Для подземной гидромеханики типична ситуация, когда в первоначально невозмущённом пласте в момент времени ($t = t_0 = 0$) на некоторой поверхности внутри пласта или на его границе мгновенно (скачком) возникает возмущение по давлению или скорости фильтрации. Поверхность, несущая это возмущение, разбивает пласт на возмущённую и невозмущённую области. При этом при переходе через эту поверхность давление, скорость фильтрации, количество жидкости в элементарном объёме, вообще говоря, терпят разрыв. В частности, возникновение поверхности разрыва первого рода имеется в виду всякий раз, когда при постановке краевых задач неравновесной фильтрации граничное условие рассогласуется с начальным условием. Если возникшая таким образом поверхность продолжает существовать и перемещаться, то можно говорить о конечной скорости распространения возмущений.

Представляет интерес найти условия сохранения импульса силы сопротивления, количества жидкости в элементе объёма на поверхности разрыва, а также выяснить условия существования таких поверхностей.

п. 8.2. Условия сохранения количества движения и массы жидкости на поверхности разрыва. Итак, пусть некоторая поверхность разрыва давления Σ_0 делит объём Ω на две части, в каждой из которых давление непрерывно дифференцируемо (рис. 3.1).

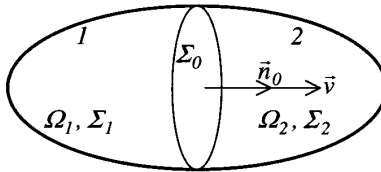


Рис. 3.1

Выпишем условия сохранения импульса силы сопротивления:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega = \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} p \bar{n} d\Sigma. \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала поверхностный интеграл в соотношении (3.1):

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = \int_{\Sigma_1} p \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} p \vec{n} d\Sigma = & \left(\int_{\Sigma_1} p \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} p_1 \vec{n}_0 d\sigma \right) + \\ & + \left(\int_{\Sigma_2} p \vec{n} d\Sigma - \int_{\Sigma_0} p_2 \vec{n}_0 d\sigma \right) - \int_{\Sigma_0} (p_1 - p_2) \vec{n}_0 d\sigma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь индексы 1, 2 определяют сторону интегрирования давления по поверхности разрыва Σ_0 , Σ_1, Σ_2 — отсекаемые поверхностью Σ_0 участки поверхности Σ , $\vec{n}_0$ — единичная нормаль к поверхности Σ_0 в направлении её движения от 1 к 2. Применение формулы Остроградского–Гаусса к членам в круглых скобках соотношения (3.2) правомерно в силу непрерывной дифференцируемости давления вне поверхности Σ_0 ; оно приводит к следующему соотношению:

$$\int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega_1} \text{grad } P d\Omega + \int_{\Omega_2} \text{grad } P d\Omega - \int_{\Sigma_0} [P] \vec{n}_0 d\sigma,$$

где $[P] = p_1 - p_2$ — величина скачка давления на поверхности Σ_0 , или

$$\int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \text{grad } P d\Omega - \int_{\Sigma_0} [P] \vec{n}_0 d\sigma.$$

Последнее выражение окончательно можно записать так:

$$\int_{\Sigma} p \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \{ \text{grad } P - [P] \vec{n}_0 \delta_{\Sigma_0} \} d\Omega. \quad (3.3)$$

Здесь $[P] \vec{n}_0 \delta_{\Sigma_0}$ — обобщённая функция координат, называемая простым слоем на поверхности Σ_0 с векторной плотностью $[P] \vec{n}_0$ [4]. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{d} d\Omega = \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega} \{ \text{grad } P - [P] \vec{n}_0 \delta_{\Sigma_0} \} d\Omega;$$

откуда, учитывая произвольность объёма Ω , получим

$$\vec{d} = \frac{1}{\rho_0} (\text{grad } p - [p] \vec{n}_0 \delta_{\Sigma_0}). \quad (3.4)$$

Из соотношения (3.4), в частности, следует, что сила сопротивления $\vec{d}$ на поверхности разрыва Σ_0 имеет сингулярную особенность (т.е. бесконечно большая).

Так как поверхность Σ_0 делит объём Ω на две аддитивные части Ω_1 и Ω_2 , в каждой из которых импульс силы сопротивления непрерывно дифференцируем, то справедливо представление

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{J} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \vec{J} d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \vec{J} d\Omega. \quad (3.5)$$

За счёт движения поверхности Σ_0 , разграничивающей объёмы Ω_1 и Ω_2 , области интегрирования Ω_1 и Ω_2 со временем изменяются, поэтому каждый из членов правой части соотношения (3.5) представляет собой широко известную в механике сплошной среды производную от интеграла с подвижным объёмом. Согласно определению такой производной [18] можно записать

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega_1} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Sigma_0} \bar{J}_1 v d\sigma, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega_2} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} d\Omega - \int_{\Sigma_0} \bar{J}_2 v d\sigma, \quad (3.7)$$

где $v \geq 0$ — нормальная скорость перемещения поверхности Σ_0 в направлении её движения от 1 к 2. Складывая соотношения (3.6) и (3.7), найдём

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Sigma_0} [\bar{J}] v d\sigma, \quad (3.8)$$

где $[\bar{J}] = \bar{J}_1 - \bar{J}_2$ — величина скачка $\bar{J}$ на Σ_0 . Вводя обобщённую функцию пространственных координат $[\bar{J}] v \delta_{\Sigma_0}$, называемую простым слоем на поверхности Σ_0 с векторной плотностью $[\bar{J}] v$, аналогично соотношению (3.3) запишем

$$\int_{\Omega} \bar{d} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] v \delta_{\Sigma_0} \right\} d\Omega. \quad (3.9)$$

Таким образом, в силу произвольности объёма V , получим

$$\bar{d} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] v \delta_{\Sigma_0}. \quad (3.10)$$

Сопоставляя формулы (3.4) и (3.10), найдём

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] v \delta_{\Sigma_0} = \frac{1}{\rho_0} (\text{grad } P - [P] \bar{n}_0 \delta_{\Sigma_0}). \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) показывает, что в области непрерывности течения (вне Σ_0) выполняется формула

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } P. \quad (3.12)$$

Далее, на поверхности разрыва Σ_0 вкладом несингулярных членов можно пренебречь; тогда

$$[\bar{J}] v \delta_{\Sigma_0} = -\frac{1}{\rho_0} [P] \bar{n}_0 \delta_{\Sigma_0}$$

или

$$[\bar{J}]_v = -\frac{I}{\rho_0} [P] \bar{n}_0. \quad (3.13)$$

Это и есть условие сохранения импульса силы сопротивления при переходе через поверхность Σ_0 .

Из соотношения (3.13) следует, что касательная составляющая скачка импульса силы сопротивления к поверхности разрыва Σ_0 равна нулю, а нормальная составляющая к ней равняется

$$[J_{n_0}]_v = -\frac{I}{\rho_0} [P], \quad (3.14)$$

где $J_{n_0} = (\bar{J} \cdot \bar{n}_0)$.

Аналогичные результаты имеют место и для количества жидкости в элементарном объёме. Интегральное соотношение сохранения массы жидкости равно

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m\rho d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} (\bar{w} \cdot \bar{n}) d\Sigma = 0. \quad (2.11)$$

Каждое из слагаемых в этой формуле представимо в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m\rho d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial m\rho}{\partial t} + [m\rho]_v \delta_{\Sigma_0} \right\} d\Omega, \quad (3.15)$$

$$\int_{\Sigma} (\bar{w} \cdot \bar{n}) d\Sigma = \rho_0 \int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div} \bar{w} - ([\bar{w}] \cdot \bar{n}_0) \delta_{\Sigma_0} \right\} d\Omega. \quad (3.16)$$

Здесь $[m\rho]$ — скачок массы жидкости в элементарном объёме на поверхности Σ_0 , $[\bar{w}]$ — скачок скорости фильтрации на той же поверхности. Далее,

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + [m\rho]_v \delta_{\Sigma_0} + \rho_0 \left\{ \operatorname{div} \bar{w} - ([\bar{w}] \cdot \bar{n}_0) \delta_{\Sigma_0} \right\} = 0. \quad (3.17)$$

Очевидно, в области непрерывности течения жидкости имеем уравнение неразрывности фильтрационного потока

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{w} = 0; \quad (2.2)$$

на поверхности разрыва Σ_0 получим условие сохранения массы жидкости в виде:

$$[m\rho]_v = \rho_0 [w_{n_0}]. \quad (3.18)$$

п. 8.3. Условие существования поверхности разрыва и скорость её перемещения. На поверхности разрыва Σ_0 имеем, с одной стороны,

$$[\bar{J}]_v = -\frac{I}{\rho_0} [P] \bar{n}_0,$$

с другой —

$$[\bar{J}] = -\frac{\mu}{k\rho_0} F(0)[\bar{w}]. \quad (2.22)$$

Из сопоставления первого соотношения со вторым получим

$$\frac{\mu}{k} F(0)[\bar{w}]_v = [P]\bar{n}_0;$$

откуда получим

$$[w_{n_0}] = \frac{k}{\mu} \frac{[P]}{vF(0)}. \quad (3.19)$$

Далее, на поверхности Σ_0 также имеем, с одной стороны,

$$[mp]_v = \rho_0 ([\bar{w}] \cdot \bar{n}_0) = \rho_0 [w_{n_0}], \quad (3.18)$$

с другой стороны —

$$[mp] = \rho_0 \beta \Phi(0)[P]. \quad (2.18)$$

Сопоставление этих двух соотношений даёт:

$$\beta \Phi(0)[P]_v = \rho_0 [w_{n_0}];$$

откуда получаем

$$[w_{n_0}] = \frac{\rho_0 \Phi(0)v[P]}{\rho_0}. \quad (3.20)$$

Сравнивая (3.19) и (3.20), найдём

$$v^2 = \frac{\kappa}{F(0)\Phi(0)}$$

или

$$v = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \text{const} = V_0. \quad (3.21)$$

Скорость перемещения поверхности разрыва Σ_0 (фронта возмущения) *постоянна*; она зависит лишь от значений ядер релаксации $F(t)$ и $\Phi(t)$, взятых при $t=0$. Иначе говоря, конечная скорость распространения фронта возмущения, а следовательно, и существование самого фронта возмущения обуславливаются упругоёмкостью насыщенной пористой среды, а также такими релаксационными законами фильтрации, ядра которых удовлетворяют условию $0 < F(0)\Phi(0) < \infty$.

Подставляя теперь (3.21) в (3.20), найдём

$$[w_{n_0}] = \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P]. \quad (3.22)$$

Это соотношение устанавливает связь на поверхности Σ_0 скачков нормальной составляющей к поверхности Σ_0 скорости фильтрации и давления в любой момент времени, включая и начальный.

п. 8.4. Примеры. 1^0 . Классический упругий режим определяется следующими ядрами релаксации: $F(t) = t\chi(t)$ и $\Phi(t) = \chi(t)$. В этом случае $F(0) = 0$, $\Phi(0) = 1$. Следовательно, скорость распространения фронта возмущения $V_0 = \infty$, т.е. *мгновенно* вся рассматриваемая область становится областью фильтрации.

Скачки скорости фильтрации и давления связаны на поверхности возмущения Σ_0 соотношением (3.22). Тогда, если на некоторой поверхности в начальный момент времени возник конечный скачок давления, то на этой поверхности, согласно формуле $[w_{n_0}]_{t=0} = \beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P]_{t=0}$, будет бесконечная скорость фильтрации. Такая ситуация имеет место, например, при пуске скважины (в первоначально невозмущенном пласте) с постоянным забойным давлением, не совпадающим с первоначальным. Если же на этой поверхности возник конечный скачок скорости фильтрации, то из формулы $[P]_{t=0} = \frac{1}{\beta\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{F(0)}{\Phi(0)}} [w_{n_0}]_{t=0}$ видно, что скачка давления на этой поверхности не возникает. Такая ситуация возникает при пуске скважины (в первоначально невозмущенном пласте) с постоянным дебитом скважины.

2^0 . Простейшая модель фильтрации с конечной скоростью распространения возмущения определяется ядрами $F(t) = (t + \tau)\chi(t)$, $\Phi(t) = \chi(t)$; тогда $F(0) = \tau$, $\Phi(0) = 1$. Следовательно, скорость распространения фронта возмущения равна

$$V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}. \quad (3.23)$$

При этом скачки скорости фильтрации и давления на поверхности Σ_0 связывает в любой момент времени, включая и начальный, следующее соотношение:

$$[w_{n_0}] = \beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P] = \beta\sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} [P] = \frac{k}{\mu} \frac{[P]}{\sqrt{\kappa\tau}}. \quad (3.24)$$

Замечание. Из формулы, в частности, следует, что если в первоначально невозмущенном пласте была пущена в работу скважина с постоянным забойным давлением (постоянным дебитом), то, в отличие от предыдущего примера, дебит скважины (забойное давление) в начальный момент времени не будет бесконечно большим (нулевым).

п. 8.5. Положение фронта возмущения. Положение фронта возмущения в любой момент времени t может быть найдено до решения филь-

рационной задачи. Проиллюстрируем это на случаях прямолинейно-параллельного ($\alpha = 0$), плоскорадиального ($\alpha = 1$) пространственно-сферического ($\alpha = 2$) течений, когда возмущающая поверхность Σ_0 существует при $t > 0$ и является соответственно плоскостью, цилиндром или сферой.

В силу одномерности фильтрационного потока, очевидно, что фронт возмущения в любой момент времени будет представлять собой поверхность, подобную начальной возмущающей поверхности, т.е. будет определяться одной пространственной координатой, зависящей от времени t , а именно $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = \xi_0$ (рис. 3.2). Также очевидно, что ось ξ должна

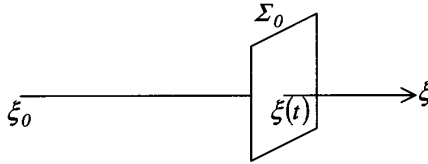


Рис. 3.2

быть ортогональна семейству фронтов возмущения, а приращение $\Delta\xi = \xi - \xi_0$ характеризовать пройденное этим фронтом расстояние за время t .

Итак, для построения последовательных положений фронта возмущения достаточно провести прямолинейную ось ξ , ортогональную исходному фронту возмущения, и подсчитать его текущее положение по формуле

$$\xi(t) = \xi_0 + V_0 t, \quad (3.25)$$

где $V_0 = \sqrt{\kappa} / \sqrt{F(0)\Phi(0)}$.

п. 8.6. Поведение скачков давления и скорости фильтрации на фронте возмущения. Для вычисления поведения скачков давления и скорости фильтрации на поверхности Σ_0 воспользуемся условиями

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \right] &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \left\{ \frac{dF(0)}{dt} [\bar{w}] + F(0) \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right] \right\}, \\ \left[\frac{\partial m\rho}{\partial t} \right] &= \rho_0 \beta \left\{ \frac{d\Phi(0)}{dt} [P] + \Phi(0) \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В области непрерывности течения жидкости (вне Σ_0) имеем (см. формулы (2.12) и (2.2)):

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \text{grad } p, \quad \frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = -\rho_0 \text{div } \bar{w}.$$

Очевидно, при стремлении из разных сторон поверхности Σ_0 на ней предыдущие соотношения запишутся так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{J}_1}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_1, & \frac{\partial \bar{J}_2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_2; \\ \frac{\partial (m\rho)_1}{\partial t} &= -\rho_0 \text{div } \bar{w}_1, & \frac{\partial (m\rho)_2}{\partial t} &= -\rho_0 \text{div } \bar{w}_2.\end{aligned}$$

Откуда соответственно получим

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \right] &= \frac{1}{\rho_0} (\text{grad } p_1 - \text{grad } p_2) = \frac{1}{\rho_0} [\text{grad } p], \\ \left[\frac{\partial m\rho}{\partial t} \right] &= -\rho_0 (\text{div } \bar{w}_1 - \text{div } \bar{w}_2) = -\rho_0 [\text{div } \bar{w}].\end{aligned}$$

Тогда соотношения (3.26) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}-\frac{dF(0)}{dt}[\bar{w}] - F(0)\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right] &= \frac{k}{\mu} [\text{grad } p], \\ -\frac{d\Phi(0)}{dt}[p] - \Phi(0)\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] &= \frac{I}{\beta} [\text{div } \bar{w}]\end{aligned}\tag{3.27}$$

Перепишем соотношения (3.27) для случая одномерных фильтрационных течений, для чего воспользуемся очевидными равенствами

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \vec{i}, \quad \bar{w} = w \vec{i}, \quad \text{div } \bar{w} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\xi} w;$$

тогда

$$\begin{aligned}-\frac{dF(0)}{dt}[w] - F(0)\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] &= \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial \xi} \right], \\ -\frac{d\Phi(0)}{dt}[P] - \Phi(0)\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] &= \frac{I}{\beta} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right] + \frac{\alpha}{\xi} [w] \right).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Первое из уравнений (3.28) помножим на $\frac{\mu}{k} V_0 \Phi(0)$ и сложим со вторым, в результате получим

$$\begin{aligned}-\frac{\mu}{k} V_0 F(0) \Phi(0) \frac{d \ln F(0)}{dt} [w] - \frac{\mu}{k} V_0 F(0) \Phi(0) \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] - \frac{d\Phi(0)}{dt} [P] - \\ - \Phi(0) \left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] &= V_0 \Phi(0) \left[\frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{I}{\beta} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right] + \frac{\alpha}{\xi} [w] \right).\end{aligned}$$

Соберём теперь скачки $[w]$, $\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]$, $\left[\frac{\partial w}{\partial \xi}\right]$ в левой части, а скачки $[P]$, $\left[\frac{\partial P}{\partial t}\right]$, $\left[\frac{\partial P}{\partial \xi}\right]$ — в правой, в результате чего найдём, учтя при этом формулу $V_0 \sqrt{\kappa} / \sqrt{F(0)\Phi(0)}$,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\beta V_0} \left(\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \right) - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{V_0} \frac{d \ln F(0)}{dt} \right) [w] = \\ & = \Phi(0) \left(\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial P}{\partial \xi} \right] + \frac{d \ln \Phi(0)}{dt} [P] \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Так как на Σ_0 $[w] = w(\xi(t), t)$, то $\frac{d[w]}{dt} = \frac{d\{w(\xi(t), t)\}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} =$
 $= \frac{\partial w}{\partial t} + V_0 \frac{\partial w}{\partial \xi}$. Очевидно, полученное выражение представляет собой сум-

му скачков $\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right]$, так как перед фронтом возмущения сумма

аналогичных скачков равна нулю. Таким образом, $\frac{d[w]}{dt} = \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right]$.

С другой стороны имеем $\frac{d[w]}{dt} = \frac{\partial[w]}{\partial t} + \frac{\partial[w]}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial[w]}{\partial t} + V_0 \frac{\partial[w]}{\partial \xi}$. Тогда

из сопоставления полученных выражений для $\frac{d[w]}{dt}$ найдём следующие связи вдоль оси ξ :

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial w}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial[w]}{\partial t} + V_0 \frac{\partial[w]}{\partial \xi} = \frac{d[w]}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \frac{d[w]}{d\xi} = V_0 \frac{d[w]}{d\xi}.$$

Аналогично имеем:

$$\left[\frac{\partial P}{\partial t} \right] + V_0 \left[\frac{\partial P}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial[P]}{\partial t} + V_0 \frac{\partial[P]}{\partial \xi} = \frac{d[P]}{dt} = V_0 \frac{d[P]}{d\xi}.$$

Учитывая эти связи, соотношение (3.29) запишется так:

$$-\frac{1}{\beta} \frac{d[w]}{d\xi} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\xi} + \frac{1}{V_0} \frac{d \ln F(0)}{dt} \right) [w] = \Phi(0) \left(V_0 \frac{d[P]}{d\xi} + \frac{d \ln \Phi(0)}{dt} [P] \right). \quad (3.30)$$

И наконец, исключая $[w]$ из (3.30), с помощью

$$[w] = \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P],$$

после небольших преобразований получим следующее дифференциальное уравнение для определения скачка давления $[P]$ как функции ξ :

$$\frac{d[P]}{d\xi} + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{V_0} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt} \right) [P] = 0. \quad (3.31)$$

Нетрудно показать, что решением уравнения (3.31) при условии $t=0$; $\xi(0)=\xi_0$, $[P]=[P]_0$ будет

$$[P] = [P]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{\alpha/2} \exp \left(- \frac{\xi - \xi_0}{2V_0} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt} \right). \quad (3.32)$$

Так как скачок давления со временем может только затухать, то это обстоятельство накладывает на ядра $F(t)$ и $\Phi(t)$ ограничение

$$\frac{d}{dt} (F(0)\Phi(0)) > 0.$$

В случае, когда $\frac{d}{dt} (F(0)\Phi(0)) = +\infty$, скачок давления мгновенно затухает.

Очевидно, для скачка скорости фильтрации имеет место аналогичное соотношение

$$[w] = [w]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{\alpha/2} \exp \left(- \frac{\xi - \xi_0}{2V_0} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt} \right), \quad (3.33)$$

где $[w]_0$ — скачок скорости фильтрации на исходном фронте возмущения.

Пример. Ядра релаксации $F(t) = (t + \tau)\chi(t)$, $\Phi(t) = \chi(t)$ применяются при описании фильтрации по простейшей модели, учитывающей конечную скорость распространения возмущения. Очевидно, $F(0) = \tau$, $\Phi(0) = 1$. Скорость перемещения фронта возмущения равна

$$V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}. \quad (3.23)$$

Положение фронта возмущения определяется формулой

$$\xi(t) = \xi_0 + \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} t.$$

В рассматриваемом примере связь скачков давления и скорости фильтрации имеет вид

$$[w] = \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P] = \sqrt{\frac{\beta k}{\tau}} [P] = \frac{k}{\mu \sqrt{\kappa \tau}} [P] = \beta V_0 [P].$$

Это соотношение имеет место и в каждый момент времени, в том числе и в начальный момент

$$[w]_0 = \frac{k}{\mu \sqrt{\kappa \tau}} [P]_0 = \beta V_0 [P]_0.$$

Отсюда следует, что начальный конечный скачок давления приводит к конечному значению скачка скорости фильтрации в начальный момент времени, и, наоборот, конечный скачок скорости фильтрации в начальный момент времени приводит к ограниченному (отличному от нуля) скачку давления в тот же момент времени. Далее, при скорости фильтрации в начальный момент времени, равной скорости распространения возмущения, т.е. $[w]_0 = V_0$, имеем $[P]_0 \beta = I$ или $[P]_0 = 1/\beta \sim 1/10^{-5} \text{ ат} = 10^5 \text{ ат}$; т.е. произойдёт разрыв непрерывности.

Подсчитаем теперь характер затухания скачков давления и скорости фильтрации на фронте возмущения. Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dt} \langle \ln(F(t)\Phi(t)) \rangle \right\}_{t=0} &= \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \ln \left(\frac{\mu}{k} (t + \tau) \beta \right) \right\rangle \right\}_{t=0} = \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \left\langle \ln \left(\frac{\mu \beta}{k} \right) + \ln(t + \tau) \right\rangle \right\}_{t=0} = \left(\frac{1}{t + \tau} \right)_{t=0} = \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} [P] &= [P]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 + V_0 t} \right)^{\alpha/2} \exp \left(- \frac{\xi_0 + V_0 t - \xi_0}{2V_0 \tau} \right) = \\ &= [P]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 + V_0 t} \right)^{\alpha/2} \exp \left(- \frac{t}{2\tau} \right); \end{aligned} \quad (3.34)$$

аналогично

$$[w] = [w]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 + V_0 t} \right)^{\alpha/2} \exp \left(- \frac{t}{2\tau} \right). \quad (3.35)$$

§ 9. Уравнение линейной неравновесной фильтрации

п. 9.1. Уравнение фильтрации в сквёртах. Как установлено выше, линейная неравновесная фильтрация однородной жидкости в конечном объёме может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega &= \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} p \bar{n} d\Sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} m \rho d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} (\bar{w} \cdot \bar{n}) d\Sigma &= 0, \\ \bar{J} &= - \frac{\mu}{k \rho_0} * \bar{w} = - \frac{\mu}{k \rho_0} F * \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}, \\ m \rho - m_0 \rho_0 &= \rho_0 \beta \frac{\partial \Phi}{\partial t} * P = \Phi * \frac{\partial P}{\partial t}, \\ k, \mu &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Придадим этой системе иной вид. Для этого рассмотрим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{d} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] V_0 \delta_{\Sigma_0} \right\} d\Omega. \quad (3.37)$$

Представим обобщённую функцию простого слоя δ_{Σ_0} через функцию Дирака следующим образом [4]:

$$\delta_{\Sigma_0} = \delta(q_1 - l(t)), \quad (3.38)$$

где $q_1 = l(t) = \text{const}$ при $t = \text{const} = t_0$ задаёт положение фронта возмущения в момент времени t_0 . Здесь фронт возмущения перемещается ортогонально координатной оси q_1 , $l = l(t)$ — координата текущего положения фронта возмущения. Далее воспользуемся известным результатом

$$\delta(q_1 - l(t)) = \frac{\delta(t - \tau(q_1))}{V_0}, \quad (3.39)$$

где $\tau(q_1)$ — функция, обратная к $l = l(t)$; она характеризует время совпадения фронта возмущения с координатной поверхностью $q_1 = \text{const}$. Очевидно, $V_0 = dq_1/dt$ является скоростью перемещения поверхности Σ_0 . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] V_0 \delta_{\Sigma_0} &= \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] V_0 \delta(q_1 - l(t)) = \\ &= \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] V_0 \frac{\delta(t - \tau(q_1))}{V_0} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + [\bar{J}] \delta(t - \tau(q_1)) = \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}; \end{aligned}$$

таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \bar{J} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} d\Omega. \quad (3.40)$$

Аналогично получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} m\rho dV = \int_{\Omega} \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} d\Omega. \quad (3.41)$$

С учётом соотношений (3.40) и (3.41) система (3.36) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} d\Omega &= \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} p \bar{n} d\Sigma, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} (\bar{w} \cdot \bar{n}) d\Sigma &= 0, \\ \bar{J} &= -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{\partial F}{\partial t} * \bar{w}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0 \beta \Phi * \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$k, \mu = \text{const}.$$

В системе (3.42) все величины суть обобщённые функции.

ЧАСТЬ I

Системы уравнений (3.36) и (3.42) записаны в интегральной форме; они справедливы для конечного объёма, включающего в себя поверхность разрыва Σ_0 гидродинамических параметров: $p, \bar{w}, \bar{J}, m\rho$. Выпишем аналог этой системы в дифференциальной форме, а также в интегро-дифференциальной форме в элементарном объёме и вне поверхности Σ_0 , в области непрерывной дифференцируемости гидродинамических параметров.

В области непрерывности параметров справедливы соотношения

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } P, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \bar{w} = 0. \quad (1.5)$$

Кроме этого, в этих же областях имеют место определяющие соотношения (2.21) и (2.14), принимающие в данном случае вид:

$$\bar{J} = -\frac{\mu}{k\rho_0} \frac{dF}{dt} * \bar{w}, \quad (3.43)$$

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta\Phi * \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.44)$$

Итак, система уравнений (3.12), (1.5), (3.43) и (3.44) описывает линейную неравновесную фильтрацию однородной жидкости вне поверхности Σ_0 .

Преобразуем эту систему, подставив соотношения (3.43) и (3.44) соответственно в уравнения (3.12) и (1.5); в результате получим

$$\frac{\mu}{k} \frac{d^2 F}{dt^2} * \bar{w} + \text{grad } P = 0, \quad (3.45)$$

$$\beta \frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } \bar{w} = 0.$$

Исключая в системе (3.45) скорость фильтрации $\bar{w}$, найдём

$$\begin{aligned} \kappa \Delta P &= \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right\} = \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\Phi * \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{d^2 F}{dt^2} * \Phi \right) * \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right\} = \left\{ \left(\frac{dF}{dt} * \frac{d\Phi}{dt} \right) * \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Получили интегро-дифференциальное уравнение неравновесной фильтрации в области дифференцируемости давления.

Поверхность разрыва Σ_0 перемещается со скоростью

$$V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}}, \quad (3.21)$$

а её положение определяется по формуле

$$\xi(t) = \xi_0 + V_0 t. \quad (3.25)$$

На поверхности Σ_0 имеет место следующая связь между скачками скорости фильтрации и давления:

$$[w_{n_0}] = \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [P]. \quad (3.22)$$

Сами же скачки скорости фильтрации и давления затухают со временем по законам:

$$[P] = [P]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{a/2} \exp \left(- \frac{\xi - \xi_0}{2V_0} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt} \right), \quad (3.32)$$

$$[w] = [w]_0 \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{a/2} \exp \left(- \frac{\xi - \xi_0}{2V_0} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt} \right). \quad (3.33)$$

Здесь положение фронта возмущения Σ_0 , а также затухание скачков давления и скорости фильтрации приведены для случая одномерных фильтрационных течений.

п. 9.2. Система и уравнения неравновесной фильтрации в изображениях по Лапласу–Карсону. В дальнейшем будем использовать преобразование Лапласа–Карсона (Л–К), приведём его некоторые свойства:

$$C^* = s \int_0^\infty C e^{-st} dt = C, \quad \left(\frac{\tilde{d}f}{dt} \right)^* = s f(s), \text{ если } f(0) = 0;$$

$$\left(\int_0^t f(t') dt' \right)^* = \frac{1}{s} f(s), \quad (f * \varphi)^* = \frac{1}{s} f^* \cdot \varphi^*,$$

$$\left(\frac{\tilde{d}f}{dt} * \varphi \right)^* = \left(f * \frac{\tilde{d}\kappa}{dt} \right)^* = f^* \cdot \varphi^*.$$

$$f^*(0) = \lim_{s \rightarrow 0} f^*(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty); \quad f^*(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} f^*(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0).$$

Последнее соотношение выражает суть теоремы Абеля [3].

Заметим, что при преобразовании Л-К скачки первого рода сглаживаются, в силу того, что это преобразование интегральное.

Итак, применим преобразование Л-К к системе (3.42); в результате получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s \vec{J}^* d\Omega &= \frac{1}{\rho_0} \int_{\Sigma} P^* \vec{n} d\Sigma, \\ \int_{\Omega} s(m\rho)^* d\Omega + \rho_0 \int_{\Sigma} (\vec{w}^* \cdot \vec{n}) d\Sigma, \\ \vec{J}^* &= -\frac{\mu}{k\rho_0} F^* \vec{w}^*, \\ (m\rho)^* &= \rho_0 \beta \Phi^* P^*, \\ k, \mu &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Так как изображения $\vec{J}^*, P^*, (m\rho)^*, (\vec{w}^* \cdot \vec{n})$ — непрерывные функции по пространственным координатам, то возможно применение формулы Остроградского–Гаусса; в результате её использования получим

$$\begin{aligned} s \vec{J}^* &= \frac{1}{\rho_0} \text{grad } P^*, \\ s(m\rho)^* + \rho_0 \text{div } \vec{w}^* &= 0, \\ \vec{J}^* &= -\frac{\mu}{k\rho_0} F^* \vec{w}^*, \\ (m\rho)^* &= \rho_0 \beta \Phi^* P^*, \\ k, \mu &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Далее, исключая из системы (3.48) все искомые изображения, кроме P^* , найдём

$$\kappa \Delta P^* = s^2 F^*(s) \Phi^*(s) P^*$$

или

$$\Delta P^* - \frac{P^*}{L^{*2}(s)} = 0, \quad (3.49)$$

где

$$L^*(s) = \frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{F^*(s) \Phi^*(s)}} \quad (3.50)$$

— некоторая функция размерности длины.

Уравнение (3.49) и соотношение (3.50) также можно получить, если применить преобразование Л-К непосредственно к уравнению (3.46).

п. 9.3. Примеры.

I^0 . Модель Щелкачёва. Для модели Щелкачёва имеем:

$$\begin{aligned} F(t) &= t\chi(t), \quad F^*(s) = \frac{I}{s}, \quad F(0) = 0; \\ \Phi(t) &= \chi(t), \quad \Phi^*(s) = 1, \quad \Phi(0) = 1; \\ L^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{\frac{I}{s}}} = \sqrt{\frac{\kappa}{s}}, \quad L^*(\infty) = L(0) = 0; \end{aligned}$$

здесь характерный размер $L(t)$ при $t = 0$ равняется нулю, т.е. $L(0) = 0$. Скорость распространения фронта возмущения равна $V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \infty$. Это

означает, что вся рассматриваемая область мгновенно становится областью фильтрации.

Покажем, что уравнение (3.46) преобразуется к виду

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Действительно, так как $\frac{dF}{dt} = (\chi(t) + t\delta(t))$, а $\frac{d\Phi}{dt} = \delta(t)$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dt} * \frac{d\Phi}{dt} \right) &= \int_0^t \{ \chi(t') + t'\delta(t') \} \delta(t-t') dt' = \\ &= \left\{ \int_0^t \chi(t') \delta(t-t') dt' + \int_0^t t' \delta(t') \delta(t-t') dt' \right\} = (1 + t\delta(t)), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{dF}{dt} * \frac{d\Phi}{dt} \right) * \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right\} &= \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} dt' + \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} (t-t') \delta(t-t') dt' = \\ &= \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \cdot 0 = \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая формулу (3.46), получим (1.7).

При этом очевидно, что уравнение (3.49) запишется так:

$$\Delta P^* - \frac{s}{\kappa} P^* = 0. \quad (3.51)$$

Заметим, что уравнение (3.51) легко можно получить путём применения к уравнению (1.7) преобразования Л-К.

2⁰. *Модель Христиановича.* Для модели Христиановича имеем:

$$F(t) = (t + \tau)\chi(t), \quad F(0) = \tau, \quad F^*(s) = \left(\frac{l}{s} + \tau\right);$$

$$\Phi(t) = \chi(t), \quad \Phi(0) = l, \quad \Phi^*(s) = l;$$

$$L^*(s) = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{\left(\frac{l}{s} + \tau\right)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{s(l + \tau s)}},$$

$$L^*(\infty) = L(0) = 0; \quad V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}.$$

Так как фронт возмущения распространяется с конечной скоростью, то рассматриваемая область разобьётся на возмущённую и невозмущённую части.

Далее, после несложных преобразований уравнение (3.46) запишется в форме

$$\kappa \Delta P = \frac{\partial P}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (3.52)$$

В самом деле очевидно, что $\frac{dF}{dt} = \{\chi(t) + (t + \tau)\delta(t)\}$, $\frac{d\Phi}{dt} = \delta(t)$; тогда

$$\left(\frac{dF}{dt} * \frac{d\Phi}{dt}\right) = \int_0^t \{\chi(t') + (t' + \tau)\delta(t')\}\delta(t - t')dt' = \{l + (t + \tau)\delta(t)\}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{dF}{dt} * \frac{d\Phi}{dt} \right) * \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right\} = \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} \{l + (t - t' + \tau)\delta(t - t')\}dt' = \\ & = \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} dt' + \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} (t - t')\delta(t - t')dt' + \int_0^t \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} \delta(t - t')dt' = \\ & = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Найденное выше выражение представляет собой правую часть уравнения (3.46), используя которую получим уравнение (3.11). Уравнению (3.52) можно придать эквивалентную ему форму записи

$$\kappa \int_0^t \Delta P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau} = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.53)$$

Применяя теперь к уравнению (3.52) (или (3.53)) преобразование Л-К, найдём

$$\Delta P^* - \frac{s(I + \tau s)}{\kappa} P^* = 0. \quad (3.54)$$

Нетрудно показать, что к такому же уравнению приводится уравнение (3.49).

Этот же результат можно получить следующим приёмом. Сначала применим к уравнению (3.52) (или (3.53)) преобразование Л-К; в результате чего найдём выражение (3.54). Затем, используя изображения $F^*(s)$ и $\Phi^*(s)$ соответствующих ядер, приведём уравнение (3.49) к виду (3.54). Откуда можно сделать вывод о том, что при использовании конкретных ядер $F(t)$ и $\Phi(t)$ уравнение (3.46) принимает форму (3.52) или эквивалентную (3.53).

3⁰. *Модель Баренблатта*. Фильтрация в трещиновато-пористой среде по модели Баренблатта может быть описана следующими ядрами:

$$\begin{aligned} F(t) &= t\chi(t), \quad F(0) = 0, \quad F^*(s) = \frac{I}{s}; \\ \Phi(t) &= \left\{ I - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right\} \chi(t), \quad \Phi(0) = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \\ \Phi^*(s) &= \frac{I + \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} s}{I + \tau_2 s} = \frac{I + \tau' s}{I + \tau_2 s}; \\ L^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{F^*(s) \Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa} (I + \tau_2 s)}{\sqrt{\mu (\beta_1 + \beta_2) (I + \tau' s) s}} = \frac{\sqrt{\kappa_1 \tau_1 (I + \tau_2 s)}}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2) (I + \tau' s)}}, \\ L^*(\infty) &= L(0) = 0; \quad V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0) \Phi(0)}} = \infty. \end{aligned}$$

Далее покажем, что для данных ядер $F(t)$ и $\Phi(t)$ уравнение (3.46) можно представить в следующей форме:

$$\kappa_1 \tau_1 \Delta \left(P_1 + \tau_2 \frac{\partial P_1}{\partial t} \right) = (\tau_1 + \tau_2) \frac{\partial P_1}{\partial t} + \tau_1 \tau_2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}. \quad (3.55)$$

Для этого применим к уравнению (3.55) преобразование Л-К; в результате чего получим

$$\Delta P_1^* - \frac{(\tau_1 + \tau_2) s (I + \tau' s)}{\kappa_1 \tau_1 (I + \tau_2 s)} P_1^* = 0. \quad (3.56)$$

К такому же уравнению приводится соотношение (3.49) при использовании изображений $F^*(s)$ и $\Phi^*(s)$, соответствующих ядрам $F(t)$ и $\Phi(t)$.

Отметим, что уравнение (3.55) имеет эквивалентную форму записи вида

$$\kappa_I \tau_I \Delta P_I + \int_0^t P_I \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_2}\right) \frac{dt'}{\tau_2} = P_I + \tau_I \frac{\partial P_I}{\partial t}. \quad (3.57)$$

В уравнениях (3.55) и (3.57) $P_I = p_I - p_{I0}$.

4⁰. *Фильтрация по простейшей модели при релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме.* Фильтрация по закону Дарси при релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме описывается следующими ядрами:

$$\begin{aligned} F(t) &= t\chi(t), \quad F(0)=0, \quad F^*(s) = \frac{I}{s}; \\ \Phi(t) &= \left\{ I - \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \exp\left(-\frac{t}{\theta_m}\right) \right\} \chi(t), \quad \Phi(0) = \frac{\theta_p}{\theta_m}, \\ \Phi^*(s) &= \left\{ I - \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \frac{s}{s + 1/\theta_m} \right\} = \frac{I + \theta_p s}{I + \theta_m s}; \\ L^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{\frac{I}{I + \theta_p s} \frac{I + \theta_p s}{I + \theta_m s}}} = \sqrt{\frac{\kappa(I + \theta_m s)}{s(I + \theta_p s)}}; \\ L^*(\infty) &= L(0) = 0; \quad V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}} = \infty. \end{aligned}$$

Убедимся теперь в том, что при используемых здесь ядрах уравнение (3.46) принимает вид

$$\kappa \Delta P \left(P + \theta_m \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(P + \theta_p \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (3.58)$$

или

$$\begin{aligned} \kappa \theta_m \Delta P + \left(I - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) P \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} = \\ = \left(I - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) P + \theta_p \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Действительно, применяя к уравнению (3.58) (или (3.59)) преобразование Л-К, получим

$$\Delta P^* - \frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)} P^* = 0. \quad (3.60)$$

Отметим, что такое же уравнение имеет место, если в соотношении (3.49) воспользоваться изображениями $F^*(s)$ и $\Phi^*(s)$ соответствующих ядер $F(t)$ и $\Phi(t)$.

5⁰. *Фильтрация по простейшему неравновесному закону в упругой пористой среде.* Рассматриваемому течению жидкости соответствуют следующие ядра релаксации:

$$\begin{aligned} F(t) &= \left\{ t + (\tau_w - \tau_p) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \right) \right\} \chi(t), \quad F(0) = 0, \\ F^*(s) &= \left\{ \frac{1}{s} + (\tau_w - \tau_p) \left(1 - \frac{s}{s + 1/\tau_p} \right) \right\} = \frac{1 + \tau_w s}{s(1 + \tau_p s)}; \\ \Phi(t) &= \chi(t), \quad \Phi(0) = 1, \quad \Phi^*(s) = 1; \\ L^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{F^*(s) \Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{\frac{1 + \tau_w s}{s(1 + \tau_p s)}}} = \sqrt{\frac{\kappa(1 + \tau_p s)}{s(1 + \tau_w s)}}, \\ L^*(\infty) &= L(0) = 0; \quad V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0) \Phi(0)}} = \infty. \end{aligned}$$

По методике, используемой выше, нетрудно убедиться в том, что при используемых в рассматриваемом случае ядер $F(t)$ и $\Phi(t)$ уравнение (3.46) представимо в форме

$$\kappa \frac{\tau_p}{\tau_w} \Delta P + \kappa \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \int_0^t \Delta P \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.61)$$

или

$$\kappa \left(P + \tau_p \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(P + \tau_w \frac{\partial P}{\partial t} \right); \quad (3.62)$$

при этом уравнение (3.49) принимает вид

$$\Delta P^* - \frac{s(1 + \tau_w s)}{\kappa(1 + \tau_p s)} P^* = 0. \quad (3.63)$$

§ 10. Исследование одномерной линейной неравновесной фильтрации

п. 10.1. Ниже на примере прямолинейно-параллельной фильтрации однородной жидкости к галерее будут проанализированы характерные стороны линейной неравновесной фильтрации в зависимости от свойств ядер релаксации. Будет дана классификация таких течений, а также будут

проанализированы вопросы корректности постановок соответствующих (начально-граничных) задач.

Итак, пусть полуограниченный, изотропный и однородный пласт заполнен однородной капельной жидкостью; порода предполагается слабосжимаемой. Тогда имеем: $p = p(x, t)$, $w = w(x, t)$, $J = J(x, t)$. Пусть пласт при $t < 0$ был невозмущён:

$$p(x, t) \equiv p_0 = 0, \quad w(x, t) = 0, \quad J(x, t) = 0, \quad m\rho = m_0\rho_0.$$

Для прямолинейно-параллельного течения уравнение фильтрации (3.46) запишется так:

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right\}. \quad (3.64)$$

Таким образом, при $t > 0$ и в области фильтрации $x_0 < x < \xi(t)$ течение жидкости описывается уравнением (3.64). При $t = 0$ имеем

$$[w]_0 = \beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [p]_0. \quad (3.65)$$

На поверхности возмущения Σ_0 и при $t > 0$: а) скорость её перемещения равна

$$V_0 = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{F(0)\Phi(0)}}, \quad (3.21)$$

б) её положение определяется соотношением

$$\xi(t) = x_0 + V_0 t, \quad (3.25)$$

с) связь между скачками скорости фильтрации и давления имеет вид

$$[w] = \beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [p], \quad (3.22)$$

д) скачки давления и скорости фильтрации затухают по законам

$$\begin{aligned} [p] &= [p]_0 \exp\left(-\frac{t}{2} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt}\right), \\ [w] &= [w]_0 \exp\left(-\frac{t}{2} \frac{d \ln(F(0)\Phi(0))}{dt}\right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Перед фронтом возмущения Σ_0 располагается невозмущённая часть рассматриваемой области $x > \xi(t)$, в которой имеют место соотношения

$$p(x, t) \equiv 0, \quad w(x, t) \equiv 0. \quad (3.67)$$

Таким образом, проблема сводится к нахождению решения уравнения (3.64) для $t > 0$ и в области фильтрации $x_0 < x < \xi(t)$ при соответствующих начальных и граничных условиях.

п. 10.2. Итак, рассмотрим в первоначально невозмущённом полубесконечном пласте фильтрационное течение, вызванное работой при $t > 0$

галереи ($x = x_0$) либо с постоянным забойным давлением (задача А), либо с постоянным дебитом (задача Б). При этом дополнительно будем также отыскивать дебит Q галереи в задаче А и поведение забойного давления в задаче Б.

Рассмотрим сначала постановку задачи А, а именно требуется найти в области $x_0 < x < \xi(t)$ и для $t > 0$ решение уравнения

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right\} \quad (3.64)$$

при следующих условиях: начальном

$$p(x, 0) = 0 \quad (3.67)$$

и граничных

$$p(x_0, t) = p_{\Gamma 0} > 0, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (3.68)$$

Кроме этого, будем находить дебит галереи при $t \geq 0$ из условий:

$$t = 0 \quad [w]_0 = \left[\frac{Q}{B} \right]_0 = \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [p]_0,$$

откуда

$$Q(0) = Q_0 = B\beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi(0)}{F(0)}} [p]_0 \quad (3.69)$$

и

$$t > 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{d^2 F}{dt^2} * w \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{d^2 F}{dt^2} * \frac{q(t)}{B} \right); \quad (3.70)$$

здесь B — площадь поперечного сечения пласта.

Перейдём к постановке задачи Б. Найти в области $x_0 < x < \xi(t)$ и для $t > 0$ решение уравнения

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left\{ \frac{d^2 F}{dt^2} * \left(\frac{d\Phi}{dt} * \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right\} \quad (3.64)$$

при следующих условиях: начальном

$$p(x, 0) = 0 \quad (3.67)$$

и граничных

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{d^2 F}{dt^2} * \frac{Q_{\Gamma 0}}{B} \right), \quad p(\infty, t) = 0. \quad (3.71)$$

Кроме этого, будем также определять изменение во времени забойного давления $p_r(t)$:

$$\text{при } t=0 \quad [p]_0 = p_r(0) = \frac{l}{\beta\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{F(0)}{\Phi(0)}} \frac{Q_0}{B}, \quad (3.72)$$

$$\text{при } t>0 \quad p_r(t) = p(x_0, t). \quad (3.73)$$

п. 10.3. Исследование задач А и Б будем проводить с помощью преобразования Л-К.

Сначала применим преобразование Л-К к задаче А, в результате чего получим.

Задача А.* Найти решение уравнения

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{p^*(x, s)}{L^{*2}(s)} = 0, \quad x_0 < x < \infty, \quad (3.74)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$p^*(x_0, s) = p_{r0}, \quad p^*(\infty, s) = 0. \quad (3.75)$$

Отметим, что в уравнении (3.74)

$$L^*(s) = \sqrt{\kappa}/s \sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)} \quad (3.76)$$

представляет собой изображение по Л-К характерной границы зоны влияния галереи.

При этом имеем

$$\frac{dp^*}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\mu}{k} s \frac{Q^*(s)}{B} F^*(s);$$

откуда найдём

$$Q^*(s) = -\frac{k}{\mu} \frac{l}{sF^*(s)} \frac{dp^*}{dx} \Big|_{x=x_0}. \quad (3.77)$$

Применив теперь преобразование Л-К к задаче Б, получим.

Задача Б.* Найти решение уравнения

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{p^*(x, s)}{L^{*2}(s)} = 0, \quad x_0 < x < \infty, \quad (3.74)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{dp^*}{dx} \Big|_{x=x_0} = -\frac{\mu}{k} s F^*(s) \frac{Q_0}{B}, \quad p^*(\infty, s) = 0. \quad (3.78)$$

Очевидно, изображение давления на галерее находится из соотношения

$$p_r^*(s) = p^*(x_0, s). \quad (3.79)$$

п. 10.4. Решением задачи А*, очевидно, будет соотношение

$$p^*(x, s) = p_{r0} \exp\left(-\frac{x-x_0}{L^*(s)}\right). \quad (3.80)$$

При этом изображение дебита галереи запишется так:

$$\begin{aligned} Q^*(s) &= B \frac{k}{\mu} \frac{I}{s F^*(s)} \frac{p_{\Gamma 0}}{L^*(s)} = B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa}} \frac{s \sqrt{F^*(s) \Phi^*(s)}}{s F^*(s)} = \\ &= B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{\Phi^*(s)}{F^*(s)}} = p_{\Gamma 0} G^*(s), \end{aligned} \quad (3.81)$$

где

$$G^*(s) = B \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi^*(s)}{F^*(s)}} \quad (3.82)$$

— изображение так называемого коэффициента продуктивности галереи.

Нетрудно убедиться в том, что решением задачи Б* будет соотношение

$$p^*(x, s) = \frac{I}{\kappa \sqrt{\kappa}} \frac{Q_0}{B} \sqrt{\frac{F^*(s)}{\Phi^*(s)}} \exp\left(-\frac{x - x_0}{L^*(s)}\right) = \frac{Q_0}{G^*(s)} \exp\left(-\frac{x - x_0}{L^*(s)}\right); \quad (3.83)$$

откуда, полагая $x = x_0$, получим изображение давления на галерее:

$$p^*(x_0, s) = p_r^*(s) = \frac{Q_0}{G^*(s)}. \quad (3.84)$$

Замечание. В рассматриваемых фильтрационных течениях темп изменения во времени давления p и скорости фильтрации w стремится к нулю. Таким образом, согласно принципу затухающей памяти, эти фильтрационные течения будут асимптотически приближаться к соответствующим течениям классического упругого режима, а следовательно, ядра $F(t)$ и $\Phi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ могут быть представлены соответствующими асимптотическими соотношениями:

$$F(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t \Leftrightarrow F^*(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{s}; \quad \Phi(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 1 \Leftrightarrow \Phi^*(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} L^*(s) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{F^*(s) \Phi^*(s)}} \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{I}{s \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 k} \frac{1}{s} \rho_0 \beta}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{s}}; \\ G^*(s) &= B \beta \sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi^*(s)}{F^*(s)}} \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{B \beta \sqrt{\kappa}}{\sqrt{\frac{1}{s}}} = B \beta \sqrt{\kappa s} = \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{s}. \end{aligned}$$

Следовательно, определяя оригиналы правых частей предыдущих асимптотических равенств, соответственно найдём

$$L(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 2 \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}, \quad G(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\pi \kappa t}}.$$

Откуда, в частности, следует

$$L(\infty) = \infty, \quad G(\infty) = 0,$$

т.е. характерный размер со временем увеличивается до бесконечности, а продуктивность галереи уменьшается до нуля.

§ 11. Классификация моделей линейной неравновесной фильтрации. Корректность постановок краевых задач

п. 11.1. Займёмся сначала классификацией моделей линейной неравновесной фильтрации в зависимости от значений пределов $L(0)$ и $G(0)$. Далее, на основе указанной классификации обсудим вопросы корректности постановок задач А и Б, а также характеры изменения во времени дебита галереи (задача А) и забойного давления (задача Б).

I^{ый} класс: $L(0) = 0$. При скачкообразном изменении в точке $x = x_0$ (на галерее) давления или его производной по пространственной координате размер области существенного изменения давления в начальный момент времени равен нулю и с течением времени он монотонно и неограниченно возрастает. Очевидно, изображение давления $p^*(x, s)$, определяемое соотношениями

$$p^*(x, s) = p_{Г0} \exp\left(-\frac{x-x_0}{L^*(s)}\right) \quad (3.80)$$

(задача А*) и

$$p^*(x, s) = \frac{Q_0}{G^*(s)} \exp\left(-\frac{x-x_0}{L^*(s)}\right) \quad (3.82)$$

(задача Б*), при $s \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$) стремится к нулю, т.е.

$$p^*(x, \infty) = p(x, 0) = 0. \quad (3.85)$$

Следовательно, распределение давления $p(x, t)$ в обеих задачах при $t \rightarrow 0$ стремится к своему первоначальному нулевому значению. Таким образом, в данном классе при постановках задач А и Б корректно допускать рассогласование граничных условий при $t = 0$ с начальными условиями, взятыми на границе ($x = x_0$).

Здесь возможны два случая, связанные с предельным значением продуктивности галереи при $t = 0$ ($G(0)$).

Случай I⁰: $G(0) = \infty$. С одной стороны, согласно соотношению

$$Q^*(s) = p_{Г0} G^*(s) \quad (3.81)$$

имеем $Q^*(s) = Q(0) = \infty$. Т.е. в начальный момент времени при пуске галереи с постоянным забойным давлением галерея обладает бесконечно большим дебитом (задача А). С другой стороны, в соответствии с формулой

$$p_r^*(s) = \frac{Q_0}{G^*(s)} \quad (3.84)$$

получаем $p_r^*(\infty) = p_r(0) = 0$. Т.е. в начальный момент времени при пуске галереи с постоянным расходом давление на забое совпадает с первоначальным пластовым (задача Б).

Рассмотренному случаю соответствует, например, фильтрационное течение в условиях классического упругого режима

$$F(t) = t\chi(t), \quad F^*(s) = \frac{I}{s}; \quad \Phi(t) = \chi(t), \quad \Phi^*(s) = I.$$

Тогда имеем

$$L^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa}{s}}, \quad G^*(s) = \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{s};$$

откуда получим

$$L^*(\infty) = L(0) = 0, \quad G^*(\infty) = G(0) = \infty.$$

Таким образом, $Q(0) = \infty$ (задача А) и $p_r(0) = 0$ (задача Б). К данному случаю относится фильтрация в трещиновато-пористой среде в упругих трещинах, фильтрация по закону Дарси при релаксационном поведении жидкости в элементарном объёме, а также фильтрация по неравновесному закону в упругой пористой среде.

Случай 2⁰: $0 < G(0) < \infty$. В этом случае при $t = 0$ дебит галереи в задаче А и забойное давление в задаче Б будут конечными, не равными нулю, величинами, а именно, $Q(0) = B p_{r0} \sqrt{\Phi(0)/F(0)}$ и $p_{r0}(0) = Q_0 \sqrt{F(0)/\Phi(0)}/B$.

Данному случаю соответствует, например, течение жидкости по простейшему закону фильтрации с конечной скоростью распространения возмущения в упругой пористой среде с неравномерным строением:

$$F(t) = (t + \tau)\chi(t), \quad F^*(s) = \frac{I + \tau s}{s};$$

$$\Phi(t) = \chi(t), \quad \Phi^* = I; \quad L^* = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)}} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{s(I + \tau s)}}.$$

Очевидно, что $L^*(\infty) = L(0) = 0$; откуда следует, что рассматриваемое фильтрационное течение относится к I^{my} классу. При этом изображение продуктивности галереи запишется так:

$$G^*(s) = B\beta\sqrt{\kappa} \sqrt{\frac{\Phi^*(s)}{F^*(s)}} = \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{s}{I + \tau s}}.$$

Откуда следует, что $G^*(\infty) = G(0) = \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\kappa\tau}}$; таким образом, данное фильт-
рационное течение относится ко $2^{му}$ случаю. Нетрудно показать, что

$$Q(0) = p_{\Gamma 0} G(0) = B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa\tau}} \quad (\text{задача А}),$$

$$p_{\Gamma}(0) = \frac{Q_0}{G(0)} = \frac{\mu}{k} \frac{\sqrt{\kappa\tau}}{B} Q_0 \quad (\text{задача Б}).$$

п. 11.2. $2^{ой}$ класс: $0 < L(0) = L^*(\infty) < \infty$. Из формул (3.80) и (3.82) со-
ответственно найдём

$$p^*(x, \infty) = p(x, 0) = p_{\Gamma 0} \exp\left(-\frac{x - x_0}{L(0)}\right) \quad (3.85)$$

для задачи А и

$$p^*(x, \infty) = p(x, 0) = \frac{Q_0}{G(0)} \exp\left(-\frac{x - x_0}{L(0)}\right) \quad (3.86)$$

для задачи Б. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $G^*(\infty) = G(0) = \infty$. Из соотношения (3.85) следует, что на-
чальное распределение в задаче А не удовлетворяется, его невозможно
будет получить из её решения. Имеет место следующее: в начальный мо-
мент времени мгновенно (хлопком) устанавливается новое начальное рас-
пределение давления, не равное первоначальному нулевому и характери-
зуемое формулой (3.85). При этом, очевидно, начальное значение дебита
будет равно $Q(0) = Q^*(\infty) = p_{\Gamma 0} G^*(\infty) = \infty$.

Таким образом, *постановка* задачи А (для данного случая) *не*
корректна, не выполняется начальное условие для давления. Следовательно, в рассматриваемом случае не допускается рассогласование
начального условия при $x = x_0$ с граничным условием на галерее, взятым
в начальный момент времени. Для устранения такого положения
необходимо либо заменить нулевое начальное условие на условие,
характеризуемое соотношением (3.85), либо ввести переменное во времени
забойное давление на галерее, согласованное с начальным (нулевым)
условием, взятым при $x = x_0$, т.е. $p_{\Gamma}(0) = 0$.

Из соотношения (3.86) следует, что начальное распределение давле-
ния $p^*(x, \infty) = p(x, 0) = 0$, т.е. начальное условие соблюдается, так как
 $G^*(\infty) = G(0) = \infty$. Таким образом, задача Б поставлена *корректно*. При
этом

$$p_{\Gamma}(0) = \frac{Q_0}{G(0)} = 0.$$

Рассматриваемому случаю отвечает, например, течение жидкости в упругой пористой среде по неравновесному закону вида

$$w = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

($\tau_w = 0$, $\tau_p \neq 0$). Такое фильтрационное течение будет характеризоваться следующими параметрами:

$$F(t) = \left\{ t - \tau_p \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_p} \right) \right) \right\} \chi(t), \quad F^*(s) = \frac{I}{s(I + \tau_p s)};$$

$$\Phi(t) = \chi(t), \quad \Phi^*(s) = I; \quad L^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa(I + \tau_p s)}{s}}, \quad L^*(\infty) = L(0) = \sqrt{\kappa \tau_p}.$$

Так как $L(0) = \sqrt{\kappa \tau_p} \neq 0$, то рассматриваемое течение относится ко 2^{му} классу. При этом $G^*(s) = \frac{k}{\mu} \frac{B}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{s(I + \tau_p s)}$; откуда следует $G^*(\infty) = G(0) = \infty$. Таким образом, имеем 1^{ый} случай.

Итак, задача А поставлена некорректно, следует задать начальное распределение в виде

$$p(x, 0) = p_{\Gamma 0} \exp \left(-\frac{x - x_0}{\sqrt{\kappa \tau_p}} \right);$$

при этом имеем $Q(0) = p_{\Gamma 0} G(0) = \infty$. Задача Б поставлена корректно; начальное распределение давления соблюдается ($p(x, 0) = 0$).

Случай 2^{ой}: $G^*(\infty) = G(0) \neq 0, \infty$. В этом случае в обеих задачах не удовлетворяется начальное условие; в пласте мгновенно (хлопком) устанавливается новое начальное распределение давления, характеризующее для задачи А соотношением (3.85) и для задачи Б – соотношением (3.86). При этом начальное значение дебита в задаче А и начальное значение забойного давления в задаче Б – конечны, отличны от нуля и соответственно равны $Q(0) = p_{\Gamma 0} G(0)$, $p_{\Gamma}(0) = \frac{Q_0}{G(0)}$.

Таким образом, обе задачи поставлены некорректно: не выполняется нулевое начальное условие для давления. Для корректности постановок задач А и Б необходимо заменить начальное условие $p(x, 0) = 0$ на выражение (3.85) для задачи А и соотношение (3.86) для задачи Б либо ввести переменные во времени граничные условия при $x = x_0$ для давления (задача А) и дебита (задача Б), согласовав их с соответствующими начальными условиями на галерее.

Этому случаю соответствует, например, течение жидкости в трещиновато-пористой среде по модели Баренблатта, когда упругоёмкость трещин пренебрежимо мала по сравнению с упругоёмкостью блоков ($\beta_1 \cong 0$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \neq 0$). Указанное выше течение характеризуется следующими параметрами:

$$F(t) = t\chi(t), \quad F^*(s) = \frac{1}{s}; \quad \Phi(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right),$$

$$\Phi^*(s) = \frac{1}{1 + \tau_2 s}; \quad L^*(s) = \frac{\sqrt{\kappa_{12}}}{s\sqrt{F^*(s)\Phi^*(s)}} = \sqrt{\frac{\kappa_{12}(1 + \tau_2 s)}{s}},$$

где $\kappa_{12} = k_1/\mu\beta_2$. Так как $L^*(\infty) = L(0) = \sqrt{\kappa_{12}\tau_2}$, то рассматриваемое фильтрационное течение относится ко 2^{му} классу. Далее,

$$G^*(s) = B\beta\sqrt{\kappa_{12}}\sqrt{\frac{\Phi^*(s)}{F^*(s)}} = B\frac{k_1}{\mu}\sqrt{\frac{s}{\kappa_{12}(1 + \tau_2 s)}},$$

откуда находим $G^*(\infty) = G(0) = \frac{k_1}{\mu}\frac{B}{\sqrt{\kappa_{12}\tau_2}}$. Следовательно, данное течение жидкости относится к случаю 2.

Такое поведение пласта имеет простое объяснение. Так как в начальный и близкие к нему моменты времени в фильтрационном течении упругоёмкие блоки практически не участвуют, а упругоёмкость трещин пренебрежимо мала, то насыщенная трещиновато-пористая среда ведёт себя в эти моменты времени как несжимаемый объект. Поэтому в трещинах мгновенно устанавливается новое начальное распределение давления:

$$p(x, 0) = p_{\Gamma 0} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\sqrt{\kappa_{12}\tau_2}}\right)$$

в задаче А и

$$p(x, 0) = \frac{\mu}{k_1 B} Q_0 \sqrt{\kappa_{12}\tau_2} \exp\left(-\frac{x - x_0}{\sqrt{\kappa_{12}\tau_2}}\right)$$

для задачи Б.

При этом имеем

$$Q(0) = \frac{k_1}{\mu} B \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa_{12}\tau_2}}$$

для задачи А,

$$p_{\Gamma}(0) = \frac{\mu}{k_1} Q_0 \frac{\sqrt{\kappa_{12}\tau_2}}{B}$$

для задачи Б.

ГЛАВА 4. Решение основных задач прямолинейно-параллельной фильтрации [12,8]

§ 12. Модель Щелкачёва

п. 12.1. Физическая постановка задач. Пусть первоначально невозмущённый ($p(x, 0) = p_0 = 0$) полубесконечный ($0 \leq x < \infty$) пласт заполнен капельно-сжимаемой жидкостью. На левом конце пласта в начальный момент времени ($t = 0$) начинает работать галерея с постоянным забойным давлением ($p_{r0} = \text{const}$; задача А) или с постоянным дебитом ($q_0 = \text{const}$; задача Б), либо галерея бесконечно долго работает с гармонически меняющимся забойным давлением ($p_r(t) = p_{r1} \cos(\omega t - \delta)$; задача В). Пласт на бесконечности остаётся невозмущённым ($p(\infty, t) = 0$). Фильтрация осуществляется по модели Щелкачёва. Требуется определить давление в пласте. Кроме того, для задач А и В будем находить также дебит галереи ($Q(t)$), а для задачи Б – изменение во времени забойного давления ($p_r(t)$).

п. 12.2. Математическая постановка задач. Как отмечалось выше, фильтрация жидкости по модели Щелкачёва характеризуется следующими ядрами релаксации: $F(t) = t\chi(t)$, $F(0) = 0$; $\Phi(t) = \chi(t)$, $\Phi(0) = 1$. Скорость распространения возмущения будет бесконечно большой, т.е. $V_0 = \infty$. Следовательно, фронт возмущения мгновенно проходит всю рассматриваемую область; таким образом, она мгновенно становится областью фильтрации. В области фильтрации давление удовлетворяет уравнению пьезопроводности

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Далее, так как $F^*(s) = \frac{1}{s}$ и $\Phi^*(s) = 1$, то $L^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa}{s}}$ и $G^*(s) = B \frac{k}{\mu} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}$. Следовательно, $L(0) = 0$ и $G(0) = \infty$. Таким образом, в задачах А и Б, во-первых, корректно допускать рассогласование граничных условий с начальными данными, во-вторых, если на галерее при $t = 0$ скачком $[p]_0 \neq 0, \infty$ меняется забойное давление (задача А), то $[w]_0 = \infty$; если же скачком $[w]_0 \neq 0, \infty$ меняется скорость фильтрации (задача Б), то $[p]_0 = 0$. Очевидно, данное фильтрационное течение относится к I^{xy} классу случаев I^0 .

Итак, можно сформулировать следующим образом математические постановки задач А, Б и В. Задача А: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.1), удовлетворяющее следующим начальным данным:

$$p(x, 0) = 0 \quad (4.2)$$

и граничным условиям

$$p(0, t) = p_{\Gamma 0}, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (4.3)$$

Задача Б: определить в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальным данным (4.2) и граничным условиям

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\mu}{k} \frac{Q_0}{B}, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (4.4)$$

Задача В: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.1) без учёта начальных данных и при выполнении граничных условий:

$$p(0, t) = p_{\Gamma 1} \cos(\omega t - \delta), \quad p(\infty, t) = 0. \quad (4.5)$$

п. 12.3. Решение задач А и Б. Получим сначала решение задачи А. Для этого применим к уравнению (4.1) и граничным условиям (4.3) преобразование Лапласа–Карсона, в результате чего придём к следующей краевой задаче А*: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{s}{\kappa} p^*(x, s) = 0, \quad (4.6)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$p^*(0, s) = p_{\Gamma 0}, \quad p^*(\infty, s) = 0. \quad (4.7)$$

Очевидно, решением задачи А* будет

$$p^*(x, s) = p_{\Gamma 0} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right). \quad (4.8)$$

Тогда, воспользовавшись обращением (23.89) справочника [6], определим

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right); \quad (4.9)$$

здесь $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$; $\operatorname{erf}(z)$ — интеграл вероятности. Нетрудно подсчитать дебит галереи, он равен

$$Q(t) = -\frac{\kappa}{\mu} B \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\pi \kappa t}}; \quad (4.10)$$

причем $Q(0) = -\infty$.

Перейдём к нахождению решения задачи Б. Применяя процедуру решения задачи А, придём к определению изображения давления, удовлетворяющего уравнению (4.6) и следующим граничным условиям (задача Б*):

$$\frac{dp^*}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\mu}{k} \frac{Q_0}{B}, \quad p^*(\infty, s) = 0. \quad (4.11)$$

Решение задачи Б* запишется так:

$$p^*(x, s) = -\frac{\mu}{k} \frac{Q_0}{B} \sqrt{\frac{\kappa}{s}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right). \quad (4.12)$$

Тогда по формуле (23.101) справочника [6] определим

$$p(x, t) = -\frac{\mu}{k} \frac{Q_0}{B} \left\{ 2\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right\}. \quad (4.13)$$

Подсчитаем также давление на забое галереи, положив в соотношении (4.13) $x = 0$, а именно

$$p_{\Gamma}(t) = -2\frac{\mu}{k} \frac{Q_0}{B} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}; \quad (4.14)$$

в частности, при $t = 0$ имеем $p_{\Gamma}(0) = 0$.

п. 12.4. Решение задачи В. При решении задачи поступим следующим образом. Представим граничное условие (4.5) в виде

$$p(0, t) = \operatorname{Re} \langle p_{\Gamma 0} \exp\{i(\omega t - \delta)\} \rangle, \quad p(\infty, t) = 0. \quad (5.15)$$

Затем введём в рассмотрение комплексную функцию $p^*(x, t)$ такую, что $\operatorname{Re} p^*(x, t) = p(x, t)$. Далее потребуем, чтобы функция $p^*(x, t)$ удовлетворяла бы тому же уравнению (4.1) и следующим граничным условиям:

$$p^*(0, t) = p_{\Gamma 0} \exp\{i(\omega t - \delta)\}, \quad p^*(\infty, t) = 0. \quad (4.16)$$

Представим теперь функцию $p^*(x, t)$ в форме

$$p^*(x, t) = P(x) \exp\{i(\omega t - \delta)\} \quad (4.17)$$

и подставим её в уравнение (4.1). В результате получим, что $P(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - i \frac{\omega}{\kappa} P(x) = 0. \quad (4.18)$$

Таким образом, имеет место следующая краевая задача: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.18), удовлетворяющее граничным условиям

$$P(0) = p_{\Gamma 0}, \quad P(\infty) = 0. \quad (4.19)$$

Нетрудно убедиться в том, что решение краевой задачи (4.18), (4.19) запишется так:

$$\begin{aligned} P(x) &= p_{\Gamma 0} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} e^{i \frac{\pi}{4}}\right) = \\ &= p_{\Gamma 0} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) \cdot \exp\left(-ix \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Таким образом,

$$p^*(x, t) = p_{\Gamma 0} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) \cdot \exp\left\{i\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} - \delta\right)\right\}. \quad (4.21)$$

Итак, решением исходной задачи будет следующее выражение:

$$p(x, t) = p_{r0} \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}\right) \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} - \delta\right). \quad (4.22)$$

Несложно получить скорость распространения волны давления. Для этого поступим так. Сначала приравняем аргумент косинуса произвольной постоянной, а затем подсчитаем производную от него по времени t , считая $x = x(t)$; таким образом найдём $\omega - \frac{dx}{dt} \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} = 0$. Так как по определению

$\frac{dx}{dt} = V_\phi$ является фазовой скоростью (в данном случае скорость распространения волны давления), то имеем

$$V_\phi = \sqrt{2\kappa\omega}. \quad (4.23)$$

Из соотношения (4.23) следует, что с ростом частоты колебания скорость распространения волны давления неограниченно возрастает, т.е.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_\phi = \infty. \quad (4.24)$$

И наконец, дебит галереи определяется так:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -B \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = B \frac{k}{\mu} p_{r0} \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \{ \cos(\omega t - \delta) - \sin(\omega t - \delta) \} = \\ &= B \frac{k}{\mu} p_{r0} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \cos\left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Очевидно, фаза дебита сдвинута по отношению к фазе забойного давления на $\pi/4$.

§13. Модель Христиановича

п. 13.1. Постановка задачи. Оставляя физическую постановку задачи прежней, будем считать, что течение каплевой жидкости в упругой пористой среде осуществляется по простейшему закону фильтрации, учитывающему постоянную скорость распространения возмущения. Тогда фильтрация жидкости характеризуется следующими ядрами: $F(t) = (t + \tau)\chi(t)$ и $\Phi(t) = \chi(t)$. Ввиду того, что $F(0) = \tau$, а $\Phi(0) = 1$, то скорость распространения возмущения равна $V_0 = \sqrt{\kappa/\tau}$. Таким образом, вся рассматриваемая область разбивается на область фильтрации (за фронтом возмущения) и невозмущённую область (перед фронтом возмущения). В области фильтрации давление удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (4.26)$$

вне области фильтрации давление равно первоначальному пластовому. На фронте возмущения имеет место следующая связь между скачками давления и скорости фильтрации:

$$[w] = \frac{\mu}{k} \frac{I}{\sqrt{\kappa\tau}} [p] = \beta \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} [p]. \quad (3.24)$$

При этом положение фронта возмущения находится по формуле $\xi(t) = V_0 t$, а поведение скачков давления и скорости фильтрации на нём описываются соответственно соотношениями

$$[p]_t = [p]_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right), \quad [w]_t = [w]_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right). \quad (4.27)$$

Далее, легко убедиться в том, что $F^*(s) = \frac{I + \tau s}{s}$, $\Phi^*(s) = I$; тогда $L^*(s) = \sqrt{\kappa}/\sqrt{s(I + \tau s)}$, $G^*(s) = k\sqrt{s}/\mu\sqrt{\kappa(I + \tau s)}$, следовательно, $L(0) = 0$, $G(0) = k/\mu\sqrt{\kappa\tau}$. Таким образом, в задачах А и Б, во-первых, корректно допускать рассогласование граничных условий с начальными данными, во-вторых, в начальный момент времени скачки давления и скорости фильтрации удовлетворяют условию (3.24).

Следовательно, фильтрационное течение в данном случае относится к 2^{му} типу.

Итак, можно дать следующие математические постановки краевых задач А и Б: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.26), удовлетворяющее начальным данным

$$p(x, 0) = 0, \quad p'_t(x, 0) = 0 \quad (4.28)$$

и граничным условиям (5.3) для задачи А и

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\mu q_0}{Bk} \{I + \tau \delta(t)\}, \quad p(\infty, t) = 0 \quad (4.29)$$

для задачи Б. Постановка задачи В формулируется так: определить в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.26) без учёта начальных данных и при выполнении граничных условий (4.5).

п. 13.2. Решение задачи А. Для нахождения задачи А используем преобразование Л-К; в результате придём к краевой задаче А*: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{s(I + \tau s)}{\kappa} p^*(x, s) = 0, \quad (4.30)$$

удовлетворяющее граничным условиям (4.7).

Часть I

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что решением сформулированной выше задачи будет

$$p^*(x, s) = p_{\Gamma 0} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(I + \tau s)}{\kappa}} \right). \quad (4.31)$$

Для нахождения оригинала выражения (4.31) воспользуемся формулой (23.179) справочника [6]; в результате чего получим:

$$p(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < x\sqrt{\tau/\kappa}, \quad (4.32'')$$

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \exp \left(-\frac{x}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) + p_{\Gamma 0} \frac{x}{2\sqrt{\kappa\tau}} \int_{x\sqrt{\tau/\kappa}}^t \exp \left(-\frac{t'}{2\tau} \right) \frac{I_1 \left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{t'^2 - \frac{x^2\tau}{\kappa}} \right)}{\sqrt{t'^2 - \frac{x^2\tau}{\kappa}}} dt' \quad (4.32''')$$

при $t > x\sqrt{\tau/\kappa}$.

Перейдём к определению дебита галереи $q(t)$. Согласно принятой модели фильтрации имеем $w(x, t) + \tau \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$ и $w(x, 0) = 0$.

Тогда изображение по Л-К скорости фильтрации представимо в форме

$$w^*(x, s) = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{1 + \tau s} \frac{dp^*}{dx} = \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{s}{1 + \tau s}} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(I + \tau s)}{\kappa}} \right);$$

откуда

$$Q^*(s) = -Bw^*(0, s) = -B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{s}{1 + \tau s}}. \quad (4.33)$$

Оригинал выражения (4.33) определим по формуле (22.83) справочника [6]; он равен

$$Q(t) = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa\tau}} \exp \left(-\frac{t}{2\tau} \right) I_0 \left(\frac{t}{2\tau} \right), \quad (4.34)$$

при этом

$$Q(0) = Q_0 = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa\tau}}. \quad (4.35)$$

Заметим, что соотношение (4.35) легко получается из формулы (4.33) при $s \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$), а также из выражения (3.24), взятого при $t = 0$.

Согласно принципу затухающей памяти при $t \rightarrow \infty$ распределение давления $p(x, t)$ и дебит галереи $Q(t)$ должны стремиться к соответствующим соотношениям в модели Щелкачёва. В самом деле. Так как при боль-

шом времени $t \gg \tau$ или $l/s \gg \tau$, то $\tau s \ll l$. Тогда выражение (4.31) примет вид

$$p^*(x, s) = p_{r0} \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right).$$

Полученное выражение тождественно совпадает с изображением давления, полученного в условиях классического упругого режима (4.8), оригинал которого равен (4.9). Перейдём к оценке дебита галереи при больших значениях времени t . Так как $\tau t \ll l$, то соотношение (4.33) запишется так:

$$Q^*(s) = -B \frac{k}{\mu} p_{r0} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}. \quad (4.36)$$

Оригинал этого выражения определим по формуле (22.1) справочника [6]; он равен

$$Q(t) = -\frac{k}{\mu} \frac{p_{r0}}{\sqrt{\pi \kappa t}}, \quad (4.37)$$

что тождественно совпадает с дебитом галереи при фильтрации по модели Щелкачёва (см. формулу (4.10)).

п. 13.3. Решение задачи Б. Для нахождения решения задачи Б воспользуемся процедурой применения преобразования Л-К; в результате придём к задаче Б*: определить изображение давления, удовлетворяющее в области $0 < x < \infty$ уравнению (4.30) и граничным условиям

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\mu Q_0}{kB} (1 + \tau s), \quad p^*(x, s) = 0. \quad (4.38)$$

Очевидно, решение задачи Б* имеет вид:

$$p^*(x, s) = -\frac{\mu Q_0 \sqrt{\kappa}}{kB} \sqrt{\frac{l + \tau s}{s}} \exp\left(-x\sqrt{\frac{s(l + \tau s)}{\kappa}}\right). \quad (4.39)$$

Воспользуемся теперь формулой (23.184) справочника [6] и запишем оригинал в форме

$$p(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < x\sqrt{\tau/\kappa}, \quad (4.40')$$

$$p(x, t) = -\frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\kappa \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{t^2 - \frac{x^2 \tau}{\kappa}}\right) - \\ - \frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} \int_{x\sqrt{\tau/\kappa}}^t \exp\left(-\frac{t'}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{t'^2 - \frac{x^2 \tau}{\kappa}}\right) dt', \quad (4.40'')$$

при $t > x\sqrt{\tau/\kappa}$.

Определим также давление на забое галереи; оно равно

$$p_{\Gamma}(t) = p(0, t) = -\frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\kappa \tau} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{t}{2\tau}\right) - \frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{t'}{2\tau}\right) dt'. \quad (4.41)$$

В частности, при $t = 0$ имеем

$$p_{\Gamma}(0) = -\frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\kappa \tau}, \quad (4.42)$$

что согласуется с формулой (4.35).

Остаётся исследовать поведение давления при больших значениях времени t . Так как $t \gg \tau$ или $l \gg \tau s$, выражение (4.39) принимает вид

$$p^*(x, s) = -\frac{\mu Q_0 \sqrt{\kappa}}{kB \sqrt{s}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s}{\kappa}}\right), \quad (4.43)$$

которое тождественно совпадает с изображением давления, полученного в условиях модели Щелкачёва (см. (4.12)). Следовательно, оригинал соотношения будет равен (4.13).

п. 13.4. Решение задачи В. При решении задачи В, как и прежде, представим граничное условие (4.5) в виде (4.15), и введём в рассмотрение комплексную функцию $p^*(x, t)$ такую, что $\operatorname{Re} p^*(x, t) = p(x, t)$. Далее, потребуем, чтобы $p^*(x, t)$ удовлетворяла уравнению (4.26) и граничным условиям (4.16). Представляя затем функцию $p^*(x, t)$ в виде (4.17) и подставляя её в уравнение (4.26), получим, что $P(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{\omega}{\kappa} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \tau \omega\right)\right\} \cdot P(x) = 0 \quad (4.44)$$

и граничным условиями (4.19). Очевидно, решение краевой задачи (4.44), (4.19) запишется так:

$$P(x) = p_{\Gamma 0} \exp\left\{-x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega\right)\right\} \times \\ \times \exp\left\{-ix \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega\right)\right\}. \quad (4.45)$$

Тогда

$$p^*(x, t) = p_{\Gamma 0} \exp\left\{-x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega\right)\right\} \times \\ \times \exp\left\{i\left(\omega t - \delta - x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega\right)\right)\right\}. \quad (4.46)$$

Итак, решение исходной краевой задачи имеет вид

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right) \right\} \times \quad (4.47)$$

$$\times \cos \left\{ \omega t - \delta - x \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right) \right\}.$$

Очевидно, скорость распространения волны давления равна

$$V_{\phi} = \frac{\sqrt{\kappa \omega}}{\sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right)}; \quad (4.48)$$

при этом

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{\phi} = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} = V_0, \quad (4.49)$$

т.е. скорость распространения волны давления при $\omega \rightarrow \infty$ ограничена сверху скоростью распространения возмущения V_0 .

И наконец, подсчитаем дебит галереи, он должен удовлетворять следующему уравнению:

$$Q(t) + \tau \frac{dQ}{dt} = B \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{x=0} = \quad (4.50)$$

$$= -B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right).$$

Таким образом, требуется найти периодическое решение уравнения (4.50). Это решение будем искать в виде

$$Q(t) = q_1 \cos \left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right) + \quad (4.51)$$

$$+ q_2 \sin \left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \tau \omega \right),$$

где постоянные q_1 и q_2 подлежат определению. Подставляя теперь (4.51) в (4.50) и сравнивая коэффициенты при косинусах и синусах, получим систему для определения постоянных q_1 и q_2 :

$$q_2 - \tau \omega q_1 = 0, \quad (4.52)$$

$$q_1 + \tau \omega q_2 = -B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2},$$

решение которой равно

$$\begin{aligned} q_1 &= -B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{\omega}{k}} \frac{1}{\sqrt[4]{(1 + \tau^2 \omega^2)^3}}, \\ q_2 &= -B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{\omega}{k}} \frac{\tau \omega}{\sqrt[4]{(1 + \tau^2 \omega^2)}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Следовательно, окончательно имеем

$$Q(t) = B \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{\omega}{k}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \tau^2 \omega^2}} \cos \left(\omega t - \delta - \frac{3}{4} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega \right). \quad (4.54)$$

Заметим, что фаза дебита сдвинута по отношению к фазе забойного давления на величину $\frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \tau \omega$.

§ 14. Модель фильтрации в релаксационно-сжимаемой насыщенной пористой среде

п. 14.1. Оставаясь в пределах физической постановки § 12, будем считать, что в релаксационно-сжимаемой насыщенной пористой среде фильтрация осуществляется по закону Дарси. Тогда течение жидкости в условиях этой модели характеризуется ядрами: $F(t) = t \chi(t)$

и $\Phi(t) = \left\{ 1 - \frac{\theta_m - \theta_p}{\theta_m} \exp \left(-\frac{t}{\theta_m} \right) \right\} \chi(t)$. Так как $F(0) = 0$ и $\Phi(0) = \frac{\theta_p}{\theta_m}$, то

$V_0 = \infty$, и, таким образом, фронт возмущения мгновенно проходит всю рассматриваемую область, делая её мгновенно областью фильтрации. В области фильтрации давление удовлетворяет уравнению вида

$$\kappa \theta_m \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) \int_0^t p \exp \left(-\frac{t-t'}{\theta_m} \right) \frac{dt'}{\theta_m} = \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) p + \theta_p \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.55)$$

или эквивалентному ему уравнению

$$\kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p + \theta_m \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(p + \theta_p \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (4.56)$$

Далее, в силу того, что $F^*(s) = \frac{1}{s}$, $\Phi^*(s) = \frac{1 + \theta_p s}{1 + \theta_m s}$, то

$$L^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa(1 + \theta_m s)}{s(1 + \theta_p s)}}, \quad G^*(s) = B \frac{k}{\mu} \sqrt{\frac{s(1 + \theta_p s)}{\kappa(1 + \theta_m s)}}; \text{ таким образом, } L(0) = 0, G(0) = \infty.$$

Следовательно, в задачах А и Б, во-первых, корректно допускать рассогласование граничных условий с начальными данными, во-вторых, если на галерее при $t = 0$ скачком $[p]_0 \neq 0, \infty$ меняется давление (задача А),

то $[w]_0 = \infty$; если же скачком $[w]_0 \neq 0, \infty$ меняется скорость фильтрации (задача Б), то $[p]_0 = 0$. Очевидно, такое фильтрационное течение относится к $I^{му}$ классу случай I^0 .

Итак, имеют место следующие математические постановки задач: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.55) или (4.56), удовлетворяющее начальным данным (4.2) и граничным условиям (4.3) для задачи А и (4.4) для задачи Б, а также без учёта начальных данных при выполнении граничных условий (4.5) в случае задачи В.

п. 14.2. Решение задачи А. При решении задачи воспользуемся преобразованием Л-К. Тогда задача сводится к нахождению в области $0 < x < \infty$ изображения давления $p^*(x, s)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - \frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)} p^*(x, s) = 0 \quad (4.57)$$

и граничным условиям (4.7) (задача А*). Очевидно, решение задачи А* представимо в форме

$$p^*(x, s) = p_{Г0} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} \right). \quad (4.58)$$

Здесь выбрана та ветвь корня $\sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}}$, для которой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} \right) \right\} = 0, \text{ т.е. } \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} > 0, \text{ если подкоренное вы-}$$

ражение — действительное положительное число, а $\arg \frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)} = 0$.

По теореме обращения [5] имеем

$$p(x, t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \frac{p_{Г0}}{2\pi i} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} \right) \frac{e^{st}}{s} ds \right\}, \quad c > 0. \quad (4.59)$$

Очевидно, функция $\frac{1}{s} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} \right)$ аналитична в комплексной

плоскости $s = \xi + i\eta$ с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Таким образом, интеграл (4.59) сходится равномерно в области $x \geq \varepsilon > 0$, $0 \leq t < T$, и, следовательно, функция $p(x, t)$ непрерывна в этой области.

Перейдём к вычислению интеграла

$$\frac{I}{2\pi i} \int_{c-i\lambda}^{c+i\lambda} \exp\left(-x\sqrt{\frac{s(l+\theta_p s)}{\kappa(l+\theta_m s)}}\right) \frac{e^{sr}}{s} ds,$$

для чего воспользуемся контуром, изображённым на рисунке 4.1.

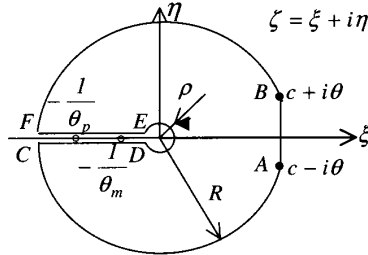


Рис. 4.1

Тогда по теореме Коши имеем:

$$\int_A^B = \int_A^C + \int_C^D + \int_D^E + \int_E^F + \int_F^B.$$

Сначала вычислим интегралы $\int_{AC}$ и $\int_{FB}$; так как подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_{AC} + \int_{FB} \right\} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(l + \theta_p s)}{\kappa(l + \theta_m s)}} \right) \frac{e^{st}}{s} ds = 0. \quad (4.60)$$

Займёмся теперь вычислением интегралов вдоль берегов разрезов CD и EF . Учитывая, что на нижнем берегу разреза $s = \xi e^{-i\pi}$, $\sqrt{s} = -i\sqrt{\xi}$, а на верхнем — $s = \xi e^{i\pi}$, $\sqrt{s} = i\sqrt{\xi}$ ($\xi > 0$), то после проведения соответствующих преобразований найдём

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{CD} + \int_{EF} \right\} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}} \right) \frac{e^{st}}{s} ds =$$

$$= -2i \int_0^{\infty} \sin \left(x \sqrt{\frac{\xi(I - \theta_p \xi)}{\kappa(I - \theta_m \xi)}} \right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi. \quad (4.61)$$

Здесь $\int_0^\infty$ означает интегрирование в пределах от 0 до ∞ с выброшенным интервалом $[1/\theta_m, 1/\theta_p]$. И наконец, перейдём к вычислению интеграла $\int_{DE}$.

Так как при $s = 0$ подынтегральная функция имеет простой полюс, то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{DE} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}} \right) \frac{e^{st}}{s} ds = 2\pi i. \quad (4.62)$$

Таким образом, объединяя результаты (4.60), (4.61) и (4.62), окончательно получим

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \left\{ I - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \left(x \sqrt{\frac{\xi(I - \theta_p \xi)}{\kappa(I - \theta_m \xi)}} \right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi \right\}. \quad (4.63)$$

Займёмся определением дебита галереи $q(t)$. Согласно принятой модели фильтрации имеем

$$w(x, t) = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

и $w(x, 0) = 0$. Тогда изображение по Л-К скорости фильтрации запишется так:

$$w^*(x, s) = -\frac{k}{\mu} \frac{dp^*(x, s)}{dx} = \frac{k}{\mu} p_{\Gamma 0} \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}} \exp \left(-x \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}} \right);$$

откуда получим

$$Q^*(s) = -Bw^*(0, s) = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{s}{I + \theta_m s}} \sqrt{I + \theta_p s}. \quad (4.64)$$

Оригинал выражения (4.64) определим по формулам (20.51) и (20.83) справочника [6]; он равен

$$\begin{aligned} Q(t) = & -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa \theta_p}} \times \\ & \times \frac{d}{dt} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{2\theta_m} \right) I_0 \left(\frac{t-t'}{2\theta_m} \right) \left\{ \sqrt{\frac{\theta_p}{\pi t'}} \exp \left(-\frac{t'}{\theta_p} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{t'}{\theta_p} \right) \right\} dt'; \end{aligned} \quad (4.65)$$

причём $Q(0) = -\infty$.

п. 14.3. Решение задачи Б. Для нахождения решения задачи Б воспользуемся преобразованием Л-К; в результате чего придём к краевой за-

даче Б*: определить в области $0 < x < \infty$ изображение давления $p^*(x, s)$, удовлетворяющее уравнению (4.57) и граничным условиям (4.11). Легко убедиться в том, что решением этой задачи будет соотношение

$$p^*(x, s) = -\frac{\mu Q_0}{k B} \sqrt{\frac{\kappa(I + \theta_m s)}{s(I + \theta_p s)}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}}\right). \quad (4.66)$$

По теореме обращения имеем:

$$p(x, t) = -\frac{\mu Q_0}{k B} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sqrt{\frac{\kappa(I + \theta_m s)}{s(I + \theta_p s)}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{s(I + \theta_p s)}{\kappa(I + \theta_m s)}}\right) \frac{e^{st}}{s} ds. \quad (4.67)$$

Заметим, что для вычисления интеграла в выражении (4.67) невозможно использовать контур, изображенный на рисунке 4.1, ввиду неинтегрируемой особенности у подынтегральной функции в точке $s = 0$. Однако можно добавить и вычесть в формуле (4.67) решение аналогичной задачи для модели Щелкачёва (ему соответствует $\theta_p = \theta_m = 0$). Разность выражения (4.67) и решения в модели Щелкачёва приведёт к тому, что подынтегральная функция становится интегрируемой в точке $s = 0$ (вследствие принципа затухающей памяти). Тогда можно воспользоваться контуром, изображенным на рисунке, и представить решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} p(x, t) = & -\frac{\mu Q_0}{k B} \left\{ 2\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right\} + \\ & + \frac{\mu Q_0}{\pi k B} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\frac{\kappa(I - \theta_m \xi)}{\xi(I - \theta_p \xi)}} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi(I - \theta_p \xi)}{\kappa(I - \theta_m \xi)}}\right) - \sqrt{\frac{\kappa}{\xi}} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa}}\right) \right\} \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi - \\ & - \int_{1/\theta_m}^{1/\theta_p} \sqrt{\frac{\kappa}{\xi}} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa}}\right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Здесь в последнем интеграле пределы интегрирования даны для случая $\theta_m > \theta_p$.

Перейдём теперь к определению забойного давления $p_\Gamma(t)$. Очевидно, изображение по Л-К забойного давления запишется так:

$$p^*(0, s) = p_\Gamma^*(s) = -\frac{\mu Q_0}{k B} \sqrt{\frac{\kappa(I + \theta_m s)}{s(I + \theta_p s)}}. \quad (4.69)$$

Оригинал выражения (4.69) определим по формулам (20.51), (22.84) и (22.41) справочника [6]; он равен

$$p_{\Gamma}(t) = -\frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\kappa \theta_m} \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{t-t'}{\theta_p} \right) \exp \left(-\frac{t'}{2\theta_m} \right) \times \\ \times \left\{ \left(1 + \frac{t'}{\theta_m} \right) I_0 \left(\frac{t'}{2\theta_m} \right) + \frac{t'}{\theta_m} I_1 \left(\frac{t'}{2\theta_m} \right) \right\} dt'; \quad (4.70)$$

причём $p_{\Gamma}(0) = 0$.

п. 14.4. Решение задачи В. При решении задачи В применим тот же приём, что и в п. 12.4, 13.4. Для этого представим граничное условие (4.5) в форме (4.15) и введём в рассмотрение комплексную функцию $p^*(x, t)$ такую, что $\operatorname{Re} p^*(x, t) = p(x, t)$. Далее потребуем, чтобы $p^*(x, t)$ удовлетворяла уравнению (4.56) и граничным условиям (4.16). Представляя затем $p^*(x, t)$ в форме (4.17) и подставляя её в уравнение (4.56), получим, что $P(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{\omega}{\kappa} \sqrt{\frac{1 + \theta_p^2 \omega^2}{1 + \theta_m^2 \omega^2}} \exp \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{1 + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\} P(x) = 0 \quad (4.71)$$

и граничным условиями (4.19). Легко убедиться в том, что решение краевой задачи (4.71), (4.19) запишется так:

$$P(x) = p_{\Gamma 1} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \theta_p^2 \omega^2}{1 + \theta_m^2 \omega^2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{1 + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -ix \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \theta_p^2 \omega^2}{1 + \theta_m^2 \omega^2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{1 + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\}. \quad (4.72)$$

Тогда

$$p^*(x, t) = P(x) \exp \{ i(\omega t - \delta) \} = \\ = p_{\Gamma 1} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \theta_p^2 \omega^2}{1 + \theta_m^2 \omega^2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{1 + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \left(\omega t - \delta - x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \theta_p^2 \omega^2}{1 + \theta_m^2 \omega^2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{1 + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right) \right\}. \quad (4.73)$$

Итак, решение исходной задачи имеет вид

$$p(x, t) = p_{\Gamma I} \exp \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{I + \theta_p^2 \omega^2}{I + \theta_m^2 \omega^2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{I + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\} \times \quad (4.74)$$

$$\times \cos \left\{ \omega t - \delta - x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{I + \theta_p^2 \omega^2}{I + \theta_m^2 \omega^2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{I + \theta_m \theta_p \omega^2} \right) \right\}.$$

Очевидно, скорость распространения волны давления равна

$$V_{\Phi} = \frac{\sqrt{\kappa \omega} \sqrt[4]{I + \theta_m^2 \omega^2}}{\sqrt[4]{I + \theta_p^2 \omega^2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{I + \theta_m \theta_p \omega^2} \right)}, \quad (4.75)$$

при этом

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{\Phi} = \infty. \quad (4.76)$$

И наконец, дебит галереи определяется соотношением

$$Q(t) = \frac{k}{\mu} B \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{k}{\mu} B p_{\Gamma I} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{I + \theta_p^2 \omega^2}{I + \theta_m^2 \omega^2}} \times \quad (4.77)$$

$$\times \cos \left(\omega t - \delta - \frac{3}{4} \pi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\theta_m - \theta_p) \omega}{I + \theta_m \theta_p \omega^2} \right).$$

§ 15. Модель с неравновесным законом фильтрации

п. 15.1. В пределах физической постановки § 12 будем считать, что в упругой пористой среде фильтрация осуществляется по неравновесному закону. Тогда течение жидкости в условиях этой модели характеризуется ядрами:

$$F(t) = \left\{ t + (\tau_w - \tau_p) \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_p} \right) \right) \right\} \chi(t), \quad \Phi(t) = \chi(t).$$

Очевидно, $F(0) = 0$, $\Phi(0) = 1$; тогда $V_0 = \infty$, и тем самым вся рассматриваемая область мгновенно охватывается фильтрацией. Во всей области давление удовлетворяет уравнению вида

$$\kappa \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \kappa \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) dt' = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.78)$$

или ему эквивалентному уравнению

$$\kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(p + \tau_w \frac{\partial p}{\partial t} \right). \quad (4.79)$$

Далее, так как $F^*(s) = \frac{I + \tau_w s}{s(I + \tau_p s)}$, $\Phi^*(s) = I$, то

$$L^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa}{s} \frac{I + \tau_p s}{I + \tau_w s}}, \quad G^*(s) = B \frac{k}{\mu} \sqrt{\frac{s}{\kappa} \frac{I + \tau_p s}{I + \tau_w s}}; \quad \text{таким образом} \quad L(0) = 0,$$

$G(0) = \infty$. Следовательно, в задачах А и Б, во-первых, корректно допускать рассогласование граничных условий с начальными данными, во-вторых, если на галерее при $t = 0$ скачком $[p]_0 \neq 0, \infty$ изменяется давление (задача А), то $[w]_0 = \infty$; если же скачком $[w]_0 = 0, \infty$ меняется скорость фильтрации (задача Б), то $[p]_0 = 0$. Очевидно, такое фильтрационное течение относится к I^{my} классу.

Итак, имеют место следующие математические постановки краевых задач: найти в области $0 < x < \infty$ решение уравнения (4.78), удовлетворяющее начальным данным (4.2) и граничным условиями (4.3) для задачи А и

$$\frac{\mu Q_0}{kB} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} + \left(I - \frac{\tau_p}{\tau_m} \right) \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) \frac{dt'}{\tau_w} \quad (4.80)$$

для задачи Б, а также определить решение уравнения (4.79) без учёта начальных данных при выполнении граничных условий (4.5) в случае задачи В.

п. 15.2. В результате применения процедур, аналогичных изложенным в п. 14.2 при решении задачи А, в п. 14.3 при решении задачи Б и в п. 14.4 при решении задачи В, окончательно получим.

Задача А.

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \left\{ I - \frac{I}{\pi} \int_0^\infty \sin \left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa} \frac{I - \tau_w \xi}{I - \tau_p \xi}} \right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi \right\}, \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} Q(t) = & -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa \tau_w}} \frac{d}{dt} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{2\tau_w} \right) I_0 \left(\frac{t-t'}{2\tau_w} \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\tau_p}{\pi t'} \exp \left(-\frac{t'}{\tau_p} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{t'}{\tau_p} \right) \right\} dt'; \end{aligned} \quad (4.82)$$

при этом $Q(0) = \infty$.

Задача Б.

$$\begin{aligned}
 p(x, t) = & -\frac{\mu Q_0}{kB} \left\{ 2\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right\} + \\
 & + \frac{\mu Q_0}{kB} \int_0^\infty \left\{ \sqrt{\frac{\kappa}{\xi}} \frac{1 - \tau_w \xi}{1 - \tau_p \xi} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa}} \frac{1 - \tau_w \xi}{1 - \tau_p \xi}\right) - \sqrt{\frac{\kappa}{\xi}} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa}}\right) \right\} \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi - \\
 & - \int_{1/\tau_p}^{1/\tau_w} \sqrt{\frac{\kappa}{\xi}} \cos\left(x \sqrt{\frac{\xi}{\kappa}}\right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi;
 \end{aligned} \quad (4.83)$$

здесь в последнем интеграле пределы интегрирования приведены для случая $\tau_p > \tau_w$.

$$\begin{aligned}
 p(0, t) = p_{\Gamma}(t) = & -\frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau_p}} \times \\
 & \times \frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{\frac{\tau_w}{\pi(t-t')}} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \left\{ I_0\left(\frac{t'}{2\tau_p}\right) + I_1\left(\frac{t'}{2\tau_p}\right) \right\} t' \exp\left(-\frac{t'}{2\tau_p}\right) dt' - \\
 & - \frac{\mu Q_0}{kB} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau_p}} \times \\
 & \times \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t-t'}{\tau_w}}\right) \left\{ I_0\left(\frac{t'}{2\tau_p}\right) + I_1\left(\frac{t'}{2\tau_p}\right) \right\} t' \exp\left(-\frac{t'}{2\tau_p}\right) dt';
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

причём $p_{\Gamma}(0) = 0$.

Задача В.

$$\begin{aligned}
 p(x, t) = & \\
 = p_{\Gamma l} \exp & \left\{ -x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_w^2 \omega^2}{1 + \tau_p^2 \omega^2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\tau_p - \tau_w)\omega}{1 + \tau_p \tau_w \omega^2}\right) \right\} \times \\
 & \times \cos\left\{ \omega t - \delta - x \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt[4]{\frac{1 + \tau_w^2 \omega^2}{1 + \tau_p^2 \omega^2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\tau_p - \tau_w)\omega}{1 + \tau_p \tau_w \omega^2}\right) \right\},
 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$V_{\Phi} = \frac{\sqrt{\kappa \omega} \sqrt[4]{1 + \tau_p^2 \omega^2}}{\sqrt[4]{1 + \tau_w^2 \omega^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(\tau_p - \tau_w)\omega}{1 + \tau_p \tau_w \omega^2}\right)}, \quad (4.86)$$

$$Q(t) = B \frac{k}{\mu} p_{ГЛ} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \tau_p^2 \omega^2}{1 + \tau_w^2 \omega^2}} \times \quad (4.87)$$

$$\times \cos \left(\omega t - \delta - \frac{3}{4} \pi - \frac{1}{2} \arctg \frac{(\tau_p - \tau_w) \omega}{1 + \tau_p \tau_w \omega^2} \right).$$

§ 16. Применение метода разделения времени по процессам [14]

п. 16.1. Метод разделения времени по процессам широко используется в различных разделах прикладного естествознания. Суть его состоит в следующем. Пусть надлежит исследовать поведение во времени некоторого процесса, состоящего из двух нестационарных подпроцессов. Один из них протекает во времени существенно быстрее, нежели другой. Это обстоятельство является предпосылкой для введения двух времён: короткого и длинного, причём короткое время относится к быстрому подпроцессу, а длинное – к медленному. Далее, оба подпроцесса изучаются автономно (независимо друг от друга), а затем в окончательном результате возвращаются к единому времени. Аналогичная ситуация имеет место в задачах неравновесной фильтрации.

Нахождение точных аналитических решений задач неравновесной фильтрации сопряжено с большими математическими трудностями; таких решений на настоящее время получено единицы. Поэтому использование метода разделения времени по процессам может в некоторой степени компенсировать отсутствие точных решений разнообразных задач нестационарной фильтрации, протекающих в неравновесных условиях и имеющих прикладное значение. Ниже на двух примерах [14], имеющих точное решение, проиллюстрируем применение метода разделения времени по процессам и покажем весьма удовлетворительную точность таких решений, что может служить обоснованием применения этого метода.

п. 16.2. Рассмотрим сначала нестационарное течение однородной капельно-сжимаемой жидкости в полубесконечном ($0 < x < \infty$) однородном упругоёмком пласте. Пусть пласт первоначально невозмущен ($p(x, 0) = p_0 = 0$). В начальный момент времени ($t = 0$) на левом конце пласта начинает работать галерея с постоянным забойным давлением ($p(0, t) = p_{Г0}$, задача А); на бесконечности пласт остаётся невозмущённым ($p(\infty, t) = 0$). Фильтрация в пласте осуществляется по линейному закону Дарси $w = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$, а состояние для релаксационно-сжимаемого пласта определяется соотношением

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta \frac{\theta_p}{\theta_m} p + \rho_0\beta \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m} \right) \int_0^t p \exp \left(-\frac{t-t'}{\theta_m} \right) \frac{dt'}{\theta_m}. \quad (4.88)$$

Тогда давление в пласте будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\kappa \theta_m \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) \int_0^t p \exp\left(-\frac{t-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} = \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) p + \theta_p \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.55)$$

Точное решение сформулированной выше задачи запишется так:

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left(x \sqrt{\frac{\xi(1-\theta_p \xi)}{\kappa(1-\theta_m \xi)}}\right) \frac{e^{-\xi t}}{\xi} d\xi \right\}. \quad (4.63)$$

При этом дебит галереи равен

$$Q(t) = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa \theta_p}} \times \\ \times \frac{d}{dt} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{2\theta_m}\right) I_0\left(\frac{t-t'}{2\theta_m}\right) \left\{ \sqrt{\frac{\theta_p}{\pi t'}} \exp\left(-\frac{t'}{\theta_p}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{t'}{\theta_p}\right) \right\} dt'. \quad (4.65)$$

п. 16.3. Для получения приближённого решения рассматриваемой задачи по методу разделения времени по процессам в уравнение состояния (4.88) введём короткое время θ_l , характеризующее запаздывание в изменении количества жидкости в элементарном объёме по отношению изменения давления в нём во времени t , т.е. приближённо представим соотношение (4.88) следующим образом:

$$m\rho - m_0\rho_0 \cong \rho_0\beta \left\{ \frac{\theta_p}{\theta_m} p + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) p \int_0^{\theta_l} \exp\left(-\frac{\theta_l-t'}{\theta_m}\right) \frac{dt'}{\theta_m} \right\} = \\ = \rho_0\beta \left\{ \frac{\theta_p}{\theta_m} p + \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) p \exp\left(-\frac{\theta_l}{\theta_m}\right) \left(\exp\left(\frac{\theta_l}{\theta_m}\right) - 1 \right) \right\};$$

или

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta(\theta_l)p, \quad (4.89)$$

где

$$\beta(\theta_l) = \beta \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_m}\right) \exp\left(-\frac{\theta_l}{\theta_m}\right) \right\}. \quad (4.90)$$

Тогда, исключая из системы уравнений

$$w = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.91)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0 \quad (4.92)$$

и (4.89) все искомые величины, кроме давления, получим уравнение пьезопроводности

$$\kappa(\theta_1) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.93)$$

в котором коэффициент пьезопроводности является функцией параметра θ_1 (короткого времени):

$$\kappa(\theta_1) = \frac{k}{1 - (1 - \theta_p / \theta_m) \exp(-\theta_1 / \theta_m)}. \quad (4.94)$$

Решением задачи (4.93), (4.2), (4.3) будет соотношение

$$p(x, t) = p_{r0} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(\theta_1)t}} \right); \quad (4.95)$$

при этом дебит галереи будет равен

$$Q(t) = -\frac{k}{\mu} B \frac{p_{r0}}{\sqrt{\pi \kappa(\theta_1)t}}. \quad (4.96)$$

Для нахождения приближённого решения задачи (4.55), (4.2), (4.3), а также определения соответствующего дебита галереи надлежит в формулах (4.95) и (4.96) вернуться к единому времени t , положив в них $\theta_1 = t$; в результате чего получим

$$p(x, t) = p_{r0} \operatorname{erfc} \left(x \frac{\sqrt{1 - (1 - \theta_p / \theta_m) \exp(-t / \theta_m)}}{2\sqrt{\kappa t}} \right), \quad (4.97)$$

$$Q(t) = -B \frac{k}{\mu} p_{r0} \frac{\sqrt{1 - (1 - \theta_p / \theta_m) \exp(-t / \theta_m)}}{\sqrt{\pi \kappa t}}. \quad (4.98)$$

Для оценки точности приближённого метода проводилось сопоставление изменения во времени дебитов галереи, подсчитанных по формулам (4.65) (точное решение) и (4.98) (приближённое решение), при конкретных параметрах, полученных в промысловых экспериментах: $\theta_m = 600$ с, $\theta_p = 400$ с, $\kappa = 10000$ см²/с. Графики безразмерных дебитов $(\mu\sqrt{\pi\kappa}Q(t)/Bk(p_0 - p_{r0}))$ совпали с точностью до толщины линий.

п. 16.4. Перейдём теперь к рассмотрению задачи А, когда фильтрация капельно-сжимаемой жидкости в однородном слабосжимаемом пласте осуществляется по простейшему неравновесному закону вида

$$w = -\frac{k}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x} \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) dt'. \quad (4.99)$$

В этом случае давление удовлетворяет уравнению (4.78). При этом решение его описывается соотношением (4.81), а дебит галереи характеризуется формулой (4.82).

п. 16.5. Для получения приближённого решения задачи (4.78), (4.2), (4.3) по методу разделения времени по процессам введём короткое время θ_2 , отвечающее за запаздывание скорости фильтрации по отношению к изменению градиента давления во времени t . В соответствии с этим соотношение (4.99) приближенно представим следующим образом:

$$\begin{aligned} w &\equiv -\frac{k \tau_p}{\mu \tau_w} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^{\theta_2} \exp\left(-\frac{\theta_2 - t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \\ &= -\frac{k \tau_p}{\mu \tau_w} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \frac{\partial p}{\partial x} \exp\left(-\frac{\theta_2}{\tau_w}\right) \left(\exp\left(\frac{\theta_2}{\tau_w} - 1\right)\right) = \\ &= -\frac{k(\theta_2)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.100)$$

где

$$k(\theta_2) = k \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \exp\left(-\frac{\theta_2}{\tau_w}\right) \right\}. \quad (4.101)$$

Тогда, исключая из системы (4.100), (4.92) и

$$m\rho - m_0\rho_0 = \rho_0\beta p \quad (4.102)$$

все искомые величины, кроме давления, получим уравнение пьезопроводности

$$\kappa(\theta_2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4.103)$$

в котором коэффициент пьезопроводности является функцией параметра θ_2 (короткого времени):

$$\kappa(\theta_2) = \kappa \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \exp\left(-\theta_2/\tau_w\right) \right\}. \quad (4.104)$$

Решение задачи (4.103), (4.2), (4.3) запишется так:

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(\theta_2)t}} \right); \quad (4.105)$$

при этом дебит галереи равен

$$Q(t) = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa(\theta_2)t}}. \quad (4.106)$$

Для определения приближённого решения задачи (4.78), (4.2), (4.3) вернёмся к единому времени, положив в соотношениях (4.105) и (4.106) $\theta_2 = t$; в результате чего получим:

$$p(x, t) = p_{\Gamma 0} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \exp(-t/\tau_w) \right\} t}} \right), \quad (4.107)$$

$$Q(t) = -B \frac{k}{\mu} \frac{p_{\Gamma 0}}{\sqrt{\kappa t}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \exp(-t/\tau_w)}. \quad (4.108)$$

Для оценки точности приближенного метода проводилось аналогичное предыдущему сопоставление безразмерных дебитов, подсчитанных по формулам (4.82) и (4.108); графики дебитов также совпали с точностью до толщины линий.

ЧАСТЬ II

ПЬЕЗОМЕТРИЯ ОКРЕСТНОСТИ СКВАЖИНЫ

ГЛАВА 5. Кривая восстановления давления в основных моделях фильтрации [9]

Наиболее распространённым способом определения фильтрационных параметров (ФП) окрестности скважины является метод, основанный на снятии кривой восстановления давления (КВД) на скважине и последующей обработке её по определённой методике. Суть этого способа состоит в следующем.

Скважина значительное время до её остановки работает с постоянными дебитом Q_0 и забойным давлением p_{c0} , и, таким образом, в её окрестности осуществляется установившаяся фильтрация. При этом распределение давления в окрестности скважины может быть охарактеризовано равенством

$$p(r, t) \equiv p_y(r) = p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} \quad (t < 0). \quad (5.1)$$

В некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t=0$), работа скважины мгновенно прекращается и записывается изменение во времени восстановления забойного давления $p_c(t) = p(r_c, t)$, т.е. производится слежение за реакцией окрестности скважины на изменение режима работы последней. Если в остановленную скважину продолжается приток жидкости после её остановки, то его изменение во времени также фиксируется. Затем полученная таким способом кривая восстановления давления (КВД) перестраивается в полулогарифмических координатах ($\xi = \ln t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q$), и по известным формулам, соответствующим выбранной модели фильтрации, определяются фильтрационные параметры (ФП) окрестности скважины: гидропроводность ($\sigma = kh/\mu$), пьезопроводность ($\kappa = k/\mu\beta$) и другие, если таковые предусмотрены моделью фильтрации.

Очевидно, вид КВД в реальном времени, а также перестроенной в полулогарифмических координатах существенно зависит от строения насыщенного коллектора в окрестности исследуемой скважины, его ФП, а также от условий протекания процесса перераспределения давления. Поэтому целесообразно рассмотреть вид КВД в той или иной модели фильтрации, отметить её характерные стороны, высказать рекомендации по выбору модели фильтрации для обработки экспериментальной КВД и получить инженерные (расчётные) формулы для определения ФП окрестности

скважины, соответствующие выбранной модели фильтрации, адекватной реальному процессу восстановления давления.

§ 17. КВД в модели классического упругого режима (модель Щелкачёва)

п. 17.1. Вначале рассмотрим случай, когда притоком жидкости в остановленную скважину можно пренебречь ввиду его относительной малости. Тогда задача об определении давления сводится к нахождению в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решения уравнения пьезопроводности

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5.2)$$

удовлетворяющего условиям: начальному

$$p(r, 0) = p_y(r) = p_{c0} + \frac{\mu Q_0 \ln r}{2\pi kh r_c} \quad (5.3)$$

и граничным

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} = 0, \quad \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\infty} = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh}. \quad (5.4)$$

Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$p(r, t) = p_{c0} + \frac{\mu Q_0 \ln r}{2\pi kh r_c} + P(r, t). \quad (5.5)$$

Очевидно, функция $P(r, t)$ будет удовлетворять тому же уравнению (5.2) и следующим условиям: начальному

$$P(r, 0) = 0 \quad (5.6)$$

и граничным

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh}, \quad \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (5.7)$$

Тогда, если будет найдена функция $P(r, t)$, то, положив в соотношении (5.5) $r = r_c$, определим изменение во времени забойного давления на скважине:

$$p_c(t) = p(r_c, t) = p_{c0} + P(r_c, t);$$

откуда приращение забойного давления равно

$$p(r_c, t) - p_{c0} = \Delta p_c(t) = P(r_c, t). \quad (5.8)$$

При решении задачи (5.2), (5.6), (5.7) воспользуемся преобразованием Л-К; в результате его применения к уравнению (5.2) и граничным условиям (5.7) при учёте нулевых начальных данных (5.6) получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^*}{dr} \right) - \frac{P^*(r, s)}{R^{*2}(s)} = 0, \quad (5.9)$$

$$\left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh}, \quad \left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0, \quad (5.10)$$

где

$$R^*(s) = \sqrt{\kappa/s}. \quad (5.11)$$

Очевидно, величина $R^*(s)$ имеет размерность длины; в дальнейшем будем её называть изображением некоторого характерного радиуса $R(t)$.

Легко убедиться в том, что решением задачи (5.9), (5.10) будет соотношение

$$P^*(r, s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{K_0(z)}{z_c K_1(z_c)}, \quad (5.12)$$

где

$$z = r/R^*(s) = r\sqrt{s/\kappa}, \quad z_c = r_c/R^*(s). \quad (5.13)$$

Полагая в равенстве (5.12) $r = r_c$ ($z = z_c$), получим изображение приращення забойного давления $\Delta p_c^*(s)$:

$$\Delta p_c^*(s) = P^*(r_c, s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{K_0(z_c)}{z_c K_1(z_c)}. \quad (5.14)$$

Используя теорему Абеля:

$$f^*(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} f^*(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0), \quad (5.15)$$

из выражения (5.14) найдём, что

$$\Delta p(0) = \Delta p_c^*(\infty) = 0, \quad (5.16)$$

т.е. приращение забойного давления не имеет скачка при $t = 0$.

п. 17.2. Произведём теперь оценку аргумента $z_c = r_c \sqrt{s/\kappa}$, входящего в функцию $K_1(z_c)$ равенств (5.12) и (5.14), и покажем, что он весьма мал, т.е. имеет место неравенство

$$z_c = r_c \sqrt{s/\kappa} \ll 1 \quad (5.17)$$

в большинстве случаев, реализуемых на практике.

В самом деле, так как параметр преобразования s и время t связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью ($s \sim 1/t$), то, очевидно, и величина $r_c/\sqrt{\kappa t}$ должна принимать весьма малые значения, т.е. должно реализовываться неравенство

$$\frac{r_c}{\sqrt{\kappa t}} \ll 1 \quad \text{или} \quad t \gg \frac{r_c^2}{\kappa}. \quad (5.18)$$

Действительно, в промышленных условиях КВД начинают снимать (в лучшем случае) по прошествии нескольких первых десятков секунд. Далее, для подавляющего большинства нефтеводосодержащих пластов коэффи-

коэффициент пьезопроводности K имеет величину, превышающую $1000 \text{ см}^2/\text{с}$, а радиус скважины r_c , как правило, порядка 10 см . Тогда из второго выражения неравенства (5.18) имеем

$$t \gg \frac{r_c^2}{K} \cong \frac{100}{1000} = 0,1 \text{ с}.$$

Приведённая оценка указывает на то, что неравенство (5.18) начинает выполняться с весьма малых значений времени ($\sim 10 \text{ сек}$), следовательно, аргумент функции $K_I(z_c)$ удовлетворяет неравенству (5.17); т.е. его можно считать весьма малым. Тогда, воспользовавшись асимптотическим представлением

$$z_c K_I(z_c) \cong 1, \quad (5.19)$$

перепишем соотношения (5.12) и (5.14) соответственно так:

$$P^*(r, s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} K_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{K}} \right), \quad (5.20)$$

$$\Delta p_c^*(s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} K_0 \left(r_c \sqrt{\frac{s}{K}} \right); \quad (5.21)$$

оригиналы этих соотношений соответственно равны

$$P(r, t) = -\frac{\mu Q_0}{4\pi kh} Ei \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \cong -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \left(\frac{\sqrt{\gamma} r}{2\sqrt{\kappa t}} \right), \quad (5.22)$$

$$\Delta p_c(t) = -\frac{\mu Q_0}{4\pi kh} Ei \left(-\frac{r_c^2}{4\kappa t} \right) \cong \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \right); \quad (5.23)$$

здесь $Ei(-z) \cong \ln(\gamma z)$ — асимптотическое представление интегральной показательной функции для аргумента $z \ll 1$, $\gamma = 1,781...$ — постоянная Эйлера.

Замечания. I^0 . Из равенства (5.22) следует, что, начиная с некоторого, весьма малого, промежутка времени ($t_{\min} \sim 10 \text{ с}$), функцию $P(r, t)$ можно трактовать как решение следующей граничной задачи с перемещающейся внешней границей по закону

$$R(t) = \frac{2}{\gamma} R^*(s)_{s=l/\gamma t} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\kappa t}, \quad (5.24)$$

совпадающей с характерным радиусом $R(t)$, а именно

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right) = 0, \quad (5.25)$$

$$\left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh}, \quad \bar{P}(r, t)_{r=R(t)} = 0; \quad (5.26)$$

здесь время t выступает в роли параметра. Таким образом, внутри области $r_c < r < R(t)$ осуществляется непрерывная смена стационарных состояний, а весь нестационарный процесс связан с перемещением во времени внешней границы по определённому закону (5.24).

2°. При решении краевых задач с привлечением преобразования Л-К часто возникают большие затруднения в нахождении оригинала по его изображению. Эту проблему в значительной степени сняли Шепери и Тер-Хаар [7] простым и очень эффективным способом приближённого определения оригинала по его изображению, особенно когда изображения являются логарифмическими функциями параметра преобразования. Суть способа состоит в следующем: в изображении параметр преобразования s надлежит заменить на отношение a/t , где a — некоторая постоянная величина, и тем самым приближённое выражение оригинала будет найдено, т.е. $f(t) \cong f^*(s)_{s=a/t}$; для логарифмических функций $a = 1/\gamma$.

Проиллюстрируем использование способа Шепери и Тер-Хаара на нахождении приближённых оригиналов соотношений (5.20) и (5.21). Так как аргумент функции $K_0(z)$ в окрестности скважины мал, то, воспользовавшись её асимптотическим представлением для малых значений аргумента

$$K_0(z) \cong -\ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right), \quad (5.27)$$

запишем формулы (5.20) и (5.21) следующим образом:

$$P^*(r, s) \cong -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\gamma r \sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa}}\right), \quad (5.28)$$

$$\Delta p^*(s) \cong -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\gamma r_c \sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa}}\right). \quad (5.29)$$

Заменяя теперь (согласно методу Шепери и Тер-Хаара) в этих изображениях параметр преобразования s на отношение $1/\gamma t$, получим в точности выражения (5.22) и (5.23) соответственно.

п. 17.3. Подставляя равенство (5.22) в соотношение (5.5), получим распределение давления в окрестности скважины, а именно

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \left(\frac{r \sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = \\ &= p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{r_c \sqrt{\lambda}} \right) = p_{c0} + \Delta p_c(t). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Из выражения (5.30) следует, что давление в интервале $r_c \leq r \leq R(t)$ в каждый момент времени t не зависит от r и равняется давлению на забое

скважины, т.е. в этой окрестности скважины ($r_c \leq r \leq R(t)$ — зоны влияния остановленной скважины) происходит непрерывная смена стационарных состояний, соответствующих изменению давления на забое скважины (рис. 5.1). Очевидно, такой процесс будет продолжаться до момента

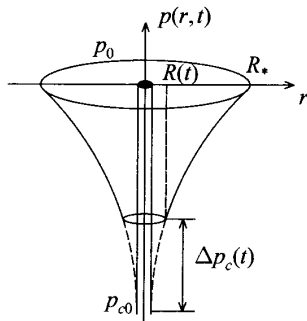


Рис. 5.1

времени $t = t_*$, отвечающего выходу внешней границы расширяющейся зоны влияния $R(t)$ на внешнюю границу местной воронки депрессии радиуса R_* с забойным давлением на ней, равным местному пластовому p_0 . Учитывая сказанное выше, нетрудно получить следующее соотношение:

$$p_0 - p_{c0} = \Delta p_{c0} = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{R_*}{r_c} = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t_*}}{r_c \sqrt{\gamma}} \right); \quad (5.31)$$

откуда легко определяется радиус внешней границы воронки депрессии

$$R_* = r_c \exp \left(\frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta p_{c0}}{Q_0} \right) \quad (5.32)$$

и время выхода на неё внешней границы зоны влияния остановленной скважины

$$t_* = \frac{R_*^2 \gamma}{4\kappa}. \quad (5.33)$$

График изменения забойного давления $p_c(t) = p_{c0} + \Delta p_c(t)$ во времени, а следовательно, и в любой точке интервала $r_c \leq r \leq R(t)$, начиная с момента времени порядка t_{min} , схематически изображён на рисунке 5.2. На графике также отмечено время $t = t_*$, при котором забойное давление принимает значение, равное местному пластовому давлению p_0 , и, таким образом, дальнейшее снятие КВД теряет смысл.

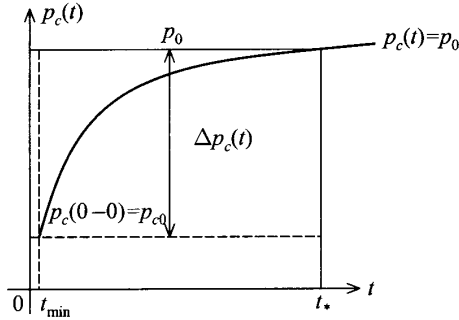


Рис. 5.2

п. 17.4. Положим формулу (5.23) в основу обработки экспериментальной КВД, переписав её в виде:

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\sigma} \ln\left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2}\right) = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg\left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t\right). \quad (5.34)$$

Очевидно, зависимость (5.34) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$ графически представляет собой прямую линию, имеющую наклон к оси абсцисс $i^0 = \lg \alpha^0 = \ln 10 / 4\pi\sigma$, и отсекаемый на этой оси отрезок, равный

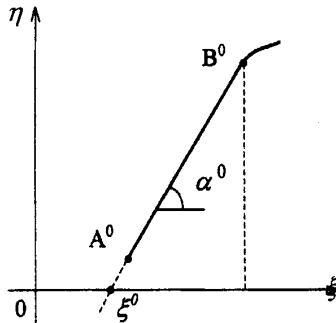


Рис. 5.3

$\xi^0 = \lg t^0 = \lg(\gamma r_c^2 / 4\kappa)$ (рис. 5.3). На рисунке 5.3 также отмечено время $t_* = 10^{\xi^*}$, после которого прямолинейная зависимость КВД, перестроенной в полулогарифмических координатах, нарушается. Это нарушение связано либо с выходом восстанавливающегося забойного давления на значение, равное местному пластовому давлению p_0 , т.е. переменная граница зоны влияния скважины вышла на границу местной воронки депрессии, либо на изменение забойного давления начинают оказывать заметное влияние соседние работающие скважины.

Методика обработки экспериментальной КВД следующая. Сначала КВД перестраивается в координатах $\xi = lgt$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$; затем вычерчивается соответствующий график КВД в этих координатах; и наконец, по наклону i^0 прямолинейного участка графика и отсекаемому им отрезку ξ^0 на оси абсцисс определяются фильтрационные параметры (ФП) окрестности скважины:

$$\sigma = \frac{kh}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \quad \frac{\kappa}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}. \quad (5.35)$$

Наряду с этим по отрезку ξ_* можно определить время t_* , а уже по нему найти и предельный радиус зоны влияния скважины R_* :

$$t_* = 10^{\xi_*}, \quad R_* = \frac{2\sqrt{\kappa t_*}}{\sqrt{\gamma}} = r_c \sqrt{10^{(\xi_* - \xi^0)}}. \quad (5.36)$$

Замечание. В дальнейшем радиус местной воронки депрессии R_* будет определяться формулой (5.36), и, таким образом, его нахождение по результатам обработки последующих КВД будет опущено.

п. 17.5. Перейдём теперь к рассмотрению случая, когда притоком жидкости в скважину после её остановки пренебречь нельзя. При этом будем предполагать, что приток жидкости в скважину $Q(t)$ ($t > 0$) монотонно и медленно уменьшается со временем до нуля, причём

$$Q = Q(t), \quad Q(0+0) \leq Q(0-0) = Q_0, \quad Q(\infty) = 0, \quad t > 0. \quad (5.37)$$

Расход в бесконечно удалённой точке остаётся прежним, равным Q_0 . Требуется определить распределение давления в окрестности скважины $p(r, t)$, включая и его изменение во времени на забое скважины $p(r_c, t) = p_c(t)$ при $t > 0$.

Вышесформулированная задача сводится к определению в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решения уравнения (5.2) при начальном (5.3) и следующих граничных условиях:

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \frac{\mu Q(t)}{2\pi kh}, \quad \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\infty} = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh}. \quad (5.38)$$

Введём, как и прежде, функцию $P(r, t)$ соотношением (5.5); она, очевидно, будет удовлетворять уравнению (5.2), нулевому начальному условию

$$P(r, 0+0) = 0 \quad (5.6)$$

и следующим граничным:

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu}{2\pi kh} [Q(t) - Q_0] = -\frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh}, \quad (5.39)$$

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0, \quad (5.40)$$

где $\bar{Q}(t) = Q_0 - Q(t)$. При этом приращение забойного давления на скважине будет определяться равенством (5.8).

При решении задачи (5.2), (5.6), (5.39), (5.40) применим преобразование Л-К к уравнению (5.2) и граничным условиям (5.39), (5.40) и учтём начальное условие (5.6); в результате этого получим, что изображение $P^*(r, s)$ будет удовлетворять уравнению (5.9) и следующим граничным условиям:

$$\left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh}, \quad \left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0, \quad (5.41)$$

где $\bar{Q}^*(s)$ — изображение по Л-К функции $\bar{Q}(t)$. Легко убедиться в том, что соотношение

$$P^*(r, s) = \frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} \frac{K_0(z)}{z_c K_1(z_c)} \quad (5.42)$$

является решением задачи (5.9), (5.41). Далее, полагая в равенстве (5.42) $r = r_c$ ($z = z_c$), найдём изображение приращения забойного давления $\Delta p_c^*(s)$:

$$\Delta p_c^*(s) = P^*(r_c, s) = \frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} \frac{K_0(z_c)}{z_c K_1(z_c)}; \quad (5.43)$$

откуда по теореме Абеля получим равенство (5.16).

Так как в выражениях (5.42) и (5.43) аргументы функций $K_0(z)$ и $K_1(z_c)$ (в окрестности скважины) весьма малы (их оценка проведена в п. 17.1), то это обстоятельство даёт основание для использования асимптотических представлений (5.27) и (5.19), и, таким образом, эти равенства можно соответственно записать в форме

$$P^*(r, s) = \frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} K_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) \cong -\frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{\gamma r \sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa}} \right), \quad (5.44)$$

$$\Delta p_c^*(s) = \frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} K_0 \left(r_c \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right) \cong -\frac{\mu \bar{Q}^*(s)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{\gamma r_c \sqrt{s}}{2\sqrt{\kappa}} \right). \quad (5.45)$$

Воспользовавшись теперь представлением оригиналов от произведения их изображений в виде соответствующих свёрток (см., например, [10]), получим

$$\begin{aligned} P(r, t) &= \frac{\mu}{2\pi kh} \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{Q}(t-t') \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t'}}{r\sqrt{\gamma}} \right) dt' = \\ &= \frac{\mu \bar{Q}(0+0)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{r\sqrt{\gamma}} \right) + \int_0^t \frac{d\bar{Q}(t-t')}{d(t-t')} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t'}}{r\sqrt{\gamma}} \right) dt', \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_c(t) &= \frac{\mu}{2\pi kh} \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{Q}(t-t') \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t'}}{r_c\sqrt{\gamma}} \right) dt' = \\ &= \frac{\mu \bar{Q}(0+0)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{r_c\sqrt{\gamma}} \right) + \int_0^t \frac{d\bar{Q}(t-t')}{d(t-t')} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t'}}{r_c\sqrt{\gamma}} \right) dt'. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Отметим следующее. Основываясь на замечании 2⁰ п.17.1, нетрудно найти также приближённое представление функции $P(r, t)$ как решение граничной задачи для уравнения (5.25), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left(r \frac{dP}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh}, \quad \bar{P}(r, t)_{r=R(t)} = 0; \quad (5.48)$$

здесь характерный радиус $R(t)$ определяется равенством (5.24), а время t выступает в роли параметра. Решение задачи (5.25), (5.48), очевидно, представимо в форме

$$\bar{P}(r, t) = -\frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} = \frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\gamma} r} \right); \quad (5.49)$$

откуда имеем

$$\Delta p_c(t) \equiv \bar{P}(r_c, t) = \frac{\mu \bar{Q}(t)}{4\pi kh} \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \right). \quad (5.50)$$

Выделим также асимптотические представления $\Delta p_c(t)$, определяемые равенством (5.47), соответственно для малых ($t \sim 0+0$) и больших ($t \sim \infty$) значений времени. Так как функция $\bar{Q}(t) = Q_0 - Q(t)$ монотонно и медленно возрастает от величины $\bar{Q}(0+0) = Q_0 - Q(0+0)$ до $\bar{Q}(\infty) = Q_0$, то асимптотические выражения равенства (5.47) можно записать так: при $t \sim 0+0$

$$\Delta p_c(t) = \frac{\mu}{4\pi kh} [Q_0 - Q(0+0)] \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \right), \quad (5.51)$$

при $t \sim \infty$

$$\Delta p_c(t) = \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \right). \quad (5.52)$$

Очевидно, такие же асимптотические представления имеет и соотношение (5.50).

Подставляя теперь выражение (5.49) в формулу (5.5), найдём равенство, приближенно характеризующее поведение давления в окрестности скважины ($r_c \leq r \leq R(t)$):

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_{c0} + \ln \frac{r}{r_c} + \frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{r\sqrt{\gamma}} \right) = \\ &= p_{c0} + \Delta p_c(t) + \frac{\mu \bar{Q}(t)}{2\pi kh} \ln \left(\frac{r}{r_c} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Соотношение (5.53) при отсутствии притока жидкости в остановленную скважину ($Q(t) = 0$) совпадает с формулой (5.30).

Анализ равенств (5.44) и (5.46), характеризующих поведение во времени давления на самой скважине и в её окрестности $r_c \leq r \leq R(t)$, приводит к следующему. Во-первых, забойное давление $p_c(t)$ в моменты времени, близкие к $t = 0 + 0$, изменяется очень резко, почти скачкообразно, на величину, пропорциональную разности дебитов скважины до и после её остановки, а затем качественно ведёт себя также, как изображено на рисунке 5.2. Во-вторых, в окрестности скважины происходит непрерывная смена распределения давления по логарифмическому закону, обусловленному в каждый данный момент времени притоком жидкости в скважину и соответствующим забойным давлением; причём с ростом времени давление в окрестности скважины выполаживается и приближается к текущему забойному давлению.

п. 17.6. Предполагая, что продолжительность во времени притока жидкости в остановленную скважину значительно меньше, чем весь процесс восстановления забойного давления в ней, то в этом случае возможно использовать метод разделения времени по процессам. Введём короткое время θ , связанное с притоком жидкости в остановленную скважину, т.е. будем считать $Q = Q(\theta)$, и длинное время t , соответствующее процессу восстановления забойного давления в ней.

Тогда задача (5.2), (5.6), (5.39) и (5.40) трансформируется в следующую: найти решение уравнения (5.2), удовлетворяющее начальному условию (5.6) и граничным условиям

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} = - \frac{\mu \bar{Q}(\theta)}{2\pi kh}, \quad (5.54)$$

$$\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (5.40)$$

Решение этой задачи, очевидно, запишется так:

$$P(r, t, \theta) = -\frac{\mu \bar{Q}(\theta)}{4\pi kh} Ei\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \cong -\frac{\mu \bar{Q}(\theta)}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\sqrt{\gamma r}}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (5.55)$$

Возвращаясь теперь к единому времени ($\theta = t$), получим

$$P(r, t) \cong \frac{\mu \bar{Q}(t)}{4\pi kh} \ln\left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\gamma r}}\right) \cong \bar{P}(r, t); \quad (5.49)$$

приращение забойного давления на скважине будет определяться формулой (5.50).

Таким образом, приближённые решения, полученные методами разделения времени по процессам и смены стационарных состояний с переменной внешней границей по закону (5.24), дают тождественные результаты.

п. 17.7. В основу обработки экспериментальной КВД положим соотношение (5.50), предварительно представив его так:

$$\frac{\Delta p_c(t)}{\bar{Q}(t)} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg\left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2}\right). \quad (5.56)$$

Выражение (5.56) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/\bar{Q}(t)$ представляет собой прямолинейную зависимость, аналогичную (5.34); при этом её график идентичен прямой линии, изображенной на рисунке 5.3. Следовательно, обработка экспериментальной КВД полностью совпадает с методикой, изложенной в п. 17.4, а ФП окрестности скважины определяются по формулам (5.35).

Замечание. Если $\bar{Q}(t)$, а следовательно, и $\Delta p_c(t)$ обращаются в нуль при $t = 0+0$, т.е. дебит и забойное давление не имеют скачков при $t = 0$, то в формуле (5.56), согласно правилу Лопиталя, следует заменить отношение

$$\Delta p_c(0+0)/\bar{Q}(0+0) \text{ на отношение } \left(\frac{d\Delta p_c(t)}{dt} / \frac{d\bar{Q}(t)}{dt} \right)_{t=0+0}.$$

п. 17.8. Результаты данного параграфа, относящиеся к фильтрации по модели Щелкачёва, свидетельствуют о следующем. Во-первых, в окрестности скважины после её закрытия независимо от того, осуществляется приток жидкости в скважину или нет, происходит непрерывная смена стационарных состояний. Во-вторых, методики обработки экспериментальных КВД одинаковы как при отсутствии притока жидкости в скважину, так и при его наличии. В-третьих, рабочая формула (5.56), положенная в основу обработки КВД в случае учёта притока жидкости в скважину, легко находится из рабочей формулы (5.34), лежащей в основе обработки КВД при отсутствии притока, простой заменой Q_0 на $\bar{Q}(t) = Q_0 - Q(t)$.

Аналогичная картина будет иметь место и при фильтрации по другим моделям. Поэтому нет необходимости в рассмотрении методик обработки КВД в случае притока жидкости в скважину после её закрытия, а можно лишь ограничиться получением методик обработки КВД при его отсутствии.

п. 17.9. Рассмотрим теперь случай, когда отношение r_c^2/κ таково, что некоторое время, близкое к начальному, соблюдается неравенство

$$t \ll \frac{r_c^2}{\kappa} \quad \text{или} \quad z_c = r_c \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \gg l. \quad (5.57)$$

Тогда, воспользовавшись асимптотическими выражениями для больших значений аргумента z_c функций $K_0(z_c)$ и $K_1(z_c)$, а именно

$$K_0(z_c) \cong K_1(z_c) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z_c}} e^{-z_c}, \quad (5.58)$$

представим соотношение (5.14) так:

$$\Delta p_c^*(s) = P^*(r_c, s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi k h} \frac{1}{z_c} = \frac{\mu Q_0}{2\pi k h} \frac{\sqrt{\kappa}}{r_c} \frac{1}{\sqrt{s}}; \quad (5.59)$$

оригинал выражения (5.59) хорошо известен и равен

$$\Delta p_c(t) = P(r_c, t) = \frac{\mu Q_0}{2\pi k h r_c} \sqrt{\kappa t}. \quad (5.60)$$

В этом случае обработку экспериментальной КВД проведём с использованием формулы (5.60), предварительно преобразовав её к виду

$$(\overline{\Delta p_c(t)})^2 = \left(\frac{\Delta p_c(t)}{\pi \sqrt{\pi Q_0}} \right)^2 = \frac{\kappa}{\sigma^2 r_c^2} t. \quad (5.61)$$

Очевидно, функция $(\overline{\Delta p_c(t)})^2$ представляет собой прямую линию, исходящую из начала координат и имеющую к оси абсцисс наклон $j = tg\theta$, равный $\kappa/\sigma^2 r_c^2$ (рис. 5.4). Таким образом, методика обработки КВД следующая:

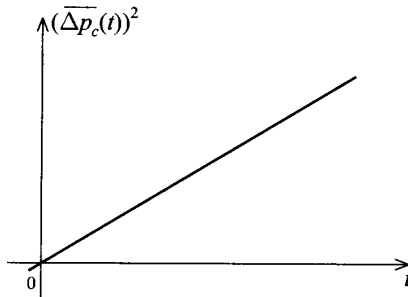


Рис. 5.4

перестраиваем соотношение (5.60) в координатах $(\overline{\Delta p_c(t)})^2$, t ; затем вычерчиваем график функции (5.61) (рис 5.4) и по его наклону j к оси абсцисс определяем комплексный параметр

$$\frac{\kappa}{\sigma^2 r_c^2} = j. \quad (5.62)$$

К сожалению, разделить этот комплекс на два привычных параметра κ/r_c^2 и σ в данном случае не удаётся.

Замечания. 1^0 . Нетрудно показать, что такое же поведение при $r = r_c$ будет иметь функция $\overline{P}(r, t)$, являющаяся решением следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overline{P}}{d\zeta^2} &= 0, \\ \left. \frac{d\overline{P}}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} &= -\frac{\mu Q_0}{2\pi k h r_c}, \quad \overline{P}|_{\zeta=R(t)} = 0, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где $\zeta = r - r_c$,

$$R(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\kappa t}; \quad (5.64)$$

и имеющая, очевидно, вид

$$\overline{P}(r, t) = \frac{\mu Q_0}{2\pi k h} \sqrt{\frac{4\kappa t}{\pi}} \left\{ 1 - (r - r_c) \sqrt{\frac{\pi}{4\kappa t}} \right\}. \quad (5.65)$$

2^0 . Также очевидно, что функция $\overline{P}(r, t)$, являющаяся решением задачи (5.63), будет иметь ту же форму записи, если в задаче (5.63) заменить Q_0 на $\overline{Q}(t) = Q_0 - Q(t)$. Следовательно, приращение давления на скважине, когда в последнюю продолжается приток жидкости после её закрытия, можно приближённо охарактеризовать соотношением

$$\Delta p_c(t) = P(r_c, t) = \frac{\mu \overline{Q}(t)}{\pi \sqrt{\pi} k h r_c} \sqrt{\kappa t}. \quad (5.66)$$

3^0 . Как отмечалось выше, выполнение неравенства (5.57) при снятии КВД в промысловых условиях нехарактерно. Однако случай, когда оно выполняется, очень часто имеет место при определении ФП окрестности скважины зондированием её периодическими возмущениями. Этот вопрос более подробно будет рассмотрен в следующей, 6-ой, главе и для всех моделей фильтрации.

§ 18. КВД при неравномерном строении пористой среды (модель Христиановича)

п. 18.1. Как отмечалось выше (см. п. 2.2), при неравномерном строении пористой среды закон фильтрации имеет вид

$$w + \tau \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5.67)$$

а давление в окрестности скважины удовлетворяет телеграфному уравнению вида

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (5.68)$$

Рассмотрим сначала случай, когда приток жидкости в скважину после её остановки можно не учитывать. Тогда задача об определении давления сводится к следующей: найти в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решение уравнения (5.68) при условиях: начальных

$$p(r, 0) = p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c}, \quad p'_t(r, 0) = 0 \quad (5.69)$$

и граничных

$$\begin{aligned} \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} &= -2\pi h r_c (w + \tau \dot{w})_{r=r_c} = \\ &= \tau [Q(0+0) - Q(0-0)] \delta(t) = -\tau Q_0 \delta(t), \\ \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\infty} &= Q_0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Здесь учтено следующее. Так как дебит скважины $Q(t)$ ($-\infty < t < \infty$) является кусочно-постоянной (кусочно-непрерывной) функцией, имеющей в точке $t=0$ разрыв первого рода со скачком $[Q]_{t=0} = Q(0+0) - Q(0-0) = -Q_0$, то поэтому производная по времени от скорости фильтрации $w(r_c, t)$ суть обобщённая и равная

$$\frac{\tilde{d}w}{dt}(r_c, t) = \frac{dw(r_c, t)}{dt} + [w]_{t=0} \delta(t), \quad (5.71)$$

где $2\pi h r_c [w(r_c, t)]_{t=0} = -[Q]_{t=0} = Q_0$.

Решение сформулированной задачи будем искать в форме (5.5). Очевидно, функция $P(r, t)$ удовлетворяет уравнению (5.68) и следующим условиям: начальным

$$P(r, 0) = 0, \quad P'_t(r, 0) = 0 \quad (5.72)$$

и граничным

$$\frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} = -Q_0 (1 + \tau \delta(t)), \quad \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (5.73)$$

При решении задачи для функции $P(r, t)$ воспользуемся преобразованием Л-К, в результате чего для изображения $P^*(r, s)$ получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^*}{dr} \right) - \frac{P^*(r, s)}{R^{*2}(s)} = 0, \quad (5.9)$$

$$\left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} (1 + \tau s), \quad \left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0, \quad (5.74)$$

где

$$R^*(s) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{s(1 + \tau s)}}. \quad (5.75)$$

Решение краевой задачи (5.9), (5.74) запишется так:

$$\begin{aligned} P^*(r, s) &= \frac{\mu Q_0 (1 + \tau s)}{2\pi kh} \frac{R^*}{r_c} \frac{K_0(r/R^*)}{K_1(r_c/R^*)} = \\ &= \frac{\mu Q_0 (1 + \tau s)}{2\pi kh} \frac{K_0(z)}{z_c K_1(z_c)}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где

$$z = \frac{r}{R^*(s)} = r \sqrt{\frac{s(1 + \tau s)}{\kappa}}, \quad z_c = \frac{r_c}{R^*(s)}. \quad (5.77)$$

Тогда изображение приращения забойного давления будет характеризоваться формулой

$$\begin{aligned} \Delta p_c^*(s) &= \Delta p^*(r_c, s) = p^*(r_c, s) - p_{c0} = P^*(r_c, s) = \\ &= \frac{\mu Q_0 (1 + \tau s)}{2\pi kh} \frac{K_0(z_c)}{z_c K_1(z_c)} = \frac{\mu Q_0}{2\pi khr_c} \sqrt{\frac{\kappa(1 + \tau s)}{s}} \frac{K_0(z_c)}{K_1(z_c)}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Отметим следующее. Согласно теореме Абеля имеем

$$\Delta p_{c0} = \Delta p_c(0 + 0) = P(r_c, 0 + 0) = \Delta p_c^*(\infty) = \frac{\mu Q_0}{2\pi khr_c} \sqrt{\kappa\tau}; \quad (5.79)$$

следовательно, в начальный момент времени $t = 0$ забойное давление, так же как и дебит скважины, изменяется скачком на величину, равную $\Delta p_c(0 + 0) = \Delta p_{c0}$. При этом скачок забойного давления Δp_{c0} тем больше, чем больше величина τ .

Далее, так как аргументы функций $K_0(z)$ и $K_1(z_c)$ в окрестности скважины практически весьма малы, то, воспользовавшись асимптотиче-

скими представлениями (5.19) и (5.27), запишем равенство (5.76) следующим образом:

$$\begin{aligned} P^*(r, s) &= -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} (1 + \tau s) \ln \left(\frac{\gamma r}{2R^*} \right) = \\ &= \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} (1 + \tau s) \ln \left(\frac{2}{\gamma r} \sqrt{\frac{\kappa}{s(1 + \tau s)}} \right). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Для определения оригинала правой части соотношения (5.80) воспользуемся методом Шепери и Тер-Хаара, для чего заменим в нём параметр преобразования s на $1/\gamma t$; таким образом найдём

$$P(r, t) \equiv \bar{P}(r, t) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t + \tau}{\gamma t} \ln \left(\frac{2}{r} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma t + \tau}} t \right). \quad (5.81)$$

Тогда изменение во времени приращения забойного давления, начиная с момента времени t_{min} , можно приближённо представить равенством

$$\Delta p_c(t) \equiv \bar{P}(r_c, t) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t + \tau}{\gamma t} \ln \left(\frac{2}{r_c} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma t + \tau}} t \right), \quad (5.82)$$

при этом $\Delta p_c(0+0) = \Delta p_{c0} \neq 0$ и определяется по формуле (5.79).

Заметим, что функция $\bar{P}(r, t)$ удовлетворяет уравнению (5.25) и следующим граничным условиям:

$$\left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t}{\gamma t + \tau}, \quad \bar{P}(r, t)_{r=R(t)} = 0, \quad (5.83)$$

где

$$R(t) = \frac{2}{\gamma} R^*(s)_{s=1/\gamma t} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\kappa}{s(1 + \tau s)}} \Big|_{s=1/\gamma t} = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma t + \tau}} t. \quad (5.84)$$

И наконец, с учётом равенства (5.81) распределение давления в окрестности скважины приближённо может быть охарактеризовано следующим соотношением:

$$\begin{aligned} p(r, t) &\equiv p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} + \bar{P}(r, t) = \\ &= p_{c0} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t + \tau}{\gamma t} \ln \frac{r}{r_c} + \\ &+ \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t + \tau}{\gamma t} \ln \frac{r}{r_c} + \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\gamma t + \tau}{\gamma t} \ln \left(\frac{2}{r} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma t + \tau}} t \right) = \\ &= p_{c0} + \Delta p_c(t) - \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{\tau}{\gamma t} \ln \frac{r}{r_c}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

п. 18.2. Положим формулу (5.82) в основу обработки экспериментальной КВД, предварительно переписав её в виде

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} \frac{\gamma t}{\gamma t + \tau} = \frac{\mu \ln 10}{2\pi k h} \lg \left(\frac{2}{r_c} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma t + \tau}} t \right). \quad (5.86)$$

Зависимость (5.86) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t) \gamma t / Q_0 (\gamma t + \tau)$ графически представляет собой кривую линию с двумя асимптотами соответственно при $t_{\min} < t \ll \tau/\gamma$

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} \frac{\gamma t}{\tau} = \frac{\ln 10}{2\pi \sigma} \lg \left(\frac{2}{r_c} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} t \right) \quad (5.87)$$

и при $t \gg \tau/\gamma$

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10}{4\pi \sigma} \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t \right). \quad (5.34)$$

Асимптота (5.87) имеет к оси абсцисс наклон $i_0 = \lg \alpha_0 = \ln 10 / 2\pi \sigma$ и отсекает на этой оси отрезок, равный $\xi_0 = \lg t_0 = \lg \left(\frac{r_c}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\kappa}} \right)$, а асимптота

(5.34) — соответственно $i^0 = \lg \alpha^0 = \ln 10 / 4\pi \sigma$ и $\xi^0 = \lg t^0 = \lg \left(\frac{\gamma r_c^2}{4\kappa} \right)$; при-

чём, очевидно, наклон i_0 в два раза больше наклона i^0 (это можно считать условием реализации данной модели фильтрации), а $\xi_0 > \xi^0$, и чем меньше τ , тем ближе ξ_0 к ξ^0 (рис. 5.5). На рисунке также отмечена величина $\xi_\tau = \lg t_\tau$, где t_τ характеризует время практического выхода на фильтрацию по закону Дарси.

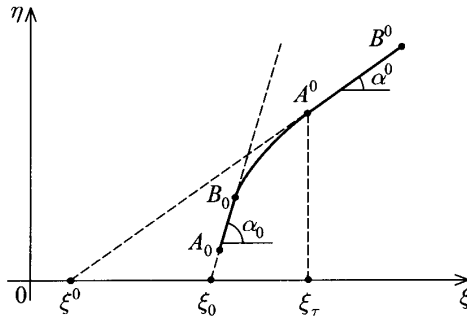


Рис. 5.5

Методика обработки экспериментальной КВД следующая. Сначала используется асимптота (5.34) (для больших времён), которая перестраивается в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$. Затем вычерчивается в этих координатах соответствующий график (см. рис. 5.3), и по наклону i^0 и отрезку ξ^0 находят ФП, а именно

$$\sigma = \frac{kh}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \quad \frac{\kappa}{r_c^2} = \frac{4}{\gamma} 10^{-\xi^0}. \quad (5.35)$$

Далее, асимптота (5.87) (для малых времён) представляется в форме

$$\frac{t \Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\gamma \ln 10}{2\pi \sigma \tau} \lg \left(\frac{2}{r_c} \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} t \right). \quad (5.88)$$

Очевидно, зависимость (5.88) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = t \Delta p_c(t)/Q_0$ представляет собой прямую линию, отсекающую на оси абсцисс отрезок, равный $\xi_0 = \lg \left(\frac{r_c}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\kappa}} \right)$ (рис. 5.6). По этому отрезку определяется время τ ,

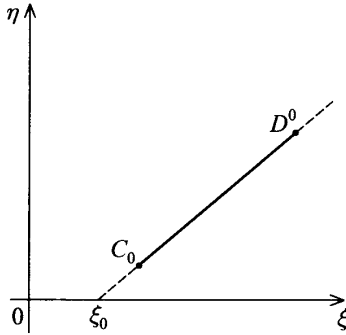


Рис. 5.6

а именно

$$\tau = \frac{4\kappa}{r_c^2} 10^{2\xi_0} \quad (5.89)$$

или, учитывая вторую формулу в (5.35), оно равно

$$\tau = \gamma 10^{(2\xi_0 - \xi^0)}. \quad (5.90)$$

Отметим, что, зная величины kh/μ , κ/r_c^2 и τ , можно оценить значение скачка забойного давления Δp_{c0} , т.е.

$$\Delta p_{c0} = \mu Q_0 \sqrt{\kappa \tau} / 2\pi k h r_c = 4Q_0 i^0 10^{(\xi_0 - \xi^0)}. \quad (5.91)$$

И наконец, вычерчивается график экспериментальной КВД в координатах $\xi = l g t$, $\eta = \Delta p_c(t) \gamma t / Q_0(\gamma t + \tau)$. По выходу графика КВД на прямолинейную асимптоту (5.34) определяется отрезок $\xi_\tau = l g t_\tau$ (см. рис. 5.5), откуда находится время начала фактической фильтрации по закону Дарси, а именно

$$t_\tau = 10^{\xi_\tau} \equiv 3\tau \equiv \pi\tau. \quad (5.92)$$

И последнее. Сопоставляя формулы (5.90) и (5.92), получим равенство

$$10^{\xi_\tau} = \pi\gamma 10^{(2\xi_0 - \xi^0)}, \quad (5.93)$$

являющееся также условием реализации данной модели фильтрации.

§ 19. КВД в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта)

п. 19.1. Согласно модели Баренблатта давления в упругоёмких трещинах и блоках удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\kappa_1 \tau_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right), \\ p_1 &= p_2 + \tau_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

При этом следует иметь в виду, что только трещины гидродинамически связаны со скважиной, и поэтому граничные условия на скважине будут относиться к давлению или расходу в трещинах.

Рассмотрим сначала случай, когда притоком жидкости в скважину после её остановки можно пренебречь. Тогда задача об определении давлений в упругоёмких трещинах и блоках сводится к нахождению решения системы (5.94) в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ при условиях: начальных

$$p_{1,2}(r, 0) = p_{1c0} + \frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r}{r_c} \quad (5.95)$$

и граничных

$$\left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right)_{r=r_c} = 0, \quad \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right)_{r=\infty} = \frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h}. \quad (5.96)$$

Давления $p_{1,2}(r, t)$ будем искать в виде:

$$p_{1,2}(r, t) = p_{1c0} + \frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h} \ln \frac{r}{r_c} + P_{1,2}(r, t). \quad (5.97)$$

Часть II

При этом, очевидно, система уравнений (5.94) переписывается так:

$$P_2 = P_1 + \tau_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\kappa_1 \tau_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right), \quad (5.98)$$

$$P_1 = P_2 + \tau_2 \frac{\partial P_2}{\partial t}; \quad (5.99)$$

а условия (5.95) и (5.96) соответственно запишутся следующим образом:

$$P_1(r, 0) = 0, \quad P_2(r, 0) = 0; \quad (5.100)$$

$$\left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h}, \quad \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (5.101)$$

Решение краевой задачи (5.98)–(5.99) получим с помощью преобразования Л-К; в результате его применения найдём

$$P_2^* = (I + \tau_1 s) P_1^* - \frac{\kappa_1 \tau_1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP_1^*}{dr} \right), \quad (5.102)$$

$$P_1^* = (I + \tau_2 s) P_2^*;$$

$$\left(r \frac{dP_1^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h}, \quad \left(r \frac{dP_1^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0. \quad (5.103)$$

Из второго равенства в (5.102) имеем

$$P_2^* = \frac{I}{I + \tau_2 s} P_1^*; \quad (5.104)$$

тогда первое уравнение в (5.102) запишется так:

$$\frac{I}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP_1^*}{dr} \right) - \frac{P_1^*(r, s)}{R_l^{*2}(s)} = 0, \quad (5.105)$$

где

$$R_l^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa'(I + \tau_2 s)}{s(I + \tau_1 s)}}. \quad (5.106)$$

Решение задачи (5.105), (5.103) имеет вид

$$\begin{aligned} P_1^*(r, s) &= \frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h} \frac{R_l^*(s)}{r_c} \frac{K_0(r/R_l^*)}{K_1(r_c/R_l^*)} = \\ &= \frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_1 h} \frac{K_0(z_l)}{z_{lc} K_1(z_{lc})}, \end{aligned} \quad (5.107)$$

где

$$z_I = \frac{r}{R_I^*(s)} = r \sqrt{\frac{s(I + \tau's)}{\kappa'(I + \tau_2 s)}}, \quad z_{Ic} = \frac{r_c}{R_I^*(s)}. \quad (5.108)$$

При этом изображение приращения забойного давления представимо в форме

$$\begin{aligned} \Delta p_{Ic}(s) &= P_I^*(r_c, s) = \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \frac{K_0(z_{Ic})}{z_{Ic} K_I(z_{Ic})} = \\ &= \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h r_c} \sqrt{\frac{\kappa'(I + \tau_2 s)}{s(I + \tau's)}} \frac{K_0\left(r_c \sqrt{\frac{s(I + \tau's)}{\kappa'(I + \tau_2 s)}}\right)}{K_I\left(r_c \sqrt{\frac{s(I + \tau's)}{\kappa'(I + \tau_2 s)}}\right)}, \end{aligned} \quad (5.109)$$

откуда по теореме Абеля получим

$$\Delta p_{Ic}(0) = \Delta p_{Ic}^*(\infty) = 0. \quad (5.110)$$

Далее, имея в виду практическую малость (в окрестности скважины) аргументов функций $K_0(z_I)$ и $K_I(z_{Ic})$ и воспользовавшись асимптотическими представлениями (5.27) и (5.19), перепишем выражение (5.107) следующим образом:

$$P_I^*(r, s) = -\frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \ln \left(\frac{\gamma}{2} \frac{r}{R_I^*(s)} \right). \quad (5.111)$$

Оригинал равенства (5.111) легко находится методом Шепери и Тер-Хаара, он равен

$$\begin{aligned} P_I(r, t) &= P_I^*(r, s)_{s=1/\gamma t} = \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \ln \left(\frac{R_I(t)}{r} \right) = \\ &= \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\frac{\kappa' t (\gamma t + \tau_2)}{\gamma t + \tau'}} \right), \end{aligned} \quad (5.112)$$

где

$$R_I(t) = \frac{2}{\gamma} R_I^*(s)_{s=1/\gamma t} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\kappa' t (\gamma t + \tau_2)}{\gamma t + \tau'}}. \quad (5.113)$$

Тогда изменение во времени приращения забойного давления запишется так:

$$\Delta p_{Ic} = P_I(r_c, t) = \frac{\mu Q_{I0}}{4\pi k_I h} \ln \left(\frac{4\kappa' t \gamma t + \tau_2}{\gamma r_c^2 \gamma t + \tau'} \right). \quad (5.114)$$

Отметим, что функция (5.112) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dP_I}{dr} \right) = 0 \quad (5.115)$$

и следующим граничным условиям:

$$\left(r \frac{dP_I}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_I h}, \quad \bar{P}_I(r, t)_{r=R_I(t)} = 0; \quad (5.116)$$

здесь t — параметр.

п. 19.2. Положим формулу (5.114) в основу обработки экспериментальной КВД, предварительно переписав её в форме

$$\frac{\Delta p_{Ic}(t)}{Q_{10}} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma_1} \lg \left(\frac{4\kappa' t}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t + \tau_2}{\gamma t + \tau'} \right). \quad (5.117)$$

Очевидно, графически зависимость (5.117) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_{Ic}(t)/Q_{10}$ представляет собой кривую, имеющую две асимптоты, а именно для малых ($\gamma t \ll \tau'$)

$$\frac{\Delta p_{Ic}(t)}{Q_{10}} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma_1} \lg \left(\frac{4\kappa' \tau_2}{\gamma r_c^2 \tau'} t \right) = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma_1} \lg \left(\frac{4\kappa_I}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.118)$$

и больших ($\gamma t \gg \tau_2$)

$$\frac{\Delta p_{Ic}(t)}{Q_{10}} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma_1} \lg \left(\frac{4\kappa'}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.119)$$

времен (рис. 5.7). При этом наклоны i_{10}^0 и i_1^0 этих асимптот к оси абсцисс одинаковы и равны

$$i_{10}^0 = i_1^0 = i^0 = \lg \alpha^0 = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma_1}, \quad (5.120)$$

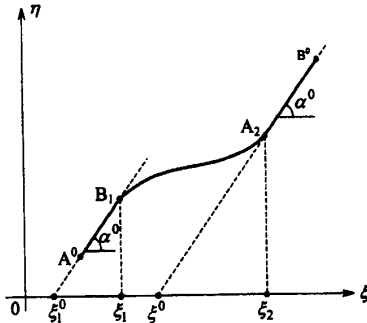


Рис. 5.7

что можно считать условием реализации модели Баренблатта для упруго-ёмких трещин, а отрезки, отсекаемые ими на оси абсцисс, определяются соответственно формулами

$$\xi_{01}^0 = l g \left(\frac{\gamma r_c^2}{4 \kappa_1} \right), \quad \xi^0 = l g \left(\frac{\gamma r_c^2}{4 \kappa'} \right). \quad (5.121)$$

Заметим, что отрезок ξ_{10}^0 тем меньше, чем меньше упругоёмкость трещин β_1 и тем самым больше их пьезопроводность $\kappa_1 = k_1 / \mu \beta_1$.

Таким образом, перестроив экспериментальную КВД в координатах $\xi = l g t$, $\eta = \Delta p_c(t) / Q_{10}$, график которой схематически изображен на рисунке 5.7, и, определив по прямолинейным участкам $A^0 B_1$ и $A_2 B^0$ величины $\operatorname{tg} \alpha^0 = i^0$, ξ_{10}^0 и ξ^0 , найдём

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{k_1 h}{\mu} = \frac{\ln 10}{4 \pi i^0}, \quad \frac{\kappa_1}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_{10}^0}, \\ \frac{\kappa'}{r_c^2} &= \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa'} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = 10^{(\xi^0 - \xi_{10}^0)}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Далее, как отмечалось в п. 3.3, в начальные моменты времени и близкие к ним обмен жидкостью между блоками и трещинами пренебрежимо мал, т.е. фильтрация в упругоёмких трещинах осуществляется независимо от блоков. Это обстоятельство может отразиться заметным прямолинейным участком $A^0 B_1$ графика КВД (см. рис. 5.7). Тогда по отрезку оси абсцисс

$$\xi_1 = l g t_1, \quad (5.123)$$

соответствующему концу плеча $A^0 B_1$ (если точка B_1 чётко выражена), можно оценить время t_1 фактического начала заметного обмена жидкостью между блоками и трещинами; это время равно

$$t_1 = 10^{\xi_1} \cong 3 \tau_1 \cong \pi \tau_1. \quad (5.124)$$

По прошествии определённого времени обмен жидкостью между блоками и трещинами прекращается вследствие выравнивания давлений в блоках и трещинах; это соответствует другому прямолинейному участку $A_2 B^0$ на графике КВД. Следовательно, по отрезку оси абсцисс

$$\xi_2 = l g t_2, \quad (5.125)$$

соответствующему началу плеча $A_2 B^0$ (точка A_2), оценивается время t_2 фактического прекращения обмена жидкостью между блоками и трещинами, оно, очевидно, равно

$$t_2 = 10^{\xi_2} \cong 3 \tau_2 \cong \pi \tau_2. \quad (5.126)$$

По разности

$$t_2 - t_1 = 10^{(\xi_2 - \xi_1)} \quad (5.127)$$

можно оценить время активного обмена жидкостью между блоками и трещинами.

§ 20. КВД при релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме

п. 20.1. В п. 3.4 было установлено, что фильтрации в трещиновато-пористой среде по модели Баренблатта можно сопоставить эквивалентное течение жидкости в однородной пористой среде, учитывающей релаксационное поведение элементарного количества жидкости. Принимая это обстоятельство во внимание, нет необходимости подробно останавливаться на выводе рабочей формулы обработки экспериментальной КВД, а выпишем её сразу, заменив в соотношении (5.117) коэффициенты κ' , τ_2 и τ' соответственно на κ , θ_m и θ_p . Таким образом, имеем

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\sigma} \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t + \theta_m}{\gamma t + \theta_p} \right). \quad (5.128)$$

п. 20.2. График зависимости (5.128) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$ имеет две асимптоты, а именно, для малых ($\gamma t \ll \theta_p$)

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg \left(\frac{4\kappa\theta_m}{\gamma r_c^2 \theta_p} t \right) \quad (5.129)$$

и больших ($\gamma t \gg \theta_m$)

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.130)$$

времени (рис.5.8). Очевидно, асимптоты имеют одинаковые наклоны i^0 к оси абсцисс и равны

$$i^0 = \lg \alpha^0 = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma}, \quad (5.131)$$

что можно считать условием реализации рассматриваемой модели фильтрации. Отрезки, отсекаемые этими асимптотами на оси абсцисс, соответственно равны

$$\xi_0 = \lg \left(\frac{\gamma r_c^2 \theta_p}{4\kappa\theta_m} \right), \quad \xi^0 = \lg \left(\frac{\gamma r_c^2}{4\kappa} \right). \quad (5.132)$$

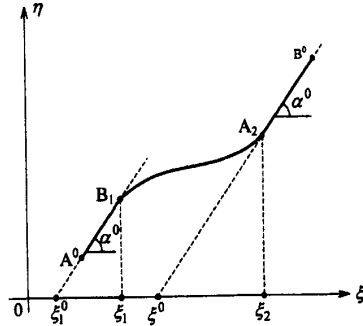


Рис. 5.8

Таким образом, перестроив экспериментальную КВД в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$ (график которой изображён на рисунке 5.8 для случая $\theta_m > \theta_p$) и определив по наклонам прямолинейных участков $A^0 B_1$ и $A_2 B^0$ величину $i^0 = \tg \alpha^0$, а также отсекаемые ими отрезки на оси абсцисс ξ_0 , ξ^0 , найдём

$$\sigma = \frac{kh}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \quad \frac{\kappa \theta_m}{r_c^2 \theta_p} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_0}, \quad \frac{\kappa}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}, \quad \frac{\theta_m}{\theta_p} = 10^{(\xi^0 - \xi_0)}. \quad (5.133)$$

Кроме этого по отрезку оси абсцисс

$$\xi_p = \lg t_p, \quad (5.134)$$

соответствующему абсциссе конца плеча $A^0 B_1$ (если отрезок чётко выражен), можно определить время t_p начала релаксационного процесса в поведении количества жидкости в элементарном объёме, это время равно

$$t_p = 10^{\xi_p} \cong 3\theta_p \cong \pi\theta_p. \quad (5.135)$$

По прошествии определённого времени релаксационное поведение количества жидкости прекращается; это соответствует на графике КВД абсциссе другого прямолинейного участка $A_2 B^0$. Следовательно, по отрезку оси абсцисс

$$\xi_m = \lg \theta_m \quad (5.136)$$

можно оценить это время, а именно

$$t_m = 10^{\xi_m} \cong 3\theta_m \cong \pi\theta_m. \quad (5.137)$$

Таким образом, разность

$$t_m - t_p = 10^{(\xi_m - \xi_p)} \quad (5.138)$$

характеризует время активного релаксационного поведения количества жидкости в элементарном объёме.

§ 21. КВД при неравновесном законе фильтрации

п. 21.1. Определение давления $p(r, t)$ в окрестности скважины без учёта притока в неё жидкости при фильтрации по простейшему неравновесному закону

$$w(r, t) = -\frac{k \tau_p}{\mu \tau_w} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \frac{\partial p}{\partial r} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} \quad (5.139)$$

или эквивалентному ему

$$w + \tau_w \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial r} + \tau_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \quad (5.140)$$

в упругой пористой среде сводится к следующей задаче: найти в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решение уравнения

$$\frac{\tau_p \kappa}{\tau_w r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \kappa \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right) \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_w}\right) \frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5.141)$$

удовлетворяющее начальному (5.1) и граничным

$$\begin{aligned} \frac{2\pi kh}{\mu} \left[\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{\tilde{d}}{dt} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} \right] &= \tau_w \frac{\tilde{d} Q_0}{dt} = -\tau_w Q_0 \delta(t), \\ \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\infty} &= Q_0 \end{aligned} \quad (5.142)$$

условиям. Здесь, как и в п.18.1, учтено, что дебит скважины $Q(t)$ и градиент давления $(\partial p / \partial r)_{r=r_c}$, являющиеся функциями времени в интервале $-\infty < t < \infty$, имеют при $t=0$ разрывы первого рода со скачками соответственно

$$\begin{aligned} [Q]_{t=0} &= -Q_0, \\ \left[\left(\partial p / \partial r \right)_{r=r_c} \right] &= \left\{ \left(\partial p / \partial r \right)_{r=r_c} \right\}_{t=0+0} - \left\{ \left(\partial p / \partial r \right)_{r=r_c} \right\}_{t=0-0}. \end{aligned}$$

Поэтому в первом равенстве соотношений (5.142) производная по времени от этих функций суть обобщённая. Далее, отыскивая решение сформулированной задачи в виде (5.5), придём к определению функции $P(r, t)$, удовлетворяющей уравнению (5.141) и условиям: начальному (5.6) и граничным

$$\begin{aligned} \frac{2\pi kh}{\mu} \left\{ \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{\tilde{d}}{dt} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c} \right\} &= -Q_0 (1 + \tau_w \delta(t)), \\ \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Затем, применение преобразования Л-К к уравнению (5.141) и граничным условиям (5.143) приводит к отысканию решения уравнения (5.9), удовлетворяющего граничным условиям

$$\left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s}, \quad \left(r \frac{dP^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0; \quad (5.144)$$

здесь в уравнении (5.9)

$$R^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa(1+\tau_p s)}{s(1+\tau_w s)}}. \quad (5.145)$$

Это решение в данном случае запишется так:

$$\begin{aligned} P^*(r, s) &= \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s} \frac{R^*(s)}{r_c} \frac{K_0(r/R^*)}{K_1(r_c/R^*)} = \\ &= \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s} \frac{K_0(z)}{z_c K_1(z_c)}, \end{aligned} \quad (5.146)$$

где

$$z = \frac{r}{R^*(s)} = r \sqrt{\frac{s(1+\tau_w s)}{\kappa(1+\tau_p s)}}, \quad z_c = \frac{r_c}{R^*(s)}. \quad (5.147)$$

При этом изображение приращения забойного давления представимо в форме

$$\Delta p_c^*(s) = P^*(r_c, s) = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s} \frac{K_0(z_c)}{z_c K_1(z_c)}; \quad (5.148)$$

откуда по теореме Абеля получим равенство (5.16).

И наконец, для малых значений аргумента функций $K_0(z)$ и $K_1(z_c)$ можно воспользоваться асимптотическими выражениями (5.27) и (5.19) и представить равенство (5.146) следующим образом:

$$\begin{aligned} P^*(r, s) &= -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s} \ln \left(\frac{\gamma}{2} \frac{r}{R^*(s)} \right) = \\ &= \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \frac{1+\tau_w s}{1+\tau_p s} \ln \left(\frac{2}{\gamma r} \sqrt{\frac{\kappa(1+\tau_p s)}{s(1+\tau_w s)}} \right). \end{aligned} \quad (5.149)$$

Для нахождения оригинала выражения (5.149) поступим так. Оригиналу изображения $\ln(2R^*(s)/\gamma r)$ определим с помощью метода Шепери и Тер-Хаара, он равен

$$\ln \left(\frac{2}{\gamma r} \sqrt{\frac{\kappa(1+\tau_p s)}{s(1+\tau_w s)}} \right)_{s=l/\gamma t} = \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma} r} \sqrt{\frac{\kappa t}{\gamma t + \tau_p}} \right).$$

Далее, учитывая, что оригинал отношения

$$\frac{I + \tau_w s}{I + \tau_p s} = \frac{\tau_w}{\tau_p} \frac{s + I/\tau_w}{s + I/\tau_p}$$

представим в форме

$$\frac{\tau_w}{\tau_p} \left[\frac{\tau_p}{\tau_w} + \left(I - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) e^{-t/\tau_p} \right] = I + \left(\frac{\tau_w}{\tau_p} - I \right) e^{-t/\tau_p}$$

(см. [6]), оригинал произведения

$$\frac{I + \tau_w s}{I + \tau_p s} \ln \left(\frac{2}{\gamma r} \sqrt{\frac{\kappa(I + \tau_p s)}{s(I + \tau_w s)}} \right)$$

можно выразить как производную по времени от свёртки

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa t' \frac{\gamma t' + \tau_p}{\gamma t' + \tau_w}} \right) \left[I + \left(\frac{\tau_w}{\tau_p} - I \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \right] dt' = \\ = \frac{\tau_w}{\tau_p} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa t \frac{\gamma t + \tau_p}{\gamma t + \tau_w}} \right) + \\ + \left(I - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa t' \frac{\gamma t' + \tau_p}{\gamma t' + \tau_w}} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Тогда оригинал соотношения (5.148) запишется так:

$$\begin{aligned} P(r, t) = \frac{\mu Q_0 \tau_w}{2\pi k h \tau_p} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa t \frac{\gamma t + \tau_p}{\gamma t + \tau_w}} \right) + \\ + \frac{\mu Q_0}{2\pi k h} \left(I - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa t' \frac{\gamma t' + \tau_p}{\gamma t' + \tau_w}} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (5.151)$$

Заметим, что в области изображений равенство (5.149) можно трактовать как решение уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{P}^*}{dr} \right) = 0, \quad (5.152)$$

найденное при граничном условии

$$\left(r \frac{d\bar{P}^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_0}{2\pi k h} \frac{I + \tau_w s}{I + \tau_p s}, \quad \bar{P}^*(r, s)_{r=R^*(s)} = 0, \quad (5.153)$$

а выражение (5.151) в области оригиналов — как решение граничной задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right) &= 0, \\ \left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\bar{P}}{dr} \right)_{r=r_c} &= -\frac{\mu Q_0}{2\pi kh} (1 + \tau_w \delta(t)), \\ \bar{P}(r, t)_{r=R(t)} &= 0; \end{aligned} \quad (5.154)$$

здесь время t выступает как параметр, а

$$R(t) = \frac{2}{\gamma} R^*(s)_{s=1/\gamma t} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma t + \tau_p}{\gamma t + \tau_w}}. \quad (5.155)$$

Полагая теперь в соотношении (5.151) $r = r_c$, определим закон изменения во времени приращения забойного давления, а именно

$$\begin{aligned} \Delta p_c(t) = P(r_c, t) &= \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \frac{\tau_w}{\tau_p} \ln \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t + \tau_p}{\gamma t + \tau_w} \right) + \\ &+ \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \ln \left(\frac{4\kappa t'}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t' + \tau_p}{\gamma t' + \tau_w} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (2.156)$$

п. 21.2. Обработку экспериментальной КВД проведём следующим образом. Представим выражение (5.156) в форме

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} &= \frac{\ln 10 \tau_w}{4\pi \sigma \tau_p} \lg \left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t + \tau_p}{\gamma t + \tau_w} \right) + \\ &+ \frac{\ln 10 \mu}{4\pi \sigma} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \lg \left(\frac{4\kappa t'}{\gamma r_c^2} \frac{\gamma t' + \tau_p}{\gamma t' + \tau_w} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Очевидно, зависимость (5.157) в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$ графически изображается кривой, имеющей две асимптоты соответственно для малых ($\gamma t \ll \tau_p, \tau_w$)

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10 \tau_w}{4\pi \sigma \tau_p} \lg \left(\frac{4\kappa \tau_p}{\gamma r_c^2 \tau_w} t \right) \quad (5.158)$$

и больших ($\gamma t \gg \tau_p, \tau_w$)

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10}{4\pi \sigma} \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.34)$$

времен. Эти асимптоты (рис. 5.9) имеют различные наклоны i_0 и i^0 к оси абсцисс, а именно

$$i_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\ln 10 \tau_w}{4\pi \sigma \tau_p}, \quad i^0 = \operatorname{tg} \alpha^0 = \frac{\ln 10}{4\pi \sigma}, \quad (5.159)$$

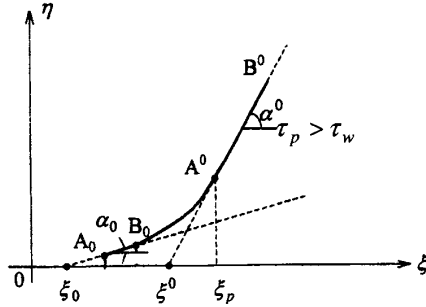


Рис.5.9

и отсекают на этой оси отрезки ξ_0 и ξ^0 , определяемые соответственно формулами

$$\xi_0 = \lg \left(\frac{\gamma r_c^2 \tau_w}{4\kappa \tau_p} \right), \quad \xi^0 = \lg \left(\frac{\gamma r_c^2}{4\kappa} \right). \quad (5.160)$$

Тогда, перестроив экспериментальную КВД в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$, схематическое изображение которой при $\tau_p > \tau_w$ приведено на рисунке 5.9, и определив по прямолинейным участкам A_0B_0 и A^0B^0 наклоны i_0 и i^0 , а также отсекаемые ими на оси абсцисс отрезки ξ_0 и ξ^0 , найдём

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \tau_p}{\tau_w} &= \frac{kh}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{k_{\text{дин}} h}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i_0}, & \sigma &= \frac{kh}{\mu} = \frac{k_{\text{см}} h}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \\ \frac{\kappa}{r_c^2} \frac{\tau_p}{\tau_w} &= \frac{\kappa_{\text{дин}}}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_0}, & \frac{\kappa}{r_c^2} &= \frac{\kappa_{\text{см}}}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}, \\ \frac{\tau_p}{\tau_w} &= \frac{i^0}{i_0} = 10^{(\xi^0 - \xi_0)}. \end{aligned} \quad (5.161)$$

Заметим, что равенство

$$(i^0/i_0) = 10^{(\xi^0 - \xi_0)} \quad (5.162)$$

можно считать условием практической реализации данной модели фильтрации.

Как отмечалось в п. 5.1, фильтрация по простейшему неравновесному закону (5.139) в начальные моменты времени и близкие к ним осуществляется (в асимптотическом смысле) по закону Дарси с динамическим коэффициентом проницаемости $k_{дин} = k\tau_p/\tau_w$ и, следовательно, с динамическим коэффициентом пьезопроводности $\kappa_{дин} = \kappa\tau_p/\tau_w$; по прошествии определённого времени, когда закон фильтрации фактически исчерпает свой неравновесный характер, фильтрация будет подчиняться равновесному закону Дарси со статическим коэффициентом проницаемости $k_{ст} = k$ и иметь статический коэффициент пьезопроводности $\kappa_{ст} = \kappa$. Это и обуславливает характер поведения КВД, изображённой на рисунке 5.9. При этом по отрезку $\xi_w = lgt_w$ (абсцисса точки B_0 графика КВД) можно оценить время t_w практического окончания фильтрации по закону Дарси с динамическим коэффициентом проницаемости, а по отрезку $\xi_p = lgt_p$ (абсцисса точки A^0 графика КВД) — время t_p фактического окончания действия неравновесности в законе фильтрации (5.139); эти времена, очевидно, соответственно равны

$$t_w = 10^{\xi_w}, \quad t_p = 10^{\xi_p}. \quad (5.163)$$

§ 22. КВД в трещиновато-пористой среде при фильтрации по неравновесному закону

п. 22.1. Согласно данной модели течение жидкости осуществляется только по трещинам и подчиняется простейшему закону фильтрации вида

$$w_l + \tau_w \frac{\partial w_l}{\partial t} = -\frac{k_l}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(p_l + \tau_p \frac{\partial p_l}{\partial t} \right) \quad (5.164)$$

или эквивалентному ему

$$w_l = -\frac{k_l \tau_p}{\mu \tau_w} \frac{\partial p_l}{\partial r} - \frac{k_l}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \int_0^t \frac{\partial p_l}{\partial r} \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) \frac{dt'}{\tau_w}. \quad (5.165)$$

Используя определение дебита скважины $Q_l = -2\pi h(rw_l(r, t))_{r=r_c}$ и закон фильтрации (5.164), нетрудно получить (см. п. 21.1) следующее граничное условие на скважине, когда приток жидкости в неё после её остановки не учитывается, а именно

$$\frac{2\pi k_l h}{\mu} \left[\left(r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{d}{dt} \left(r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right)_{r=r_c} \right] = -\tau_w Q_{l0} \delta(t); \quad (5.166)$$

при этом приток жидкости на бесконечности остаётся прежним и равным Q_{10} , т.е.

$$\frac{2\pi k_l h}{\mu} \left(r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right)_{r=\infty} = Q_{10}. \quad (5.167)$$

Следовательно, давления в упругоёмких трещинах и блоках удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \tau_l \frac{\partial p_l}{\partial t} - \kappa_l \tau_l \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right) - \\ &- \kappa_l \tau_l \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w} \right) \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) \frac{dt'}{\tau_w}, \\ p_l &= p_2 + \tau_2 \frac{\partial p_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.168)$$

Определение давлений в трещинах и блоках, в случае пренебрежимо малого притока жидкости в скважину после её остановки, сводится к следующей краевой задаче: найти в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решение системы уравнений (5.168) при начальных (5.95) и граничных (5.166), (5.167) условиях.

Систему (5.168), путём введения замены (5.97) и последующего исключения из неё функции

$$P_2(r, t) = \int_0^t P_l(r, t') \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_2} \right) \frac{dt'}{\tau_2}, \quad (1.27)$$

нетрудно преобразовать к уравнению относительно функции $P_l(r, t)$, а именно

$$\begin{aligned} &\kappa_l \tau_l \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_l}{\partial r} \right) + \kappa_l \tau_l \int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_l}{\partial r} \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_w} \right) \frac{dt'}{\tau_w} = - \int_0^t P_l \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_2} \right) \frac{dt'}{\tau_2} + P_l(r, t) + \tau_l \frac{\partial P_l}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.169)$$

В результате чего определение давления в упругоёмких трещинах сводится к нахождению решения уравнения (2.169) при условиях: начальном

$$P_l(r, 0) = 0 \quad (5.170)$$

и граничных

$$\begin{aligned} \left(r \frac{\partial P_l}{\partial r} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{d}{dt} \left(r \frac{\partial P_l}{\partial r} \right)_{r=r_c} &= -\frac{\mu Q_{10}}{2\pi k_l h} (1 + \tau_w \delta(t)), \\ \left(r \frac{\partial P_l}{\partial r} \right)_{r=\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Далее, применение преобразования Л-К к уравнению (2.169) и граничным условиям (2.171) приводит к отысканию в области $r_c < r < \infty$ изображения $P_I^*(r, s)$, удовлетворяющего уравнению (5.9) и граничным условиям

$$\left(r \frac{dP_I^*}{dr} \right)_{r=r_c} = -\frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I \mu} \frac{1 + \tau_w s}{1 + \tau_p s}, \quad \left(r \frac{dP_I^*}{dr} \right)_{r=\infty} = 0; \quad (5.172)$$

здесь

$$R_I^*(s) = \sqrt{\frac{\kappa'(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_p s)}{s(1 + \tau' s)(1 + \tau_w s)}}. \quad (5.173)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что решением граничной задачи (5.9), (2.172) будет соотношение

$$P_I^*(r, s) = \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \frac{1 + \tau_w s}{1 + \tau_p s} \frac{K_0(z_I)}{z_{Ic} K_I(z_{Ic})}, \quad (5.174)$$

где

$$z_I = \frac{r}{R_I^*(s)} = r \sqrt{\frac{s(1 + \tau' s)(1 + \tau_w s)}{\kappa'(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_p s)}}, \quad z_{Ic} = \frac{r_c}{R_I^*(s)}. \quad (5.175)$$

Очевидно, изображение приращения забойного давления $\Delta p_{Ic}^*(s)$ запишется так:

$$\Delta p_{Ic}^*(s) = P_I^*(r_c, s) = \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \frac{1 + \tau_w s}{1 + \tau_p s} \frac{K_0(z_{Ic})}{z_{Ic} K_I(z_{Ic})}; \quad (5.176)$$

причём имеет место равенство (5.110).

И наконец, учитывая малые значения аргумента функций $K_0(z_I)$ и $K_I(z_{Ic})$ и, таким образом, используя асимптотические выражения (5.27) и (5.19), представим равенство (5.174) в форме

$$P_I^*(r, s) = -\frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \frac{1 + \tau_w s}{1 + \tau_p s} \ln \left(\frac{\gamma}{2} \frac{r}{R_I^*(s)} \right). \quad (5.177)$$

Оригинал соотношения (5.165) получим приёмом, аналогичным способу, применённому при нахождении оригинала выражения (5.149); он равен

$$P_I(r, t) = \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \frac{\tau_w}{\tau_p} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa' t' \frac{(\gamma t + \tau_2)(\gamma t' + \tau_p)}{(\gamma t + \tau')(\gamma t' + \tau_w)}} \right) + \frac{\mu Q_{I0}}{2\pi k_I h} \cdot \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma r}} \sqrt{\kappa' t' \frac{(\gamma t' + \tau_2)(\gamma t' + \tau_p)}{(\gamma t' + \tau')(\gamma t' + \tau_w)}} \right) \exp \left(-\frac{t - t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}; \quad (5.178)$$

здесь учтено, что

$$R_I(t) = \frac{2}{\gamma} R_I^*(s)_{s=l/\gamma t} = \sqrt{\kappa' t \frac{(\gamma t + \tau_2)(\gamma t + \tau_p)}{(\gamma t + \tau' s)(\gamma t + \tau_w)}}. \quad (5.179)$$

Отметим, что равенство (5.178) является решением уравнения (5.115), удовлетворяющим граничным условиям

$$\left(r \frac{d\bar{P}_l}{dr} \right)_{r=r_c} + \tau_p \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\bar{P}_l}{dr} \right)_{r=r_c} = - \frac{\mu Q_{l0}}{2\pi k_l h} (1 + \tau_w \delta(t)), \quad (5.180)$$

где $R_l(t)$ определяется формулой (5.179), t — параметр.

Очевидно, приращение забойного давления $\Delta p_{lc}(t)$ определим, положив в соотношении (5.178) $r = r_c$, а именно

$$\begin{aligned} \Delta p_{lc}(t) = P_l(r_c, t) = & \frac{\mu Q_{l0}}{2\pi k_l h} \frac{\tau_w}{\tau_p} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma} r_c} \sqrt{\kappa' t \frac{(\gamma t + \tau_2)(\gamma t + \tau_p)}{(\gamma t + \tau')(\gamma t + \tau_w)}} \right) + \\ & + \frac{\mu Q_{l0}}{2\pi k_l h} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \ln \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma} r_c} \sqrt{\kappa' t' \frac{(\gamma t' + \tau_2)(\gamma t' + \tau_p)}{(\gamma t' + \tau')(\gamma t' + \tau_w)}} \right) \cdot \\ & \cdot \exp \left(- \frac{t - t'}{\tau_p} \right) dt'. \end{aligned} \quad (5.181)$$

п. 22.2. Обработку экспериментальной КВД проведём с использованием соотношения (5.181), переписав его предварительно следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_{lc}(t)}{Q_{l0}} = & \frac{\ln 10}{4\pi \sigma_l} \frac{\tau_w}{\tau_p} l g \left(\frac{4\kappa' t}{\gamma r_c^2} \frac{(\gamma t + \tau_2)(\gamma t + \tau_p)}{(\gamma t + \tau')(\gamma t + \tau_w)} \right) + \\ & + \frac{\ln 10}{4\pi \sigma_l} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t l g \left(\frac{4\kappa' t'}{\gamma r_c^2} \frac{(\gamma t' + \tau_2)(\gamma t' + \tau_p)}{(\gamma t' + \tau')(\gamma t' + \tau_w)} \right) \exp \left(- \frac{t - t'}{\tau_p} \right) dt'. \end{aligned} \quad (5.182)$$

Очевидно, график функции $\Delta p_{lc}(t)/Q_{l0}$ существенным образом будет зависеть от соотношения между постоянными $\tau_2, \tau', \tau_p, \tau_w$. Практика пьезометрии окрестностей скважин показывает, что постоянные τ_2 и τ_l значительно больше постоянных τ_p и τ_w . Анализ равенства (5.182) указывает на то, что при малых ($\gamma t \ll \tau_2, \tau', \tau_p, \tau_w$) и больших ($\gamma t \gg \tau_2, \tau', \tau_p, \tau_w$) временах функция $\Delta p_{lc}(t)/Q_{l0}$ обладает двумя асимптотическими выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_{lc}(t)}{Q_{l0}} = & \frac{\ln 10}{4\pi \sigma_l} \frac{\tau_w}{\tau_p} l g \left(\frac{4\kappa' \tau_2 \tau_p}{\gamma r_c^2 \tau' \tau_w} t \right) = \\ = & \frac{\ln 10}{4\pi \sigma_l} \frac{\tau_w}{\tau_p} l g \left(\frac{4\kappa_l \tau_p}{\gamma r_c^2 \tau_w} t \right), \end{aligned} \quad (5.183)$$

$$\frac{\Delta p_{lc}(t)}{Q_{l0}} = \frac{\ln 10}{4\pi \sigma_l} l g \left(\frac{4\kappa'}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.119)$$

соответственно. В этом случае график функции $\Delta p_{1c}(t)/Q_{10}$, построенной в координатах $\xi = lg t$, $\eta = \Delta p_{1c}(t)/Q_{10}$, изобразится кривой, приведённой

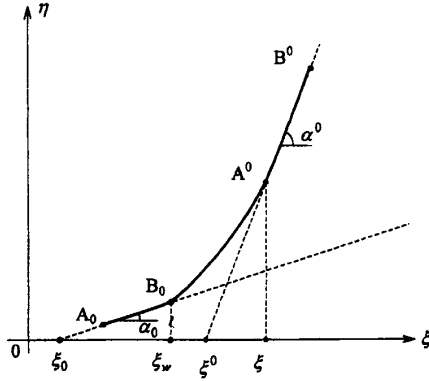


Рис. 5.10

на рисунке 5.10; он аналогичен графику рисунка 5.9. Тогда по наклонам $i_0 = tg \alpha_0 = \ln 10 \tau_w / 4\pi \sigma_1 \tau_p$, $i^0 = tg \alpha^0 = \ln 10 / 4\pi \sigma_1$, а также по отрезкам $\xi_0 = lg(\gamma r_c^2 \tau_w / 4\kappa_1 \tau_p)$, $\xi^0 = lg(\gamma r_c^2 / 4\kappa')$, $\xi_w = lg t_w$, $\xi_2 = lg t_2$ определим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\tau_p}{\tau_w} &= \frac{k_1 h}{\mu} \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{\ln 10}{4\pi i_0}, \quad \sigma_1 = \frac{k_1 h}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \\ \frac{\kappa_1}{r_c^2} \frac{\tau_p}{\tau_w} &= \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_0}, \quad \frac{\kappa'}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}, \\ t_w &= 10^{\xi_w} \cong \pi \tau_w, \quad t_2 = 10^{\xi_2} \cong \pi \tau_2; \end{aligned} \quad (5.184)$$

откуда также найдём:

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i^0}{i_0}, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa'} = \frac{i^0}{i_0} 10^{(\xi^0 - \xi_0)} = \frac{\tau_2}{\tau'} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1}, \quad (5.185)$$

$$\exp(\xi^0 - \xi_0) = (i^0 / i_0)^2. \quad (5.186)$$

Заметим, что равенство (5.186) можно рассматривать условием реализации данного случая.

§ 23. КВД при неравновесном законе фильтрации и релаксационном поведении количества жидкости в элементарном объёме

п. 23.1. Основываясь на том, что фильтрации в трещиновато-пористой среде по модели Баренблатта (см. **п.3.4**) можно сопоставить эквивалентное течение жидкости в однородной пористой среде при релаксационном поведении элементарного количества жидкости, нет необходимости останавливаться на получении рабочей формулы обработки экспериментальной КВД; её сразу можно выписать, заменив в соотношении (5.182) величины κ' , τ_2 и τ' на κ , θ_m и θ_p соответственно. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = & \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \frac{\tau_w}{\tau_p} \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t \frac{(\gamma t + \theta_m)(\gamma t + \tau_p)}{(\gamma t + \theta_p)(\gamma t + \tau_w)} \right) + \\ & + \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \left(1 - \frac{\tau_w}{\tau_p} \right) \int_0^t \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t' \frac{(\gamma t' + \theta_m)(\gamma t' + \tau_p)}{(\gamma t' + \theta_p)(\gamma t' + \tau_w)} \right) \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_p} \right) \frac{dt'}{\tau_p}. \end{aligned} \quad (5.187)$$

Очевидно, соотношение (5.187) обладает двумя асимптотическими выражениями, а именно для малых ($\gamma t \ll \tau_p, \tau_w, \theta_m, \theta_p$) и больших ($\gamma t \gg \tau_p, \tau_w, \theta_m, \theta_p$) времен

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_0} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \frac{\tau_w}{\tau_p} \lg \left(\frac{4\kappa\theta_m\tau_p}{\gamma r_c^2\theta_p\tau_w} t \right), \quad (5.188)$$

$$\frac{\Delta p_c(t)}{Q_2} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg \left(\frac{4\kappa}{\gamma r_c^2} t \right) \quad (5.34)$$

соответственно. В этом случае график функции $\Delta p_c(t)/Q_0$, построенный в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_c(t)/Q_0$, приведён на рисунке 5.11; он аналогичен графику рисунка 5.10.

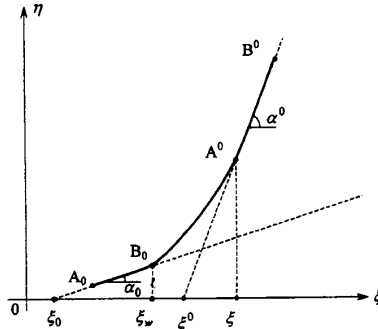


Рис. 5.11

Следовательно, по наклонам $i_0 = tg \alpha_0 = \ln 10 \tau_w / 4\pi \sigma \tau_p$, $i^0 = tg \alpha^0 = \ln 10 / 4\pi \sigma$, а также по отрезкам $\xi_0 = \lg(\gamma r_c^2 \tau_w \theta_p / 4\kappa \tau_p \theta_m)$, $\xi^0 = \lg(\gamma r_c^2 / 4\kappa)$, $\xi_w = \lg t_w$, $\xi_p = \lg t_p$ определим

$$\begin{aligned} \sigma_{дин} &= \sigma_{cm} \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{\ln 10}{4\pi i_0}, \quad \sigma_{cm} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i^0}{i_0}, \\ \frac{\kappa_{дин}}{r_c^2} &= \frac{\kappa_{cm}}{r_c^2} \frac{\theta_m \tau_p}{\theta_p \tau_w} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_0}, \quad \frac{\kappa_{cm}}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0}, \quad \frac{\theta_m}{\theta_p} = \frac{i_0}{i^0} 10^{(\xi^0 - \xi_0)}, \quad (5.189) \\ t_w &= 10^{\xi_w} \equiv \pi \tau_w, \quad t_p = 10^{\xi_p} \equiv \pi \tau_p. \end{aligned}$$

При этом соотношение

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i^0}{i_0} = 10^{(\xi_p - \xi_w)} \quad (5.190)$$

можно считать условием реализации рассматриваемого случая.

§ 24. Кривая падения дебита

п. 24.1. Может оказаться весьма полезным способ определения ФП окрестности скважины по так называемой кривой падения дебита (КПД). Он по своей сути аналогичен методу обработки КВД.

Способ состоит в следующем. До снятия кривой падения дебита окрестность скважины должна оставаться невозмущённой с давлением, равным p_0 . В начальный момент времени ($t = 0$) скважину пускают в работу с постоянным забойным давлением p_{c0} . В результате чего на скважине поддерживается постоянный перепад давления, равный $\Delta p_{c0} = p_0 - p_{c0}$. Далее, начиная с начального момента времени, очевидно, скважина будет иметь переменный во времени дебит $Q(t)$, запись изменения которого и производится. Затем полученная таким образом КПД перестраивается в полулогарифмических координатах ($\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_{c0} / Q(t)$), и по формулам, соответствующим выбранной модели фильтрации, определяются ФП окрестности скважины.

п. 24.2. *КПД в модели Щелкачёва.* В этом случае задача определения давления математически формулируется так. Найти в области $r_c < r < \infty$ и для $t > 0$ решение уравнения пьезопроводности

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.2)$$

при следующих условиях: начальном

$$p(r, 0) = p_0 \quad (5.191)$$

и граничных

$$p(r_c, t) = p_{c0}, \quad p(\infty, t) = p_0. \quad (5.192)$$

Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$p(r, t) = p_0 - P(r, t). \quad (5.193)$$

Очевидно, функция $P(r, t)$ удовлетворяет тому же уравнению (5.2), нулевому начальному условию (5.6), а также следующим граничным условиям

$$P(r_c, t) = p_0 - p_{c0} = \Delta p_{c0}, \quad P(\infty, t) = 0. \quad (5.194)$$

Решение задачи (5.2), (5.6) и (5.194) получим с помощью преобразования Л-К. В результате его применения к уравнению (5.2) и граничным условиям (5.194) для изображения $P^*(r, s)$ имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^*}{dr} \right) - \frac{P^*(r, s)}{R^{*2}(s)} = 0, \quad (5.9)$$

$$P^*(r_c, s) = \Delta p_{c0}, \quad P^*(\infty, s) = 0, \quad (5.195)$$

где $R^*(s)$ определяется формулой (5.11).

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что решением задачи (5.9), (5.195) будет соотношение

$$P^*(r, s) = \Delta p_{c0} \frac{K_0(z)}{K_0(z_c)}, \quad (5.196)$$

где z и z_c определяются по формулам (5.13). Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что, начиная с весьма малых значений времени (~ 10 сек.), аргументы функций Бесселя для ближайшей окрестности скважины малы. Тогда, используя асимптотическое представление (5.27), имеем

$$\begin{aligned} P^*(r, s) &= \Delta p_{c0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\gamma z}\right)}{\ln\left(\frac{2}{\gamma z_c}\right)} = \Delta p_{c0} \left[1 - \frac{\ln\left(\frac{z}{z_c}\right)}{\ln\left(\frac{2}{\gamma z_c}\right)} \right] = \\ &= \Delta p_{c0} \left[1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{2}{\gamma r_c \sqrt{\frac{\kappa}{s}}}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.197)$$

Заменяя теперь, согласно методу Шепери и Тер-Хаара, в соотношении (5.197) параметр преобразования s на $1/\gamma t$, получим оригинал функции $P(r, t)$ в виде

$$P(r, t) = \Delta p_{c0} \left[1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\gamma} r_c}\right)} \right]$$

или

$$p(r, t) = p_0 - \Delta p_{c0} \left[1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_c}\right)}{\ln\left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\gamma} r_c}\right)} \right]. \quad (5.198)$$

Подсчитаем дебит скважины; по определению он равен

$$Q(t) = -2\pi h r_c w(r_c, t) = \frac{2\pi k h}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c}.$$

Следовательно, учитывая равенство (5.194), найдём

$$Q(t) = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{\Delta p_{c0}}{\ln\left(\frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\gamma} r_c}\right)}. \quad (5.199)$$

п. 24.3. Положим формулу (5.199) в основу обработки экспериментальной КПД, предварительно переписав её так:

$$\frac{\Delta p_{c0}}{Q(t)} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg\left(\frac{4\kappa t}{\gamma r_c^2}\right). \quad (5.200)$$

Заметим, что правые части соотношений (5.200) и (5.34) тождественно совпадают. Следовательно, зависимость (5.200), перестроенная в координатах $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_{c0}/Q(t)$, представляет собой прямую линию, совпадающую с графиком КВД (см. рис. 5.3). Таким образом, ФП окрестности скважины, полученные в результате обработки КПД, определяются формулами (5.35).

п. 24.4. Очевидно, аналогичные результаты будут иметь место при обработке КПД и в других моделях фильтрации.

ГЛАВА 6. Зондирование окрестности скважины периодическими возмущениями [9]

Наиболее информативным нестационарным гидродинамическим методом определения ФП окрестности скважины является зондирование её с помощью так называемых фильтрационных волн давления (ФВД). Суть способа состоит в следующем. Скважина работает с периодически (гармонически) меняющимся забойным давлением и тем самым задает возмущения в призабойной зоне. Откликом окрестности скважины на эти возмущения является периодически (гармонически) меняющийся дебит скважины, который, очевидно, будет зависеть не только от характеристик возмущающего забойного давления, но и от ФП призабойной зоны, её геологического строения и условий фильтрации.

В результате достаточной продолжительной работы скважины с периодически меняющимся забойным давлением в окрестности скважины устанавливается так называемый квазистационарный режим фильтрации, т.е. такой режим фильтрации, при котором забойное давление и дебит скважины, а также давление в её призабойной зоне изменяются во времени с одним и тем же периодом (частотой), но с различными амплитудами и сдвигами фаз. После установления в зоне дренирования скважины квазистационарного режима работы измеряют на ней изменение во времени забойного давления и дебита. Затем выделяют амплитудочастотные (АЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики этих сигналов в зависимости от частоты возмущения, по которым в дальнейшем и определяются ФП окрестности скважины. Очевидно, выделенные АЧХ и ФЧХ будут зависеть не только от задающей частоты, но и от строения коллектора окрестности скважины, её ФП и процесса распространения периодических возмущений. Поэтому ниже подробно рассматриваются характерные особенности распространения периодических возмущений в зависимости от принимаемой модели фильтрации для обработки АЧХ и ФЧХ, а также приводятся инженерные формулы для подсчёта ФП окрестности скважины.

§ 25. АЧХ и ФЧХ в модели классического упругого режима фильтрации (модель Щелкачёва)

п. 25.1. В условиях модели Щелкачёва распространение ФВД при работе скважины с гармонически меняющимся забойным давлением сводится к определению в области $r_c > r > \infty$ периодического решения уравнения пьезопроводности

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (5.2)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{aligned} p(r_c, t) &= p_{c0} + p_{cI}(\omega) \cos(\omega t + \delta_p) = \\ &= p_{c0} + \operatorname{Re} \{ p_{cI}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)] \}, \\ p(\infty, t) &= p_{c0}; \end{aligned} \quad (6.1)$$

здесь p_{c0} — постоянное давление, относительно которого колеблется забойное давление с амплитудой $p_{cI}(\omega)$, частотой ω и начальным сдвигом фазы δ_p .

При решении сформулированной выше задачи воспользуемся следующим приёмом. Введём в рассмотрение такую комплексную функцию $p^*(r, t)$, что $\operatorname{Re}\{p^*(r, t)\} = p(r, t) - p_{c0}$, и потребуем, чтобы $p^*(r, t)$ удовлетворяла бы уравнению (5.2) и граничным условиям

$$p^*(r_c, t) = p_c^*(t) = p_{cI}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)], \quad p^*(\infty, t) = 0. \quad (6.2)$$

Функцию $p^*(r, t)$ будем искать в виде

$$p^*(r, t) = P^*(r) \exp[i(\omega t + \delta_p)]. \quad (6.3)$$

Подставляя теперь соотношение (6.3) в уравнение (5.2) и граничные условия (6.2), соответственно получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP^*}{dr} \right) - \frac{P^*(r)}{R^{*2}(i\omega)} = 0, \quad (6.4)$$

$$P^*(r_c) = p_{cI}(\omega), \quad P^*(\infty) = 0; \quad (6.5)$$

здесь

$$R^*(i\omega) = \sqrt{\kappa/i\omega}. \quad (6.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$P^*(r) = p_{cI}(\omega) \frac{K_0(r/R^*)}{K_0(r_c/R^*)} \quad (6.7)$$

является решением граничной задачи (6.4), (6.5); тогда комплексная функция $p^*(r, t)$ представима в форме

$$p^*(r, t) = p_{cI}(\omega) \frac{K_0(r/R^*)}{K_0(r_c/R^*)} \exp[i(\omega t + \delta_p)]. \quad (6.8)$$

Таким образом, решение задачи (5.2), (6.1) запишется так:

$$p(r, t) = p_{c0} + p_{cI}(\omega) \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_0(r/R^*)}{K_0(r_c/R^*)} \exp[i(\omega t + \delta_p)] \right\}, \quad (6.9)$$

где

$$z = \frac{r}{R^*(i\omega)} = r \sqrt{i \frac{\omega}{\kappa}}, \quad z_c = \frac{r_c}{R^*(i\omega)}. \quad (6.10)$$

Перейдём к вычислению дебита скважины; он по определению равен

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_I(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = -2\pi h (rw)_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \frac{2\pi kh}{\mu} \operatorname{Re} \left(r \frac{\partial P^*}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) \operatorname{Re} \left\langle z_c \frac{K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где $Q_I(\omega)$ и δ_Q — соответственно амплитуда и начальный сдвиг фазы гармонических колебаний дебита скважины.

п. 25.2. Пусть на возмущающей скважине, работающей с гармонически меняющимся забойным давлением на различных частотах, ведётся одновременно запись изменения во времени забойного давления и дебита скважины, а именно:

$$\begin{aligned} p(r_c, t) &= p_c(t) = p_{c0} + p_{cl}(\omega) \cos(\omega t + \delta_p) = \\ &= p_{c0} + \operatorname{Re} \langle p_{cl}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)] \rangle, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$Q(t) = Q_I(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = \operatorname{Re} \langle Q_I(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_Q)] \rangle. \quad (6.13)$$

Для удобства дальнейшего исследования перейдём в область комплексных величин; тогда, основываясь на результатах (6.9) и (6.11), имеем

$$p^*(r_c, t) = p_c^*(t) = p_{cl}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)], \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_Q)] = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) \frac{z_c K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] \end{aligned} \quad (6.15)$$

Представим также комплексную величину z_c в показательной форме: $z_c = |z_c| \exp(i \arg z_c)$, где

$$|z_c| = \left| \frac{r_c}{R^*} \right| = r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}, \quad \arg z_c = \frac{\pi}{4}. \quad (6.16)$$

Отметим, что выделение реальных значений в соотношениях (6.9) и (6.11) сопряжено с большими затруднениями, а подчас практически это сделать и невозможно. Для облегчения процесса нахождения указанных выше значений выделим сначала асимптотические выражения функций (6.9) и (6.11) для весьма малых и весьма больших величин z

и z_c (что можно добиться за счёт частоты ω), а затем определим их реальные части.

п. 25.3. Рассмотрим сначала случай, когда фильтрационные параметры таковы, что во всём диапазоне практического изменения частоты ω модуль $|z_c| = |r_c/R^*| \ll 1$. Обозначим через ω^* то предельно максимальное значение частоты, когда ещё соблюдается неравенство $|z_c| \ll 1$. Тогда, воспользовавшись асимптотическими представлениями функций $K_0(z_c)$ и $K_1(z_c)$ для малых значений аргумента (5.27) и (5.19), запишем соотношение (6.15) в форме

$$\begin{aligned} Q^*(t) = Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\ln|\gamma z_c/2| + i \arg z_c} \cdot \\ \cdot \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_c/2|)^2 + (\pi/4)^2}} \cdot \\ \cdot \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p - \pi - \arctg \frac{\pi}{4 \ln|\gamma z_c/2|}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Сопоставляя левую и правую части в равенстве (6.17), получим следующие выражения для амплитудочастотных и фазочастотных характеристик:

$$Q_I(\omega) = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_c/2|)^2 + (\pi/4)^2}}, \quad (6.18)$$

$$\Delta\delta_Q = \delta_Q - \delta_p = -\pi - \arctg \frac{\pi}{4 \ln|\gamma z_c/2|}. \quad (6.19)$$

Очевидно, что весьма малые значения величины $|z_c|$ обеспечивают $|\gamma z_c/2| \ll 1$, и, следовательно, $|\ln(\gamma z_c/2)| \gg 1$; а тогда $\arg z_c / \ln|\gamma z_c/2| \cong 0$. Поэтому выражения (6.18) и (6.19) соответственно представимы так:

$$Q_I(\omega) \cong \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{|\ln|\gamma z_c/2||} = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\left| \ln\left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right) \right|}, \quad (6.20)$$

$$\Delta\delta_Q \cong -\pi. \quad (6.21)$$

При этом следует иметь в виду, что равенства (6.20) и (6.21) имеют место при изменении частоты ω в диапазоне $0 < \omega < \omega^*$.

Эти же самые результаты можно получить путём выделения асимптотического представления соотношения (6.8) с последующим нахожде-

нием комплексного дебита скважины. В самом деле. В случае весьма малых значений аргумента функций $K_0(z)$ и $K_0(z_c)$ формула (6.8) принимает вид

$$\begin{aligned} p^*(r, t) &= p_{cl}(\omega) \frac{\ln(\gamma z/2)}{\ln(\gamma z_c/2)} \exp\{i(\omega t + \delta_p)\} = \\ &= p_{cl}(\omega) \left(1 - \frac{\ln(r/r_c)}{\ln(2R^*/\gamma r_c)} \right) \exp\{i(\omega t + \delta_p)\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

При этом комплексный дебит будет определяться равенством (6.17).

Замечание. При построении графиков амплитудочастотных характеристик (АЧХ) в случае $|z_c| \ll 1$ целесообразно выбирать переменную по оси абсцисс в виде $\xi = -\ln \omega = \ln(1/\omega)$, так как при условии $|z_c| \ll 1$ частота ω всегда меньше единицы. Действительно, с одной стороны, условие $|z_c| = |r_c/R^*| = r_c \sqrt{\omega/\kappa} \ll 1$ требует, чтобы ω принадлежала бы интервалу $0 < \omega < \omega^* \ll \kappa/r_c^2$, а с другой — выражение $\ln\left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right)$ обращается в нуль при частоте $\omega_0 = 4\kappa/\gamma^2 r_c^2 \gg \omega^*$. Следовательно, в этом интервале частот

$$\left| \ln\left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right) \right| = -\ln\left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}}\right).$$

п. 25.4. Учитывая замечание, перепишем соотношение (6.20) в форме

$$\frac{p_{cl}(\omega)}{Q_I(\omega)} = \frac{\ln 10}{4\pi\sigma} \lg\left(\frac{4\kappa}{\gamma^2 r_c^2} \frac{1}{\omega}\right), \quad 1/\omega^* < 1/\omega < \infty. \quad (6.23)$$

Тогда, беря выражение (6.23) в основу обработки экспериментальных данных, полученных на различных частотах ($0 < \omega < \omega^*$), и осуществляя графическое построение отношения амплитуды забойного давления к амплитуде дебита скважины в координатах $\xi = \lg(1/\omega)$, $\eta = p_{cl}(\omega)/Q_I(\omega)$, получим прямолинейную зависимость, изображённую на рисунке 6.1, аналогичную графику рисунка 5.3.

Таким образом, по наклону $i^0 = \lg \alpha^0 = \lg 10/4\pi\sigma$ к оси абсцисс и отсекаемому на ней отрезку $\xi^0 = \lg(1/\omega^0) = \lg(\gamma^2 r_c^2/4\kappa)$ (см. рис. 6.1), определим ФП окрестности скважины, а именно

$$\sigma = \frac{kh}{\mu} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0}, \quad \frac{\kappa}{r_c^2} = \frac{\gamma^2}{4} 10^{-\xi^0}. \quad (6.24)$$

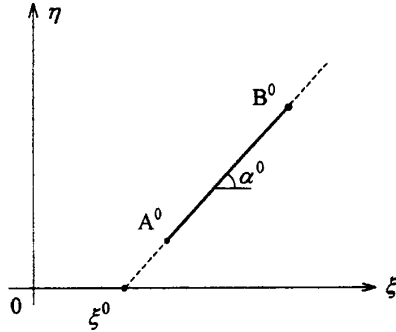


Рис. 6.1

Замечания. 1⁰. Аналогичные результаты имеют место при обработке экспериментальной КВД в модели Щелкачёва (сравни формулы (6.24) и (5.35)). В дальнейшем для получения рабочих формул, лежащих в основе обработки АЧХ рассматриваемой модели фильтрации, необходимо в рабочих формулах, положенных в основу обработки КВД, соответствующей исследуемой модели фильтрации, заменить t на $1/\omega$, а γ на γ^2 . Поэтому ниже, при рассмотрении случая $|z_c| \ll 1$ для остальных моделей фильтрации ограничимся только исследованием фазочастотных характеристик (ФЧХ).

2⁰. Фазочастотные характеристики в модели Щелкачёва не зависят от частоты (см. формулу (6.21)).

п. 25.5. Перейдём теперь к исследованию случая, когда фильтрационные параметры окрестности скважины таковы, что во всём диапазоне практического изменения ω модуль $|z_c| = |r_c/R^*| \gg 1$. Тогда, воспользовавшись асимптотическими представлениями функций $K_0(z_c)$ и $K_1(z_c)$ для больших значений аргумента

$$K_0(z_c) \cong K_1(z_c) \cong \sqrt{\pi/2z_c} e^{-z_c}, \quad (5.58)$$

представим соотношение (6.15) в виде

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) z_c \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p - \frac{3\pi}{4}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Из сопоставления левой и правой частей выражения (6.25) имеем

$$\eta = \bar{Q}_I^2(\omega) = \left(\frac{Q_I(\omega)}{p_{cI}(\omega)} \right)^2 = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa} \omega, \quad (6.26)$$

$$\Delta\delta_Q = \delta_Q - \delta_p = -\frac{3\pi}{4}, \quad (6.27)$$

где частота ω изменяется в диапазоне $\omega_* < \omega < \infty$, а ω_* является предельно минимальной частотой, когда ещё возможно пользоваться асимптотическими представлениями (5.58).

п. 25.6. Положим зависимость (6.26) в основу обработки АЧХ, полученных на различных частотах, с целью определения ФП окрестности скважины. Очевидно, функция $\eta = \bar{Q}_I^2(\omega)$ графически представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат и имеющую наклон $j^0 = \operatorname{tg} \theta^0 = 4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2 / \mu^2 \kappa$ к оси абсцисс (рис. 6.2). Тогда по наклону j^0 найдём:

$$\frac{\sigma^2 r_c^2}{\kappa} = \frac{j^0}{4\pi^2}. \quad (6.28)$$

Отметим, что и в случае $|z_c| \gg l$ ФЧХ не зависят от частоты ω .

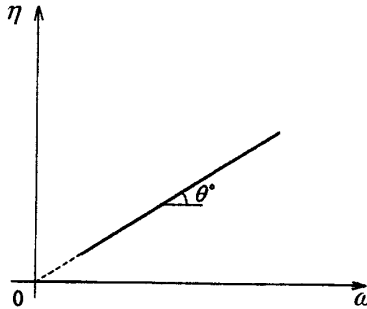


Рис. 6.2

§ 26. АЧХ и ФЧХ при неравномерном строении пористой среды (модель Христиановича)

п. 26.1. Течение жидкости в окрестности скважины согласно модели Христиановича осуществляется по закону фильтрации

$$w + \tau \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5.67)$$

а давление в этой окрестности удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (5.68)$$

Тогда распространение ФВД при работе скважины с гармонически меняющимся во времени забойным давлением сводится к нахождению периодического решения уравнения (5.68) при условиях (6.1).

Для определения решения задачи (5.68), (6.1) введём в рассмотрение такую комплексную функцию $p^*(r, t)$, что $Re\{p^*(r, t)\} = p(r, t) - p_{c0}$, и потребуем, чтобы $p^*(r, t)$ удовлетворяла бы уравнению (5.68) и граничным условиям (6.2). Далее, отыскивая функцию $p^*(r, t)$ в виде (6.3), а затем подставляя соотношение (6.3) в уравнение (5.68) и граничные условия (6.2), соответственно получим (6.4) и (6.5); здесь

$$R^*(i\omega) = \sqrt{\kappa/i\omega(I + i\omega\tau)}. \quad (6.29)$$

Решение задачи (6.4), (6.5) имеет вид (6.7) и, следовательно, $p^*(r, t)$ представимо в форме (6.8); таким образом, давление $p(r, t)$ определится выражением (9.9), где z , z_c соответственно равны

$$z = \frac{r}{R^*(i\omega)} = r \sqrt{\frac{i\omega(I + i\omega\tau)}{\kappa}}, \quad z_c = \frac{r_c}{R^*(i\omega)}. \quad (6.30)$$

Так как дебит скважины по определению равен $Q(t) = -2\pi h(rw)_{r=r_c}$, то, используя закон фильтрации (5.67), найдём

$$Q + \tau \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c}. \quad (6.31)$$

Введём теперь в рассмотрение такой комплексный дебит $Q^*(t)$, что $ReQ^*(t) = Q(t)$; тогда, очевидно, $Q^*(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} Q^* + \tau \frac{dQ^*}{dt} &= \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{c1}(\omega) \frac{z_c K_1(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Далее, представляя комплексный дебит в форме

$$Q^*(t) = Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\}, \quad (6.33)$$

где $Q_I(\omega)$ и δ_Q — соответственно амплитуда и сдвиг начальной фазы гармонических колебаний дебита скважины, и подставляя затем равенство (6.33) в уравнение (6.32), найдём

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cI}(\omega)}{1+i\omega\tau} \frac{z_c K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\}; \end{aligned} \quad (6.34)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_I(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cI}(\omega) \operatorname{Re} \left(\frac{z_c}{1+i\omega\tau} \frac{K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

п. 26.2. Предположим, что на возмущающей скважине одновременно производится на различных частотах запись изменения во времени забойного давления и дебита скважины, которые представимы соответственно в виде (6.12) и (6.13). Тогда комплексные величины забойного давления и дебита выразятся в форме

$$p^*(r_c, t) = p_c^*(t) = p_{cI}(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_p)\}, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cI}(\omega)}{1+i\omega\tau} \frac{z_c K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} \end{aligned} \quad (6.36)$$

При этом модуль и аргумент комплексной величины z_c запишутся так:

$$\begin{aligned} |z_c| &= |r_c/R^*| = r_c \sqrt{\omega/\kappa^4} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}, \\ \arg z_c &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \omega \tau. \end{aligned} \quad (6.37)$$

п. 26.3. Пусть в диапазоне изменения $0 < \omega < \omega^*$ модуль $|z_c| = |r_c/R^*| \ll 1$. Тогда для малых значений аргумента функций $K_0(z_c)$ и $K_I(z_c)$ имеют место асимптотические представления (5.27) и (5.19), и соотношение (6.34) в этом случае запишется так:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cI}(\omega)}{\ln(2/\gamma z_c)} \frac{\exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\}}{1+i\omega\tau} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cI}(\omega)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \frac{1}{\sqrt{(\ln|\gamma z_c/2|)^2 + (\arg z_c)^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi - \arctg \omega \tau - \arctg(\arg z_c / |\ln|\gamma z_c/2|))\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Сопоставление левых и правых частей равенства (6.38) даёт следующие выражения для амплитудочастотных и фазочастотных характеристик:

$$Q_I(\omega) = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \frac{I}{\sqrt{(\ln|\gamma z_c|)^2 + (\arg z_c)^2}}, \quad (6.39)$$

$$\Delta\delta_Q = \delta_Q - \delta_p = -\pi - \arctg \omega \tau - \arctg \left(\arg z_c / \ln|\gamma z_c|/2 \right). \quad (6.40)$$

Так как значения величины $|z_c|$ весьма малы, то $|\ln|\gamma z_c|/2| \gg 1$, а тогда $\arg z_c / |\ln|\gamma z_c|/2| \equiv 0$. Следовательно, соотношения (6.39) и (6.40) соответственно представимы в виде

$$\begin{aligned} Q_I(\omega) &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \frac{I}{|\ln|\gamma z_c|/2|} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{I}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \frac{p_{cl}(\omega)}{\left| \ln \left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \right|}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\Delta\delta_Q(\omega) = -\pi - \arctg \omega \tau. \quad (6.42)$$

Очевидно, с ростом частоты ω функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ монотонно убывает от $-\pi$ до значения $-\pi - \arctg \omega^* \tau > -3\pi/2$.

п. 26.4. Для обработки ФЧХ воспользуемся соотношением (6.42); график функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ приведён на рисунке 6.3. Очевидно, для малых значений ω ($\omega \sim 0$) функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ представима следующим асимптотическим выражением

$$\Delta\delta_Q(\omega) = -\pi - \tau \omega, \quad (6.43)$$

имеющим угловой коэффициент, равный $-\tau$, что является оценкой величины τ .

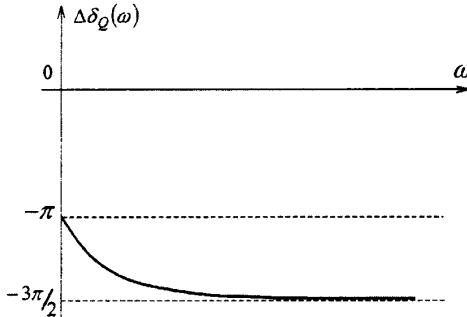


Рис. 6.3

п. 26.5. Займёмся теперь исследованием случая, когда ФП окрестности скважины и изменение частоты обеспечивают во всём диапазоне $\omega_* < \omega < \infty$ выполнение неравенства $|z_c| = |r_c/R^*| \gg 1$. Это позволяет воспользоваться асимптотическими представлениями (5.58) функций $K_0(z_c)$, $K_1(z_c)$ и записать комплексный дебит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)}{1+i\omega} z_c \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_{cl}(\omega)r_c}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p + \frac{1}{2}\arctg\omega\tau - \frac{5\pi}{4}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Сопоставляя левую и правую части в равенстве (6.44), найдём

$$\bar{Q}_I^2(\omega) = \left[\frac{Q_I(\omega)}{p_{cl}(\omega)} \right]^2 = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa} \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \quad (6.45)$$

$$\Delta\delta_Q(\omega) = \delta_Q - \delta_p = \frac{1}{2}\arctg\omega\tau - \frac{5\pi}{4}. \quad (6.46)$$

Заметим, что разность фаз $\Delta\delta_Q(\omega)$, определяемая формулой (6.46), в интервале частот $\omega_* < \omega < \infty$ представляет собой монотонно возрастающую функцию от значения $-\frac{5\pi}{4} < \frac{1}{2}\arctg\omega_*\tau - \frac{5\pi}{4}$ до $-\frac{3\pi}{4}$.

п. 26.6. Зависимость (6.45) положим в основу обработки квадрата отношения амплитуд дебита скважины и забойного давления для определения ФП окрестности скважины. Очевидно, функция $\eta = \bar{Q}_I^2(\omega)$ представляет собой линию, имеющую две различные асимптоты (рис. 6.4), одна из которых (для малых ω) имеет вид

$$\eta = \bar{Q}_I^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa} \omega, \quad (6.26)$$

проходит через начало координат и обладает наклоном к оси абсцисс, равным $j^0 = \operatorname{tg}\theta^0 = 4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2 / \mu^2 \kappa$; другая асимптота (для больших ω) — параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок

$$\bar{Q}_I^2(\infty) = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa \tau}. \quad (6.47)$$

Тогда по наклону j^0 найдём

$$\frac{\sigma^2 r_c^2}{\kappa} = \frac{j^0}{4\pi^2}, \quad (6.29)$$

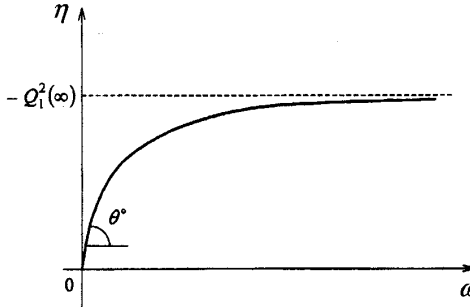


Рис. 6.4

а по величине $\bar{Q}_I^2(\infty)$, с учётом формулы (6.29), определим постоянную τ :

$$\tau = j^0 / \bar{Q}_I^2(\infty). \quad (6.48)$$

§ 27. АЧХ и ФЧХ в трещиновато-пористой среде (модель Баренблатта)

п. 27.1. Фильтрация в упругоёмких трещинах подчиняется закону Дарси

$$w_I(r, t) = -\frac{k_I}{\mu} \frac{\partial p_I}{\partial r}; \quad (6.49)$$

а давление в них удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\kappa'}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(p_I + \tau_2 \frac{\partial p_I}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial p_I}{\partial t} + \tau' \frac{\partial^2 p_I}{\partial t^2}. \quad (6.50)$$

Таким образом, распространение ФВД в упругоёмких трещинах при работе скважины с гармонически меняющимся во времени забойным давлением сводится к определению периодического решения уравнения (6.50) при граничных условиях

$$\begin{aligned} p_I(r_c, t) &= p_{Ic0} + p_{Icl}(\omega) \cos(\omega t + \delta_p) = \\ &= p_{Ic0} + \operatorname{Re} \left\langle p_{Icl}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)] \right\rangle, \\ p_I(\infty, t) &= p_{Ic0}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

При нахождении решения задачи (6.50), (6.51) применим тот же метод, что и в §§ 24, 25. Для этого введём комплексную функцию $p_I^*(r, t)$ и потребуем, чтобы, во-первых, $\operatorname{Re} \langle p^*(r, t) \rangle = p_I(r, t) - p_{Ic0}$ и, во-вторых, функция $p_I^*(r, t)$ удовлетворяла бы тому же уравнению (6.50) и следующим граничным условиям:

$$p_I^*(r_c, t) = p_{Icl}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)], \quad p_I^*(\infty, t) = 0. \quad (6.52)$$

Далее, сначала представим функцию $p_I^*(r, t)$ в форме

$$p_I^*(r, t) = P_I^*(r) \exp\{i(\omega t + \delta_p)\}, \quad (6.53)$$

затем подставим соотношение (6.53) в уравнение (6.50) и граничные условия (6.52), в результате чего соответственно получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP_I^*}{dr} \right) - \frac{P_I^*(r)}{R_I^{*2}(i\omega)} = 0, \quad (6.54)$$

$$P_I^*(r_c) = p_{Icl}(\omega), \quad P_I^*(\infty) = 0; \quad (6.55)$$

здесь

$$R_I^*(i\omega) = \sqrt{\frac{\kappa'(1 + i\omega\tau_2)}{i\omega(1 + i\omega\tau')}}. \quad (6.56)$$

Нетрудно убедиться в том, что решение задачи (6.54), (6.55) имеет вид

$$P_I^*(r) = p_{Icl}(\omega) \frac{K_0(z_I)}{K_0(z_{Ic})}, \quad (6.57)$$

где

$$z_I = \frac{r}{R_I^*(i\omega)} = r \sqrt{\frac{i\omega(1 + i\omega\tau')}{\kappa'(1 + i\omega\tau_2)}}, \quad z_{Ic} = \frac{r_c}{R_I^*(i\omega)}. \quad (6.58)$$

Следовательно, давление в упругоёмких трещинах можно представить так:

$$p_I(r, t) = p_{Ic0} + p_{Icl}(\omega) \operatorname{Re} \left\langle \frac{K_0(z_I)}{K_0(z_{Ic})} \exp\{i(\omega t + \delta_p)\} \right\rangle. \quad (6.59)$$

Подсчитаем также комплексный дебит скважины, он, очевидно, равен

$$\begin{aligned} Q_I^*(t) &= Q_{II}(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \frac{2\pi k_I h}{\mu} \left(r \frac{\partial p_I^*}{\partial \dots r} \right)_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{Icl}(\omega) z_{Ic} \frac{K_I(z_{Ic})}{K_0(z_{Ic})} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\}; \end{aligned} \quad (6.60)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} Q_I(t) &= Q_{II}(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{Icl}(\omega) \operatorname{Re} \left\langle z_{Ic} \frac{K_I(z_{Ic})}{K_0(z_{Ic})} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.61)$$

п. 27.2. Пусть на возмущающей скважине одновременно осуществляется запись изменений во времени как забойного давления, так и её дебита для различных частот; при этом комплексный дебит представим формулой (6.60), а комплексное забойное давление — в виде

$$p_I^*(r_c, t) = p_{Ic}^*(r_c) = p_{Icl}(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_p)\}. \quad (6.62)$$

Отметим, что для дальнейшего исследования комплексную величину z_{lc} , входящую в соотношения (6.60), (6.61) и (6.62), удобно записать в показательной форме, а именно $z_{lc} = |z_{lc}| e^{i \arg z_{lc}}$, где

$$|z_{lc}| = \left| \frac{r_c}{R_I^*} \right| = r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa'}} \sqrt[4]{\frac{I + \omega^2 \tau'^2}{I + \omega^2 \tau^2}}, \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \arg z_{lc} &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \omega \tau' - \frac{1}{2} \arctg \omega \tau_2 = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{I + \omega^2 \tau_2 \tau'}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

п. 27.3. Предположим сначала, что в диапазоне изменения частоты $0 < \omega < \omega^*$ модуль $|z_{lc}| = |r_c / R_I^*| < 1$, что позволяет воспользоваться асимптотическими представлениями (5.27) и (5.19) для функций $K_0(z_{lc})$ и $K_1(z_{lc})$. Тогда выражение комплексного дебита (6.60) можно записать так:

$$\begin{aligned} Q_I^*(t) &= Q_{II}(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} \frac{p_{lcI}(\omega)}{\ln(2/\gamma z_{lc})} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} \frac{p_{lcI}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_{lc}|/2)^2 + (\arg z_{lc})^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi - \arctg(\arg z_{lc} / |\ln|\gamma z_{lc}|/2|))\}; \end{aligned} \quad (6.65)$$

откуда из сопоставления правой и левой части имеем

$$Q_{II}(\omega) = \frac{2\pi k_I h}{\mu} \frac{p_{lcI}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_{lc}|/2)^2 + (\arg z_{lc})^2}}, \quad (6.66)$$

$$\Delta\delta_Q = \delta_Q - \delta_p = -\pi - \arctg(\arg z_{lc} / |\ln|\gamma z_{lc}|/2|). \quad (6.67)$$

Далее, в силу весьма малых значений величины $|z_{lc}|$, $|\ln|\gamma z_{lc}|/2| \gg 1$, а тогда $\arg z_{lc} / |\ln|\gamma z_{lc}|/2| \cong 0$; с учётом последнего равенства соотношение (6.67) примет вид

$$\Delta\delta_Q \cong -\pi, \quad (6.21)$$

и, следовательно, никакой дополнительной информации о ФП не даёт.

п. 27.4. Пусть теперь в диапазоне изменения частоты $\omega_* < \omega < \infty$ выполняется неравенство $|z_{lc}| = |r_c / R_I^*| \gg 1$. Тогда, воспользовавшись асим-

птотическими представлениями (5.58), запишем комплексный дебит следующим образом

$$\begin{aligned} Q_I^*(t) &= Q_{II}(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{IcI}(\omega) z_c \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{IcI}(\omega) r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa'}} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau'^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Сопоставляя левую и правую части выражения (6.68), найдём

$$\eta = \bar{Q}_{II}^2(\omega) = \left[\frac{Q_{II}(\omega)}{p_{IcI}(\omega)} \right]^2 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2}{\mu^2 \kappa'} \omega \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau'^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}}, \quad (6.69)$$

$$\Delta\delta_Q(\omega) = \delta_Q - \delta_p = -\frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'} - \frac{5\pi}{4}. \quad (6.70)$$

п. 27.5. Зависимость (6.69) положим в основу обработки АЧХ с целью определения ФП окрестности скважины. Очевидно, функция $\bar{Q}_{II}^2(\omega)$ является кривой линией, обладающей двумя асимптотическими выражениями соответственно для небольших

$$\eta = \bar{Q}_{II}^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa'} \omega \quad (\omega_* < \omega < 1/\tau') \quad (6.71)$$

и больших

$$\eta = \bar{Q}_{II}^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa_I} \omega \quad (\omega \gg 1/\tau_2) \quad (6.72)$$

частот. Асимптоты (6.71) и (6.72) проходят через начало координат и имеют различные наклоны к оси абсцисс, соответственно равные (рис. 6.5):

$$j_0 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa'}, \quad j^0 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa_I}; \quad (6.73)$$

причём $j_0 > j^0$. Там же, на рисунке 6.5, отмечены частоты ω_1 и ω_2 , характеризующие границы диапазона частот ($\omega_2 < \omega < \omega_1$) активного взаимодействия блоков с трещинами. Тогда по наклонам j_0 и j^0 найдём:

$$\frac{\sigma_I^2 r_c^2}{\kappa'} = \frac{j_0}{4\pi^2}, \quad \frac{\sigma_I^2 r_c^2}{\kappa_I} = \frac{j^0}{4\pi^2}, \quad \frac{\kappa_I}{\kappa'} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{j_0}{j^0}. \quad (6.74)$$

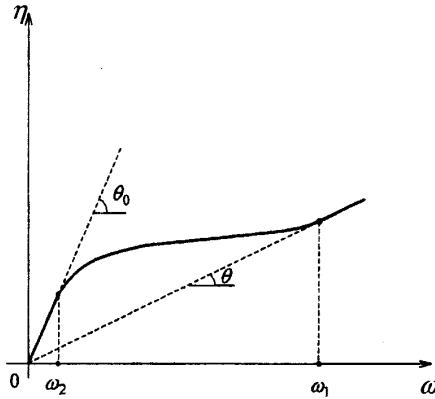


Рис. 6.5

И последнее. Для обработки ФЧХ используем соотношение (6.70); график функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ изображён на рисунке 6.6. Очевидно, он имеет

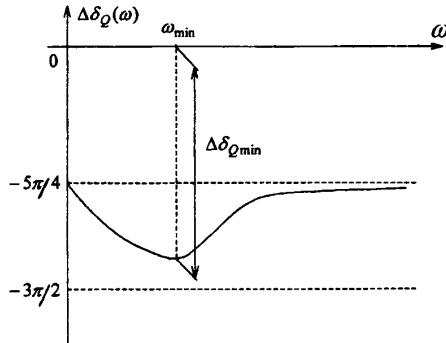


Рис. 6.6

при $\omega = 0$ наклон к оси абсцисс, равный

$$-\tilde{\omega}_0 = -\frac{\tau_2 - \tau'}{2}, \quad (6.75)$$

и с ростом ω сначала убывает от величины $-5\pi/4$ до некоторого минимального значения $-\Delta\delta_{Qmin}$ при $\omega = \omega_{min}$, а затем возрастает до $-5\pi/4$.

Нетрудно показать, что

$$\omega_{min} = 1/\sqrt{\tau_2 \tau'}, \quad (6.76)$$

$$\Delta\delta_{Qmin} = -\frac{5\pi}{4} - \arctg \frac{\tau_2 - \tau'}{2\sqrt{\tau_2 \tau'}}. \quad (6.77)$$

Тогда из равенств (6.75) и (6.76) найдём

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\min}^2}, \quad \tau' = -\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\min}^2}, \\ \tau_1 &= 1/2\tilde{\omega}_0\omega_{\min}^2.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Кроме этого из сравнения последнего равенства формул (6.74) и соотношения (6.78) нетрудно получить выражение

$$j_0/j^0 = 1 + 2\tilde{\omega}_0\omega_{\min}(\tilde{\omega}_0\omega_{\min} + \sqrt{1 + \tilde{\omega}_0^2\omega_{\min}^2}), \quad (6.79)$$

которое можно рассматривать в качестве условия реализации модели Баренблатта при упругоёмких трещинах и блоках.

п. 27.6. Замечание. Так как фильтрации по модели Баренблатта можно сопоставить эквивалентное течение жидкости в однородной пористой среде с релаксационным поведением элементарного количества жидкости (см. п. 3.4), то нет необходимости специально рассматривать обработку АЧХ и ФЧХ в модели, учитывающей релаксационное поведение количества жидкости в элементарном объёме, а достаточно в соответствующих формулах, полученных при обработке АЧХ и ФЧХ в модели Баренблатта, заменить κ' , τ_2 , τ' соответственно на κ , θ_m , θ_p .

§ 28. АЧХ и ФЧХ при неравновесном законе фильтрации

п. 28.1. Распространение ФВД при фильтрации по простейшему закону

$$w + \tau_w \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (5.161)$$

в упругой пористой среде, когда скважина достаточно долго работает с гармонически меняющимся во времени забойным давлением, задача сводится к следующей: найти в области $r_c < r < \infty$ периодическое решение уравнения

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \tau_p \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \tau_w \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (6.80)$$

удовлетворяющее граничным условиям (6.1).

Решение сформулированной выше задачи будем определять приёмом, использованным в предыдущих параграфах, а именно путём введения комплексного давления $p^*(r, t)$. Далее, потребуем, чтобы функция $p^*(r, t)$ удовлетворяла бы тому же уравнению (6.80) и граничным условиям (6.2). Затем, представляя функцию $p^*(r, t)$ в форме (6.3) и подставляя выражение (6.3) в уравнение (6.80) и граничные условия (6.2), соответственно получим (6.4) и (6.5); здесь

$$R^*(i\omega) = \sqrt{\frac{\kappa(I + i\omega\tau_p)}{i\omega(I + i\omega\tau_w)}}. \quad (6.81)$$

Нетрудно показать, что соотношение (6.7) является решением граничной задачи (6.4) и (6.5); таким образом, комплексное давление $p^*(r, t)$ представимо в виде (6.8), а решение исходной задачи запишется равенством (6.9), где

$$z = \frac{r}{R^*(i\omega)} = r \sqrt{\frac{i\omega(I + i\omega\tau_w)}{\kappa(I + i\omega\tau_p)}}, \quad z_c = \frac{r_c}{R^*(i\omega)}. \quad (6.82)$$

Определим также и комплексный дебит скважины:

$$Q^*(t) = Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\}. \quad (6.83)$$

Он, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Q^* + \tau_w \frac{dQ^*}{dt} &= \frac{2\pi kh}{\mu} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(p^* + \tau_p \frac{\partial p^*}{\partial t} \right) \right]_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) (I + i\omega\tau_p) z_c \frac{K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

решение которого с учётом (6.83) запишется так:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) \frac{I + i\omega\tau_p}{I + i\omega\tau_w} z_c \frac{K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

Следовательно, дебит скважины равен

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_I(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) \operatorname{Re} \left\langle \frac{I + i\omega\tau_p}{I + i\omega\tau_w} z_c \frac{K_I(z_c)}{K_0(z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.86)$$

п. 28.2. Пусть на забое возмущающей скважины одновременно регистрируются изменения во времени забойного давления и дебита на различных частотах. Для дальнейшего исследования удобно перейти к комплексным величинам забойного давления и дебита, их можно представить соответственно равенствами (6.14) и (6.85). Кроме этого нам понадобятся модуль и аргумент комплексной величины z_c , которые запишутся так:

$$\begin{aligned} |z_c| &= |r_c / R^*| = r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{I + \omega^2 \tau_w^2}{I + \omega^2 \tau_p^2}}, \\ \arg z_c &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{I + \omega^2 \tau_p \tau_w}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

п. 28.3. Предположим, что в диапазоне изменения $0 < \omega < \omega^*$ модуль $|z_c| = |r_c / R^*| \ll 1$. Тогда, воспользовавшись асимптотическими выраже-

ниями (5.27) и (5.19) для малых значений аргумента функций $K_0(z_c)$ и $K_1(z_c)$, представим соотношение (6.85) следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_l(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{1 + i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_w} \frac{p_{cl}(\omega)}{\ln(2/\gamma z_c)} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_p^2}{1 + \omega^2\tau_w^2}} \frac{p_{cl}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_c/2|)^2 + (\arg z_c)^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p - \pi + \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2\tau_p\tau_w} - \arctg \frac{\arg z_c}{\ln|\gamma z_c/2|}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Произведём дальнейшие упрощения в равенстве (6.88), связанные с весьма малыми значениями величины $|z_c|$, а именно пренебрежем в нём членом $\arg z_c / \ln|\gamma z_c/2|$. Далее, сравнение в упрощенном выражении левой и правой частей даёт

$$\begin{aligned} Q_l(\omega) &= \frac{2\pi kh}{\mu} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_p^2}{1 + \omega^2\tau_w^2}} \frac{p_{cl}(\omega)}{\ln|\gamma z_c/2|} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_p^2}{1 + \omega^2\tau_w^2}} \frac{p_{cl}(\omega)}{\ln\left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_w^2}{1 + \omega^2\tau_p^2}}\right)}, \quad (6.89) \\ \Delta\delta_Q &= \delta_Q - \delta_p = -\pi + \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2\tau_p\tau_w}. \quad (6.90) \end{aligned}$$

п. 28.4. Для обработки ФЧХ используем зависимость (6.90), график которой приведён на рисунке 6.7. Анализ функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ показывает, что

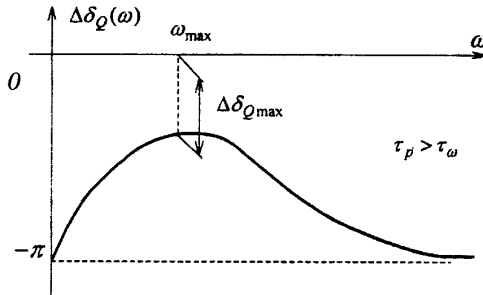


Рис. 6.7

она принимает при $\omega = 0, \infty$ значение $-\pi$, имеет при $\omega = 0$ наклон к оси абсцисс, равный

$$\tilde{\omega}_0 = \tau_p - \tau_w, \quad (6.91)$$

и обладает в точке $\omega = \omega_{\max}$ максимальным значением $\Delta\delta_{Q\max}$. Нетрудно показать, что

$$\omega_{\max} = \frac{I}{\sqrt{\tau_p \tau_w}}, \quad (6.92)$$

$$\Delta\delta_{Q\max} = -\pi + \arctg \frac{\tau_p - \tau_w}{2\sqrt{\tau_p \tau_w}}. \quad (6.93)$$

Тогда из равенств (6.91) и (6.92) определим

$$\tau_p = \frac{\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 4/\omega_{\max}^2}}{2}, \quad \tau_w = \frac{-\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 4/\omega_{\max}^2}}{2}; \quad (6.94)$$

откуда найдём

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{\omega_{\max}^2}{4} \left(\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 4/\omega_{\max}^2} \right)^2. \quad (6.95)$$

п. 28.5. Пусть теперь в диапазоне частот $\omega_* < \omega < \infty$ выполняется равенство $|z_c| = |r_c/R^*| \gg 1$. Тогда, используя асимптотическое представление (5.58), запишем комплексный дебит так:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= Q_I(\omega) \exp\{i(\omega t + \delta_Q)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) \frac{I + i\omega\tau_p}{I + i\omega\tau_w} z_c \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) r_c \sqrt{\frac{i\omega(I + i\omega\tau_p)}{\kappa(I + i\omega\tau_w)}} \exp\{i(\omega t + \delta_p - \pi)\} = \\ &= \frac{2\pi kh}{\mu} p_{cl}(\omega) r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{\frac{I + \omega^2\tau_p^2}{I + \omega^2\tau_w^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left\{i\left(\omega t + \delta_p + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{I + \omega^2\tau_p\tau_w} - \frac{3\pi}{4}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Из сопоставления левой и правой частей в равенстве (6.96) имеем

$$\eta = \bar{Q}_I^2(\omega) = \left[\frac{Q_I(\omega)}{p_{cl}(\omega)} \right]^2 = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa} \omega \sqrt{\frac{I + \omega^2\tau_p^2}{I + \omega^2\tau_w^2}}, \quad (6.97)$$

$$\Delta\delta_Q(\omega) = \delta_Q - \delta_p = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{I + \omega^2\tau_p\tau_w} - \frac{3\pi}{4}. \quad (6.98)$$

п. 28.6. Зависимость (6.97) положим в основу обработки АЧХ. Очевидно, функция $\eta = \bar{Q}_1^2(\omega)$ представляет собой линию с двумя асимптотами соответственно для небольших

$$\eta = \bar{Q}_1^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa} \omega \quad (\omega_* < \omega \ll 1/\tau_p, 1/\tau_w) \quad (6.26)$$

и больших

$$\eta = \bar{Q}_1^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa \tau_w} \omega \quad (\omega \gg 1/\tau_w, 1/\tau_p) \quad (6.99)$$

частот. Асимптоты (6.26) и (6.99) проходят через начало координат и имеют наклоны к оси абсцисс, соответственно равные

$$j_0 = \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa}, \quad j^0 = \operatorname{tg} \theta^0 = \frac{4\pi^2 k^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa \tau_w}; \quad (6.100)$$

причем $j^0 > j_0$ (рис. 6.8). Там же, на рис. 6.8, отмечены и частоты ω_1, ω_2 ;

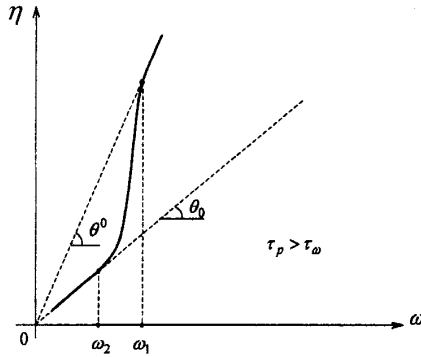


Рис. 6.8

при частотах $\omega > \omega_1$ влияние неравновесности в законе фильтрации практически отсутствует. Тогда по наклонам j_0 и j^0 найдём:

$$\frac{\sigma^2 r_c^2}{\kappa} = \frac{j_0}{4\pi^2}, \quad \frac{\sigma^2 r_c^2 \tau_p}{\kappa \tau_w} = \frac{j^0}{4\pi^2}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{j^0}{j_0}. \quad (6.101)$$

И наконец, для обработки ФЧХ воспользуемся соотношением (6.98), график которого изображён на рисунке 6.9. Из анализа функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ следует, что она при $\omega = 0, \infty$ принимает значение $-\pi$, имеет при $\omega = 0$ наклон к оси абсцисс, равный

$$\tilde{\omega}_0 = (\tau_p - \tau_w)/2, \quad (6.102)$$

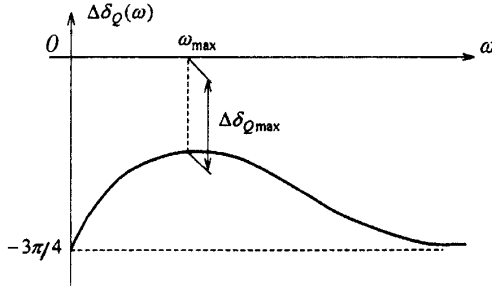


Рис. 6.9

и обладает в точке $\omega = \omega_{\max}$ максимальным значением $\Delta\delta_{Q\max}$, при этом $\omega_{\max}$ определяется формулой (6.92), $\Delta\delta_{Q\max}$ равно

$$\Delta\delta_{Q\max} = -\pi + \frac{1}{2} \arctg \frac{\tau_p - \tau_w}{2\sqrt{\tau_p \tau_w}}. \quad (6.103)$$

Тогда из равенств (6.102) и (6.92) найдём

$$\tau_p = \tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\max}^2}, \quad \tau_w = -\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\max}^2}, \quad (6.104)$$

откуда определим

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \omega_{\max}^2 \left(\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\max}^2} \right)^2. \quad (6.105)$$

Заметим, что из сопоставления третьей формулы в (6.101) с равенством (6.104) получим соотношение

$$\frac{j^0}{j_0} = \omega_{\max}^2 \left(\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 1/\omega_{\max}^2} \right)^2, \quad (6.106)$$

которое можно рассматривать в качестве условия реализации применяемой схемы фильтрации.

§ 29. АЧХ и ФЧХ в трещиновато-пористой среде при фильтрации по неравновесному закону

п. 29.1. Задача об определении давления в упругоёмких трещинах, когда фильтрация в них подчиняется неравновесному закону

$$w_l + \tau_w \frac{\partial w_l}{\partial t} = -\frac{k_l}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(p_l + \tau_p \frac{\partial p_l}{\partial t} \right), \quad (5.173)$$

а скважина достаточно долго работает с гармонически меняющимся во времени забойным давлением, сводится математически к следующему. Найти в области $r_c < r < \infty$ периодическое решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\kappa'}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[p_l + (\tau_2 + \tau_p) \frac{\partial p_l}{\partial t} + \tau_2 \tau_p \frac{\partial^2 p_l}{\partial t^2} \right] \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[p_l + (\tau' + \tau_w) \frac{\partial p_l}{\partial t} + \tau' \tau_w \frac{\partial^2 p_l}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (6.107)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} p_l(r_c, t) &= p_{lc0} + p_{lc1}(\omega) \cos(\omega t + \delta_p) = \\ &= p_{lc0} + \operatorname{Re} \{ p_{lc1}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)] \}, \\ p_l(\infty, t) &= p_{lc0}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Как и в предыдущих параграфах, введём в рассмотрение комплексную функцию $p_l^*(r, t)$ такую, что $\operatorname{Re} p_l^*(r, t) = p_l(r, t) - p_{lc0}$, и потребуем, чтобы $p_l^*(r, t)$ удовлетворяла уравнению (6.114) и граничным условиям

$$p_l^*(r_c, t) = p_{lc1}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_p)], \quad p_l^*(\infty, t) = 0. \quad (6.52)$$

Отыскивая функцию $p_l^*(r, t)$ в форме (6.53) и подставляя соотношение (6.53) в уравнение (6.107) и условия (6.51), соответственно получим (6.54) и (6.55), где

$$R_l^*(i\omega) = \frac{\kappa'(1 + i\omega\tau_2)(1 + i\omega\tau_p)}{\sqrt{i\omega(1 + i\omega\tau')(1 + i\omega\tau_w)}}. \quad (6.108)$$

Нетрудно показать, что решением задачи (6.54), (6.55) будет равенство (6.57), в котором

$$z_l = \frac{r}{R_l^*(i\omega)} = r \sqrt{\frac{i\omega(1 + i\omega\tau')(1 + i\omega\tau_w)}{\kappa'(1 + i\omega\tau_2)(1 + i\omega\tau_p)}}, \quad z_{lc} = \frac{r_c}{R_l^*(i\omega)}. \quad (6.109)$$

Следовательно, решение исходной задачи (6.107), (6.51) запишется в виде (6.59).

Перейдём к вычислению комплексного дебита скважины, определяемого по формуле (6.83). Он удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Q_l^* + \tau_w \frac{dQ_l^*}{dt} &= \frac{2\pi k_l h}{\mu} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(p_l^* + \tau_p \frac{\partial p_l^*}{\partial t} \right) \right]_{r=r_c} = \\ &= \frac{2\pi k_l h}{\mu} p_{lc1}(\omega) (1 + i\omega\tau_p) z_{lc} \frac{K_l(z_{lc})}{K_0(z_{lc})} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)], \end{aligned} \quad (6.110)$$

решение которого запишется так

$$Q_I^*(t) = Q_{II}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_Q)] = \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{Ic}(\omega) \frac{1 + i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_w} z_{Ic} \frac{K_I(z_{Ic})}{K_0(z_{Ic})} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] \quad (6.111)$$

Следовательно, дебит скважины представим равенством

$$Q_I(t) = Q_{II}(\omega) \cos(\omega t + \delta_Q) = \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{Ic}(\omega) \operatorname{Re} \left\langle \frac{1 + i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_w} z_{Ic} \frac{K_I(z_{Ic})}{K_0(z_{Ic})} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] \right\rangle \quad (6.112)$$

п. 29.2. Предположим, что на возмущающей скважине, работающей с гармонически меняющимся забойным давлением, ведётся одновременно запись изменения во времени забойного давления и дебита скважины на различных частотах. Представим соответствующие комплексные величины забойного давления и дебита выражениями (6.52) и (6.111). Выделим также модуль и аргумент величины z_{Ic} :

$$|z_{Ic}| = \left| \frac{r_c}{R_I^*} \right| = r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa'^4} \frac{(1 + \omega^2 \tau'^2)(1 + \omega^2 \tau_w^2)}{(1 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \omega^2 \tau_p^2)}}, \quad (6.113)$$

$$\arg z_{Ic} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w}.$$

п. 29.3. Рассмотрим сначала случай, когда в диапазоне изменения частот $0 < \omega < \omega^*$ $|z_{Ic}| = |r_c/R_I^*| \ll 1$. Тогда, воспользовавшись асимптотическими представлениями (5.27) и (5.19) для функций $K_0(z_{Ic})$ и $K_I(z_{Ic})$, запишем соотношение (6.111) в форме

$$Q_I^*(t) = Q_{II}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_Q)] = \frac{2\pi k_I h}{\mu} \frac{1 + i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_w} \frac{p_{Icl}(\omega)}{\ln(2/\gamma z_{Ic})} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] = \frac{2\pi k_I h}{\mu} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_w^2}} \frac{p_{Icl}(\omega)}{\sqrt{(\ln|\gamma z_{Ic}/2|)^2 + (\arg z_{Ic})^2}} \cdot \exp \left\{ i \left(\omega t + \delta_p - \pi + \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w} - \operatorname{arctg} \frac{\arg z_{Ic}}{\ln(\gamma z_{Ic}/2)} \right) \right\} \quad (6.114)$$

Далее, сопоставляя левую и правую части в равенстве (6.114) и учитывая при этом выполнение неравенства $|\ln(\gamma|z_{lc}|/2)| \gg \arg z_{lc}$, получим

$$\begin{aligned} Q_{II}(\omega) &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_w^2}} \frac{p_{lcI}(\omega)}{|\ln(\gamma|z_{lc}|/2)|} = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_w^2}} \frac{p_{lcI}(\omega)}{\left| \ln \left(\frac{\gamma r_c}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa'}} \sqrt{\frac{(1 + \omega^2 \tau'^2)(1 + \omega^2 \tau_w^2)}{(1 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \omega^2 \tau_p^2)}} \right) \right|}, \end{aligned} \quad (6.115)$$

$$\Delta\delta_Q(\omega) = \delta_Q - \delta_p = -\pi + \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w}. \quad (6.90)$$

п. 29.4. Обработка ФЧХ, определяемых равенством (6.90), будет полностью совпадать с методикой, изложенной в конце **п.28.4.**

п. 29.5. Предположим, что в диапазоне $\omega_* < \omega < \infty$ выполняется неравенство $|z_{lc}| = |r_c/R_I^*| \gg 1$. Тогда, используя асимптотические выражения (5.58), представим комплексный дебит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_I^*(t) &= Q_{II}(\omega) \exp[i(\omega t + \delta_Q)] = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{lcI}(\omega) \frac{1 + i\omega\tau_p}{1 + i\omega\tau_w} z_{lc} \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{lcI}(\omega) r_c \sqrt{\frac{i\omega(1 + i\omega\tau') (1 + i\omega\tau_p)}{\kappa' (1 + i\omega\tau_2) (1 + i\omega\tau_w)}} \cdot \exp[i(\omega t + \delta_p - \pi)] = \\ &= \frac{2\pi k_I h}{\mu} p_{lcI}(\omega) r_c \sqrt{\frac{\omega}{\kappa'}} \sqrt{\frac{(1 + \omega^2 \tau'^2)(1 + \omega^2 \tau_p^2)}{(1 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \omega^2 \tau_w^2)}} \cdot \\ &\quad \cdot \exp[i(\omega t + \delta_p + \Delta\delta_Q(\omega))] \end{aligned} \quad (6.116)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\delta_Q(\omega) &= \delta_Q - \delta_p = \\ &= \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'} - \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Из сопоставления амплитуд дебита левой и правой частей в равенстве (6.116) получим

$$\eta = \bar{Q}_{II}^2(\omega) = \left(\frac{Q_{II}}{p_{lcI}} \right)^2 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa'} \omega \sqrt{\frac{(1 + \omega^2 \tau'^2)(1 + \omega^2 \tau_p^2)}{(1 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \omega^2 \tau_w^2)}}. \quad (6.118)$$

п. 29.6. Зависимость (6.118) положим в основу обработки АЧХ. Очевидно, функция $\bar{Q}_{11}^2(\omega)$ представляет собой кривую, имеющую две основные асимптоты соответственно для небольших ($\omega_* < \omega \ll 1/\tau_2, 1/\tau', 1/\tau_p, 1/\tau_w$) и больших ($\omega \gg 1/\tau_2, 1/\tau', 1/\tau_p, 1/\tau_w$) частот, а именно

$$\eta = \bar{Q}_{11}^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa'} \omega, \quad (6.71)$$

$$\eta = \bar{Q}_{11}^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2 \tau' \tau_p}{\mu^2 \kappa' \tau_2 \tau_w} \omega = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa_I \tau_w} \omega. \quad (6.119)$$

При этом вид графика функции $\bar{Q}_{11}^2(\omega)$ будет определяться соотношением между величинами $\tau_2, \tau', \tau_p, \tau_w$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть сначала выполняется неравенство

$$\frac{1 + \omega^2 \tau'^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} < \frac{1 + \omega^2 \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_w^2}. \quad (6.120)$$

В этом случае наряду с основными асимптотами (6.71) и (6.119) функция $\eta = \bar{Q}_{11}^2(\omega)$ будет обладать “промежуточной” асимптотой вида

$$\eta = \bar{Q}_{11}^2(\omega) = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa' \tau_w} \omega. \quad (6.121)$$

Очевидно, асимптоты (6.71), (6.121) и (6.119) проходят через начало координат и имеют наклоны к оси абсцисс соответственно равные

$$j_0 = \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2}{\mu^2 \kappa'}, \quad j_{10}^0 = \operatorname{tg} \theta_{10}^0 = \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa' \tau_w}, \quad j^0 = \operatorname{tg} \theta^0 =$$

$$= \frac{4\pi^2 k_I^2 h^2 r_c^2 \tau_p}{\mu^2 \kappa_I \tau_w}; \text{ причём } j_{10}^0 > j_0. \text{ В качестве иллюстрации на рисунке 6.10}$$

приведены графики функции $\eta = \bar{Q}_{11}^2(\omega)$ при

$$a) \frac{\tau' \tau_p}{\tau_2 \tau_w} < 1 < \frac{\tau_p}{\tau_w}, \quad b) 1 < \frac{\tau' \tau_p}{\tau_2 \tau_w} < \frac{\tau_p}{\tau_w}.$$

Тогда по наклонам j_0, j_{10}^0, j^0 определим:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_I^2 r_c^2}{\kappa'} &= \frac{j_0}{4\pi^2}, \quad \frac{\sigma_I^2 r_c^2 \tau_p}{\kappa' \tau_w} = \frac{j_{10}^0}{4\pi^2}, \quad \frac{\sigma_I^2 r_c^2 \tau_p}{\kappa_I \tau_w} = \frac{j^0}{4\pi^2}, \\ \frac{\tau_p}{\tau_w} &= \frac{j_{10}^0}{j_0}, \quad \frac{\sigma_I^2 r_c^2}{\kappa_I} = \frac{j^0 j_0}{4\pi^2 j_{10}^0}, \quad \frac{\kappa_I}{\kappa'} = \frac{\tau_2}{\tau'} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{j_{10}^0}{j^0}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Замечание. Исследование других возможных случаев не приводится, их легко провести по методике, изложенной выше.

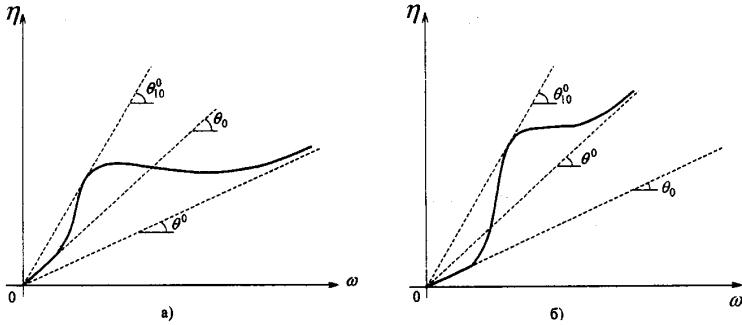


Рис. 6.10

п. 29.7. Перейдём к исследованию и обработке ФЧХ, определяемых соотношением

$$\Delta\delta_Q(\omega) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'}, \quad (6.117)$$

предполагая для определённости выполнение следующего неравенства:

$$\tau_p - \tau_w > \tau_2 - \tau' > 0. \quad (6.123)$$

Анализ функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ показывает, что она имеет при $\omega = 0$ наклон к оси абсцисс, равный

$$\tilde{\omega}_0 = (\tau_p - \tau_w) - (\tau_2 - \tau') > 0, \quad (6.124)$$

принимает одинаковые значения при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, а именно

$$\Delta\delta_Q(0) = \Delta\delta_Q(\infty) = -3\pi/4, \quad (6.125)$$

и пересекает асимптоту $\Delta\delta_Q(\omega \sim \infty)$ в точке

$$\omega_{\Pi} = \sqrt{\frac{(\tau_p - \tau_w) - (\tau_2 - \tau')}{\tau_p \tau_w (\tau_2 - \tau') - \tau_2 \tau' (\tau_p - \tau_w)}}, \quad (6.126)$$

если числитель и знаменатель подкоренного выражения одного знака, т.е. в рассматриваемом случае знаменатель положителен. Из последнего следует, что

$$\frac{\tau_p \tau_w}{\tau_2 \tau'} > \frac{\tau_p - \tau_w}{\tau_2 - \tau'} > 0. \quad (6.127)$$

Таким образом, функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ будет принимать не менее одного экстремального (максимального) значения.

Исследование функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ на экстремум приводит к нахождению положительных корней следующего алгебраического уравнения:

$$a_6\omega^6 + a_4\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0 = 0, \quad (6.128)$$

постоянные коэффициенты которого $a_i = a_i(\tau_p, \tau_w, \tau_2, \tau')$ не выписаны ввиду их громоздкости. Согласно правилу знаков Декарта [15] число положительных корней уравнения (6.128) не более числа перемен знака в ряду последовательности его коэффициентов. Так как наибольшее число указанных перемен знаков три, то и функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ имеет, вообще говоря, не более трех экстремумов, причём если график функции $\Delta\delta_Q(\omega)$ пересекает прямую $\Delta\delta_Q(\omega) = -3\pi/4$, то она обязательно будет иметь два экстремума. На рисунке 6.11 изображён график функции $\Delta\delta_Q(\omega)$, когда соблюдается неравенство (6.123).

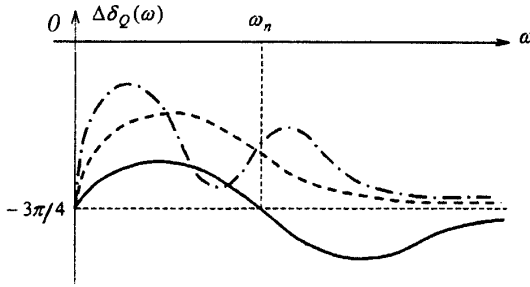


Рис. 6.11

Выделим два предельных случая, а именно когда частота ω находится в области малых ($\omega^2 \ll 1/\tau_p\tau_w, 1/\tau_2\tau'$) или больших ($\omega^2 \gg 1/\tau_p\tau_w, \tau_2\tau'$) значений. В области малых значений частоты соотношение (6.117) можно записать так:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_Q(\omega) &= -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \omega(\tau_p - \tau_w) - \frac{1}{2} \arctg \omega(\tau_2 - \tau') = \\ &= -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{[\omega(\tau_p - \tau_w) - (\tau_2 - \tau')]}{1 + \omega^2(\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau')}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

Легко видеть, что в точке

$$\omega_{\text{э0}} = \frac{1}{\sqrt{(\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau')}} \quad (\omega_{\text{э0}} \ll 1/\tau_p\tau_w, 1/\tau_2\tau') \quad (6.130)$$

функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ принимает максимальное значение, равное

$$\Delta\delta_Q(\omega_{\text{э0}}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{(\tau_p - \tau_w) - (\tau_2 - \tau')}{2\sqrt{(\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau')}}. \quad (6.131)$$

Пусть теперь частота находится в области больших значений. Тогда соотношение (6.117) можно представить так:

$$\begin{aligned}\Delta\delta_Q(\omega) &= -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_p - \tau_w}{\omega \tau_p \tau_w} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_2 - \tau'}{\omega \tau_1 \tau'} = \\ &= -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega [\tau_2 \tau' (\tau_p - \tau_w) - \tau_p \tau_w (\tau_2 - \tau')]}{(\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau') + \omega^2 \tau_p \tau_w \tau_2 \tau'}.\end{aligned}\quad (6.132)$$

Нетрудно показать, что в точке

$$\omega_{\infty} = \sqrt{\frac{(\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau')}{\tau_p \tau_w \tau_2 \tau'}} \quad (\omega_{\infty} \gg 1/\tau_p \tau_w, 1/\tau_2 \tau') \quad (6.133)$$

функция $\Delta\delta_Q(\omega)$ принимает экстремальное значение, равное

$$\Delta\delta(\omega_{\infty}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_2 \tau' (\tau_p - \tau_w) - \tau_p \tau_w (\tau_2 - \tau')}{2\sqrt{\tau_p \tau_w \tau_2 \tau'} (\tau_p - \tau_w)(\tau_2 - \tau')}; \quad (6.134)$$

очевидно, если $\tau_p \tau_w (\tau_2 - \tau') > \tau_2 \tau' (\tau_p - \tau_w)$, т.е. точка пересечения $\omega = \omega_{\Pi}$ существует, то имеет место минимум; в противном случае — максимум. В последнем случае вне интервала малых и больших частот имеется ещё одна экстремальная точка, соответствующая минимуму функции $\Delta\delta_Q(\omega)$.

При обработке ФЧХ в области малых значений частоты ω поступим следующим образом. Из равенств (6.124) и (6.130) нетрудно получить

$$\begin{aligned}\tau_p - \tau_w &= \frac{\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 4/\omega_{\infty}^2}}{2}, \\ \tau_2 - \tau' &= \frac{-\tilde{\omega}_0 + \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 + 4/\omega_{\infty}^2}}{2}.\end{aligned}\quad (6.135)$$

Затем для дальнейшего определения значений постоянных $\tau_p, \tau_w, \tau_2, \tau'$ необходимо привлекать результаты обработки АЧХ из формул (3.122).

Подставляя значения $\tau_p - \tau_w$ и $\tau_2 - \tau'$, определяемые формулами (6.135), в соотношение (6.131), получим условие реализации данной схемы в форме

$$\Delta\delta_Q(\omega_{\infty}) = -\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\infty}}{4}. \quad (6.136)$$

При обработке ФЧХ из области больших значений ω следует использовать равенства (6.133) и (6.134), а также результаты обработки АЧХ.

Замечание. Исследование и обработка ФЧХ в случае выполнения условия

$$\tau_2 - \tau' > \tau_p - \tau_w \quad (6.137)$$

проводится способом, изложенным выше; они здесь не приводятся.

ЧАСТЬ III ПРОМЫСЛОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ГЛАВА 7. КВД и КПД в терригенных коллекторах [11,16]

§ 30. *Обработка и анализ результатов*

п. 30.1. Как отмечалось во введении, группа под руководством проф. Непримерова Н.Н. накопила большой промысловый материал исследования пластов и скважин гидродинамическими методами, в частности, по определению ФП окрестности скважин. Этот опыт показывает [15,16], что наиболее точные и воспроизводимые результаты измерений получаются в тех случаях, когда исследуемая скважина вскрывает только один пласт, литологически выдержанный на достаточно большом пространстве. Вторым фактором, упрощающим проведение фундаментальных исследований, является использование в качестве объекта нагнетательных скважин. В этом случае измерения изменений во времени дебита или давления можно проводить на устье скважины. При этом возможный диапазон изменения давления или дебита на нагнетательных скважинах в несколько раз больше, чем на добывающих. В качестве третьего обстоятельства, упрощающего проведение экспериментов в промысловых условиях, в работе [11] для девонского горизонта D_1 Ромашкинского месторождения было показано, что оптимальным временем для переходных процессов можно считать 5 часов (300 минут). За это время круговая область основного влияния скважины не будет превышать в радиусе 200–400 метров, что не превосходит характерного для горизонта D_1 размера литологических однородностей.

п. 30.2. Ниже проанализируем результаты промысловых экспериментов, полученных на ряде нагнетательных скважин, проведенных летом 1976 г. на Ромашкинском месторождении. Все исследуемые скважины вскрывают однопластовые системы горизонта D_1 . Промысловые эксперименты на всех скважинах проводились по одной и той же схеме.

Сначала нагнетательную скважину после длительного простоя, когда её окрестность можно считать невозмущённой ($p = p_0$), резко пускают на самоизлив. При этом перепад давления на забое скважины, очевидно, будет постоянным и пропорциональным весу столба жидкости, находящейся в скважине ($\Delta p(r_c, t) = \Delta p_{c0}$). С момента начала работы скважины на самоизлив проводится запись изменения во времени дебита скважины ($Q(t)$) в течение 300 минут. Таким образом, на скважине снималась так называе-

мая кривая падения дебита (КПД). Далее скважина продолжала работать на самоизлив до следующего дня. При этом дебит скважины практически стабилизировался ($Q(t) \cong Q_0$). Затем режим работы её резко прекращается. С этого момента времени, в тот же временной интервал 300 минут, осуществляется запись изменения во времени перепада забойного давления ($\Delta p(r_c, t) = \Delta p_c(t)$).

Так как оба эксперимента проводятся на одной и той же скважине и непосредственно следуют один за другим, то, очевидно, ФП, определённые по КПД и КВД, должны быть практически одинаковыми. Для наглядности сопоставления соответствующих кривых лучше всего изображать оба преобразованных графика в координатах $(\Delta p_{c0}/Q(t), \lg t)$ и $(\Delta p_c(t)/Q_0, \lg t)$ на одном рисунке с “обобщённой” ординатой $(\Delta p_c/Q)$, полагая для КПД $\Delta p_c = \Delta p_{c0}$ и $Q = Q(t)$, для КВД, наоборот, — $\Delta p_c = \Delta p_c(t)$ и $Q = Q_0$.

п. 30.3. Изложенное в п.п. 30.1, 30.2 проиллюстрируем на примере обработки КПД и КВД, снятых летом 1976 г. на скважине 7270 Алькеевской площади Ромашкинского месторождения [11]. Эта скважина в то время была нагнетательной; она обладала хорошей приёмистостью и вскрывала

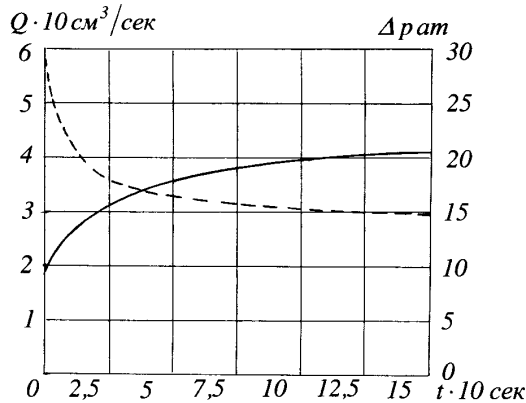


Рис. 7.1

достаточно однородную однопластовую систему. В отличие от остальных нагнетательных скважин, по которым будет приведён экспериментальный материал, скважина 7270 не имела обсадной колонны против продуктивного горизонта и поэтому эксплуатировалась с так называемым “открытым” забоем.

На рисунке 7.1 приведены графики КПД и КВД: а) КПД (пунктирная линия) замерена после пуска скважины из длительного простоя на самоизлив, при этом $\Delta p_{c0} = 23 \text{ атм}$; б) КВД (сплошная линия) замерена после за-

крытия скважины, причём $Q_0 = 2780 \text{ см}^3/\text{сек}$. Соответствующий табличный материал замеров на скважине 7270 приведён в таблице 7.1.

Таблица 7.1

t мин.	27.08.1976 г.		28.08.1976 г.	
	КПД		КВД	
	$\frac{I}{Q} \cdot 10^5$	$\frac{\Delta p_0}{Q} \cdot 10^3$	Δp	$\frac{\Delta p}{Q_0} \cdot 10^3$
1	17,50	4,02	9,45	3,40
2	19,10	4,41	10,50	3,78
3	20,10	4,62	11,00	3,95
4	20,80	4,78	11,50	4,14
5	21,30	4,90	11,85	4,26
7	22,00	5,06	12,30	4,42
10	22,85	5,25	13,00	4,67
15	24,00	5,52	13,70	4,92
20	24,80	5,72	14,50	5,21
30	26,10	6,02	15,35	5,52
40	26,90	6,17	16,10	5,80
50	27,50	6,33	16,60	5,97
70	28,60	6,58	17,50	6,30
100	29,80	6,85	18,40	6,61
150	31,70	7,16	19,50	7,00
200	32,20	7,41	20,20	7,25
300	33,60	7,72	21,00	7,55

На рисунке 7.2 изображены перестроенные в координатах $(\eta = \Delta p_{c0}/Q(t), \xi = \lg t)$ и $(\eta = \Delta p_c(t)/Q_0, \xi = \lg t)$ соответственно графики КПД (верхняя линия) и КВД (нижняя линия). Там же точками отмечены данные, приведённые в таблице 7.1.

Каждая из КВД и КПД состоит из двух прямолинейных звеньев различного наклона к оси абсцисс; причём наклон для малых значений времени меньше, нежели наклон для больших времён. Это указывает на то, что динамический коэффициент проницаемости больше статического. Далее, излом звеньев происходит примерно в одно и то же время ($\xi^* = \lg t^* \sim 3,5$, около $3000 \text{ сек} \approx 50 \text{ мин}$). По прошествии этого времени неравновесность в фильтрации прекращается, и, согласно ПЗП, фильтрация в окрестности скважины полностью описывается моделью Щелкачёва.

п. 30.4. Последовательность вычислений ФП по формулам (5.189) подробно изложим на примере обработки перестроенной в полулогарифмических координатах КПД скважины 7270, снятой 27.08.1976 г. (рис. 7.2).

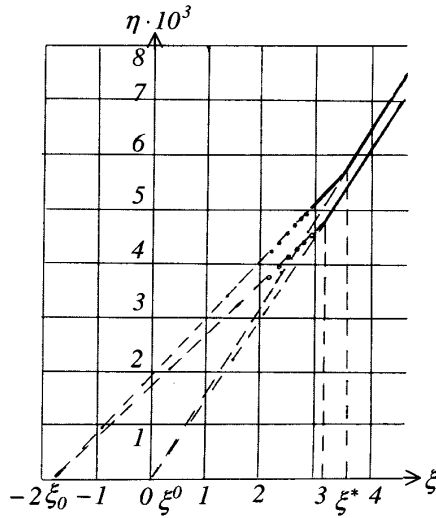


Рис. 7.2

1⁰. Сначала определяем наклоны $i^0 = \operatorname{tg} \alpha^0$, $i_0 = \operatorname{tg} \alpha_0$. Для их подсчёта можно использовать отношение соответствующих катетов прямоугольных треугольников; эти наклоны соответственно равны

$$10^3 i^0 = 6,5/4 \cong 1,63, \quad 10^3 i_0 = 6,3/5,8 \cong 1,09$$

или

$$i^0 = 1,63 \cdot 10^{-3}, \quad i_0 = 1,09 \cdot 10^{-3}. \quad (7.1)$$

С их помощью находим отношение времён релаксации τ_p / τ_w , а именно

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i^0}{i_0} \cong 1,5. \quad (7.2)$$

2⁰. Подсчитываем теперь динамический и статический коэффициенты гидропроводности, т.е.

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{\ln 10}{4\pi i_0} \frac{0,1832}{1,09} 10^3 \cong 168,$$

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{\ln 10}{4\pi i^0} = \frac{0,1832}{1,63} 10^3 \cong 112$$

или

$$\sigma_{\text{дин}} = 168 \frac{\partial \text{см.}}{\text{смз.}}, \quad \sigma_{\text{ст}} = 112 \frac{\partial \text{см.}}{\text{смз.}}. \quad (7.3)$$

3⁰. Затем вычисляем динамический и статический коэффициенты пьезопроводности, предварительно определив из графика КВД величины $\xi_0 = -1,8$, $\xi^0 = 0$; таким образом, имеем

$$\frac{\kappa_{дин}}{r_c^2} = \frac{\kappa_{ст}}{r_c^2} \frac{\theta_m}{\theta_p} \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi_0} = \frac{1,78}{4} 10^{1,8} = 0,445 \cdot 63,1 \cong 28,1,$$

$$\frac{\kappa_{ст}}{r_c^2} = \frac{\gamma}{4} 10^{-\xi^0} = \frac{1,78}{4} 10^0 = 0,445$$

или

$$\frac{\kappa_{дин}}{r_c^2} = 28,1 \frac{1}{сек}, \quad \frac{\kappa_{ст}}{r_c^2} = 0,445 \frac{1}{сек}. \quad (7.4)$$

4⁰. Очевидно, отношение величин $\kappa_{дин}$ и $\kappa_{ст}$ с использованием формулы (7.2) позволяет найти отношение постоянных релаксации $\theta_m/\theta_p = 10^{1,8} i_0/i^0 = 63,1 \cdot 1,08/1,62 \cong 42,1$; следовательно

$$\frac{\theta_m}{\theta_p} = 42,1. \quad (7.5)$$

5⁰. График КВД указывает на то, что излом его в точке $t^* = 10^{3,6} \cong 3980$ сек совпадает со временем t_p . Это обстоятельство позволяет определить постоянную $\tau_p = t_p/3$, входящую в неравновесный закон фильтрации; она равна

$$\tau_p \cong 1327 \text{ сек}. \quad (7.6)$$

А тогда легко находится и вторая постоянная в законе фильтрации $\tau_w = \tau_p i_0/i^0$:

$$\tau_w \cong 884 \text{ сек}. \quad (7.7)$$

Полученные результаты (7.2) – (7.7) входят во второй столбец таблицы 7.2.

п. 30.5. Убедимся теперь в том, что время t^* излома графика КВД не может совпадать со временем t_m окончания релаксационного поведения количества жидкости в элементарном объёме. В самом деле. Пусть $t_m = 3980$ сек. Тогда $\theta_m = t_m/3 \cong 1327$ сек и $\theta_p = 10^{(\xi^0 - \xi_0)} i_0/i^0 \cong 95$ сек. Следовательно, отношение $\theta_m/\theta_p \cong 14$; при этом $\tau_p/\tau_w = 10^{(\xi^0 - \xi_0)} \theta_p/\theta_m \cong 4,5$. Полученные величины θ_p/θ_m и τ_p/τ_w не согласуются с соответствующими значениями в формулах (7.5) и (7.2).

И наконец, по изложенной выше схеме был обработан график КВД скважины 7270, снятой 28.08.1976 г.; результаты расчётов входят в третий столбец таблицы 7.2.

Таблица 7.2

	7270		2100		1724а		
дата	27.08. 1976	28.08. 1976	07.08. 1976	08.08. 1976	17.07. 1976	18.07. 1976	28.08. 1977
тип	КПД	КВД	КПД	КВД	КПД	КВД	КПД
Δp_0	23	---	59	---	60	---	64
Q_0	---	2780	---	7000	---	300	---
τ_p/τ_w	1,50	1,13	1,44	1,47	2,03	2,06	2,31
θ_m/θ_p	42,1	56,8	6,9	16,9	2,02	0,01	6,4
$\sigma_{дин}$	168	207	130	155	163	163	163
$\sigma_{см}$	112	183	90,4	108	79	79	70,6
$\kappa_{дин}/r_c^2$	28,1	28,1	2,7	14,1	14,1	0,011	0,114
$\kappa_{см}/r_c^2$	0,445	0,445	0,05	2,0	2,0	0,001	0,001
$lg t^*$	3,60	3,13	3,01	3,13	3,53	3,53	3,60
τ_p	1327	450	336	450	1129	1129	1309
τ_w	884	400	233	306	543	543	567

п. 30.6. Результаты определения ФП скважин 7279, 2100 и 1724а.

Этим же способом обработаны КПД и КВД скважин 2100 и 1724а, полученные 7–8. и 17 – 18.08.1976 г. Перестроенные в полулогарифмических координатах, они приведены на рисунках 7.3 и 7.4. Результаты обработки их содержатся в 4–7 столбцах таблицы 7.2.

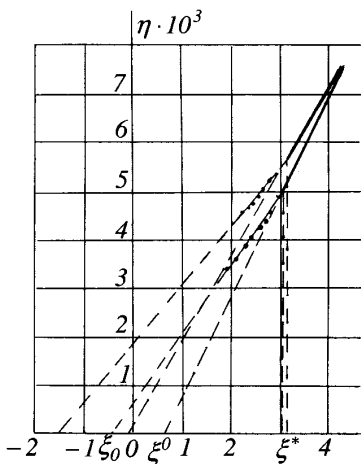


Рис. 7.3

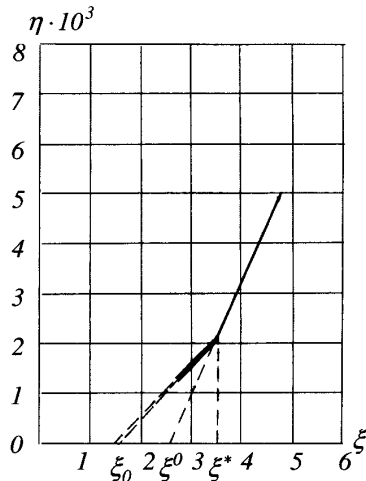


Рис. 7.4

Анализ данных, представленных на рисунках 7.2–7.4, а также в таблице 7.2, показывает, что поведения КПД и КВД исследованных скважин качественно совпадают; небольшое различие в поведении КПД (отмечено точками) и КВД (отмечено кружочками) наблюдалось лишь на скважине 2100. Наиболее надёжные и близкие результаты содержатся в столбцах τ_p/τ_w , $\sigma_{дин}$, $\sigma_{ст}$, lgt^* , τ_p , τ_w таблицы 7.2. Это связано с тем, что их величины в конечном итоге находятся по наклонам звеньев и их пересечениям, определяемым достаточно точно.

И последнее. С целью проверки повторяемости результатов исследований, проведённых на скважинах в 1976 г., летом 1977г. были осуществлены на тех же скважинах повторные исследования КПД и КВД; результаты обработки экспериментального материала дали удовлетворительные совпадения с предыдущими. В частности, на рисунке 7.5 приведён график КПД

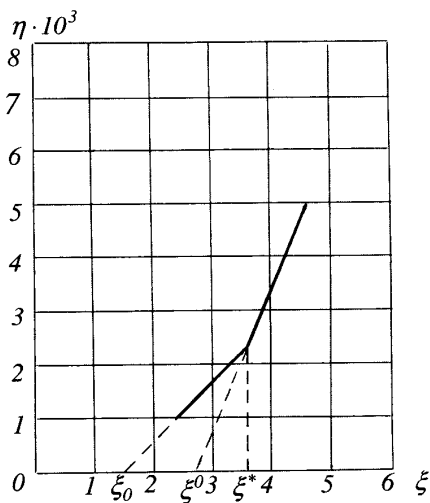


Рис. 7.5

скважины 1724а; данные его обработки содержатся в 8-ом столбце таблицы 7.2. Как перестроенная в полулогарифмических координатах КПД, так и результаты её обработки показывают достаточно хорошую согласованность с данными 1976 г.

ГЛАВА 8. КВД в карбонатных коллекторах [10]

§ 31. Обработка и анализ результатов

п. 31.1. Физическая модель карбонатного коллектора трещиновато-пористого типа. Постановка эксперимента вообще и промыслового в ча-

стности невозможна без построения физической модели фильтрации в карбонатных коллекторах, которая основывается на обобщении различных экспериментальных данных с минимальным привлечением элементов математических моделей. На построенной физической модели и общих положениях теории линейного отклика обосновывается методика промыслового эксперимента, а также осуществляется его проведение. Обобщаются полученные экспериментальные данные, и разрабатывается гидродинамическая модель, адекватно описывающая фильтрацию в изучаемой среде.

Наиболее полное обобщение экспериментальных данных, которые могут быть использованы при построении физической модели карбонатных коллекторов месторождений Татарстана, проведено в работе [10]. Ими являются данные анализа кернового материала, гидродинамических исследований, в частности, закачиваемых в пласты меченых жидкостей, визуальных исследований трещиноватости в массивах горных пород, методы сейсмолокации бокового обзора и др. Из приведённого в работе [10] анализа следует, что наиболее характерной особенностью карбонатных коллекторов является их трещиноватость. Трещины подразделяются на макро- и микротрещины. Длина макротрещин по керну изменяется от 0,05 до 0,5 м. Преобладает субвертикальное направление трещин, меньше наклонных (до 30 %), реже отмечаются макротрещины, расположенные под углом 45^0 . Макротрещины оперяются микротрещинами с раскрытостью от 5 до 30 мкм. Трещинная пористость незначительная – сотые и в редких случаях десятые доли процента. В то же время общая пористость колеблется от 5 до 21 %. Трещинная проницаемость достигает $0,05 \div 0,08 \text{ мкм}^2$.

Приведённый выше анализ строения карбонатного коллектора трещиновато-пористого типа позволяет воспользоваться моделью Баренблатта с неравновесным законом фильтрации в трещинах.

п. 31.2. Требования к объекту исследования. Для получения достоверных результатов исследований по созданию методики обработки КВД в трещиновато-пористых средах и интерпретации полученных данных был сформулирован ряд требований, предъявляемых к объекту изучения. Основные из них следующие.

Во-первых, объект должен быть однопластовым, однородным и насыщенным в основном “одноцветной” (либо водой, либо нефтью) жидкостью. Во-вторых, он должен обеспечивать достаточно длительную работу скважины с постоянными дебитом Q_{10} и забойным давлением $p_{1с0}$, необходимыми для обеспечения стационарного режима в окрестности скважины в течение 3–5-ти суток.

Сформулированным выше требованиям отвечали нагнетательные 1987, 4878, 4869 и добывающие 13082, 4788, 4532 скважины.

п. 31.3. Результаты определения ФП скважины 1987. Изучение скважины Беркет-Ключевского месторождения проводилось в период с 24

по 29 июля 1993 г. Перед началом снятия КВД скважина работала с дебитом $Q_{10} = 350 \text{ см}^3/\text{сек}$ и забойным давлением $p_{1c0} = 108,37 \text{ ат}$. Затем она была остановлена, и на ней велась регистрация изменения уровня жидкости в стволе скважины, так как она “недоливала” до устья 26 м. По данным понижения уровня пресной воды были рассчитаны текущие изменения во времени давления $\Delta p_{1c}(t)$ (рис. 8.1) и дебит оттока жидкости $Q_l(t)$ (рис. 8.2);

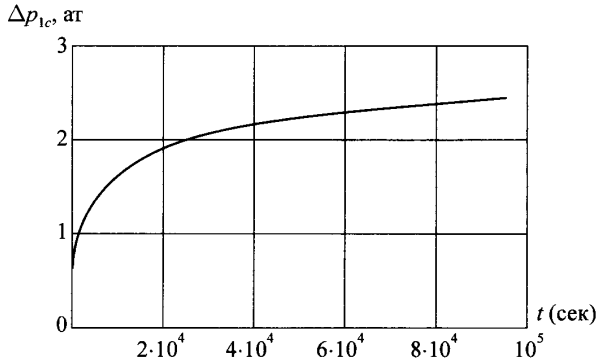


Рис. 8.1

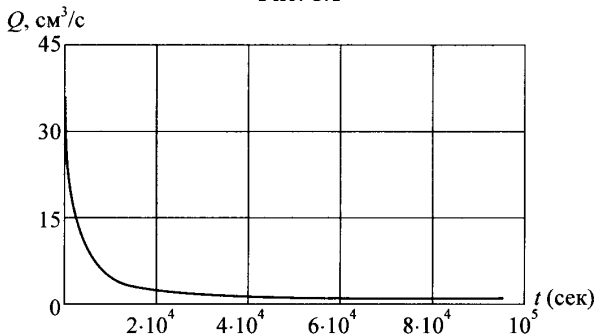


Рис. 8.2

они приведены в таблице 8.1 в третьей и четвертой колонках. Там же указано соответствующее время (в секундах) и его десятичный логарифм (первая и вторая колонка), а также комплекс $\Delta p_{1c}(t) \cdot 10^3 / (Q_{10} - Q_l(t))$ (пятая колонка). Характерной особенностью кривых $\Delta p_{1c}(t)$ и $Q_l(t)$ является то, что для их выхода на установившиеся значения потребовалось более 26 часов.

Таблица 8.1

t сек.	lgt	$\Delta p_{lc}(t)$	$Q_l(t)$	$\frac{\Delta p_{lc}(t)}{Q_{l0} - Q_l(t)} \cdot 10^3$
20	1,30	0,08	212	0,59
40	1,60	0,09	50,9	0,31
700	2,85	0,76	34,0	2,38
950	2,98	0,84	34,0	2,63
1140	3,06	0,89	33,9	2,79
1260	3,10	0,94	30,0	2,91
1530	3,18	0,99	23,1	3,00
1760	3,25	1,03	23,3	3,12
2060	3,31	1,08	17,6	3,22
2380	3,38	1,13	16,5	3,36
2770	3,44	1,17	15,5	3,47
3160	3,50	1,22	13,8	3,60
3660	3,56	1,27	10,8	3,71
4230	3,63	1,32	10,7	3,86
4800	3,68	1,36	9,70	3,96
5460	3,74	1,41	8,80	4,10
5640	3,75	1,46	8,14	4,23
7080	3,85	1,50	7,22	4,34
9000	3,95	1,60	5,33	4,60
10920	4,04	1,68	4,50	4,82
13800	4,14	1,78	3,50	5,09
15540	4,19	1,83	2,50	5,22
17700	4,25	1,89	2,30	5,39
20880	4,32	1,97	2,03	5,61
26160	4,42	2,07	1,80	5,89
47700	4,68	2,41	1,12	6,85
54900	4,74	2,50	0,98	7,10
60540	4,78	2,55	0,94	7,24
65700	4,82	2,60	0,89	7,38
72900	4,88	2,67	0,74	7,58
81180	4,91	2,74	0,74	7,78
87300	4,94	2,78	0,71	7,89
94680	4,98	2,79	0,57	7,89

п. 31.4. Для вычисления ФП воспользуемся формулами (5.184). Для этого перестраиваем КВД скважины 1987 в полулогарифмических

координатах: $\xi = \lg t$, $\eta = \Delta p_{lc}(t) \cdot 10^3 / (Q_{10} - Q_1(t))$, график которой изображён на рисунке 8.3.

Обработку КВД проведём в последовательности, изложенной в п. 30.4. В результате чего получим

$$i_1^0 \cong 5,3 \cdot 10^{-3}, \quad i_{10} \cong 1,7 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_1^0}{i_{10}} \cong 3,1; \quad (8.1)$$

$$\sigma_{lcm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_1^0} \cong 35,2 \frac{\partial.см.}{смз.}, \quad \sigma_{lдин} = \sigma_{lcm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 109,1 \frac{\partial.см.}{смз.}; \quad (8.2)$$

$$\frac{r_c^2}{K_l} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong 186 \text{ с.}, \quad \frac{r_c^2}{K'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_l^0} \cong 7083 \text{ с.}; \quad (8.3)$$

$$t_2 \cong 10^{\xi_2} = 56230 \text{ с.}, \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_1^0} 10^{(\xi_l^0 - \xi_{10})} \cong 32,3, \quad (8.4)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 18743 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong 599 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong 2360 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 7316 \text{ с.} \quad (8.5)$$

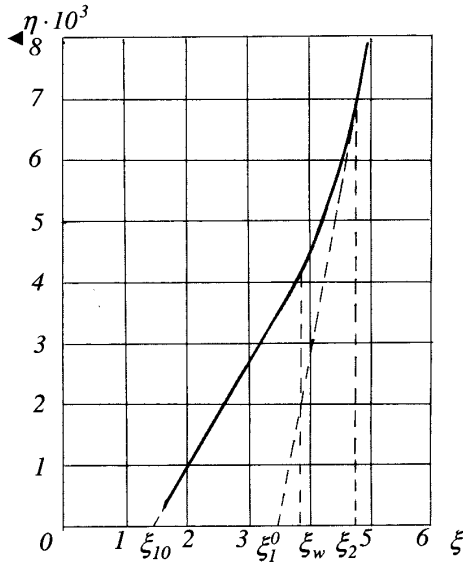


Рис. 8.3

п. 31.5. Результаты определения ФП скважины 4878. Исследования на скважине 4878 месторождения Полянка проводились с 3 по 4.10.1993 г.

Скважина относилась к разряду “переливающих”, т.е. во время эксперимента она была полностью заполнена водой. Перед остановкой она работала с дебитом $Q_{10} = 230 \text{ см}^3/\text{сек}$ и забойным давлением $p_{1c0} = 120,1 \text{ ат}$. После закрытия скважины на ней проводилась запись изменения во времени давления $p_{1c}(t)$. Вид КВД, перестроенной в полулогарифмических координатах, представлен на рисунке 8.4.

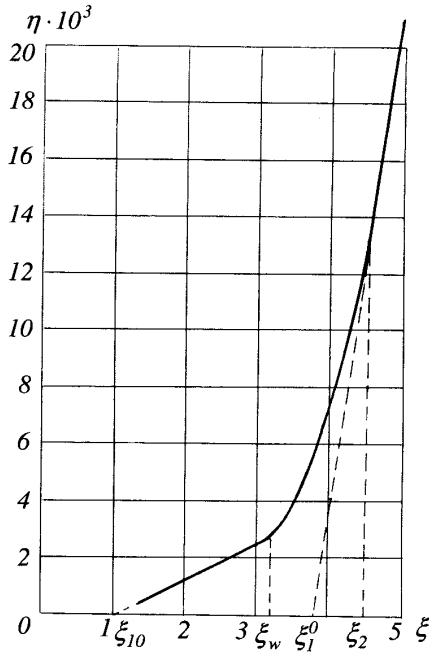


Рис. 8.4

Определение ФП осуществим по формулам (5.184) и в последовательности, изложенной в п. 29.4. В итоге найдём

$$i_l^0 \cong 5,3 \cdot 10^{-3}, \quad i_{l0} \cong 1,7 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_l^0}{i_{l0}} \cong 3,1; \quad (8.6)$$

$$\sigma_{lcm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_l^0} \cong 34,6 \frac{\partial.см.}{снз.}, \quad \sigma_{lдин} = \sigma_{lcm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 107,3 \frac{\partial.см.}{снз.}; \quad (8.7)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_1} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong 310 \text{ с.}, \quad \frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_l^0} \cong 12640 \text{ с.}; \quad (8.8)$$

$$t_2 \cong 10^{\xi_2} = 31620 \text{ с.}, \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_1^0} 10^{(\xi_1^0 - \xi_{10})} \cong 41,5, \quad (8.9)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 10540 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{40,5} \cong 260 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong 60 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 818 \text{ с.}. \quad (8.10)$$

п. 31.6. Результаты определения ФП скважины 4869. Скважина 4869 месторождения Полянка была исследована 6–7.10.1993 г. Она, как и скважина 4878, относилась к типу “переливающих”. Потому текущий дебит $Q_1(t)$ после её остановки равен нулю. Скважина до начала эксперимента работала с дебитом $Q_{10} = 800 \text{ см}^3/\text{сек}$. В связи с тем, что манометр не удалось опустить на забой скважины ввиду непроходимости её ствола, замеры изменения во времени давления проводились на устье скважины. При этом устьевое давление до закрытия скважины равнялось $27,7 \text{ ат}$. Таким образом, КВД строилась с использованием текущего устьевое давления.

График КВД, перестроенный в полулогарифмических координатах, изображён на рисунке 8.5. Из рисунка 8.5 видно, что в районе $\xi = \lg t \cong 4,5$

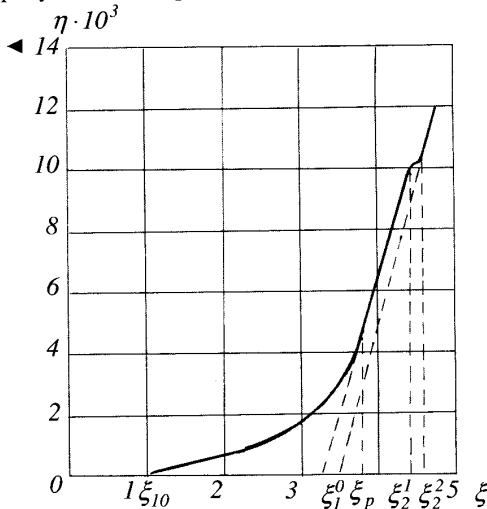


Рис. 8.5

на графике имеется небольшая “полочка”; при этом наклоны к графику до её образования и после практически совпадают. Такое поведение КВД можно объяснить следующим образом. Ко времени $t_2^{(1)} = 10^{\xi_2^{(1)}}$ процесс,

связанный с неравномерностью закона фильтрации, завершился, и коэффициент гидропроводности окрестности скважины определяется его стационарным значением. Переток жидкости из блоков в трещины всё ещё продолжается; он полностью прекратится после времени $t_2^{(2)} = 10^{\xi_2^{(2)}}$.

Как и прежде, обработку КВД проведём по схеме, изложенной в п. 30.4, используя формулы (5.184). Тогда имеем

$$i_{10} \cong 0,6 \cdot 10^{-3}, \quad i_l^0 \cong 9,3 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_l^0}{i_{10}} \cong 15,5; \quad (8.11)$$

$$\sigma_{lcm} \cong \frac{\ln 10}{4\pi i_l^0} = 19,7 \frac{\partial.см.}{снз.}, \quad \sigma_{lдин} = \sigma_{lcm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 305 \frac{\partial.см.}{снз.}; \quad (8.12)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_l} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong 29 с., \quad \frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_l^0} \cong 648 с.; \quad (8.13)$$

$$t_2 \cong 10^{\xi_l^{(2)}} \cong 39810 с., \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_l} = \frac{i_{10}}{i_l^0} 10^{(\xi_l^0 - \xi_{10})} \cong 22,6 с., \quad (8.14)$$

$$\tau_2 = \frac{10^{\xi_l^{(2)}}}{3} \cong 13270 с., \quad \tau_l \cong 614 с.;$$

$$\tau_w \cong 209 с., \quad \tau_p \cong 3240 с.. \quad (8.15)$$

п. 31.7. Результаты определения ФП скважины 13082. Скважина 13082 Шегурчинского месторождения была исследована летом 1995 г. Дебит Q_{10} до закрытия скважины равнялся $\approx 19 м^3/сут \cong 217 см^3/с$. В затрубье скважины, напротив кровли пласта, снималась разность $\Delta p_{lc}(t)$ текущего и начального давлений и дебит $Q_l(t)$ притока нефти в скважину после прекращения её работы.

График КВД, перестроенный в полулогарифмических координатах, изображен на рисунке 8.6. ФП находились по схеме, изложенной в п. 30.4 и с использованием формул (5.184). Ниже приведены результаты расчётов ФП скважины 13082.

$$i_{10} \cong \frac{0,03}{3,3} = 0,09, \quad i_l^0 = \frac{0,25}{1,8} \cong 0,14, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_l^0}{i_{10}} \cong 1,56; \quad (8.16)$$

$$\sigma_{lcm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_l^0} \cong \frac{0,1832}{0,117} \cong 1,31 \frac{\partial.см.}{снз.}, \quad (8.17)$$

$$\sigma_{lдин} = \sigma_{lcm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 2,04 \frac{\partial.см.}{снз.};$$

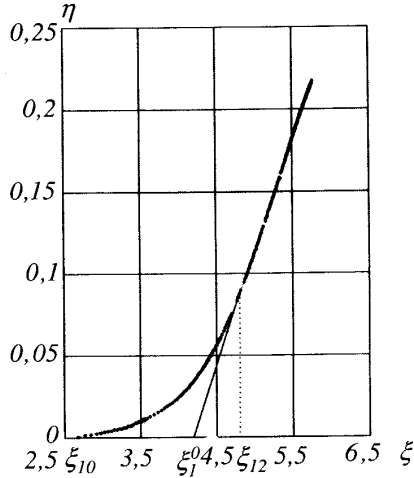


Рис. 8.6

$$\frac{r_c^2}{\kappa_l} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong \frac{11,7 \cdot 4}{1,78} 10^{2,7} \cong 13180 \text{ с.}, \quad (8.18)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_l^0} \cong \frac{4 \cdot 10^{4,2}}{1,78} \cong 35500 \text{ с.};$$

$$t_2 = 10^{\xi_2} \cong 10^{4,75} \cong 56230 \text{ с.},$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_l^0} 10^{(\xi_l^0 - \xi_{10})} \cong \frac{10^{1,5}}{1,56} \cong 21, \quad (8.19)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 18743 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{20} \cong 937 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong \frac{10^{\xi_w}}{3} \cong \frac{10^{3,5}}{3} \cong 1050 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 1,56 \cdot \tau_w \cong 1638 \text{ с.} \quad (8.20)$$

п. 31.8. Результаты определения ФП скважины 4788. Скважина 4788 Шегурчинского месторождения исследовалась летом 1995 г. Дебит скважины Q_{10} , предшествующий её остановке, был равен $\approx 13,5 \text{ м}^3/\text{сут} \cong 156,2 \text{ см}^3/\text{с}$. В затрубье скважины, практически против кровле пласта, регистрировались разность текущего и начального давлений $\Delta p_{lc}(t)$, а также $Q_l(t)$ притока нефти в скважину после прекращения её работы.

График перестроенной КВД в полулогарифмических координатах представлен на рисунке 8.7.

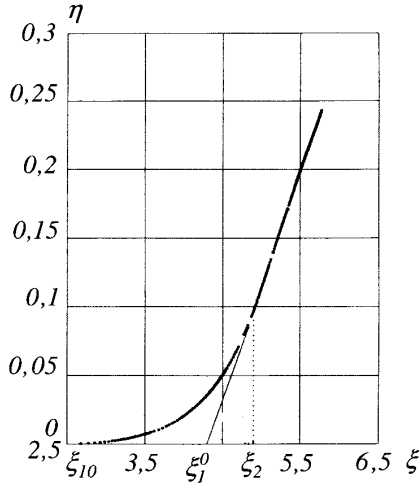


Рис. 8.7

Результаты определения ФП по графику КВД в последовательности, изложенной в п.30.4, и с использованием формул (5.184) следующие:

$$i_{10} \cong \frac{0,03}{3,3} = 0,01, \quad i_l^0 \cong \frac{0,283}{1,7} \cong 0,166, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_l^0}{i_{10}} \cong 16,6; \quad (8.21)$$

$$\sigma_{lcm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_l^0} \cong \frac{0,1832}{0,116} \cong 1,10 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}}, \quad (8.22)$$

$$\sigma_{l\text{дин}} = \sigma_{lcm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 18,26 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}};$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_l} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong \frac{16,6 \cdot 4}{1,78} 10^{2,65} \cong 17574 \text{ с.}, \quad (8.23)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_l^0} \cong \frac{4 \cdot 10^{4,25}}{1,78} \cong 40000 \text{ с.};$$

$$t_2 = 10^{\xi_2} \cong 10^{4,9} \cong 79430 \text{ с.},$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_l^0} 10^{(\xi_l^0 - \xi_{10})} \cong \frac{10^{1,55}}{16,6} \cong 2,14, \quad (8.24)$$

$$\tau_2 = \frac{t_2}{3} \cong 26500 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{1,14} \cong 23245 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong \frac{10^{\xi_w}}{3} \frac{10^{3,5}}{3} \cong 1050 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 16,6 \cdot \tau_w \cong 17400 \text{ с.} \quad (8.25)$$

п. 31.9. *Результаты определения ФП скважины 4532.* Добывающая скважина 4532 Архангельского месторождения была исследована летом 1996 г. Дебит Q_{10} перед закрытием скважины равнялся $2,7 \text{ м}^3/\text{сут} \cong 31,3 \text{ см}^3/\text{с}$. Против продуктивной части пласта регистрировались разность $\Delta p_{1c}(t)$ текущего и начального давлений и дебит $Q_1(t)$ притока жидкости в скважину после прекращения её работы.

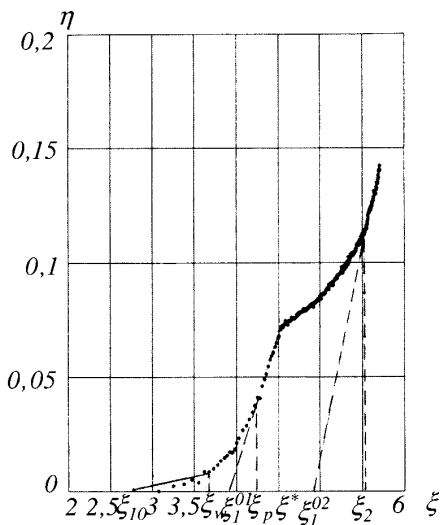


Рис. 8.8

На рисунке 8.8 приведён график КВД, перестроенный в полулогарифмических координатах. Вид его напоминает график КВД нагнетательной скважины 4869 (см. рис. 8.5); он имеет сильно выраженный излом в районе абсциссы $\xi^* = \lg t^*$. Характерно, что наклоны прямолинейных частей графика до абсциссы ξ^* и после завершения перетока жидкости из блоков в трещины ($\xi_{12} = \lg t_2$) одинаковы ($i_{11}^{02} = i_{11}^{01} = t_1^0$). Это обстоятельство указывает на то, что неравновесный закон фильтрации практически прекратил своё влияние на КВД до времени $t_p = 10^{\xi_p}$.

Определяя ФП по графику КВД в последовательности, изложенной в п. 30.4, и используя при этом формулы (5.184) получим следующие результаты.

$$i_{10} \cong \frac{0,025}{3,25} \cong 0,008, \quad i_1^0 \cong \frac{0,016}{1,25} \cong 0,013, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_i^0}{i_{10}} \cong 1,63; \quad (8.26)$$

$$\sigma_{1cm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_1^0} \cong \frac{0,1832}{0,013} \cong 14,1 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}}, \quad (8.27)$$

$$\sigma_{1\text{дин}} = \sigma_{1cm} \frac{\tau_p}{\tau_w} \cong 23,0 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}};$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_1} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong \frac{16 \cdot 4}{1,78} 10^{2,75} \cong 20217 \text{ с.}, \quad (8.28)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_1^0} \cong \frac{4}{1,78} 10^{4,75} \cong 126416 \text{ с.};$$

$$t_2 = 10^{\xi_2} \cong 10^{5,5} \cong 354800 \text{ с.},$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_1^0} 10^{(\xi_1^0 - \xi_{10})} \cong \frac{10^2}{16} \cong 61,3, \quad (8.29)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 118267 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{60,3} \cong 1961 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong \frac{10^{\xi_w}}{3} \cong \frac{10^{3,75}}{3} \cong 1874 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 1,63 \tau_w \cong 29984 \text{ с.} \quad (8.30)$$

п. 31.10. В завершение данного параграфа приведём КВД скважины 223 Муслумовского месторождения с кавернозным коллектором и результаты обработки её по методике, изложенной в **п.30.4**. Также выпишем ФП окрестности скважины 849 того же месторождения.

График перестроенной в полулогарифмических координатах КВД скважины 223 изображён на рисунке 8.9; результаты определения ФП по нему следующие.

$$i_{10} \cong \frac{0,02}{2,2} \cong 0,01, \quad i_1^0 \cong \frac{0,133}{0,93} \cong 0,143, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_i^0}{i_{10}} \cong 14,3; \quad (8.31)$$

$$\sigma_{1cm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_1^0} \cong \frac{0,1832}{0,143} \cong 1,3 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}}, \quad (8.32)$$

$$\sigma_{1\text{дин}} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \sigma_{1cm} \cong 18,6 \frac{\text{д.см.}}{\text{смз.}};$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_1} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong \frac{14,3 \cdot 4}{1,78} 10^{1,2} \cong 6324 \text{ с.}, \quad (8.33)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_1^0} \cong \frac{4 \cdot 10^{3,57}}{1,78} \cong 8348 \text{ с.};$$

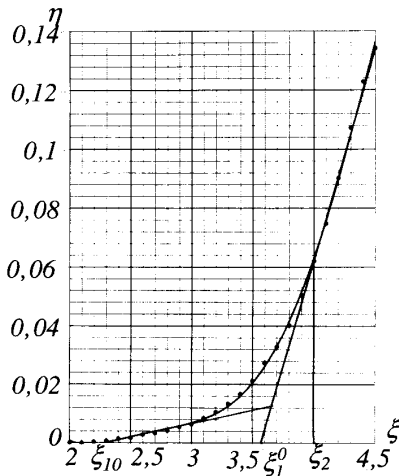


Рис. 8.9

$$t_2 = 10^{\xi_2} \cong 10^4 = 10000 \text{ с.},$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_1^0} 10^{(\xi_1^0 - \xi_{10})} \cong \frac{10^{2,22}}{14,3} \cong 11,6, \quad (8.34)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 3333 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{10,6} \cong 315 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong \frac{10^{\xi_w}}{3} \cong \frac{10^3}{3} \cong 333 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 14,3 \cdot \tau_w \cong 4762 \text{ с.} \quad (8.35)$$

ФП окрестности скважины 849 таковы:

$$i_{10} \cong \frac{0,018}{2,05} \cong 0,009, \quad i_1^0 \cong \frac{0,08}{0,85} \cong 0,09, \quad \frac{\tau_p}{\tau_w} = \frac{i_1^0}{i_{10}} \cong 10; \quad (8.36)$$

$$\sigma_{lcm} = \frac{\ln 10}{4\pi i_1^0} \cong \frac{0,1832}{0,09} \cong 2,04 \frac{\text{д.см.}}{\text{см.}}, \quad (8.37)$$

$$\sigma_{l\text{дин}} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \sigma_{lcm} \cong 20,4 \frac{\text{д.см.}}{\text{см.}};$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa_1} = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_{10}} \cong \frac{10 \cdot 4}{1,78} 10^{2,2} \cong 5820 \text{ с.}, \quad (8.38)$$

$$\frac{r_c^2}{\kappa'} = \frac{4}{\gamma} 10^{\xi_1^0} \cong \frac{4 \cdot 10^{3,35}}{1,78} \cong 5030 \text{ с.};$$

$$t_2 \cong 10^{\xi_2} \cong 10^{3,74} \cong 5495 \text{ с.},$$

$$\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1} = \frac{i_{10}}{i_1^0} 10^{(\xi_1^0 - \xi_{10})} \cong \frac{10^{1,15}}{10} \cong 1,4, \quad (8.39)$$

$$\tau_2 \cong \frac{t_2}{3} \cong 1832 \text{ с.}, \quad \tau_1 \cong \frac{\tau_2}{0,4} \cong 4580 \text{ с.};$$

$$\tau_w \cong \frac{10^{\xi_w}}{3} \cong \frac{10^{2,2}}{3} \cong 53 \text{ с.}, \quad \tau_p \cong 10 \cdot \tau_w \cong 530 \text{ с.} \quad (8.40)$$

п. 31.11. Анализ промысловых результатов по обработке КВД с целью определения ФП окрестностей скважин, вскрывающих карбонатные залежи, позволяет сделать вывод о том, что наиболее достоверными из параметров являются гидропроводность σ , комплекс r_c^2/κ' и время окончания массообмена между блоками и трещинами t_2 . Величины остальных ФП находятся приближённо и их можно считать ориентировочными. Для уточнения этих оставшихся ФП необходимо привлекать другие способы их нахождения, в частности, так называемый метод “самопрослушивания” окрестности скважины. Суть этого метода заключается в том, что скважину пускают в работу на периодическом режиме изменения давления (дебита) и снимают на этой же скважине отклик в виде периодической кривой изменения дебита (давления). Из сопоставления амплитудных и фазочастотных характеристик обеих кривых и определяются ФП.

Указанный выше способ обладает преимуществом перед методом обработки КВД, а именно при “самопрослушивании” имеется возможность выбора диапазона периодов (частот) периодических изменений давления (дебита) в зависимости от поставленных целей, а также от технического оборудования скважины и организации промыслового эксперимента. Поэтому способ “самопрослушивания” является, с одной стороны, более информативным, чем метод обработки КВД (он позволяет получить все ФП окрестности скважины), но с другой стороны — он трудоёмок. Подробное изложение указанного выше способа и его практическое применение приведено в следующей главе.

ГЛАВА 9. Периодическое гидродинамическое воздействие в карбонатных коллекторах [10]

§ 32. Основные понятия и определения

При постановке исследований природной среды её можно смоделировать некоторой линейной системой, имеющей вход и выход, как это изображено на рисунке. Она будет характеризоваться статическими и динамическими величинами. Применительно к нефтяному пласту под статиче-

ской характеристикой обычно понимают индикаторную кривую, т.е. $Q = f(P_c)$, где Q — дебит скважины, P_c — давление на забое скважины. Здесь Q и P_c не являются функциями времени; время выступает в роли параметра. Для анализа динамических характеристик системы и нахождения по ним кинетических коэффициентов используется набор тестовых функций. К кинетическим коэффициентам нефтяного пласта относятся его фильтрационные параметры (ФП): коэффициенты гидропроводности σ и пьезопроводности κ . Наиболее распространёнными тестовыми функциями являются: гармонический сигнал, единичная функция Хевисайда и дельта-функция Дирака. Отклик системы на воздействие гармонического сигнала получил название комплексной передаточной функции $F(i\omega)$, реакция на воздействие функции Хевисайда называется переходной функцией $h(t)$, а отклик на функцию Дирака — весовой функцией $q(t)$. Из вышеизложенного следует, что вопрос экспериментального исследования динамических характеристик нефтяного пласта (как линейной системы) определяется наличием соответствующих генераторов тестовых функций.

Наиболее простой и поэтому распространённой в нефтепромысловой практике динамической характеристикой является кривая восстановления (КВД). Она представляет собой отклик пласта на резкое изменение граничного условия на скважине. Воздействовать на пласт можно также импульсным периодическим сигналом, форма которого имеет достаточно сложный вид. Однако его можно рассматривать (в силу линейности системы) как сумму гармонических сигналов синусоидальной и косинусоидальной форм. Отклик системы в этом случае фиксируется в виде $F(i\omega)$.

При исследовании динамических характеристик возможны два подхода. При первом подходе реакция системы на входной сигнал фиксируется на том же входе, где и воздействует тестовый сигнал, т.е. вход и выход совмещены (рис. 9.1). В этом случае регистрируемый отклик должен иметь

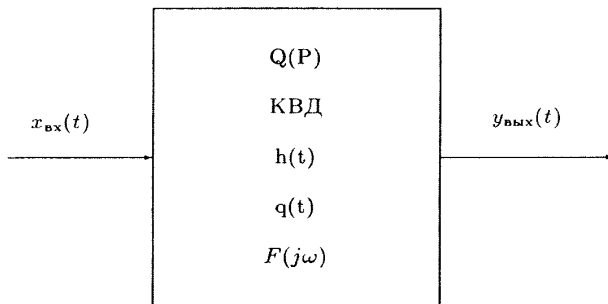


Рис. 9.1

другую физическую природу по сравнению с входным сигналом. С методологической точки зрения можно, например, воздействовать на систему гармоническим сигналом в форме давления $P(t)$, а реакцию системы наблюдать в форме дебита $Q(t)$. Такая постановка эксперимента получила название “самопрослушивание” скважины. Во втором случае реакция системы на воздействие входного сигнала оценивается на её выходе, выход не совмещён с входом. В этом случае регистрируемая величина может иметь не только одинаковую физическую природу с входной, но и другую природу, отличную от входной. Такая постановка исследования в нефтепромысловой практике получила название “гидропрослушивание”. Для реализации гидропрослушивания необходимо иметь не менее двух скважин: генераторную и индикаторную.

Так как КВД широко используется для определения ФП призабойной зоны скважины и методы её обработки достаточно полно рассмотрены, то остановимся подробнее на общих вопросах “самопрослушивания” окрестности скважины. Пусть на пласт воздействует гармонический сигнал давления синусоидальной (или косинусоидальной) формы. В комплексном виде его можно записать так:

$$x_{\text{вх}}(t) = A_p(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (9.1)$$

где $A_p(i\omega)$ — комплексная амплитуда, ω — циклическая частота. Если использовать действительную часть комплексной функции (9.1), то воздействующим будет сигнал косинусоидальной формы, если мнимую часть — синусоидальной. Отклик системы будет иметь ту же частоту (система линейная), но свою амплитуду и фазу, т.е.

$$y_{\text{вых}}(t) = A_Q(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (9.2)$$

где $A_Q(i\omega)$ — комплексная амплитуда дебита. Так как

$$y_{\text{вых}}(t) = F(i\omega) x_{\text{вх}}(t), \quad (9.3)$$

то из выражений (9.1)–(9.3) получим

$$F(i\omega) = A_Q(i\omega)/A_p(i\omega). \quad (9.4)$$

Соотношение (9.4) можно представить в виде двух равенств, а именно

$$|F(i\omega)| = \frac{|A_Q(i\omega)|}{|A_p(i\omega)|} = \frac{A_Q}{A_p}, \quad (9.5)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_Q - \varphi_p; \quad (9.6)$$

здесь выражение (9.5) называется амплитудочастотной характеристикой (ФЧХ), а (9.6) — фазочастотной характеристикой (ФЧХ) отклика.

В теории линейного отклика показано, что передаточную функцию любой сложности системы можно представить как произведение передаточных функций простых подсистем, если их соединить последовательно, т.е.

$$F(i\omega) = F_1(i\omega)F_2(i\omega) \cdots F_n(i\omega); \quad (9.7)$$

откуда имеем

$$|F(i\omega)| = |F_1(i\omega)| \cdot |F_2(i\omega)| \cdots |F_n(i\omega)|, \quad (9.8)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n; \quad (9.9)$$

здесь $|F_1(i\omega)|, \dots, |F_n(i\omega)|$ — АЧХ, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ФЧХ подсистем. Это свойство широко используется при синтезе систем и оптимизации их динамических характеристик.

Рассмотрим с этих позиций передаточную функцию (9.4) применительно к математическим моделям, описывающим процесс фильтрации в нефтяном пласте. Так, для модели Щелкачева передаточная функция имеет вид

$$F(i\omega) = 2\pi\sigma \sqrt{\frac{r_c^2}{\kappa}} \omega \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right], \quad (9.10)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Модель Баренблатта характеризуется следующей передаточной функцией:

$$F(i\omega) = 2\pi\sigma_1 \sqrt{\frac{r_c^2}{\kappa_1}} \omega \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{\tau_2 \sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}}{\tau' \sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}} \exp\left[-\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'}\right]. \quad (9.11)$$

Передаточная функция для модели по неравновесному закону фильтрации запишется так:

$$F(i\omega) = 2\pi\sigma \sqrt{\frac{r_c^2}{\kappa}} \omega \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_w^2}}} \exp\left[\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w}\right]. \quad (9.12)$$

И наконец, передаточная функция для модели Баренблатта, учитывающая неравновесный закон фильтрации, представима в форме

$$F(i\omega) = 2\pi\sigma_1 \sqrt{\frac{r_c^2}{\kappa_1}} \omega \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right] \sqrt{\frac{\tau_2 \sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}}{\tau' \sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}} \cdot \exp\left[-\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'}\right] \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_p^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_w^2}}} \exp\left[\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w}\right]. \quad (9.13)$$

Из сравнения выражений (9.10)–(9.13) с соотношением (9.7) видно, что для природных сред включение в математическую модель фильтрации нового механизма, учитывающего в течении жидкости более сложные свойства

пласта, эквивалентно последовательному подключению передаточной функции ещё одной подсистемы с её характеристикой.

§ 33. Определение переходной функции и оптимального диапазона частот при массообмене между блоками и трещинами

Рассмотрим произвольный элементарный объём пласта трещиновато-пористого строения. Согласно модели Баренблатта массовый обмен жидкостью между блоками и трещинами определяется следующим линейным соотношением:

$$q(r; t) = \rho_0 A(p_2 - p_1) = \rho_0 A(P_2 - P_1). \quad (9.14)$$

При этом превышения давления в блоках и трещинах над установившимся значением связаны дифференциальным выражением

$$\tau_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + P_2 = P_1, \quad (9.15)$$

которое можно рассматривать как уравнение первого порядка по отношению к P_2 . Входящим сигналом в элементарный объём (пользуясь языком теории линейного отклика) будет P_1 , выходящим — P_2 .

Пусть сначала элементарный объём находился в невозмущённом состоянии, т.е. давление в трещинах и блоках было одинаково ($P_{10} = P_{20} = 0$). В некоторый момент времени ($t = 0 + 0$) в трещинах мгновенно произошло изменение давления на некоторую постоянную величину и поддерживается таковым достаточно длительное время ($P_1 = \text{const} \neq 0$). Определим изменение во времени давления в блоках рассматриваемого элементарного объёма. Для этого надлежит найти решение уравнения (9.15), считая в нём P_1 постоянным. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что искомое решение имеет вид

$$P_2 = P_1(1 - e^{-t/\tau_2}) = f_p(t)P_1, \quad (9.16)$$

где

$$f_p(t) = 1 - e^{-t/\tau_2} \quad (9.17)$$

называется переходной функцией при массообмене между блоками и трещинами; она характеризует переход давления P_2 из одного равновесного состояния в другое. Из соотношения (9.17) видно, что поведение во времени переходной функции зависит от величины τ_2 . На рис. 9.2 изображена переходная функция $f_p(t)$ при $\tau_2 \cong 25000$ с., полученная для скважины 4788 Шегурчинского месторождения Татарстана.

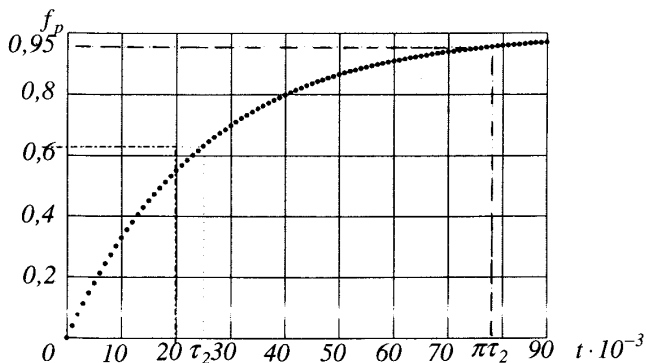


Рис. 9.2

Перейдём теперь к определению оптимального диапазона частот. Дальнейшие исследования удобно проводить, перейдя в область комплексных решений уравнения (9.15). Для этого перепишем его (пользуясь линейностью уравнения (9.15)) в комплексном виде

$$\tau_2 \frac{\partial P_2^*}{\partial t} + P_2^* = P_1^*, \quad (9.18)$$

где P_1^* и P_2^* — комплексные функции. Комплексный входящий сигнал в элементарный объём пласта представим в виде $P_1^* = A_{P_1}(r; i\omega) e^{i\omega t}$, выходящий — $P_2^* = A_{P_2}(r; i\omega) e^{i\omega t}$. Подставляя эти соотношения в уравнение (9.18), получим

$$i\omega \tau_2 A_{P_2}(r; i\omega) e^{i\omega t} + A_{P_2}(r; i\omega) e^{i\omega t} = A_{P_1}(r; i\omega) e^{i\omega t},$$

откуда найдём

$$A_{P_2}(r; i\omega) = \frac{A_{P_1}(r; i\omega)}{1 + i\omega \tau_2}. \quad (9.19)$$

Тогда комплексный массообмен жидкостью между блоками и трещинами будет характеризоваться следующим выражением:

$$q^*(r, t; i\omega) = \rho_0 A F_{\tau_2}(\tau_2 \omega) \cdot A_{P_1}(r; i\omega) e^{i\omega t}; \quad (9.20)$$

модуль мощности массообмена, т.е. амплитуда массообмена, в рассматриваемом элементарном объёме запишется так:

$$|q^*(r; i\omega)| = \rho_0 A F_{\tau_2}(\tau_2 \omega) |A_{P_1}(r; i\omega)|. \quad (9.21)$$

Здесь

$$F_{\tau_2} = \frac{\omega \tau_2}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}} \quad (9.22)$$

называется передаточной функцией от входящего волнового сигнала P_1 к выходящему сигналу P_2 , $|A_{P_1}(r; i\omega)|$ представляет собой амплитуду входящей волны P_1 . Из соотношения (9.21) видно, что амплитуда массообмена между блоками и трещинами в $\omega\tau_2/\sqrt{1+\omega^2\tau_2^2}$ раз меньше амплитуды волны, приходящей к элементарному объёму.

На рисунке 9.3 представлена зависимость F_{τ_2} от частоты для скважины 4788 при $\tau_2 \approx 25000$ с. Из её анализа следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ $F_{\tau_2} \rightarrow 1$,

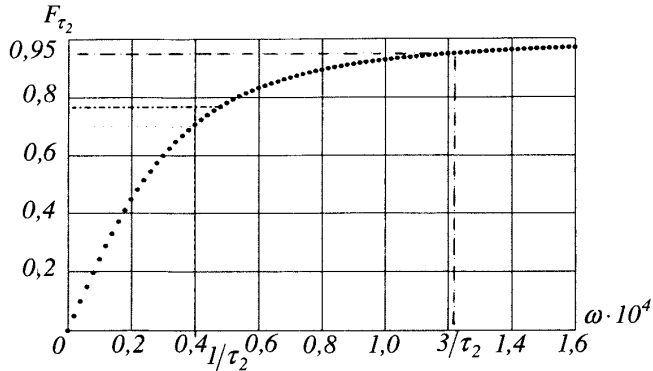


Рис. 9.3

а при $\omega \rightarrow 0$ $F_{\tau_2} \rightarrow 0$; далее, $\omega = 3/\tau_2$ $F_{\tau_2} \approx 0,95$, и дальнейшее увеличение частоты ω не имеет смысла, так как F_{τ_2} очень медленно будет стремиться к 1. И наконец, при $\omega = 1/\tau_2$ $F_{\tau_2} \approx 0,7$, а при $\omega = 0,2/\tau_2$ $F_{\tau_2} \approx 0,2$, дальнейшее уменьшение частоты ω приведёт к незначительным значениям передаточной функции. Что касается амплитуды $|A_{P_2}(r, i\omega)|$ волны давления P_2 в элементарном объёме, расположенном на расстоянии r от скважины, то она уменьшается с ростом частоты ω . Очевидно, при $\omega \rightarrow 0$ она становится равной амплитуде $|A_{P_1}(r; i\omega)|$ волны давления P_1 , подошедшей к элементарному объёму, и при $\omega \rightarrow \infty$ она стремится к нулю.

Из вышеизложенного анализа следует, что оптимальный диапазон частот периодического гидродинамического воздействия в практических целях можно определить следующим неравенством:

$$\frac{0,2}{\tau_2} = \omega_n < \omega < \omega_g = \frac{3}{\tau_2}. \quad (9.23)$$

Таким образом, для определения оптимального диапазона частот необходимо знать значение постоянной τ_2 элементарного объёма, которую можно получить из обработки КВД скважины.

§ 34. *Определение ФП окрестности скважины по экспериментальной комплексной передаточной функции (КПФ)*

п. 34.1. Предварительным этапом к применению метода определения ФП скважины по КПФ является установление оптимальных периодов и соответствующих ему частот. Так как основная информация об особенностях фильтрации в призабойной зоне скважины связана с массообменом между блоками и трещинами, поэтому, естественно, за нижний период T_n следует взять удвоенное время t_2 , характеризующее практическое окончание этого обмена, т.е.

$$T_n = 2t_2. \quad (9.24)$$

Такой выбор обусловлен тем, что половину периода массообмен между блоками и трещинами осуществляется, а половину периода он отсутствует. Значение времени t_2 достаточно точно определяется из КВД, снимаемой на исследуемой скважине. В качестве нижней частоты ω_n возьмём её наименьшее значение ω_n из оптимального диапазона частот (9.23), т.е.

$$\omega_n = \frac{0,2}{\tau_2}. \quad (9.25)$$

Тогда, учитывая, что $T_n = 2\pi/\omega_n$, из сопоставления равенств (9.24) и (9.25) найдём

$$\tau_2 = \frac{0,2t_2}{\pi}. \quad (9.26)$$

Следовательно, с привлечением соотношений (9.23) и (9.26) оптимальный диапазон частот, а также отвечающий ему оптимальный диапазон периодов соответственно запишутся так:

$$\frac{2\pi}{3}\tau_2 < T < 10\pi\tau_2, \quad (9.27)$$

$$\frac{0,2T_n}{3} < T < T_n. \quad (9.28)$$

п. 34.2. Методику определения ФП окрестности скважины по КПФ подробно изложим для скважины 4788 Шегурчинского месторождения.

Из результатов обработки КВД скважины 4788 было установлено, что время практического прекращения массообмена между блоками и трещинами равно $t_2 \cong 79430$ с. Тогда, согласно формулам (9.24), (9.26)–(9.28) имеем

$$T_n \cong 158860 \text{ с.} \cong 43,5 \text{ часа}, \quad (9.29)$$

$$\omega_n \cong 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ рад./с.}, \quad (9.30)$$

$$2,9 \text{ часа} < T < 43,5 \text{ часа}, \quad (9.31)$$

$$0,4 \cdot 10^{-4} \text{ рад./с.} < \omega < 6 \cdot 10^{-4} \text{ рад./с.}. \quad (9.32)$$

Исходя из неравенства (9.31) были выбраны следующие рабочие периоды воздействия

$$T = 48 \text{ ч.}, 24 \text{ ч.}, 18 \text{ ч.}, 10 \text{ ч.}, 6 \text{ ч.} \quad (9.33)$$

Учитывая, что в спектре разложения давления в ряд Фурье присутствуют в основном нечётные гармоники 3-я и 5-я, то набор периодов фактически увеличивается дополнительно на величины

$$T = 16 \text{ ч.}, 9,6 \text{ ч.}, 8 \text{ ч.}, 6 \text{ ч.}, 4,8 \text{ ч.}, 3,6 \text{ ч.}, 3,3 \text{ ч.}, 2 \text{ ч.}, 1,2 \text{ ч.}$$

п. 34.3. Анализ и обработка КПФ скважины 4788. Технологический режим работы скважины был следующий:

- скважина выводилась на режим работы с постоянным дебитом;
- после установления последнего, режим работы скважины переводился на периодический, начиная последовательно с периода 48 часов и т.д. (см. (9.33));
- на каждом периоде продолжительность работы скважины равнялась $\approx 70 \div 144$ часа; например, на периоде 48 часов их было реализовано 3, а на периоде 6 часов – 11. В результате чего система скважина-пласт выводилась на квазистационарный режим работы.

Автоматизированный измерительный комплекс фиксировал:

- показания глубинных манометров, давление в затрубном пространстве на устье скважины, показание счётчика жидкости, установленного на манифольде скважины.

На основе данных проведённого промыслового эксперимента строятся в зависимости от частоты кривые периодических изменений забойного давления и дебита. Проводится их гармонический анализ и находятся на каждой из частот соответствующие амплитуды A_p, A_Q и фазы φ_p, φ_Q . По известным амплитудам и фазам вычерчиваются амплитудочастотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики, т.е. определяются основные элементы комплексной передаточной функции (КПФ). Для дальнейших расчётов ФП выделим ФЧХ и АЧХ комплексной передаточной функции, определяемой соотношением (9.13); они соответственно имеют вид:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_2 - \tau')}{1 + \omega^2 \tau_2 \tau'} + n\pi, \quad (9.34)$$

$$\left(\frac{A_Q}{A_p} \right)^2 = 4\pi^2 \sigma_l^2 \frac{r_c^2}{\kappa_l} \frac{\tau_2}{\tau'} \omega \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau'^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_w^2}}. \quad (9.35)$$

Таблица 9.1

T час	$\varpi \cdot 10^4$	№ пер	φ_p	φ_Q	$\Delta\varphi =$ $= \varphi_Q - \varphi_p$	$\varphi^* =$ $= \Delta\varphi_{cp}$	$(3\pi/4)^+$ $+ \Delta\varphi_{cp}$
48	0,36	2	2,11	-0,16	-2,27	-2,27	0,09
		3	2,12	-0,16	-2,28		
24	0,727	3	1,95	-0,16	-2,11	-2,12	0,24
		4	1,96	-0,17	-2,13		
18	0,969	4	1,91	-0,17	-2,08	-2,08	0,28
		5	1,91	-0,17	-2,08		
		6	1,92	-0,16	-2,08		
16(48)	1,09	2	1,85	-0,15	-2,00	-2,03	0,33
		3	1,90	-0,16	-2,06		
10	1,74	4	1,79	-0,17	-1,96	-1,98	0,38
		5	1,82	-0,17	-1,99		
		7	1,83	-0,17	-2,00		
9,6(48)	1,82	2	1,81	-0,17	-1,98	-1,96	0,40
		3	1,80	-0,14	-1,94		
8(24)	2,18	3	1,78	-0,16	-1,94	-1,95	0,41
		4	1,80	-0,17	-1,97		
6	2,91	7	1,74	-0,16	-1,90	-1,90	0,46
		8	1,76	-0,14	-1,90		
		9	1,75	-0,16	-1,91		
		10	1,76	-0,16	-1,92		
		11	1,75	-0,13	-1,88		
6(18)	2,91	4	1,72	-0,17	-1,89	-1,91	0,45
		5	1,75	-0,19	-1,94		
		6	1,76	-0,16	-1,92		
4,8(24)	3,63	3	1,76	-0,18	-1,94	-1,97	0,39
		4	1,80	-0,20	-2,00		
3,6(18)	4,85	4	1,66	-0,19	-1,85	-1,94	0,42
		5	1,72	-0,23	-1,95		
		6	1,81	-0,22	-2,03		
3,3(10)	5,29	4	1,57	-0,19	-1,76	-1,87	0,49
		5	1,70	-0,20	-1,90		
		7	1,72	-0,22	-1,94		
2(6)	8,72	7	1,54	-0,20	-1,74	-1,87	0,49
		8	1,67	-0,17	-1,84		
		9	1,67	-0,24	-1,91		
		10	1,68	-0,25	-1,93		
		11	1,67	-0,15	-1,92		
1,2(6)	14,50	7	1,60	-0,37	-1,97	-1,88	0,48
		8	1,52	-0,14	-1,66		
		9	1,36	-0,20	-1,56		
		10	1,51	-0,29	-1,80		
		11	1,74	-0,23	-1,97		

Часть III

В таблице 9.1 приведены данные по фазам давления φ_p и дебита φ_Q , полученные по результатам гармонического анализа соответствующих сигналов импульса давления и дебита скважины 4788 на втором периоде в 48 часов; их характерный вид приведён на рисунках 9.4 и 9.5. На рисунке 9.6 изображена фазовая характеристика КПФ, построенная на основе данных таблицы 9.1.

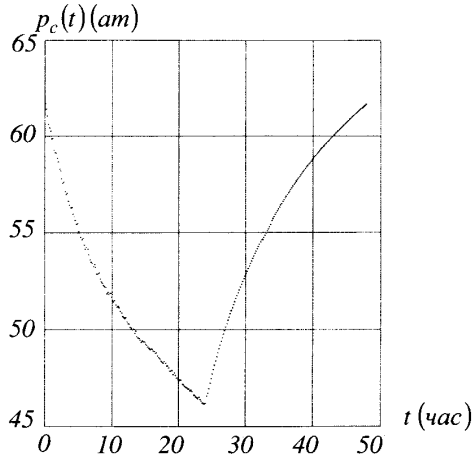


Рис. 9.4

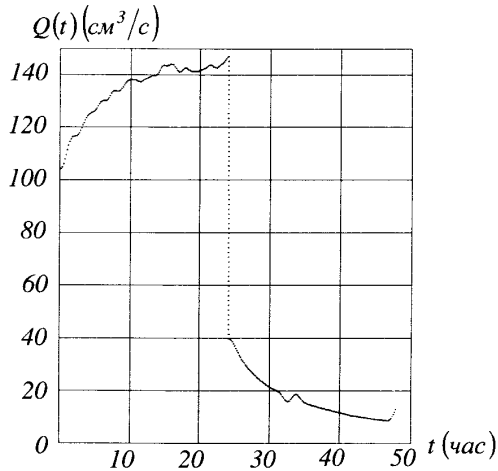


Рис. 9.5

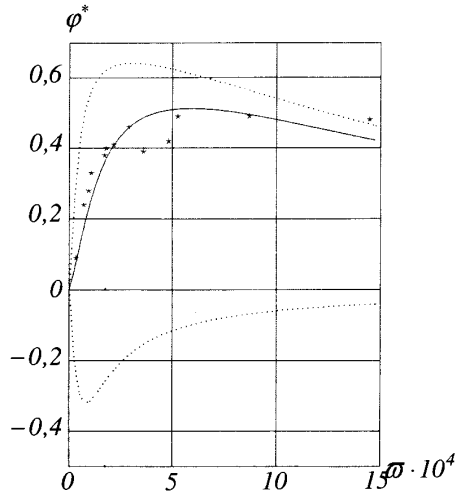


Рис. 9.6

В первой колонке таблицы 9.1 указаны продолжительность периодов в часах, в скобках приведен рабочий период, например, 16(48) означает, что взята 3-я гармоника разложения сигнала с периодом 48 часов; во второй – частоты в радианах в секунду; в третьей – номер периода; в четвертой и пятой – соответствующие сдвиги фаз φ_P и φ_Q ; в шестой – разность сдвигов фаз $\Delta\varphi = \varphi_Q - \varphi_P$; в седьмой – среднее значение разности сдвигов фаз $\Delta\varphi_{cp}$, полученное на данном периоде; в восьмой – $\Delta\varphi^* = (3\pi/4) + \Delta\varphi_{cp}$.

В таблице 9.2 содержатся данные по амплитудам давления A_P и дебита A_Q , определённые из результатов гармонического анализа соответствующих сигналов. На рисунке 9.7 приведена АЧХ, построенная с использованием данных таблицы 9.2. Три первых столбца этой таблицы аналогичны одноимённым колонкам таблицы 9.1; в четвертом – амплитуда давления A_P ; в пятом – амплитуда дебита A_Q ; в шестом – их отношение A_Q/A_P ; в седьмом – квадрат этого отношения $(A_Q/A_P)^2$.

Заметим, что для АЧХ выбрана координатная система $\omega, (A_Q/A_P)^2$, так как в ней проще решается с асимптотическими представлениями АЧХ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ (см. (9.13)).

Таблица 9.2

T час	$\varpi \cdot 10^4$	№ пер	A_p	A_Q	A_Q/A_p	$(A_Q/A_p)^2$
48	0,36	2	6,60	78,06	11,80	144
		3	6,80	77,67	11,42	
24	0,727	3	4,06	71,56	17,60	289
		4	4,10	71,44	17,40	
18	0,967	4	3,28	69,16	21,08	441
		5	3,28	69,15	21,08	
		6	3,29	69,05	20,99	
16(48)	1,09	2	0,99	22,64	22,60	484
		3	1,00	22,73	22,70	
10	1,74	4	1,96	65,66	33,50	1089
		5	2,00	65,36	32,68	
		7	2,00	65,34	32,60	
9,6(48)	1,82	2	0,39	12,90	33,07	1156
		3	0,37	13,12	35,00	
8(24)	2,18	3	0,54	21,48	39,70	1600
		4	0,55	21,42	38,90	
6	291	7	1,26	63,29	53,23	2500
		8	1,28	62,69	50,00	
		9	1,25	63,42	51,00	
		10	1,26	63,21	50,00	
		11	1,27	62,65	49,00	
6(18)	2,91	4	0,42	21,02	50,04	2434
		5	0,42	21,13	50,30	
		6	0,43	20,85	48,50	
4,8(24)	3,63	3	0,20	12,82	64,00	4356
		4	0,19	13,06	68,00	
3,6(18)	4,85	4	0,15	12,71	84,70	6800
		5	0,15	12,75	85,00	
		6	0,16	12,51	78,00	
3,3(10)	5,29	4	0,21	22,31	106,0	7056
		5	0,24	20,97	87,00	
		7	0,25	20,36	81,40	
		7	0,13	21,78	167,5	21900
2(6)	8,72	8	0,16	19,26	120,0	
		9	0,13	21,49	165,0	
		10	0,14	20,89	149,2	
1,2(6)	14,5	11	0,14	20,74	148,0	50000
		7	0,047	13,29	282,0	
		8	0,061	11,28	188,0	
		9	0,054	12,33	228,0	
		10	0,055	12,10	220,0	
		11	0,041	14,02	341,0	

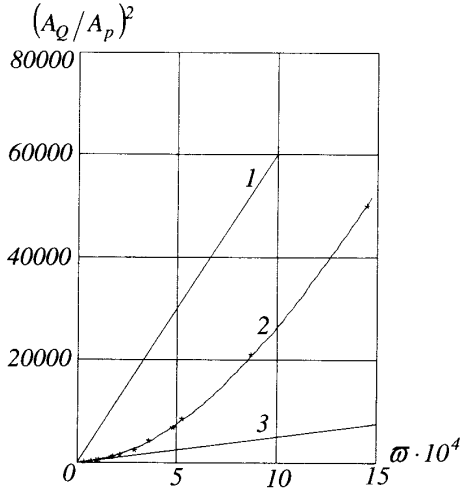


Рис. 9.7

Как видно из рисунка 9.6, экспериментальные точки функции $\Delta\varphi(w)$, построенные по данным таблицы 9.1, имеют некоторый разброс, но все они расположены выше линии $\Delta\varphi^*(0) = \Delta\varphi^*(\infty) = 0$, принятой за условный нуль. Поведение кривой $\Delta\varphi(w)$ можно удовлетворительно объяснить с позиции модели Баренблатта, учитывающей неравновесный характер закона фильтрации при условиях: $\tau_p \gg \tau_w$, $(\tau_p/\tau_w) \gg \tau_2/\tau'$.

В самом деле. Положим в соотношении (9.34) $n = -1$ и перепишем его в следующем виде:

$$\Delta\varphi^*(w) = \Delta\varphi(w) + \frac{3\pi}{4} = \Delta\varphi_1^*(w) + \Delta\varphi_2^*(w), \quad (9.36)$$

где

$$\Delta\varphi_1^*(w) = \frac{1}{2} \arctg \frac{w(\tau_p - \tau_w)}{1 + w^2 \tau_p \tau_w}, \quad (9.37)$$

$$\Delta\varphi_2^*(w) = -\frac{1}{2} \arctg \frac{w(\tau_2 - \tau')}{1 + w^2 \tau_2 \tau'}. \quad (9.38)$$

Анализ функции $\Delta\varphi_1^*(w)$, график которой приведён на рисунке 9.6 (кривая 1), показывает, во-первых, что $\Delta\varphi_1^*(0) = \Delta\varphi_1^*(\infty) = 0$, т.е. линия условного нуля является для неё асимптотой. Во-вторых, при условии

$\tau_p > \tau_w$ график функции $\Delta\varphi_l^*(\omega)$ расположен выше линии условного нуля и в точке

$$\omega_{l\max} = \frac{1}{\sqrt{\tau_p \tau_w}} \quad (9.39)$$

принимает максимальное значение, равное

$$\Delta\varphi_{l\max}^* = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_p - \tau_w}{2\sqrt{\tau_p \tau_w}}. \quad (9.40)$$

Далее, на том же рисунке 9.6 цифрой 2 обозначена составляющая ФЧХ, определяемая формулой (9.38). Анализ поведения функции $\Delta\varphi_2^*(\omega)$ показывает, во-первых, что линия условного нуля также является для неё асимптотой. Во-вторых, график функции $\Delta\varphi_2^*(\omega)$ расположен ниже линии условного нуля, так как всегда $\tau_2 > \tau'$. В-третьих, в точке

$$\omega_{2\min} = \frac{1}{\sqrt{\tau_2 \tau'}} \quad (9.41)$$

она имеет минимум, равный

$$\Delta\varphi_{2\min}^* = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\tau_2 - \tau'}{2\sqrt{\tau_2 \tau'}}. \quad (9.42)$$

Воспользуемся теперь данными таблицы 9.1. Из восьмого столбца этой таблицы следует, что наименьшую величину $\Delta\varphi^*(\omega)$, равную приблизительно $0,5 \text{ рад.}$, она принимает при частоте ω , значение которой находится в районе $0,8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с.}$ Для оценки постоянных τ_2 и τ' примем эти данные в качестве экстремальных значений функции $\Delta\varphi_2^*(\omega)$, т.е.

$$\omega_{2\exists} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.}, \quad (9.43)$$

$$\Delta\varphi_{2\exists}^* = -0,5. \quad (9.44)$$

Далее, в связи с тем, что экстремальная частота находится в области весьма малых значений частот, то, очевидно, для этих частот функцию $\Delta\varphi_2^*(\omega)$, определяемую соотношением (9.38), можно представить в форме $\Delta\varphi_2^*(\omega) \cong -0,5(\tau_2 - \tau')\omega$. В этом случае равенство (9.43) принимает вид

$$\omega_{2\exists}(\tau_2 - \tau') = 1 \text{ рад.} \quad (9.45)$$

Таким образом, для определения значений постоянных τ_2 и τ' имеет место следующая система уравнений:

$$\tau_2 \tau' = \left(\frac{10^4}{0,8} \right)^2 = (12500)^2 \text{ с}^2, \quad \tau_2 - \tau' = \frac{10^4}{0,8} = 12500 \text{ с.} \quad (9.46)$$

Исключая из этой системы τ_2 , получим следующее квадратное уравнение для τ' :

$$\tau'^2 + 12500\tau' - (12500)^2 = 0. \quad (9.47)$$

Очевидно, положительным корнем уравнения (9.47) будет

$$\tau' = -6250 + \sqrt{(62500)^2 + (2 \cdot 62500)^2} = 62500(\sqrt{5} - 1) = 7725 \text{ с.} \quad (9.48)$$

Тогда из второго равенства (9.46) найдём

$$\tau_2 = 7725 + 12500 = 20225 \text{ с.} \quad (9.49)$$

Перейдём к определению постоянных τ_p и τ_w , предварительно проведя следующие вычисления. Во-первых, выделим асимптоты функции $(A_Q/A_P)^2$ при $\varpi \rightarrow 0$ и $\varpi \rightarrow \infty$; они соответственно запишутся так:

$$\left(\frac{A_Q}{A_P}\right)_0^2(\varpi) = 4\pi^2 \frac{r_c^2}{\kappa_I} \sigma_I^2 \frac{\tau_2}{\tau'} \varpi, \quad (9.50)$$

$$\left(\frac{A_Q}{A_P}\right)_\infty^2(\varpi) = 4\pi^2 \frac{r_c^2}{\kappa_I} \sigma_I^2 \frac{\tau_p}{\tau_w} \varpi. \quad (9.51)$$

На рисунке 9.7, построенном по экспериментальным данным седьмого столбца таблицы, они отмечены цифрами 2 и 1. Угловые коэффициенты j_0 и j_∞ этих асимптот соответственно равны

$$j_0 = \frac{7570}{0,0015} \cong 5 \cdot 10^6, \quad j_\infty = \frac{60000}{0,001} = 6 \cdot 10^7. \quad (9.52)$$

Следовательно, из отношения

$$\left(\frac{A_Q}{A_P}\right)_\infty^2 / \left(\frac{A_Q}{A_P}\right)_0^2 = \frac{\tau_p}{\tau_w} \frac{\tau'}{\tau_2} = \frac{6 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^6} = 12$$

найдем

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = 12 \frac{\tau_2}{\tau'}. \quad (9.53)$$

Подставляя теперь в соотношение (9.53) значения τ_2 и τ' , определим

$$\frac{\tau_p}{\tau_w} = 12 \cdot \frac{20225}{7725} \cong 32. \quad (9.54)$$

Для установления ещё одной связи между постоянными τ_p и τ_w воспользуемся следующим обстоятельством. Экспериментальная ФЧХ $\Delta\varphi^*(\varpi)$, определяемая соотношением (9.36), находится выше линии условного нуля (см. рис.9.6). Следовательно, основной вклад в её поведение, по крайней мере при весьма малых частотах, вносит первое слагаемое $\Delta\varphi_I^*(\varpi)$. Поэтому, пренебрегая при малых частотах вкладом в $\Delta\varphi^*(\varpi)$

второго слагаемого $\Delta\varphi_2^*(\omega)$, будем считать, что $\Delta\varphi^*(\omega) \equiv \Delta\varphi_1^*(\omega)$. Далее, очевидно, при весьма малых частотах функция

$$\Delta\varphi_1^*(\omega) = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(\tau_p - \tau_w)}{1 + \omega^2 \tau_p \tau_w}$$

практически представляет собой прямую ли-

нию

$$\Delta\varphi_1^*(\omega) \equiv \frac{\tau_p - \tau_w}{2} \omega \quad (9.55)$$

с угловым коэффициентом i_0 , равным

$$i_0 = \frac{\tau_p - \tau_w}{2}. \quad (9.56)$$

Экспериментальное значение i_0 можно определить по тангенсу угла касательной к графику $\Delta\varphi^*(\omega)$ (см. рис. 9.6), построенной в начале координат; он имеет величину

$$i_0 \equiv 3530. \quad (9.57)$$

Тогда из формул (9.56) и (9.57) получим

$$\tau_p = \tau_w + 7060. \quad (9.58)$$

Подставляя теперь значение τ_p , определяемое равенством (9.58), в соотношение (9.54), найдём

$$\tau_w \equiv 228 \text{ с.}; \quad (9.59)$$

следовательно, значение постоянной τ_p будет равно

$$\tau_p \equiv 7288 \text{ с.} \quad (9.60)$$

Итак, в результате обработки экспериментальных данных, снятых на скважине 4788, по КПФ $F(i\omega)$, определяемой соотношением (9.13), и при выполнении условий $\tau_p \gg \tau_w$ и $(\tau_p/\tau_w) \gg (\tau_2/\tau')$ получены следующие величины констант релаксации:

$$\tau_p = 7288 \text{ с.}, \quad \tau_w = 228 \text{ с.}, \quad \tau_2 = 20225 \text{ с.}, \quad \tau' = 7725 \text{ с.} \quad (9.61)$$

На основе этих данных построена теоретическая ФЧХ, представленная на рисунке 9.7 сплошной кривой 2. На том же рисунке крестиками отмечены экспериментальные точки ФЧХ. Кроме этого прямая 1 соответствует части ФЧХ, обязанной константам τ_p и τ_w , а линия 2 характеризует ту часть ФЧХ, которая обязана постоянным τ_2 и τ' . Далее, по данным (9.61), а также с привлечением результатов обработки КВД скважины 4788 (см. п. 31.8) построена теоретическая КВД, изображённая сплошной кривой 3 на рисунке 9.8; там же точками приведены экспериментальные данные (см. рис. 8.7). Как видно из рисунков 9.6–9.8, теоретические кривые КВД, ФЧХ и АЧХ практически совпадают с экспериментальными данными.

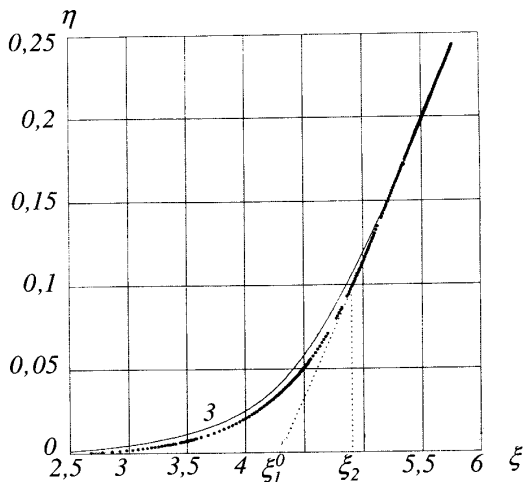


Рис. 9.8

Из проведённого анализа обработки экспериментальных КВД, ФЧХ и АЧХ скважины 4788 (а также других скважин) следует, что фильтрация жидкости в трещиновато-пористых и кавернозных коллекторах карбонатного типа может быть удовлетворительно описана обобщённой моделью Баренблатта (см. систему (1.80)).

ГЛАВА 10. Экспериментальная оценка эффективности гидродинамического периодического воздействия со стороны добывающей скважины на параметры разработки [10]

§ 35. Выбор объекта исследования, требования к нему и методика промыслового эксперимента

п. 35.1. Возможные технологические режимы разработки залежи с коллектором трещиновато-пористого типа. Пусть имеется залежь запечатанного типа (водоупругий режим отсутствует). Рассмотрим возможные технологические схемы разработки такой залежи. Это, во-первых, режим разработки на истощение и, во-вторых, режим разработки, при котором нагнетательные скважины работают при стационарном нагнетании, а добывающие — при стационарном отборе.

В первом случае в течение всего времени разработки будет существовать разность давлений в блоках и трещинах, а значит, будет обмен жидкостью между блоками и трещинами. Коэффициент нефтеотдачи будет оп-

ределаться упругим запасом жидкости. Во втором случае переток жидкости из блоков в трещины будет наблюдаться только в течение короткого времени, связанного с выравниванием давлений в блоках и трещинах. Коэффициент обводнённости продукции в конечном итоге достигнет 100%, и дальнейшая разработка станет бессмысленной. Так как пористость трещин много меньше пористости блоков, то коэффициент нефтеотдачи во втором случае будет ниже, чем в первом.

Как видим, ни одна из схем не является оптимальной. Максимальный коэффициент нефтеотдачи можно получить при технологической схеме, когда нагнетательные и добывающие скважины будут работать на нестационарных режимах. При этом должен сохраняться запас упругой энергии и существовать разность давлений жидкости в блоках и трещинах. Поэтому наиболее приемлемой технологической схемой является та, при которой нагнетательные и добывающие скважины работают в периодическом режиме нагнетания и отбора.

п. 35.2. Выбор объекта исследований. Выбор объекта при постановке промышленного эксперимента является наиболее важной его составляющей и определяется решаемой задачей. В связи с этим необходимым явилось следующее требование к объекту разработки.

На выбранном участке должна реализовываться схема разработки, обеспечивающая, во-первых, довольно быстрое возрастание коэффициента обводнённости продукции добывающих скважин, вплоть до $\approx 100\%$ на режиме стационарного отбора и нагнетания при условии, что пористость блоков много больше пористости трещин и, во-вторых, существование оптимального диапазона частот периодического гидродинамического воздействия со стороны нагнетательных и добывающих скважин, при котором коэффициент обводнённости продукции скважины достигает минимума.

Вышеперечисленным условиям отвечал участок Архангельского месторождения, схема расположения скважин на котором представлена на рисунке 10.1. Скважины дренируют пласты Вере́йского горизонта. Они расположены в углах правильных треугольников со стороной, равной ≈ 300 м. Режим заводнения близкий площадному.

п. 35.3. Методика промышленного эксперимента. Методика по периодическому гидродинамическому воздействию (ПГВ) на опытном участке состоит из следующих основных элементов:

- нагнетательные скважины работали в режиме стационарного нагнетания;
- добывающие скважины также работали в режиме стационарного отбора;
- на нагнетательных скважинах 4540, 4551 устанавливались устьевые манометры;

ПРОМЫСЛОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

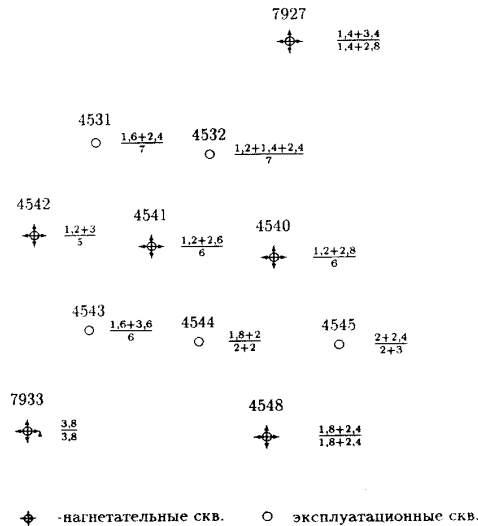


Рис. 10.1

- на добывающих скважинах 4545, 4544, 4531, 4532 были установлены устьевые и глубинные манометры;
- автоматизированными измерительными комплексами (их было два) записывали кривые изменения давления;
- регулярно контролировались дебиты нагнетательных скважин, дебиты добывающих скважин периодически определялись по данным снимаемых динамограмм;
- ежедневно при работе добывающих скважин на стационарном режиме брались пробы жидкости для определения коэффициента обводнённости продукции;
- по достижении коэффициента обводнённости продукции добывающих скважин своего максимума (около 100%) на каждой из них снималась КВД, и по данным КВД определялся оптимальный диапазон частот ПГВ;
- нагнетательные скважины продолжали работать в режиме стационарного нагнетания, а добывающие переводились на режим периодического пуска в работу и остановку. Автоматизированный измерительный комплекс фиксировал давление. Пробы жидкости на каждой добывающей скважине брались в конце каждого полупериода. Работа погружных насосов контролировалась по динамограммам.

§ 36. Анализ результатов исследований скважин на режимах стационарное нагнетание – стационарный и периодический отборы летом 1996 г.

п. 36.1. Анализ результатов исследования скважины 4545. На рисунке 10.2 приведены данные зависимости обводнённости продукции скважины от времени. На оси ординат отложен коэффициент обводнённости продукции в процентах, определяемый выражением

$$\vartheta = \frac{Q_B}{Q_H + Q_B} \cdot 100\%, \quad (10.1)$$

где Q_B , Q_H — соответственно дебит воды и нефти в продукции скважины. На оси абсцисс указано время в сутках. За нуль принято 12.07.1996 г. — начало систематических измерений. На 50 сутки после работы скважины 4545 в режиме стационарного отбора (с 1.07.1996 г.) коэффициент обводнённости продукции практически достиг 100%. В промежутке между точками А и В (32–37 сутки) была снята КВД скважины, основные ФП которой следующие:

$$\sigma_1 \cong 0,6 \frac{\text{д. см.}}{\text{спз.}}, \quad \frac{r_c^2}{K'} = 112600 \text{ с.}, \quad \lg t_2 \cong 5,2, \quad (10.2)$$

$$t_2 \cong 158490 \text{ с.} \cong 44 \text{ ч.}, \quad T = 2t_2 \cong 88 \text{ ч.}, \quad \tau_2 \cong \frac{t_2}{\pi} \cong 50470 \text{ с.}$$

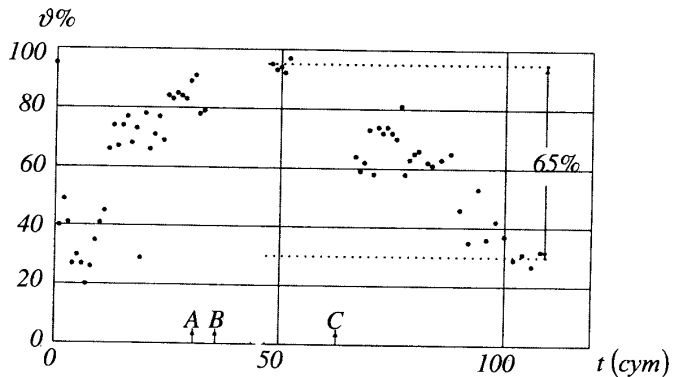


Рис. 10.2

По формуле

$$\frac{0,2}{\tau_2} < \omega < \frac{3}{\tau_2} \quad (10.3)$$

был выделен оптимальный диапазон частот ПГВ и определена её верхняя граница; она оказалась равной частоте, соответствующей периоду $T = 30 \text{ час.}$; оптимальная частота была выбрана

$$\varpi = \frac{2\pi}{T} \cong 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ рад./с.}, \quad (10.4)$$

отвечающая периоду $T = 48 \text{ часов.}$

Из рис. 10.2 следует, что коэффициент обводнённости продукции скважины после её выхода на периодический режим работы с оптимальным периодом $T = 48 \text{ ч.}$ (точка С) начал падать и через 50 суток достиг 30 % значения; затем в течение 10 суток оставался неизменным. На этом 30.10.1996 г. экспериментальные работы на скважине были прекращены. Таким образом, коэффициент обводнённости продукции скважины через 50 суток её периодической работы достиг, по-видимому, своего минимума.

п. 36.2. Анализ результатов исследования скважины 4531. На рисунке 10.3 представлена зависимость коэффициента обводнённости продукции

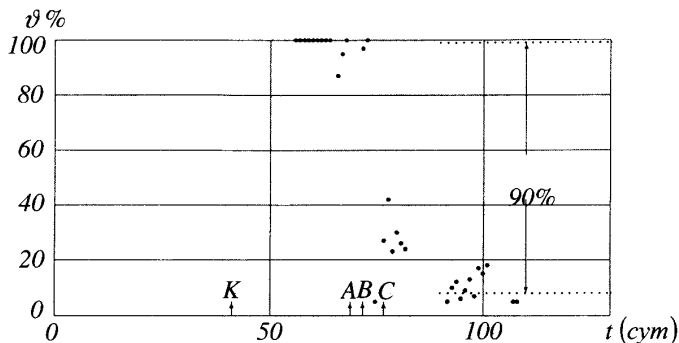


Рис. 10.3

скважины от времени. Начало отсчёта времени также взято 12.07.1996 г. Точка К на рис.10.3 соответствует 41 суткам – 23.08.96 г. – началу пуска скважины в эксплуатацию. Измерения начались через 16 суток, требовалось время для спуска манометра, налаживания канала связи с автоматизированным измерительным комплексом и т.п. Приведённые выше причины привели к тому, что на графике обводнённости начальный участок, соответствующий режиму стационарного нагнетания и отбора, отсутствует. Коэффициент обводнённости продукции скважины на 57 сутки, к 7.09.1996 г., практически достиг 100 %. КВД на скважине 4531 снималась с 19.09. по 22.09.1996 г. (точки А и В графика рис. 10.3). Основные ФП её равны:

$$\sigma_1 \cong 0,26 \frac{\partial \cdot \text{см.}}{\text{снз.}}, \quad \frac{r_c^2}{K'} \cong 400000 \text{ с.}, \quad \lg t_2 \cong 3,4, \quad (10.5)$$

$$t_2 \cong 43200 \text{ с.} \cong 12 \text{ час.}, \quad T = 2t_2 \cong 24 \text{ час.}, \quad \tau_2 \cong \frac{t_2}{\pi} \cong 8660 \text{ с.}$$

При этом значение оптимальной частоты равнялось

$$\varpi = \frac{2\pi}{T} \cong 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ рад./с.} \quad (10.6)$$

После пуска скважины на периодический режим работы (точка С) с периодом 24 часа на рисунке 10.3 чётко просматривается эффективность ПГВ. Коэффициент обводнённости довольно быстро падает, уже через 15 – 18 суток становится примерно равным 10 % и сохраняется до конца исследований 29–30.10.1996 г.

п. 36.3. Анализ результатов исследований скважины 4532. На рисунке 10.4 показана зависимость от времени коэффициента обводнённости

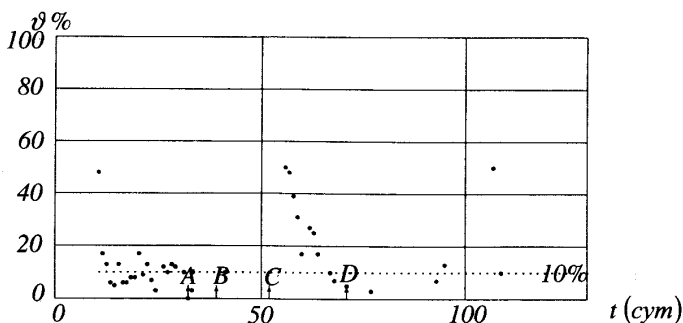


Рис. 10.4

продукции скважины, начало отсчёта времени – 12.07.1996 г. На шкале времени точки А (33 суток) и В (40 суток) соответствуют началу и завершению снятия КВД. Далее, на оси времени точка С (53 суток) характеризует окончание простоя скважины и начало её работы на стационарном режиме, а точка D – пуск скважины в эксплуатацию с оптимальным периодом $T=144$ часа, подсчитанным по методике пунктов 36.1, 36.2. Из рисунка видно, что коэффициент обводнённости продукции скважины после работы её в режиме постоянного отбора снизился с 50 % до 10 %; перевод работы скважины на периодический режим работы практически не изменил его 10 % значения до завершения исследований 30.1.1996 г. Таким образом, ПГВ эффекта не дало. Это, по-видимому, можно объяснить тем обстоятельством, что до снятия КВД (до точки А) и перед пуском скважины на периодический отбор (до точки D) водонасыщенность в её окрестности была практически одинаковой.

п. 36.4. Анализ результатов исследований скважины 4544. На рисунке 10.5 представлена диаграмма изменения коэффициента обводнённости

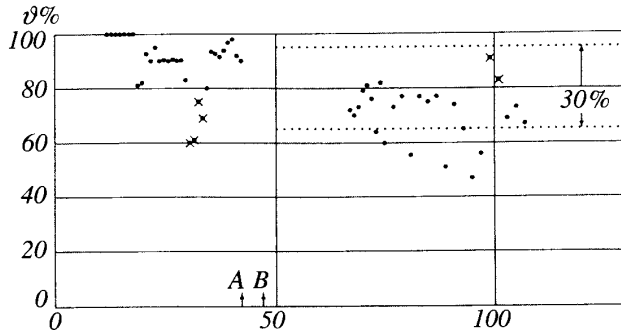


Рис. 10.5

продукции скважины от времени. Точки А и В соответствуют началу и окончанию снятия КВД.

Из рисунка 10.5 видно, что до снятия КВД обводнённость продукции скважины была порядка 95 %. После пуска скважины на периодический отбор с оптимальным периодом $T = 48$ час. она снизилась в среднем на 30 % (точка С) и оставалась равной порядка 70 % до конца замеров.

§ 37. Анализ результатов исследований скважин на режимах истощение – стационарный и периодические отборы

п. 37.1. Анализ результатов исследования скважины 4545. По просьбе исполнителя исследований нагнетательные скважины изучаемого участка (см. рис. 10.1) были отключены, а добывающие скважины работали на режимах стационарного отбора. Скважина 4545 введена в эксплуатацию 01.07.1997 г. На рисунке 10.6 приведена зависимость коэффициента обводнённости продукции скважины от времени. За начало отсчёта времени принято 07.06.1997 г. Из рисунка 10.6 следует, что на режиме истощения (нагнетательные скважины не работают) при стационарном отборе скважиной 4545 на участке графика от начала её работы до снятия КВД (точка А на оси времени) коэффициент обводнённости резко снизился с ≈ 95 % до ≈ 35 %. На 30 суток после пуска скважины в работу со стационарным отбором она была остановлена для снятия КВД, которая практически совпала с КВД 1996 г. (см. п. 36.1). Поэтому ФП окрестности скважины и диапазон частот ПГВ определяются соответственно формулами (10.2) и (10.3). Из этого диапазона в 1997 г. была выбрана оптимальная частота, соответствующая периоду $T = 96$ час, являющаяся его нижней границей.

Часть III

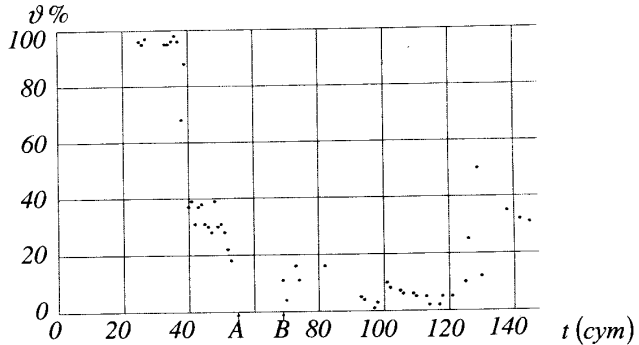


Рис. 10.6

Начиная с точки В временного участка и далее, скважина работала в периодическом режиме с выбранным периодом. Из рисунка 10.6 также видно, что коэффициент обводнённости скважины уменьшался и к 95 суткам достиг величины 4–5 %; на 124 сутки он вновь стал увеличиваться и к моменту окончания исследований достиг значения 30 %. Это произошло потому, что на 124 сутки из за производственной необходимости были включены в работу нагнетательные скважины изучаемого участка. Таким образом, на режиме истощения при периодическом отборе получено самое низкое значение коэффициента обводнённости продукции скважины 4545 порядка 4–5 %.

п. 37.2 Анализ результатов исследования скважины 4532. Систематические измерения на скважине 4532 начались 07.06.1997 г. На рисунке 10.7 дана диаграмма изменения во времени обводнённости продукции

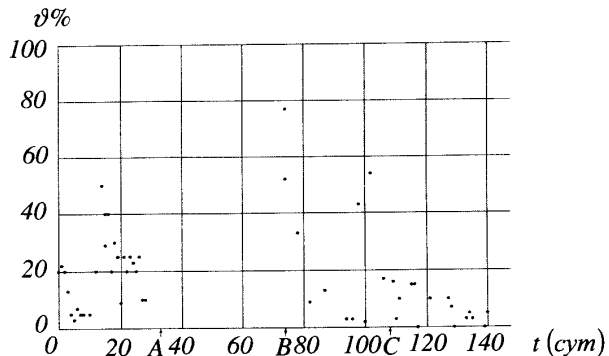


Рис. 10.7

скважины 4532. До снятия КВД (точка А на диаграмме) скважина работала с постоянным отбором на режиме истощения. При этом наблюдался разброс коэффициента обводнённости в широком диапазоне; его среднее значение можно принять за 20 %. После окончания снятия КВД (точка В на диаграмме) скважина снова работала с постоянным отбором, а затем была переведена на периодический режим работы с периодом $T = 144$ часа (точка С на диаграмме). В результате ПГВ коэффициент обводнённости продукции снизился с 20 % до 10 % и оставался практически неизменным до конца исследований. Таким образом, применение ПГВ на скважине 4532 в 1997 г. дало незначительный эффект (10 %).

ГЛАВА 11. Математическое моделирование влияния частоты периодического гидродинамического воздействия со стороны добывающей скважины на параметры разработки [13]

§ 38. Решение задачи и анализ результатов

п. 38.1. Постановка задачи. С целью теоретического исследования влияния циклического режима работы добывающей скважины с периодически меняющимся во времени забойным давлением на нефтеотдачу трещиновато-пористого пласта проведена серия вычислительных экспериментов, в которых использовалась схема фильтрации с двойной пористостью.

Пусть первоначально невозмущённый круговой трещиновато-пористый пласт вскрыт центральной добывающей скважиной радиуса r_c . В момент времени $t = 0$ скважина начинает работать с периодически (гармонически) меняющимся забойным давлением; на внешней границе пласта радиуса R поддерживается постоянное давление. При крупномасштабном приближении, когда пренебрегается капиллярными и гравитационными силами, нестационарная фильтрация в осреднённом по толщине h пласте описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_l r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right) = \beta_l h \frac{\partial p_l}{\partial t} + A \sigma_2 (p_l - p_{3-l}), \quad (11.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_l \sigma_l r \frac{\partial p_l}{\partial r} \right) = \beta_{s,l} h S_2 l \frac{\partial p_l}{\partial t} + m_l h \frac{\partial S_l}{\partial t} + \bar{f} A \sigma_2 (p_l - p_{3-l}). \quad (11.2)$$

Здесь индексы $l = 1, 2$ относятся соответственно к трещинам и блокам,

$$S_l \text{ — водонасыщенность, } \sigma_l = k_l \cdot k_l^* \cdot h, \quad k_l^* = \frac{k_{el}^*}{\mu_e} + \frac{k_{nl}^*}{\mu_n}, \quad \bar{f} = \frac{k_{el}^*}{\mu_e k_l^*},$$

$\bar{f} = \begin{cases} \bar{f}_1 & \text{при } p_l \geq p_2, \\ \bar{f}_2 & \text{при } p_l < p_2; \end{cases}$ k_l — абсолютная проницаемость, k_{el}^* , k_{nl}^* — относительные фазовые проницаемости по воде и нефти соответственно, $\bar{f}_l$ — доля воды в потоке; $\beta_l = \beta_{e,l} S_l + \beta_{n,l} (1 - S_l)$, $\beta_{e,l} = \frac{m_l}{m} (\beta_l + \beta_e m)$, $\beta_{n,l} = (\beta_l + \beta_n m)$ — коэффициенты сжимаемости поровой среды, воды и нефти соответственно, $m = m_l + m_2$; A — коэффициент обмена жидкостью.

Решение системы (11.1)–(11.2) отыскивается в области $r \in (r_c, R)$ при следующих условиях: начальных

$$p_l(r, 0) = p_0, \quad S_l(r, 0) = S_{l,0} \geq S_{l,*} \quad (11.3)$$

и граничных

$$\begin{aligned} p_l(r_c, t) &= p_0 - p_{l,c} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) < p_R, \quad p_l(R, t) = p_R \geq p_0, \\ S_l(R, t) &= S_{l,*}; \end{aligned} \quad (11.4)$$

здесь $S_{l,*}$ и S_l^* — связанная и предельная водонасыщенность соответственно, T и $p_{l,c}$ — период и амплитуда воздействия на пласт.

п. 38.2. Выбор фазовых проницаемостей. Прежде всего следует отметить, что фазовые проницаемости для блоков и трещин существенно различаются между собой. Это связано с тем, что в трещинах снижается роль капиллярных сил и, в силу значительной разницы вязкостей нефти и воды, создаются предпосылки к вытеснению нефти водой с развитым языкообразованием. В этом случае для осреднённого по толщине пласта течения в качестве фазовых проницаемостей следует использовать линейную зависимость проницаемостей от насыщенности. Таким образом, фазовые проницаемости для трещин взяты в виде

$$\begin{aligned} k_{e,l}^* &= \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq S \leq S_{l,*}, \\ \frac{S - S_{l,*}}{1 - S_{l,*}} & \text{при } S_{l,*} < S < 1; \end{cases} \\ k_{n,l}^* &= \begin{cases} 1 - \frac{S}{S_l^*} & \text{при } 0 < S \leq S_l^*, \\ 0 & \text{при } S_l^* < S \leq 1; \end{cases} \end{aligned} \quad (11.5)$$

для блоков – кубические относительные фазовые проницаемости

$$k_{e,2}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < S \leq S_{2,*}, \\ \left(\frac{S - S_{2,*}}{S_2^*} \right)^3 & \text{при } S_{2,*} < S \leq 1; \end{cases} \quad (11.6)$$

$$k_{n,2}^* = \begin{cases} \left(\frac{S_2^* - S}{S_2^* - S_{2,*}} \right)^3 & \text{при } 0 \leq S \leq S_{2,*}, \\ 0 & \text{при } S_{2,*} < S \leq 1. \end{cases}$$

п. 38.3. Метод численного решения. Сформулированная выше задача решается разностным методом. При этом используются полностью консервативные разностные уравнения. Не останавливаясь подробно на построении численной модели, отметим только её основные отличительные особенности, позволившие получить высокоэффективный алгоритм решения задачи.

Во-первых, для вычисления давления в окрестности скважины используется равномерная сетка в логарифмической системе координат, а в остальной области – равномерная в радиальной системе координат. При этом разностные уравнения строятся таким образом, чтобы при переходе от одной сетки к другой не нарушался бы консерватизм разностной схемы. Для вычисления водонасыщенности S из уравнения (11.2) строится несколько иная сеточная область. А именно в окрестности скважины не используется логарифмическая система координат и берётся только один узел, а в остальной области используется та же сетка, что и для давления p . Использование радиальной системы координат, а не логарифмической обусловлено характером изменения водонасыщенности S , который, в отличие от распределения давления, не является логарифмическим.

Во-вторых, при построении разностных уравнений для водонасыщенности S необходимо учитывать следующие факторы:

а. Пористость трещин значительно меньше, чем у блоков, а проницаемость выше, что приводит к высокой скорости движения воды в трещинах. Ситуация усугубляется линейностью фазовых проницаемостей, т.е. отсутствием скачка водонасыщенности и быстрым распространением её небольших значений. Всё это указывает на то, что для вычисления водонасыщенности в трещинах нужно использовать неявную схему.

б. В блоках движение воды существенно медленнее. В то же время шаг во времени невелик из-за периодического воздействия на пласт. Поэтому в блоках целесообразно использовать явную схему.

В-третьих, при аппроксимации массообмена между блоками и трещинами водонасыщенность для вычисления $\bar{f}$ в уравнении (11.2) берётся с рассматриваемого слоя, если переток идёт из трещин в блоки, и с предыдущего – в противном случае.

В-четвёртых, для вычисления давления p из системы сеточных уравнений с 4-х диагональной матрицей построен точный (без итераций) алгоритм, использующий пятиточечную прогонку.

Отметим также, что проводится контроль вычислений по балансовым соотношениям. Для этого нефтеотдача пласта вычисляется как объёмным методом, так и по количеству добытой нефти, что позволяет определить дисбаланс по нефти.

п. 38.4. Параметры численного эксперимента. Расчёты проводились при следующих параметрах:

$$\begin{aligned} r_c &= 0,1 \text{ м}, \quad R = 250 \text{ м}, \quad k_1 = 0,5 \text{ д}, \quad k_2 = 0,05 \text{ д}, \\ \beta_c &= 10^{-5} \text{ л/атм}, \quad \beta_g = 3 \cdot 10^{-5} \text{ л/атм}, \quad \beta_n = 3 \cdot 10^{-4} \text{ л/атм}, \\ m_1 &= 0,01, \quad m_2 = 0,2, \quad \mu_g = 1 \text{ снз}, \quad \mu_n = 20 \text{ снз}, \quad S_{1,*} = 0,05, \quad (11.7) \\ S_{2,*} &= 0,2, \quad S_1^* = 0,95, \quad S_2^* = 0,8, \quad p_0 = 180 \text{ атм}, \\ p_R &= 180 \text{ атм}, \quad p_{l,c} = 20 \text{ атм}, \quad p_3 = 158 \text{ атм}. \end{aligned}$$

Анализ влияния циклического режима работы скважины проведём для полностью обводнившегося пласта (точнее – когда добывающая скважина обводнилась почти на 100%) при стационарной его разработке. Как известно, при стационарном режиме нефтеотдача трещиновато-пористого пласта весьма низкая и получена в основном за счёт нефти, содержащейся в трещинах. Поэтому при моделировании будем считать, что в трещинах уже нет подвижной нефти, т.е. водонасыщенность в них $S_1^0 = S_1^* = 0,95$, а в блоках — $S_2^0 = S_2^* = 0,2$. В этом случае нефтеотдача определяет прирост нефтеотдачи пласта, получаемый за счёт периодического процесса вытеснения. Период циклического воздействия варьировался и составлял 12, 24, 48 и 96 часов. Расчёты заканчивались при отборе жидкости из пласта в количестве одного порового объёма.

п. 38.5. Анализ результатов численного эксперимента. Некоторые расчёты приведены в таблицах 11.1 и 11.2, где $Q_{ж}$, ϑ_g , η_n обозначают соответственно количество накопленной добытой жидкости, выраженной в долях порового объёма, обводнённость дебита скважины и нефтеотдачу пласта (в процентах). Первая строка таблиц показывает обводнённость скважины по окончании 1-го периода меняющегося во времени забойного давления.

Анализируя обводнённость скважины, можно отметить, что происходит снижение её обводнённости. При этом, чем больше период, тем медленнее достигается минимальная обводнённость продукции. Так, при $T = 12 \text{ час}$. коэффициент обводнённости ϑ_g достигает своего минимального значения

Таблица 11.1

Тсут.	12 час.			18 час.			24 час.		
	$Q_{ж}$	ϑ	η_n	$Q_{ж}$	ϑ	η_n	$Q_{ж}$	ϑ	η_n
0	0,00	98,6	0,0	0,00	97,5	0,0	0,00	99,2	0,0
90	0,05	77,3	1,0	0,06	79,4	1,0	0,06	81,2	0,9
180	0,09	77,6	2,1	0,09	77,2	2,0	0,10	78,5	2,0
270	0,12	78,9	3,1	0,13	78,1	3,1	0,14	78,7	3,0
360	0,16	80,3	4,2	0,16	79,3	4,1	0,17	78,8	4,1
450	0,20	81,6	5,2	0,20	80,6	5,1	0,21	80,5	5,1
540	0,24	82,8	6,1	0,24	81,8	6,1	0,25	81,8	6,0
630	0,28	83,9	7,1	0,28	83,0	7,1	0,29	83,0	7,0
720	0,33	84,9	8,0	0,32	84,0	8,0	0,33	84,1	8,0
810	0,37	85,7	8,9	0,37	85,0	8,9	0,38	85,0	8,9
900	0,42	86,5	9,8	0,41	85,9	9,8	0,42	85,9	9,8
990	0,47	87,2	10,7	0,46	86,7	10,7	0,47	86,7	10,7
1080	0,52	87,9	11,5	0,51	87,4	11,6	0,52	87,5	11,5
1170	0,58	88,5	12,4	0,56	88,1	12,5	0,57	88,2	12,4
1260	0,63	89,0	13,2	0,62	88,7	13,3	0,63	88,8	13,2
1350	0,69	89,5	14,0	0,67	89,2	14,1	0,68	89,4	14,0
1440	0,75	90,0	14,8	0,73	89,8	14,9	0,74	89,4	14,8
1530	0,81	90,5	15,6	0,79	90,3	15,7	0,80	90,4	15,6
1620	0,87	90,9	16,3	0,85	90,8	16,5	0,86	90,9	16,4
1710	0,93	91,4	17,1	0,91	91,2	17,2	0,93	91,4	17,1
1800	1,00	91,8	17,8	0,98	91,7	18,0	0,99	91,9	17,8
1812				1,00	91,8	18,2	1,00	92,0	17,9

в 73,3% к 90 суткам, а при $T = 96$ час. — к концу года с минимальным значением, равным 90,1%. Кроме того, чем меньше период T , тем больше снижение обводнённости скважины. С пониженной обводнёностью скважина работает значительный промежуток времени, а именно (при изменении менее 1%) порядка 180, 270, 360 и 450 суток при периоде T , соответственно равном 12, 24, 48 и 96 часов. Затем коэффициент обводнённости медленно растёт. В результате такого процесса при $T = 12, 24$ час прирост нефтеотдачи составлял каждые 3 месяца не менее 1% в течение 2-х лет и составил за это время около 8%; при $T = 48$ час подобный прирост длился около 1,5 лет и составил 5,6%. Наибольшая нефтеотдача (при прокачке 1-го порового объёма) получена при периоде $T = 18$ час и составила 18,2%; в то время как при $T = 48$ час, $\eta_n = 15,4\%$, а при $T = 96$ час — только 10,9%.

Таблица 11.2

Т сут.	48 час			96 час		
	$Q_{ж}$	v_g	η_n	$Q_{ж}$	v_g	η_n
0	0,0010	1099,0	0,0	0,00	99,0	0,0
90	0,08	88,0	0,7	0,11	93,7	0,6
180	0,13	84,4	1,7	0,18	91,4	1,3
270	0,17	83,5	2,7	0,24	90,4	2,2
360	0,22	83,6	3,7	0,30	90,1	3,0
450	0,26	84,2	4,7	0,37	90,2	3,9
540	0,31	85,0	5,6	0,43	90,5	4,7
630	0,35	85,9	6,5	0,49	90,8	5,5
720	0,40	86,7	7,2	0,55	91,1	6,2
810	0,45	87,4	8,3	0,62	91,5	7,0
900	0,51	88,2	9,2	0,69	91,8	7,8
990	0,56	88,8	10,0	0,76	92,2	8,5
1080	0,62	89,4	10,8	0,83	92,5	9,2
1170	0,67	90,0	11,6	0,90	92,9	10,0
1260	0,73	90,5	12,4	0,97	93,2	10,6
1350	0,80	91,1	13,2	1,00	93,4	10,9
1440	0,86	91,5	13,9			
1530	0,93	92,0	14,7			
1620	1,00	92,4	15,4			
1710						
1800						
1812						

Следует отметить, что с увеличением периода возрастает темп отбора. Так, при $T = 12, 24$ час для добычи жидкости в объёме 1-го порового объёма потребовалось 5 лет, а при $T = 96$ час — менее 4-х лет.

Распределения водонасыщенностей вдоль пласта в трещинах и блоках на конец эксперимента показаны на рисунке 11.1. Здесь следует отметить, что водонасыщенность в трещинах значительно снизилась (от $S_l^0 = 0,95$) за счёт перетока нефти из блоков.

Изменим теперь пористость трещин в два раза, положив $m_l = 0,005$, и проведём вычислительный эксперимент, сохранив неизменными все остальные параметры. Это связано с тем, что разделить фазовую проницаемость пласта на проницаемость блоков и существенно меньшую проницаемость трещин весьма проблематично. Поэтому необходимо выявить характер влияния величины пористости на решение исследуемой задачи. Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблицах 11.3 и 11.4.

ПРОМЫСЛОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

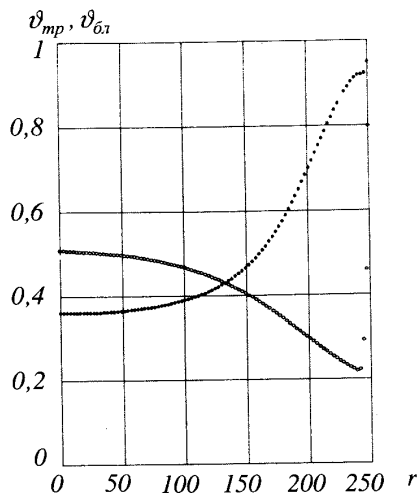


Рис. 11.1

Таблица 11.3

Т сут.	12 час			18 час			24 час		
	$Q_{ж}$	$v_в$	η_n	$Q_{ж}$	$v_в$	η_n	$Q_{ж}$	$v_в$	η_n
0	0,00	98,0	0,0	0,00	93,7	0,0	0,00	98,7	0,0
90	0,04	72,6	1,1	0,04	73,0	1,1	0,05	76,5	1,0
180	0,07	73,9	2,2	0,08	73,4	2,2	0,08	74,8	2,2
270	0,11	76,1	3,3	0,11	75,1	3,3	0,11	75,4	3,2
360	0,14	78,1	4,4	0,14	77,0	4,4	0,15	76,5	4,3
450	0,18	79,9	5,4	0,18	78,8	5,4	0,18	78,7	5,3
540	0,22	81,4	6,4	0,22	80,3	6,4	0,22	80,3	6,4
630	0,26	82,6	7,4	0,25	81,7	7,4	0,26	81,7	7,3
720	0,30	83,8	8,3	0,30	82,9	8,3	0,30	82,9	8,3
810	0,35	84,7	9,2	0,34	83,9	9,3	0,35	84,0	9,2
900	0,40	85,6	10,1	0,39	84,9	10,2	0,39	85,0	10,2
990	0,44	86,4	11,0	0,43	85,8	11,1	0,44	85,9	11,1
1080	0,50	87,1	11,9	0,48	86,6	12,0	0,49	86,7	12,0
1170	0,55	87,8	12,8	0,53	87,3	12,9	0,54	87,5	12,8
1260	0,60	88,4	13,6	0,59	88,0	13,7	0,59	88,2	13,7
1350	0,66	89,0	14,4	0,64	88,7	14,6	0,65	88,8	14,5
1440	0,72	89,5	15,3	0,70	89,3	15,4	0,70	89,4	15,3
1530	0,78	90,0	16,0	0,76	89,8	16,2	0,76	89,8	16,1
1620	0,84	90,5	16,8	0,82	90,4	17,0	0,83	90,6	16,9
1710	0,90	91,0	17,6	0,88	90,9	17,7	0,89	91,2	17,6
1800	0,97	91,4	18,3	0,94	91,4	18,5	0,96	91,7	18,4
1843	1,00	91,6	18,7	1,00	91,7	19,1	1,00	92,0	18,9

Часть III

Таблица 11.4

Т сут	48 час			96 час		
	$Q_{ж}$	ϑ_a	η_n	$Q_{ж}$	ϑ_a	η_n
0	0,00	98,6	0,0	0,01	98,7	0,0
90	0,07	84,1	0,9	0,09	91,5	0,7
180	0,11	81,5	1,9	0,15	89,8	1,6
270	0,15	81,2	3,0	0,21	89,5	2,5
360	0,19	82,0	4,0	0,27	89,6	3,3
450	0,23	83,3	5,0	0,33	89,9	4,2
540	0,27	84,0	6,0	0,39	90,2	5,0
630	0,32	85,0	6,9	0,46	90,5	5,9
720	0,37	85,9	7,8	0,52	90,9	6,7
810	0,42	86,8	8,7	0,59	91,3	7,5
900	0,47	87,5	9,6	0,65	91,7	8,2
990	0,52	88,3	10,4	0,72	92,1	9,0
1080	0,58	89,0	11,3	0,79	92,5	9,7
1170	0,64	89,6	12,1	0,87	92,9	10,4
1260	0,70	90,2	12,9	0,94	93,2	11,1
1350	0,76	90,8	13,7	1,00	93,5	11,6
1440	0,82	91,3	14,6			
1530	0,89	91,8	15,2			
1620	0,96	92,3	15,9			
1710	0,00	92,6	16,3			
1800						
1812						

Из сравнения соответствующих данных таблиц 11.1–11.4 можно сделать вывод, что уменьшение пористости трещин в два раз не привело к качественным изменениям в результатах, но есть количественные изменения – обводнённость скважины стала меньше и возросла нефтеотдача пласта.

Таким образом, проведённые вычислительные эксперименты показали, что циклический режим работы добывающей скважины с периодически меняющимся во времени забойным давлением позволяет снизить обводнённость скважины на длительный период и значительно поднять нефтеотдачу пласта. При этом имеется оптимальный период цикла (в примерах он равен $T = 18$ час), когда нефтеотдача будет наибольшей. Сделанные выводы полностью согласуются с промысловыми экспериментами.

Литература

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы механики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. П. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ, 1960, т. 24, вып. 5., с. 36–48.
3. Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. – М.: ИЛ, 1952. – 506 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512 с.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа, 1975.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа, 1966. — 466 с.
7. Кост Т.Л. Приближённое обращение преобразования Лапласа при анализе вязко-упругих напряжений. // Ракетная техника и космонавтика. 1964, № 12, с. 175–187.
8. Молокович Ю. М. Основы релаксационной фильтрации. Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. — М.: Наука, 1987. АН СССР, ин-т проблем механики. — С. 142–153.
9. Молокович Ю. М., Марков А. И. и др. Пьезометрия окрестности скважин. Теоретические основы. – Казань. Изд-во “ДАС”, 2000. — 202 с.
10. Молокович Ю. М., Марков А. И. и др. Выработка трещиноватопористого коллектора нестационарным дренированием. – Казань: Изд-во “РегентЪ”, 2000. – 156 с.
11. Молокович Ю. М., Непримеров Н.Н. и др. Релаксационная фильтрация. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1980. – 136 с.
12. Молокович Ю. М., Осипов П. П. Основы теории релаксационной фильтрации. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1987. – 116 с.
13. Молокович Ю. М., Чекалин А. Н. Численное моделирование процессов взаимодействия систем блоков и систем трещин карбонатного коллектора при периодическом режиме дренирования. – Приоритетные методы увеличения нефтеотдачи пластов и роль супертехнологий. Труды научно-практической конференции. Бугульма 25–26 ноября 1997. – Казань: Изд-во Новые знания, 1998. – С. 122–125.
14. Молокович Ю. М., Шкуро А. С. Применение метода разделения времени по процессам в задачах неравновесной фильтрации. – Георесурсы, №2(6). Изд-во Казан. гос. ун-та, 2001. — С. 19–21.

ЛИТЕРАТУРА

15. Непримеров Н. Н. Трехмерный анализ нефтедобычи охлаждённых пластов. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1978. – 215 с.
16. Непримеров Н. Н. Влияние промыслового эксперимента на развитие теории фильтрации. Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. – М.: Наука, 1987. АН СССР, ин-т проблем механики. – С. 153–162.
17. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. — М.: Наука, 1977. – 383 с.
18. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1976. – 535 с.
19. Тресделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
20. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396.
21. Щелкачёв В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. – М.: Нефть и газ, 1995. Ч. 1 – 586 с.; ч. 2 – 493 с.
22. Goodknight R. C., Klikoff W. A., Fatt I. Non-steady-state fluid flow and diffusion in porous media containing dead-end pore volume. “Journal of Physical Chemistry”, Vol. 64, № 9, 1960. p.p. 1162–1167.

Молокович Юрий Матвеевич

Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 10.07.2006. Формат 60х84¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,67. Уч. изд. л. 12,34.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ № 00105
АНО «Институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://rcd.ru> E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295

Отпечатано ГУП УР «Ижевский полиграфический комбинат»
426039, г. Ижевск, Воткинское шоссе, 180