

Б.Х. Хужаёров

**ФИЛЬТРАЦИЯ
НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ
В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. АЛИШЕРА НАВОИ

Б.Х. ХУЖАЁРОВ

ФИЛЬТРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ



Издательство «Фан»
Академии наук Республики Узбекистан
Ташкент – 2012

УДК 532.546
ББК 24.6; 22.365
Х 98

В монографии изложены вопросы математического и физического моделирования фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах. На основе экспериментальных исследований определены релаксационные явления при фильтрации таких жидкостей и описаны соответствующие математические модели. Исследована кинетика пористости среды, являющаяся характерной при фильтрации неоднородных жидкостей за счет кольтматации и суффозии пор. Предложены новые кинетические уравнения, учитывающие динамические факторы при заполнении и освобождении пор. Для такой кинетики составлены модели кольтматационно-суффозионной фильтрации, на основе которых решен ряд задач при различных условиях. Проанализированы задачи с учетом предельного градиента давления и предельного суффозионного градиента давления. Изложены результаты вычислительных экспериментов, проведенных с целью оценки влияния различных параметров модели на характеристики фильтрации.

Для специалистов в области механики жидкости и газа, прикладной математики, а также может быть использована при подготовке бакалавров и магистров по специальностям «Вычислительная математика», «Математическое моделирование» в качестве учебного пособия и при подготовке выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций.

Ответственный редактор:

доктор физико-математических наук, профессор Ж.А.Акилов

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор Х.Х.Худойназаров

кандидат физико-математических наук, доцент В.Ф.Бурнашев

ВВЕДЕНИЕ

Проблема фильтрации дисперсных систем в пористой среде имеет большое практическое значение. Многие технологические процессы, природные явления, производственные процессы и др. связаны с движением дисперсных систем в пористых, трещиновато-пористых, кавернозно-пористых средах. В отличие от фильтрации однородных жидкостей при фильтрации дисперсных систем возникает ряд новых явлений, изучение которых очень важно для понимания механизмов фильтрационного процесса. Если в качестве дисперсной рассмотреть суспензии, то наиболее важным вопросом является изучение процессов переноса дисперсной фазы, взвешенных в дисперсной фазе твердых частиц в пористой среде, взаимодействия этих частиц с поверхностью скелета пористой среды, осаждения в поровом пространстве, освобождения поровых каналов от осевших частиц, адсорбции на поверхности скелета пористой среды и др. Отметим, что такие вопросы изучались очень слабо как с теоретической, так и экспериментальной стороны. В промышленных и природных условиях исследований и того меньше. Возможно, одной из причин плохой изученности проблемы является крайняя сложность физического и математического моделирования процессов переноса частиц в поровом пространстве, где в отличие от свободного объема имеются стесненные условия.

Нерегулярность пористых структур и ее следствие – нерегулярность поля скоростей является причиной дисперсии жидких и твердых масс в процессе фильтрационного течения дисперсных, многофазных и многокомпонентных систем [43, 78, 89, 153, 223, 240]. Механизм переноса жидкости и взвешенных или растворенных в ней веществ довольно сложный. Для его описания в силу нерегулярности порового пространства и самих дисперсных систем предпочтительным является применение статистических методов. При этом объектом исследования являются регулярные характеристики многочастичных систем – концентрации, а целью исследования – получение уравнений, связывающих концентрации с макроскопическими характеристиками фильтрационных потоков, неоднородностью их структуры [223]. Дисперсия на микроуровне исследована в работах [127, 128, 240, 273, 274], некоторые сведения обзорного характера по этой теме можно найти в

[150]. Фильтрационная дисперсия на микроуровне в средах со случайными неоднородностями рассмотрена в [223]. Заметим, что статистическое описание фильтрационной дисперсии развито еще недостаточно хорошо. Феноменологическому описанию дисперсионных явлений посвящен целый ряд работ. Применительно к явлениям коагуляции и суффозии можно показать монографические работы [43, 108, 228].

Заметим, что при фильтрации дисперсных систем за счет осаждения отдельных компонентов или фаз в поровом пространстве фильтрационный поток может приобретать релаксационный характер. Этому явлению посвящен ряд работ [38, 185, 186, 192, 201, 211].

При больших эффективных напряжениях на пласт устойчивость пород может теряться, что приводит к разрушению скелета и выносу частиц вместе с потоком жидкости. Это обычно происходит в глубоких пластах, проявляющих упруго-пластический режим деформирования. Эта проблема сейчас интенсивно развивается. Создана модель упруго-пластической фильтрации в неустойчивых пластах [198, 216, 264], на основе которой решается ряд проблем, характеризующих особенности выноса песка и частиц породы [183, 184, 212, 213, 214, 215], а также проблемы разработки глубокопогруженных нефтяных и газовых месторождений [85]. Однако эти задачи рассмотрены без учета изменения фильтрационных характеристик за счет массообразования, фильтрационной дисперсии и др. Безусловно, учет этих явлений в моделях [198, 216, 264] приведет к существенному их обобщению и обогащению.

Заметим, что при добавлении частиц в поток жидкости ее реологические характеристики изменяются. В процессе образования частиц в среде за счет разрушения скелета пород и перехода их во взвешенное состояние реологические свойства фильтруемой жидкости изменяются [199, 204, 262, 263, 270]. В существующих до настоящего времени моделях этот фактор не принят во внимание. Учет этого фактора в задачах фильтрации дисперсных жидкостей представляется весьма интересным и перспективным.

В данной книге рассматриваются только феноменологические модели фильтрации дисперсных систем. В последнее время весьма интенсивно развивается макроскопическое моделирование, что практически не использовано при анализе задач фильтрации дисперсных систем. Только лишь некоторые родственные задачи исследованы с помощью этого метода [188, 260, 261], что показывает его высокую эффективность.

Чтобы концентрировать внимание на анализе явлений коагуляции и суффозии, гидродинамические задачи в основном анализируются в одномерной постановке. Некоторые двумерные задачи рассмотрены в [190,

266], где пористая среда состоит из двух зон – одна с подвижной и другая с неподвижной жидкостью. Пористые среды с таким характером насыщения в последнее время приобретают большое внимание. Следует отметить, что применительно к задачам переноса растворенных веществ [241, 245, 246, 252, 258, 275] предложены кинетические модели первого порядка [247, 253, 280, 284], учитывающие массообмен между указанными зонами. Этот подход получил широкое распространение [248, 249, 254, 255, 272] и оказался очень продуктивным. Использование этого подхода к задачам кольматационно-суффозионной фильтрации, на наш взгляд, должно дать весьма интересные результаты.

В первой главе монографии даны сведения о релаксационных явлениях при фильтрации жидкостей и их модельном описании. Приведены результаты экспериментальных исследований по фильтрации тяжелых нефтей Узбекистана в пористой среде, описаны возникающие при этом аномальные явления. Дан краткий обзор гипотетических моделей релаксационной фильтрации. Для описания аномальных явлений, обнаруженных при проведении экспериментов по фильтрации тяжелых нефтей, продемонстрирована возможность применения методов САР – систем автоматического регулирования. Показано, что, зная вид передаточной функции системы, можно предложить различные релаксационные модели фильтрации. Одной из возможных причин возникновения релаксационных явлений при фильтрации может быть изменение структуры пористой среды, в частности набухание глин, содержащихся в составе горной породы, при контакте с различными водами. С целью изучения механизма этого явления проведена серия экспериментов по набуханию глин и фильтрации вод с различными химическими добавками в глинизированных пористых средах. В этой же главе приведены решения ряда обратных задач по оценке релаксационных и других параметров фильтрации в пористых средах. Для простейших релаксационных моделей решены прямые задачи фильтрации, основной целью которых была оценка влияния релаксационных параметров на фильтрационные характеристики. Для построения приближенного решения задач релаксационной фильтрации использованы теоремы сравнения.

Во второй главе изучена кинетика пористости при кольматации и суффозии. В начале главы дан краткий обзор работ по кольматации и суффозии пор. Затем дано обоснование новой модели кинетики пористости при фильтрации микронееднородных жидкостей, выведены релаксационные законы фильтрации. Следует отметить особую значимость этих результатов: они указывают на тесную связь между явлениями кольматации, суффозии пор и релаксацией

скорости фильтрации, градиента давления. Другими словами, видно, что коагуляция и суффозия пор твердыми частицами фильтруемой жидкости могут быть прямой причиной возникновения релаксационных явлений. Даны обобщения отмеченной модели с учетом нелинейной зависимости коэффициента фильтрации от пористости, предельного суффозионного градиента давления (ПСГД). Введение в рассмотрение нового параметра – ПСГД позволяет обнаруживать и анализировать ряд новых эффектов, возникновение которых на первый взгляд является неожиданным. Далее, используя более общую схематизацию заполнения порового пространства [228], предложено кинетическое уравнение относительно насыщенности осевшими частицами в рыхлом теле. Все предложенные кинетические уравнения использованы в последующих главах при построении моделей коагуляционно-суффозионной фильтрации.

Моделям коагуляционно-суффозионной фильтрации посвящена третья глава. В начале главы дан небольшой обзор о коагуляции и суффозии пор, а также фильтрации дисперсных систем типа суспензий в пористых средах. Затем даны сведения о некоторых широко используемых моделях коагуляционно-суффозионной фильтрации, а также методах решения задач на основе этих моделей. Построены дифференциальные приближения для предложенной новой модели коагуляционно-суффозионной фильтрации.

Четвертая глава книги посвящена исследованию задач фильтрации с учетом коагуляции и суффозии. В первом параграфе главы качественно исследована модель на основе предложенного кинетического уравнения, обсуждены вопросы корректной постановки задач. Затем приведены асимптотическое (типа бегущей волны) и численное решения задач для заданного скоростного режима. Приведены также решения задач с заданным режимом по давлению в конечном пласте, а также с учетом диффузионных эффектов. Предложен подход к моделированию процессов коагуляционно-суффозионной фильтрации в неоднородной по размерам пор среде. Показано, что схематизация неоднородной среды как слоистый пласт с разными фильтрационно-емкостными и коагуляционно-суффозионными свойствами позволяет лучше интерпретировать экспериментальные данные и описать их соответствующими гидродинамическими моделями.

В главе 5 рассмотрены задачи коагуляционно-суффозионной фильтрации с учетом предельных градиентов давления как по потоку, так и по суффозии. Отдельно анализировались полубесконечный, конечный пласты, линейный и нелинейный коэффициенты фильтрации, режимы образования потока с заданной скоростью фильтрации, давлениями на концах области фильтрации, случай переменной диффузии и другие ситуации.

Используя более общую схематизацию заполнения порового объема среды по Ю.М.Шехтману в шестой главе численно решен ряд задач. При этом в системе уравнений использовано новое кинетическое уравнение относительно насыщенности осевшими частицами в рыхлом теле. Как и в предыдущей главе, проанализированы различные постановки задач.

В седьмой главе рассмотренные в предыдущей главе задачи исследуются с учетом предельного суффозионного градиента давления (ПСГД). Оценена роль ПСГД в изменении фильтрационных характеристик.

В восьмой главе рассмотрены задачи фильтрации в горизонтальных двухслойных средах, каждый из слоев которых имеет различные внутренние структуры. Такие слоистые пласты могут образоваться в первоначально однородных нефтяных пластах вокруг добывающих или нагнетательных скважин после проведения различных геолого-технических мероприятий, в частности после гидроразрыва или кислотной обработки. Например, после гидроразрыва вокруг скважины образуются искусственные микро- и макротрещины до некоторых расстояний от забоя скважины. В этой зоне структура пласта изменяется. Если пласт первоначально был пористым, то уже становится трещиновато-пористым, а зона, куда искусственные трещины не доходили, остается пористой. В отличие от известных исследований здесь задачи рассмотрены с учетом релаксационных явлений. В первом параграфе дается постановка и аналитическое решение известной задачи фильтрации в двухслойной среде без учета релаксационных явлений. Затем данная задача обобщена с учетом релаксации градиента давления относительно скорости фильтрации. Исследованы случаи замкнуто-упругого пласта, затухания фильтрационного расхода и др. Режим с затухающим фильтрационным расходом косвенно моделирует кольтматационно-суффозионные явления, из-за которых фильтрационный расход обычно уменьшается.

Учитывая, что уравнения кольтматационно-суффозионной фильтрации нелинейны, для решения задач, как правило, применяются численные методы, а именно – метод конечных разностей. В процессе использования метода в определенной мере даны сведения об аппроксимации, устойчивости и сходимости метода.

С целью дифференцированного анализа влияния различных параметров, особенно введенных здесь впервые, материал снабжен многочисленными графиками, определенным количеством таблиц. Сопоставляя характер этих графиков, можно сделать заключение о влиянии конкретных параметров на фильтрационные характеристики.

Научная деятельность автора начиналась под руководством проф. Ж.А.Акилова, чьи консультации оказали большое влияние на формирование научных интересов автора.

Идеология и методика исследований, вообще научное мировоззрение автора сформировались благодаря помощи и многочисленным дискуссиям с покойными учителями – академиком АН Республики Азербайджан А.Х.Мирзаджанзаде, профессором Ю.А.Бувевичем. Ряд новых идей и задач, большая часть которых еще ждет своей реализации, возник в процессе работы автора в Гренобльском университете (Франция) и общения с профессорами J.-L.Auriault и P.Royer.

В подготовке рукописи книги большую помощь оказали к.ф.-м.н. Ж.М.Махмудов и Н.С.Марданова. Всем перечисленным автор выражает свою глубокую благодарность.

Глава 1.

Релаксационные явления при фильтрации жидкостей и их модели

1.1. Релаксационные явления при фильтрации жидкостей

1.2. Модели релаксационной фильтрации

1.3. Составление моделей фильтрации смолистых и парафинистых нефтей с использованием методов САР

1.4. Релаксационные явления при фильтрации в глинистых пластах

1.4.1. Особенности заводнения глинистых пластов

1.4.2. Изучение набухания пород

1.4.3. Изучение фильтрации и вытеснения нефти из пористой среды

1.5. Гидродинамические методы определения релаксационных характеристик фильтрационного потока

1.5.1. Определение релаксационных и других характеристик фильтрации в круговом пласте

1.5.2. Определение релаксационных и других характеристик фильтрации в линейном пласте

1.6. Задачи релаксационной фильтрации

1.7. Приближенная оценка решений задач фильтрации с релаксацией давления

В данной главе рассматриваются релаксационные явления, возникающие при фильтрации жидкостей в пористой среде. Приводится краткий обзор известных релаксационных явлений, даются результаты новых исследований, которые, в основном, носят экспериментальный характер. В разделе о релаксационных моделях основное внимание уделяется гипотетическим моделям. Отдельные исследования посвящены фильтрации нефтей и различных вод в глинистых пористых средах, где на основе полученных результатов предложена новая технология разработки месторождений Майли-Су-IV – Восточный Избаскент. Приведены сведения о нескольких гидродинамических методах оценки фильтрационных и релаксационных характеристик потока.

1.1. Релаксационные явления при фильтрации жидкостей

Движение жидкостей в пористой среде описывается законом фильтрации, связывающим между собой скорость фильтрации и градиент давления. При фильтрации обычных жидкостей это, как правило, стационарная зависимость, обусловленная вязкими и вязкопластичными свойствами жидкостей и их взаимодействием с породой пористой среды. При этом используются как линейные, так и нелинейные модели фильтрации. При фильтрации многих высоковязких однородных жидкостей и их смесей с газами наблюдаются релаксационные явления, которые в конечном итоге приводят к неравновесности фильтрационного потока. Выделяются два вида неравновесности фильтрационного потока [14] – неравновесность в микро- и макромасштабе. Первая связана с движением в порах, вторая определяет неравновесность всего потока в целом.

Здесь на примере фильтрации тяжелых нефтей рассмотрим явления, многие характерные особенности которых справедливы и для других высоковязких жидкостей. В этой связи весьма репрезентативным является опыт

по движению тяжелых нефтей в сужающихся и расширяющихся одиночных капиллярах [14]. Обобщением этого явления на фильтрационные течения является факт зависимости расхода жидкости при постоянном перепаде давления от направления течения. Эксперименты проводились в радиальном секторе с углом 90° , длиной $l = 9$ см, толщиной $h = 5$ см. Пористая среда с проницаемостью по воздуху $k = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ создавалась кварцевым песком. Фильтруя нефть при постоянном перепаде давления в стационарных условиях от широкого сечения к узкому (направление 1) и наоборот (направление 2) обнаружено, что в первом направлении фильтрационный расход приблизительно в пять раз выше, чем при фильтрации в обратном направлении. Отмечено также, что при фильтрации в неоднородных средах в потоке в сторону убывания проницаемости скорость фильтрации оказывается больше, чем при движении в обратном направлении. Все эти явления объяснены с точки зрения релаксационных свойств фильтруемых жидкостей.

Характерной особенностью движения тяжелых нефтей в пористой среде являются сопровождающие ее кинетические эффекты, обусловленные неравновесностью потока. Кинетические эффекты проявляются в том, что при постоянных внешних условиях происходит затягивание переходных процессов. При этом характерное время процесса на несколько порядков превышает время установления гидродинамического режима, определенное на основе известных равновесных расчетных моделей. Аналогичные кинетические эффекты имеют место и при фильтрации полимерных растворов [26, 53].

В работе [14] отмечены некоторые кинетические эффекты при фильтрации тяжелых нефтей. В модели пласта длиной 155 см, площадью поперечного сечения $5,5 \text{ см}^2$, проницаемостью $96 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, пористостью 0,31 после создания стационарного режима фильтрации снимали кривые восстановления давления. Кривые для исследованных нефтей получились весьма протянутыми во времени – давление восстанавливалось несравненно долго. После полного восстановления давления до входного давления систему изолировали от внешней напорной системы, перекрывая входной вентиль. При этом среднее давление в модели синхронно снижалось в течение нескольких часов. Кроме того, был поставлен несколько другой опыт. После установления стационарного режима фильтрации в модели пласта одновременно закрывали входной и выходной вентили. После этого давление на входе в модель монотонно уменьшалось, а на выходе – росло. При этом отмечено, что при входном давлении 0,7 МПа (выход модели был открыт) после полной стабилизации установившееся давление оказалось равным примерно 0,15 МПа. Для обычной фильтрации без учета неравновесности потока такое давление

должно было бы равняться 0,35 МПа. Следовательно, наблюдаемое изменение давления не может быть объяснено на основе обычной теории упругого режима фильтрации однородной жидкости. При фильтрации обычной воды отмеченные выше эффекты не наблюдаются.

В работе приведены результаты экспериментов по затуханию фильтрационного расхода нефти при постоянном перепаде давления. Результаты аналогичны эффекту затухания фильтрационного расхода растворов полимеров ПАА и К-9 [2, 22, 53]. Восстановление первоначального расхода происходит после отдыха системы в течение нескольких часов. Такие же эффекты были получены при фильтрации газированных нефтей.

Принципиально новые эффекты были получены при исследовании моделей пласта на истощение. При этом, учитывая характерную особенность фильтрации, удалось диагностировать свойства различных пластовых систем, используя начальные участки кривых истощения. Исследовались различные газированные системы: керосин, нефть с малым содержанием высокомолекулярных компонентов и нефть с повышенным содержанием смол. Кривые истощения в координатах «нефтеотдача–время» для керосина получились в виде прямой, что говорит о справедливости равновесного уравнения материального баланса и равновесного закона растворимости газа в керосине. Для нефтей как с малым, так и с большим содержанием смол кривые истощения значительно отличаются от прямой. Это объяснено как неравновесностью выделения газа, так и проявлением неравновесных эффектов при фильтрации самих нефтей.

С целью проверки и уточнения отдельных отмеченных выше результатов автором были поставлены специальные лабораторные и стендовые испытания с использованием различных высоковязких нефтей Средней Азии. Работа проводилась в лаборатории реологии, гидродинамики и физики пласта (в последующем сектор повышения нефтеотдачи) СредазНИПИнефть в течение 1980-1985 гг. Здесь приводятся некоторые характерные результаты, которые имеют непосредственное отношение к неравновесным явлениям в пористой среде. Вопросы нелинейности закона фильтрации и связанные с ней проблемы здесь не рассматриваются.

Исследования проводились на моделях пласта, специально собранных с учетом особенностей проведения экспериментов. Установки работают в различных режимах: при различных перепадах давления (рис.1.1а) и различных скоростях фильтрации (объемных или массовых расходах) (рис.1.1б).

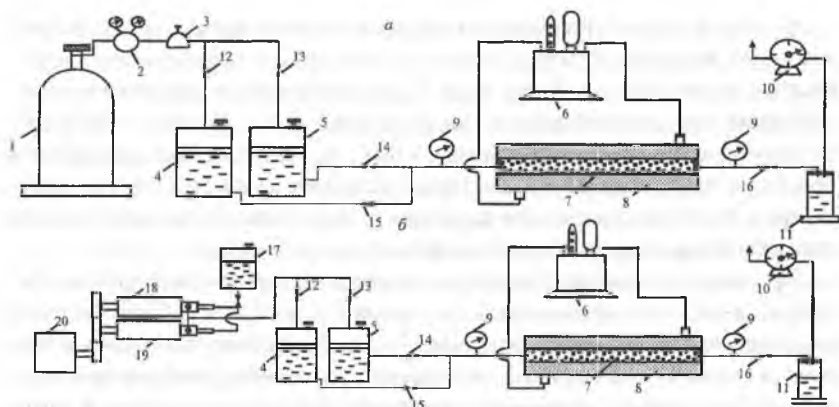


Рис.1.1. Схема установки по фильтрации и вытеснению нефти: а – при постоянном перепаде давления, б – при постоянном расходе. 1 – баллон высокого давления, 2 – редуктор давления, 3 – стабилизатор давления, 4, 5 – емкости для растворов и нефти, 6 – термостат, 7 – пористая среда, 8 – рубашка для термостатирования, 9 – образцовые манометры, 10 – газовый счетчик, 11 – мерник, 12-16 – вентили, 17 – емкость для заправочной жидкости, 18, 19 – датчики постоянного расхода (прессы), 20 – электродвигатель

В установке а) воздух из баллона высокого давления 1 через редуктор 2 и стабилизатор давления 3 поступает в емкости 4, 5, откуда вытесняет нефть или растворы различных реагентов. Пористая среда 7 создавалась очищенным кварцевым песком определенной фракции. Перед засыпкой песка в модель ее стенки промазывали эпоксидной смолой. Модель имела рубашку 8 для термостатирования, через которую термостатом 6 циркулировала вода с определенной температурой. Объем вышедшей жидкости и газа измерялся в мерном цилиндре 11 и газовом счетчике 10. Давление на входе в модель и на выходе из нее измерялось образцовыми манометрами 9. С помощью вентилей 12-16 создавались различные режимы, при которых изменялись давление и расход жидкости. Установка при постоянном расходе (б) отличается от установки при постоянном перепаде давления (а) лишь линией нагнетания. Здесь расход жидкости создается с помощью прессов 18, 19, плунжеры которых приводятся в движение с помощью электродвигателя 20. В установке использованы прессы из стандартной установки УИПК-2М по измерению коллекторских свойств горных пород. Емкости 4, 5 имеют поршень, который разделяет масло прессов 18, 19 от жидкостей емкостей 4, 5. Насыщение моделей проводили предварительным вакуумированием в течение 1-2 часов и нагревом нефти в процессе насыщения до 45-50°C.

В экспериментах использованы асфальтено-смолистые нефти месторождений Кокайты, Коштар, Ляльмикар, Амударья и парафинистые нефти месторождений Бостон, Варык и др. Содержание смол и асфальтенов в указанных нефтях соответственно: Кокайты – 64,0; 6,1 %, Коштар – 80,0; 0,97 %, Ляльмикар – 63,0; 6,7 %, Амударья – 80,0; 5,2 %. Содержание парафина в нефтях месторождений Бостон и Варык достигает до 23,0 и 13,4 % соответственно. Высокое содержание парафина и асфальтено-смолистых веществ определяет характер фильтрации нефти в пористой среде.

Проницаемость моделей пласта по воздуху определена стандартным способом и во всех экспериментах была равной $(1,15 \div 1,2) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$. Модель в виде круглого цилиндра имела размеры $l = 1 \text{ м}$, $R = 0,014 \text{ м}$. После насыщения модели каждый раз измерялась проницаемость по нефти, которая оказалась значительно меньше воздухопроницаемости. Каждый раз снимался также закон фильтрации, который в координатах $v - \Delta p/l$ имел нелинейный вид с выпуклостью к оси Δp . Однако предметом исследований были не стационарные зависимости $v - \Delta p/l$, а переходные стационарные процессы, происходящие в пористой среде при изменении режимов как по давлению, так и по скорости фильтрации. Эксперименты проводились несколькими сериями при постоянной температуре 40°С .

В первой серии экспериментов на входе в модель мгновенно создавалось постоянное давление и выход был открытым; в течение эксперимента созданный перепад давления поддерживался без изменения. Регистрировалось изменение массового расхода нефти во времени. В динамике фильтрационного расхода нефтей характерным является наличие «горба». Для асфальтено-смолистых нефтей пиковые значения расхода долго не сохраняются и в течение достаточно долгого времени его значение затухает, выходя на стационарные значения. Для парафинистых нефтей на кривых имеется своеобразное «плато», где расход сохраняется практически постоянным. При увеличении ∇p ширина «плато» уменьшается (рис.1.2).

Явление затухания фильтрационного расхода при постоянном ∇p , как уже отмечалось, было исследовано в [26, 53]. Основываясь на теоретические результаты [22, 27] предложен механизм затухания фильтрационного расхода. Согласно этому механизму фильтрующаяся жидкость (полимерный раствор) рассматривается как суспензия вязкоупругих частиц со сравнительно большим временем релаксации в вязкой жидкости. Считается, что размер этих частиц сопоставим с размером пор или не на много меньше. Под действием деформаций, которым подвергается частица во время движения, она постепенно твердеет с определенным временем затвердевания, равным

времени релаксации частиц, а не суспензий. Причем в начале движения частица движется вместе с жидкостью и постепенно затвердевает, затем она закрепляется на поверхности породы или закрывает проход между зернами породы. Однако по прошествии какого-то времени, имеющего порядок времени релаксации частицы, она проталкивается сквозь пору, а ее место занимает другая частица. Таким образом, между частицами, запирающими сечение и срывающимися из него, устанавливается динамическое равновесие. Затвердевание частиц является причиной уменьшения расхода. Во время прекращения фильтрации частицы начинают релаксировать, и жидкость возвращается к исходному состоянию. Этот механизм может быть использован и для случая фильтрации нефтей, где роль частиц могут сыграть агрегаты асфальтенов и смол, а также парафины.

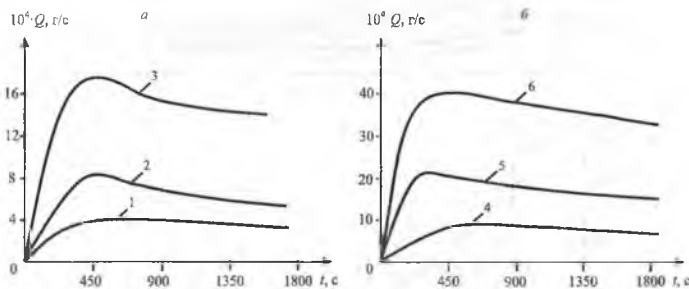


Рис.1.2. Зависимость фильтрационного расхода нефти при постоянном ∇p . Нефть м-я Коштар (а), Бостон (б). $10^{-5} \cdot \nabla p = 0,9$ (1); 2,4 (2); 5,2 (3); 2,0 (4); 3,0 (5); 5,0 (6) Па

После выхода на стационарный режим фильтрации давление снимали и системе давали покой. При продолжительности отдыха 10-14 часов система свои первоначальные свойства полностью восстанавливает и при приложении того же перепада давления устанавливает поток с прежним расходом. При продолжительных остановках повторное нагружение системы дает неравновесный режим с значительно меньшим первоначальным фильтрационным расходом.

После выхода на стационарный режим входной вентиль 14 (или 15) перекрывался и снято изменение давления на входе в модель и расхода нефти во времени. При фильтрации нефтей и воды после перекрытия входного вентиля поток практически мгновенно прекращается, давление на входе в модель соответствующим темпом упадет до нуля. Однако для исследованных нефтей $Q(t)$ и $\nabla p(t)$ релаксирует несравненно долго (рис.1.3). Отмечена несколько быстрая релаксация этих характеристик для парафинистых

нефтей по сравнению со смолистыми. Кроме того, для парафинистых нефтей при больших t после перекрытия входа обнаружено остаточное давление - $P_{ост}$ т.е. расход релаксирует до нуля, а давление – не до нуля. Этим давлением определяется осредненный предельный градиент давления в модели – $(\partial p / \partial x)_0 = P_{ост} / l$.

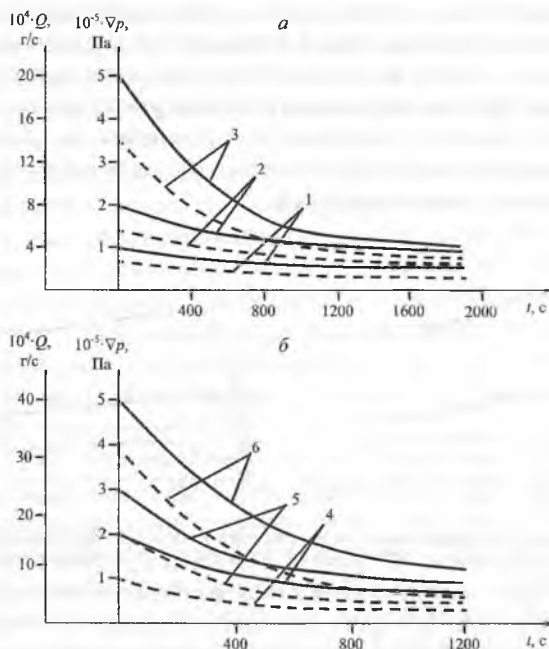


Рис. 1.3. Кривые релаксации ∇p (—) и Q (----) после перекрытия входа модели для смоистой (а) и парафинистой (б) нефтей. Стационарный перепад давления соответствует рис. 1.2

Во второй серии экспериментов на входе модели задавался постоянный расход нефти – $Q_{вх}$ и исследовалась динамика давления на входе и скорости фильтрации (расхода) на выходе. Заданный режим расхода относительно быстро устанавливается на выходе модели, но давление устанавливается с запаздыванием по отношению к темпу установления расхода. У смоистых нефтей давление устанавливается монотонно, но для парафинистых нефтей динамика давления имеет своеобразный «горб» (рис.1.4). Такой характер изменения давления указывает на существенное отличие процессов фильтрации смоистых и парафинистых нефтей при постоянном расходе. Изло-

мы на кривых соответствуют моменту прекращения нагнетания нефти на входе в модель. Дальнейшая релаксация Q и ∇p происходит также, как и при закрытии входа в модель в режиме с заданным перепадом давления.

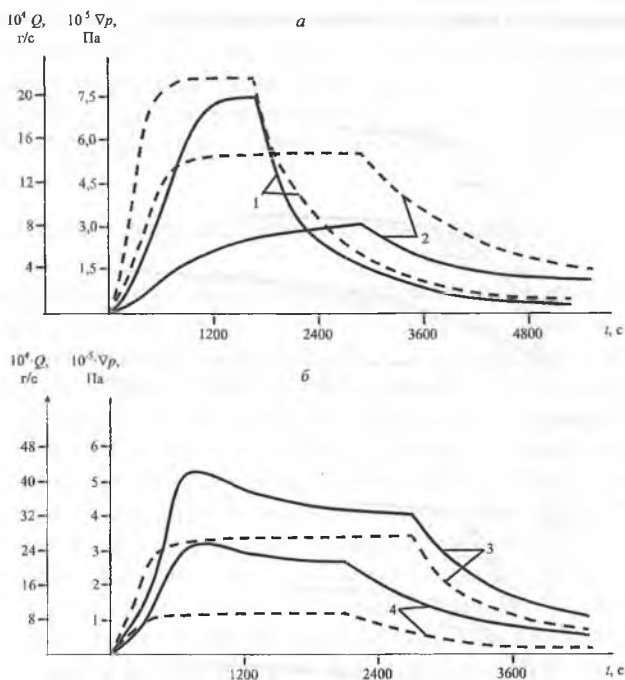


Рис. 1.4. Развитие ∇p (——) и Q (-----) при создании постоянного расхода в модели релаксации для смолистой (а) и парафинистой (б) нефтей. $10 \cdot Q_{\text{вх}} = 22$ (1); 14,8 (2); 25,7 (3); 9,8 (4) г/с

В третьей серии опытов снимались кривые восстановления давления (КВД) на выходе модели. Для этого после установления режима с заданными постоянным давлением на входе в модель выходной вентиль 16 мгновенно перекрывался и регистрировалось восстановление давления. Снятые КВД характеризуются тем, что время восстановления давления значительно больше, чем такое в обычных ньютоновских системах. Расчет КВД на основе формул фильтрации однородной упругой жидкости в упругой пористой среде дает переходной нестационарный режим, продолжительность которого намного меньше экспериментальных значений этого параметра. Это означает, что экспериментально полученные КВД не могут быть описаны с

помощью теории упругого режима фильтрации и для адекватного моделирования процесса необходимо использовать наследственную связь между входными и выходными характеристиками. Ниже будет показано, что такая связь действительно носит неравновесный характер.

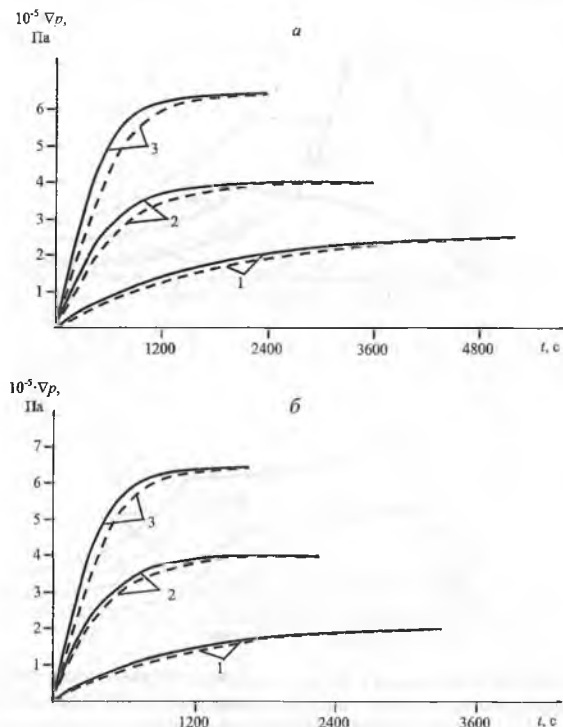


Рис. 1.5. Обычные КВД (—) и КВД при создании $p_{вх} = \text{const}$ в модели с закрытым концом (---) для смолистой нефти м-я Коштар (а) и парафинистой нефти м-я Бостон (б). $p_{вх} = 1 \cdot 10^5$ (1), $4 \cdot 10^5$ (2), $6,5 \cdot 10^5$ (3) Па

Кроме КВД самостоятельно получены кривые в следующем режиме. В модели с закрытым концом (вентиль 16 закрыт) у входа создавали постоянное давление $-p_{вх}$, которое, распространяясь в пористой среде, доходило до конца модели и в этой точке получались кривые, внешне не отличающиеся от обычных КВД. Если для обычных легких нефтей фронт давления практически мгновенно доходит до конца модели, то в модели со смолистыми и парафинистыми нефтями происходит ощутимая задержка фронта и обычные КВД существенно отличаются от КВД, снятых сразу после приложения $p_{вх}$.

в модели с закрытым концом (рис.1.5). В модели с парафинистой нефтью давление недовосстанавливается до $p_{\text{вн}}$, что означает наличие предельного градиента давления.

Здесь воспроизведен опыт по восстановлению давления при одновременном закрытии вентилей 14-16 после создания стационарного режима с заданным $p_{\text{вн}}$ [14]. В опытах со смолистой нефтью среднее давление в модели после полного перераспределения равнялось не $0,5 \cdot p_{\text{вн}}$, а $0,37 \cdot p_{\text{вн}}$, что подтверждает наличие релаксационных эффектов в кинетике восстановления давления.

1.2. Модели релаксационной фильтрации

Релаксационные явления при фильтрации жидкостей должны найти свое отражение в уравнениях, используемых для математического моделирования фильтрационного процесса. Обычно при описании релаксационной фильтрации используются различные феноменологические модели, учитывающие запаздывание в соотношениях между скоростью фильтрации и градиентом давления. В отдельных случаях приходится учитывать запаздывание и в уравнениях состояния. Рассмотрим некоторые гипотетические модели релаксационной фильтрации, предложенные разными исследователями.

Авторами одной из первых в этом направлении работ [26] на основе многочисленных экспериментальных данных показано релаксационное изменение скорости фильтрации при течении полимерного раствора через пористую среду при постоянном перепаде давления. Отмеченное явление объяснено своеобразной неравновесностью фильтрационного потока. На основе кинетической теории построено количественное соотношение между фильтрационным расходом и временем, которое хорошо согласуется с экспериментальными результатами.

В [11] рассмотрены некоторые нестационарные одномерные задачи фильтрации при упругом режиме в предположении отставания градиента давления от скорости фильтрации. Такой характер зависимости градиента давления от скорости фильтрации учитывается с помощью обобщения закона Дарси, который в линейном случае имеет вид

$$v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (1.1)$$

где v – скорость фильтрации, k – проницаемость пласта, μ – вязкость жидкости, $p(x,t)$ – давление, λ – время релаксации градиента давления. Физический

смысл уравнения (1.1), как указывается в работе, заключается в том, что если установить постоянную скорость фильтрации v_0 в ранее покоившейся жидкости, то соответствующий градиент давления установится не сразу, а постепенно, с некоторым запаздыванием

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu v_0}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right] \quad (1.2)$$

Как видно из (1.2), параметр λ характеризует темп установления постоянного градиента давления, отвечающего постоянной скорости фильтрации - v_0 .

В работе также с использованием (1.2) на основе общих предположений теории упругого режима [230] выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_{ж} + \beta_c)}, \quad (1.3)$$

где χ - коэффициент пьезопроводности; m - пористость; $\beta_{ж}$, β_c - коэффициенты сжимаемости жидкости и пласта соответственно.

В работе [10] обсуждаются вопросы запаздывания наступления неравновесного состояния между градиентом давления и скоростью фильтрации, которое, как указано в работе, обусловлено:

- а) инерцией скорости и запаздыванием его значения от значения градиента давления;
- б) релаксацией давления и запаздыванием значения градиента давления от значения скорости фильтрации;
- в) сложностью структуры пористой среды и запаздыванием установления равновесного состояния в его микропорах;
- г) запаздыванием переупаковки частиц, изменением пористости и проницаемости и т.п.

В работе обобщено уравнение (1.1) с учетом запаздывания скорости фильтрации

$$v + \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (1.4)$$

где λ_v - время релаксации скорости фильтрации.

Аналогично (1.3) выведено уравнение нестационарной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (1.5)$$

В работе [9] предлагается интегральная модель неравновесной фильтрации. Отмечено хорошее согласие предложенной модели с экспериментальными данными.

В [115] с учетом релаксационных эффектов находится распределение давления в пластах, работающих при водонапорном и упругом режимах и эксплуатируемых N скважинами с заданными дебитами. При определении поля давления используется функция Грина, которая строится для соответствующих уравнений и областей.

В [116, 122] дается обобщение закона фильтрации при учете двойной релаксации на случай нелинейной фильтрации. Приведено дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации для определения давления. Методом интегральных соотношений получены приближенные решения задачи одномерной фильтрации вязко-пластичной жидкости с учетом двойной релаксации, когда на забое скважины поддерживается либо давление, либо расход.

Отметим, что релаксационные законы (1.1), (1.4) могут быть интерпретированы другими механизмами релаксации, не обусловленными на аномально-неравновесные свойства флюида. Так, при изучении особенностей фильтрации однородной капельно-сжимаемой жидкости в трещиновато-пористых, кавернозных средах было показано [23 – 25, 178], что течение в трещинах без учета их сжимаемости можно описать фиктивным потоком некоторой слабосжимаемой жидкости в однородной пористой среде по закону фильтрации (1.1). Если же учитывается сжимаемость трещин, то течение в них можно интерпретировать как линейную фильтрацию некоторой слабосжимаемой жидкости в однородной пористой среде по закону (1.4). Кроме того, при изучении движения жидкости в однородной пористой среде с учетом сил инерции в одномерном случае может быть использован закон [123, 220]

$$v + \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.6)$$

Отметим, что в данном случае параметры λ_v и λ_p в (1.1), (1.4), (1.6) представляют собой некоторые константы, определенные вязкостью жидкости, упругостью блоков пористой среды и коэффициентом, характеризующим обмен жидкостью между блоками и трещинами.

При выводе уравнений пьезопроводности (1.3), (1.5) предполагалось, что изменение пористости среды с изменением давления имеет равновесный характер. Такая связь имеет место при сравнительно небольших и плавных изменениях давления. При резких и значительных изменениях давления поведение пористости среды будет носить релаксационный характер. В этом случае вместо уравнения состояния $m = m_0 + \beta_c(p-p_0)$, где m , m_0 – текущая и первоначальная пористости, β_c – коэффициент объемной упругости пласта, принимается [114]

$$m + \lambda_c \frac{\partial m}{\partial t} = m_0 + \beta_c (p - p_0), \quad (1.7)$$

где λ_c – время релаксации пористости.

Если закон фильтрации принимать в виде равновесного закона Дарси (в одномерном случае)

$$v = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.8)$$

то с учетом (1.7) получаем уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_c \left(1 - \frac{\beta_c}{\beta^*} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda_c \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda_c \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right) \quad (1.9)$$

что с точностью до обозначений совпадает с (1.5).

Пористые среды с законом деформации (1.7) названы релаксационно-сжимаемыми [114].

Вопросы корректности постановки задач и анализа свойств решений уравнений линейной релаксационной фильтрации в дальнейшем развивались в работах [117–121].

В [60, 61] закон фильтрации записан в интегральном виде

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} K(t - \xi) \nabla G(\xi) d\xi, \quad (1.10)$$

где $G = p + \rho\varphi$, φ – гравитационный потенциал, $K(t)$ не зависит от пространственной координаты и удовлетворяет следующим условиям:

а) $K(t)$ имеет размерность (время)⁻¹ и может быть обобщенной;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi = 1$.

Для конкретного $K(t)$ записано уравнение фильтрации, которое решено как линейное операторное уравнение. Показано, что в низкопроницаемых пористых средах равновесный закон Дарси (1.8) несправедлив, и необходимо пользоваться моделью (1.10). Экспериментально оценен диапазон изменения времени релаксации градиента давления.

Модель (1.4) называется моделью с двойной релаксацией. В общем случае, как и в линейных дифференциальных реологических моделях вязкоупругих жидкостей, можно записать различные ее обобщения. В частности, дифференциальные операторы могут иметь полиномиальный вид

$$P(D)\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad}(Q(D)p), \quad (1.11)$$

где $P(D) = 1 + p_1 D + \dots + p_n D^n$, $Q(D) = 1 + q_1 D + \dots + q_m D^m$, $D = \partial/\partial t$, $D^i = \partial^i/\partial t^i$, $\sqrt[p_i]{p_i}$, $\sqrt[q_i]{q_i}$ – времена релаксации скорости фильтрации и градиента давления.

Обычно для практических расчетов использование (1.11) затруднительно, т.к. определить времена релаксации $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, на основе экспериментальных или каких-либо других исследований чрезвычайно трудно. Поэтому более широкое применение нашла модель (1.4).

Как отмечалось в начале раздела, в некоторых случаях приходится учитывать релаксационный характер уравнения состояния. Это справедливо как и другие релаксационные явления для тяжелых нефтей, полимерных растворов, буровых жидкостей и др. В [14] предложено релаксационное уравнение состояния

$$\rho_0 \beta_{ж} \left(p + \lambda_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \rho + \lambda_2 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (1.12)$$

где ρ_0 – первоначальная плотность, $\beta_{ж}$ – коэффициент объемной упругости жидкости, λ_1, λ_2 – времена релаксации давления и плотности жидкости.

Используя обычный закон Дарси типа (1.8), с учетом (1.12) получено уравнение для давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \chi \left(\Delta p + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta p \right), \quad (1.13)$$

которое по виду ничем не отличается от (1.5) и (1.9).

Хотя (1.5), (1.9), (1.13) по виду не отличаются, но постановка задач для них существенно различна. Краевые условия в задачах для этих уравнений ставятся исходя из закона Дарси, положенного в основу уравнений.

В [14] предложена наследственная модель фильтрации дилатантной жидкости. На основе построенной модели объяснены эффекты немонокотности КВД и затухания расхода при постоянном перепаде давления для тяжелых нефтей.

Весьма плодотворным оказалось обобщение линейных релаксационных моделей с использованием обобщенных производных по времени. При этом модели становятся нелинейными, но появляется возможность описания многих нелинейных явлений. Так, в [14] предложена модель

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \left[\nabla p + \lambda \left(\frac{\partial \nabla p}{\partial t} + \frac{1}{m} (\nabla \bar{v}) \nabla p \right) \right], \quad (1.14)$$

где λ – время релаксации.

Закон (1.14) отличается от (1.1) использованием полной производной от времени. При малых скоростях фильтрации в (1.14) можно пренебречь нелинейным членом.

Рассматривая стационарный поток в одномерной неоднородной среде установлено, что при использовании (1.14), когда $|\nabla p| = \text{const}$ в зависимости

от закона изменения проницаемости по длине, получаются различные скорости фильтрации. Именно при движении в сторону убывания проницаемости скорость фильтрации оказывается больше, чем при движении в обратном направлении. Кроме того, модель (1.14) описывает экспериментальный факт зависимости расхода от направления движения при радиальной фильтрации.

Как видно из приведенных сведений, гипотетические модели релаксационной фильтрации могут приниматься в различном виде. Однако для всех этих моделей общим недостатком, ограничивающим их применение, является отсутствие явной связи релаксационных фильтрационных параметров с релаксационными свойствами жидкости и пористой среды.

1.3. Составление моделей фильтрации смолистых и парафинистых нефтей с использованием методов CAP

В разделе 1.1 приведен целый ряд явлений, свойственных исключительно фильтрации асфальтено-смолистых и парафинистых нефтей. Отдельные явления были отмечены ранее и при фильтрации полимерных растворов и газированных нефтей. Очень важным (точнее первостепенным) вопросом является определение математических моделей, т.е. законов фильтрации, тем или иным способом описывающих отмеченные явления. В разделе 1.1 уже упоминалось, что экспериментально подтвержденные новые явления носят неравновесный характер и, естественно, математические модели фильтрации также должны быть неравновесными.

В теории моделирования фильтрационных явлений широко распространен следующий подход. В нем релаксационные явления стараются описать с помощью построения сложных фильтрационных законов, учитывающих реологические свойства фильтруемых жидкостей и материала пористой среды. При этом модели содержат большое количество параметров, определение которых, в свою очередь, является весьма непростой задачей. Помимо этого, при решении гидродинамических задач фильтрации с использованием таких моделей возникают трудности математического характера, преодоление которых даже с применением современных численных методов не всегда увенчается успехом.

Более перспективным представляется использование методов систем автоматического регулирования – CAP. Они по «входным» и «выходным»

данным исследуемого объекта позволяют провести идентификации и оценить основные характеристики переходного процесса. Использование методов САР в реологии неравновесных систем приведено в [124].

В САР линейная автоматическая система обычно описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами [82, 146]

$$A(D)x(t) = B(D)x_{ex}(t), \quad (1.15)$$

где $A(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$, $B(D) = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \dots + b_m$, $D = \frac{d}{dt}$, $D^i = \frac{d^i}{dt^i}$, $a_i (i = \overline{0, n})$, $b_i (i = \overline{0, m})$ – постоянные коэффициенты, $x = x(t)$ – регулируемая величина, $x_{ex} = x_{ex}(t)$ – управляющее воздействие, приложенное к системе.

Применяя к (1.15) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях и вводя обозначение

$$x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad x_{ex}(s) = \int_0^{\infty} x_{ex}(t) e^{-st} dt,$$

получим

$$w(s) = \frac{x(s)}{x_{ex}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (1.16)$$

которая называется передаточной функцией системы.

Теперь соотношение (1.15) в изображениях можно написать в виде

$$x(s) = w(s) x_{ex}(s). \quad (1.17)$$

Передаточная функция системы полностью характеризует динамические свойства системы и поэтому является важнейшей ее характеристикой. Зная передаточную функцию системы, как это видно из (1.17), всегда можно определить процесс изменения выходной координаты системы при наличии воздействия и заданных начальных условиях. Имея передаточную функцию системы нетрудно получить амплитудно-частотную характеристику этой системы. Для этой цели в (1.15) достаточно заменить s на $i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, ω – показатель преобразования Фурье:

$$x_{ex}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ex}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В этом случае вместо (1.17) имеем

$$x(i\omega) = w(i\omega) x_{ex}(i\omega),$$

где

$$w(i\omega) = \frac{b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Теория САР позволяет не записывая дифференциальные уравнения процесса, не решая их, а зная только входные и выходные данные определить временные характеристики системы. Это преимущество дает возможность проводить исследования и получать точные данные непосредственно на реальном объекте, не проводя длительных и сложных исследований, решать гидродинамические задачи и др. Обычно в теории САР применяют единичные входные сигналы и фиксируют выход данного объекта в виде переходного процесса [146]. Допустим управляющее воздействие (входная функция) представляет собой единичную функцию Хевисайда: $x_{\text{ex}}(t) = h(t)$. Тогда $x_{\text{ex}}(s) = 1/s$ и согласно (1.17) имеем $x(s) = w(s)/s$. Переходя к оригиналу в последнем выражении находим регулируемую величину (выходную функцию) $x(t) = L^{-1}(w(s)/s)$, где L^{-1} – обратный к преобразованию Лапласа оператор. Если оригинал передаточной функции $w(s)$ обозначить через $w(t)$, то из $s \cdot x(s) = w(s)$ получим $w(t) = dx/dt$. Функция $w(t)$ называется весовой функцией.

В теории автоматического регулирования принята классификация элементов в зависимости от вида их операторов или передаточных функций, т.е. в конечном итоге в зависимости от вида дифференциального уравнения, описывающего поведение элемента. Элементы САР, классифицированные по виду дифференциального уравнения называются типовыми звеньями САР. Рассмотрим использование типовых динамических звеньев САР для составления реологических моделей, исследованных в 1.1 систем.

В экспериментах раздела 1.1 в качестве входной функции использовались как $|\nabla p|$ так и Q (или скорость фильтрации).

Равновесные системы с линейным законом фильтрации как при заданном $|\nabla p| = \text{const}$, так и $v = \text{const}$ описываются законом Дарси

$$v = K|\nabla p|, \quad K = \frac{k}{\mu}, \quad (1.18)$$

где k – проницаемость, μ – вязкость жидкости, K – коэффициент фильтрации. Когда ∇p является входной функцией в связи (1.15), то K можно рассматривать как передаточную функцию $w(s)$ САР. Когда в экспериментах задается скорость фильтрации – v , она рассматривается как входная функция и $1/K$ является передаточной функцией.

В экспериментах с заданным режимом $|\nabla p| = \text{const}$ в неравновесных фильтрационных процессах (см. рис.1.2) расход Q (значит и скорость фильтрации v) имеет горбообразную динамику. Рассматривая $|\nabla p|$ как входную функцию процесс можно рассматривать как колебательное звено. Его передаточная функция выражается так:

$$w(s) = \frac{K(1 + \lambda_p s)}{\lambda_{1v}^2 s^2 + \lambda_{2v} s + 1}, \quad (1.19)$$

где $K = k/\mu = v(\infty)/|\partial p/\partial x|$, $v(\infty)$ – стационарное значение скорости фильтрации, соответствующее $Q(\infty)$ рис.1.2, λ_{1v} , λ_{2v} – времена релаксации.

Дифференциальное уравнение, соответствующее (1.19), имеет вид

$$\lambda_{1v}^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda_{2v} \frac{dv}{dt} + v = \frac{k}{\mu} \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \right) \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \quad (1.20)$$

Отдельно рассмотрим зону после «горба», где v уменьшается по времени. Для этой зоны имеем передаточную функцию

$$w(s) = \frac{K(1 + \lambda_p s)}{1 + \lambda_v s},$$

которой соответствует

$$v + \lambda_v \frac{dv}{dt} = \frac{k}{\mu} \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \right) \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|, \quad (1.21)$$

где λ_v – время релаксации скорости фильтрации.

Нетрудно заметить, что (1.21) получается из (1.20) при $\lambda_{1v} = 0$, $\lambda_{2v} = \lambda_v$. Таким образом, в колебательном звене (1.20) роль второй производной $d^2 v/dt^2$ сохраняется в диапазоне роста v и в пределах «горба».

При создании постоянной скорости фильтрации (расхода) в модели пласта она является входной функцией, а выходной – перепад давления. Скорость фильтрации в модели со смолистой нефтью при этом имеет монотонную динамику (рис.1.4а) с выходом на стационарное значение $|\nabla p(\infty)|$. Ей соответствует аperiодическое звено, которое имеет передаточную функцию

$$w(s) = \frac{1}{K(1 + \lambda_p s)}, \quad (1.22)$$

где K^{-1} называется передаточным коэффициентом (коэффициентом усиления) звена.

Функции (1.22) соответствует дифференциальное уравнение

$$v = K \left(1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \right) \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|. \quad (1.23)$$

Коэффициент усиления определяется непосредственно из кривых динамики $|\nabla p|$ (рис.1.4а) $K^{-1} = |\nabla p(\infty)/v_0|$, где v_0 – постоянная скорость фильтрации, соответствующей заданной $Q = \text{const}$.

В этом же режиме фильтрации парафинистых нефтей (рис.1.4б) вместо аperiодического звена имеет место колебательное с передаточной функцией вида (1.19).

Параметры моделей (1.20), (1.21), (1.23) определяются на основе экспериментов, проводимых на моделях пласта или по результатам исследования реальных пластов. Некоторые способы оценки релаксационных характеристик неравновесной фильтрации приведены в конце главы.

Отметим, что модели, выведенные методами САР внешне не отличаются от предложенных ранее гипотетических моделей. Однако преимущество использования САР заключается в том, что на базе конкретных условий и результатов реализаций фильтрационного процесса предлагаются вполне конкретные модели с одновременной оценкой стационарных ее характеристик. В то время как в гипотетических моделях при их использовании постоянно сопутствует вопрос об их адекватности тем или иным определенным процессам.

Предложенные здесь модели для описания неравновесной фильтрации справедливы для линейных релаксационных процессов, когда коэффициент K принимается постоянным.

1.4. Релаксационные явления при фильтрации в глинистых пластах

Отклонение от закона Дарси при фильтрации жидкостей в пористой среде может быть обусловлено не только свойствами флюида, но и свойствами самой пористой среды. Нелинейные явления, возникающие при фильтрации неньютоновских жидкостей в однородной пористой среде, обычно объясняются реологическими особенностями жидкости. Однако, когда эти явления возникают при фильтрации ньютоновских жидкостей, следует искать связь аномалии фильтрации от свойств пористой среды.

Структура пористой среды, вообще говоря, оказывает очень сильное влияние на характер фильтрации. Неоднородность пористой среды, расчлененность, неоднородное распределение пор различных размеров, наличие трещин, как известно, могут привести как к нелинейным, так и к релаксационным явлениям при фильтрации в них обычных жидкостей. Неоднородный состав материала пористой среды также является одним из основных причин нелинейных и релаксационных явлений.

Здесь особое внимание обращено на последнее обстоятельство, а именно, рассматривается влияние глинистости скелета пористой среды на фильтрационные характеристики. В начале раздела даются краткие сведения об особенностях заводнения глинистых пластов, затем изучается набухаемость

пород, фильтрация и вытеснение нефти из глинизированной пористой среды. Исследования проводились с целью выбора методов вовлечения в активную разработку трудноизвлекаемых запасов III горизонта нефтяного месторождения Майли-Су-IV – Восточный Избаскент [46, 208].

1.4.1. Особенности заводнения глинистых пластов

Глинистые минералы относятся к числу характерных компонентов грамулярных коллекторов и определяют их фильтрационные и емкостные свойства [73]. С увеличением относительного количества глинистой фракции обычно ухудшается проницаемость коллекторов, а пространственная изменчивость содержания глин в породе определяет неоднородность продуктивных объектов по фильтрационным и емкостным свойствами. Хорошо известна повышенная сорбционная активность глин, а также способность некоторых глин к набуханию, снижающему проницаемость и пористость при опреснении поровых вод. Характерны нелинейность закона фильтрации, наличие предельного градиента давления, что уменьшает коэффициент охвата залежи заводнением. Эти особенности присущи и при разработке нефтегазовых месторождений с низкими коллекторскими свойствами [18]. В работе приведены результаты экспериментальных исследований в режиме растворенной в процессе истощения модели пласта. Установлено, что нефтеотдача породы без глины равнялась 87,6%, а с содержанием 20% глинистых фракций – 49%. После закачки в пористую среду, не содержащую глины, воды в объеме, равном объему одной поры, была достигнута полная обводненность вытекающей из модели продукции. Конечное значение коэффициента нефтеотдачи глинистой породы было получено после закачки воды в объеме, соответствующем 2,5-кратному объему пор образца. Таким образом, механизм движения газожидкостных систем в пористой среде, содержащей определенное количество глины, существенно отличается от такового для систем, не содержащих глину. При содержании глины в породе увеличивается удельный расход воды и снижается нефтеотдача.

Литологический состав пород заметно влияет на эффективность физико-химических методов вытеснения нефти в терригенных коллекторах [88]. Она значительно снижается в породах с повышенным содержанием глинистого материала. При этом важно не только количество, но и состав, характер распределения глинистых частиц. Глины диспергируются, а затем отлагаются в сужениях поровых каналов. Из глинистых минералов наиболее отрицательное влияние на разработку нефтяных месторождений оказывает

монтмориллонит [176]. Это связано с его поверхностной активностью и высокой дисперсностью. Большой дисперсностью обладает На-монтмориллонит. Он, заполняя поры пород-коллекторов, сильно ухудшает их физические свойства и, благодаря своим структурным особенностям, легко вступает в глинообменные реакции с органическим веществом, а также сильно адсорбирует полярные молекулы нефти.

Анализ эксплуатации нагнетательных скважин показывает [144], что проницаемость пласта для нефти во многих скважинах оказывается выше чем проницаемость для воды после перевода их под нагнетание. Причем проницаемость пласта для воды уменьшилась в 5-10 раз. Объяснить это изменением фазовой проницаемости пласта нельзя, т.к. во все проанализированные скважины воду закачивали в течение нескольких лет. Предлагалось, что на проницаемость для воды терригенного пласта влияли его глинистость (глинистый минерал представлен аргиллитом, алевролитом, каолинитом) и качество нагнетаемой воды. Содержание взвешенных частиц в воде составляет 40-60 мг/л. Сделан вывод, что снижение проницаемости для воды могло быть обусловлено набуханием глинистого минерала.

Снижение проницаемости для воды при фильтрации вод различной минерализации во многом определяется поведением глинистых минералов цемента коллектора, которые сразу реагируют на эти изменения. Большое значение при этом имеет набухаемость глинистого материала [143], приводящая к сужению сечения фильтрующих каналов. Кроме того, высокая дисперсность и значительная удельная поверхность глинистых частиц усиливает обменные реакции, что вызывает дезагрегацию и отрыв глинистых минералов от обломочных зерен при взаимодействии с пресной водой. Вовлечение в поток глинистых минералов частично закупоривает сечения фильтрационных каналов. Неполное восстановление проницаемости для воды при повторной прокачке вместо пресной воды различными растворами можно объяснить самокоальматацией.

Интересным представляется установление связи гидродинамических характеристик пласта от его глинистости. В частности, в работе [135] сделана попытка определения связи перепада давления, при котором происходит искривление индикаторной кривой с глинистостью пород коллекторов. Уравнение регрессии имеет вид

$$\Delta p_3 = 0,945 \eta_{zn} - 6,2,$$

где Δp_3 – перепад давления в призабойной зоне эксплуатационной скважины, при котором происходит искривление индикаторных кривых в сторону оси дебитов, кгс/см², η_{zn} – глинистость пород, %.

Как видно из приведенного анализа, механизм глин при взаимодействии с водой и растворами различных веществ весьма сложный. Набухаемость глин может привести к разнообразным эффектам, осложняющим процесс фильтрации в пористой среде: кольтатация и суффозия частиц, резкое снижение проницаемости, проявление предельного градиента давления и др.

1.4.2. Изучение набухания пород

Процесс набухания глинистых пород в различных средах изучался преимущественно экспериментально. Так, в [77] для практической проверки набухания глин и количественного определения динамики этих процессов были проведены эксперименты по методике Жигача-Ярова на приборе конструкции УНИ. Объектами исследования были: монтмориллонитовые глины, воды различной минерализации и ПАВ Прогалит НМ 20/40. Полученные результаты свидетельствуют, что процесс набухания вначале происходит интенсивно и стабилизируется через 10-15 суток после начала опытов. Наибольший прирост обмена происходит (1,5-2 раза) при контакте глин с пресной водой, значительно меньше – с пластовой водой. При замене ее на дистиллированную набухание монтмориллонита продолжалось. Водный раствор Прогалита НМ 20/40 (0,2% масс) уменьшил набухаемость глин по сравнению с дистиллированной водой. Причиной этого является адсорбция ПАВ на поверхности контакта глины и воды и, как следствие, снижение интенсивности набухания.

В [139] также изучалось влияние водных растворов ПАВ на набухаемость глин. Установлено, что: 1) присутствие ацеталей I и II в пресной воде и мицеллярных растворах способствует снижению набухания глин; 2) набухаемость глин в водных растворах ацеталей I и II и ОП-10 приблизительно одинакова.

В [132] установлено, что хлористые соли одно- и двухвалентных катионов стабилизируют глину. Это согласуется с литературными данными, где указывается на большую гидрофобизацию поверхности глинистых частиц солями поливалентных катионов. При введении в воду ПАВ максимальная величина набухаемости снижается не более чем на 3%. Наиболее сильно снижает набухаемость глин присутствие в воде 0,1% (масс) Катапина-А (36%). Фосфоорганические соединения не оказывают заметного влияния на стабилизацию глин.

Здесь для изучения набухаемости глинистых пород проводились специальные экспериментальные исследования. Опыты проводились двумя спо-

собами: насыщением глинистых образцов различными водными растворами путем перемешивания их в мерных цилиндрах и насыщением глинистых образцов растворами в приборе с индикатором изменения объема.

В первом варианте эксперименты осуществлялись следующим образом: навески глинистой породы в количестве 10 г засыпались в мерные цилиндры, затем в них наливалось 20 мл предварительно приготовленного раствора и содержимое цилиндров интенсивно перемешивалось путем встряхивания для достижения равномерного распределения фаз. После четкого разделения твердой и жидкой фаз (через несколько минут) начинали производить измерения уровня твердой фазы (набухания глинистого образца). Окончание набухания наступало через 8-10 суток. Опыты проводились размельченной породой III-го горизонта месторождения Майли-Су-IV – Восточный Избаскент.

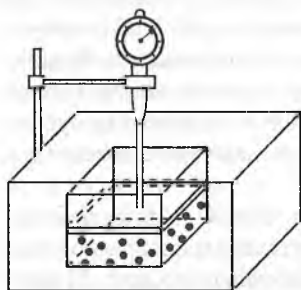


Рис.1.6. Схема устройства для изучения набухания глин

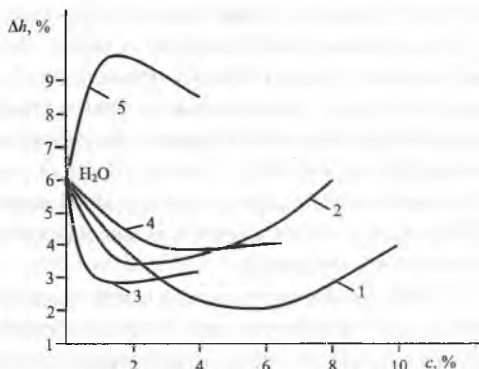


Рис.1.7. Изотермы набухания глины в различных растворах: 1 – KOH, 2 – CaCl_2 , 3 – $\text{FeNH}_4(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$, 4 – $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$, 5 – NaOH

Для измерения разбухаемости глин в динамике было изготовлено устройство, состоящее из перфорированного корпуса (1) из пластмассы для насыпного глинистого образца, поршня со штоком (2) для передачи величины изменения объема образца регистрирующему прибору – индикатору (3), пластмассовой кюветы (4) для наливания жидкости и штатива (5) для крепления устройства (рис. 1.6). Устройство работает следующим образом. В перфорированный корпус насыпается навеска глинистого образца и прижимается поршнем. Корпус устанавливается в кювету, шток поршня контактируется со штоком индикатора и регистрируется начальное положение поршня при сухом образце. Затем наливается исследуемый раствор в кюве-

ту, включается секундомер и начинается регистрация изменения объема глинистого образца во времени.

В исследовании использовались растворы KOH , CaCl_2 , квасцов $\text{FeNH}_4(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$, $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$, NaOH с различными концентрациями. Изотермы набухания глинистых образцов приведены на рис.1.7. Как видно из рисунка, при малых концентрациях ($< 1\%$) растворы одинаково влияют на изменение объема навески, за исключением раствора NaOH , а именно, снижают его по сравнению с объемом, полученным при насыщении пресной водой. С увеличением концентрации растворов влияние их на изменение объема различно. Наблюдается стабильность объема навески при определенном диапазоне концентрации.

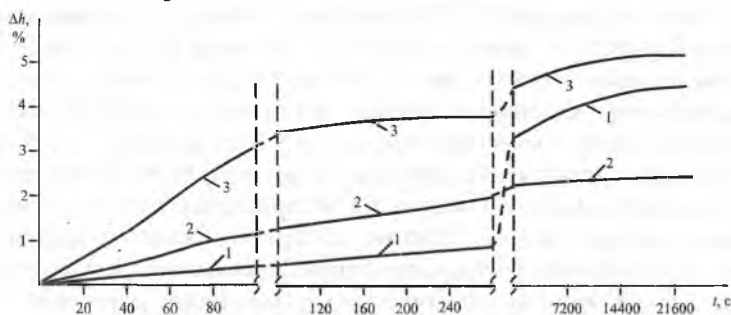


Рис.1.8. Динамика набухаемости глинистой породы в растворах:
1 – $\text{FeNH}_4(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ ($C=2,5\%$), 2 – KOH ($C=2,0\%$), 3 – пластовая вода

Динамика набухаемости насыпки от времени при насыщении их раствором KOH , квасцами и пластовой водой приведена на рис.1.8. Как видно из рисунка, динамика набухаемости образцов имеет монотонный характер и время полного набухания испытываемых образцов составляет примерно 45-50 часов.

Таким образом, при заводнении III-го горизонта месторождения Майли-Су-IV – Восточный Избаскент могут быть применены растворы CaCl_2 и KOH с концентрацией не более 2%.

1.4.3. Изучение фильтрации и вытеснения нефти из пористой среды

В [50] исследовалось влияние минерализации и состава жидкости на проницаемость каолинитовых, монтмориллонитовых глин и глин смешанного состава. В качестве фильтрационной жидкости использовались прес-

ная вода и растворы хлоридных, сульфатных и нитратных солей, концентрация которых изменялась от 0,1 до 150 г/л. Температура опытов 20-25 °С. При фильтрации дистиллированной воды увеличение содержания в песке Na-монтмориillonита только до 2 % снижало проницаемость песчано-глинистой смеси по сравнению с чистым песком почти в 100 раз, а увеличение содержания Ca-монтмориillonита в том же песке до 13 % снижало проницаемость только в 40 раз. С увеличением минерализации растворов NaCl и CaCl₂ коэффициент проницаемости глин возрастает. Основным прирост его наблюдается в области концентраций 10-30 г/л. После фильтрации дистиллированной воды проводились фильтрации растворами. Увеличение проницаемости отмечается при фильтрации хлоридных растворов: NaCl – 1,23 раза, KCl – 1,45 раза, CaCl₂ – 1,75 раза, FeCl₃ – 12,5 раза. При фильтрации растворов прирост составил: для Na₂SO₄ – 2,76 раза, K₂SO₄ – 3,08 раза.

Отмечая важность полученных в работе [50] результатов, в то же время заметим, что эксперименты проводились на установке УИПК-1М, кернодержатель которой имеет размеры: длина 3-5 см, диаметр 3 см. В таких малых образцах результаты по вытеснению получаются с большими относительными ошибками. Поэтому обычно в экспериментах по вытеснению этот элемент заменяется на более объемистые. Отметим также, что вытеснение углеводородов разными растворами в глинистых пористых средах изучалось недостаточно. Некоторые теоретические соображения по вытеснению нефти водой из глинизированных пластов приведены в [67].

Лабораторные исследования по фильтрации нефти, пластовых вод и химических реагентов здесь проводились на моделях пласта, представляющих собой металлические трубы с внутренним диаметром 0,028 м и длиной 0,75-1,0 м. Внутренняя полость моделей заполнялась смесью кварцевого песка с глиной типа монтмориillonит, полученной путем размола глинистого керна, вынесенного при бурении скважин на III-м горизонте месторождения Майли-Су-IV – Восточный Избаскент. Глинистость была на уровне 20 %. Исследования проводились одновременно на трех моделях при постоянной температуре 30 °С, что создавалось термостатами в течение 1-2 часов до начала измерений.

Основной задачей исследований на моделях пласта было изучение фильтрационной способности глинистого грунта для различных флюидов в динамических условиях.

Модели под вакуумом насыщались нефтью залежи и определялся закон фильтрации в широком диапазоне изменения перепада давления. Результаты фильтрации нефти представлены на рис.1.9. Как видно из этого рисунка,

фильтрация нефти происходит по нелинейному закону – кривые зависимости расхода от перепада давления вогнуты к оси перепада давления. Кривые в координатах $\ln Q_n - \ln \Delta p$ спрямляются, что позволило предложить степенную зависимость $Q_n = k(\Delta p)^n$, где k – коэффициент, n – показатель нелинейности ($n \neq 1$). Методом наименьших квадратов определены уравнения зависимостей, которые соответственно номерам моделей имеют вид $Q_n = 72,53 (\Delta p)^{1,158}$ (1), $Q_n = 36,94 (\Delta p)^{1,129}$ (2), $Q_n = 33,26 (\Delta p)^{2,065}$ (3). Показатель нелинейности n 1, что имеет место в случае роста проницаемости моделей с увеличением перепада давления. Текущий расход нефти при постоянном перепаде давления остается почти неизменным в зависимости от времени, т.е. затухание расхода не происходит. Суммарный объем прокачиваемой нефти через модель пласта имеет прямолинейную зависимость от времени.

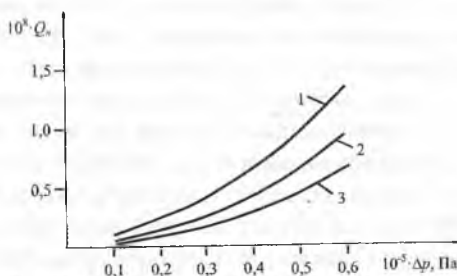


Рис.1.9. Фильтрация нефти в моделях № 1 (1), 2 (2), 3 (3)

После изучения фильтрационных свойств моделей при фильтрации нефти начаты эксперименты по вытеснению ее различными растворами. Они ставились в трех сериях. В первой серии изучено вытеснение нефти, закачиваемой в пласт водой и растворами CaCl_2 . В стадии вытеснения нефти, закачиваемой в пласт водой, зависимости расхода нефти, воды, жидкости от времени, начиная почти с момента начала вытеснения отклоняются от прямолинейной зависимости, т.е. вышеотмеченная зависимость при фильтрации нефти нарушается. Это отражено на рис.1.10. В данном случае замечается снижение темпа прокачки нефти и воды. Это подтверждают и замеры текущих значений этих параметров. Переход к закачке растворов CaCl_2 вслед за вытеснением закачиваемой в пласт водой улучшает характеристики вытеснения. На рис. 1.10 видно нарушение установившейся зависимости после перехода на закачку раствора CaCl_2 . Текущий расход жидкости стабилизируется, а в случае закачки 3,0 %-го раствора CaCl_2 несколько увеличивается. Указанное объясняется уменьшением набухания глин пористой среды при переходе на закачку растворов CaCl_2 .

Во второй серии вытеснение производилось первоначально пластовой водой. В остальном эксперимент был аналогичным первой серии. Здесь характер вытеснения в целом, остается аналогичным первой серии. Отличие состоит в удлинении первоначальных прямолинейных участков на графиках $\sum Q_n, \sum Q_{\text{с}}, \sum Q_{\text{ж}}$ от t , т.е. темп падения расходов уменьшается и наступает гораздо позже, чем в первой серии. Но, все же, начиная с некоторых t , отмечается отклонение от прямолинейной зависимости. Переход к закачке растворов CaCl_2 , как и в первой серии, улучшает характеристики вытеснения.

В третьей серии вытеснение нефти из пористой среды осуществлялось без предварительной закачки пресной и пластовой водами. После снятия закона фильтрации сразу было начато вытеснение с растворами CaCl_2 . Здесь характеристики вытеснения по виду такие же, как в предыдущих сериях, только отмечается дальнейшее их улучшение (рис.1.11). Момент нарушения прямолинейной зависимости в характеристиках вытеснения указывает на начало нового режима, связанного с набуханием глинистых частиц среды за счет их контакта с вытесняющими агентами. Как видно из рис.1.10, 1.11, граница различных режимов размыта и, следовательно, ее трудно однозначно оценить. В таких ситуациях следует пользоваться характеристиками вытеснения, более чувствительными к различным изменениям режима фильтрации или вытеснения. Один из таких методов предложен в работе [86]. Согласно этому методу, характеристики вытеснения строятся в координатах $\sum Q_n / T - \sum Q_{\text{ж}}$, где $\sum Q_n, \sum Q_{\text{ж}}$ – накопленные отборы нефти и жидкости из пласта, T – срок разработки. Апробация метода по промысловым данным, полученным на месторождениях Андижан (I пласт), Бостон (III пласт), Южный Аламышик (ККС), Западный Палванташ (III пласт) показала, что он оперативно, на ранних периодах нового, изменившегося режима оценит технологический эффект. Момент изменения режима в пласте может быть оценен также с применением эффективных статистических методов. В частности, возможность использования критерия Стьюдента, метода статистического дифференцирования, методов теории случайных функций и др. для оценки момента проявления нового режима при применении ГТМ по интенсификации отбора нефти показана в [177]. Данная методика успешно применена в объектах ПО «Узбекнефть» и «Киргизнефть». Так, с применением этой методики оценен эффект от заводнения под ВНК на месторождении Северный Уртабулак. Использование данных методов [86, 177] для оценки момента нарушения прямолинейного участка характеристик вытеснения (рис.1.10, 1.11) не составляет особой трудности.

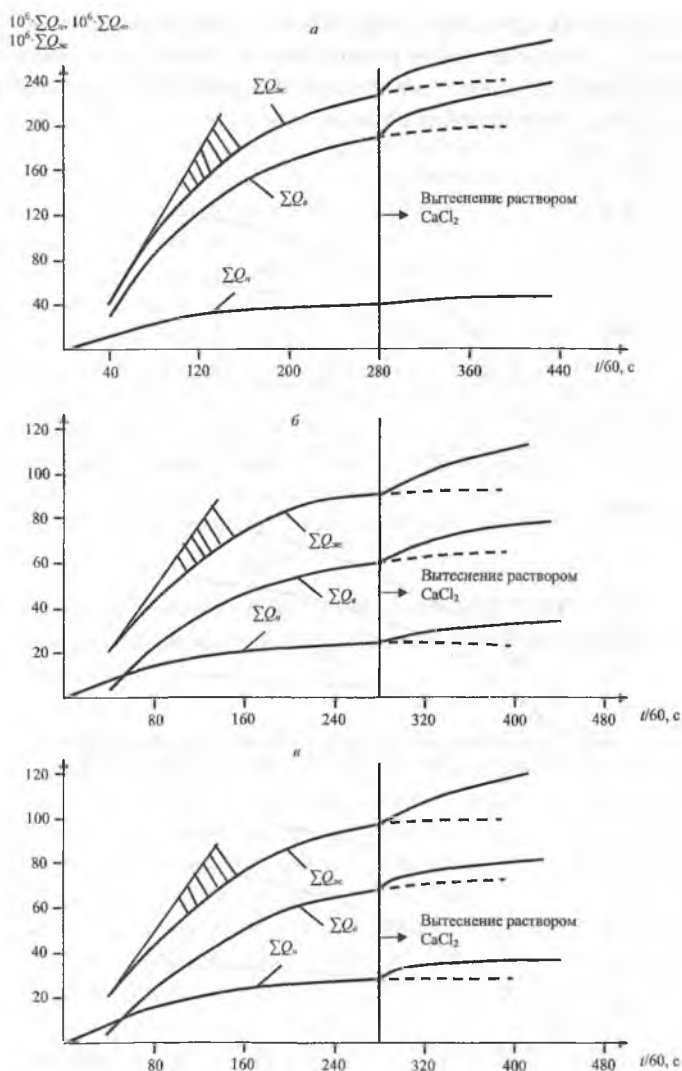


Рис.1.10. Вытеснение нефти закачиваемой в пласт водой и растворами $CaCl_2$ при $\Delta p = 0,3 \cdot 10^5$ Па, $C(\%) = 1,0$ (а, мод. №1), (б, мод. №2), (в, мод. №3)

Результаты проведенных экспериментов показывают, что при вытеснении нефти в пористой среде пластовой (подтоварной) водой и растворами

CaCl_2 уменьшается затухание фильтрационного расхода. Понятно, что неравновесность потока при вытеснении здесь связана с взаимодействием вытесняющих агентов с глинистыми частицами пористой среды, а сам фильтрационный поток нефти является равновесным.

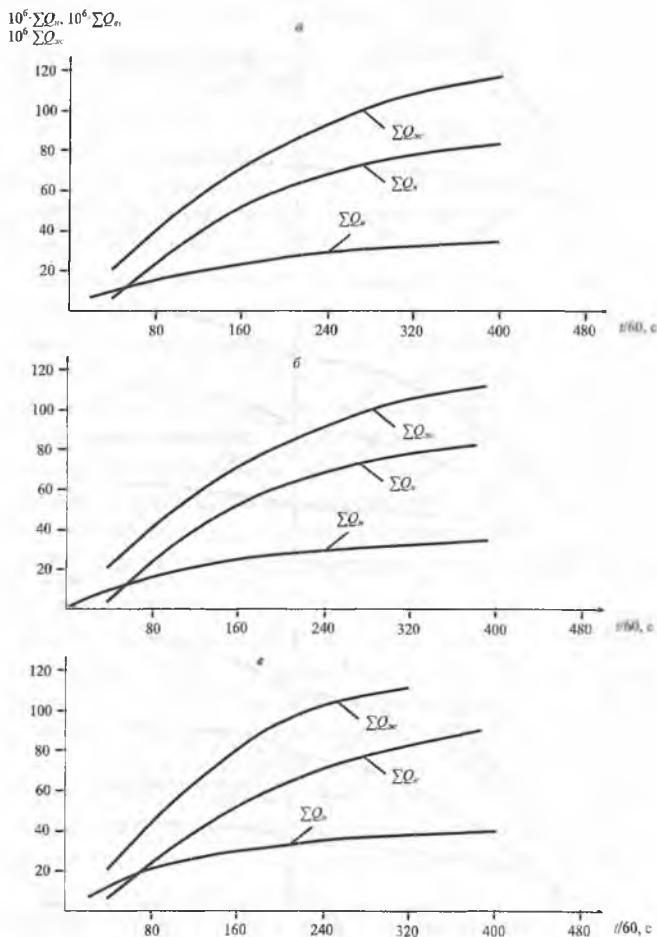


Рис. 1.11. Вытеснение нефти растворами CaCl_2 при $\Delta p = 0,5 \cdot 10^5$ Па, $C(\%) = 1,0$ (а, модель №1), 2,0 (б, модель №2), 3,0 (в, модель №3)

На основе проведенных экспериментальных исследований с учетом геолого-физических условий залежи предложена новая технология разработки

месторождения. Технология предусматривает бурение новых скважин по рядной сетке с расстоянием между рядами 300 м и закачку в нагнетательные скважины подтоварной и пластовой воды. При этом уменьшится снижение приемистости скважин по сравнению с закачкой пресной воды. При снижении приемистости нагнетательных скважин в процессе длительной закачки предложено произвести глинокислотную обработку призабойной зоны скважин. После некоторого восстановления приемистости в результате этой операции в скважины закачивается 0,8–1,0 %-ный раствор CaCl_2 в объеме 3–5 тыс. м³ в расчете на каждую скважину. Затем переходят к закачке пластовой или подтоварной воды. При уменьшении приемистости процедура закачки раствора CaCl_2 повторяется. С учетом нелинейности фильтрационного закона для обеспечения больших расходов предложено создать большие депрессии и репрессии. Это значит, что эксплуатацию добывающих скважин нужно вести с низкими забойными давлениями, а нагнетание воды – с большими давлениями закачки. Верхняя граница значений давления закачки лимитируется давлением гидроразрыва пласта.

Данная технология разработки успешно внедрена в ПО «Киргизнефть».

1.5. Гидродинамические методы определения релаксационных характеристик фильтрационного потока

При проектировании и анализе разработки нефтяных и газовых месторождений важное значение имеет знание гидродинамических параметров продуктивных пластов. Геолого-технические мероприятия, которые направлены на интенсификацию отбора углеводородов и повышение отдачи пластов выбираются наряду с другими факторами и гидродинамическими условиями движения флюидов в пласте [74, 161]. При фильтрации с проявлением релаксационных эффектов помимо других параметров необходимо определить времена релаксации (если использовать линейные дифференциальные модели) или функцию релаксации (при использовании интегральных наследственных моделей [9, 14, 60, 61]).

Опыт проводки скважин показывает, что затраты на борьбу с поглощениями бурового раствора могут быть уменьшены, если своевременно оценить состояние скважины, определить параметры поглощающего пласта, по которым можно выбрать необходимое количество и качество тампонирующей смеси и технологию проведения изоляционных работ [113].

Для исследования пластов, поглощающих буровой раствор, применяются следующие основные методы:

1. При неустановившемся режиме закачки или отбора жидкости – прослеживание за снижением или подъемом уровня жидкости до статического после долива или отбора жидкости из скважины.

2. При установившемся режиме закачки или отбора жидкости – кратковременные установившиеся отборы или нагнетание жидкости в поглощающий пласт при герметизированном устье скважины.

Как известно, методы исследования поглощающих горизонтов в бурящихся скважинах при неустановившемся режиме имеют ряд преимуществ по сравнению с методами исследования при установившемся режиме. Исследования при неустановившемся режиме позволяют получать непрерывную индикаторную линию в широком диапазоне перепада давлений и не требуют больших затрат времени. В методах исследования при неустановившемся режиме используются функции изменения забойного давления и расхода поглощаемой или поступающей из пласта жидкости. Эти две кривые, т.е. кривая восстановления (падения) давления и кривая изменения дебитов являются основными исходными материалами, по которым путем соответствующей обработки находятся параметры поглощающего пласта.

Методы исследования поглощающих пластов при неустановившемся режиме, применяемые при бурении скважин, по своей структуре аналогичны тем гидродинамическим методам, которые применяются при исследовании нефтяных и газовых пластов. На основе всех этих методов лежит решение нестационарной гидродинамической задачи, полученное при определенных условиях.

В связи с этим в данном разделе на основе решения двух обратных гидродинамических задач разрабатываются методы оценки времени релаксации давления – и параметров пласта. Первый метод позволяет на основе кривых восстановления давления и притока оценить λ и параметры кругового пласта (радиальный случай). Второй метод дает возможность определить λ и другие параметры модели пласта при проведении экспериментальных исследований по фильтрации жидкостей (линейный случай).

Отметим, что ряд обратных задач решался для определения релаксационных и других характеристик применительно к различным процессам нефтегазодобычи [4, 5, 158, 187, 189, 213].

1.5.1. Определение релаксационных и других характеристик фильтрации в круговом пласте

Рассмотрим задачу определения параметров пласта и времени релаксации давления на основе решения обратной гидродинамической задачи, связанной с остановкой одной центральной скважины в круговом пласте [6]. Считается, что до момента остановки скважина работала в стационарном режиме. Как известно [11], уравнение пьезопроводности с начальными и граничными условиями в данном случае записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\chi} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right), \quad (1.24)$$

$$p(R_0, t) = p_0, \quad 0 < r_0 \leq r \leq R_0 < \infty,$$

$$p(r, 0) = p_{cm} = p_0 - \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_0}{r} = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r},$$

$$Q(t) = 2\pi r_0 \frac{k h}{\mu} \left[\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial r} \right] + \lambda \frac{\partial^2 p(r_0, t)}{\partial r \partial t},$$

где r_0 , R_0 – радиус скважины и контура питания соответственно; k – проницаемость пласта; h – мощность пласта; Q_0 , $Q(t)$ – стационарный и текущий дебиты.

В качестве дополнительного условия принимаем кривые восстановления давления

$$p_0 - p(r_0, t) = \Delta p(r_0, t). \quad (1.25)$$

При решении указанной задачи традиционными методами [40] необходимо было бы получить полное решение задачи, т.е. выразить $p(r, t)$ через $Q(t)$ и после разного рода упрощений прийти к более простой зависимости, позволяющей определить искомые параметры. Кроме того, эти методы основаны на спрямлении (логарифмическом, полулогарифмическом и др.) последних зависимостей и дают возможность определить не более двух-трех параметров. Поэтому, по аналогии с [52], задачу решаем методом детерминированных моментов, позволяющим с помощью не очень сложных вычислений определить более трех параметров.

В задаче (1.24) переходим к изображению по Лапласу

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{p}}{dr} \right) - \frac{s}{\chi(1+\lambda s)} \bar{p} = - \frac{p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r}}{\chi(1+\lambda s)}, \quad (1.26)$$

$$\bar{p}(R_0, s) = \frac{p_0}{s}, \quad \left. \frac{d\bar{p}}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{p_*}{r_0(1+\lambda s)} \left[\frac{Q(s)}{Q_0} + \lambda \right], \quad (1.27)$$

Решение уравнения (1.26) с учетом граничных условий (1.27) имеет вид

$$\bar{p}(r_0, s) = \frac{p_{cm}}{s} + \frac{p_*}{Q_0} \frac{sQ(s) - Q_0}{s(1 + \lambda s)} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (1.28)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{s}{\chi(1 + \lambda s)}},$$

$$\omega_1 = K_0(\alpha R_0) I_0(\alpha r_0) - I_0(\alpha R_0) K_0(\alpha r_0),$$

$$\omega_2 = \alpha R_0 [I_0(\alpha R_0) K_1(\alpha r_0) - I_1(\alpha r_0) K_0(\alpha R_0)].$$

Подставляя (1.28) в преобразованное уравнение (1.25), получим

$$(1 + \lambda s) \left(\frac{p_0 - p_{cm}}{\Delta p(r_0, 0)} - s \Delta \bar{p} \right) \omega_2 = - \frac{\omega_1 p_*}{\Delta p(r_0, 0)} (s \tilde{Q}(s) - 1), \quad (1.29)$$

где $\Delta \bar{p} = \frac{1}{\Delta p(r_0, 0)} \left[\frac{p_0}{s} - \bar{p}(r_0, s) \right], \tilde{Q}(s) = \frac{Q(s)}{Q_0}.$

Каждый член соотношения (1.29) разложим в ряд по степеням S . Для этого разложим в ряд сначала ω_1 и ω_2 . Как известно, радиус скважины r_0 намного меньше радиуса контура питания R_0 . Поэтому в расчетах можно пренебречь членами, содержащими r_0 и его степени. С учетом этого и используя разложение бесселевых функций в ряд для ω_1 и ω_2 , получим

$$\begin{aligned} \omega_1(\alpha) = & \ln \frac{r_0}{R_0} + \alpha^2 \left(\frac{R_0^2}{4} \right) + \alpha^4 \left(\frac{R_0^4}{2^6} \ln \frac{r_0}{R_0} + \frac{3R_0^4}{8 \cdot 16} \right) + \\ & + \alpha^6 \left(\frac{R_0^6}{32 \cdot 2^6} \ln \frac{r_0}{R_0} + \frac{11R_0^6}{6 \cdot 36 \cdot 64} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\omega_2(\alpha) = 1 + \frac{R_0^2}{4} \alpha^2 + \frac{R_0^4}{2^6} \alpha^4 + \frac{R_0^6}{36 \cdot 2^9} \alpha^6 + \dots \quad (1.31)$$

Имеем также следующие разложения

$$\Delta \bar{p}(r_0, s) = M_0 - s M_1 + \frac{M_2}{2} s^2 - \dots, \quad (1.32)$$

$$\tilde{Q}(s) = m_0 - s m_1 + \frac{m_2}{2} s^2 - \dots, \quad (1.33)$$

где

$$M_i = \frac{1}{\Delta p(r_0, 0)} \int_0^\infty t^i \Delta p(r_0, t) dt,$$

$$m_i = \frac{1}{Q_0} \int_0^\infty t^i Q(t) dt.$$

Подставляя (1.30) - (1.33) в (1.29) и приравнявая коэффициенты при s, s^2, s^3 , получим

$$M_0 = \frac{P_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left[\frac{\varepsilon^2}{4} - (\lambda + m_0) \ln \gamma \right], \quad (1.34)$$

$$M_1 = \frac{P_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left[\frac{\lambda \varepsilon^2}{2} + \frac{5}{8 \cdot 16} \varepsilon^4 - \lambda^2 \ln \gamma + m_0 \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \lambda \ln \gamma \right) - m_1 \ln \gamma \right], \quad (1.35)$$

$$M_2 = 2(a + b_1)M_1 - 2M_0(b_2 + \lambda b_1) - \frac{2P_*}{\Delta p(r_0, 0)} \left[\frac{m^2}{2} \ln \gamma - c_1 m_1 + \right. \\ \left. + c_2 m_0 - c_3 + b_3 \ln \gamma + \lambda b_2 \ln \gamma \right], \quad (1.36)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{r_0}{R_0}, \quad \varepsilon = \frac{R_0^2}{\chi}, \quad b_1 = 3\lambda + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

$$b_2 = 3\lambda^2 + \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{2^6}, \quad b_3 = \lambda^3 + \frac{\lambda^2 \varepsilon^2}{4} + \frac{\lambda \varepsilon^4}{2^6} + \frac{\varepsilon^6}{36 \cdot 2^6},$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon^2}{4} \ln \gamma + \frac{\varepsilon^2}{4} + 3\lambda \ln \gamma,$$

$$c_2 = 3\lambda^2 \ln \gamma + 2\lambda \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \ln \gamma + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{\varepsilon^4}{2^6} \ln \gamma + \frac{3}{8 \cdot 16} \varepsilon^4,$$

$$c_3 = \lambda^3 \ln \gamma + \lambda^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{4} \ln \gamma + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \lambda \left(\frac{\varepsilon^4}{2^6} \ln \gamma + \frac{3}{3 \cdot 16} \varepsilon^4 \right) + \\ + \frac{\varepsilon^6}{36 \cdot 2^6} \ln \gamma + \frac{11}{6 \cdot 36 \cdot 64} \varepsilon^6.$$

Соотношения (1.34) - (1.36) вместе с формулой Дюпюи

$$p, \ln \frac{R_0}{r_0} = \Delta p(r_0, 0)$$

образуют систему для определения искомых параметров.

Решение этой системы представится следующим образом

$$\frac{R_0^2}{\chi} = \frac{32}{5} \left[\frac{M_1 - \lambda^2 - m_0 \lambda - m_1}{M_0 - (\lambda + m_0)} - m - 2\lambda \right], \quad (1.37)$$

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{Q_0}{2\pi \Delta p(r_0, 0) [M_0 - (\lambda + m_0)]} \cdot \frac{R_0^2}{4\chi}, \quad (1.38)$$

$$\ln \frac{R_0}{r_0} = \frac{2\pi \Delta p(r_0, 0)}{Q_0} \cdot \frac{kh}{\mu}. \quad (1.39)$$

Время релаксации давления λ в формуле (1.37) определяется как решение уравнения

$$\alpha_1 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_4 \lambda + \alpha_5 = 0, \quad (1.40)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{4 \cdot 23 \cdot 16}{27 \cdot 15} - \frac{13}{2}, \quad \alpha_3 = \left(17 - \frac{23 \cdot 16^2}{27 \cdot 15} \right) (M_0 - m_0) - 3m_0, \\ \alpha_4 &= \left(\frac{23 \cdot 16^2}{27 \cdot 15} - \frac{21}{2} \right) (M_0 - m_0)^2 + 6m_0(M_0 - m_0) + \left(\frac{8 \cdot 23 \cdot 16}{27 \cdot 15} - 6 \right) l - \frac{3}{2} m_1, \\ \alpha_5 &= M_2 - m_2 + m_1(M_0 - m_0) - 3m_0(M_0 - m_0)^2 + \left(6 - \frac{23 \cdot 16^2}{27 \cdot 15} \right) (M_0 - m_0)l - 2m_0l, \\ \alpha_5 &= \frac{4 \cdot 23 \cdot 16}{27 \cdot 15} l^2 + \frac{m_1}{2} (M_0 - m_0)^2 + 2m_0(M_0 - m_0)l - (M_2 - m_2)(M_0 - m_0), \\ l &= M_1 - m_1 - m_0(M_0 - m_0).\end{aligned}$$

Для апробации полученных решений проводились расчеты с использованием кривых восстановления давления, снятых на скважинах №1, 11, 14 площади Коштар. В связи с отсутствием данных по изменению притока жидкости после остановки скважины при проведении расчетов пренебрегалось наличием его, т.е. предполагалось, что после перекрытия скважины приток жидкости мгновенно прекращается. Кривые восстановления давления, снятые на указанных выше скважинах, приведены на рис.1.12.

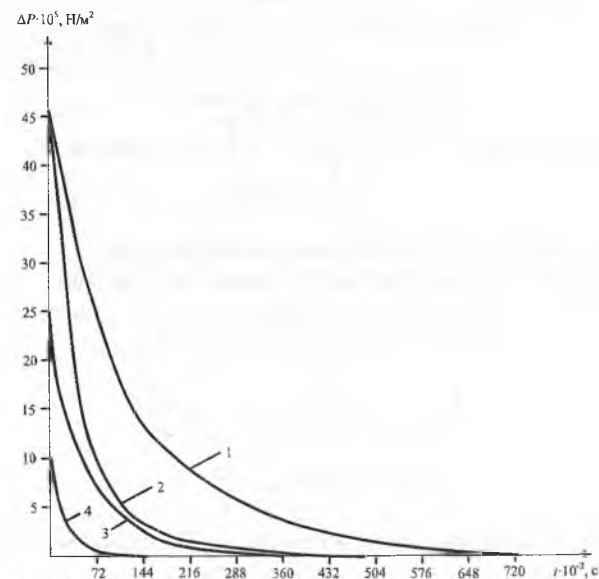


Рис. 1.12. Кривые изменения давления ΔP в зависимости от t

Таблица 1.1

Результаты расчетов по (1.37) - (1.40)

№ п/п	Номер скважин, глубина залегания пластов, м	$M_0 \cdot 10^{-3}$, с	$M_1 \cdot 10^{-6}$, с ²	$M_2 \cdot 10^{-9}$, с ³	λ , с	$\frac{R_0^2}{\chi} \cdot 10^{-4}$	$\frac{kh}{\mu} \cdot \frac{\partial \cdot \text{см}}{\text{СПЗ}}$	$\ln \frac{R_0}{r_0}$
1	1 1274-1285	4,298	11,0	53,934	742,5	1,93 (1,64)	0,75 (1,09)	0,65 (0,95)
2	1 1292-1308	12,14	157,36	3987,12	5578,5	5,17 (8,22)	1,16 (1,0)	1,97 (1,7)
3	2 1275-1280	1,663	1,633	3,872	196,0	0,44 (0,63)	0,87 (1,08)	0,76 (0,94)
4	14 1274-1280	5,227	32,893	484,14	2394,0	3,07 (4,03)	1,44 (1,02)	2,72 (1,92)

С использованием этих кривых с помощью численного интегрирования вычислены детерминированные моменты M_0 , M_1 , M_2 для каждой кривой. Детерминированные моменты для функции притока m_0 , m_1 , m_2 , согласно приведенным выше соображениям, равны нулю. Время релаксации давления определялось численным решением уравнения (1.38). Остальные параметры определены по (1.35) – (1.37). Результаты расчетов помещены в табл. 1.1. В скобках приведены значения параметров R^2/χ , kh/μ , R_0/r_0 , соответствующие нулевому значению времени релаксации давления. Как видно из таблицы, учет времени релаксации давления приводит к изменению всех параметров пласта.

1.5.2. Определение релаксационных и других характеристик фильтрации в линейном пласте

Рассмотрим задачу о восстановлении давления в модели пласта при мгновенном перекрытии ее входного конца [218]. Для данного линейного случая закон Дарси и соответствующее ему уравнение пьезопроводности имеют вид:

$$v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right), \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (1.42)$$

Пусть в модели пласта установлен стационарный режим фильтрации в момент времени $t = 0$. В этот момент перекрывается выходной конец модели $x = 0$. Распределение давления в модели до перекрытия будем считать линейным, что дает

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial x} = a = \text{const}. \quad (1.43)$$

На перекрытом конце модели $x = 0$ имеем $v = 0$ или с учетом (1.41)

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = 0. \quad (1.44)$$

Из (1.44) с учетом (1.43) получим

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = a \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right). \quad (1.45)$$

На не перекрытом конце модели поддерживается постоянное давление

$$p(l, t) = al = p_1. \quad (1.46)$$

Кроме этих условий еще считаем, что восстановление давления на выходе модели известно. Тогда рассматриваемая задача сформулируется так: найти времени релаксации давления из уравнения (1.42) при условиях (1.43), (1.44), (1.46) используя КВД при $x = 0$.

Сделаем замену

$$p(x, t) = p_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right] + ax \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + u(x, t). \quad (1.47)$$

Тогда для неизвестной функции $u(x, t)$ получается следующая краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} a(l - x) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) = \chi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (1.48)$$

$$u(x, 0) = u(l, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (1.49)$$

Теперь с учетом (1.47) для $p(0, t)$ получается следующее выражение

$$p(0, t) = p_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right] + u(0, t).$$

В уравнении (1.48) перейдя к преобразованию по Лапласу, получим

$$s\bar{u} + \frac{a}{\lambda}(l - x) \frac{1}{s + \frac{1}{\lambda}} = \chi(1 + \lambda s) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}$$

или

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{s}{\chi(1 + \lambda s)} \bar{u} = \frac{a(1 - x)}{\chi(1 + \lambda s)^2}. \quad (1.50)$$

Общее решение (1.50) при условиях (1.49) имеет вид

$$\bar{u} = -\frac{a(l - x)}{s(1 + \lambda s)} + a \frac{sh\alpha(l - x)}{s\alpha(1 + \lambda s)ch\alpha l}, \quad (1.51)$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{s}{\chi(1+\lambda s)}}.$$

Переходя к изображению в (1.47) при $x = 0$, получим

$$\tilde{p}(0, s) = \frac{la}{s(1+\lambda s)} + \tilde{u}(0, s)$$

или с учетом (1.51) –

$$\tilde{p}(0, s) = \frac{ashal}{s\alpha(1+\lambda s)\chi al} \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) перепишем в виде

$$\frac{p_1}{s} - \tilde{p}(0, s) = \frac{al}{s} - \frac{ashal}{s\alpha(1+\lambda s)\chi al} \quad (1.53)$$

Введем обозначение

$$\Delta \tilde{p}(0, s) = \frac{p_1}{s} - \tilde{p}(0, s).$$

Тогда (1.53) можно записать в виде

$$s\alpha(1+\lambda s)\chi al \Delta \tilde{p}(0, s) = a[al(1+\lambda s)\chi al - shal].$$

Имеет место следующее соотношение

$$\Delta \tilde{p}(0, s) = \Delta p_0 - s\Delta p_1 + \frac{\Delta p_2}{2}s^2 - \dots, \quad (1.54)$$

$$\text{где } \Delta p_i = \int_0^\infty t^i [p_1 - p(0, t)] dt, \quad i = 0, 1, \dots$$

Разложение в ряд функций χal , $shal$ дает

$$\chi al = 1 + \frac{(\alpha l)^2}{2} + \frac{(\alpha l)^4}{4!} + \dots, \quad (1.55)$$

$$shal = \alpha l + \frac{(\alpha l)^3}{3!} + \frac{(\alpha l)^5}{5!} + \dots \quad (1.56)$$

При постановке в уравнение (1.54) – (1.56) получается

$$\begin{aligned} \chi^2 \Delta p_0 + \left[\Delta p_0 \left(3\lambda \chi^2 + \frac{\chi l^2}{2} \right) - \chi^2 \Delta p_1 \right] s + \dots = \\ p_1 \left[\chi^2 \lambda + \frac{\chi l^2}{3} + \left(2\lambda^2 \chi^2 + \frac{5\chi l^2 \lambda}{6} + \frac{l^4}{30} \right) s + \dots \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в последнем соотношении, находим

$$\chi^2 \Delta p_0 = p_1 \left(\chi^2 \lambda + \frac{\chi l^2}{3} \right), \quad (1.57)$$

$$\left(3\lambda \chi^2 + \frac{\chi l^2}{2} \right) \Delta p_0 - \chi^2 \Delta p_1 = p_1 \left(2\lambda^2 \chi^2 + \frac{5\chi l^2 \lambda}{6} + \frac{l^4}{30} \right). \quad (1.58)$$

Уравнение (1.57) дает

$$\chi = \frac{p_1 l^2}{3(\Delta p_0 - p_1 \lambda)}. \quad (1.59)$$

Подставляя (1.59) в (1.58), после проведения ряда элементарных операций находим

$$\lambda^2 - 2 \frac{\Delta p_0}{p_1} \lambda - 5 \frac{\Delta p_1}{p_1} + 6 \left(\frac{\Delta p_0}{p_1} \right)^2 = 0,$$

решением которого является

$$\lambda_{1,2} = \frac{\Delta p_0}{p_1} \pm \sqrt{5 \left[\frac{\Delta p_1}{p_1} - \left(\frac{\Delta p_0}{p_1} \right)^2 \right]}. \quad (1.60)$$

В правой части (1.60) можно взять только знак (-), что видно из (1.59). Таким образом имеем

$$\lambda = \frac{\Delta p_0}{p_1} - \sqrt{5 \left[\frac{\Delta p_1}{p_1} - \left(\frac{\Delta p_0}{p_1} \right)^2 \right]}. \quad (1.61)$$

Формула (1.61) является основной формулой предлагаемого метода.

С целью апробации полученной формулы (1.61) проводились эксперименты на модели пласта. Модель представляла собой цилиндрическую трубку длиной 0,5 м, диаметром 0,028 м. Пористая среда создавалась очищенным и промытым кварцевым песком определенной фракции. Проницаемость модели по воздуху составляла $2,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$. В экспериментах использовался 1,0 %-ный водный раствор КМЦ. Опыты проводились при температуре 40°C, которая сохранялась постоянной во время проведения исследований. Для измерения давления у входа и выхода модели использовались образцовые манометры на 25 атм.

КВД, снятые при различных p_1 , приведены на рис. 1.13. Используя эти кривые, по формуле (1.61) рассчитано время релаксации давления для каждого опыта. Результаты расчетов приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Результаты расчетов по (1.61)

$p_1 \cdot 10^{-5}, \text{ Н/м}^2$	$\frac{\Delta p_0}{p_1}, \text{ с}$	$\frac{\Delta p_1}{p_1} \cdot 10^{-2}, \text{ с}^2$	$\lambda, \text{ с}$
1,00	344,4	1277,11	131,1
2,50	159,6	257,50	122,3
4,15	120,0	144,47	104,6
5,50	115,8	135,21	92,2

С целью проверки точности полученных значений λ производились расчеты восстановления давления в модели пласта при соответствующих λ . Как известно, решение прямой задачи восстановления давления в модели пласта имеет вид [11]:

$$p(0, t) = p_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right] + \frac{8p_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) - \exp\left(-\frac{\chi v_n^2 t}{1 + \lambda \chi v_n^2}\right) \right], \quad (1.62)$$

где $v_n = \frac{\pi}{2l}(2n+1)$.

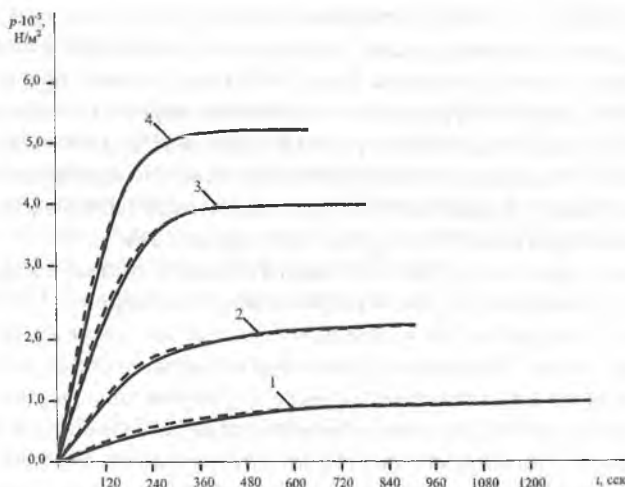


Рис. 1.13. Кривые восстановления давления, снятые на модели пласта: — эксперимент, - - - - - расчет

В расчетах по (1.62) значения χ принимались из (1.59). Результаты расчетов представлены на рис.1.13. Как видно из рисунка, расчетные кривые по (1.62) лежат в непосредственной близости с экспериментальными. Следовательно, по предлагаемому способу можно получить достаточно точные значения времени релаксации давления на основе экспериментальных кривых восстановления давления. Таким же образом можно сказать, что метод детерминированных моментов дает достаточно точные результаты для времени релаксации давления.

1.6. Задачи релаксационной фильтрации

Задачи релаксационной фильтрации стали интенсивно исследоваться в конце 80-х годов XX столетия. При этом основной упор был сделан на гипотетические модели.

Изучению задач релаксационной фильтрации было уделено внимание в работах [11, 10, 114], где предложены первые гипотетические модели. Затем гидродинамические задачи релаксационной фильтрации рассматривались в ряде работ [12, 20, 59, 62, 63, 90, 101, 134, 151, 166 и др.].

Задачи фильтрации с учетом релаксационных явлений рассматриваются в первую очередь для гидродинамического анализа процессов добычи высоковязких нефтей. С целью определения параметров пласта и времен релаксации градиента давления в главе 2 ставилась обратная гидродинамическая задача. Там переопределенность дополнительных условий при известном давлении или скорости фильтрации позволяла определить неизвестные параметры. В прямых задачах фильтрации коэффициенты уравнения считаются известными и дополнительные условия являются не переопределенными. В традиционных гидродинамических методах исследования пластов и скважин используются асимптотики решений прямых задач.

Часто для предотвращения поглощения бурового раствора в поглощающие пласты закачиваются растворы различных полимеров [113]. Процесс фильтрации этих растворов в поглощающих пластах может носить неравновесный характер. Аналогично, реологически неравновесные свойства буровых растворов, исследованных в пункте 1.2, в пористой среде могут проявляться в виде релаксационных эффектов градиента давления и скорости фильтрации. Эти релаксационные эффекты могут значительно влиять на ход процесса фильтрации, особенно при нестационарных переходных процессах. В частности, распределение давления в пласте при учете релаксационных свойств градиента давления и скорости фильтрации может значительно отличаться от распределения давления без учета этих свойств.

В связи с этим, рассмотрим задачу определения поля давления в поглощающем пласте с учетом релаксационного характера градиента давления [4]. Пусть одиночная скважина, рассматриваемая здесь как точечный сток, расположена в центре конечного кругового однородного пласта с радиусом R_* .

Вводим безразмерные параметры

$$\bar{r} = \frac{r}{R_*}, \quad \bar{t} = \frac{t\kappa}{R_*^2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\chi\lambda}{R_*^2}, \quad \bar{p} = \frac{2\pi b k}{\mu Q_0} (p_0 - p), \quad \bar{Q}(\bar{t}) = \frac{Q_*(t)}{Q_0},$$

где r – текущий радиус пласта, b – мощность пласта, μ – вязкость, Q – характерный объемный дебит, Q – дебит скважины, p – текущее значение давления. В дальнейшем всюду ради удобства записи черточка над обозначениями опускаются.

В практике бурения и эксплуатации нефтяных и газовых скважин наиболее часто встречаются случаи отбора и закачки жидкости с переменной интенсивностью. Поэтому, естественно, представляет большой интерес исследование поля давления в пласте при работе скважины с переменным дебитом. Здесь под дебитом понимается количество поглощающей и притекающей из пласта жидкости в зависимости от знака $Q(t)$ за единицу времени.

С учетом этого, дебит скважины принимаем в виде одночленной степенной функции времени

$$Q(t) = Q^* t^\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, \dots).$$

Такой выбор дебита объясняется тем, что если дебит является произвольной непрерывной функцией времени, что согласно теореме Вейерштрасса он аппроксимируется полиномом, являющимся суммой степенных членов. Помимо этого, приняв во внимание линейность основного уравнения пьезопроводности и применяя принцип суперпозиции [230], можем получить решение задачи для произвольно заданного дебита.

Напишем безразмерное уравнение пьезопроводности в случае, когда $\lambda_s = 0$ и $\lambda_p = \lambda$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \quad (1.63)$$

Начальные и граничные условия принимаются в виде

$$p(r, 0) = 0, \quad (1.64)$$

$$Q(t) = -\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} + \lambda r \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} \right), \quad (1.65)$$

$$p(1, t) = 0 \text{ или } \frac{\partial p(1, t)}{\partial r} = 0. \quad (1.66)$$

В условиях (1.66) первое соответствует упруго-водонапорному режиму, а второе замкнуто-упругому режиму пласта.

Для решения краевой задачи (1.63)–(1.66) применяется конечное интегральное преобразование Хенкеля [164]

$$f(r) \rightleftharpoons f_n(\omega) = \int_0^1 \mathcal{H}(r) J_0(\omega r) dr. \quad (1.67)$$

Используя преобразование (1.67), легко показать

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\omega^2 p_n(\omega) + \varphi(\omega),$$

$$\text{где } \varphi(\omega) = r J_0(\omega r) \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_0 + \omega r J_1(\omega r) \cdot p|_0.$$

Применяя преобразование (1.67) к уравнению (1.63), с учетом краевых условий (1.64), (1.66), получим

$$\frac{dp_n}{dt} + \frac{\omega^2}{1 + \lambda \omega^2} p_n = \frac{1}{1 + \lambda \omega^2} Q^* t^\alpha. \quad (1.68)$$

Уравнение (1.68) решается при условии $p_n(\omega, 0) = 0$. Решением его будет

$$p_n(\omega, t) = \frac{Q \alpha!}{\omega^2} \left[\sum_{k=0}^{\alpha} \frac{(-1)^k (1 + \lambda \omega^2)^k}{(\alpha - k)! (\omega^2 t)^k} \right] - \frac{(-1)^\alpha (1 + \lambda \omega^2)^\alpha}{(\omega^2 t)^\alpha} \exp \left(-\frac{\omega^2 t}{1 + \lambda \omega^2} \right).$$

Формулами перехода от функций изображений к функциям-оригиналам для преобразования Хенкеля являются

$$f(r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} f_n(a_n), \quad (1.69)$$

$$f(r) = 2 f_n(b_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} f_n(b_n). \quad (1.70)$$

Первая из этих формул применяется в том случае, когда на границе пласта задано давление, т.е. пласт работает в упруго-водонапорном режиме. Рассматривая формулу (1.68) легко видеть, что для того чтобы при $r = 1$ оба члена этой формулы обращались в нуль, ω следует выбрать специальным образом. В случае упруго-водонапорного режима для того, чтобы

$$r J_0(\omega r) \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=1} = 0$$

ω должно быть корнем трансцендентного уравнения

$$J_0(\omega) = 0. \quad (1.71)$$

Итак, в формуле (1.69) a_n является корнем уравнения (1.71).

В случае же замкнуто-упругого режима пласта для того, чтобы

$$\omega r J_1(\omega r) p(r, t) \Big|_{r=1} = 0,$$

ω должно быть корнем уравнения

$$J_1(\omega) = 0 \quad (1.72)$$

Таким образом, b_n в формуле (1.70) является корнями уравнения (1.72), причем $b_0 = 0$. Поскольку среди корней b имеется нулевой корень $b_0 = 0$, то при переходе к оригиналам необходимо вычислить предел p_n при $\omega \rightarrow 0$. Имеем

$$p(0, t) = Q \frac{t}{1 + \alpha}.$$

Теперь переходим к оригиналам по формулам (1.69), (1.70). Для упруго-водонапорного режима имеем

$$p(r, t) = 2Q\alpha! \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha - k)! t^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \frac{(1 + \lambda a_n^2)^k}{a_n^{2+2k}} - \frac{(-1)^{\alpha}}{t^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \frac{(1 + \lambda a_n^2)^{\alpha}}{a_n^{2+2\alpha}} \exp\left(-\frac{a_n^2 t}{1 + \lambda a_n^2}\right) \right] \quad (1.73)$$

Для замкнуто-упругого режима

$$p(r, t) = 2Q\alpha! \left[\frac{t}{(\alpha + 1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha - k)! t^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \frac{(1 + \lambda b_n^2)^k}{b_n^{2+2k}} - \frac{(-1)^{\alpha}}{t^{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \frac{(1 + \lambda b_n^2)^{\alpha}}{b_n^{2+2\alpha}} \exp\left(-\frac{b_n^2 t}{1 + \lambda b_n^2}\right) \right] \quad (1.74)$$

По формулам (1.73), (1.74) можно рассчитать понижение давления в любой точке пласта в любой момент времени при различных режимах эксплуатации пласта: при упруго-водонапорном режиме формулой (1.73), а при замкнуто-упругом режиме формулой (1.74).

Рассмотрим частные случаи задачи. Пусть скважина пущена в работу с постоянным дебитом. Тогда из формул (1.73), (1.74) получаем:

1) для упруго-водонапорного режима

$$p(r, t) = 2Q \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_1^2 J_1^2(a_n)} \exp\left(-\frac{a_n^2 t}{1 + \lambda a_n^2}\right) \right] \quad (1.75)$$

2) для замкнуто-упругого режима

$$p(r, t) = 2Q \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n^2 J_0^2(b_n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_1^2 J_0^2(b_n)} \exp\left(-\frac{b_n^2 t}{1 + \lambda b_n^2}\right) \right] \quad (1.76)$$

Если дебит скважины изменяется по линейному закону, то в формулах (1.73), (1.74) необходимо положить $\alpha = 1$. Тогда

1) при упруго-водонапорном режиме

$$p(r, t) = 2Q \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n)} - \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \frac{1 + \lambda a_n^2}{a_n^4} + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \frac{1 + \lambda a_n^2}{a_n^4} \exp\left(-\frac{a_n^2 t}{1 + \lambda a_n^2}\right) \right] \quad (1.77)$$

2) при замкнуто-упругом режиме пласта

$$p(r, t) = 2Q \left[\frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n^2 J_0^2(b_n)} - \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \frac{1 + \lambda b_n^2}{b_n^4} + \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \frac{1 + \lambda b_n^2}{b_n^4} \exp\left(-\frac{b_n^2 t}{1 + \lambda b_n^2}\right) \right] \quad (1.78)$$

Нетрудно видеть, что решения (1.75)–(1.78) содержат ряды Бесселевых функций. Кроме того, как видно из (1.73), (1.74), эти ряды, в свою очередь, являются членами другого ряда. При этом одни ряды содержат экспоненциальную функцию, а другие не содержат. Последние сходятся очень медленно. При проведении численных расчетов это приводит к определенным неудобствам. Поэтому желательно нахождение конечных сумм этих рядов. Следуя схеме упрощения основных решений задач теории упругого режима [175] упростим формулы (1.75)–(1.78). Основной задачей является нахождение конечных выражений для суммы рядов типа

$$A_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda a_n^2)^k}{a_n^{2+2k}},$$

$$B_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda b_n^2)^k}{b_n^{2+2k}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Легко проверить, что

$$A_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda a_n^2)^{k+1}}{a_n^{2+2k}} + \lambda A_k, \quad (1.79)$$

$$B_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n^2 J_0^2(b_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda b_n^2)^{k+1}}{b_n^{2+2k}} + \lambda B_k. \quad (1.80)$$

Для нахождения суммы рядов A_k и B_k используется следующая теорема [175].

Теорема. Пусть функции $f(r)$ и $g(r)$ удовлетворяют условиям Дирихле в замкнутом интервале $[0, 1]$ и

$$g(r) = \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x y f(y) dy.$$

Тогда

$$1) \text{ если } f(r) = f(a), \text{ то } g(r) = \frac{f_n(a_0^2)}{a_n^2};$$

$$2) \text{ если } f(r) = \begin{cases} f_n(b_0), & n=0, \\ f_n(b_n), & n=1, 2, \dots, \end{cases}$$

то

$$g(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} f_n(b_0) - \frac{1}{4} \int_0^1 r^3 f(r) dr, & n=0, \\ \frac{f_n(b_n)}{b_n^2} - \frac{J_0(b_n)}{b_n^2} f_n(b_0), & n=1, 2, \dots, \end{cases}$$

где a_n и b_n корни $J_0(x)=0$, $J_1(x)=0$ соответственно.

Применяя эту теорему к рядам типа

$$A_k^*(r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^{2k} J_1^2(a_n)} f_n(a_n), \quad k = 0, 1, \dots$$

получаем

$$A_{k+1}^*(r) = \int_r^1 \frac{dx}{x} \int_0^x y A_k^*(y) dy.$$

Суммы рядов, стоящих на правых частях формул (1.79), (1.80), находятся применением этой теоремы, если известны суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda a_n^2)^k}{a_n^{2+2k}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \cdot \frac{(1 + \lambda b_n^2)^k}{b_n^{2+2k}},$$

т.е. рядов A_k и B_k . Таким образом,

$$A_{k+1}(r) = \int_r^1 \frac{dx}{x} \int_0^x y A_k(y) dy + \lambda A_k(r), \quad (1.81)$$

$$B_{k+1}(r) = \int_r^1 \frac{dx}{x} \int_0^x y B_k(y) dy + \lambda B_k(r). \quad (1.82)$$

Формулы (1.81), (1.82) показывают, что если известны значения A_k и B_k для какого-то значения индекса k , то последовательным применением этих рекуррентных формул можно получить выражение A_k , B_k для любого значения индекса k . Например, если известны выражения A_0 и B_0 , то применением формул (1.81), (1.82) можно получить конечное выражение для сумм рядов A_k , B_k для других значений индекса $k = 1, 2, \dots$. Нахождение сумм ряда A_0 сводится к решению вспомогательной стационарной задачи [65]. Решая эту вспомогательную задачу другими способами получаем простую формулу для определения суммы ряда.

Для рядов A_0 , B_0 в работе [65] получены выражения

$$A_0(r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n)} = -\ln r, \quad (1.83)$$

$$A_0(r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n^2 J_0^2(b_n)} = \frac{r^2}{2} - \frac{3}{4} - \ln r. \quad (1.84)$$

Имея в виду (1.83), (1.84) из формул (1.81), (1.80) получим

$$A_1(r) = \frac{1-r^2}{4} + \left(\frac{r^2}{4} - \lambda \right) \ln r, \quad (1.85)$$

$$B_1(r) = \left(\frac{r^2}{4} - \lambda \right) \ln r - \frac{r^4}{32} - \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{8} - \lambda \right) + \frac{7}{96} - \frac{3}{4} \lambda. \quad (1.86)$$

Запишем (1.77) – (1.78) с учетом полученных формул (1.83) – (1.86).

Тогда для постоянного дебита

$$p(r, t) = Q \left[-\ln r - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n)} \exp \left(-\frac{a_n^2 t}{1 + \lambda a_n^2} \right) \right], \quad (1.87)$$

$$p(r, t) = Q \left[2t + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{4} - \ln r - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n^2 J_0^2(b_n)} \exp \left(-\frac{b_n^2 t}{1 + \lambda b_n^2} \right) \right] \quad (1.88)$$

и для линейного изменяющегося дебита

$$p(r, t) = Q \left[-\left(1 - \frac{\lambda}{t}\right) \ln r - \frac{1}{4t} (r^2 \ln r + 1 - r^2) + \frac{2}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n r)}{J_0^2(a_n)} \cdot \frac{1 + \lambda a_n^2}{a_n^4} \exp \left(-\frac{a_n^2 t}{1 + \lambda a_n^2} \right) \right], \quad (1.89)$$

$$p(r, t) = Q \left[t + \left(1 - \frac{\lambda}{t}\right) \left(\frac{r^2}{2} - \frac{3}{4} - \ln r \right) - \frac{1}{t} \left(\frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^4 + 2r^2}{32} + \frac{7}{96} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{J_0^2(b_n)} \cdot \frac{1 + \lambda b_n^2}{b_n^4} \exp \left(-\frac{b_n^2 t}{1 + \lambda b_n^2} \right) \right]. \quad (1.90)$$

Формулы (1.87), (1.89) соответствуют упруго-водонапорному режиму, а формулы (1.88), (1.90) – замкнуто-упругому режиму пласта.

Для оценки влияния параметра λ на изменение давления по формулам (1.87), (1.88) в размерных единицах были проведены численные расчеты при следующих исходных данных: $r = 0,1$ м, $k = 0,75 \cdot 10^{-12}$ м, $\mu = 0,1$ Н·с/м, $\chi = 0,025$ м²/с, $b = 10$ м, $Q = 50$ м³/сут. Результаты расчетов представлены на графиках рис. 1.14. Как видно из графиков, наиболее характерным свойством неустановившихся переходных процессов для поля давления $p(r, t)$ при учете неравновесности фильтрации является их запаздывание по сравнению со скоростью протекания аналогичного процесса в пористой среде без учета указанных неравновесных явлений. Параметром, характеризующим это запаздывание, является время релаксации давления – λ . Причем, чем больше λ , тем заметнее проявляется запаздывание изменения давления. Как видно из рис. 1.14, запаздывание изменения давления $p(r, t)$ достигает $(10 \div 12)$ Па.

При больших значениях времени в случае упруго-водонапорного режима наступает стационарный режим и изменение давления для обычной модели и для модели с релаксацией давления будет одинаковым.

Для замкнуто-упругого режима фильтрации, как видно из (1.88) стационарного режима не существует и давление в зависимости от знака $Q(t)$ неограниченно возрастает или убывает по времени.

Если время релаксации давления λ сопоставимо со временем исследования t , то для изучения неустановившихся процессов по изменению давления в пласте следует пользоваться решениями (1.87) – (1.90). Если $t > \lambda$, то для

описания неустановившейся фильтрации можно пользоваться решениями, полученными для обычных моделей без учета релаксации давления.

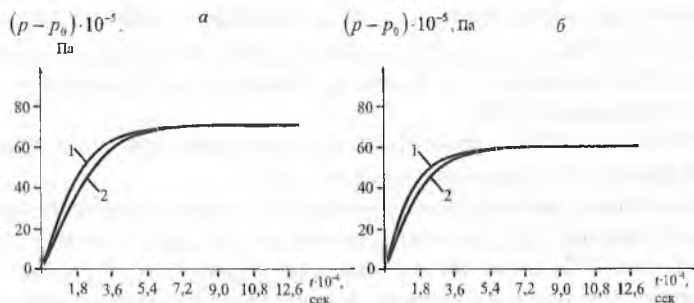


Рис.1.14. Изменение давления в зависимости от времени. а) по (1.89), б) по (1.90), 1 – для $\lambda = 0$; 2 – для $\lambda = 3600$ сек

Как известно, при гидродинамическом исследовании пластов на нестационарных режимах прослеживается изменение давления на забое скважин в зависимости от времени. Время проведения исследований обычно составляет несколько часов. Поэтому очевидно, что влияние релаксации давления на результаты гидродинамических исследований может стать ощутимым, а иногда и определяющим.

Рассмотрены другие задачи фильтрации жидкости в конечном круговом пласте, когда пускается в работу круговая галерея скважин [4] и стоки, непрерывно и равномерно распределенные в круговой области [8].

Как видно из хода получения решения вышеприведенной задачи, даже в такой линейной, упрощенной постановке задачи релаксационной фильтрации решаются не просто. В этой ситуации весьма полезным может оказаться метод асимптотического разложения – метод эквивалентных уравнений, идеи которого развиты в [37]. При значениях времен релаксации λ_v, λ_p , намного меньших характерного времени процесса фильтрации t уравнение (1.5) можно упростить. В операторной форме его запишем как

$$\frac{1 + \lambda_v \frac{\partial}{\partial t}}{1 + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Отсюда при $\lambda_v |t \sim \lambda_p|t \ll 1$ получим

$$\left[1 + (\lambda_v - \lambda_p) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (1.91)$$

В зависимости от знака $\lambda - \lambda_*$ из (1.91) получим уравнение либо гиперболического, либо эллиптического типа. Постановка задач для каждого типа уравнений и их решения показали [155], что решение эквивалентного уравнения (1.91) в области $t \sim (2,5 \div 3) \cdot \lambda$ удовлетворительно совпадает с решением исходного уравнения (1.5). Характер решений отличается по используемому типу уравнения (1.91).

В теории нелинейного теплопереноса в зернистых средах применение эквивалентных уравнений показано в [130].

В заключении отметим, что использование различных приближенных методов для решения (1.5) позволяет получить весьма эффективные решения. В частности в [202] путем применения теорем сравнения [169, 219] оценено решение (1.5) при $\lambda = 0$ «снизу» и «сверху». Показано, что повторное применение теорем сравнения существенно сужает область оценки решения.

1.7. Приближенная оценка решений задач фильтрации с релаксацией давления

Анализ точных решений уравнения (1.66), полученных в параграфе 1.6, при различных начальных и граничных условиях, показывает, что они выражаются через громоздкие и слабо сходящиеся ряды. Вычисление этих рядов на ЭВМ сопровождается значительными трудностями. Применение специальных методов позволило несколько упростить их и провести численный анализ, однако в общем случае вопрос о получении эффективных решений уравнения (1.66) не теряет своего значения. Кроме того, известно, что уравнения типа (1.66) не допускают автомодельных решений [23], так как они содержат характерное время λ . В связи с этим возникает задача применения приближенных методов решения уравнения (1.66), позволяющих получить достаточно простые расчетные формулы.

Одним из методов приближенной оценки решения дифференциальных уравнений является применение теорем сравнения, позволяющих оценивать решение дифференциальных уравнений «снизу» и «сверху» [169, 219]. Теоремы сравнения также позволяют оценивать точность различных приближенных методов, когда эти приближенные методы одновременно применяются для решения определенной краевой задачи.

Применение теорем сравнения для автомодельных фильтрационных задач приведено в [141, 142]. В работе [70] теоремы сравнения применены

для уравнений одновременной фильтрации без предположения об автономности. В этих работах теоремы сравнения применены, помимо оценки решений, также к исследованию точности методов линеаризации и последовательной смены стационарных состояний. Применение теорем сравнения в ряде задач теории фильтрации приведено в [12, 15, 54].

Здесь рассматривается применение теорем сравнения к двум задачам фильтрации с релаксацией давления.

I. Рассматривается задача восстановления давления на забое одиночной скважины, расположенной в центре кругового пласта, и проработавшей до момента остановки в стационарном режиме. Уравнения пьезопроводности для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \chi \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right). \quad (1.92)$$

В начальный момент имеет место стационарное распределение давления

$$p(r, 0) = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r} = p_{cr} = p_0 - \frac{Q_0 M}{2\pi k h} \ln \frac{R_0}{r}.$$

На контуре питания поддерживается постоянное давление

$$p(R_0, t) = p_0.$$

Приток жидкости после остановки скважины задается в виде

$$Q(t) = 2\pi r_0 \frac{k h}{\mu} \left(\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial r} + \lambda \frac{\partial^2 p(r_0, t)}{\partial r \partial t} \right).$$

Уравнение (1.92) представим как систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений [72]. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(r, t) = p(r, t) + \lambda \frac{\partial p(r, t)}{\partial t}. \quad (1.93)$$

Тогда уравнение (1.92) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{\lambda \chi} f + \frac{p}{\lambda \chi} = 0.$$

Легко видеть, что

$$p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r} = p_{\min} \leq p(r, t) \leq p_{\max} = p_0.$$

Определим f_1 и f_2 как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{f_1}{\lambda \chi} + \frac{p_{\min}}{\lambda \chi} = 0, \quad (1.94)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} - \frac{f_2}{\lambda \chi} + \frac{p_{\max}}{\lambda \chi} = 0 \quad (1.95)$$

при условиях

$$f_1(R_0, t) = f_2(R_0, t) = p_0, \quad (1.96)$$

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{\mu}{2\pi r_0 k h} Q(t) = c Q(t), \quad i=1, 2. \quad (1.97)$$

Поскольку граничные условия для f_1, f_2 являются одинаковыми, то из теоремы сравнения [219] следует, что

$$f_1(r, t) \leq f(r, t) \leq f_2(r, t).$$

Из уравнений (1.94), (1.95) при условиях (1.96), (1.97) определяем f_1 и f_2

$$f_1(r, t) = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r} + \left(c \alpha Q(t) - \frac{p_* \alpha}{r_0} \right) \omega(r),$$

$$f_2(r, t) = p_0 + c \alpha Q(t) \omega(r),$$

где $\alpha = \sqrt{\lambda \chi}$,

$$\omega(r) = \frac{K_0 \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) I_0 \left(\frac{r}{\alpha} \right) - I_0 \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) K_0 \left(\frac{r}{\alpha} \right)}{I_0 \left(\frac{R_0}{\alpha} \right) K_1 \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) - I_1 \left(\frac{r_0}{\alpha} \right) K_0 \left(\frac{R_0}{\alpha} \right)}.$$

Итак, согласно (1.93), получены уравнения для определения p_1 и p_2

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\lambda} = \frac{f_1}{\lambda}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2}{\lambda} = \frac{f_2}{\lambda}.$$

Эти уравнения решают при условиях

$$p_1(0, r) = p_2(0, r) = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r}.$$

Соответствующие решения имеют вид

$$p_1(r, t) = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r} - \frac{p_* \alpha \omega(r)}{r_0} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\lambda} \right) \right] + \frac{c \alpha \omega(r)}{\lambda} \int_0^t Q(\xi) \exp \left(-\frac{t-\xi}{\lambda} \right) d\xi, \quad (1.98)$$

$$p_2(r, t) = p_0 - p_* \ln \frac{R_0}{r} \exp \left(-\frac{t}{\lambda} \right) + \frac{c \alpha \omega(r)}{\lambda} \int_0^t Q(\xi) \exp \left(-\frac{t-\xi}{\lambda} \right) d\xi. \quad (1.99)$$

Итак, получены оценки $p(r, t)$ «снизу» и «сверху»

$$p_1(r, t) \leq p(r, t) \leq p_2(r, t),$$

в которых $p_1(r, t)$ и $p_2(r, t)$ задаются через (1.98), (1.99).

Точность полученных оценок может быть проверена по значению отношения верхней и нижней оценок

$$\gamma = \max_{r, t} \left| \frac{p_2(r, t)}{p_1(r, t)} \right|.$$

При этом величина γ чем ближе к единице, тем точнее полученные верхняя и нижняя оценки решения уравнения (1.92).

II. Рассмотрим задачу восстановления давления в линейной модели пласта конечной длины l . До момента $t = 0$ считается установленным линейное распределение давления вдоль длины модели и стационарная фильтрация с постоянным расходом. В начальный момент перекрывается выходной конец модели $x = 0$ и происходит восстановление давления до постоянной величины p_0 , поддерживаемого у входного конца модели $x = l$. Расход жидкости у перекрытого конца модели отсутствует. Уравнение пьезопроводности для данного случая имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t} \right). \quad (1.100)$$

Начальное и граничные условия, согласно приведенным выше условиям, принимаются в виде

$$p(0, x) = ax, \quad p(l, t) = al = p_0,$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = a \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right).$$

Уравнение (1.100) с учетом (1.93) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{f}{\lambda \chi} + \frac{p}{\lambda \chi} = 0.$$

Полагаем $p_{\min} = 0$, $p_{\max} = p_0$. Определяем f_1 и f_2 как решения уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{f_1}{\lambda \chi} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{f_2}{\lambda \chi} + \frac{p_0}{\lambda \chi} = 0. \end{cases} \quad (1.101)$$

Уравнения (1.101) должны решаться при условиях

$$f_i(l, t) = p_0, \quad \frac{\partial f_i(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (i=1; 2) \quad (1.102)$$

Решения (1.101), удовлетворяющие условиям (1.102), имеют вид

$$f_1 = p_0 \frac{\chi}{ch \frac{x}{\lambda}}, \quad f_2 = p_0. \quad (1.103)$$

Согласно (1.93) с учетом (1.103), получаем уравнения относительно p_{11} и p_{21}

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} + \frac{p_{11}}{\lambda} = \frac{p_0}{\lambda} \frac{ch \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}}, \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial t} + \frac{p_{21}}{\lambda} = \frac{p_0}{\lambda}, \end{cases} \quad (1.104)$$

которые должны решаться при условиях

$$p_{11}(0, x) = p_{21}(0, x) = ax.$$

Решения уравнений (1.104) имеют вид

$$p_{11}(x, t) = ax \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + p_0 \frac{ch \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right], \quad (1.105)$$

$$p_{21}(x, t) = ax \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + p_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right]. \quad (1.106)$$

Полученные решения (1.105), (1.106) являются нижними и верхними оценками решения $p(x, t)$ уравнения (1.100), т.е.

$$p_{11}(x, t) \leq p(x, t) \leq p_{21}(x, t).$$

Полученные оценки для $p(x, t)$ могут быть улучшены последовательным применением теоремы сравнения. Для этого следует воспользоваться решениями (1.105) и (1.106). Положим

$$p_{\min} = p_{11}(x, t), \quad p_{\max} = p_{21}(x, t).$$

Как и выше определяем f_1 и f_2 как решения уравнений

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{f_1}{\lambda \chi} + \frac{p_{11}}{\lambda \chi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \frac{f_2}{\lambda \chi} + \frac{p_{21}}{\lambda \chi} = 0$$

при условиях (1.102).

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x, t) = & \frac{ch \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left[a \alpha \exp\left(\frac{l}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + p_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) \right] \\ & - a \alpha \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{x}{t}\right) + a x \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) - \frac{p_0}{2\alpha} \frac{xsh \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] \end{aligned} \quad (1.107)$$

$$f_2(x, t) = ax \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + p_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] + \frac{a\alpha \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)}{ch \frac{l}{\alpha}} sh \frac{l-x}{\alpha}. \quad (1.108)$$

Согласно (1.93) имеем уравнения для определения оценок $p(x, t)$ во втором приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{12}}{\partial t} + \frac{p_{12}}{\lambda} &= \frac{f_1}{\lambda}, \\ \frac{\partial p_{22}}{\partial t} + \frac{p_{22}}{\lambda} &= \frac{f_2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

В этих решениях f_1 и f_2 подставляются из (1.107) и (1.108). Решения (1.109) при условиях

$$p_{12}(0, x) = p_{22}(0, x) = ax$$

имеют вид

$$\begin{aligned} p_{12}(x, t) &= \left[ax + \frac{p_0}{2\alpha} \frac{xsh \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} - p_0 \frac{ch \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \frac{tch \frac{x}{\alpha}}{\lambda ch \frac{l}{\alpha}} \times \\ &\times \left[a\alpha \exp\left(-\frac{l}{\alpha}\right) - p_0 \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + p_0 \frac{ch \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) + \\ &+ \frac{xat}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) - \frac{a\alpha t}{\lambda} \exp\left(\frac{x}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) - \frac{p_0}{2\alpha} \frac{xsh \frac{x}{\alpha}}{ch \frac{l}{\alpha}} \left[1 - \frac{t}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right], \\ p_{22}(x, t) &= p_0 + \left[ax - p_0 + \frac{ax - p_0}{\lambda} t + \frac{a\alpha t}{\lambda ch \frac{l}{\alpha}} sh \frac{l-x}{\alpha} \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

В точке $x = 0$ имеем

$$\begin{aligned} p_{12}(0, t) &= \frac{1}{\lambda ch \frac{l}{\alpha}} \left[a\alpha \exp\left(\frac{l}{\alpha}\right) - p_0 \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) \right] t \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) + \\ &+ \frac{p_0}{ch \frac{l}{\alpha}} \left(1 + \frac{l}{2\alpha} th \frac{l}{\alpha}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right)\right] - \frac{a\alpha t}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (1.110)$$

$$p_{22}(0, t) = p_0 + \left(\frac{a \alpha t}{\lambda} i h \frac{1}{\alpha} - p_0 - \frac{p_0 t}{\lambda} \right) \exp \left(-\frac{t}{\lambda} \right). \quad (1.111)$$

Точность определенных оценок может быть проверена величинами

$$\gamma_1 = \max_{x,t} \left| \frac{p_{21}(x, t)}{p_{11}(x, t)} \right|, \quad \gamma_2 = \max_{x,t} \left| \frac{p_{22}(x, t)}{p_{12}(x, t)} \right|.$$

При этом, чем ближе γ_1 и γ_2 единице, тем точнее нижние и верхние оценки.

Таблица 1.3

Изменение значений γ_2 по времени t

$p_0 = 3,0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \lambda = 469 \text{ сек}$		$p_0 = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \lambda = 208 \text{ сек}$	
$t \cdot 10^{-1} \text{ сек}$	γ_2	$t \cdot 10^{-1} \text{ сек}$	γ_2
0	1.0000	0	1.0000
6	1.0077	6	1.0012
12	1.0014	12	1.0022
18	1.0020	18	1.0032
24	1.0026	24	1.0040
30	1.0032	30	1.0047
36	1.0038	36	1.0053
42	1.0043	42	1.0058
48	1.0048	48	1.0063
54	1.0052	54	1.0066
60	1.0056	60	1.0069
72	1.0064	66	1.0072
84	1.0071	72	1.0074
96	1.0077	78	1.0076
108	1.0082	84	1.0077
120	1.0086	96	1.0079
132	1.0090	108	1.0080
144	1.0093	120	1.0081
156	1.0095	132	1.0082
168	1.0097	144	1.00823
180	1.0100	156	1.00825
192	1.0101	168	1.00826

По полученным решениям (1.105), (1.106), (1.110), (1.111) проводились численные расчеты. Для сравнения полученных оценок с точным решением задачи проводились расчеты также и с последним. Точное решение задачи имеет следующий вид [11]:

$$p(0, t) = p_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\lambda} \right) \right] + p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n+1)^2} \times \left[\exp \left(-\frac{t}{\lambda} \right) - \exp \left(-\frac{\chi v_n^2 t}{1 + \lambda \chi v_n^2} \right) \right], \quad (1.112)$$

где $v_n = \frac{\pi}{2l} (2n+1)$.

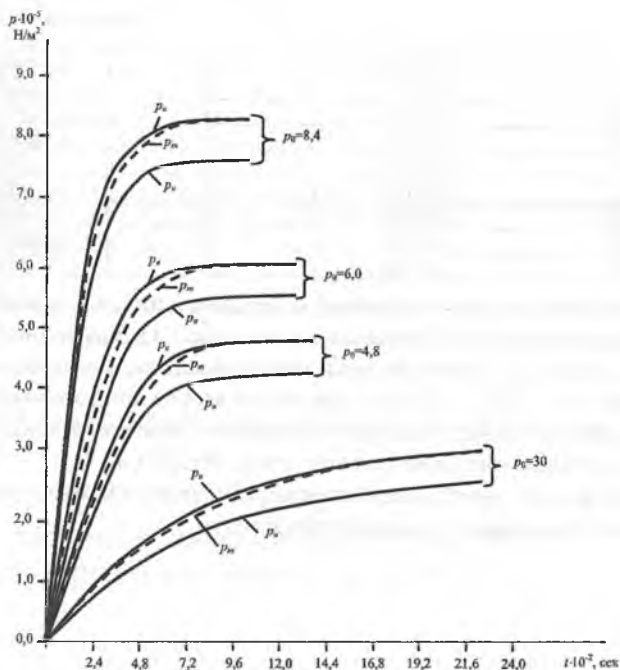


Рис. 1.15. Точное и оценочные решения уравнения (1.100). p_* – верхняя оценка, p_r – точное решение, p_* – нижняя оценка

Таблица 1.4

Изменение значений γ_2 по времени t

$p_0 = 6,0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \lambda = 177 \text{ сек}$		$p_0 = 8,4 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2, \lambda = 138 \text{ сек}$	
$t \cdot 10^{-1} \text{ сек}$	γ_2	$t \cdot 10^{-1} \text{ сек}$	γ_2
0	1.0000	0	1.0000
1	1.0012	1	1.0014
2	1.0023	2	1.0026
3	1.0032	3	1.0036
4	1.0040	4	1.0044
5	1.0047	5	1.0050
6	1.0052	6	1.0055
7	1.0058	7	1.0059
8	1.0060	8	1.0062
9	1.0063	9	1.0064
10	1.0066	10	1.0065
11	1.0068	11	1.0066

Продолжение табл. 1.4

12	1,0069	12	1,0067
14	1,0071	13	1,00675
16	1,0072	14	1,00679
18	1,0073	15	1,00682
20	1,00735	16	1,00684
22	1,00737	17	1,00685
24	1,00738	18	1,00686
26	1,00739	19	1,00687
28	1,00740	20	1,00687

Результаты расчетов по полученным верхним и нижним оценкам в первом приближении и (1.112) представлены на рис. 1.15. Как видно из рисунка, точное решение лежит в области между нижними и верхними оценками. Расчеты по (1.110), (1.111) показали, что второе приближение уже дает очень близкие к точному решению результаты. Изменение точности второго приближения по времени t показано в табл. № 1.3, 1.4.

Таким образом, применение теоремы сравнением позволило оценить решение задач фильтрации с релаксацией давления.

Глава 2.

КИНЕТИКА ПОРИСТОСТИ СРЕДЫ ПРИ КОЛЬМАТАЦИИ И СУФФОЗИИ

- 2.1. Кольматация и суффозия пор частицами
- 2.2. Модель релаксационной фильтрации микронеоднородных жидкостей
- 2.3. Модель фильтрации суспензии при обобщенной зависимости проницаемости от пористости
- 2.4. Модель фильтрации суспензии с учетом эффектов предельного градиента давления
- 2.5. О модификации модели кольматационно-суффозионной фильтрации

В данной главе анализируются модели фильтрации дисперсных систем. Разработана новая модель, учитывающая кинетику пористости среды за счет осаждения (забивания пор) частиц дисперсной среды в поры и их срыва, вымывания (освобождения пор) из пор. С помощью этой модели объясняется ряд релаксационных явлений в пористой среде, дается их физическая интерпретация. Принципиальное значение имеет учет зависимости проницаемости среды от пористости, т.к. последняя в процессах фильтрации дисперсных систем не является постоянной, а изменяется во времени в зависимости от интенсивности осаждения и вымывания частиц в порах. Дано обобщение модели на случай фильтрации с предельным градиентом давления. Здесь же введен новый параметр – предельный суффозионный градиент давления.

В начале главы дается краткий обзор, где отражено состояние изученности проблемы и вопросы ее математического моделирования.

2.1. Кольматация и суффозия пор частицами

Забивание и освобождение порового пространства сред от частиц имеют важное значение в технике и технологии процессов, основанных на фильтрации дисперсных систем.

Приложение процессов фильтрации дисперсных систем в различные области техники настолько широко и разнообразно, что перечисление хотя бы наименований направлений занимало бы очень много места. Но, тем не менее выделим некоторые основные направления, в которых эти процессы реализуются достаточно часто.

Процессами осаждения частиц в пористой среде и тем самым забиванием порового пространства, а также освобождением последнего приходится постоянно встречаться при бурении нефтяных и газовых скважин. При прохождении бурением проницаемых пластов буровой раствор инфильтруется в эти пласты. Отдельные компоненты бурового раствора (глинистые частицы, различные заполнители раствора, химические реагенты, используемые при приготовлении растворов и др.) при этом могут осаждаться в поровом

пространстве, резко снижая проницаемость пластов, что предотвращает катастрофический уход бурового раствора в эти пласты. Образовавшаяся корка из осаждавшихся частиц обеспечивает устойчивость стенки скважин, снижает водоотдачу и улучшает гидравлические характеристики потока бурового раствора в стволе скважины. В отдельных ситуациях технологией бурения скважин предусматривается направленная кольматация пластов с целью предупреждения осложнений, связанных с уходом бурового раствора в проницаемые пласты. Эти вопросы отражены в источниках [47, 58, 81, 99, 103, 148, 159, 162, 222]. Наряду с этим в нефтегазодобыче с целью интенсификации отбора нефти и газа в пласт закачивают воду с различными добавками [95, 161]. Вместе в пласт попадают различные примеси, часть из них, отлагаясь в призабойной зоне, резко ухудшает коллекторские свойства пласта и тем самым приемистость нагнетательных скважин. Для предупреждения этих явлений к качеству закачиваемой воды предъявляется ряд нормативных требований. Вместе с тем химические реагенты закачиваемых в пласт водных растворов (активные примеси) по мере продвижения раствора адсорбируются на стенках порового пространства. Изучение этого явления составляет отдельный класс гидродинамических задач, который в последние годы довольно интенсивно развивается [29, 69, 71].

Следующая область использования процессов фильтрации дисперсных систем – это гидротехника, мелиорация и охрана окружающей среды. Отметим некоторые работы, посвященные этой тематике [16, 91, 92, 94, 96, 133, 145, 165, 167, 229]. Здесь также если для одних процессов кольматация вступает в роли положительного фактора, то для других – отрицательного. Наиболее важное значение при этом приобретают вопросы целенаправленного управления и регулирования кольматацией с целью достижения тех или иных технологических эффектов.

В отдельную группу следует, по-видимому, выделить задачи фильтрования дисперсных систем. Такие задачи ставятся обычно, исходя из практических задач химической, пищевой и др. промышленности и связаны с отделением отдельных фаз смеси. Характерной особенностью этих задач является образование осадка на поверхности фильтра из отдельных фаз, который в зависимости от условий задачи рассматривается как сжимаемый или несжимаемый. Объем осадка по мере фильтрования будет нарастать. Задачи фильтрования имеют принципиальные отличия от задач фильтрации в пористой среде, хотя оба явления внешне имеют очень много общего. Некоторые работы, посвященные этой области исследований, следующие: [17, 32, 66, 149, 168, 231, 233, 234, 235, 281, 285].

Процесс суффозии, т.е. вынос частиц из пор среды фильтрационным потоком имеет также важное значение для многих технических приложений. Если она в работе гидротехнических сооружений является нежелательным явлением, т.к. приводит к нарушению устойчивости грунтов, а следовательно, и самих сооружений, то для многих химико-технологических, пищевых, технических процессов является необходимым и желательным явлением. Например, в процессах нефтедобычи часто с целью интенсификации добычи проводят обработку призабойной зоны и очищают ее от таких отложений, как асфальтено-смолистые нефти, механические частицы, соли выпадающие в процессе физико-химического взаимодействия пластовых флюидов и нарушения термодинамических условий равновесия [41, 282]. Роль суффозии велика и в процессе регенерации различных фильтрующих элементов [75].

Очевидно, что исследование фильтрации дисперсных систем с учетом кольтации и суффозии, помимо экспериментального направления, должно проводиться на основе математических моделей. Однако специфику фильтрации дисперсных систем по сравнению с фильтрацией обычных однородных систем не всегда удается учесть в математических моделях. Более того, сам механизм кольтации и суффозии пор частицами до сих пор достаточно хорошо не изучен, хотя экспериментальные данные убедительно показывают закупоривание пор и удается фиксировать распределение концентрации примеси по длине фильтрационной зоны.

В свете сказанного видим, что одной из самых важных задач в исследовании фильтрации дисперсных систем является создание математических моделей процесса, достаточно полно отражающих основные, характерные свойства изучаемого процесса.

Ниже кратко рассмотрим некоторые известные, широко используемые модели, т.к. они нужны для сравнительного анализа предлагаемых в данной работе моделей, одновременно отмечая, что математическому моделированию процессов переноса взвесей твердых частиц в пористой среде посвящены немногочисленные работы.

При фильтрации жидкости, содержащей твердые взвешенные частицы, происходит изменение основных физических свойств пористой среды – пористости, проницаемости и объемного веса. Подобные изменения называются фильтрационными деформациями грунта [228]. К таким фильтрационным деформациям относятся заиливание или кольтация грунта, вынос мелких частиц из пористой среды и др.

Первые систематические исследования процесса фильтрации жидкостей с твердыми взвешенными частицами приведены в [108, 228]. Рассмотрим предложенные в этих работах модели более детально.

В [108] составлено уравнение баланса веществ при движении жидкости с частицами в пористой среде. Причем в уравнении локальное изменение во времени концентрации твердых частиц в жидкости - c и диффузионные явления не учитываются, так что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2.1)$$

где ρ – плотность насыщения загрузки осадком, т.е. вес осадка, накопившегося к данному моменту времени в единице объема элементарного слоя загрузки, v – скорость фильтрации.

Дополнительно к (2.1) рассматривается интенсивность процесса кольматации и суффозии и с учетом этого из (2.1) получено

$$-\frac{\partial c}{\partial x} = bc - \frac{a}{v} \rho, \quad (2.2)$$

где a, b – параметры.

Из (2.1), (2.2) получено

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial c}{\partial x} + b \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

или аналогичным образом

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} + b \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Интегрируя (2.3) при условиях $c(t, 0) = c_0$, $c(0, x) = c_0 \cdot \exp(bx)$, где c_0 – постоянная концентрация, получено решение

$$c(t, x) = c_0 e^{-bx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(bx)^{n-1}}{(n-1)!} \tau_n e^{-at},$$

где функция τ_n , зависящая от at , определяется выражением

$$\tau_n = \tau_{n-1} - \frac{(at)^{n-2}}{(n-2)!}, \quad \tau_1 = e^{at}.$$

Как справедливо определено в [228], модель (2.1) не учитывает изменение фильтрационных характеристик за счет изменения $c(t, x)$. Кроме того предполагается, что скорость фильтрации существенно не влияет на задерживание частиц, что недостаточно оправдано и не всегда справедливо.

В [228] приведены результаты экспериментальных исследований, проведенных автором работы и другими исследователями. Получены эмпирические формулы

$$\delta = \delta_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{k'}{U}\right) \right], \quad \delta = \delta_0 e^{-k''t}, \quad (2.4)$$

где $\delta_0 = \text{const}$ – объемная концентрация частиц суспензий на границе пористой среды $x = 0$, k' , k'' – параметры, характеризующие свойства пористой среды и суспензий, U – безразмерный комплекс $U = (x/t \cdot q(t))$, x – длина пути фильтрации, t – время от начала фильтрации смеси, $q(t)$ – суммарный расход жидкой и твердой фаз через единицу площади пористой среды.

Как видно из (2.4), в пористой среде образуется довольно длинная зона, где концентрация частиц экспоненциально убывает от начала $x = 0$, причем

$$\delta = \delta_0 \text{ при } x = 0, \delta \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$\delta = 0 \text{ при } t = 0, \delta \rightarrow \delta_0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

В исследованиях по суффозии, приведенных в [228], в основном изучались две стадии:

1) начальный период, когда фильтрационный поток благодаря действию соответствующего перепада давления движется со скоростями, равными критическим, нарушает начальное равновесие грунта и тем самым вызывает первоначальный вымыв мелких частиц из пор скелета грунта;

2) последующий период, когда фильтрационный поток движется со скоростями, большими критических и вымывает мелкие частицы из грунта до полного или частичного освобождения порового пространства.

Главное внимание в упомянутых в [228] работах уделено оценке критической скорости или критическому градиенту давления, при которых эффекты суффозии начинают проявляться.

По сравнению с другими работами в [228] наиболее детально и систематизированно обсуждены вопросы математического моделирования процесса фильтрации жидкостей с твердыми взвешенными частицами. При этом предполагается, что пористая среда и суспензия таковы, что в процессе фильтрации последней части твердого вещества взвеси задерживаются пористой средой, часть ранее осевших частиц срывается и попадает в фильтрационный поток и часть проносится дальше. Исследовались параметры: насыщенность порового пространства жидкостью – ρ , насыщенность порового пространства осевшей массой в твердом теле – β , насыщенность взвешенными частицами – α , насыщенность осевшими частицами в рыхлом теле – ζ , насыщенность «свободной» жидкостью, не связанной с осевшей массой – ξ , насыщенность жидкостью, связанной с осевшей массой – $\varepsilon\zeta$, пористость осевшей массы – ε .

Основные уравнения, которые используются в представленной модели: уравнение неразрывности как для жидкой, так и для твердой фаз для суспензии, уравнение баланса, отвечающее закону сохранения масс и уравнение интенсивности процесса кольматации и суффозии. В частности, уравнение баланса принимается в одном из следующих видов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad B = \frac{m_0(1-\varepsilon)}{q_0} = \frac{1-\varepsilon}{v_0}, \quad v_0 = \frac{q_0}{m_0}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{q}{m_0} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ (1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{q}{m_0} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где m_0 – начальная пористость среды, q – суммарный расход жидкости и твердых частиц, q_0 – постоянный фильтрационный расход. Интенсивность процесса кольматации и суффозии описана в общем виде зависимостью $\partial \zeta / \partial t = F(\delta, \zeta)$, где F – некоторая известная функция. Эта функция определена при выполнении трех гипотез:

а) при кольматации частиц взвеси, будучи задержанными пористой средой, больше потоком не срываются;

б) при суффозии твердые частицы, будучи сорванными потоком, больше пористой средой не задерживаются;

в) общий случай – частица взвеси попеременно осаждается и срывается, т.е. попав в фильтрационный поток частица продвинется на некоторый отрезок пути $l(x)$, затем задержится или осядет, вновь двинется и сделает следующую пробежку, снова задержится и т.д.

В общем случае предложено уравнение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \lambda(\delta - \gamma \zeta), \quad (2.6)$$

где λ, γ – постоянные коэффициенты.

Уравнение (2.6) по виду ничем не отличается от уравнения кинетики сорбции газа в пористой среде при справедливости закона растворимости [76].

Осаждение частиц естественно изменяет фильтрационные характеристики среды. В работе изменение проницаемости среды за счет изменения объема осевшей массы определяется эмпирическими зависимостями, в частности

$$k = k_0 (1 - \zeta^{a_1})^{a_2} + k_1 \zeta^{a_1},$$

где a_1, a_2, a_3 – некоторые эмпирические константы, k_0, k_1 – начальный и конечный коэффициенты проницаемости.

Таким образом, система уравнений Ю.М.Шехтмана по сути дела является близким аналогом известных ранее моделей сорбции. Поскольку (2.6) точно совпадает с уравнением сорбции газа, то кинетика осаждения взвешенных частиц в пористой среде ничем не отличается от кинетики сорбции и десорбции газа. Однако в уравнениях (2.5) учтен фактор изменения характеристик фильтрации при кольтматации и суффозии, что не учитывается в задачах сорбции газа. В этом отношении в фильтрационной модели (2.5), (2.6) взвешенные частицы не являются динамически нейтральными, в то время как в сорбционных задачах сам процесс сорбции газа рассматривался как динамически нейтральный процесс.

В уравнениях (2.5) конвективный перенос частиц определяется коэффициентом q/m_0 . При кольтматации и суффозии текущая пористость среды изменяется за счет выбывания (отключения) или включения отдельных пор в фильтрационный процесс. Это непременно приведет к изменению физической скорости потока, хотя скорость фильтрации при этом может оставаться постоянной. Тем самым конвективный перенос взвешенных частиц в свою очередь будет определяться кольтматацией и суффозией. Однако это явление в (2.5), (2.6) не учитывается. Как показано далее, при весьма малых концентрациях взвешенных частиц и слабых кольтматационных эффектах в уравнениях переноса (2.5) можно использовать «консервативный» коэффициент конвективного переноса v/m_0 .

В уравнениях (2.5) не учитывается конвективная диффузия частиц. Как будет отмечаться и показано далее, конвективной диффузией частиц, особенно в неоднородных пористых средах, нельзя пренебречь. В [279] на основе аналогичной [108, 228] модели рассмотрена задача конвективной диффузии сорбируемой радиоактивной примеси, причем сорбция считается равновесной и на входе в модель концентрация изменяется по гармоничному закону.

В [277] предложена математическая модель, состоящая из уравнения баланса массы для частиц в потоке, частиц, осевших на стенках пор, и застрявших в межпоровых каналах, а также уравнений кинетики обмена. Указаны случаи, в которых осаждение лимитируется массопереносом, т.е. зависит от локальных скоростей течения. В [276] на основе предложенных авторами [277] модели получены решения одномерных задач и определены распределения концентрации частиц в жидкости и проницаемости. В [283] аналитически решена система уравнений переноса взвеси в пористой среде и кинетики седиментации. Рассмотрены задачи нагнетания суспензий под действием постоянного перепада давления и постоянного расхода. В работах

[232, 271] в одномерной и трехмерной средах методом случайного блуждания рассматривается задача моделирования нестационарного переноса загрязненного вещества. Для концентрации загрязняющего вещества в предложении о марковости процесса приводится уравнение Фоккера-Планка. В [256] исследуется перенос многокомпонентной водорастворимой сорбируемой примеси фильтрационным потоком. Массообмен между подвижной и неподвижной фазами для каждой компоненты определяется изотермами сорбции. В [242] также предложена новая модель дисперсии частиц в ограниченных пористых средах. Перенос гетерогенного вещества с фазовыми превращениями на основе вариационного подхода рассмотрен в [250]. Статистическому обоснованию детерминированной модели (2.3) посвящена работа [55].

В некоторых работах кольтматационная фильтрация без составления моделей на основе фундаментальных физико-математических принципов отождествляется с фильтрацией обычных однородных жидкостей с затухающим режимом расхода [29] $Q(t) = Q_0 \exp(-\alpha t)$, где Q_0 – начальный расход, α – параметр. Считается, что снижение проницаемости среды эквивалентно появлению эффективного, переменного во времени потока жидкости с расходом $Q(t)$. Хотя затухание расхода при фильтрации дисперсных систем обосновывается на основе строгих теоретических рассуждений, такие модели нельзя считать полностью физически оправданными, т.к. связь $Q(t)$ от характеристик пористой среды и жидкости остается открытой (неустановленной).

Несколько другой подход к моделированию фильтрации суспензий содержится в [42, 44]. В этих работах предполагается, что осадок образуется в двух формах – вымываемой и невымываемой. Вымываемый осадок образуется, как правило, на лобовых частях зерен, омываемых струйной составляющей течения. А невымываемая – преимущественно в застойных зонах, где реализуется циркуляционное течение. Модель [42, 44] оценена как обобщение моделей [108, 228].

2.2. Модель релаксационной фильтрации микронеоднородных жидкостей

Как указывалось в главе 1, релаксационные явления в фильтрационных процессах обычно учитываются чисто феноменологическим обобщением закона Дарси путем придания ему релаксационного вида и введения

характерных времен, которые рассматриваются как эмпирические константы. Однако для правильной интерпретации релаксационных процессов, управления ими и априорного предсказания необходимо связать структуру соответствующих уравнений и значения входящих в них параметров с физическими свойствами фильтрующей жидкости и пористого материала.

Причины релаксационного поведения фильтрационных потоков могут быть весьма различными. Естественно, прежде всего, связывать их появление с упруговязкими свойствами фильтрата. Однако эксперименты показывают, что характерные времена фильтрационных потоков, как правило, гораздо больше соответствующих значений в вискозиметрических течениях и сильно зависят от структуры и физических свойств пористой среды. В [34] теоретически показано, что причиной релаксационных явлений при фильтрации могут быть упругие свойства каркаса. Однако по порядку величины соответствующие времена, как правило, совпадают с периодом звуковых волн, в то время как экспериментально определяемые значения этих времен могут составлять от десятков секунд до нескольких часов. Отметим, что причиной возникновения аномально длительных релаксационных процессов может быть желатинизация фильтрующихся полимерных растворов вблизи стенок пор, что может изменять их упруговязкие свойства и повышать характерные времена релаксации и ретардации фильтрата.

Из экспериментов [6, 218] следует, что релаксационные явления наиболее заметны при фильтрации тяжелых нефтей с повышенным содержанием асфальтенов, смол, парафинов и т.д. Это позволяет связать причины релаксационных эффектов с кольматацией и суффозией пор частицами. Для выяснения влияния различных механизмов на релаксационные процессы необходимо, во-первых, проводить целенаправленные исследования, а, во-вторых, разрабатывать конструктивные физико-механические модели, которые позволили бы теоретически получать уравнения фильтрации и оценить фигурирующие в них параметры в зависимости от свойств жидкости и пористого тела.

Здесь теоретически изучается влияние кольматации и суффозии примеси в порах на особенности нестационарной фильтрации жидкости. Для максимальной концентрации внимания на явлениях, вызываемых рассматриваемым механизмом, будем считать, что другие причины возникновения релаксационных эффектов отсутствуют [79, 80].

Чтобы еще более упростить вычисления, ограничимся исследованием процессов в объеме среды, считая ее бесконечной и отвлекаясь от последст-

вий накопления примеси на границе среды, и неоднородностью ее распределения в объеме материала. Отметим, что явление подобных краевых эффектов рассматривалось в [29, 75].

При сделанных допущениях фильтрация может быть описана при помощи обычного закона Дарси

$$v = \frac{K(\varepsilon)}{\eta} \nabla p, \quad (2.7)$$

где $K(\varepsilon)$ – проницаемость среды, зависящая от текущего значения пористости ε , ∇p – здесь модуль градиента давления.

Зависимость проницаемости материала от его пористости, как правило, имеет довольно сложный вид. Некоторые варианты описания этой зависимости можно найти, например, в [19, 93, 98, 174, 224]. Ниже, для максимального упрощения математической стороны дела, будем полагать, что пористость мала и, из модельных соображений запишем

$$K(\varepsilon) = k_0 \eta \varepsilon, \quad (2.8)$$

где k_0 – постоянный коэффициент.

Необходимо отметить, что (2.8) не удовлетворяет известной формуле Кармана-Козени, в соответствии с которой при $\varepsilon \ll 1$ $K(\varepsilon) \sim \varepsilon^3$. Приближение (2.8) сделано здесь с целью максимально простой демонстрации предлагаемой далее модели и получения достаточно общих качественных результатов. Как будет ясно из дальнейшего, выбор более правильной зависимости K от ε , чем (2.8), приводит к обобщению полученных здесь результатов.

Процессы закрытия пор примесью и их открытия определяются геометрией пор и кусочков примеси, а также особенностями их взаимодействия со стенками пор. В подавляющем большинстве случаев детальная информация об этих характеристиках отсутствует. Поэтому естественно описывать процессы коагуляции и суффозии вероятностным способом. Будем считать, что каждая пора представляет собой ловушку для частиц примеси. Тогда пористую среду можно рассматривать как континуум ловушек, каждая из которых может быть свободна или занята. Если ловушка занята, протекание фильтрата через соответствующую пору отсутствует. Отметим, что закрытие пор может происходить за счет образования на стенках слоев адсорбированных микрочастиц примеси [105] (в этом случае размеры частиц много меньше всех размеров поровых каналов), а также вследствие «закупоривания» канала одной, достаточно крупной частицей. Первый случай может быть исследован на основе модели [68], предложенной для анализа влияния адсорбции полимерных молекул

на фильтрацию содержащего их раствора. Ниже рассматриваем второй механизм кольматажа.

Введем вероятности захвата w_0 хотя бы одной частицы примеси и ее освобождения w_1 в единицу времени [79]. Величины w_0 и w_1 зависят от геометрии пор и частиц, концентрации частиц, градиента внешнего давления ∇p , особенностей взаимодействия частиц со стенками пор и т.д. Эти зависимости могут быть установлены экспериментально или теоретически на основе модели микроструктуры пористой среды и фильтрующейся жидкости. В цели работы не входит определение вида w_0 и w_1 . Поэтому, имея в виду получение принципиальных результатов и их физический анализ, в первом приближении считаем

$$w_0 = \omega_0, \quad w_1 = \omega_1 \nabla p, \quad (2.9)$$

где ω_0 и ω_1 – эмпирические постоянные. Первое из равенств (2.9) отображает тот факт, что захват примеси порами – ловушками осуществляется и в отсутствие фильтрационных потоков, а второе – допущение, что открытие пор может происходить только в результате отрыва закупоривающего ее кусочка примеси под напором фильтрата. Возможно, что для количественных расчетов соотношения (2.9) являются слишком грубыми. Однако они позволяют установить ряд важных качественных закономерностей, которые могут быть легко уточнены для реальных ситуаций при помощи обобщения (2.8), (2.9).

Пусть далее N_0 – число ловушек, равное числу пор в единице объема среды, N – число свободных ловушек, $N_0 - N$ – занятых, а β – средний объем поры. Используя эти обозначения, запишем

$$\frac{dN}{dt} = (N_0 - N)\omega_1 \nabla p - N\omega_0, \quad v = k_0 \varepsilon \nabla p, \quad \beta N = \varepsilon. \quad (2.10)$$

Первое из равенств (2.9) означает, что изменение концентрации свободных ловушек в единицу времени происходит за счет освобождения занятых и захвата примеси свободными ловушками. Второе – закон Дарси (2.7) при учете (2.8), третье – определение пористости среды через концентрацию пор и их средний объем. Подставляя третье равенство (2.10) в первое, приходим к такой системе

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\omega_1 \nabla p - \varepsilon\omega_0, \quad v = k_0 \varepsilon \nabla p, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_0 = \beta N_0,$$

где ε_0 – доступная для фильтрации пористость, когда все поры – ловушки свободны. Из (2.11) видно, что каждому установившемуся значению

градиента давления ∇p отвечает свое стационарное значение пористости ε_s , причем

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \frac{\omega_1 \nabla p}{\omega_1 \nabla p + \omega_0}. \quad (2.12)$$

Не составляет принципиального труда при помощи (2.11) анализировать зависимость $v(t)$ при произвольно меняющемся ∇p . Ниже для простоты рассмотрим часто встречающиеся на практике и в опытах ситуации, когда в некоторый момент времени t^0 (далее будет считаться $t^0 = 0$) происходит скачок градиента внешнего давления ∇p (или потока v) от некоторого начального значения ∇p^0 (или v^0) до конечного $\nabla p'$ (или v'). Соответствующие ε , вычисляемые из (2.12), будем обозначать ε^0 и ε' .

Скачок градиента давления. В этом случае из первого уравнения (2.11) находим

$$\varepsilon = \varepsilon' + (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau'), \quad (2.13)$$

$$\tau' = (\omega_1 \nabla p' + \omega_0)^{-1}.$$

Используя (2.13) во втором равенстве (2.11), получаем

$$v = k_0 \varepsilon' \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^0}{\varepsilon'} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \right] \nabla p. \quad (2.14)$$

Сравним этот результат со следующим из феноменологических уравнений, введенных в [10, 11, 114]. Ограничиваясь случаем, когда потоку приписывается одно время релаксации τ , запишем уравнения [10] так:

$$\left(1 + \tau_v \frac{\partial}{\partial t} \right) v = k_0 \varepsilon \nabla p. \quad (2.15)$$

Полагая, как и в [10, 11, 114], $\tau, \varepsilon = \text{const}$, из (2.15) при скачкообразном изменении ∇p от ∇p^0 до $\nabla p'$ получаем

$$v = k_0 \varepsilon \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_v}\right) \right] \nabla p. \quad (2.16)$$

Видно, что формально (2.14) и (2.16) совпадают с точностью до предэкспоненциального множителя. Если в (2.14) положить $\nabla p^0, \varepsilon^0 = 0$ (т.е. считать, что до начала скачка жидкость покоилась), (2.14) и (2.16) формально полностью совпадают. Заметим, однако, что если в (2.16), как и в [10, 11, 114], τ_v считается постоянным параметром, присущим данной системе, то в (2.14), как видно из (2.13), время релаксации τ' зависит от конечного градиента давления $\nabla p'$, причем с ростом $\nabla p'$, τ' уменьшается. Это означает, в частности, что если вначале градиент давления будет поднят от ∇p^0 до $\nabla p'$, а потом снова сброшен до ∇p^0 , время установления стационарного

течения во втором случае больше, чем в первом. На опыте это может интерпретироваться как гистерезисная зависимость v от ∇p . Отметим, что подобные гистерезисы были зафиксированы в экспериментах [6, 218].

Исследуем теперь стационарную (при $t \rightarrow \infty$) зависимость v от ∇p . Несложный анализ (2.12), (2.14) показывает, что в этом случае зависимость $v = k_0 \varepsilon_c \nabla p$ имеет вид, схематически показанный на рис.2.1. Если условия эксперимента таковы, что их результаты ложатся на кривую рис.2.1 там, где она уже близка к асимптоте, что выполняется при $\omega_1 \nabla p \gg \omega_0$, их экстраполяция в области малых значений ∇p отсечет от оси абсцисс отрезок, длина которого равна ω_0/ω_1 , что может быть интерпретировано как наличие предельного градиента давления.

Скачок скорости. Пусть теперь скачком меняется поток жидкости от v^0 до v' , а градиент давления релаксирует к изменившемуся состоянию.

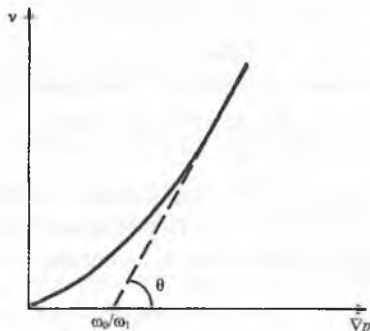


Рис. 2.1. Стационарная зависимость величины v от ∇p .
Штриховая — асимптота, $\lg \theta = k_0 \varepsilon_0$

Подставляя второе равенство (2.11) в первое, после интегрирования приходим к такому уравнению для определения ε :

$$\left(\varepsilon^2 + \varepsilon \gamma - \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\varepsilon + \Omega_1}{\varepsilon - \Omega_2} \right) \right)^\alpha = \left(\varepsilon^0{}^2 + \varepsilon^0 \gamma - \varepsilon_0 \gamma \left(\frac{\varepsilon^0 + \Omega_1}{\varepsilon^0 + \Omega_2} \right) \right)^\alpha \cdot \exp(-2\omega_0 t), \quad (2.17)$$

$$\gamma = \frac{\omega_1}{k_0 \omega_0} v', \quad \alpha = \gamma / \sqrt{\gamma^2 + 4\varepsilon_0 \gamma}, \quad \Omega_1 = \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\varepsilon_0 \gamma} \right) / 2,$$

$$\Omega_2 = \left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\varepsilon_0 \gamma} \right) / 2,$$

где ε^0 — стационарное значение пористости, определяемое из (2.12) при использовании там вместо ∇p стационарного градиента давления $\nabla p^0 = v^0 / k_0 \varepsilon^0$, отвечающего начальному значению расхода v^0 .

Решение алгебраического уравнения (2.17) возможно только численно. Схематически результаты численных расчетов зависимости ∇p от t приведены на рис.2.2. Отметим, что, как видно из (2.17), в этом случае временем релаксации является величина $\tau'' = (2\omega_0)^{-1}$.

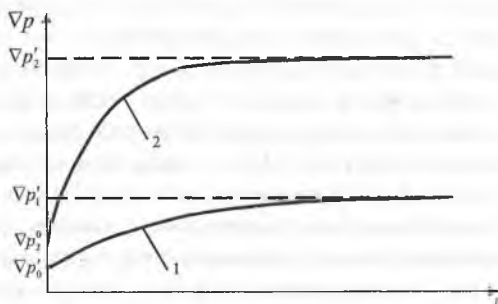


Рис. 2.2. Релаксация ∇p при изменении v скачком от v_0 до v'_1 и v'_2 (кривые 1 и 2 соответственно); $\nabla p_1^0 = (k_0 \varepsilon_0)^{-1} v_0$, $\nabla p_i' = (k_0 \varepsilon_0')^{-1} v_i'$ ($i=1, 2$); $v_1 < v_2$

Величина ω_0 , определенная в (2.9), представляет собой вероятность захвата ловушкой хотя бы одной частицы. При решении ряда задач удобнее оперировать вероятностью захвата именно одной частицы выделяя в ω_0 явную зависимость от концентрации частиц примеси.

Пусть в единице объема жидкости находится n частиц. Тогда в объеме поры их βn . Полагая все частицы одинаковыми, используя известные результаты теории вероятностей, получаем

$$\omega_0 = n\beta\omega_0^* \quad (2.18)$$

Подставляя теперь (2.18) в (2.13) и (2.17) определяем зависимости времен релаксаций процессов от концентрации частиц примеси в фильтрате.

Таким образом, предлагаемая модель континуума ловушек достаточно просто приводит к важным качественным выводам об особенностях нестационарной фильтрации, вызванных кольтатажем и суффозией – эти процессы приводят к релаксационным явлениям, причем характерные времена являются, вообще говоря, режимными параметрами и зависят от концентрации примесей в фильтрате. Более того, даже стационарная фильтрация не подчиняется закону Дарси и носит нелинейный характер. В рамках используемых здесь моделей можно получать и количественные результаты. Для этого нужно вместо (2.8), (2.9) использовать более точные соотношения.

К сожалению, известные экспериментальные данные по релаксационной фильтрации нефтей и полимерных растворов не позволяют одноз-

начно оценить введенные здесь величины w_0 , i_1 , ω_0 , ω_1 , ω_0^* и определить, вызваны ли наблюдаемые релаксационные явления процессами кольтатажа и суффозии. Для ответа на этот вопрос можно проводить целенаправленные эксперименты и сравнивать их результаты с оценками, вытекающими из теоретических расчетов. Однако если априорно известно, что нарушение закона Дарси может быть объяснено только забиванием пор примесью (как это имеет место, например, при течении суспензий твердых частиц в ньютоновской жидкости через жесткий каркас), процесс фильтрации вполне может быть описан с помощью развиваемого метода.

Отметим, что как следует из (2.11), в рамках предлагаемой модели при обращении ∇p в нуль фильтрация мгновенно прекращается ($v = 0$). Это противоречит известным экспериментальным данным по фильтрации нефтей и полимерных растворов и указывает на то, что кольтатаж и суффозия определяют не все релаксационные эффекты. Для достаточно полного описания релаксационной фильтрации необходимо экспериментально и теоретически исследовать особенности упруговязкого поведения жидкостей с примесями в малых порах и узких щелях, а также взаимодействие реальных жидкостей со стенками пор.

2.3. Модель фильтрации суспензии при обобщенной зависимости проницаемости от пористости

В предыдущем параграфе предложена модель фильтрации суспензии, которая объясняла влияние кольтатации частиц примеси, содержащейся в фильтрате, порами каркаса и последующей их суффозии на особенности фильтрационных течений. Однако там рассматривалась весьма идеализированная схема; зависимость проницаемости от пористости была учтена в линейном виде (2.2).

В общем случае связь проницаемости от пористости имеет более сложный вид. В [93, 98] приведено несколько формул, связывающих коэффициент фильтрации через пористость. Из указанных там формул широкое признание нашла формула Кармана-Козени

$$K(\varepsilon) = k_0 \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = 8,2 d^2 / \eta, \quad (2.19)$$

где k – коэффициент, d – эффективный диаметр.

В [105] приведена аналогичная формула

$$r = \frac{k_1(1-\varepsilon)^{\alpha_1} \delta^{\alpha_2}}{\bar{\alpha}^{\alpha_3} \varepsilon^{\alpha_4}},$$

где r – удельное сопротивление (величина, обратная проницаемости пористой среды), δ – дисперсная функция распределения частиц, $\bar{\alpha}$ – средний размер частиц дисперсной фазы, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – постоянные, $0 \leq \alpha_1 \leq 4,5; 0 \leq \alpha_2 \leq 1; 0 \leq \alpha_3 \leq 2; 0 \leq \alpha_4 \leq 4$.

Процесс закрытия пор частицами фильтрующейся жидкости и их освобождение (суффозия) зависит как от геометрии частиц и пор, так и от динамических условий фильтрации. Следуя [79], рассмотрим процесс фильтрации с учетом кольтации и суффозии для обобщенной зависимости проницаемости от пористости, моделируя пористую среду континуумом ловушек для частиц смеси [179]. Каждая ловушка соответствует одной поре. Если пора закрыта частицей, то полагается, что она захвачена соответствующей ловушкой.

Закон Дарси с учетом обобщенной зависимости коэффициента фильтрации от пористости (2.19) принимает как

$$v = K(\varepsilon) \cdot \nabla p. \quad (2.20)$$

Уравнения кинетики пористости за счет кольтации и суффозии примем в виде [79]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \nabla p - \omega_0 \varepsilon. \quad (2.21)$$

Уравнения (2.20) и (2.21) образуют систему, из которой определяется изменение пористости ε во времени в нестационарных режимах фильтрации. А из уравнения (2.20) можно определить закон фильтрации при различных режимах нагружения системы. В принципе, несложно определить связь между v и ∇p при произвольных режимах течения. Ниже для простоты рассмотрим, как и в 2.2, типичные случаи, когда задается скачок либо перепада давления, либо скорости фильтрации.

Скачок градиента давления. Пусть в системе (в пористой среде) установлен стационарный процесс, отвечающий первоначальному перепаду давления – ∇p^0 . В начальный момент $t = 0$ создается скачок градиента давления от ∇p^0 до $\nabla p'$. Соответствующие стационарные значения пористости обозначим через ε^0 и ε' . В этом случае из уравнения (2.21) находим

$$\varepsilon = \varepsilon' + (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau'), \quad (2.22)$$

$$\tau' = (\omega_1 \nabla p' + \omega_0)^{-1}.$$

Подставляя (2.22) в (2.20) и используя формулу Кармана-Козени (2.19), получаем

$$v = k_0 \frac{[\varepsilon' + (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')]^3}{[1 - \varepsilon' - (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')]^2} \nabla p. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) в общем виде выражает закон Дарси с переменным во времени коэффициентом фильтрации. Его можно представить в виде

$$v = \frac{k_0 (\varepsilon')^3}{(1 - \varepsilon')^2} \cdot \frac{1 - a_1 e^{-\frac{t}{\tau'}} + a_2 e^{-\frac{t}{\tau'}} - a_3 e^{-\frac{t}{\tau'}}}{1 + b_1 e^{-\frac{t}{\tau'}} + b_2 e^{-\frac{t}{\tau'}}} \nabla p, \quad (2.24)$$

$$a_1 = 3\Omega, \quad a_2 = 3\Omega^2, \quad a_3 = 3\Omega^3, \quad b_1 = 2\theta, \quad b_2 = \theta^2,$$

$$\Omega = 1 - \varepsilon^0/\varepsilon', \quad \theta = (\varepsilon' - \varepsilon^0)/(1 - \varepsilon').$$

Согласно (2.24) при постоянном скачке градиента давления $\nabla p'$ скорость фильтрации v релаксационно изменяется до нового стационарного значения, соответствующего $\nabla p'$. Время релаксации τ' в (2.24) зависит от $\nabla p'$ и следовательно для различных $\nabla p'$ скорость фильтрации v будет релаксировать с различными характерными временами релаксации.

Представляется интересным исследование динамики v от t при различных режимах нагружения системы, в частности, при скачкообразованном возрастании и убывании ∇p . Пусть скачок осуществлен с ∇p^0 до $\nabla p'$ ($\nabla p' > \nabla p^0$). Тогда время релаксации τ' определяется значением и его значение меньше, чем время релаксации, соответствующее переходному процессу скачка ∇p от какого-то значения до ∇p^0 . Это означает, что если в начале градиент давления поднят от ∇p^0 до $\nabla p'$, а потом снова обращен до ∇p^0 , время установления стационарного течения во втором случае будет больше, чем в первом. Такая гистерезисная зависимость v от ∇p наблюдается при фильтрации тяжелых нефтей и полимерных растворов [3]. Этим явлением также в определенной степени объясняется значительная разница во времени восстановления давления и истощения в модели пласта, которая наблюдается при фильтрации тех же систем.

Стационарная зависимость v от ∇p , как видно из (2.24), имеет вид

$$v = \frac{k_0}{(1 - \varepsilon)^2} \nabla p. \quad (2.25)$$

С учетом стационарного значения пористости ε , соответствующего ∇p ,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \omega_1 \nabla p / (\omega_1 \nabla p + \omega_0)$$

из (2.25) имеем

$$v = \frac{k_0 (\varepsilon_0 \omega_1)^3 \nabla p^4}{(\omega_1 \nabla p + \omega_0) [\omega_1 (1 - \varepsilon_0) \nabla p + \omega_0]^2}. \quad (2.26)$$

Зависимость v от ∇p по (2.26) схематически показана на рис.2.3, который по виду не отличается от рис.2.1. При больших перепадах давления ∇p (вообще говоря, при $\omega_1 \nabla p \gg \omega_0$) зависимость имеет асимптоту

$$v = \frac{k_0 \varepsilon_0^3}{(1 - \varepsilon_0)^2} \left(\nabla p - \frac{3 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right) \cdot \frac{\omega_0}{\omega_1}. \quad (2.27)$$

Как видно из (2.27), асимптота пересекает ось ∇p при $\nabla p = (3 - \varepsilon_0)\omega_0 / [(1 - \varepsilon_0)\omega_1]$, что может быть интерпретировано как предельный градиент давления.

В случае линейной зависимости проницаемости (коэффициента фильтрации) от пористости асимптота пересекает ось ∇p при $\nabla p_0 = \omega_0 / \omega_1$ (см. рис.2.1). Из условия $(3 - \varepsilon_0) / (1 - \varepsilon_0) > 1$ очевидно, что «предельный градиент давления» в случае нелинейной связи проницаемости (коэффициента фильтрации) больше, чем в случае аналогичной линейной зависимости. Этот факт может быть расценен как эффект усиления отклонения от классического закона Дарси в случае нелинейной связи проницаемости (коэффициента фильтрации) от пористости.

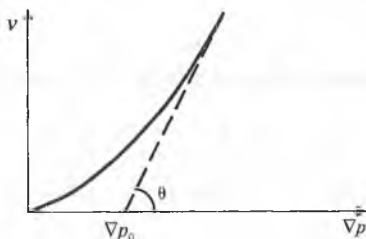


Рис. 2.3. Стационарная зависимость (схематическая) v от ∇p , ∇p_0 - «предельный градиент давления»; $\operatorname{tg} \theta = k_0 \varepsilon_0^3 / (1 - \varepsilon_0)$.

Скачок расхода. Пусть теперь скачком меняется скорость фильтрации от v^0 до v^1 , а градиент давления релаксирует к изменившемуся состоянию.

Подставляя (2.20) в (2.21), с учетом формулы Кармана-Козени (2.19), приходим к уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \gamma - \varepsilon \right] \omega_0, \quad \gamma = \frac{\omega_1 v'}{\omega_0 k_0}. \quad (2.28)$$

Интегрируя (2.28), приходим к

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\xi^3 d\xi}{\xi^4 + \gamma \xi^3 - \gamma(2 + \varepsilon_0)\xi^2 + \gamma(2\varepsilon_0 + 1)\xi - \gamma\varepsilon_0} = -\omega_0 t, \quad (2.29)$$

где ε_0 - стационарное значение пористости, соответствующее скорости фильтрации v^0 .

Уравнение (2.29) позволяет определить изменение ε при различных t . Искомая величина ε входит в верхнюю границу интеграла (2.29). Вычисляя интеграл (2.29) в явном виде в зависимости от характера решений уравнения (относительно ξ)

$$\xi^4 + \gamma \xi^3 - \gamma(2 + \varepsilon_0) \xi^2 + \gamma(2\varepsilon_0 + 1) \xi - \gamma \varepsilon_0 = 0, \quad (2.30)$$

получим уравнение для определения ε .

1. Пусть корни (2.30) действительны и различны — α_i ($i = \overline{1,4}$). Тогда, выполняя интегрирование в (2.30), при начальном условии $\varepsilon = \varepsilon_0$ при $t = 0$ получим уравнения относительно ε

$$\prod_{j=1}^4 |\varepsilon - \alpha_j|^{\beta_j} = \exp(-\omega_0 t) \cdot \prod_{j=1}^4 |\varepsilon_0 - \alpha_j|^{\beta_j}, \quad (2.31)$$

где β_j — коэффициенты при разложении подынтегральной функции в простые дроби, т.е.

$$\frac{\xi^3}{\xi^4 + \gamma \xi^3 - \gamma(2 + \varepsilon_0) \xi^2 + \gamma(2\varepsilon_0 + 1) \xi - \gamma \varepsilon_0} = \sum_{j=1}^4 \frac{\beta_j}{\xi - \alpha_j}.$$

2. Пусть уравнение (2.30) имеет два действительных α_1, α_2 и два комплексно-сопряженных

$$\alpha_3 = \alpha'_3 + \alpha''_3 i, \quad i = \sqrt{-1}$$

корня. Тогда, выполняя интегрирование в (2.29), получим уравнение для определения

$$\begin{aligned} & \ln \left(\left| \frac{\varepsilon - \alpha_1}{\varepsilon_0 - \alpha_1} \right|^{\beta_1} \left| \frac{\varepsilon - \alpha_2}{\varepsilon_0 - \alpha_2} \right|^{\beta_2} \left| \frac{\varepsilon^2 - \delta_1 \varepsilon + \delta_2}{(\varepsilon_0)^2 - \delta_1 \varepsilon_0 + \delta_2} \right|^{\beta_3/2} \right) + \\ & + \frac{\beta_4 + \beta_3 \alpha'_3}{\alpha''_3} \left(\arctg \frac{\varepsilon - \alpha'_3}{\alpha''_3} - \arctg \frac{\varepsilon_0 - \alpha'_3}{\alpha''_3} \right) = -\omega_0 t, \\ & \delta_1 = 2\alpha'_3, \quad \delta_2 = (\alpha'_3)^2 + (\alpha''_3)^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Случай двух пар комплексно-сопряженных корней уравнения (2.30) не имеет места.

Уравнения (2.31), (2.32) решаются численно. Результаты расчетов по (2.32) при скачке скорости фильтрации, соответствующем изменению параметра γ от 0,1 до 0,6; 0,8; 1,0 приведены на рис. 2.4. Как видно из рисунка, для $\gamma = 0,1$ соответствует стационарное значение пористости $\varepsilon^0 = 0,28$. При скачке γ до 0,6; 0,8; 1,0 пористость релаксирует до соответствующих стационарных значений 0,345; 0,353; 0,359.

Темп изменения $\varepsilon(t)$ определяется временем релаксации. Как видно из уравнений (2.31) и (2.32), в качестве характерного времени, которым

определяется темп изменения ε по времени, может быть взято ω_0^{-1} . Кривые рис.2.4 четко показывают, что изменение ε по времени происходит по релаксационному закону.

Расчеты изменения пористости могут быть проведены и с самим уравнением (2.29). Интересно отметить, что стационарное значение пористости, соответствующее скорости фильтрации, является корнем уравнения (2.30), следовательно, интеграл в (2.29) является несобственным. При $t \rightarrow \infty$ очевидно $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ и значение интеграла стремится к $-\infty$. В уравнениях (2.31) и (2.32) при $t \rightarrow \infty$ аналогично имеем $\varepsilon \rightarrow \alpha$ для какого-то значения j .

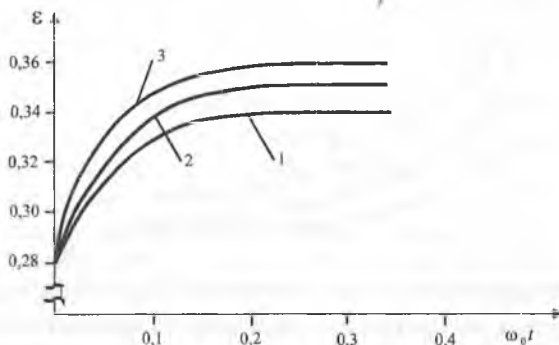


Рис. 2.4. Релаксация ε при изменении γ от 0,1 до 0,6 (1), 0,8 (2), 1,0 (3)

Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ уравнений (2.31) и (2.32) характеризует этап выхода на стационарный режим фильтрации, соответствующий заданному скачку скорости v' .

Расчет изменения градиента давления осуществляется по формуле

$$\nabla p = \frac{(1-\varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^3} v', \quad (2.33)$$

где используется $\varepsilon = \varepsilon(t)$, определенное как решение уравнений (2.31) или (2.32). В безразмерных единицах (2.33) принимает вид

$$P = \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \gamma, \text{ где } P = \frac{\omega_0 \nabla p}{\omega_0}, \quad (2.34)$$

Рассмотрим изменение градиента давления при скачкообразном изменении γ от одного значения к другому. Используем приведенные выше расчеты $\varepsilon = \varepsilon(t)$ при изменении γ от 0,1 до 0,6; 0,8; 1,0. Кривые изменения параметра P , рассчитанного по (2.34), от $\omega_0 t$ приведены на рис.2.5. Как видно из рисунка, безразмерный градиент давления монотонно уменьшается до некоторого постоянного значения, соответствующего

стационарному состоянию. При больших значениях скачка γ начальные и текущие значения P соответственно увеличиваются. При снижении γ от одного постоянного значения до другого градиент давления рассчитывается аналогичным образом. Как видно из уравнений (2.31), (2.32), характерное время переходного процесса при скачке скорости фильтрации определяется как ω_0^{-1} . В отличие от случая скачка градиента давления время релаксации в данном случае является постоянной величиной, не зависящей от градиента давления.

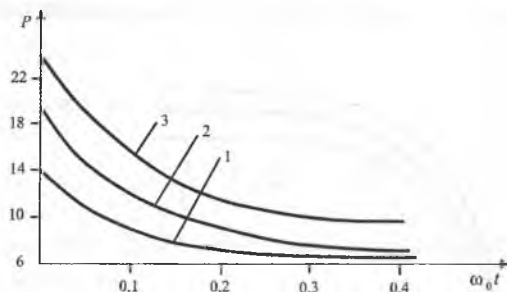


Рис. 2.5. Зависимость P от $\omega_0 t$ при изменении γ от 0,1 до 0,6 (1), 0,8 (2), 1,0 (3).

Таким образом, учет нелинейности связи проницаемости (коэффициента фильтрации) от пористости приводит к ряду особенностей изменения характера фильтрации с учетом коьматации и суффозии.

Следует отметить, что обобщение приведенных выше рассуждений на другие зависимости проницаемости (коэффициента фильтрации) от пористости не представляет особых трудностей. Так, рассмотренные задачи легко могут быть распространены на формулы Е.А.Замарина, И.И.Зауэрбрея и другие эмпирические зависимости проницаемости от пористости, сведения о которых приведены в [93, 98]. Возникающие при этом трудности будут носить исключительно вычислительный характер.

Дальнейшее улучшение предложенной модели может быть осуществлено в нескольких направлениях. Весьма интересным представляется выявление более детальной структуры вероятностей захвата w_0 ловушкой хотя бы одной частицы примеси и ее освобождения w_1 в единицу времени. Это позволит более глубокое исследование физических явлений, происходящих в процессе фильтрации с учетом коьматации и суффозии. Другое естественное обобщение, по видимому, связано с одновременным учетом коьматации, суффозии и других явлений, приводящих к релаксационным изменениям фильтрационных характеристик в динамических процессах. К последним, в

частности, могут быть отнесены сложные реологические свойства скелета пористой среды и фильтрующейся жидкости, взаимодействие жидкости со стенками пор, сложная структура пористой среды (трещиноватость, неоднородность, аномально низкая проницаемость и др.) и др.

2.4. Модель фильтрации суспензии с учетом эффектов предельного градиента давления

В модели фильтрации с учетом коагуляции и суффозии [79] вероятность захвата ловушкой одной частицы примеси w_0 и ее освобождения w_1 в единицу времени принимается в виде (2.9).

Предположение (2.9) о том, что срыв частицы происходит пропорционально ∇p , вообще говоря, не всегда справедливо. Это объясняется тем, что для срыва частиц, захваченных ранее порой-ловушкой, необходимо приложить определенное усилие. При малых градиентах давления сила, стремящаяся срывать частицу, может оказаться недостаточной и при неизменном градиенте давления частицы не срываются или срыв их незначителен. Пусть сила сцепления частицы в ловушке есть f_c . Вообще говоря, эта сила для разных пор и частиц различна. Однако можно ввести осредненное значение силы, справедливое для некоторого объема континуума пор-ловушек и частиц. Для срыва частиц нужно приложить силу давления, большую чем сила сцепления f_c . Эта сила имеет порядок $\nabla p \cdot \beta$, т.е. $f_p \sim \nabla p \cdot \beta$, где β - объем поры-ловушки. Таким образом для того, чтобы частица срывалась к следующим порам-ловушкам должно быть $f_p > f_c$. Другими словами, существует некоторое поровое значение градиента давления $\nabla p_c \sim f_c/\beta$, разделяющее область наличия и отсутствия суффозии. При $\nabla p \leq \nabla p_c$ суффозия не происходит. В области $\nabla p > \nabla p_c$ зависимость суффозии от градиента давления может иметь в общем случае сложный вид. Однако здесь ограничимся линейной зависимостью, что существенно облегчает математические выкладки.

Установлено, что в большинстве случаев движение пластовых флюидов в значительной степени отклоняется от линейного закона фильтрации Дарси [112]. Вследствие существенного отличия свойств пластовых жидкостей от ньютоновской модели и сложного взаимодействия пластовых флюидов с пористой средой проявляется начальный градиент давления. В этом случае основной закон фильтрации жидкости в векторном виде принимается как

$$\vec{v} = -K(\varepsilon) \left(\nabla p - |\nabla p_0| \right) \frac{\nabla p}{|\nabla p|} \quad \text{при } |\nabla p| > |\nabla p_0| \quad (2.35)$$

$$\bar{v} = 0 \text{ при } |\nabla p| \leq |\nabla p_0|,$$

где ∇p_0 – предельный градиент давления.

Закон (2.35) в более простом виде может быть записан как:

$$v = \begin{cases} K(\varepsilon)(\nabla p - \nabla p_c) & \text{при } \nabla p > \nabla p_c \\ 0 & \text{при } \nabla p \leq \nabla p_c \end{cases} \quad (2.36)$$

Здесь и далее, как и в предыдущих разделах, ∇p , ∇p_0 означают модули градиентов давления.

Зависимость коэффициента фильтрации от пористости может задаваться различными формулами. Здесь в расчетах принимается (2.19), т.к., как показано в разделе 2.3, она является более реальной и по сравнению с линейной формулой описывает ряд дополнительных явлений.

С учетом высказанных выше соображений уравнение кинетики активной пористости можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\omega_1(\nabla p - \nabla p_c) - \varepsilon\omega_0, \quad (2.37)$$

где $\varepsilon_0 = \beta N_0$ – доступная для фильтрации пористость, когда все поры-ловушки свободны.

Из уравнений (2.36) и (2.37) можно определить изменение пористости ε во времени при различных изменениях v и ∇p . В общем случае можно рассматривать произвольные законы изменения v и ∇p по времени. В частных случаях достаточно их принимать поочередно постоянными.

Соотношения между ∇p_0 и ∇p_c не установлены. Здесь ограничимся случаем $\nabla p_0 < \nabla p_c$, не конкретизируя при этом зависимость друг от друга. При $\nabla p < \nabla p_0$ очевидно, что фильтрационный процесс отсутствует. Рассмотрим различные ситуации, определяемые значением ∇p .

1. Пусть $\nabla p_0 < \nabla p < \nabla p_c$ ($\nabla p = \text{const}$). Тогда из (2.37) имеем $d\varepsilon/dt = -\varepsilon\omega_0$, решением которого является $\varepsilon = \varepsilon^0 \exp(-\omega_0 t)$, где ε^0 – начальная пористость, установленная до $t = 0$.

Как видно из последней зависимости, пористость монотонно снижается до полного исчезновения при $t \rightarrow \infty$.

Из (2.36), (2.19) получим

$$v = \frac{k_0 [\varepsilon^0 \exp(-\omega_0 t)]^n}{[1 - \varepsilon^0 \exp(-\omega_0 t)]^n} (\nabla p - \nabla p_0). \quad (2.38)$$

Как видно из (2.38), скорость фильтрации также полностью затухает при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим режим с постоянным v . Пусть $v = v' = \text{const}$. При этом предположим, что при $t = 0$ соответствующий заданной скорости градиент

давления не превышает ∇p_c . Выполнение условия $\nabla p(0) > \nabla p_0$ очевидно. Тогда из (2.37) определим тот же закон изменения ε , что и выше, т.е. $\varepsilon = \varepsilon^0 \exp(-\omega_0 t)$. Из (2.36) с учетом (2.19) получим

$$\nabla p = \nabla p_0 \frac{[1 - \varepsilon^0 \exp(\omega_0 t)]^2}{k_0 [\varepsilon^0 \exp(\omega_0 t)]^3} v'. \quad (2.39)$$

При $t = 0$ имеем

$$\nabla p(0) = \nabla p_0 + \frac{(1 - \varepsilon^0)^2}{k_0 (\varepsilon^0)^3} v'.$$

Согласно принятому выше допущению

$$\nabla p_0 + \frac{(1 - \varepsilon^0)^2}{k_0 (\varepsilon^0)^3} v' < \nabla p_c.$$

Как видно из (2.39) ∇p с ростом t монотонно возрастает. При этом для определенного $t = t_*$ становится $\nabla p(t) = \nabla p_c$ и при $t > t_*$ $\nabla p(t) > \nabla p_c$. Но при $\nabla p > \nabla p_c$ закон $\varepsilon = \varepsilon^0 \exp(-\omega_0 t)$ уже не справедлив. Отсюда ясно, что зависимость (2.39) справедлива для области $t > t_*$. Таким образом, режим чистой кольтации при $v = \text{const}$ с начальным $\nabla p(0) > \nabla p_c$ не может существовать бесконечно долго. Он, начиная с определенного момента времени, обязательно сменяется на режим кольтации с суффозией.

Пусть теперь $\nabla p_c < \nabla p$. Рассмотрим скачок перепада давления $\nabla p = \nabla p' = \text{const}$. Тогда решение (2.37) представится в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau'), \quad (2.40)$$

где $\tau' = [\omega_1(\nabla p' - \nabla p_c) + \omega_0]^{-1}$,

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_0 \omega_1 (\nabla p' - \nabla p_c)}{\omega_1 (\nabla p' - \nabla p_c) + \omega_0}.$$

Для скорости фильтрации, согласно (2.36), (2.35), получим

$$v = \frac{k_0 [\varepsilon' + (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')] (\nabla p' - \nabla p_0)}{[1 - \varepsilon' - (\varepsilon^0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')]^2}. \quad (2.41)$$

Соотношение (2.41) в общем виде выражает закон Дарси с переменным во времени коэффициентом фильтрации.

Характерное время релаксации τ' в (2.40) зависит от значения скачка перепада давления $\nabla p'$. Чем больше его значение, тем меньше τ' . Это приводит к исследованным ранее в [79] гистерезисным явлениям.

При $t \rightarrow \infty$ из (2.41) получим стационарную зависимость v от $\nabla p'$

$$v = \frac{k_0(\varepsilon')^3}{(1-\varepsilon')^2} (\nabla p' - \nabla p_0), \quad (2.42)$$

откуда с учетом (2.40)

$$v = \frac{k_0(\omega_0 \varepsilon_0)^3 (\nabla p' - \nabla p_c)^3 (\nabla p' - \nabla p_0)}{[\omega_1 (\nabla p' - \nabla p_c) + \omega_0][\omega_1 (1 - \varepsilon_0) (\nabla p' - \nabla p_c) + \omega_0]^2} \quad (2.43)$$

Зависимость (2.43) при больших $\nabla p'$ (вообще говоря, при $\omega_1 \nabla p' \gg \omega_0$) имеет асимптоту, уравнение которой есть

$$v = \frac{k_0 \varepsilon_0^3}{(1 - \varepsilon_0)^2} \left[\nabla p' - \left(\nabla p_0 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot \frac{3 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right) \right]. \quad (2.44)$$

Из (2.43) видно, что асимптота пересекает ось перепадов давления в точке

$$\nabla \bar{p}_0 = \nabla p_0 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot \frac{3 - \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0},$$

что может быть интерпретировано как динамическое значение предельного градиента давления. Схематически зависимость v от ∇p , согласно (2.42), показана на рис. 2.6. Из рисунка видно, что динамический предельный градиент давления больше, чем статический предельный градиент давления ∇p_0 .

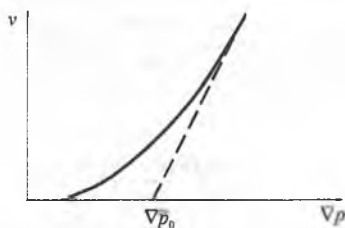


Рис. 2.6. Схематическая зависимость v от ∇p по (2.42)

Пусть теперь скачком меняется скорость фильтрации от v^0 до v' . Причем значение v' такое, что условие $\nabla p > \nabla p_0$ согласно (2.36), будет выполняться с момента приложения v' . Тогда уравнение (2.37) может быть записано

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega_0 \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon) \left(\gamma \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} - p_1 \right) - \varepsilon \right], \quad (2.45)$$

где

$$\gamma = \frac{\omega_1 v'}{k_0 \omega_0}, \quad p_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} (\nabla p_c - \nabla p_0).$$

Интегрируя (2.45), приходим к

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\xi^3 d\xi}{(1-p_1)\xi^4 + (p_1\varepsilon_0 + \gamma)\xi^3 - \gamma(2+\varepsilon_0)\xi^2 + \gamma(1+2\varepsilon_0)\xi - \varepsilon_0\gamma} = -\omega_0 t, \quad (2.46)$$

где ε_0 – стационарное значение пористости, соответствующее скорости фильтрации v^0 .

Изменение ε по t может быть определено из (2.46).

Интеграл в левой части (2.46) вычисляется точно. В зависимости от характера корней знаменателя подынтегрального выражения могут быть выведены различные уравнения, решая которые численными методами определяется $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Структура параметров ω_1 и ω_0 в общем случае может определиться целым комплексом величин рассматриваемого процесса. Ее выявление позволит обобщить уравнение (2.37), провести более глубокий анализ фильтрации с изучением конкретного влияния тех или иных параметров. В качестве такого обобщения рассмотрим зависимость параметра ω_0 от концентрации примесей в фильтрующейся жидкости. Интуитивно ясно, что коагуляция частиц происходит тем интенсивнее, чем выше их концентрация в фильтрующейся жидкости. С учетом этого уравнение (2.37) без учета эффектов с предельным градиентом давления как по течению, так и по сиффозии может быть записано в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\omega_1 \nabla p - \omega_0^* \beta n \varepsilon, \quad (2.47)$$

где ω_0^* – новый эмпирический параметр, β – объем поры, n – объемная концентрация частиц примеси в жидкости.

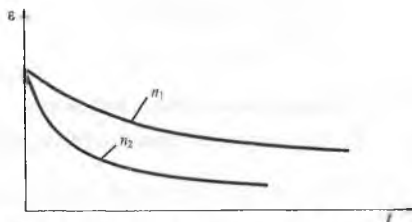


Рис. 2.7. Схематическая зависимость ε от t при $n_1 < n_2$

Уравнение (2.47) при $\nabla p = \text{const}$, $n = \text{const}$ с условием $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ имеет решение

$$\varepsilon = \varepsilon' + (\varepsilon_0 - \varepsilon') \exp -t/\tau', \quad (2.48)$$

где $\varepsilon' = \frac{\varepsilon_0 \omega_1 \nabla p}{\omega_1 \nabla p + \omega_0^* \beta n}$ – стационарное значение пористости, соответствующее

постоянному значению перепада давления ∇p и концентрации n . Время релаксации τ' в (2.48) определяется как

$$\tau' = (\omega_1 \nabla p + \omega_0^* \beta n)^{-1}. \quad (2.49)$$

Как видно из (2.49), с увеличением n время релаксации уменьшается. Стационарное значение пористости ε' также с увеличением n уменьшается. Схематически изменение ε по t при различных n показано на рис. 2.7.

Скорость фильтрации v определяется как

$$v = \frac{k_0 [\varepsilon' - (\varepsilon_0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')]^3}{[1 - \varepsilon' - (\varepsilon_0 - \varepsilon') \exp(-t/\tau')]^2} \nabla p. \quad (2.50)$$

В (2.47) можно рассматривать различные режимы изменения ∇p и n по времени. Пусть ∇p и n имеют гармоническую зависимость от t , т.е.

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla p^0 (1 + e_1 \sin \omega t), \\ n &= n^0 (1 + e_2 \sin \delta t), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $\nabla p^0, n^0$ – начальные значения ∇p и n^0 ; $e_1, e_2 < 1$.

Тогда (2.47) в безразмерных единицах принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 + e_1 \sin \Omega T) - B_\pi \varepsilon (1 + e_2 \sin \Delta T), \quad (2.52)$$

где

$$T = \omega_1 \nabla p^0 t, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1 \nabla p^0}, \quad \Delta = \frac{\delta}{\omega_1 \nabla p^0}, \quad B_\pi = \frac{n^0 \beta \omega_0^*}{\omega_1 \nabla p^0}.$$

Решением (2.52) определяем зависимость $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Скорость фильтрации в безразмерных единицах определяется как

$$\bar{v} = \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} (1 + e_1 \sin \Omega T), \quad (2.53)$$

где $\bar{v} = \frac{v}{k_0 \nabla p^0}$.

Аналогично можно рассматривать случай, когда вместо ∇p осциллирует скорость фильтрации $v = v^0 (1 + e_1 \sin \omega t)$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} (1 + e_1 \sin \Omega T) - B_\pi \varepsilon (1 + e_2 \sin \Delta T), \quad (2.54)$$

где

$$T = \frac{\omega_1 v^0 t}{k_0}, \quad \Omega = \frac{k_0 \omega}{\omega_1 v^0}, \quad \Delta = \frac{k_0 \delta}{\omega_1 v^0}, \quad B_\pi = \frac{\omega_0^* \beta n^0 k_0}{\omega_1 v^0}.$$

Перепад давления определяется из зависимости

$$\nabla p = \frac{(1 - \varepsilon)^3}{\varepsilon^3} (1 + e_1 \sin \Omega T). \quad (2.55)$$

где $\nabla \bar{p} = k_0 \nabla p / v^0$, а ε определяется из (2.54).

С целью исследования динамики пористости и скорости фильтрации по времени по формулам (2.52), (2.53) производились численные расчеты. Значения использованных в расчетах параметров следующие: $\varepsilon_1 = 0,5$, $\varepsilon_2 = 0,3$, $\Omega = 0,5$, $\Delta = 0,3$, $\varepsilon_0 = 0,3$. Значения B_* принимались различными. Результаты расчетов представлены на рис.2.8. Нетрудно заметить, что динамика как пористости, так и скорости фильтрации носит колебательный характер. Сопоставление графиков показывает, что с ростом B_* значения ε и v уменьшаются. Резкое снижение их значений происходит на начальной стадии процесса, когда колебательный режим еще не полностью сформировался. Как видно из рис.2.8а, в динамике скорости фильтрации возможна ситуация, когда текущее ее значение может стать больше, чем первоначальное, т.е. $v(T) > v(0)$.

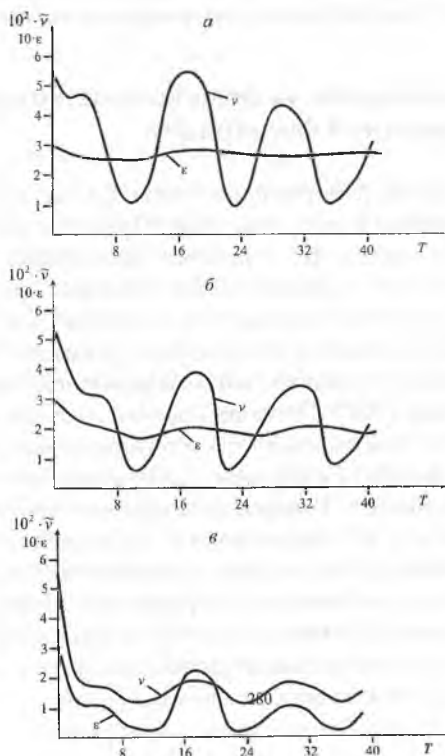


Рис. 2.8. Зависимость пористости ε и безразмерной скорости фильтрации $\bar{v}$ от T при гармоническом изменении ∇p и п. $B_* = 0,2$ (а), $0,4$ (б), $0,8$ (в)

Для обычного монотонного изменения ∇p , в частности при $\nabla p = \text{const}$ и $n = \text{const}$ этот эффект не наблюдается. Причиной этого явления является одновременное наступление режимов с минимальным n и максимальным ∇p в процессе их колебания. Эффект нельзя объяснить с точки зрения возможного роста ε в процессе колебания. Как видно из приведенных рисунков, текущее значение ε всегда меньше своего первоначального значения, т.е. $\varepsilon(T) < \varepsilon(0)$. Возникновение этого явления более вероятно при малых T , т.к. при больших T за счет снижения $\varepsilon(T)$ из-за кольтмации частиц одновременное наступление режимов с максимальным ∇p и минимальным n может не обеспечить увеличение v выше чем $v(0)$.

Аналогичным образом можно производить расчеты по формулам (2.54), (2.55). Можно также рассматривать другие режимы изменения ∇p , n , v . При этом возникающие трудности носят только вычислительный характер.

2.5. О модификации модели кольтмационно-суффозионной фильтрации

Здесь предлагается усовершенствованная модель процесса переноса взвесей твердых частиц в пористой среде. Предполагается, что пористая среда и суспензия таковы, что в процессе фильтрации последней часть твердого вещества взвеси задерживается пористой средой, часть ранее осевших частиц срывается и попадает в фильтрационный поток и часть проносится фильтрационным потоком дальше рассматриваемого участка.

Рассмотрим заполнение единицы объема порового пространства в процессе фильтрации согласно [228]. Пусть насыщенность порового пространства жидкостью равна ρ , тогда насыщенность его твердым веществом будет $1 - \rho$. Твердые частицы находятся в поровом пространстве либо в осевшем, либо во взвешенном состоянии. Насыщенность порового пространства осевшей массой в твердом теле обозначим через β а насыщенность взвешенными частицами – α . Насыщенность порового пространства осевшими частицами в рыхлом теле равна ζ , а насыщенность порового пространства «свободной» жидкостью, не связанной с осевшей массой (ε – пористость осевшей массы), а через δ обозначим объемную концентрацию взвешенного твердого вещества в движущейся смеси. Из этих определений следует, что

$$\begin{aligned} \rho + \alpha + \beta &= 1 & \text{и} & & \xi + \zeta + \alpha &= 1, \\ \beta &= \zeta - \varepsilon \zeta & \text{или} & & \zeta &= \frac{\beta}{1 - \varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\rho = 1 - \alpha - (1 - \varepsilon)\zeta \quad \text{и} \quad \rho = \xi + \varepsilon\zeta$$

Необходимо определить изменение объемной концентрации и всех насыщенных. Для этого, очевидно, достаточно найти величины δ и ζ в функции от координат и времени. Для решения этой задачи составим систему, состоящую из уравнения баланса, уравнения кинетики и закона Дарси. Уравнение баланса примем в том же виде, что и в известной модели Ю.М. Шехтмана [228], а именно:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = -B(t) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad B(t) = \frac{m_0(1 - \varepsilon)}{q(t)}, \quad B_1 = \frac{m_0}{q(t)}, \quad (2.57)$$

где m_0 – первоначальная пористость грунта, $q(t)$ – суммарный расход жидкой и твердой фаз через единичную площадь пористой среды.

Так как интенсивность процесса кольтматации или суффозии должна зависеть от усредненных значений δ и ζ в данном сечении и в данный момент времени, то уравнение кинетики может быть представлено в виде [228]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(\delta, \zeta). \quad (2.58)$$

Для определения функции $F(\delta, \zeta)$ будем считать, что частица взвеси попеременно осажается и срывается, т.е., попав в фильтрационный поток, частица продвинется на некоторый отрезок пути $l(x)$, затем задержится или осядет, вновь двинется и снова задержится и т.д.

Как и в [79, 197, 265] кинетику процесса осаждения частиц будем описывать вероятностным способом. Считаем, что каждая пора представляет собой ловушку для частиц примеси. Тогда пористую среду можно рассматривать как континуум ловушек, каждая из которых может быть свободна или занята. Если ловушка занята, протекание фильтрата через соответствующую пору отсутствует. Введем вероятности захвата w_0 ловушкой хотя бы одной частицы примеси и ее освобождения – w_1 в единицу времени. Вероятность захвата пор определяется как кинематическими, так и динамическими факторами. Из физических соображений ясно, что кольтматационные и суффозионные процессы зависят от градиента давления, причем чем больше $|\nabla p|$, тем меньше вероятность кольтматации и тем больше вероятность суффозии. Исходя из этого, положим

$$w_0 = \frac{w_0}{\eta_0 + \eta_1 |\nabla p|}, \quad w_1 = w_1 |\nabla p|, \quad (2.59)$$

где w_0 и w_1 – эмпирические постоянные, η_0 – параметр, характеризующий седиментационное осаждение частиц в порах, η_1 – параметр, характеризующий интенсивность влияния $|\nabla p|$ на кольтматацию.

Первое из равенств (2.59), отображает тот факт, что захват примеси порамиловушками осуществляется и в отсутствие фильтрационных потоков, а второе – допущение, что открытие пор осуществляется в результате срыва закупоривающих частиц примеси только под воздействием фильтрационного потока.

Используя (2.59), уравнение (2.58) запишем в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{\eta_0 + \eta_1 |\nabla p|} \delta - \zeta |\nabla p| \omega_1. \quad (2.60)$$

Первый член в правой части уравнения (2.60) характеризует процесс осаждения частиц. Интенсивность процесса кольтации увеличивается с возрастанием концентрации δ и уменьшается с увеличением $|\nabla p|$. В случае отсутствия потока ($|\nabla p| = 0$) наблюдается седиментационное осаждение частиц, что объясняет введение параметра η_0 . С помощью же дополнительного параметра η_1 возможно варьирование интенсивности влияния градиента давления ∇p на процесс кольтации. Второй член в правой части (2.60) отображает процесс срыва, вымывания частиц из пор. Понятно, что процесс суффозии напрямую зависит от насыщенности порового пространства осевшими частицами Q . Кроме того, увеличение ∇p обуславливает возрастание интенсивности процесса срыва частиц.

Уравнение (2.60) запишем в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \quad (2.61)$$

где $\gamma = \eta_1 / \eta_0$, а под ω_0 теперь следует понимать ω_0 / η_0 .

При учете предельного суффозионного градиента давления – $|\nabla p_0|$, введенного в [197], (2.61) можно написать как

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_0|) \zeta. \quad (2.62)$$

Закон фильтрации запишем в виде

$$v = K(m) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \quad m = m_0 (1 - \beta), \quad (2.63)$$

где $K(m)$ – коэффициент фильтрации, принимаемый в линейном [79] $K(m) = k_0 m$, $k_0 = \text{const}$ или в нелинейном виде [196].

В (2.63) в отличие от [228] считается, что активная пористость уменьшается только за счет осевших в порах твердых частиц.

Система уравнений (2.57), (2.61) или (2.62), (2.63) составляет математическую модель процесса, на основе которой может быть исследована динамика δ , ζ и других фильтрационных показателей. Остальные параметры можно определить в соответствии с (2.56). Конкретные задачи для этой системы уравнений можно поставить аналогично с [182, 196, 205, 228].

Глава 3.

О моделях кольматационно-суффозионной фильтрации ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

3.1. Кольматационно-суффозионная фильтрация

3.2. О моделях кольматационно-суффозионной фильтрации

3.3. О методах решения задач кольматационно- суффозионной фильтрации

3.4. Дифференциальные приближения для задач кольматационно-суффозионной фильтрации

В данной главе сначала на основе известных литературных источников приводятся общие сведения о кольтматационно-суффозионной фильтрации. Затем дается краткий анализ моделей кольтматационно-суффозионной фильтрации и методов их реализации. В отдельном параграфе выведены дифференциальные приближения при решении задач кольтматационно-суффозионной фильтрации конечно-разностным методом.

3.1. Кольтматационно-суффозионная фильтрация

При фильтрации жидкости, содержащей твердые взвешенные частицы, происходит изменение основных физических свойств пористой среды – пористости, проницаемости, объемного веса и др. Такие изменения называются фильтрационными деформациями грунта [228].

К фильтрационным деформациям относятся заиливание или кольтматация грунта, вынос мелких частиц из пористой среды и др.

Различают равномерную и неравномерную фильтрационные деформации. Под равномерной фильтрационной деформацией подразумевается такая деформация, в которой поперечное сечение фильтра ω [83] изменяется только во времени, но не изменяется по координате, т.е. $d\omega/dx = 0$. В неравномерной фильтрационной деформации поперечное сечение фильтрации изменяется как во времени, так и по длине.

В качестве равномерной фильтрационной деформации можно считать случай «чистой» суффозии, когда по длине порового канала равномерно срываются мелкие частицы, которые больше не осаждаются, а выносятся фильтрационным потоком за пределы рассматриваемого участка пористой среды [228]. Как пример неравномерной фильтрационной деформации может служить случай суффозии, когда мелкие частицы срываются и осаждаются в процессе фильтрации и степень заполнения порового канала изменяется как во времени, так и по координате.

В работе А.Н.Патрашева [138] рассмотрено напорное ламинарное движение жидкости с взвешенными твердыми частицами через пористые среды и сделана попытка определить зависимости между основными элементами потока.

Забивание и освобождение порового пространства сред от частиц примеси имеет важное значение в технике и технологии процессов, основанных на фильтрации дисперсных систем.

Процессами осаждения частиц в пористой среде, и тем самым забиванием порового пространства, а также освобождением последнего приходится постоянно встречаться при бурении нефтяных и газовых скважин. В отдельных ситуациях технологией бурения скважин предусматривается направленная кольматация пластов с целью предупреждения осложнений, связанных с уходом бурового раствора в проницаемые пласты. Некоторые технологические вопросы, связанные с кольматацией и суффозией отражены в источниках [47, 58, 75, 112, 126, 159, 168, 195, 206].

Следующая область использования процессов фильтрации дисперсных систем – это гидротехника, мелиорация и охрана окружающей среды. Отметим некоторые работы, посвященные этой тематике [16, 91, 92, 94, 96, 133, 145, 165, 167, 229]. Здесь также, если для одних процессов кольматация выступает в роли положительного фактора, то для других – отрицательного.

Процесс суффозии, т.е. вынос частиц из пор среды фильтрационным потоком имеет также важное значение для многих технических приложений.

Весьма важным для практики является определение количества кольматирующего материала, когда движение суспензии происходит с целью борьбы с фильтрацией воды из каналов и водоемов. Подобные исследования были проведены Т.А.Неговской [125, 140].

При проведении этих опытов замерялось изменение расхода воды в процессе кольматации грунта, коэффициента фильтрации по глубине кольматируемого грунта и во времени, а также определялось количество затрачиваемой глины для кольматирования единицы поверхности грунта.

Большой интерес представляет экспериментальное исследование В.П.Крыштуля [97], который убедительно показал, что для суспензий, имеющих место в водопроводной практике, главной причиной задерживания частиц взвеси пористой средой является прилипание этих частиц к частицам песка и к осевшим частицам суспензии.

Значительная экспериментальная работа по исследованию засорения песчаных фильтров речной водой была выполнена Р.Елиассеном [251]. Характер этих опытов заключался в следующем. Экспериментальный

фильтр прямоугольного поперечного сечения, имеющего площадь 0,18766 м², с тремя металлическими и одной стеклянной стенками был расположен вертикально. По высоте фильтра, равной 0,6 м, было расположено для измерения давления пять пьезометров, которые одновременно служили и для отбора проб движущейся смеси. Фильтр наполнялся отсортированным песком с эффективным диаметром, равным 0,46 мм. Начальная средняя пористость уложенного песка равнялась 40,8 %. Через фильтр пропускалась речная вода, содержащая (после ее отстоя) взвешенные частицы по объему около 0,005 %. При этом время засорения фильтра около 100-120 час. Через все пять трубок после соответствующей подготовки фильтра в разные моменты времени отбирались пробы движущейся в фильтре смеси. Затем каждая проба исследовалась на содержание в ней железа, по которому определялись значения объемной концентрации суспензии. В течение каждого опыта делались два или три микроскопических анализа для определения среднего размера делалась взвешенных частиц в отбираемых пробах.

По данным опытов составлялись таблицы значений концентрации δ в разные моменты времени и на разных глубинах фильтра, на основе которых построены графики (рис.3.1). Общий расход фильтрации поддерживался с помощью регулятора скорости постоянным, а давление соответственно изменялось.

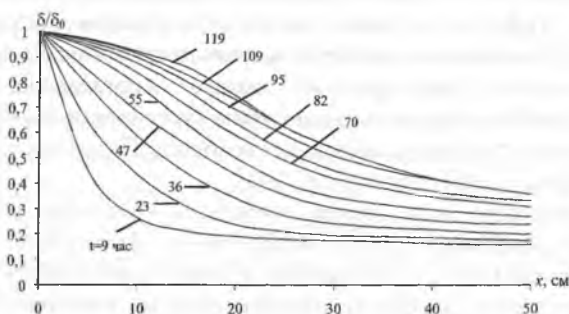


Рис.3.1. Изменение объемной концентрации по длине пути фильтрации в различное время (Опыты Елиассена, $\delta_0 = 0,00005$)

Результаты работы Елиассена дали возможность построить суммарные зависимости объемной концентрации фильтрующейся смеси от пути фильтрации и времени и на основе этого получить приближенное решение задачи [227].

В [228] также построены кривые $\delta = \delta(x)$ и исследовано изменение давления по длине (рис.3.2).

Рассмотрим некоторые имеющиеся формулы для определения величин критических скоростей, при которых начинается нарушение равновесия мелкой частицы грунта, расположенной в поровых каналах скелета.

Н.Н.Павловский [136] в результате обработки опытов Пахкера, Бересфорда и Руссела нашел, что значение критического градиента J_{kp} , при котором начинают выноситься частицы грунта размером от 0,25 до 1 мм, определяется диаметром частицы d . Тогда значение критической скорости по закону Дарси будет равно

$$v_{kp} = R_f J_{kp} \quad (3.1)$$

где R_f – коэффициент фильтрации грунта.

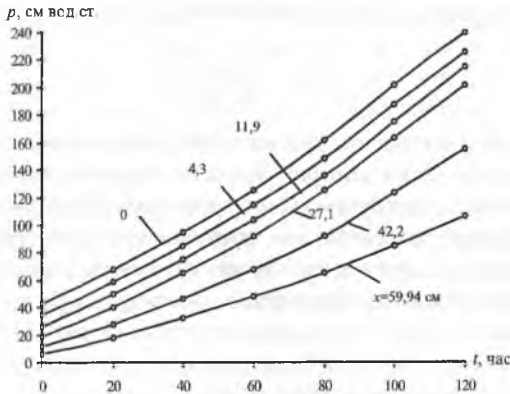


Рис.3.2. Потеря давления во времени на различных глубинах фильтра (Цифры на графиках означают глубину фильтра в см)

В.Зихард [278] исследовал вопрос о величине критической скорости, при которой начинается вынос частиц грунта внутрь колодцев, и нашел, что предельный дебит колодца, при котором начинается вымыв частиц песка, равен

$$q = \pi d_k h_0 J_{kp} R_f \quad (3.2)$$

откуда

$$J_{kp} = \frac{q}{\pi d_k h_0 R_f} \quad (3.3)$$

Здесь J_{kp} – предельный градиент в месте выхода грунтовой воды в колодец; q – расход воды, откачиваемой из колодца; d_k – диаметр колодца; h_0 – глубина воды в колодце.

Н.В.Бобков и Н.Н.Бендеман [30, 31] предложили пользоваться для определения допустимых скоростей формулой Стокса, устанавливающей

зависимость между скоростью падения твердых частиц в стоячей воде и диаметром этих частиц. Формула Стокса может быть записана в виде

$$v = \frac{g(\gamma_1 - \gamma)d^2}{18\mu}, \quad (3.4)$$

где v – скорость падения твердых частиц грунта в стоячей воде; g – ускорение силы тяжести; γ_1 – удельный вес частиц грунта; γ – удельный вес воды; d – диаметр падающих частиц грунта; μ – коэффициент вязкости воды.

Для определения начала выноса частиц из слоя мелкозернистого грунта (от $d \leq 0,088$ мм до $d = 0,3-0,5$ мм) в слой смежный крупнозернистый (гравий от $D = 2,0-3,0$ мм до $D = 12,0-15,0$ мм) при направлении потока вертикально снизу вверх перпендикулярно слоям С.В.Избаш [84] предложил следующую формулу

$$v_b = v_0 - A \left(\frac{d^2}{D^2} \right), \quad (3.5)$$

где v_b – скорость фильтрации, при которой происходит вынос частиц; v_0 – значение скорости, при которой будет преодолена составляющая веса частиц в воде и некоторые начальные обстоятельства деформации.

При фильтрации суспензии, как правило, при постоянном перепаде давления скорость фильтрации монотонно снижается. При этом возможны различные ее динамики. При фильтрации полимерных растворов и нефтей в пористой среде, состоящей из кварцевого песка [3, 14, 131], наблюдалось монотонное снижение скорости фильтрации до некоторого стационарного значения при постоянном перепаде давления.

Одна из таких моделей предложена в [79], где, используя вероятностный подход, моделируется процесс изменения пористости среды во времени. Пористая среда рассматривается как континуум ловушек для частиц примеси, каждая из которых соответствует одной поре. Если пора закрыта частицей, то полагается, что она захвачена соответствующей ловушкой. Основные сведения об этой модели приведены в разделе 2.2.

3.2. О моделях кольматационно-суффозионной фильтрации

В [49, 269, 259] рассматривается система уравнений фильтрации дисперсных жидкостей через однородные пористые среды с учетом явлений кольматации и суффозии. Данная система в одномерном случае имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v(t)}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 P - \omega_2 \varepsilon n, \quad P = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|, \\ v(t) &= K(\varepsilon) P, \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

где p – давления; t – время; x – линейная координата; D – коэффициент конвективной диффузии; ε_0 – первоначальная пористость среды; ω_1, ω_2 – коэффициенты, определяющие интенсивность суффозии и кольтматации; $K(\varepsilon)$ – коэффициент фильтрации; $v(t)$ – скорость фильтрации; n – объемная концентрация частиц в потоке фильтруемой жидкости.

В отличие от систем уравнений сорбции газа в (3.6) рассматриваются динамические фильтрационные характеристики среды одновременно с эффектами кольтматации и суффозии. Кроме того, в кинетическом уравнении (второе уравнение системы (3.6)) явление суффозии рассматривается как динамическая характеристика, определяемая, помимо прочих факторов, и перепадом давления.

В кинетическом уравнении в режимах с заданными давлениями на концах модели или с заданным $v(t)$ принято $P = \text{const}$. Однако только при $|\partial \varepsilon / \partial x| \ll 1^{-1}$ и малых ω_2 можно положить $P = \text{const}$. Кроме того, во втором члене справа положено $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. Тогда первые два уравнения систем (3.6) записываются в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 P - \omega_2 \varepsilon_0 n, \quad P = \text{const}. \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Как отмечено в 3.1, в работе [108] рассмотрена модель, постановка задачи, на основе которой сведено к интегрированию дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial \delta}{\partial x} + b \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0, \quad (3.8)$$

где δ – концентрация смеси, a и b – опытные параметры, причем a характеризует интенсивность срыва, а b характеризует свойства пористой среды и суспензии в отношении задерживания взвешенных частиц.

В результате интегрирования уравнения (3.8) получено решение в виде ряда

$$\delta = \delta_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(bx)^{n-1}}{(n-1)!} T_n e^{-\mu n}, \quad (3.9)$$

где функция T_n определяется выражением

$$T_n = T_{n-1} - \frac{(at)^{n-2}}{(n-2)!}, \quad T_1 = e^{at}. \quad (3.10)$$

В этом решении предполагается, что скорость фильтрации существенно не влияет на задерживание частиц, и при составлении уравнения этот фактор не учтен.

Более обоснованная модель фильтрации суспензий дана Ю.М.Шехтманом [228]. Он отдельно составляет уравнения неразрывности для жидкой и твердой фаз.

Уравнение неразрывности потока для жидкой фазы записывается в виде

$$\nabla(\bar{q}_f, \gamma_f) = -\frac{\partial}{\partial t}(m\gamma_f), \quad (3.11)$$

где $\bar{q}_f$ – расход жидкости через единицу поверхности поперечного сечения кольтатируемой среды; γ_f – вес единицы объема фильтрующейся жидкости.

Для несжимаемой жидкости ($\gamma_f = \text{const}$) уравнение (3.11), учитывая равенство $m = m_0\rho$, запишется в виде

$$\nabla\bar{q}_f = -m_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Уравнение неразрывности для твердой фазы записано в виде

$$\nabla(\bar{q}_T, \gamma_T) = -m_0 \frac{\partial}{\partial t}[\gamma_T(1-\rho)]. \quad (3.13)$$

Здесь γ_T – вес единицы объема твердого вещества.

При $\gamma_T = \text{const}$ уравнение (3.13) запишется в виде

$$\nabla\bar{q}_T = m_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) и есть уравнение неразрывности для твердой фазы.

Кроме этого в модели Ю.М.Шехтмана используются уравнения движения для жидкой и твердой фаз.

Для рассматриваемого движения жидкости закон Дарси записан в виде

$$q_f = -\frac{k}{\mu} |\nabla p|, \quad (3.15)$$

где k – коэффициент проницаемости пористой сред для жидкости в процессе фильтрации смеси, который является переменной величиной в процессе фильтрации и зависит главным образом от насыщенности порового пространства осевшей массой $\bar{\zeta}$.

Для определения расхода твердых частиц, несущихся фильтрационным потоком через единицу поверхности поперечного сечения пористой среды, использовано уравнение для определения концентрации движущегося твердого вещества в фильтрующейся смеси

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha + \xi} \quad (3.16)$$

Примем, что твердые взвешенные частицы распределены равномерно по поперечному сечению пористой среды, и обозначим истинную скорость движения жидкости в незаиленной части пор через $\bar{v}_f$, а в заиленной части пор через $\bar{v}'_f$, истинную скорость движения взвешенных твердых частиц в пористой среде обозначим через $\bar{v}$. Тогда получим значение единичного жидкого расхода равным

$$\bar{q}_f = \xi \bar{v}_f + \varepsilon \xi \bar{v}'_f$$

и значение единичного расхода твердых частиц равным

$$\bar{q}_T = \alpha \bar{v}_f,$$

откуда будем иметь

$$\xi = \frac{\bar{q}_f - \varepsilon \xi \bar{v}'_f}{\bar{v}} \quad (3.17)$$

$$\alpha = \frac{\bar{q}_T}{\bar{v}_T} \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) и (3.18) в (3.16), получим

$$\delta = \frac{\bar{q}_T}{\bar{v}_T} = \frac{q_T}{\bar{v}_1 \left[\frac{\bar{q}_T}{\bar{v}_f} + \frac{\bar{q}_f - \varepsilon \xi \bar{v}'_f}{\bar{v}'_f} \right]} \quad (3.19)$$

На основе уравнений движения и неразрывности при $\delta \ll 1$ получено

$$q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = m_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) является уравнением баланса и связывает в дифференциальной форме две искомые величины – объемную концентрацию взвешенного твердого вещества в движущейся смеси δ и насыщенность порового пространства жидкостью ρ .

Это уравнение записано в несколько другой форме

$$q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = -m_0(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (3.21)$$

или

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = -B(t) \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad B(t) = \frac{m_0(1 - \varepsilon)}{q(t)} \quad (3.22)$$

При постоянном расходе $q(t) = q_0 = \text{const}$ будем иметь

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad B = \frac{m_0(1 - \varepsilon)}{q_0} = \frac{1 - \varepsilon}{v_0} \left(v_0 = \frac{q_0}{m_0} \right) \quad (3.23)$$

Уравнение (3.22) является уравнением баланса, связывающим в дифференциальной форме две искомые величины δ и ζ .

Дополнительно к уравнению баланса в работе [137] используется уравнение, характеризующее кинетику забивания и освобождения пор.

Так как интенсивность процесса кольтматации или суффозии должна зависеть от осредненных значений δ и ζ в данном сечении и в данный момент времени, то второе уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(\delta, \zeta). \quad (3.24)$$

Отмечено, что процесс фильтрации жидкости, содержащей взвешенные твердые частицы, сопровождается или выпадением из потока мелких частиц или, наоборот, срывом ранее осевших частиц и попаданием их обратно в фильтрующий поток.

Первое явление, называемое кольтматацией, происходит вследствие воздействия на частицу сил тяжести, трения, а также некоторых физико-химических фактов.

В работах [45, 56] доказывается, что физическими причинами задерживания взвешенных твердых частиц пористой средой является адсорбция взвешенных частиц на поверхности песчаных частиц скелета и ранее осевших частиц взвеси, а также механическое взаимодействие между частицами взвеси и частицами скелета.

Второе явление, называемое суффозией или вымывом, происходит когда находящиеся в покое в порах грунта мелкие частицы подвергаются воздействию фильтрационного потока, движущегося со скоростями, большими критических.

Величина критической скорости при этом зависит от размера и формы частиц и порового канала, а также от упомянутых выше сил и факторов.

Как следует из работ [227, 228], для определения функции $F(\delta, \zeta)$ в (3.16) могут быть приняты следующие гипотезы:

1) при исследовании первого явления – кольтматации может быть сделано предположение, что частица взвеси, будучи задержанной пористой средой, больше потоком не срывается (подобная гипотеза была в работах [48, 227]);

2) при исследовании второго явления – суффозии – может быть сделано предположение, что твердая частица, будучи сорванной потоком, больше пористой средой не задерживается (подобная гипотеза была принята в работе [226]);

3) при исследовании более общего случая, когда происходит одновременно и задерживание и срыв частиц, может быть принята следующая гипотеза: т.е.,

попав в фильтрационный поток, частица продвинется на некоторый отрезок пути $l(x)$, затем задержится или оседет, вновь двинется и сделает следующую перебежку, снова задержится и т.д. (при подобной гипотезе задача решалась в [107, 109, 225, 226]).

При фильтрации суспензии, как правило, при постоянном перепаде давления скорость фильтрации монотонно снижется. При этом возможны различные ее динамики. Например, при фильтрации полимерных растворов и нефтей в пористой среде, состоящей из кварцевого песка [3, 14, 131, 197], наблюдалось монотонное снижение скорости фильтрации до некоторого стационарного значения при постоянном перепаде давления.

Несостоятельность гипотетических релаксационных моделей для описания процесса фильтрации суспензий очевидна. Модель в явном виде должна учитывать процесс отложения частиц суспензии в порах сред и их отрыв, «проскок» через поры. Другими словами, явления кольтации и суффозии должны быть учтены и рассматриваться как один из возможных механизмов релаксации.

Проблема моделирования релаксационных явлений при фильтрации дисперсных жидкостей является актуальной проблемой, не получившей своего принципиального разрешения до настоящего времени.

Проблема актуальна также в связи с ее большим прикладным значением. Некоторые направления техники, где непосредственно используются процессы фильтрации дисперсных систем – это бурение нефтяных и газовых скважин, разработка нефтяных и газовых месторождений [110], гидротехника, мелиорация, охрана окружающей среды и др. [133, 167].

Первые систематические исследования процессов фильтрации жидкостей с твердыми взвешенными частицами приведены в [108, 228]. Недостатки моделей [108, 228] изучены в [196]. В [196] предложена модель фильтрации дисперсных систем с распределенными параметрами, использующая кинетическую модель изменения пористости за счет кольтации и суффозии пор [79].

Далее данная кинетическая модель была обобщена на случай фильтрации с учетом явлений предельного градиента давления, образующегося за счет структурообразования в флюиде, и предельного суффозионного градиента давления [197].

Как отмечено в [197], предположение о том, что срыв захваченных в порах частиц происходит пропорционально $|\nabla p|$, вообще говоря, не всегда справедливо. Это объясняется тем, что для срыва частиц, захваченных ранее порой-ловушкой, необходимо приложить определенное усилие. При

малых градиентах давления сила, стремящаяся срывать частицу, может оказаться недостаточной и при неизменном градиенте давления частицы могут оставаться в порах захваченными. Существует некоторое пороговое значение градиента давления $|\nabla p_c| \sim f_c / \beta$, где f_c – сила сцепления частицы в ловушке, β – объем поры-ловушки, разделяющей область наличия и отсутствия суффозии.

В [268] рассматривается система уравнений кольматационно-суффозионной фильтрации с уравнением баланса вещества как в [228], но с новым кинетическим уравнением с учетом предельных градиентов давления по суффозии и потоку. Некоторые задачи для этой системы решены в [210, 267]. Модель многокомпонентной кольматационно-суффозионной фильтрации предложена в [194].

3.3. О методах решения задач кольматационно-суффозионной фильтрации

Ю.М.Шехтман для решения системы уравнений использует операционный метод [57].

При определенных предположениях о системе уравнений кольматационно-суффозионной фильтрации в работе [196] получено решение в виде бегущих волн. При этом при замене в левой части системы ε на ε_0 получено решение в виде

$$\frac{x-ut}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \ln \frac{2\varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} + \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \ln \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}{2\varepsilon_{st}} \right) + \ln \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{st})^\alpha (\varepsilon_{st} - \varepsilon)}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{x-ut}{r} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \ln \frac{2\varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} + \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \ln \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}{2\varepsilon_{st}} \right) + \\ & (n_0 - n)^\alpha \cdot \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} n_0 - n \right)^\gamma + \ln \frac{\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} n_0 - n \right)^\gamma}{n^\beta}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_{st}}{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{st}^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{st})}, \quad r = \frac{\varepsilon_0 \mu (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}{\omega_2 n_0}.$$

При этом скорость распространения фронта u – определяется по формуле

$$u = \frac{V_0 n_0}{\varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \quad (3.27)$$

Градиент давления определяется из закона Дарси при известном $\varepsilon: \nabla p = v_0 / (k_0 \varepsilon)$.

В работе [196] для решения системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v(t)}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 P - \omega_2 \varepsilon n, \quad P = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$v(t) = K(\varepsilon) \cdot P,$$

использован метод конечных разностей [106, 156, 157].

Пусть задача рассматривается в области $\Omega = [0, T] \times [0, X]$, где T – верхняя граница времени, X – верхняя граница координаты x ; значение T выбирается произвольно, а X так, чтобы оно было достаточно большим и $[0, X]$ охватывал интервал распространения волны как по n , так и по ε за промежутки времени $[0, T]$.

Аппроксимируем (3.28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} (n_i^{j+1} - n_i^j + n_{i+1}^{j+1} - n_{i+1}^j) + \frac{v_y}{\varepsilon_y} \cdot \frac{1}{2h} (n_{i+1}^j - n_i^j + n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1}) &= \\ = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2\tau} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_{i+1}^j), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{2\tau} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_{i+1}^j) = (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \frac{\omega_1 v_0}{k_y} \cdot \frac{(1 - \tilde{\varepsilon}_y)^j}{\tilde{\varepsilon}_y^3} - \omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y,$$

$$\tilde{\varepsilon}_y = \frac{1}{3} (\varepsilon_i^j + \varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^j), \quad \tilde{n}_y = \frac{1}{3} (n_i^j + n_i^{j+1} + n_{i+1}^j).$$

Условия $n(-\infty) = n_0$, $n(\infty) = 0$, $\varepsilon(-\infty) = \varepsilon_{st}$, $\varepsilon(\infty) = \varepsilon_0$ принимают вид

$$\varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, \quad n_i^0 = 0, \quad n_i^j = n_0, \quad i = 0, I, \quad j = 0, J.$$

$$\varepsilon_0^j = \varepsilon_{st},$$

где ε_{st} – стационарное значение пористости.

Из (3.29) можно получить формулы, явно выражающие неизвестное решение $(j+1)$ -го слоя через известные решения j -го слоя

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^{j+1} &= \varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^j + \frac{2\tau\omega_1 v_0}{k_0} \cdot \frac{(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y)(1 - \tilde{\varepsilon}_y)}{\tilde{\varepsilon}_y^3} - 2\tau\omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y, \\ n_{i+1}^{j+1} &= n_i^j + \frac{1}{1 + a_{ij}} \left[(\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_{i+1}^j) / \varepsilon_0 + (1 - a_0)(n_{i+1}^{j+1} + n_i^{j+1}) \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $a_{ij} = v_0 \tau / (h \tilde{\varepsilon}_y)$.

Разностная схема (3.29) имеет ряд преимуществ перед схемами первого порядка точности на основе шаблонов, приведенных на рис.3.3.

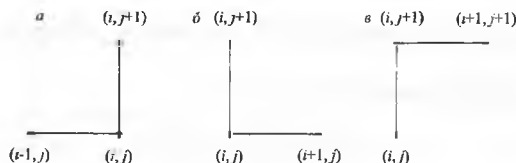


Рис.3.3. Шаблоны для схем первого порядка точности

С другой стороны, (3.29) имеет и некоторые существенные недостатки. Она, как и другие аналогичные схемы второго порядка точности, требует большей гладкости решения [137], поскольку в ошибку аппроксимации входят производные более высоких порядков. При недостаточной гладкости решения формальное повышение точности схемы может привести к увеличению фактической погрешности и искажению решения. Реализация разностной схемы (3.29) показала, что при значениях n , близких n_0 , схема дает сеточное решение плохого качества. В указанной области заметно нарушается монотонность решения, обнаруживается осцилляция, достигающая 30-40% [172]. Особенно это заметно для случаев с сильной кольматацией, что имеет место при относительно больших n_0 и ω_2 . Таким образом, схема второго порядка точности (3.29) является нерегулярной.

Для регуляризации схем второго порядка точности применяются различные методы [137].

3.4. Дифференциальные приближения для задач кольматационно-суффозионной фильтрации

Здесь построим дифференциальные приближения для задач кольматационно-суффозионной фильтрации.

Рассмотрим первое дифференциальное приближение для системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{\omega_1 v_0 (1 - \varepsilon)^2}{k \varepsilon^2} - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= k_0 \varepsilon^3 |\nabla p| / (1 - \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Используем следующие разложения:

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{h} [n(t, x) - n(t, x - h)] + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 n(t, x)}{\partial x^2} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [n(t + \tau, x) - n(t, x)] - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 n(t, x)}{\partial t^2} + O(\tau^2),$$

$$\frac{\partial \varepsilon(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [\varepsilon(t + \tau, x) - \varepsilon(t, x)] - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(t, x)}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Подставляя их в (3.34), получим

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{v_0}{\varepsilon} \left(\frac{n_i^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right) / \varepsilon_0. \quad (3.32)$$

При выводе (3.32) использован шаблон, аналогичный а (рис.3.3) с узловыми точками $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, (i, j) .

Главная часть ошибки аппроксимации в (3.32) есть

$$R = -\frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right) + \frac{v_0 h}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (3.33)$$

Из первого уравнения, дифференцируя по t , имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t^2} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} - \frac{v_0}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{v_0}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} \right). \quad (3.34)$$

Производим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega_1 v_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_0 k_0 \varepsilon^3} - \frac{\omega_2 \varepsilon n}{\varepsilon_n} - \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} \right] = \\ &= F'(\varepsilon) - \frac{\omega_2}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{v_0}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\text{где } F'(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\omega_1 v_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon_0 k_0 \varepsilon^3} \right].$$

С учетом (3.34), (3.35) для ошибки аппроксимации, согласно (3.33), получим следующее выражение:

$$R = -\frac{v_0}{2\varepsilon} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} + F(\varepsilon) \right] + \frac{\omega_2 \varepsilon}{\varepsilon_n} \left(\varepsilon \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{v_0 h}{2\varepsilon} \left(\frac{v_0}{\varepsilon h} - 1 \right) \frac{\partial^2 n}{\partial t^2},$$

где

$$F(\varepsilon) = \frac{\omega_1 v_0}{\varepsilon_0 k_0 \varepsilon^3} (1 - \varepsilon) [(2\varepsilon_0 - 3\varepsilon + 1)\varepsilon + 3(\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

Принимая во внимание полученное выражение ошибки аппроксимации, уравнение (3.32) запишем в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{v_0}{2\varepsilon^2} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} + F(\varepsilon) + \frac{\omega \varepsilon}{\varepsilon_n} \left(\varepsilon \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} \right] + \\ + \frac{v_0 h}{2\varepsilon} \left(\frac{v_0}{\varepsilon h} - 1 \right) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Уравнение (3.36) решается при условиях

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, x) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon(t, \infty) = \varepsilon_0, \\ n(0, x) = 0, \quad n(t, 0) = n_0, \quad n(t, \infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Уравнение (3.36) является первым дифференциальным приближением разностной схемы первого порядка относительно τ и h системы (3.31). Как видно из этого уравнения, первое дифференциальное приближение является гораздо сложным уравнением по сравнению с исходным. Поэтому можно сделать вывод, что улучшение свойств разностной схемы достигается очень дорогой ценой и, естественно, исследование задачи (3.36), (3.37) вместо исходной является нерациональным.

В качестве другого, более приемлемого варианта можно рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (3.38)$$

где D – малый параметр.

Добавленный член в (3.38) обеспечивает диссипативный характер решения, т.е. регуляризует разностную схему. Степень регуляризации зависит от значения D . При очень больших D низкочастотные составляющие решения могут быть подавлены, а при слишком малом D эффект регуляризации может быть недостаточным. Поэтому его значение подбирается на основе вычислительных экспериментов. При этом решение должно реагировать на изменение D слабо.

Глава 4.

Задачи фильтрации с учетом кольтматации и суффозии

- 4.1. Модель фильтрации с учетом кольтматации и суффозии и корректная постановка задач**
- 4.2. Задача кольтматационной фильтрации с заданным скоростным режимом**
- 4.3. Задача кольтматационно-суффозионной фильтрации для конечного пласта с заданным режимом по давлению**
- 4.4. Кольтматационная фильтрация с учетом эффектов конвективной диффузии**
- 4.5. Кольтматация и суффозия в неоднородной по размерам пор среде**

В данной главе разрабатываются модели фильтрации с распределенными параметрами, учитывающие процессы кольтмации и суффозии. При этом наряду с уравнением баланса, законом фильтрации используется уравнение кинетики пористости, выведенное в главе 3. Исследована корректность постановок задач для разработанной модели. Работоспособность моделей проверена на специальных задачах, поставленных для различных режимов заданий скорости фильтрации и давления. Учет конвективной диффузии в пористой среде осуществлен в сочетании с эффектами кольтмации и суффозии. Одновременное влияние этих факторов привело к новому эффекту, отличающемуся от самостоятельного влияния конвективной диффузии. Дано обобщение модели на случай неоднородной по размерам пор среды. Схематизация данной неоднородной среды как слоистой среды с различными емкостными, кольтмационно-суффозионными характеристиками позволила модельно описать тенденцию расширения зоны отложения частиц примеси, что хорошо согласуется с известными экспериментальными результатами.

4.1. Модель фильтрации с учетом кольтмации и суффозии и корректная постановка задач

Здесь предложена система уравнений фильтрации дисперсных жидкостей через однородные пористые среды с учетом явлений кольтмации и суффозии. Из уравнений системы относительно объемной концентрации дисперсных частиц в фильтруемой жидкости – n и текущей пористости среды – ε составлены отдельные уравнения, содержащие только производные n и ε . Выявлен релаксационный характер этих уравнений. Путем анализа уравнений определены условия, имеющие место на поверхности разрыва. Учитывая установленные специфические особенности уравнений, обсуждены вопросы корректной постановки задач.

Система уравнений фильтрации дисперсных жидкостей при учете эффектов коьматации и суффозии может быть составлена на основе уравнений материального баланса вещества, кинетики процессов коьматации, суффозии и закона Дарси. Характерной особенностью фильтрации является переменность пористости среды за счет одновременно происходящих процессов коьматации и суффозии, что должно найти свое отражение в законе Дарси.

Используя кинетическое уравнение, предложенное в [79], запишем систему в одномерном случае в виде [200]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v(t)}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \cdot P - \omega_2 \varepsilon n, \quad P = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$v(t) = K(\varepsilon) \cdot P,$$

где p – давление, t – время, x – координата, D – коэффициент конвективной диффузии.

Первые два уравнения системы (4.1) внешне аналогичны системе уравнений сорбции газа в пористой среде [76]. Однако (4.1) имеет принципиальные отличия от упомянутой системы. Здесь рассматриваются динамические фильтрационные характеристики среды одновременно с эффектами коьматации и суффозии, в то время как в известных системах уравнений сорбции изменение фильтрационных характеристик за счет сорбции не принимается во внимание. Кроме того в кинетическом уравнении (второе уравнение (4.1)) явление суффозии рассматривается как динамическая характеристика, определяемая помимо прочих факторов перепадом давления. Конвективный член в левой части первого уравнения имеет переменный коэффициент $v(t)/\varepsilon$, который в отличие от известных систем сорбции зависит от текущей пористости.

Рассмотрим свойства и особенности постановок задач для системы (4.1). В первую очередь заметим, что в пористой среде могут быть созданы два режима: а) в какой-то точке x задается скорость фильтрации $v(t)$; б) в двух точках $x = x_1, x_2$ задается давление, в общем случае, как функции времени $p(t, x_1) = p_*(t), p(t, x_2) = p_*(t)$. Как будет показано ниже, в различных режимах структура системы (4.1) изменяется и, следовательно, это приведет к различным особенностям ее решения.

В кинетическом уравнении в обоих режимах $p \neq \text{const}$. Видно, что p в ответствии с законом Дарси определяется значениями $v(t)$ и $K(\varepsilon)$. Чем ин-

тенсивнее по x изменяется ε , тем быстрее меняется и p . Это означает, что суффозия по длине среды — x будет происходить по разному. Когда это различие не принимается во внимание в кинетическом уравнении, p можно выразить через давления $p_n(t)$ и $p_k(t)$. Например, для конечной модели среды длины l и постоянных p_n и p_k можно принимать (при $p_n > p_k$) $\forall p = (p_n - p_k)/l$. Это допущение, вообще говоря, является весьма грубым, но им можно пользоваться в тех случаях, когда $|\partial\varepsilon/\partial x| \ll 1$. Как показали численные расчеты, это условие приближенно реализуется при слабой кольтации, т.е. при малых значениях ω_2 . Таким образом, в указанных условиях можно положить $p = \text{const}$. Кроме того, в кинетическом уравнении во втором члене справа положим $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, что вполне допустимо в указанных выше условиях, т.к. за счет слабости кольтации ε не намного уменьшится от ε_0 . Значит первые два уравнения системы (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \cdot P - \omega_2 \varepsilon_0 n, \quad P = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Исключая производные ε из (4.2), приходим к

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \\ + \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \left(\frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{где } \tau = \frac{1}{\omega_1 P + \varepsilon_0}, \quad \eta = 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1 \cdot P}.$$

Уравнение (4.3), по-видимому аналогично линейному уравнению конвективной диффузии с учетом адсорбции по изотерме Генри [76, 152].

Когда кинетическое уравнение принимается не в упрощенном виде, то, используя его и первое уравнение (4.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \\ + \frac{1}{\tau(\varepsilon, n)} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\eta(\varepsilon, n)} \left(\frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\text{где } \tau(\varepsilon, n) = \frac{\varepsilon_0}{\omega_1 \varepsilon_0 P + \omega_2 \varepsilon_0 n + \omega_2 \varepsilon}, \quad \eta(\varepsilon, n) = [\tau(\varepsilon, n)(\omega_1 P + \omega_2 n)]^{-1}.$$

Как видно из (4.4), коэффициенты τ и η в отличие от (4.3) являются переменными величинами, зависящими от ε и n .

В уравнениях (4.3), (4.4) коэффициент τ можно рассматривать как время релаксации, а сами уравнения как релаксационные.

Используя рассуждения работы [126], рассмотрим различные диапазоны изменения характерного времени процесса T .

1. Пусть характерное время процесса T гораздо меньше времени релаксации, т.е. $T \ll \tau$. Тогда уравнения (4.3), (4.4) приводятся к

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

что является обычным уравнением конвективной диффузии без учета явлений поглощения. На данном этапе коагуляция и суффозия не влияют на процесс.

2. Пусть $T \ll \tau \cdot \eta$, т.е. $T \ll 1/(\omega_1 \cdot P)$ для (4.1.3) и $T \ll 1/(\omega_1 \cdot P + \omega_2 \cdot n)$ для (4.4). Тогда из (4.3) и (4.4) получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} + \omega_2 n = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} \right] + \frac{1}{\tau(\varepsilon, n)} \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^3 n}{\partial x^2 \partial t}, \quad (4.6)$$

где в (4.5) учтено соотношение $\omega_2/(\omega_1 \cdot P) \gg 1$.

Как видно из (4.5), на данном этапе получаем уравнение конвективной диффузии с коагуляцией, причем интенсивность коагуляции определяется коэффициентом ω_2 и концентрацией частиц в жидкости — n . Суффозия, как это видно из уравнения (4.5), пока не проявляется. Уравнение (4.5) эквивалентно

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\omega_2 \varepsilon_0 n.$$

3. Характерное время намного больше времени релаксации и имеет порядок $\tau \cdot \eta$. Тогда из (4.3), (4.4) следует

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \left(\tau \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \right) \left(\frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) = 0,$$

где τ и η определяются как в (4.3) или (4.4) соответственно.

Как видно из этого уравнения, для данного этапа характерно то, что $\partial^2 n / \partial t^2$ пренебрежимо мало по сравнению с $(1/\tau \cdot \partial n / \partial t)$.

4. Характерное время намного больше $\tau \cdot \eta$, т.е. $T \gg (\omega_1 P)^{-1}$ для (4.4). В этом случае

$$\eta \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

где η определяется как (4.3) или (4.4).

Как видно из (4.7), как в случае 1 получено уравнение конвективной диффузии. Однако в этом случае нестационарный процесс происходит с другим масштабом времени, определяемым η .

Уравнение (4.7) в случае $\eta = \text{const}$ эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 P - \omega_2 \varepsilon_0 n &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, если из второго уравнения, определив

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1 P} n \right)$$

и вычислив $\partial \varepsilon / \partial t$ подставим в первое уравнение, то получим (4.7) с $\eta = 1 + \omega_2 / (\omega_1 \cdot P)$.

В предыдущей системе кинетическое уравнение имеет равновесный вид, что соответствует случаю, когда эффекты кольтматии и суффозии протекают с одинаковой интенсивностью.

Записав (4.7) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\eta \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{D}{\eta} \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (4.8)$$

можно дать другую физическую интерпретацию. Действительно, (4.8) есть уравнение конвективной диффузии с тем же характерным масштабом времени, что в случае 1. Однако в (4.8) скорость жидкости и коэффициент диффузии уменьшены на величину η ($\eta > 1$). Это означает, что эффективная емкость единичного объема среды увеличена в η раз.

Значит, в случае кольтматиионо-суффозионной фильтрации на основе модели (4.1) как и в процессах адсорбции [152] при очень больших и малых характерных временах процесс описывается уравнением конвективной диффузии.

Исключая n из (4.2), получим уравнение

$$\begin{aligned} (\omega_1 P + \omega_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \left(\omega_1 P \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right) = \\ = D \left(\omega_1 P \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если из исходной системы (4.1) исключить n , то получается гораздо более сложное уравнение, чем (4.9)

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\omega_2 \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\omega_1 P \cdot \varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\omega_1 P \cdot \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right) = \\ & = D \left[\frac{2\omega_1 \varepsilon_0 \cdot P}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \frac{\omega_1 P \cdot \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right) - \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^3} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Теперь рассмотрим вариант, когда в фильтрационной области задается скорость фильтрации. Данный режим фильтрации реализуется для областей с любой геометрией без каких-либо ограничений, имевших место при задании P . Пусть $v = v_0 = \text{const}$. Тогда система (4.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \omega_1 \cdot \frac{v_0}{K(\varepsilon)} - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= K(\varepsilon) \cdot P. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Как и выше в кинетическом уравнении можно ввести упрощение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \omega_1 \cdot \frac{v_0}{K(\varepsilon)} - \omega_2 \varepsilon_0 n. \quad (4.12)$$

С использованием (4.12) выведем релаксационное уравнение, которое аналогично (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \left(\frac{v_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \quad (4.13)$$

где

$$\tau = (\omega_1 v_0 s + \omega_2)^{-1}, \quad \eta = 1 + \frac{\omega_2 \varepsilon_0}{\omega_1 v_0 \cdot s}, \quad s = [K(\varepsilon) + K'(\varepsilon)(\varepsilon_0 - \varepsilon)] / K^2(\varepsilon),$$

$K'(\varepsilon)$ – производная по ε от коэффициента фильтрации.

Когда кинетическое уравнение принимается как в (4.11), т.е. без упрощения, релаксационное уравнение имеет такой же вид, как и (4.13) с коэффициентами

$$\tau = \left(\omega_1 v_0 s + \omega_2 n + \omega_2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1}, \quad \eta = 1 + \frac{\omega_2 \varepsilon}{\varepsilon_0 (\omega_1 v_0 s + \omega_2 n)}$$

Очевидно, что в этом случае время релаксации τ и коэффициент η зависят не только от ε , как в (4.13), но и от n .

Отмеченные выше стадии изменения характерного времени процесса для (4.3), (4.4) полностью имеют силу и для (4.13). Границы, разделяющие стадии в (4.13), естественно являются другими, чем в (4.3), (4.4).

Исключая n из первого уравнения (4.11) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned} (\omega_2 + \omega_1 v_0 S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\omega_1 v_0^2 S}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{v_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} = \\ = D \left[\omega_1 v_0 S \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \omega_1 v_0 G \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $G = \{(\varepsilon_0 - \varepsilon)K(\varepsilon) \cdot K'(\varepsilon) - 2K'(\varepsilon)[K(\varepsilon) + K'(\varepsilon)(\varepsilon_0 - \varepsilon)]\} / K^2(\varepsilon)$.

При исключении n из системы (4.11) приходим к более сложному нелинейному уравнению, чем (4.14)

$$\begin{aligned} -\omega_1 v_0 \Omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{v_0}{\varepsilon} \left[-\omega_1 v_0 \Omega^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right] = \\ = D \left[-\omega_1 v_0 \Omega \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 - \omega_1 v_0 \Omega \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{2}{\varepsilon^3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\Omega = \frac{\varepsilon_0 K(\varepsilon) + (\varepsilon_0 - \varepsilon) \varepsilon \cdot K'(\varepsilon)}{\varepsilon^2 K^2(\varepsilon)}$, а Ω' – производная от Ω по ε .

Уравнения (4.9), (4.10), (4.14), (4.15) являются сильно нелинейными и содержат производные более высокого порядка, чем уравнения систем (4.1) и (4.11). Это создает известные трудности при их решении, весьма важным фактором при этом является корректная постановка задачи с учетом особенностей уравнений.

Для систем (4.1) и (4.11) и других выведенных уравнений решения будут обладать определенными свойствами гладкости, если начальные и граничные условия являются согласованными и задаются функциями с известной гладкостью. Однако, если начальные и граничные условия задаются разрывными функциями или они не согласованы, то решения также могут быть разрывными в зависимости от свойств уравнений.

С целью анализа этого явления для уравнений систем (4.1) и (4.11) рассмотрим поверхность раздела. Пусть в достаточно малых окрестностях по обе стороны изолированной поверхности $x = 0$, где x – координата по нормали к поверхности раздела, функции $n(t, x)$ и $\varepsilon(t, x)$ непрерывны и удовлетворяют уравнениям системы (4.1) [33]. По области $-h < x < h$, где h – некоторое малое число, интегрируем первое уравнение системы (при этом $t \geq 0$)

$$\int_{-h}^h \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dx + P \int_{-h}^h \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} dx - D \int_{-h}^h \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} dx = 0. \quad (4.16)$$

При $h \rightarrow 0$ первый интеграл в (4.16) стремится к нулю.

Введем функцию

$$N(t, x) = \int \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} dx + C, \quad (4.17)$$

где C — произвольная константа.

Тогда из (4.16) получаем

$$P \cdot [N] - D \left[\frac{\partial n}{\partial x} \right] = 0, \quad (4.18)$$

где знак $[]$ обозначает разность значения функции по обе стороны поверхности раздела. Если для произвольной функции $f(x)$ имеем $[f(x)] \neq 0$, то поверхность раздела является поверхностью разрыва.

Для получения второго условия на поверхности раздела умножим первое уравнение (4.1) на x и интегрируем в области $[-h, h]$

$$\int_{-h}^h \left(\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) x dx + P \int_{-h}^h \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} x dx - D \int_{-h}^h \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} x dx = 0. \quad (4.19)$$

Первый интеграл в (4.19) опять обращается в нуль, а из остальных членов получаем

$$-D \left[x \frac{\partial n}{\partial x} \right] + P \cdot (x \cdot N) \Big|_{-h}^h + D n \Big|_{-h}^h - P \cdot \int_{-h}^h N dx = 0, \quad (4.20)$$

$$\text{откуда } [n] = \frac{P}{D} \cdot \int_{-h}^h N dx.$$

Из (4.20) при $h \rightarrow 0$ следует

$$[n] = 0. \quad (4.21)$$

Для получения условий на поверхности раздела относительно $\varepsilon(t, x)$ используем уравнения (4.9) и (4.12). Интегрируя (4.12) в области $[-h, h]$ и учитывая (4.21), приходим к

$$\frac{\partial [\varepsilon]}{\partial t} + \omega_1 \cdot P \cdot [\varepsilon] = 0, \quad (4.22)$$

решение которого

$$[\varepsilon] = [\varepsilon]_0 \exp(-\omega_1 \cdot P \cdot t), \quad (4.23)$$

где $[\varepsilon]_0$ — начальное значение скачка $[\varepsilon]$.

Теперь интегрируем (4.9) в тех же пределах

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + (\omega_1 P + \omega_2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) dx + P \int_{-h}^h \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\omega_1 P \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right) dx - \\ - D \int_{-h}^h \left(\omega_1 P \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t} \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Первый интеграл в (4.24), как и выше, равен нулю.

Вводим следующие функции:

$$\begin{aligned} E_1(t, x) &= \int \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + C_1, \\ E_2(t, x) &= \iint \frac{K(\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} dx dt + C_2(x), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где C_1 – произвольная константа, а $C_2(x)$ – произвольная функция x .

Тогда из (4.24) получаем

$$\omega_1 P \left\{ P \cdot [E_1] - D \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ P \cdot [E_2] - D \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \right\} = 0. \quad (4.26)$$

Так как, согласно (4.23), $[\varepsilon] \neq 0$, в общем случае, как это видно из (4.17) и (4.25), на поверхности раздела $[N] \neq 0$, $[E_1] \neq 0$, $[E_2] \neq 0$. Следовательно, в соответствии с (4.18) $[\partial n / \partial x] \neq 0$, а ненулевой скачок $[\partial \varepsilon / \partial x]$ определяется из (4.26).

Рассмотрим частный случай. Пусть $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$, $k = \text{const}$, как это было принято в [136]. Тогда функции N , E_1 , E_2 явно выражаются через n и ε :

$$\begin{aligned} N(t, x) &= k_0 n(t, x) + C, \\ E_1(t, x) &= k_0 \varepsilon(t, x) + C_1, \\ E_2(t, x) &= k_0 \varepsilon(t, x) + C_2(x). \end{aligned}$$

Значит $[N] = k_0 [n] = 0$. Из (4.18) с учетом этого получается

$$\left[\frac{\partial n}{\partial x} \right] = 0. \quad (4.27)$$

Аналогично $[E_1] = [E_2] = k_0 [\varepsilon]$. Тогда из (4.25) приходим к

$$P \cdot k_0 \left(\frac{\partial [\varepsilon]}{\partial t} + \omega_1 \cdot P \cdot [\varepsilon] \right) - D \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \omega_1 \cdot P \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \right) = 0. \quad (4.28)$$

С учетом (4.22) из (4.28) получается

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \omega_1 \cdot P \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] = 0,$$

решением которого является

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right]_0 \cdot \exp(-\omega_1 \cdot P \cdot t), \quad (4.29)$$

где $[\partial \varepsilon / \partial x]_0$ – начальное значение $[\partial \varepsilon / \partial x]$.

Результаты рассматриваемого частного случая в виде (4.23), (4.27), (4.29), совместно с (4.21), аналогичны с результатами конвективной диффузии с учетом явлений адсорбции [126, 179]. Однако для других видов зависимости $K(\varepsilon)$, которые в реальных ситуациях обычно бывают более слож-

ными, чем линейная зависимость $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ [168, 179], помимо отмеченного ненулевого разрыва градиента концентрации – $\partial n / \partial x$ наблюдается релаксационное размытие скачка $\partial \varepsilon / \partial x$ в соответствии с уравнением (4.26). Причем динамика релаксации отличается от экспоненциальной – (4.29) и характерное время релаксации – от $(\omega_1 \cdot P)^{-1}$. Соответствию результатов частного случая $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ с результатами [33, 126] можно дать следующее объяснение. В данном случае в пористой среде устанавливается режим движения с постоянной физической скоростью $k_0 P$ и левая часть уравнения переноса системы (4.1) становится идентичной с уравнением материального баланса сорбируемых частиц [33, 126], где конвективный перенос частиц осуществляется с постоянной скоростью. Член уравнения переноса $(\partial n / \partial x) / \varepsilon_0$ в (4.1) на характер скачка $\partial n / \partial x$ никакого влияния не оказывает. Таким образом, свойства сравниваемых уравнений становятся одинаковыми в смысле размытия скачков концентрации частиц.

Следовательно, скачки пористости и ее производной по x не уничтожаются мгновенно. Скачок ε затухает по закону $(-\omega_1 \cdot P \cdot t)$, а скачок $\partial \varepsilon / \partial x$ – в общем случае зависимости $K(\varepsilon)$ по более сложному закону. Физически это как и в случае [33, 126], объясняется тем, что пористость изменяется только под влиянием концентрации частиц – n , а для чистой жидкости без частиц ($n = 0$) из уравнения кинетики следует, что $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\partial \varepsilon / \partial t = 0$. Таким образом, поры являются поглотителями частиц жидкости. Но в случае [33, 126] в пористой среде адсорбировавшиеся частицы служат всего лишь поглотителями частиц из подвижной фазы – движущейся жидкости, и на гидродинамические характеристики потока жидкости они никакого влияния не оказывают. Но в случае кольматации и суффозии, что рассматривается здесь на основе моделей (4.1), (4.11), поры являются не только пассивными поглотителями частиц жидкости, а забиваясь или освобождаясь (очищаясь) под влиянием P за счет изменения пористости ε они оказывают встречную (обратную) реакцию на гидродинамические характеристики движения жидкости, в частности, на концентрацию частиц в жидкости. Этим и объясняется не мгновенный, а релаксационный характер затухания скачков градиента концентрации в соответствии с (4.18).

Используя уравнение баланса из (4.1) с учетом (4.17), (4.21), имеем

$$D \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] = P \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial [\varepsilon]}{\partial t} \right]$$

или согласно (4.23)

$$D \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] = P \cdot \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \frac{\omega_1 \cdot P}{\varepsilon_0} \cdot [\varepsilon]_0 \exp(\omega_1 \cdot P \cdot t).$$

Как видно из этого, скачок $\partial^2 n / \partial^2 x$ определяется скачками ε и $\partial n / \partial x$, а характер затухания – комбинацией затуханий $[\varepsilon]$ и $[\partial n / \partial x]$.

Когда режим потока задается не через P , а для конечной или полубесконечной пористой среды давлениями $p_*(t)$ и $p_*(t)$ в двух точках, система (4.1) должна решаться вместе с уравнением

$$K'(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + K(\varepsilon) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (4.30)$$

которое получается из уравнения неразрывности $\partial v / \partial x = 0$ для несжимаемых жидкости и пористой среды. Соответственно условия на поверхности раздела для n , ε , p выводятся с использованием (4.1) и (4.30).

Режим с $v = v_0 = \text{const}$ исследуется на основе системы (4.11) с общим или упрощенным (уравнение (4.12)) кинетическим уравнением. В этом случае характер затухания $[]$ не является экспоненциальным подобно (4.23), а будет сложнорелаксационным, определяемым из кинетического уравнения. Кроме того, независимо от вида $K(\varepsilon)$ всегда скачок $\partial n / \partial x$ будет отличным от нуля, т.к. функция N определяется как

$$N = \int \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} dx + C$$

и $[N] \neq 0$, а вместо уравнения (4.18) имеем

$$v_0 [N] - D \left[\frac{\partial n}{\partial x} \right] = 0.$$

Скачок n как и в случае с заданным P равен нулю, т.е. $[n] = 0$.

Скачок $\partial \varepsilon / \partial x$ определяется из (4.14) или (4.15) путем интегрирования. Но сложность этих уравнений не позволяет в компактном виде вывести соотношения, определяющие характер затухания $[\partial \varepsilon / \partial x]$.

Сильная нелинейность и наличие производных высокого порядка в уравнениях (4.9), (4.10), (4.14), (4.15), а также условия на поверхности разрыва для ε и $\partial \varepsilon / \partial x$ существенно затрудняют корректную постановку задач этих уравнений. Поэтому для анализа более удобными представляются исходные системы (4.1), (4.11). Здесь, во-первых, при постановке задач можно не задавать граничный режим для ε . Во-вторых, граничные условия первого рода относительно n можно задавать разрывными и не согласованными с начальным условием. В соответствии с (4.21) такие скачки и разрывы граничных функций по n мгновенно затухают, как это имеет место в задачах теплопроводности [102]. Однако при использовании граничных условий

второго и третьего рода по n следует учесть характер затухания $[\partial n / \partial x]$ в соответствующих условиях, т.к., как показано выше, скачки $\partial n / \partial x$ затухают не мгновенно, а релаксационно.

Следует отметить, что при численном решении (4.1) и (4.11) конечноразностными методами иногда возникает необходимость в задании граничного условия по ε . Это связано со спецификой конечноразностных методов, т.к. они требуют предельную конкретизацию постановки задачи. Кроме того, это граничное условие может быть использовано для проверки свойств конечно-разностных схем.

4.2. Задача кольматационной фильтрации с заданным скоростным режимом

Здесь рассматривается конкретная задача кольматационной фильтрации и ее решение. Целью проводимых исследований является оценка влияния кольматации и суффозии на характер распределения концентрации частиц, пористости и перепада давления [39, 193].

Предположим, что суспензия с первоначальной объемной концентрацией твердых частиц n_0 поступает в пористую среду, заполненную жидкостью без частиц. Из-за осаждения частиц суспензии поры среды закупориваются, движение жидкости в них прекращается, т.е. они выключаются из процесса фильтрации. Это приведет к изменению активной пористости. Кольматированные поры в последующем могут быть освобождены от частиц под действием перепада давления. Как и в [79] примем, что каждая отложившаяся частица закупоривает одну отдельную пору и, следовательно, изменяет активную пористость. С целью упрощения расчетов конвективная диффузия не рассматривается.

В предположении несжимаемости суспензии и пористой среды из уравнения неразрывности получим $\partial n / \partial x = 0$.

Вид $K(\varepsilon)$ в (4.1) как и во второй главе определяется по разному. В наиболее простом случае можно принимать $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$, $k_0 = \text{const}$, что и было рассмотрено в [79]. В общем случае следует воспользоваться другими зависимостями, как это сделано в [179].

При малых значениях n или при слабой кольматации, когда изменение пористости незначительно, в (4.1.1) во втором члене уравнения баланса и в последнем члене кинетического уравнения можно положить $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. Тогда вместо (4.1) имеем [217]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon_0) \cdot P}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 P - \varepsilon_0 \omega_2 n, \\ v(t) &= K(\varepsilon) \cdot P. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Система уравнений (4.31) решается гораздо проще, чем исходная система (4.1).

Пусть в пористую среду, заполненную жидкостью без частиц с начальной пористостью ε_0 с момента $t > 0$ начинает поступать суспензия с объемной концентрацией твердых частиц n_0 . Тогда

$$n(0, x) = 0, \quad n(t, 0) = n_0, \quad \varepsilon(0, x) = 0. \quad (4.32)$$

При $x = 0$ задаем режим изменения скорости фильтрации. Допустим создан режим с $v = v_0 = \text{const}$. Тогда систему (4.31) для $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \cdot \frac{v_0}{k_0 \varepsilon} - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= k_0 \varepsilon \cdot P. \end{aligned} \quad (4.33)$$

При больших t образуются стационарные фронты концентрации и пористости, которые распространяются с некоторой постоянной скоростью. На этой асимптотической стадии для определения функций $\varepsilon(t, x)$ и $n(t, x)$ можно использовать метод распространяющихся волн, рассматривая стационарные фронты концентрации и пористости как некоторые волны. Вводя новую переменную $z = x - ut$, где u – скорость распространения фронта изменения пористости и концентрации, которая определяется далее, из (4.33) приходим к системе относительно $n(z)$ и $\varepsilon(z)$

$$\begin{aligned} \left(-u - \frac{v_0}{\varepsilon} \right) \frac{dn}{dz} &= -\frac{u}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d\varepsilon}{dz}, \\ -u \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \cdot \frac{v_0}{k_0 \varepsilon} - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= k_0 \varepsilon \cdot P. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Так как рассматривается асимптотическая стадия динамики кольтматии и суффозии, то начальные условия в (4.32) отпадают. Для новой переменной z граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} n(-\infty) &= n_0, \quad n(\infty) = 0, \\ \varepsilon(-\infty) &= \varepsilon_{st}, \quad \varepsilon(\infty) = \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где ε_{st} – стационарное значение пористости, которое определяется как решение второго уравнения (4.34) при $d\varepsilon/dz = 0$, $n = n_0$

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)\omega_1 \cdot \frac{v_0}{k_0 \varepsilon} - \omega_2 \varepsilon n = 0. \quad (4.36)$$

Из (4.36) легко находим решение

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{2} \left(-\theta + \sqrt{\theta(\theta + 4\varepsilon_0)} \right), \quad (4.37)$$

где $\theta = \omega_1 v_0 / (k_0 \omega_2 n_0)$.

Интегрируя первое уравнение (4.34) с учетом условий $\varepsilon(\infty) = \varepsilon_{st}$, $n(\infty) = 0$ получим

$$n = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) + \frac{v_0}{u \varepsilon_0} \ln \left| \frac{v_0 - u \varepsilon}{v_0 - u \varepsilon_{st}} \right|. \quad (4.38)$$

При условиях $n(-\infty) = n_0$, $\varepsilon(-\infty) = \varepsilon_{st}$ из (4.38) получается уравнение, из которого определяется скорость движения фронта - u :

$$(n_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}) \frac{u}{v_0} - \ln \left| \frac{v_0 - u \varepsilon_{st}}{v_0 - u \varepsilon_0} \right| = 0. \quad (4.39)$$

Интегрируя второе уравнение (4.34), с учетом (4.38) получим $z = c + z_0(\varepsilon)$

или

$$x = ut + c + z_0(\varepsilon), \quad (4.40)$$

где c – постоянная интегрирования, а

$$z_0(\varepsilon) = -u \int \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{\omega_1 v_0}{k_0 \varepsilon} + \frac{\omega_2 \varepsilon}{\varepsilon_0} \left(\varepsilon_0 - \varepsilon - \frac{v_0}{u} \ln \left| \frac{v_0 - u \varepsilon}{v_0 - u \varepsilon_{st}} \right| \right) \right] d\varepsilon. \quad (4.41)$$

Аналогично может быть получено автомодельное решение для n : $z = c + z_0(n)$ или

$$x = ut + c + z_0(n), \quad (4.42)$$

где $z_0(n)$ выражается неопределенным интегралом, подобным (4.41).

Решения типа (4.40), (4.42) могут быть получены и для более общей системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon) \cdot P}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= f(\varepsilon, n), \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $f(\varepsilon, n)$ – произвольная функция.

Вводя $n = \varphi(z)$, $\varepsilon = \psi(z)$ при условиях

$$\varphi(-\infty) = n_0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad \psi(-\infty) = \varepsilon_{st}, \quad \psi(\infty) = \varepsilon_0$$

из (4.43) получаем

$$\left(-u + \frac{K(\psi) \cdot P}{\psi}\right) \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{u}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d\psi}{z},$$

$$-u \frac{d\psi}{z} = f(\psi, \varphi), \quad (4.44)$$

интегрирование первого уравнения, которое дает

$$\varphi = \psi_1(\psi, u) + C, \quad (4.45)$$

где $\psi_1(\psi, u) = -u \int \frac{\psi d\psi}{-u\psi/\varepsilon_0 + K(\psi) \cdot P}$.

Используя (4.43) из (4.45), приходим к

$$\varphi = \psi_1(\psi, u) - \psi_1(\varepsilon_0, u). \quad (4.46)$$

Для определения u из (4.46), используя (4.43), получим уравнение

$$n_0 = \psi_1(\varepsilon_{st}, u) - \psi_1(\varepsilon_0, u). \quad (4.47)$$

Из (4.45) и (4.47) можно найти связь между φ и ψ

$$\varphi(z) = \Psi(\psi(z)),$$

где Ψ – некоторая функция.

Тогда из второго уравнения (4.44), используя

$$\Psi(\psi(-\infty)) = \Psi(\varepsilon_{st}) = n_0,$$

$$\Psi(\psi(\infty)) = \Psi(\varepsilon_0) = 0,$$

получим

$$f(\varepsilon_{st}, n_0) = 0,$$

откуда находится стационарное решение $-\varepsilon_{st}$.

Профиль стационарного фронта определяется из

$$z(\psi) = c - u \int \frac{d\psi}{f[\psi, \Psi(\psi)]}. \quad (4.48)$$

Для определения фронта по n считаем, что функция $\varphi = \Psi(\psi)$ имеет обратную, т.е.

$$\psi = \Psi^{-1}(\varphi) = \Phi(\varphi).$$

Тогда из (4.48) имеем

$$z(\varphi) = c - u \int \frac{\Phi'(\varphi) d\varphi}{f[\Phi(\varphi), \varphi]}. \quad (4.49)$$

Таким образом, (4.48) и (4.49) интегральные члены обозначив через $z_{0\psi}(\psi)$ и $z_{0\varphi}(\varphi)$ можем записать в виде

$$z = c + z_{0\psi}(z),$$

$$z = c + z_{0\varphi}(z). \quad (4.50)$$

Постоянную интегрирования c в (4.40), (4.42), (4.50) определим из уравнения баланса. Интегрируем это уравнение по t и x в интервалах $[0, t_0]$, $[0, x_0]$

$$\int_0^{t_0} \int_0^{x_0} \frac{\partial n}{\partial t} dt dx + v_0 \int_0^{t_0} \int_0^{x_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial t} dt dx = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{t_0} \int_0^{x_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt dx. \quad (4.51)$$

Чтобы облегчить ход выкладок в (4.51) во втором члене слева положим $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

$$\int_0^{x_0} [n(t_0, x) - n(0, x)] dx + \frac{v_0}{\varepsilon_0} \int_0^{t_0} \int_0^{x_0} [n(t, x_0) - n(t, 0)] dt = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{t_0} \int_0^{x_0} [\varepsilon(t_0, x) - \varepsilon(0, x)] dx. \quad (4.52)$$

Исходя из (4.35), при $x_0 \rightarrow \infty$ из (4.52) получим

$$\int_0^\infty \left[n(t_0, x) + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon(t_0, x)) \right] dx - \frac{v_0}{\varepsilon_0} n_0 t_0 = 0. \quad (4.53)$$

Обратные функции к $z_0(\varepsilon)$, $z_0(n)$ в (4.40), (4.42), $z_{0\psi}$, $z_{0\varphi}$ в (4.50) соответственно обозначим

$$\psi = z_{0\psi}^{-1}(z - c), \quad \varphi = z_{0\varphi}^{-1}(z - c). \quad (4.54)$$

При этом предполагается, что эти функции существуют. В дальнейшем из конкретных решений будет видно, что условия для существования обратных функций выполняются: функции $z_0(\varepsilon)$, $z_0(n)$ (и $z_{0\psi}(\psi)$, $z_{0\varphi}(\varphi)$) являются монотонными и непрерывными.

Тогда

$$\int_0^{t_0} n(t_0, x) dx = \int_0^\infty \varphi(x - ut_0) dx = \int_0^\infty z_{0\varphi}^{-1}(x - ut_0 - c) dx = \int_{-ut_0 - c}^\infty z_{0\varphi}^{-1}(\zeta) d\zeta = \int_{\zeta_1}^\infty z_{0\varphi}^{-1}(\zeta) d\zeta,$$

где $\zeta_1 = -ut_0 - c$, $\zeta = -ut_0 - c$.

Пусть $z_{0\varphi}^{-1}(0) = \varphi^*$. Тогда

$$\int_{\zeta_1}^\infty z_{0\varphi}^{-1}(\zeta) d\zeta = \int_{\zeta_1}^0 z_{0\varphi}^{-1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\infty z_{0\varphi}^{-1}(\zeta) d\zeta = -\zeta_1 z_{0\varphi}^{-1}(\zeta_1) + \left(\int_{\varphi^*}^{z_{0\varphi}^{-1}(\zeta_1)} + \int_0^{\varphi^*} \right) z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi.$$

Аналогично

$$\int_0^\infty [\varepsilon_0 - \varepsilon(t_0, x)] dx = \int_0^\infty [\varepsilon_0 - z_{0\psi}^{-1}(x - ut_0 - c)] dx = \int_{\zeta_1}^\infty [\varepsilon_0 - z_{0\psi}^{-1}(\zeta)] d\zeta.$$

Введем функцию

$$z_{1\psi}^{-1}(\zeta) = \varepsilon_0 - z_{0\psi}^{-1}(\zeta).$$

Тогда

$$\int_{\zeta_1}^\infty [\varepsilon_0 - z_{0\psi}^{-1}(\zeta)] d\zeta = \left(\int_{\zeta_1}^0 + \int_0^\infty \right) z_{1\psi}^{-1}(\zeta) d\zeta = -\zeta_1 z_{1\psi}^{-1}(\zeta_1) + \left(\int_{\psi^*}^{z_{1\psi}^{-1}(\zeta_1)} + \int_0^{\psi^*} \right) z_{1\psi}(\psi) d\psi.$$

Используя выведенные выражения для интегралов, принимая во внимание (4.54), из (4.53) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left[n(t_0, x) + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon(t_0, x)) \right] dx - \frac{v_0}{\varepsilon_0} n_0 t_0 = -\zeta_1 z_{0\varphi}^{-1}(\zeta_1) + \\ & + \left(\int_{\varphi^*}^{z_{0\varphi}^{-1}(\zeta_1)} + \int_0^{\varphi^*} \right) z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi - \frac{1}{\varepsilon_0} \zeta_1 z_{1\psi}^{-1}(\zeta_1) + \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_{\psi^*}^{z_{1\psi}^{-1}(\zeta_1)} + \int_0^{\psi^*} \right) z_{1\psi}(\psi) d\psi - \frac{v_0}{\varepsilon_0} n_0 t_0 = \\ & = (ut_0 + c)\varphi(-ut_0 + c) + \int_0^{ut_0+c} z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\varepsilon_0} (ut_0 + c) [\varepsilon_0 - \psi(-ut_0 - c)] + \\ & + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0 - \psi(-ut_0 - c)} z_{1\psi}(\psi) d\psi - \frac{v_0}{\varepsilon_0} n_0 t_0 = 0. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем $\varphi(-ut_0 - c) \rightarrow n_{\varphi}$, $\psi(-ut_0 - c) \rightarrow \varepsilon_{st}$ (рис.4.1). Поэтому последнее выражение приводится к

$$\begin{aligned} & ut_0 \left(n_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}) \right) - \frac{v_0}{\varepsilon_0} n_0 t_0 + c \left[n_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}) \right] + \\ & + \int_0^{n_0} z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} z_{1\psi}(\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Из первого уравнения (4.44), когда $k(\psi)P/\psi = v_0/\varepsilon_{\varphi}$ получается формула для определения u , аналогичная (4.47), но с явным видом

$$u = \frac{v_0 n_0}{\varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}. \quad (4.56)$$

С учетом (4.56) из (4.55) получим

$$\begin{aligned} c &= \frac{\varepsilon_0}{n_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \left[\int_0^{n_0} z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} z_{1\psi}(\psi) d\psi \right] = \\ &= \frac{1}{n_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \left[\varepsilon_0 \int_0^{n_0} z_{0\varphi}(\varphi) d\varphi + \int_{\varepsilon_{st}}^{\varepsilon_0} z_{1\psi}(\psi) d\psi \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

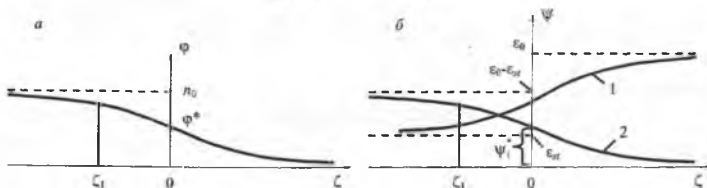


Рис. 4.1. Схематические профили для определения постоянной интегрирования в (4.40), (4.42), (4.50) а) профиль $n(t, x)$; б) профили $\varepsilon(t, x)$ (1) и $\psi_1 = \varepsilon_0 - \varepsilon(t, x)$ (2)

Если уравнение баланса в левой части положить $\varepsilon = \varepsilon_0$, что, как отмечено выше, допустимо при определенных условиях, вместо (4.40), (4.42) получаем

$$\frac{x-ut}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{st}} \ln \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} + \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \ln \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{st}}{2\varepsilon_{st}} \right) + \ln \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_{st})^\alpha (\varepsilon_{st} + \varepsilon)^\gamma}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\beta}, \quad (4.58)$$

$$\frac{x-ut}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{st}} \ln \frac{2\varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} + \frac{1}{\varepsilon_0 - \varepsilon_0} \ln \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{st}}{2\varepsilon_{st}} \right) + \ln \frac{(n_0 - n)^\alpha \left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{st}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} n_0 - n \right)^\gamma}{n^\beta}, \quad (4.59)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}, \quad \gamma = \frac{1}{2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{st})}, \quad r = \frac{\varepsilon_0^\alpha (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}{\omega_n n_n}.$$

При этом скорость распространения фронта определяется по формуле (4.56).

В данном режиме между n и ε в отличие от (4.38) связь выглядит просто

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st})}. \quad (4.60)$$

Градиент давления определяется из закона Дарси при известном ε : $p = v_0 / (k_0 \varepsilon)$.

Рассмотрим более реалистичный случай, когда коэффициент фильтрации принимается в форме Кармана-Козени [179] $K(\varepsilon) = k_0 \cdot \varepsilon^3 / (1 - \varepsilon)^2$. В режиме $v = v_0 = \text{const}$, тогда система (4.31) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \frac{\omega_1 v_0 (1 - \varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^3} - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= k_0 \varepsilon^3 \cdot P / (1 - \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Переходя к переменной $z = x - ut$ из системы (4.61), получаем систему относительно функций $\varepsilon(z)$ и $n(z)$

$$\left(-u + \frac{v_0}{\varepsilon} \right) \frac{dn}{dz} = -\frac{u}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d\varepsilon}{dz}, \quad (4.62)$$

$$-u \frac{d\varepsilon}{dz} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \cdot \frac{\omega_1 v_0 (1 - \varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^3} - \omega_2 \varepsilon n,$$

которая решается при условиях (4.35).

Стационарное значение пористости определяется из уравнения, которое получается из второго уравнения системы (4.62) при условиях $de/dz = 0$, $n = n_0$:

$$\varepsilon^4 - \theta(\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 = 0. \quad (4.63)$$

Для определения скорости движения фронта получено уравнение, идентичное с (4.39), а связь между ε и n дается уравнением (4.38).

Интегрирование второго уравнения системы (4.61) с учетом (4.38) приводит к

$$z = c + z_0(\varepsilon), \quad (4.64)$$

где

$$z_0(\varepsilon) = -u \int \varepsilon^3 \left[\frac{v_0 \omega_1}{k_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 + \frac{\omega_2}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon) \varepsilon^4 - \frac{\omega_2 v_0 \varepsilon^4}{u \varepsilon_0} \ln \left| \frac{v_0 - u \varepsilon}{v_0 - u \varepsilon_0} \right| \right] d\varepsilon.$$

Как и выше, константа интегрирования в (4.64) находится из уравнения баланса. Используя связь между ε и n , получаем аналогичное уравнение относительно n : $z = c + z_0(n)$, где $z_0(n)$ дается определенным интегралом, подобным (4.64).

По формулам (4.58) и (4.59) проводились расчеты при следующих значениях исходных данных: $v_0 = 10^{-3}$ м/с, $k_0 = 10^{-2}$ м²/(МПа · с), $n_0 = 0,01$, $\varepsilon_0 = 0,3$. Значения ω_1 (м/(МПа · с)) и ω_2 (с⁻¹) принимались различными. Результаты представлены на рис.4.2. Как видно из результатов, когда ω_1 не изменяется, при малых ω_2 фронт волны как по ε , так и по n является весьма «размытым», а с увеличением ω_2 он становится крутым. Изменение значения ω_2 влияет на характер скорости распространения волны. С увеличением ω_2 скорость волны уменьшается. Это физически понятно, т.к. с увеличением кольтматации возмущенная зона продвигается с меньшей скоростью и стационарные значения пористости уменьшаются. Значения, характеризующие эту динамику, помещены в таблице 4.1.

Профили ε и n с изменением t не деформируются, аналогично тому, что происходит при адсорбции вещества в пористой среде при линейной стационарной изотерме сорбции [152]. Однако в общем случае, когда упрощающие допущения, использованные при выводе (4.58) и (4.59), снимаются, консервативный характер фронта может и не быть. Анализ этого явления можно провести путем численных расчетов по соответствующим формулам.

Приведенные выше решения хотя и дают общую картину процесса, но из-за асимптотического их характера не описывают эволюцию переднего фронта волны и начальные стадии процесса. Такое описание может быть получено при помощи численного анализа систем (4.33) или (4.61).

Таблица 4.1

Стационарные значения пористости

$\omega_2, \text{ c}^{-1}$	0,1	0,5	1,0
ε_{st}	0,2915	0,2649	0,2416
α	58,8406	14,2495	8,5645
β	59,6859	15,1346	9,4877
γ	0,8453	0,8851	0,9232

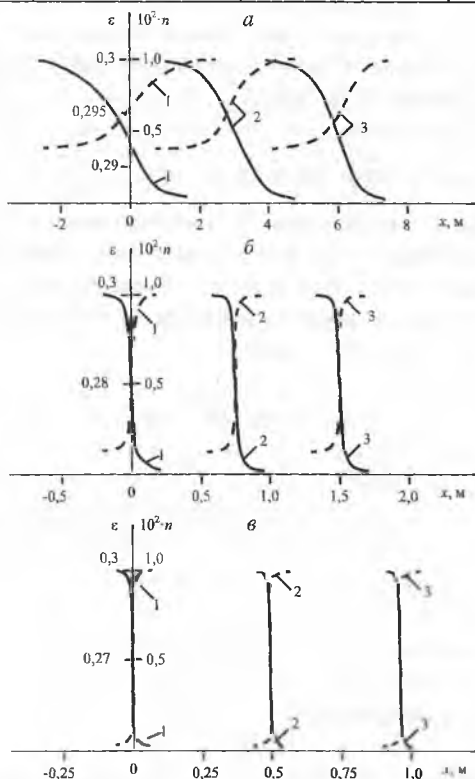


Рис. 4.2. Асимптотические профили p (—), (---) при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=0,1$ (а); 0,5 (б); 1,0(в), $t=0$ (1); $4 \cdot 10^3$ (2); $8 \cdot 10^3$ (3) с для $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$

Для решения системы (4.61) при условиях (4.35) применим метод конечных разностей [157]. Пусть задача рассматривается в области $\Omega = [0, T] \cdot [0, X]$, где T – верхняя граница времени, X – верхняя граница координаты x ; значение T выбирается произвольно, а X так, чтобы оно было достаточно большим и $[0, X]$ охватил интервал распространения волны как по n , так и по ε за промежутки времени $[0, T]$.

В области Ω введем сетку с узловыми точками (t, x) , где t, x определяются как $t_j = \tau \cdot j, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J, x_i = h \cdot i, i = 0, 1, \dots, I, h = X/I$. Сеточное решение, определенное в точках (t, x) , для концентрации n и пористости ε обозначим соответственно n_i^j, ε_i^j .

Аппроксимация уравнения в (4.61) может проводиться различными способами. Рассмотрим некоторые шаблоны, с использованием которых аппроксимируем производные конечными разностями (рис.4.3). При использовании шаблонов а) и б) получаются явные разностные схемы первого порядка точности по шагам τ и h , а при в) и г) – неявные. При использовании явных разностных схем следует учесть, что на основе шаблона

а) получается условно устойчивая схема: при $k = \frac{\tau v_0}{h \varepsilon_i^j} \leq 1$ – устойчива, а в

противном случае – неустойчива. При использовании схемы на основе шаблона б) всегда получается неустойчивая разностная схема. Неявная схема на основе шаблона в) абсолютно устойчива. А на основе г) устойчива при $k > 1$. Схему второго порядка точности по τ и h можно получить на основе шаблона д) – «прямоугольник»:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} (n_i^{j+1} - n_i^j + n_{i+1}^j - n_{i+1}^{j+1}) + \frac{v_0}{\varepsilon_y} \cdot \frac{1}{2h} (n_{i+1}^j - n_i^j + n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1}) = \\ = \frac{1}{2\tau \varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_{i+1}^j) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\frac{1}{2\tau} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_{i+1}^j) = (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \frac{\omega_0 v_0}{k_0} \cdot \frac{(1 - \tilde{\varepsilon}_y)^2}{\tilde{\varepsilon}_y^3} - \omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y,$$

где $\tilde{\varepsilon}_y = \frac{1}{3} (\varepsilon_i^j + \varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^j)$, $\tilde{n}_y = \frac{1}{3} (n_i^j + n_i^{j+1} + n_{i+1}^j)$.

Дополнительные условия (4.35) принимают вид

$$\varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, n_i^0 = 0, n_i^j = n_0, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}.$$

К этим условиям добавляется

$$\varepsilon_0^j = \varepsilon_n,$$

где ε_n – стационарное значение пористости, определяемое как решение уравнения

$$\varepsilon^4 - \theta(\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 = 0, \quad \theta = \frac{v_0 \omega_1}{k_0 \omega_2 n_0}.$$

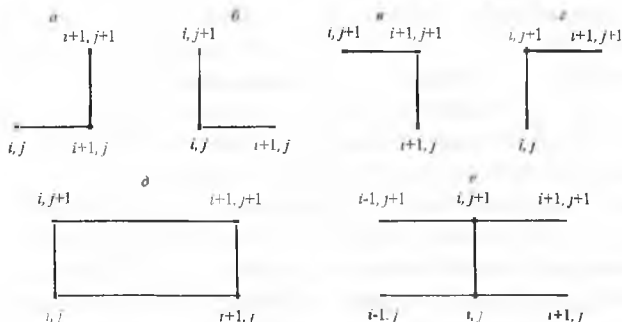


Рис. 4.3. Шаблоны, используемые для аппроксимации уравнений (4.61): а) «явный левый уголок»; б) «явный правый уголок»; в) «неявный левый уголок»; г) «неявный правый уголок»; д) «прямоугольник»; е) шеститочечный шаблон

Из (4.65) можно получить формулы, явно выражающие неизвестное решение $(j+1)$ -го слоя через известные решения j -го, $(j+1)$ -го слоев

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^{j+1} &= \varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^j + \frac{2\tau\omega_1 v_0}{k_0} \cdot \frac{(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y)(1 - \tilde{\varepsilon}_y)^2}{\tilde{\varepsilon}_y^3} - 2\tau\omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y, \\ n_{i+1}^{j+1} &= n_i^j + \frac{1}{1 + a_y} \left[\frac{\varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j+1} + \varepsilon_{i+1}^j}{\varepsilon_0} + (1 - a_y)(n_{i-1}^j - n_i^{j+1}) \right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

где $a_y = v_0 \tau / (h \cdot \tilde{\varepsilon}_y)$.

Разностная схема (4.66) имеет ряд преимуществ перед схемами первого порядка точности на основе шаблонов а) – з). С другой стороны, (4.66) имеет и некоторые недостатки. Она, как и другие аналогичные схемы второго порядка точности, требует большей гладкости решения [137], поскольку в ошибку аппроксимации входят производные высоких порядков. При недостаточной гладкости решения формальное повышение точности схемы может привести к увеличению фактической погрешности и искажению решения. Реализация разностной схемы (4.66) показала, что при значениях n , близких n_0 , схема дает сеточное решение плохого качества. В указанной области заметно нарушается монотонность решения, обнаруживается осцилляция, достигающая 30-40%. Особенно это заметно для случаев с сильной кольматацией, что имеет место при относительно больших n_0 и ω_2 . Таким образом, схема второго порядка точности (4.66) является нерегулярной. Это свойство заставляет от нее отказаться, несмотря на

более высокую точность аппроксимации по сравнению со схемами первого порядка точности.

Для регуляризации схем второго порядка точности применяются различные методы [137]. Наиболее распространенными среди них являются методы: явного сглаживания, «искусственной вязкости», «временной вязкости» и др. Общая идея этих методов основана на добавлении в уравнения диссипативных членов, что делает решение непрерывным и гладким; разрывы заменяются переходными зонами.

Учитывая вышеуказанные обстоятельства, для решения системы (4.63) применялась конечноразностная аппроксимация первого порядка точности с использованием шаблона «неявный левый угол» (рис.4.3в).

Отметим, что второе уравнение системы (4.61) может быть решено численно с точностью аппроксимации $O(\tau^2)$. Для этого нужно применить метод Эйлера с пересчетом. В общем случае, когда уравнение дается в виде $\partial \varepsilon / \partial t = f(\varepsilon, n)$, разностная схема имеет вид

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau \left[f(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{n}_{ij}) + f(\tilde{\varepsilon}_i^{j+1}, \tilde{n}_{ij}) \right],$$

где $\tilde{\varepsilon}_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau f(\tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{n}_{ij})$, $i = \overline{0, I}$, $i = \overline{0, J-1}$.

Уравнение (4.66) можно аппроксимировать с точностью $O(\tau^2 + h^2)$ с использованием шеститочечного шаблона, изображенного на рис.4.3е. Вторая производная $\partial^2 n / \partial x^2$ аппроксимируется отдельно на j -ом и $(j+1)$ -ом слоях и в уравнении используется среднеарифметическое от таких аппроксимаций. Полученная неявная разностная схема, представляющая собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов, может быть решена методом прогонки.

С учетом отмеченного, во избежании процедур, связанных с использованием схем второго порядка точности, составлена неявная схема первого порядка точности с аппроксимацией производных в точках (i, j) , $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$. При этом расчетные формулы для системы (4.61) по определению сеточных функций ε_i^{j+1} , n_i^{j+1} имеют вид

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{ij}) \cdot \frac{3600 \tau \omega_1 \nu_0}{k_g} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{ij})}{\tilde{\varepsilon}_{ij}^3} - 3600 \tau \omega_2 \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij}.$$

$$n_i^{j+1} = \left[n_i^j + a n_{i-1}^{j+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) \right] / (1 + a),$$

где $a = \frac{3600 \tau \nu_0}{h \tilde{\varepsilon}_{ij}}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = (\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^{j+1}) / 2$, $\tilde{n}_{ij} = (n_i^j + n_{i-1}^{j+1}) / 2$, $i = \overline{1, 2, \dots}$, $j = \overline{0, 1, \dots}$,

$$n_0^j = n_0, \quad \varepsilon_0^j = \varepsilon_0, \quad n_i^0 = 0, \quad \varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Для системы (4.33) разностная схема имеет аналогичный вид. В системе (4.74) использованы переводные коэффициенты с тем, чтобы время t имело единицу измерения в часах.

Результаты расчетов при использованных выше значениях ν_0 , k_0 , n_0 , ε_0 приведены на рис.4.4, 4.5. Развитие профилей n и ε во времени, как видно из рисунков, зависит от значений ω_1 и ω_2 , а также вида коэффициента фильтрации $K(\varepsilon)$. С ростом значения ω_2 при постоянном ω_1 замечается уменьшение скорости распространения фронтов n и ε . При этом ширина фронтов уменьшается – профили становятся более крутыми. Когда коэффициент фильтрации принимается из закона Кармана-Козени по сравнению со случаем с $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$, скорости распространения фронтов увеличиваются (рис.4.5). Кроме того, волновой фронт более «размазан» и ε_0 не намного меньше, чем ε_0 . Этот факт может быть расценен так: в случае $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ при $\nu = \nu_0 = \text{const}$ кольтационный процесс более интенсивен по сравнению со случаем закона Кармана-Козени. Однако и для обобщенной зависимости $K(\varepsilon)$ передний фронт волны с ростом ω_2 при постоянном ω_1 становится более крутым и скорость распространения волны уменьшается.

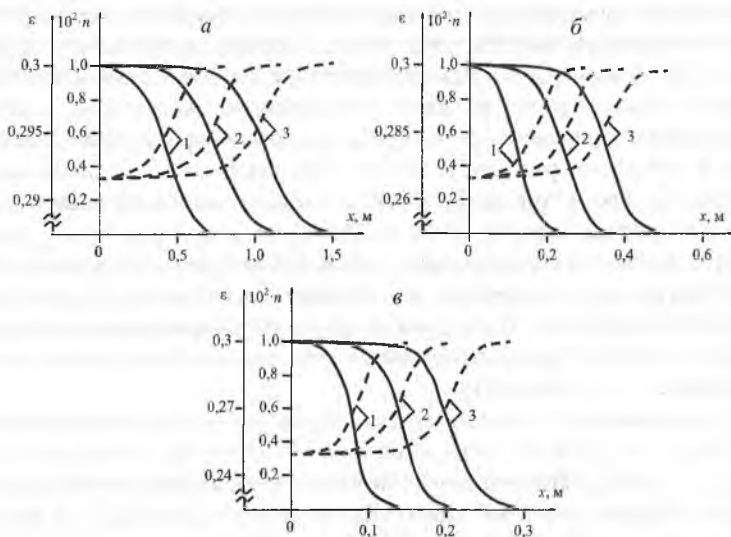


Рис. 4.4. Профили n (—), ε (----) при $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.1$ (а); 0.5 (б); 1.0 (в), $t = 180$ с (1); 360 (2); 540 (3) для $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$.

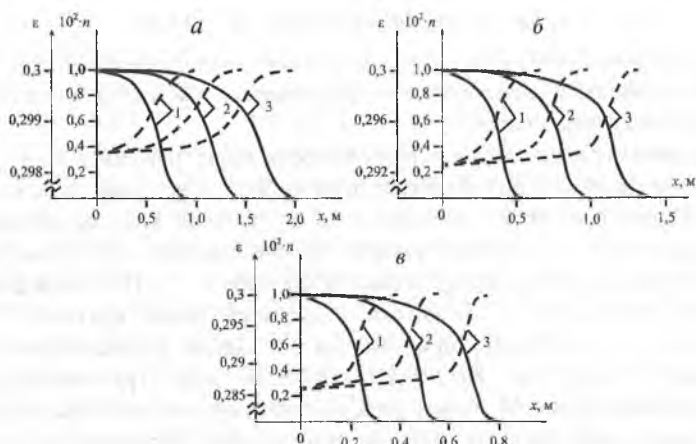


Рис. 4.5. Профили n (—), ε (---) при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=0,1$ (а); $0,5$ (б); $1,0$ (в), $t = 180$ с (1); 360 (2); 540 (3) для $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon/(1-\varepsilon)^2$.

Расчеты на основе дискретизированной системы, соответствующей (4.33), когда коэффициент v_0/ε заменяется на v_0/ε_0 , показали, что результаты отличаются незначительно от представленных на рис.4.4, однако разница становится существенной при росте ω_2 . Поэтому, сравнение результатов при $\omega_2=1,0$ с $\varepsilon_{st}=0,2416$, вообще говоря, не имеет смысла. Соответственно, асимптотическое решение, представленное на рис.4.2в, не может быть сравнено с решением, что на рис.4.4в, хотя конфигурации профилей схожи. Как видно из рис.4.4а, б, при $t = 540$ с профили почти такие же, как на рис.4.2а, б. Кроме того, на фронте волн концентрации и пористости, особенно в его передней части, где приблизительно $n < n_0/2$ и $\varepsilon < (\varepsilon_0 + \varepsilon_{st})/2$, почти устанавливается стационарный режим. Точки фронта в указанной зоне практически распространяются с постоянной скоростью — u . Поэтому этот диапазон времени может быть рассмотрен как этап формирования асимптотического решения. Продолжительность этого этапа в общем случае зависит от значений ω_1 , ω_2 и вида $K(\varepsilon)$.

Оценка значений P осуществляется на основе закона Дарси при известном ε . Очевидно, что при $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$ в динамике F характерно уменьшение от $v_0/(k_0\varepsilon_{st})$ до $v_0/(k_0\varepsilon_0)$. Причем первое значение устанавливается за фронтом, а второе — до фронта, т.е. в зоне фильтрации жидкости без частиц. Зона фронта является переходной для P . В случае закона Кармана-Козени соответственно имеем уменьшение P от $v_0(1-\varepsilon_{st})^2/(k_0\varepsilon_{st}^3)$ до $v_0(1-\varepsilon_0)^2/(k_0\varepsilon_0^3)$.

4.3. Задача кольтматационно-суффозионной фильтрации для конечного пласта с заданным режимом по давлению

Система уравнений (4.1) может быть рассмотрена для конечной и полубесконечной областей пористой среды. Асимптотические решения типа «бегущей волны» рассматриваются для бесконечной области. Обычно для полубесконечной области можно ставить задачи с граничным скоростным режимом, т.е. на границе области (например, $x=0$) задается скорость фильтрации $v|_{x=0} = v(t)$. Для конечной области (например, $D\{x, 0 \leq x \leq 1\}$) можно задавать два граничных режима: 1) на одной из границ задается скорость фильтрации; эта задача в принципе не отличается от приведенной выше задачи для полубесконечной области; 2) на границах области ($x=0$ и $x=1$) задаются давления $p_n(t)$ и $p_k(t)$.

С практической точки зрения постановка задачи для конечной области представляется более интересной. Это связано с тем, что обычно фильтры, применяемые для разделения фаз дисперсной среды, хроматографические колонны имеют конечную длину и в ограниченном диапазоне изменения времени концентрационный фронт отдельных фаз может достигать конца фильтра. Кроме того, создание скоростного граничного режима связано с техническими трудностями, а граничный режим с заданными давлениями чаще реализуется естественным образом. В свете сказанного здесь рассматривается задача для конечной области с граничным режимом по давлению.

В первоначально насыщенную чистым (без частиц) флюидом пористую среду длиной l , пористостью ε_0 с $t > 0$ начинает втекать дисперсная система с концентрацией частиц n_0 . Течение происходит под действием градиента давления $\partial p / \partial x$, создаваемого постоянными граничными давлениями p_n и p_k . Начальные и граничные условия записываются так:

$$n(0, x) = 0, \quad \varepsilon(0, x) = \varepsilon_0, \quad (4.67)$$

$$\begin{cases} p(t, 0) = p_n, & p(t, l) = p_k, \\ n(t, 0) = n_0, & \varepsilon(t, 0) = \varepsilon_{st}, \end{cases} \quad (4.68)$$

где ε_{st} – стационарное значение пористости, определяемое ниже.

При $t \rightarrow \infty$ по всей длине фильтра устанавливается постоянная концентрация n_0 и пористость ε_{st} . Естественно $\varepsilon_{st} < \varepsilon_0$. При этом градиент давления должен быть постоянным

$$\partial p / \partial x = -(p_n - p_k) / l.$$

Предположим, что такой стационарный режим мгновенно устанавливается на входе в фильтр ($x=0$) и пористость становится равной ε_s . Очевидно, что в зоне стационарного течения $\partial n/\partial x = 0$, $\partial n/\partial t = 0$, $\partial \varepsilon/\partial t = 0$. Из уравнения кинетики при $p_n > p_s$ получим уравнение

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_s) \omega_1 \frac{p_n - p_s}{l} - \omega_2 \varepsilon_s n_0 = 0,$$

решая которое определяем

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 / (1 - \theta), \quad (4.69)$$

где $\theta = l \omega_2 n_0 / [\omega_1 (p_n - p_s)]$.

Стационарное состояние, когда $n = n_0$, $\varepsilon = \varepsilon_s$, отнюдь не означает абсолютное равновесное состояние. С наступлением этого режима устанавливается квазиравновесное состояние, когда доля коагулируемых частиц становится равной доли срывааемых с пор частиц за счет суффозии. Этот обмен таким образом происходит в течение всего процесса фильтрации.

Из уравнения неразрывности с учетом закона Дарси получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(\varepsilon) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0,$$

откуда

$$K(\varepsilon) \frac{\partial p}{\partial x} = c(t), \quad (4.70)$$

где $c(t)$ – некоторая функция времени t . Нетрудно видеть, что $c(t)$ есть скорость фильтрации $v(t)$. Очевидно, что $c(t)$ за счет коагуляции должна быть убывающей функцией; наибольшее ее значение $c(0)$, а наименьшее – $c(\infty)$.

Интегрируя (4.70) по x , находим

$$K'(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + K(\varepsilon) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (4.71)$$

где $K'(\varepsilon)$ – производная $K(\varepsilon)$ по ε .

С учетом закона Дарси уравнение баланса системы (4.1) без учета неактивной диффузии принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} K(\varepsilon) \cdot P \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (4.72)$$

Таким образом, для определения неизвестных $p(t, x)$, $\varepsilon(t, x)$, $n(t, x)$ получается система, состоящая из уравнений кинетики, (4.71), (4.72). Она решается при условиях (4.67), (4.68).

Для решения этой нелинейной системы применен метод конечных разностей [157]. Использована неявная разностная схема с точностью аппроксимации $O(\tau + h)$, где τ , h – шаги сетки по t и x .

На $(j+1)$ -ом слое сетки D_{ij} $\{x_i = i \cdot h, i = \overline{0, I}, h = l/I, t_j = \tau \cdot j, j = \overline{0, J}, \tau = T/J\}$, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс, I, J – количество точек деления сетки, аппроксимируется уравнение (4.71) с использованием значений ε в точках $(i-1, j+1)$, (i, j) и аппроксимацией производных $\partial p/\partial x$ в точках $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$, $\partial^2 p/\partial x^2$ в точках $(i-1, j+1)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j+1)$. При использовании закона $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ в результате получается разностная схема

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Bp_i^{j+1} + Cp_{i+1}^{j+1} = 0, \quad (4.73)$$

где $A = \varepsilon_{i-1}^j$, $B = \varepsilon_{i-1}^j + \varepsilon_i^j$, $C = \varepsilon_i^j$, $i = \overline{1, I-1}$, $j = \overline{0, J-1}$, p_i^j , ε_i^j – сеточные значения функций $p(t, x)$ и $\varepsilon(t, x)$ в точке (i, j) .

Из уравнения кинетики и (4.72) соответственно получим

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau \left[(\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}_0) \frac{\omega_1}{h} |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| - \omega_2 \bar{\varepsilon}_i \tilde{n}_i \right], \quad (4.74)$$

$$n_i^{j+1} = \frac{1}{1 + a_{ij}} \left[\frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) + n_i^j + a_{ij} n_{i-1}^{j+1} \right], \quad (4.75)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \varepsilon_i^j)$, $\tilde{n}_{ij} = \frac{1}{2}(n_{i-1}^{j+1} + n_i^j)$,

$$a_{ij} = \frac{\tau}{h^2 \tilde{\varepsilon}_{ij}} K(\bar{\varepsilon}_{ij}) \cdot |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Условия (4.67), (4.68) принимают вид

$$n_i^0 = 0, \quad \varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, \quad p_0^{j+1} = p_n, \quad p_I^{j+1} = p_n, \quad n_0^j = n_0, \quad \varepsilon_0^j = \varepsilon_{st}.$$

Решая систему уравнений (4.73) методом прогонки, определяется давление на $(j+1)$ -ом слое. Затем по уравнению (4.74), (4.75) обычным рекуррентным расчетом определяются пористость и концентрация также на $(j+1)$ -ом слое. С целью уменьшения шага сетки по времени t расчет производился в единице измерения – час, что достигается заменой τ в (4.74), (4.75) на 3600 г.

Скорость фильтрации, согласно закону Дарси, определяется как

$$v_i^{j+1} = \frac{1}{h} K(\bar{\varepsilon}_{ij}) \cdot |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (4.76)$$

Для закона Кармана-Козени получаем систему уравнений (4.73) с коэффициентами

$$A = -\frac{\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j}{2} + E, \quad B = 2E, \quad C = \frac{\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j}{2} + E, \quad E = \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}(1 - \bar{\varepsilon}_{ij})}{3 - \bar{\varepsilon}_{ij}}.$$

Коэффициент a_{ij} для линейного закона $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ и закона Кармана-Козени соответственно определяется как

$$a_y = \frac{\tau k_0}{h^2} |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|,$$

$$a_y = \frac{\tau k_0}{h^2} \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}_{ij}^2}{(1 - \tilde{\varepsilon}_{ij})^2} \cdot |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|.$$

Для скоростного граничного режима задача значительно упрощается. Например, в $x=0$ пусть задан $v(t)=v_0=\text{const}$. Тогда необходимость в уравнении (4.71) отпадает, а уравнения (4.1) запишутся в виде (4.11).

Перепад давления определяется формулой $P=v_0/K(\varepsilon)$.

По разностным уравнениям (4.73) – (4.76) производились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $n_0 = 0,01$, $\varepsilon_0 = 0,3$, $k_0 = 10^{-2}$ м²/(МПа · с), $l = 4$ м, $p_n = 1 \cdot 10^6$ Н/м², $p_k = 0$, $\omega_1 = 0,1$ м²/(МПа · с). Значения ω_2 в различных сериях расчетов принимались равными 0,1; 0,5; 1,0 с⁻¹. По полученным решениям определены профили давления, пористости, концентрации флюида в различные моменты времени. Профили ε и n для линейного закона $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$ и закона Кармана–Козени приведены на рис.4.6, 4.7. Как видно из рисунков, для профилей характерно наличие трех зон: 1) зона за фронтом волн, где пористость и концентрация стабилизируются, достигая значений ε_* и n_0 соответственно; 2) зона увеличения ε от ε_* до ε_0 и уменьшения n от n_0 до 0. В этой зоне содержится фронт концентрации и пористости; 3) зона «покоя», куда концентрационная волна не дошла (следовательно, и волна пористости). Пористость и концентрация соответственно имеют значения, равные ε_0 и 0. В этой зоне происходит фильтрация флюида без частиц. Границы зон определяются несколько условно. Здесь может быть применен подход теории пограничного слоя по определению толщины пограничного слоя и толщины вытеснения [100].

Сопоставление графиков для различных ω_2 (при постоянном ω_1) показывает, что его рост приводит к уменьшению скорости фронта. Если для $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$ при $\omega_2=0,1$ с⁻¹ передняя граница фронта в момент $t=2160$ с доходит до 1,9 м, то при $\omega_2=0,5$; 1,0 с⁻¹ соответственно имеем 0,4 и 0,28 м. Кроме того, с ростом ω_2 передний фронт волны становится более крутым, что соответствует сужению второй зоны. Профили ε соответственно повторяют характерные особенности изменения n , с той лишь разницей, что они увеличиваются от ε_* до ε_0 . Для закона Кармана–Козени отмеченные выше особенности динамики ε и n проявляются более отчетливо. Отмечается значительное уменьшение скорости движения фронтов. С ростом ω_2 фронт интенсивно становится крутым. Например, при $\omega_2=1,0$ с⁻¹ получаются практически вертикальные профили ε и n , т.е. размытие фронта становится незначительным. Указанные явления, по всей видимости, связаны с уменьшением коэффици-

ента фильтрации $K(\varepsilon)$ в случае закона Кармана-Козени по сравнению с линейным случаем - $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$ при одном и том же значении k_0, ε . Таким образом, при малых значениях коэффициента фильтрации влияние на деформацию фронта волн является более существенным.

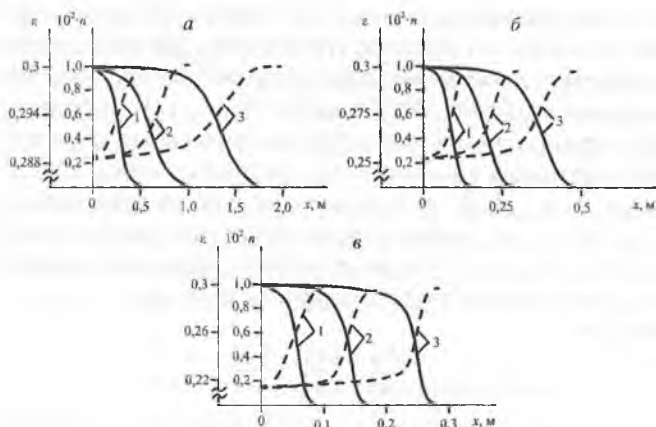


Рис. 4.6. Профили n (—), ε (---) для закона $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$ при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=0,1$ (а); 0,5 (б); 1,0 (в), t (час) = 0,1 (1); 0,3 (2); 0,6 (3).

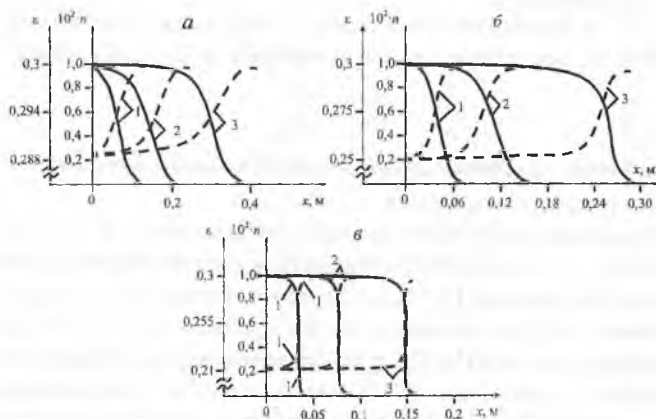


Рис. 4.7. Профили n (—), ε (---) для закона $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon/(1-\varepsilon)^2$ при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=0,1$ (а); 0,5 (б); 1,0 (в), t (час) = 0,1 (1); 0,3 (2); 0,6 (3).

В различных зонах фильтрации динамика давления также имеет свои характерные особенности. В первой и третьей зонах, где $\varepsilon=\varepsilon_*$ и $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\partial\varepsilon/\partial x=0$

из уравнения (4.71) получим $K(\epsilon_{st}) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ и $K(\epsilon_0) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$, т.е. $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$, которое имеет линейное решение. Значит, в первой и третьей зонах градиент давления является постоянным, но эти значения не равны друг другу. Во второй зоне градиент давления от постоянного значения первой зоны переходит к постоянному значению третьей зоны. Другими словами, вторая зона для градиента давления является переходной зоной. Поскольку $\epsilon_{st} < \epsilon_0$ следует ожидать, что $|\partial p / \partial x|_1 > |\partial p / \partial x|_3$, где $|\partial p / \partial x|_k$ ($k = 1, 3$) – модули градиентов давлений в первой и третьей зонах. В предельном случае, когда первая зона охватывает всю модель, т.е. область $[0, l]$, из уравнения $K(\epsilon_{st}) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ при условиях $p(t, 0) = p_n$, $p(t, l) = p_\kappa$ получим линейное распределение давления $p(\infty, x) = p_n - (p_n - p_\kappa)x/l$, откуда получим модуль предельного градиента давления $|\partial p / \partial x|_\infty = (p_n - p_\kappa)/l$. Как видно из этого, предельное значение модуля градиента давления равно его стационарному значению.

Имеет место

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_3 < \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_\infty \leq \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_1. \quad (4.77)$$

Строгость первого неравенства в (4.77) объясняется тем, что до достижения знака равенства третья зона исчезает и вся зона $[0, l]$ постепенно замещается первой зоной.

Из (4.77) и сказанного выше вывода о непрерывном переходе $|\partial p / \partial x|_2$ от $|\partial p / \partial x|_1$ к $|\partial p / \partial x|_3$ следует, что есть такое значение $|\partial p / \partial x|_2^*$ для которого

$$\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_2^* = \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|_\infty.$$

Это значение градиента давления второй зоны, т.е. $|\partial p / \partial x|_2^*$ назовем эквивалентным градиентом давления.

Для указанных выше граничных значений давления $p_n = 1 \cdot 10^6$ Н/м², $p_\kappa = 0$ имеем $|\partial p / \partial x|_\infty = 1/4 = 0,25$ МПа/м. Результаты расчетов $|\partial p / \partial x|$ на основе p_i^{i+1} , полученных как решение (4.73) для первой и третьей зон, помещены в табл. 4.2. Как видно из представленных данных, неравенства (4.77) выполняются и, кроме того, с ростом t $|\partial p / \partial x|_1$ и $|\partial p / \partial x|_3$ уменьшаются. Увеличение ω_2 (при постоянном ω_1) увеличивает $|\partial p / \partial x|_1$ и уменьшает $|\partial p / \partial x|_3$. Физическая интерпретация этого факта следующая. С ростом ω_2 интенсивность кольтматации увеличивается, что резко снижает проводимость модели пористой среды. Как следствие этого, с ростом ω_2 в первой зоне фильтрационное сопротивление увеличивается, что сопровождается увеличением $|\partial p / \partial x|_1$. Уменьшение же $|\partial p / \partial x|_3$ объясняется тем, что при увеличении ω_2 потери давления в основ-

ном происходят в первой и второй зонах и, следовательно, $|\partial p / \partial x|_z$ уменьшается. Помимо этого, с ростом ω_2 длины первой и второй зон значительно сокращаются. Это, естественно, приводит к отмеченной динамике $|\partial p / \partial x|$ в зонах.

Для закона Кармана-Козени получаем аналогичную картину динамики $|\partial p / \partial x|$ в более ярко выраженном виде (табл.4.2).

Скорость фильтрации $v(t)$, вычисленная по (4.76), представлена в таблице 4.3. В расчетах действительно получается постоянное значение скорости в различных узловых точках 1, что должно быть согласно уравнению неразрывности. Из таблицы видно, что с ростом ω_2 скорость $v(t)$ для определенного t уменьшается. Это интерпретируется как очевидное влияние кольтматации на скорость фильтрации. Для закона Кармана-Козени скорости значительно ниже по сравнению со случаем $K(\varepsilon)=k_g \varepsilon$, что вполне согласуется с вышеотмеченной тенденцией влияния коэффициента фильтрации.

Таблица 4.2

Значения $|\partial p / \partial x|$ в зонах фильтрации, МПа/м

t , часы	Зоны	$\omega, \text{с}^{-1}$		
		0,1	0,5	1,0
$K(\varepsilon)=k_{\varepsilon}$				
0,1	1	0,2586	0,2896	0,3204
	3	0,2491	0,2484	0,2478
0,3	1	0,2567	0,2864	0,3164
	3	0,2471	0,2447	0,2429
0,6	1	0,2556	0,2810	0,3096
	3	0,2441	0,2394	0,2367
$K(\varepsilon)=k_{\varepsilon}\varepsilon^3/(1-\varepsilon)^2$				
0,1	1	0,2876	0,3950	0,7200
	3	0,2496	0,2486	0,2475
0,3	1	0,2815	0,3820	0,6536
	3	0,2481	0,2461	0,2447
0,6	1	0,2805	0,3776	0,6094
	3	0,2458	0,2426	0,2395

Визуальная сравнительная оценка значений таблицы 4.3 со скоростями фронта ε и n , представленных на рис.4.6, 4.7 показывает существенную разницу. Это не удивительно, т.к. скорость распространения волнового фронта пропорциональна не скорости фильтрации, а физической скорости $v(t)/\varepsilon$ движения флюида в пористой среде.

Таблица 4.3

Скорость фильтрации v , м/час в различные моменты времени

№ п/п	t, час	$\omega, \text{с}^{-1}$		
		0,1	0,5	1,0
$K(\varepsilon)=k \cdot \varepsilon$				
1	0,1	2,6903	2,6816	2,6755
2	0,2	2,6791	2,6618	2,6510
3	0,3	2,6683	2,6420	2,6269
4	0,4	2,6572	2,6230	2,6024
5	0,5	2,6464	2,6039	2,5794
6	0,6	2,6356	2,5852	2,5564
7	0,7	2,6248	2,5668	2,5333
$K(\varepsilon)=k \cdot \varepsilon^3/(1-\varepsilon)^2$				
8	0,1	0,4943	0,4860	0,4799
9	0,2	0,4932	0,4778	0,4723
10	0,3	0,4918	0,4777	0,4605
11	0,4	0,4903	0,4680	0,4544
12	0,5	0,4889	0,4608	0,4376
13	0,6	0,4874	0,4576	0,4147
14	0,7	0,4860	0,4558	0,3932

Отметим, что уравнение (4.70) может быть интегрировано аналитически

$$p = p_* - (p_* - p_\kappa) \left[\int_0^t \frac{dx}{K(\varepsilon)} \right]^{-1} \cdot \int_0^t \frac{dx}{K(\varepsilon)}. \quad (4.78)$$

Однако для расчета по (4.78) должно быть известно $\varepsilon(t, x)$, для определения которого по уравнению кинетики в свою очередь нужно подставить значение $\partial p / \partial x$. Это обстоятельство не позволяет получить явное аналитическое решение задачи.

4.4. Кольтационная фильтрация с учетом эффектов конвективной диффузии

Дисперсионные эффекты в пористых средах связаны с конвективной диффузией, обусловленной взаимодействием и смешением элементарных струек, появляющихся при движении в пересеченном поровом пространстве, и со стесненной молекулярной диффузией примеси в порах [126, 223, 224]. Нерегулярность реальных пористых структур и ее следствие – нерегулярность поля скоростей являются причиной дисперсии жидких масс в процессе фильтрационного переноса. Эти явления в равной мере характерны и

для однородных в макроскопическом отношении материалов, пористость и проницаемость которых не зависят от координат, и для неоднородных материалов, когда указанные характеристики представляют собой случайные или детерминированные поля [36].

Конвективная диффузия в однородных средах изучена в [126], а для неоднородных в [35, 36, 223, 243, 244]. В неоднородных средах конвективная диффузия усиливается, что связано с возникновением фильтрационной псевдотурбулентности – своеобразного флукутирующего в пространстве движения жидкости, налагающегося на усредненный фильтрационный поток [243]. Но и в однородных средах, когда фильтрационная псевдотурбулентность отсутствует, влияние конвективной диффузии на гидродинамические характеристики фильтрационного потока значительно и им не всегда можно пренебречь [126].

Конвективная диффузия в пористой среде имеет важное значение при исследовании многих прикладных задач. Практическим аспектам этого явления и его влиянию на показатели процесса посвящено значительное количество работ. В частности, применительно к задачам гидрогеологии вопрос исследован в [92, 133], а нефтегазодобычи – в [163].

При фильтрации дисперсных систем в пористой среде одновременно могут происходить явления конвективной диффузии, кольматации пор частицами дисперсной фазы и их суффозия. Взаимодействие этих явлений представляет собой важную задачу кольматационной фильтрации. Здесь на основе ранее предложенной кольматационной модели – (4.1) совместно исследуются процессы конвективной диффузии, кольматации и суффозии.

В уравнении баланса коэффициент диффузии – D принят как постоянная величина. В общем случае этот коэффициент зависит от скорости потока [126].

Пусть в системе (4.1), которая рассматривается в полубесконечной области $[0, \infty)$, создан режим фильтрации с постоянной скоростью фильтрации v_0 ; т.е. $v(t) = v_0$. Тогда (4.1) записывается в виде (4.11).

Первоначальную пористость среды примем равной ε_0 . Среда до начала процесса заполнена жидкостью без частиц, а начиная с $t > 0$ в нее в точке $x=0$ начинает поступать жидкость с объемной концентрацией частиц n_0 . Следовательно, начальные и граничные условия задачи могут быть приняты так:

$$\begin{aligned} n(0, x) &= 0, & \varepsilon(0, x) &= \varepsilon_0, \\ n(t, 0) &= n_0, & \varepsilon(t, 0) &= \varepsilon_{st}, \\ n(t, \infty) &= 0, & \varepsilon(t, \infty) &= \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Просмотрим сначала асимптотическое решение задачи. Вводя переменную $z=x-ut$, относительно функций $n(z)=n(x-ut)$, $\varepsilon(z)=\varepsilon(x-ut)$ из (4.11) при замене v_0/ε в уравнении баланса v_0/ε_0 (такая замена при слабых кольтационных эффектах, как указывалось выше, допустима), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{v_0}{\varepsilon_0} - u \right) \frac{dn}{dz} &= D \frac{d^2 n}{dz^2} - \frac{u}{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon}{dz}, \\ -u \frac{d\varepsilon}{dz} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \frac{v_0}{K(\varepsilon)} - \omega_2 \varepsilon n. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Начальные условия в (4.79) для асимптотических решений теряют смысл, а граничные условия дают

$$\begin{aligned} n(-\infty) &= n_0, & \varepsilon(-\infty) &= \varepsilon_{st}, \\ n(\infty) &= 0, & \varepsilon(\infty) &= \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Интегрируя первое уравнение (4.80) по z с учетом условий (4.81) при $z \rightarrow -\infty$ приходим к

$$Du \frac{dn}{dz} = - \left(\frac{v_0}{\varepsilon_0} - u \right) (n_0 - n) + \frac{u}{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_{st}). \quad (4.82)$$

При $z \rightarrow -\infty$ в (4.82), очевидно, $dn/dz = 0$. Учитывая условия (4.81) при $z \rightarrow -\infty$ из (4.82) получаем

$$- \left(-u + \frac{v_0}{\varepsilon_0} \right) n_0 + \frac{u}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}) = 0,$$

откуда

$$u = \frac{v_0 n_0}{\varepsilon_0 n_0 + \varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \quad (4.83)$$

Таким образом, скорость движения фронта волны как по n , так и по ε однозначно определяется по (4.83), что имело в задачах без учета конвективной диффузии. Другими словами, конвективная диффузия не влияет на скорость распространения фронта волны.

Здесь в отличие от случая $D=0$ зависимость между n и ε имеет более сложный вид и не задается в явном линейном или нелинейном виде. Чтобы получить эту зависимость из второго уравнения (4.80) и (4.82), составим уравнение

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = - \frac{u}{D} \cdot \frac{- \left(-u + \frac{v_0}{\varepsilon_0} \right) (n_0 - n) + \frac{u}{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_{st})}{(\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{\omega_1 v_0}{K(\varepsilon)} - \omega_2 \varepsilon n}. \quad (4.84)$$

Уравнение (4.84) решается в $[\varepsilon_{st}, \varepsilon_0]$ с условием $n(\varepsilon_{st}) = n_0$ или $n(\varepsilon_0) = 0$. Следует учесть, что при $\varepsilon = \varepsilon_{st}$, $n = n_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 0$ правая часть (4.84) имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$, что создает определенные трудности при численном решении уравнения.

Зависимость $n(\varepsilon)$ можно аппроксимировать формулой

$$n = n_0 \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}} \right)^\alpha, \quad (4.85)$$

где α определяется как

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} (\ln n_i - \ln n_0) \ln \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_i}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}}{\sum_{i=1}^{m-1} \ln^2 \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_i}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{st}}},$$

где n_i – дискретные решения (4.4.6), определенные в точках ε_i , $i = \overline{1, m-1}$, а в точке $i=0$ принимается $n=n_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Используя (4.85) из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\varepsilon} &= \frac{u}{(\varepsilon_0 - \varepsilon) \frac{\omega_1 v_0}{K(\varepsilon)} - \omega_2 \varepsilon n}, \\ \frac{dz}{dn} &= \frac{D}{-\left(\frac{v_0}{\varepsilon_0} - u\right)(n_0 - n) + \frac{u}{\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_{st})}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

с точностью до постоянного слагаемого определяются профили волн пористости и концентрации $z = z(\varepsilon)$, $z = z(n)$.

Абсолютный перепад давления p определяется из закона Дарси при известном $\varepsilon(z)$:

$$p = v_0 / k(\varepsilon(z)).$$

Коэффициент фильтрации $K(\varepsilon)$, как и выше, в наиболее простом случае может быть принят в виде $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$, $k_0 = \text{const}$ [79], а также в виде закона Кармана-Козени [179]. В первом случае ε_{st} определяется как

$$\varepsilon_{st} = \frac{1}{2} \left(-\theta + \sqrt{\theta(\theta + 4\varepsilon_0)} \right), \quad \theta = \frac{\omega_1 v_0}{k_0 \omega_2 n_0}, \quad (4.87)$$

а в случае формулы Кармана-Козени как решение уравнения

$$\varepsilon^4 - \theta(\varepsilon_0 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)^2 = 0.$$

Рассмотрим теперь численное решение (4.11) при условиях (4.79) методом конечных разностей [157]. В области $[0,1] \times [0,T]$, как и выше, введем

сетку. Здесь l – условная длина модели, которая выбирается достаточно большой, чтобы при $x=l$ всегда был $n=0$ и $\varepsilon=\varepsilon_0$, T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Сеточную область обозначим через D_{ht} .

Производные в (4.1) заменим конечными разностями с точностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$, причем производные $\partial n / \partial x$ и $\partial^2 n / \partial x^2$ аппроксимируются на $(j+1)$ -ом слое, что в результате дает разностную неявную схему

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} + \frac{v_0}{\tilde{\varepsilon}_y} \cdot \frac{n_{i+1}^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}}{2h} = D \frac{n_{i-1}^{j+1} - 2n_i^{j+1} + n_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau}, \quad (4.88)$$

$$\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau} = (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \frac{\omega_1 v_0}{K(\tilde{\varepsilon}_y)} - \omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y,$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_y = (\varepsilon'_{i-1} + \varepsilon'_i) / 2, \quad \tilde{n}_y = (n'_{i-1} + n'_i) / 2, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Из второго разностного уравнения (4.88) непосредственно получается

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau \left[(\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \frac{\omega_1 v_0}{K(\tilde{\varepsilon}_y)} - \omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y \right], \quad (4.89)$$

а из первого

$$A_i n_{i-1}^{j+1} - c_i n_i^{j+1} + B_i n_{i+1}^{j+1} = F_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (4.90)$$

где

$$A_i = r_1 + r_2, \quad B_i = r_1 + r_2, \quad C_i = 2(r_2 + 1),$$

$$r_1 = \frac{v_0 \tau}{\tilde{\varepsilon}_y}, \quad r_2 = \frac{2Dr}{h^2}, \quad F_i = -2n_i^j - 2(\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) / \varepsilon_0.$$

Модуль градиента давления в точках D определяется как

$$|\nabla p| = v_0 / K(\varepsilon'_i), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{0, J}. \quad (4.91)$$

Условия (4.79) аппроксимируются в виде

$$n_i^0 = 0, \quad \varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, \quad i = \overline{1, I},$$

$$n_0^j = n_0, \quad \varepsilon_0^j = \varepsilon_0, \quad j = \overline{0, J},$$

$$n_I^j = 0, \quad \varepsilon_I^j = \varepsilon_0, \quad j = \overline{0, J}.$$

В (4.88) переходим к безразмерным разностным уравнениям

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tilde{\tau}} + \frac{1}{2} Pe (n_{i+1}^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}) = n_{i-1}^{j+1} - 2n_i^{j+1} + n_{i+1}^{j+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tilde{\tau}}, \quad (4.93)$$

$$\frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tilde{\tau}} = (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \Omega_1 - \Omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1},$$

где $\tilde{\tau} = \frac{\tau D}{h^2}$, $Pe = \frac{v_0 h}{\tilde{\varepsilon}_y D}$, $\Omega_1 = \frac{\omega_1 v_0 h^2}{K(\tilde{\varepsilon}_y) D}$, $\Omega_2 = \frac{\omega_2 h^2}{D}$.

Из (4.93) видно, что процесс характеризуется безразмерными числами Пекле – Pe , суффозии – Ω_1 и кольматации – Ω_2 .

Расчет по дискретной модели (4.89)–(4.91) осуществляется в следующей последовательности. По известным решениям j -го слоя по (4.89) определяются ε_i^{j+1} , затем система (4.90) с учетом (4.92) решается методом прогонки и определяются n_i^{j+1} . Прогночные коэффициенты α_{i+1} , β_{i+1} в

$$n_i^{j+1} = \alpha_{i+1} n_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{0, I-1}$$

определяются в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i - F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = \overline{0, I-1},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = n_0.$$

Когда рассматривается конечная модель пласта $0 \leq x \leq l$, где l – длина модели, а не произвольно выбираем большая величина, наряду с режимом $\nu = \nu_0$ можно ставить задачу с заданными давлениями на концах модели. Пусть $p(t, 0) = p_m$, $p(t, l) = p_n$, где p_m , p_n – постоянные давления.

Принимая жидкость и пористую среду несжимаемой из условия $\partial v / \partial x = 0$ приходим к уравнениям (4.70), (4.71).

Для их решения применяется метод конечных разностей. Аппроксимируя $\partial p / \partial x$ и $\partial^2 p / \partial x^2$ на $(j+1)$ -ом слое также как и $\partial n / \partial x$, $\partial^2 n / \partial x^2$ в уравнении баланса, а $\partial \varepsilon / \partial x$ на j -ом слое, получаем разностные уравнения

$$A_i p_{i-1}^{j+1} - C_i p_i^{j+1} + B_i p_{i+1}^{j+1} = 0, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1} \quad (4.94)$$

с коэффициентами

$$A_i = K(\tilde{\varepsilon}_y) / K'(\tilde{\varepsilon}_y) - (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j) / 2,$$

$$B_i = K(\tilde{\varepsilon}_y) / K'(\tilde{\varepsilon}_y) + (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j) / 2,$$

$$C_i = 2K(\tilde{\varepsilon}_y) / K'(\tilde{\varepsilon}_y),$$

а K' – производная от K по ε .

В случае линейного $K(\varepsilon)$ здесь коэффициенты определяются как

$$A_i = \varepsilon_{i-1}^j, \quad B_i = \varepsilon_i^j, \quad C_i = \varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j,$$

а для закона Кармана-Казени –

$$A_i = \tilde{\varepsilon}_y (1 - \tilde{\varepsilon}_y) / (3 - \tilde{\varepsilon}_y) - (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j) / 2,$$

$$B_i = \tilde{\varepsilon}_y (1 - \tilde{\varepsilon}_y) / (3 - \tilde{\varepsilon}_y) + (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j) / 2,$$

$$C_i = \tilde{\varepsilon}_y (1 - \tilde{\varepsilon}_y) / (3 - \tilde{\varepsilon}_y).$$

Заметим, что стартовые значения прогночных коэффициентов в данном случае определяются как $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = p_m$, $p_0^j = p_m$, $p_l^j = p_n$.

Вместо уравнения (4.89) получаем

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau \left[(\varepsilon_y - \tilde{\varepsilon}_y) \frac{\omega_1}{h} |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| - \omega_2 \tilde{\varepsilon}_y \tilde{n}_y \right], \quad i = \overline{1, I}, \quad (4.95)$$

а n_i^{j+1} определяется из (4.90), где

$$r_i = \frac{k_0 \tau}{h^2} |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| \text{ для } K(\varepsilon) = k_0(\varepsilon) \quad (4.96)$$

или

$$r_i = \frac{k_0 \tilde{\varepsilon}_y^2 \tau}{h^2 (1 - \tilde{\varepsilon}_y)^2} |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| \text{ для закона Кармана-Козени.}$$

Скорость фильтрации определяется по

$$v^j = \frac{1}{h} K(\tilde{\varepsilon}_y) \cdot |p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|. \quad (4.97)$$

Отметим, что скорость фильтрации не зависит от x , поэтому в (4.97) для всех i при данном j должны получаться одинаковые значения, а с увеличением j для всех i за счет кольтатационных эффектов v^j должен уменьшаться. Безразмерные числа, использованные в (4.93), здесь определяются как

$$Pe = \frac{\tau}{h^2} \cdot \frac{K(\tilde{\varepsilon}_y)}{\tilde{\varepsilon}_y} |p_i - p_{i-1}|, \quad \Omega_1 = \frac{\omega_1 k_0 h}{D} |p_i - p_{i-1}|,$$

а Ω_2 – также как в (4.93).

Порядок расчета характеристик задачи следующий. Решая (4.94) определяются p_i^{j+1} , а из (4.95) – ε_i^{j+1} . Затем, решая (4.90) с коэффициентами (4.96), находим n_i^{j+1} . На нулевом слое задаются ε_i^0, n_i^0 в соответствии с (4.95), а значения p_i^0 не используются, т.к. уравнение (4.83) не содержит производных по t .

Для оценки влияния D на $\varepsilon(t, x)$ и $n(t, x)$ по (4.89) – (4.91) производились численные расчеты при значениях исходных параметров: $v_0 = 10^{-3}$ м/с, $k_0 = 10^{-2}$ м²/(МПа·с), $\varepsilon_0 = 0,3$, $n_0 = 0,01$, $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1; 0,5; 1,0$ с⁻¹. Значения D принимались равными $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ м²/с. Расчеты проводились в двух сериях. В первой серии коэффициент фильтрации принимался в виде линейной зависимости от пористости, а во второй использовалась зависимость (2.19). По полученным результатам построены профили $\varepsilon(t, x)$ и $n(t, x)$, исследована динамика модуля градиента давления $|\nabla p|$ и числа Пекле – Pe , которые представлены на рис.4.8.- 4.12.

Характерной особенностью влияния D на $\varepsilon(t, x)$ и $n(t, x)$ является размытие фронтов волн по сравнению со случаем $D=0$. Процесс размытия проявляется тем отчетливее, чем больше значение D (рис.4.8–4.10). Размытие приводит к тому, что образуется достаточно широкая зона, на переднем

фронте которой $n \approx 0$ и $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, а на заднем фронте — $\varepsilon \approx \varepsilon_{st}$, $n \approx n_0$. При значениях $D = 10^{-2}$, $D = 10^{-3}$ м²/с в исследованном диапазоне изменения t задний фронт практически совпадает с $x=0$, а при $D = 10^{-4}$ м²/с отчетливо видно продвижение его по направлению движения фильтрационного потока (рис. 4.8–4.10). Скорость концентрированных точек в анализируемой стадии профилей имеет сложный характер. Точки с большими n и меньшими ε двигаются с меньшей скоростью относительно точек с меньшими n и большими ε в пределах области изменения n и ε . Этот факт приводит к прогрессированию размытия фронтов с течением времени, причем оно, как уже отмечалось, тем интенсивнее, чем больше D . В асимптотической стадии, когда деформация профилей завершится, все точки профилей ε и n двигаются с некоторой постоянной скоростью.

Введем понятие эффективной точки, для которой перенос осуществляется с постоянной скоростью и где концентрация равна n_0 . Координата этой точки определяется как

$$x_{эф} = \frac{1}{n_0} \int_0^{n_0} x(n) dn$$

или

$$x_{эф} = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_{st}} \int_{\varepsilon_{st}}^{\varepsilon_0} x(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где $x(n)$, $x(\varepsilon)$ — асимптотические решения, зависящие от n и ε соответственно.

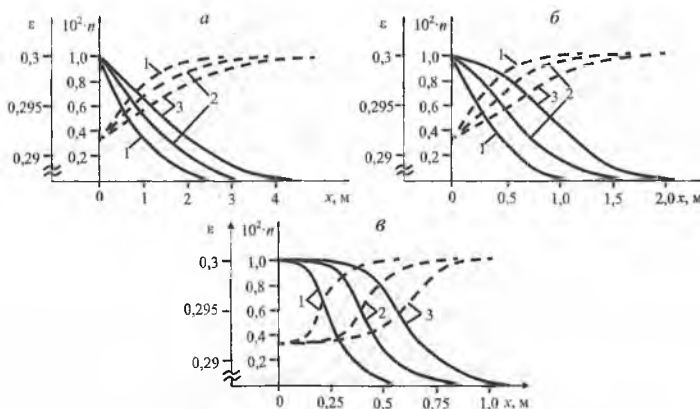


Рис. 4.8. Профили n (—), ε (---) при $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; $D = 10^{-2}$ (а), 10^{-3} (б); 10^{-4} (в) м²/с и $t = 180$ (1); 360 (2); 540 (3) с

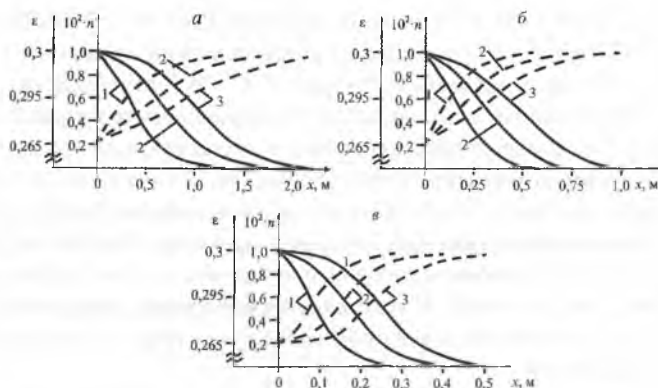


Рис. 4.9. Профили n (—), ε (---) при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=0,5$ с⁻¹; $D = 10^{-2}$ (а), 10^{-3} (б); 10^{-4} (в) м²/с и $t = 180$ (1); 360 (2); 540 (3) с

Изменение параметров ω_1 , ω_2 приводит к таким же деформациям фронтов и n , что и изменение D . Увеличение коэффициента кольтации ω_2 при постоянном ω_1 и D приводит к сужению ширины фронтов, за счет замедления фильтрационного потока. Сравнения профилей n и ε на рис.4.8–4.10а, 4.8–4.10б, 4.8–4.10в показывают, что при сужении фронтов их конфигурация в целом сохраняется. На рисунках видны изменения масштабов x при внешнем подобии профилей.

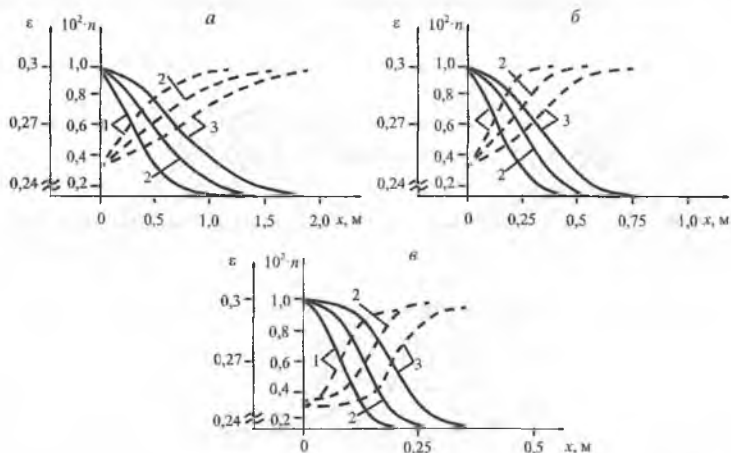


Рис. 4.10. Профили n (—), ε (---) при $\omega_1=0,1$ и $\omega_2=1,0$ с⁻¹; $D = 10^{-2}$ (а), 10^{-3} (б); 10^{-4} (в) м²/с и $t = 180$ (1); 360 (2); 540 (3) с

Абсолютный градиент давления $|\nabla p|$ и число Пекле – Pe являются переменными величинами, изменение которых определяется характером изменения ε по x и t . В зоне интенсивного изменения ε они убывают от одного постоянного значения, соответствующего ε_0 до другого, соответствующего ε_0 (рис.4.11). С увеличением t эта зона перемещается по направлению фильтрационного потока. При определенном D абсолютные значения $|\nabla p|$ и Pe в зоне с $\varepsilon < \varepsilon_0$ тем выше, чем меньше ε_{st} .

Характерные кривые, построенные на основе результатов второй серии расчетов приведены на рис.4.12. При использовании обобщенной зависимости (2.19) вместо линейной, динамика профилей ε и n претерпевает существенные изменения. Сравнивая рис.4.12а с рис.4.8в и рис.4.12б с рис.4.9в, устанавливаем следующие принципиальные отличия. Во-первых, при использовании (2.19) с тем же коэффициентом k_0 , что и в $K(\varepsilon) = k_0\varepsilon$, размытие фронтов увеличивается. Так, если ширина фронта при $t=540$ с в случае $K(\varepsilon) = k_0\varepsilon$ с точностью 10^{-5} была равной 0,9 м (рис.4.8в), то при тех же условиях для случая (2.19) она равна 1,2 м (рис.4.12а). Во-вторых, почти в два раза увеличивается скорость распространения фронтов, что также видно на рисунках. Рост ω_2 приводит к тем же эффектам, что и в случае $K(\varepsilon) = k_0\varepsilon$.

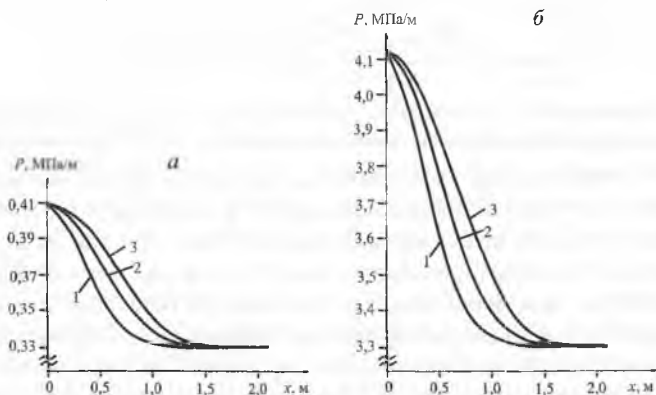


Рис. 4.11. Зависимость P (а) МПа/м и Pe (б) от x при $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=1,0$ с⁻¹, $D=10^{-2}$ м²/с и $t=180(1); 360(2); 540(3)$ с

Анализ задачи с заданными давлениями на концах модели проводится на основе решения (4.94) – (4.97).

Отметим, что учет D в уравнении баланса изменяет его тип и вместе с ним многие его характерные особенности. Для уравнения баланса с D принцип конечности скорости распространения возмущений (КС-принцип) не

выполняется, в то время как для уравнения с $D=0$ этот принцип выполняется [160]. Таким образом, конвективная диффузия при фильтрации, приводя к размытию фронтов, нарушает выполнение КС-принципа. При анализе системы (4.1) и ее решений это свойство нужно принимать во внимание.

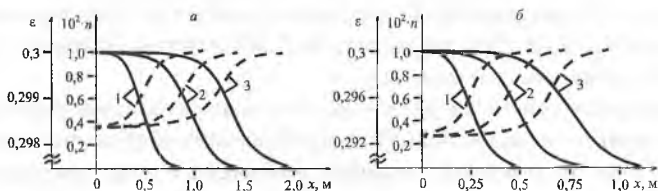


Рис. 4.12. Профили n (—), K (---) для зависимости $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon^3 / (1 - \varepsilon)^2$ при $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с), $D = 10^{-4}$ м²/с, $\omega_2 = 0,1$ (а), $0,5$ (б) с⁻¹ и $t = 180$ (1); 360 (2); 540 (3) с

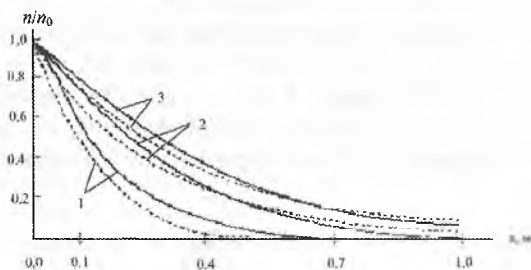


Рис. 4.13. Профили n/n_0 при $t = 3600$ (1), 3×3600 (2), 5×3600 (3) с. Экспериментальные результаты (штриховые кривые), теоретические результаты (сплошные кривые)

В [228] представлены экспериментальные данные по кольтационной фильтрации, полученные собственно автором и Елиасеном. В экспериментах Ю.М.Шехтмана [228] использовалась искусственная пористая среда, составленная из чистого, отсортированного песка. Речная вода, содержащая твердые взвешенные частицы, фильтровалась с постоянной скоростью фильтрации. Вдоль пористой среды контролировалось изменение концентрации твердых частиц и давления. К сожалению условия проведения экспериментов описаны Ю.М.Шехтманом не полностью. В частности, из описания экспериментов нельзя найти значения скорости фильтрации, проницаемости пористой среды и др. Для качественного сравнения полученных здесь теоретических результатов при постоянной скорости фильтрации v_0 с экспериментальными данными Ю.М.Шехтмана [228] производились численные расчеты с использованием следующих данных: $\omega_1 = 0,15$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹, $v_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ м/с, $D = 2 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $k_0 = 0,01$ м²/(МПа·с). Определенные на основе теоретических расчетов

и экспериментальные зависимости n показаны на рис.4.13. Как можно увидеть из представленных данных, различия между теоретическими и экспериментальными данными при $t=3600$ значительны. Однако можно увидеть некоторое согласие между теоретическими и экспериментальными данными при $t=3 \cdot 3600$ (кривая 2) и $t=5 \cdot 3600$ с (кривая 3). До определенных x теоретические результаты больше чем экспериментальные, а для последующих x – меньше. Из-за вышеотмеченных недостатков экспериментальных данных можно говорить только о качественном согласии теоретических и экспериментальных данных. Учет динамических факторов в кинетическом уравнении системы (4.1) позволяет лучше описать экспериментальные результаты. Варьируя параметры ω_1 и ω_2 в этом уравнении теоретические результаты в той или иной степени можно приблизить к экспериментальным.

4.5. Кольматация и суффозия в неоднородной по размерам пор среде

В модели [79] с целью получения принципиальных выводов в кинетике пористости сделан ряд допущений, одним из которых является представление об однородности пористой среды по размерам пор. Это предположение для реальных пластов, естественно, является весьма идеализированным. Структура порового пространства является существенно неоднородной [93, 154]. Даже в чисто гранулярных средах плотность распределения вероятности имеет параметры, которые показывают широту диапазона изменения размеров пор. Поэтому предположение о закупорке отдельно взятой частицей суспензии одной поры среды [79, 179] в реальных средах может не выполняться.

При предположении, что частицы суспензии имеют одинаковые размеры, намного меньшие, чем средние размеры пор, вероятность кольматации мелких пор по сравнению с более крупными высока. Это означает, что ограничиться одной парой параметров w_1 - вероятностью захвата порой хотя бы одной частицы суспензии и освобождения w_2 поры в единицу времени, для исследования процесса уже будет недостаточно. Наиболее вероятным путем здесь на первый взгляд представляется составление модели с использованием статистических характеристик распределения частиц суспензии по объему и размерам пор.

Здесь исследуем процесс фильтрации суспензии с учетом неоднородности среды по размерам пор. С целью упрощения выкладок используем под-

ходы, основанные не на строгом анализе статистических характеристик распределения объема частиц суспензии и размеров пор, а на более простых схематических построениях.

Пусть известна функция распределения пор по размерам, а частицы суспензии – одного размера. Интервал изменения пористости – ε разбиваем на m частей с определенными долями вероятности. В каждом интервале введем среднюю пористость ε_{0i} , определение ее одним из методов осреднения или для проведения осредненных расчетов просто как значение пористости в середине интервала. Тогда пористую среду можно представить как континуум, состоящий из нескольких сосуществующих самостоятельных континуумов (пористых сред). Предположим, что процессы кольтматации и суффозии в каждой пористой среде, входящей в общий континуум, происходят изолированно от процессов в других континуумах. При таких предположениях общий континуум можно представить как набор изолированных континуумов, в которых характеристики фильтрации являются разными.

Схематически такой континуум представим как слоистую среду, состоящую из m однородных слоев – пористых сред, в каждой из которых процессы кольтматации и суффозии определяются свойственными для этих слоев параметрами. Толщины слоев обозначим через H_i , $i=1, m$, а общая толщина $H = \sum_{i=1}^m H_i$. В принципе, толщины слоев могут быть взяты пропорциональными долям вероятностей, с которыми образованы интервалы изменения пористости. В случае образования интервалов с равными долями вероятности, можно принять одинаковые толщины для всех слоев. Тогда $H = mH_i$.

В выделенных слоях имеем

$$\varepsilon_{01} < \varepsilon_{02} < \dots < \varepsilon_{0m}. \quad (4.98)$$

Для описания процессов кольтматации и суффозии в слоях для одномерного фильтрационного течения используем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = (\varepsilon_{0i} - \varepsilon_i) \omega_{1i} P_i - \omega_{2i} \varepsilon_i n_i, \quad P_i = \left| \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.99)$$

где ε_i – текущее значение пористости i -го слоя, ω_{1i} , ω_{2i} – постоянные коэффициенты, характеризующие суффозию и кольтматацию в слое i , n_i – объемная концентрация частиц в суспензии в i -ом слое.

Исходя из (4.98) на основе физических соображений о процессе кольтматации и суффозии, а также с учетом однородности по объему частиц суспензии можно принять, что если $i < j$ явление кольтматации в слое i происходит не менее интенсивнее чем в слое j . Аналогично можно утверждать, что суффозия в слое i происходит не более интенсивно, чем в слое j .

Сказанное равносильно

$$\begin{aligned} \omega_{11} \leq \omega_{12} \leq \dots \leq \omega_{1m}, \\ \omega_{21} \leq \omega_{22} \leq \dots \leq \omega_{2m}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

В слоях уравнение одномерного переноса вещества примем в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{v(t)}{\varepsilon_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.101)$$

При совместном решении уравнений (4.99), (4.101) в пористой среде можно создать различные режимы движения. В частности, можно в определенной точке среды задать скорость фильтрации $v(t)$, что в принципе эквивалентно заданию $\partial p / \partial x$, или в двух точках среды по направлению движения задать давления p_0, p_* . Но в общем случае для конечной среды задать P невозможно, т.к. динамика давления p (значит и P) определяется динамикой n и ε в каждом слое.

1. Рассмотрим случай $v(t) = v_0 = \text{const}$ для всех слоев. Тогда из закона Дарси с обобщенным коэффициентом, зависящим от пористости, получим

$$v_i = K(\varepsilon_i) \cdot \left| \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.102)$$

В наиболее простом случае, как и в [79], можно принять $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon_i$, $k_0 = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$. Однако более реальной является зависимость Кармана-Ко-зени

$$K(\varepsilon_i) = \frac{k_{0i} \varepsilon_i^3}{(1 - \varepsilon_i)^2}, \quad (4.103)$$

которая была использована в [179].

Интересно отметить, что зависимость типа (4.103) справедлива и для слоя осадка, образованного при фильтровании. Для более сложных геометрических моделей, чем капиллярная модель осадка, положенная в основу вывода (4.103), получаются другие обобщенные зависимости.

Рассмотрим задачу, когда пористая среда первоначально заполнена чистой жидкостью (жидкостью без частиц) и в начальный момент создается режим с заданной скоростью фильтрации и в пористую среду начинает поступать суспензия с объемной концентрацией частиц — n_0 . Для этой задачи начальные и граничные условия в слоях имеют вид

$$\begin{aligned} n_i(0, x) = 0, \quad \varepsilon_i(0, x) = \varepsilon_{0i}, \\ n_i(t, 0) = n_0, \quad \varepsilon_i(t, 0) = \varepsilon_{si}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

где ε_{si} — стационарные значения пористости в слоях, которые определяются как решения уравнений

$$(\varepsilon_{0i} - \varepsilon_i) \omega_{1i} \frac{H_i v_0}{H \cdot K(\varepsilon_i)} - \omega_{2i} \varepsilon_i n_0 = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.105)$$

Таким образом, в этой задаче уравнения (4.99) в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} = (\varepsilon_{0i} - \varepsilon_i) \frac{\omega_{1i} v_0 H_i}{H \cdot K(\varepsilon_i)} - \omega_{2i} \varepsilon_i n_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.106)$$

и уравнение (4.101) с коэффициентом v_0 вместо $v(t)$ решаются при условиях (4.104).

2. Пусть теперь для конечной среды длины l режим фильтрации создан заданием давлений в начале и конце фильтра, т.е. $p(t, 0) = p_*$, $p(t, l) = p_*$, $p_* = \text{const}$. Этот режим по давлению будет создаваться на концах каждого слоя.

Если принимать жидкость и пористые слои несжимаемыми, то скорости фильтрации каждого слоя $-v_i$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial v_i(t)}{\partial x} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.107)$$

которые следуют из уравнения неразрывности.

Учитывая закон Дарси, в обобщенном виде из (4.107) получаем

$$K'(\varepsilon_i) \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x} + K(\varepsilon_i) \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.108)$$

где

$$K'(\varepsilon_i) = \frac{\partial K(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i}.$$

Уравнение (4.101) для этого режима принимает вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{K(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} \left| \frac{\partial p_i}{\partial x} \right| \frac{\partial n_i}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_{0i}} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.109)$$

В этой задаче решаются уравнения (4.101), (4.108), (4.109) при условиях (4.104) и $p(t, 0) = p_*$, $p(t, l) = p_*$.

Здесь ε_{0i} определяются из уравнений

$$(\varepsilon_{0i} - \varepsilon_i) \omega_{1i} \cdot \frac{p_* - p_*}{l} - \omega_{2i} \varepsilon_i n_0 = 0 \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.110)$$

Как видно из (4.99), (4.101), (4.106), (4.108) – (4.110), в уравнениях производные по x от ε отсутствуют, но в (4.104) задается граничное условие для него. Для такого «переопределения» задачи возникает необходимость при численном решении уравнений, когда потребуются максимальная конкретизация постановки.

В задаче 1 общая фильтрационная скорость v_0 распределяется на скорости в слоях v_i пропорционально относительным толщинам пластов H_i/H , т.е. $v_i = H_i v_0 / H$.

В задаче 2 скорости фильтрации v_i определяются как

$$v_i = K(\varepsilon_i) \left| \frac{\partial p_i}{\partial x} \right|, \quad i = \overline{1, m},$$

а общая фильтрационная скорость –

$$v = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m H_i v_i.$$

Аналогично определяются средняя концентрация и пористость среды

$$n = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m H_i n_i, \quad \varepsilon = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^m H_i \varepsilon_i. \quad (4.111)$$

Уравнения (4.101), (4.106) совместно с уравнением Дарси при $v = v_0$ решались методом конечных разностей. Коэффициент фильтрации принимался в виде линейной функции с $k_0 = 0,01 \text{ м}^2/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

С целью количественной оценки предложенной схемы моделирования фильтрации проводились численные расчеты по задаче 1 для трех слоев с различными характеристиками. Слой 1 является наименее благоприятным для фильтрации и кинетика изменения текущей пористости определяется коэффициентами $\omega_{11} = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$ и $\omega_{21} = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Для второго и третьего слоев эти коэффициенты соответственно равны $\omega_{12} = 0,08 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_{22} = 0,2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{13} = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_{23} = 0,1 \text{ с}^{-1}$. Первоначальные пористости слоев приняты как $\varepsilon_{01} = 0,25$, $\varepsilon_{02} = 0,28$, $\varepsilon_{03} = 0,3$. Коэффициент конвективной диффузии для всех слоев одинаковый $D = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ и скорость фильтрации $v_i = 0,001 \text{ м}/\text{с}$. Толщины слоев также одинаковы. Результаты расчетов представлены на рис.4.14. По изменениям кривых нетрудно определить влияние коэффициентов ω_1 и ω_2 на характеристики фильтрационного процесса. Так, уменьшение ω_1 и увеличение ω_2 приводит к сжатию ширины фронтов концентрации и пористости. Одновременно уменьшается скорость движения фронтов. Осредненные характеристики, справедливые для среды в целом, сочетают свойства динамики характеристик всех слоев. Ширина фронтов ε и n для среды получается удлиненной, охватывающей ширину фронтов всех слоев. Динамика профилей становится в отличие от слоев весьма пологой. Зона за фронтом волн, где $\varepsilon \approx \varepsilon_{st}$ и $n \approx n_0$ существенно сокращается. Такая динамика ε и n представляется более соответствующей реальным процессам, исследованным экспериментальным путем [228]. В экспериментальных профилях зона изменения ε и n охватывает практически всю область фильтрации и зона с $\varepsilon \approx \varepsilon_{st}$ и $n \approx n_0$ бывает очень короткой. Исходя из этого, можно сделать определенные выводы в пользу предложенной здесь модели.

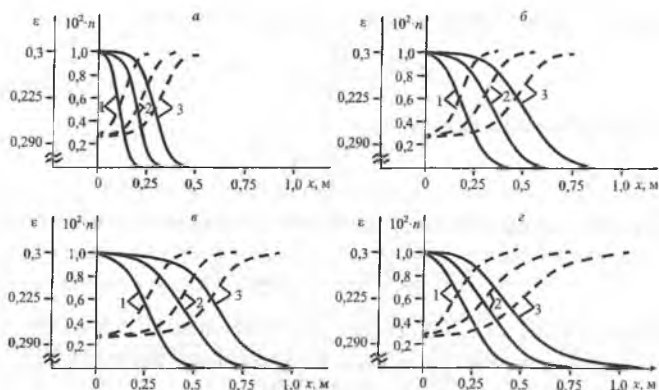


Рис. 4.14. Профили n (—), ϵ (---) в слоях 1(а), 2(б), 3(в) и среде в целом (г) при $t=180$ (1); 360 (2); 540 (3) с

Естественно, такая схематизация неоднородной по размерам пор среды является весьма идеализированной. Здесь, в частности, не учитывается массообменный процесс между порами различных размеров. Последнее может оказать ощутимое влияние на характер кольтатии и суффозии. Влияние обменных процессов на адсорбционные емкости пород изучалось в [111], где пористая среда представлена как совокупность зерен сравнительно большой величины с большой адсорбционной емкостью и обладающих развитой системой микропор значительно меньшего размера. Проведя аналогию между адсорбционными и кольтатионно-суффозионными явлениями, опираясь на выводы [193], можно оценить влияние отмеченных обменных процессов на характер кольтатии и суффозии в пористой среде.

Глава 5.

Задачи кольтмационно-суффозионной фильтрации с учетом предельных градиентов давления

- 5.1. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае линейного коэффициента фильтрации
- 5.2. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации
- 5.3. Задача движения жидкости в конечном пласте для линейного коэффициента фильтрации
- 5.4. Фильтрация в конечном пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации
- 5.5. Кольтмационно-суффозионная фильтрация в случае переменной диффузии

В данной главе изучаются задачи кольтматационно-суффозионной филь-
трации с учетом предельных градиентов давления по потоку и суффозии.
Рассмотрены задачи для полубесконечного и конечного пластов в одномер-
ной постановке. Главной целью решения этих задач является установление
влияния предельных градиентов давления по потоку и суффозии, интенсив-
ностей кольтматации и суффозии на характеристики фильтрации. В отдель-
ном параграфе рассмотрена задача кольтматационно-суффозионной филь-
трации в случае переменной диффузии.

5.1. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае линейного коэффицента фильтрации

Рассмотрим модельную задачу фильтрации дисперсных систем в пло-
ском полубесконечном пласте в случае, когда коэффицента фильтрации при-
нимается в линейном виде.

Систему уравнений кольтматационно-суффозионной фильтрации [196,
269] запишем для кинетического уравнения [197] в одномерном случае в
виде [209, 267]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(t)n}{\varepsilon} \right) &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ v(t) &= K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где n – объемная концентрация частиц в потоке жидкости, $\varepsilon_0, \varepsilon$ – начальная
и текущая пористости среды, $v(t)$ – скорость фильтрации, ω_1, ω_2 – коэффи-
циенты, характеризующие интенсивность суффозии и кольтматации, $K(\varepsilon)$ –
коэффицента фильтрации, $|\nabla p_0|, |\nabla p_c|$ – модуль предельного градиента давле-
ния по потоку и суффозии соответственно, $|\nabla p|$ – модуль градиента давления,
 D – коэффицента конвективной диффузии.

Пусть в пористую среду, заполненную жидкостью без частиц с начальной пористостью ε_0 с момента $t > 0$ начинает поступать суспензия с объемной концентрацией твердых частиц n_0 . Движение жидкости в пористой среде может быть создано либо заданием определенного давления в точке $x=0$ либо заданием режима изменения скорости фильтрации в среде. Допустим создан режим с $v=v_0=\text{const}$.

Коэффициент фильтрации $K(\varepsilon)$ может быть выбран как функция текущей пористости ε , т.к. емкостные характеристики среды постоянно изменяются за счет закупорки и освобождения пор. В самом простом случае можно принять [79] $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$, $k_0=\text{const}$. В более реальных случаях используются нелинейные зависимости $K(\varepsilon)$ [93, 98, 196]. Здесь рассматривается упрощенный случай $K(\varepsilon)=k_0\varepsilon$.

При малых n и небольших кольтматационных эффектах в уравнении баланса в конвективном члене можно положить $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, что не приводит к существенным ошибкам [196].

При этих предположениях система (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Начальные и граничные условия задачи, исходя из постановки, имеют вид

$$\begin{aligned} n(0, x) &= 0, & \varepsilon(0, x) &= \varepsilon_0, \\ n(t, 0) &= n_0, & n(t, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть значение v_0 таково, что имеет место $|\nabla p_0| < |\nabla p(0, x)| < |\nabla p_c|$. Тогда изменение пористости в соответствии со вторым уравнением (5.2) характеризуется только кольтматационными эффектами

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\omega_2 \varepsilon n. \quad (5.4)$$

Текущее значение $|\nabla p|$ определяется из закона Дарси

$$|\nabla p| = |\nabla p_0| + v_0 / (k_0 \varepsilon_0). \quad (5.5)$$

По мере уменьшения ε за счет кольтматации пор среды частицами, согласно (5.5), $|\nabla p|$ увеличивается. В процессе фильтрации наступает такой момент $t=t$, что будет $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. Тогда вместо (5.4) нужно использовать общее уравнение кинетики системы (5.2). В дальнейшем процесс будет характеризоваться одновременным действием кольтматации и суффозии.

Система уравнений (5.2) решена методом конечных разностей. Система (5.2) содержит уравнения, в которые входят одновременно n и ε . Вычислительный процесс организуется так, что сначала в узловых точках определяется ε , используя кинетическое уравнение, в которое входит n . Затем из разностного уравнения баланса определяется n . Если определить ε и n по неявной схеме, то в расчетах для определения n и ε на данном слое используются только значения предыдущего временного слоя. В явной же схеме имеется возможность использования значения n из предыдущей точки данного слоя для расчета ε в рассматриваемой точке. Затем определенное значение ε в данной точке может быть использовано для расчета n в той же точке. Исходя из этого, использована явная разностная схема с точностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$, где τ , h – шаги сетки по времени t и координате x .

Расчетные формулы для нахождения пористости на $(j+1)$ -ом слое имеют вид

- при $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$:

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j - \omega_2 \tau \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij}; \quad (5.6)$$

- при $|\nabla p| \geq |\nabla p_c|$:

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{ij}) \omega_1 \left(|\nabla p_0| - |\nabla p_c| + \frac{v_0}{k_0 \tilde{\varepsilon}_{ij}} \right) - \omega_2 \tau \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (5.7)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \varepsilon_i^j), \quad \tilde{n}_{ij} = \frac{1}{2} (n_{i-1}^{j+1} + n_i^j),$$

N, J – количества отрезков по направлениям x и t .

Уравнение баланса аппроксимируется как

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} + \frac{v_0}{\varepsilon_0} \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2h} = D \frac{n_{i-1}^j - 2n_i^j + n_{i+1}^j}{h^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau},$$

что дает

$$n_i^{j+1} = \frac{\tau}{h^2} \left[\left(D + \frac{v_0 h}{2\varepsilon_0} \right) n_{i-1}^j + \left(D - \frac{v_0 h}{2\varepsilon_0} \right) n_{i+1}^j \right] + \left(1 - \frac{2D\tau}{h^2} \right) n_i^j + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (5.8)$$

Модуль градиента давления определяется по формуле

$$|\nabla p_i^{j+1}| = |\nabla p_0| + \frac{v_0}{k_0 \varepsilon_i^{j+1}}. \quad (5.9)$$

По формулам (5.6)-(5.9) проводились численные расчеты при различных значениях параметров v_0 , ω_1 , ω_2 и др. В расчетах использовались: $h=0,01$ м, $\tau=0,025$ с, $\varepsilon_0=0,3$, $D=10^{-4}$ м²/с, $n_0=0,01$, $k_0=0,02$ м²/(МПа×с).

Для двух значений $v = 3 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-4}$ м/с рассмотрены варианты расчетов с а) $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,1$; в) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,05$.

Значение $|\nabla p_0|$ взято постоянным $|\nabla p_0| = 0,005$ МПа/м, а $|\nabla p_0|$ принимался для режимов с $v_0 = 3 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-4}$ м/с соответственно равным 0,012 и 0,06 МПа/м.

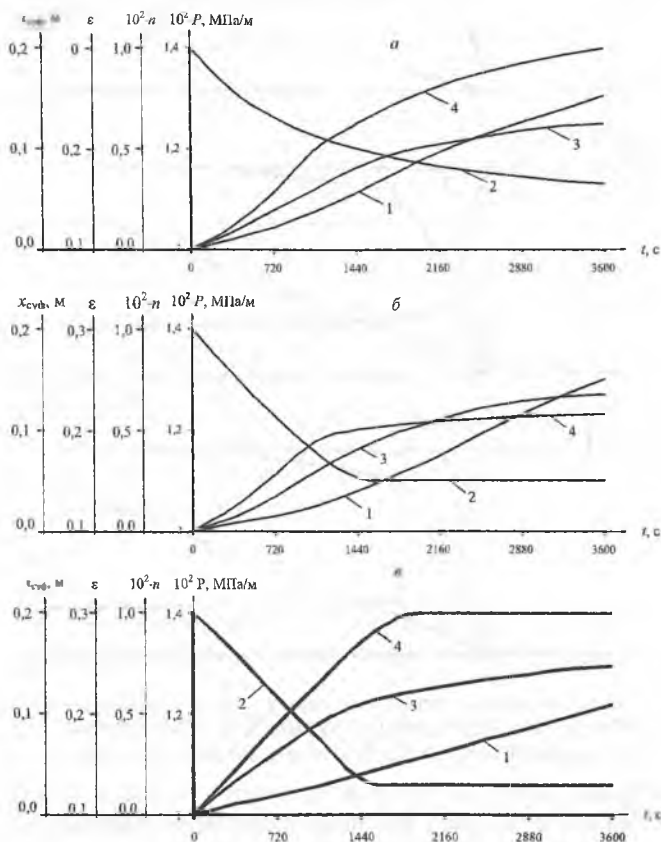


Рис.5.1. Распространение фронта суффозии $x_{\text{суф}}$ (1) по времени и изменение n (2), ϵ (3), P (4) в точке $x=0,05$ м при $v_0=3 \cdot 10^{-5}$ м/с, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,05$ с⁻¹

На рис. 5.1, 5.2 показаны изменения фильтрационных характеристик в точке $x=0,05$ м и распространение фронта суффозии $x_{\text{суф}}$ в зависимости от времени для значения скорости фильтрации $v_0=3 \times 10^{-5}$ м/с и различных ω_1, ω_2 .

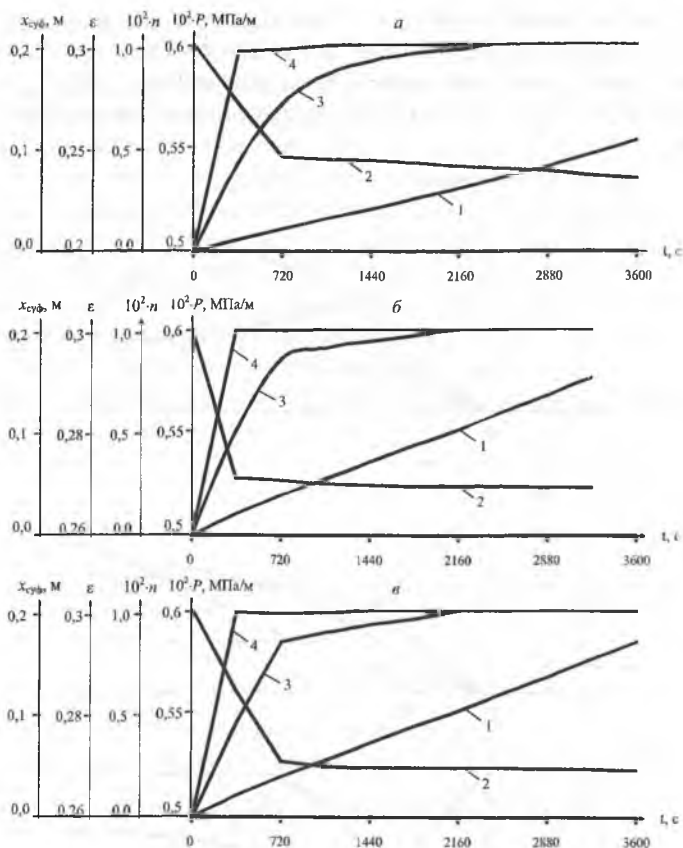


Рис.5.2. Распространение фронта суффозии $x_{\text{суф}}$ (1) по времени и изменение ϵ (2), n (3), P (4) в точке $x=0,05$ м при $v_0=3 \cdot 10^{-4}$ м/с, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,05$ с $^{-1}$

Характерной особенностью кривых является то, что в этой фиксированной точке за счет кольматации интенсивно уменьшается текущая пористость, увеличивается концентрация частиц в потоке и модуль градиента давления $P=|\nabla p|$. С увеличением последнего до $|\nabla p_c|=0,012$ МПа/м режим чистой кольматации заменяется смешанным режимом (когда одновременно действуют кольматационные и суффозионные эффекты). Смена режима на графиках определяется значением $|\nabla p_c|$. Смена режима приведет к изменению характера динамики ϵ , n , P . На графиках четко видны изломы. При этом

во втором режиме темпы уменьшения ε и увеличения P замедляются, а в динамике n четкого излома не видно. Это объясняется тем, что, по-видимому, динамика n определяется не только кольматацией и суффозией, но и конвективным переносом частиц, конвективной диффузией. Видимо, последние эффекты в какой-то степени сглаживают резкие изменения темпа n за счет включения эффекта суффозии при $|\nabla p| > |\nabla p_c|$.

Характер изменения $x_{\text{суф}}$ в основном определяется значением ω_2, v_0 . Из рис. 5.1, 5.2 видно, что при $v_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с и $\omega_1 = 0,5$; $0,1$ и $\omega_2 = 0,1$ суффозионный фронт доходит до контрольной точки за ~ 1400 с, а при $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,05$ за ~ 1800 с. Расчеты показывают, что при $v_0 = 3 \cdot 10^{-7}$ м/с эти оценочные времена соответственно равны ~ 350 и ~ 550 с. При расширении зоны второго режима (одновременной кольматации и суффозии) скорость движения $x_{\text{суф}}$ в основном будет определяться значением v_0 .

На рис. 5.3, 5.4 показаны профили изменения ε, n и P . Темпы изменения ε в двух указанных выше режимах отличаются. Изменение кольматационно-суффозионного режима оказывает незначительное влияние на профили n . Причины этого явления объяснены выше. В зонах чистой кольматации ε увеличивается достаточно умеренно.

В зонах кольматации и суффозии темп изменения ε более высокий. С увеличением скорости фильтрации v_0 характер изменения ε и n в целом не претерпевает существенных изменений. Сопоставление графиков рис. 5.3, 5.4 показывает, что фронты ε и n при увеличении v_0 , естественно, продвигаются быстрее.

5.2. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации

Здесь рассмотрим модельную задачу фильтрации дисперсных систем в плоском полубесконечном пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации [173, 210].

Систему уравнений кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом вышесказанного в одномерном случае примем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(t)n}{\varepsilon} \right) &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ v(t) &= K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где коэффициент фильтрации принимается в виде

$$K(\varepsilon) = \frac{k_0 \varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = \text{const.}$$

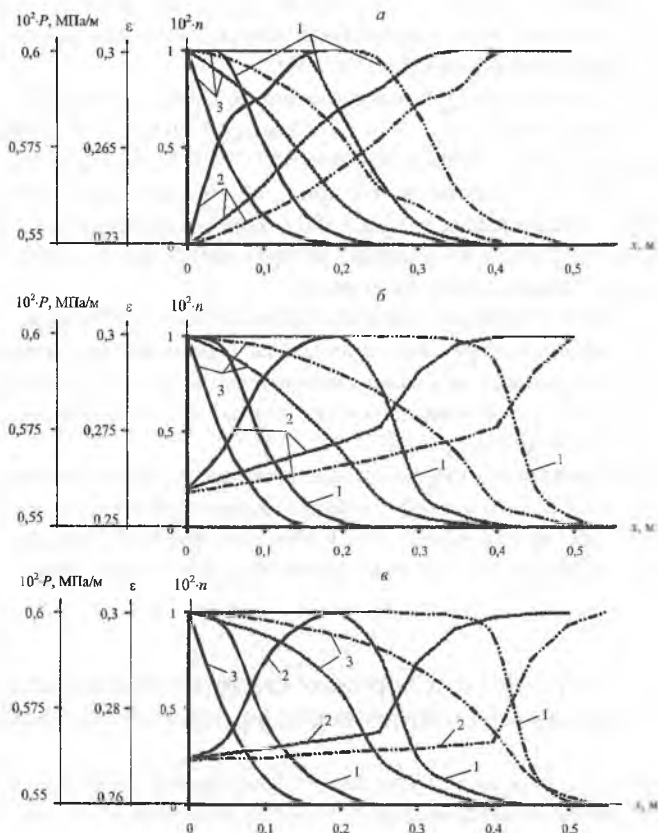


Рис.5.3. Профили изменения P (1), ε (2), n (3) при $v_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ м/с, а) $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с $^{-1}$; б) $\phi_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с $^{-1}$; в) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,05$ с $^{-1}$; $t = 5$ (—), 10 (---), 20 (- · -) с

Пусть в пористую среду, заполненную жидкостью без частиц с начальной пористостью с момента $t > 0$ начинает поступать суспензия с объемной концентрацией твердых частиц n_0 . Движение жидкости в пористой среде может быть создано либо заданием определенного давления в точке $x=0$, либо заданием режима изменения скорости фильтрации в среде. Допустим, создан

режим с $\nu = \nu_0 = \text{const}$. При малых n и небольших кольматационных эффектах в уравнении баланса в конвективном члене можно положить $\varepsilon \approx \varepsilon_0$, что не приводит к существенным ошибкам.

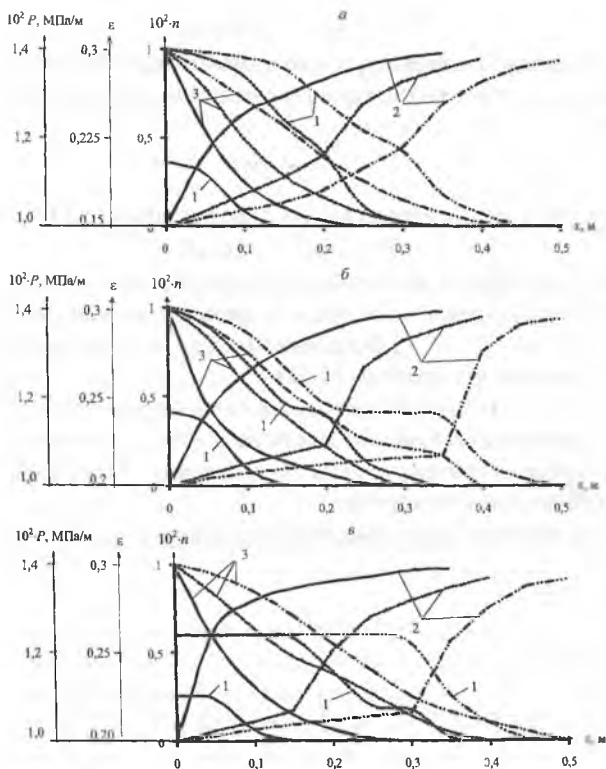


Рис. 5.4. Профили изменения P (1), ε (2), n (3) при $v_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с, а) $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; б) $\phi_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,05$ с⁻¹; $t = 5$ (—), 10 (---), 20 (- · - ·) с

При этих предположениях система (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\nu_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial n}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ \nu_0 &= K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \\ K(\varepsilon) &= k_0 \varepsilon^3 / (1 - \varepsilon)^2, \quad k_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Начальные и граничные условия задачи, исходя из постановки, имеют вид

$$\begin{aligned} n(0, x) &= 0, & \varepsilon(0, x) &= \varepsilon_0, \\ n(t, 0) &= n_0, & n(t, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Предположим, что значение v_0 таково, что имеет место $|\nabla p_0| < |\nabla p(0, x)| < |\nabla p_c|$. Тогда изменение пористости характеризуется только кольтационными эффектами

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\omega_2 \varepsilon n. \quad (5.13)$$

Значение $|\nabla p|$ определяется из закона Дарси системы (5.11)

$$|\nabla p| = |\nabla p_0| + v_0 / (K(\varepsilon)). \quad (5.14)$$

По мере уменьшения ε за счет кольтации пор среды частицами, согласно (5.14), $|\nabla p|$ увеличивается. В процессе фильтрации наступает такой момент $t=t_c$, что будет $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. Тогда вместо (5.13) нужно использовать общее уравнение кинетики системы (5.12).

Задача (5.11)-(5.14) решена методом конечных разностей. Вычислительный процесс организуется так: сначала из разностных кинетических уравнений определяется ε , затем из разностного уравнения баланса определяется n в соответствующих узловых точках.

Расчетные формулы для нахождения пористости на $(j+1)$ -ом слое имеют вид

- при $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$:

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j - \omega_2 \tau \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij}; \quad (5.15)$$

- при $|\nabla p| > |\nabla p_c|$:

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{ij}) \omega_1 \left(|\nabla p_0| - |\nabla p_c| + \frac{v_0 (1 - \tilde{\varepsilon}_{ij})^2}{k_0 \tilde{\varepsilon}_{ij}^3} \right) - \omega_2 \tau \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (5.16)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \varepsilon_i^j), \quad \tilde{n}_{ij} = \frac{1}{2} (n_{i-1}^{j+1} + n_i^j),$$

N, J – количество отрезков по направлениям x и t .

Из уравнения баланса определяем

$$\begin{aligned} n_i^{j+1} &= \frac{\tau}{h^2} \left[\left(D + \frac{v_0 h}{2\varepsilon_0} \right) \cdot n_i^j + \left(D - \frac{v_0 h}{2\varepsilon_0} \right) \cdot n_{i+1}^j \right] + \\ &+ \left(1 - \frac{2D\tau}{h^2} \right) \cdot n_i^j + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, J-1}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Модуль градиента давления определяется по формуле

$$|\nabla p| = |\nabla p_0| + v_0 (1 - \tilde{\varepsilon}_{ij})^2 / (k_0 (\varepsilon_i^{j+1})^3). \quad (5.18)$$

По формулам (5.15)–(5.18) проводились численные расчеты при различных значениях параметров v_0 , ω_1 , ω_2 и др.

Во всех сериях расчетов принималось: $h = 0,01$ м, $\tau = 0,025$ с, $\varepsilon_0 = 0,3$, $D = 10$ м⁴/с, $n_0 = 0,01$, $k_0 = 0,02$ м²/(МПа·с).

Для значений $v_0 = 3 \cdot 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-4}$ м/с рассмотрены варианты расчетов с

а) $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹, б) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,1$, в) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,05$.

Значение $|\nabla p_0|$ взято постоянным $|\nabla p_0| = 0,005$ МПа/м, а $|\nabla p_c|$ принимался для режимов с $v_0 = 3 \cdot 10^{-5}$, $3 \cdot 10^{-4}$ м/с соответственно равным 0,052 и 0,36 МПа/м.

На рис.5.5 показаны изменения n , ε , p в точке $x = 0,05$ м и распространение фронта суффозии в зависимости от времени для двух указанных значений скорости фильтрации $v_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ и $3 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Характерной особенностью фильтрационного процесса является то, что в случае, когда коэффициент фильтрации задается в соответствии с законом Кармана-Козени, скорость фронтов концентрации частиц во флюиде, текущей пористости и градиента давления увеличивается по сравнению с $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$. Например, при $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹ в случае $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ фронты до контрольной точки $x_c = 0,05$ м доходят за ~ 1440 с, а в случае закона Кармана-Козени с тем же k_0 за ~ 720 с. Соответственно увеличивается динамика указанных показателей.

В профилях n , ε , p также происходят существенные изменения (рис.5.6). Отмечается увеличение P , что говорит о более высоком фильтрационном сопротивлении среды, а профили имеют более умеренный темп уменьшения. По сравнению с $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ в профилях «излом» более четко выражен. Общее ускорение продвижения профилей также заметно.

5.3. Задача движения жидкости в конечном пласте для линейного коэффициента фильтрации

В конечном пласте в отличие от бесконечных пластов задача кольматационной фильтрации может быть поставлена в двух вариантах (например, для одномерной области) $\Omega\{x: 0 \leq x \leq l\}$:

а) на одной из границ задается скорость фильтрации. Эта задача в принципе не отличается от задач в полубесконечной области;

б) на границах области ($x=0$ и $x=l$) задаются давления $p_n(t)$ и $p_k(t)$.

Здесь рассмотрим задачу для конечного пласта.

Пусть в первоначально насыщенную однородной жидкостью пористую среду с пористостью ε_0 , длиной l , с $t>0$ начинает поступать дисперсная жидкость с концентрацией твердых частиц n_0 . Течение флюида происходит под действием градиента давления, создаваемого постоянными давлениями p_n (в $x=0$) p_k (в $x=l$).

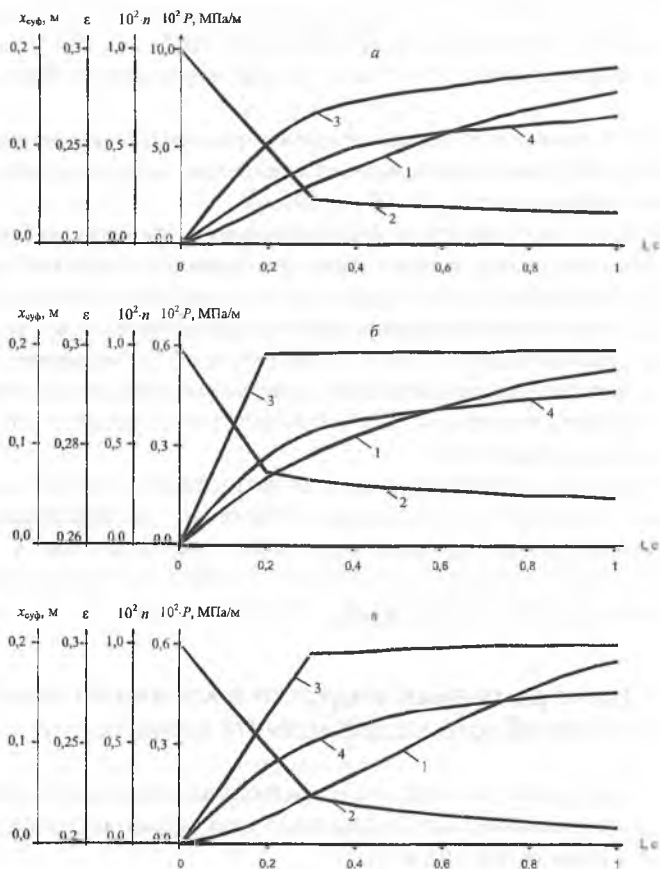


Рис.5.5. Распространение фронта суффозии $x_{сuff}$ (1) по времени и профили изменения n (3), ε (2), P (4) в точке $x=0,05$ м при $v_0=3 \cdot 10^{-5}$ м/с, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,05$ с⁻¹

5.3. Задача движения жидкости в конечном пласте для линейного коэффициента фильтрации

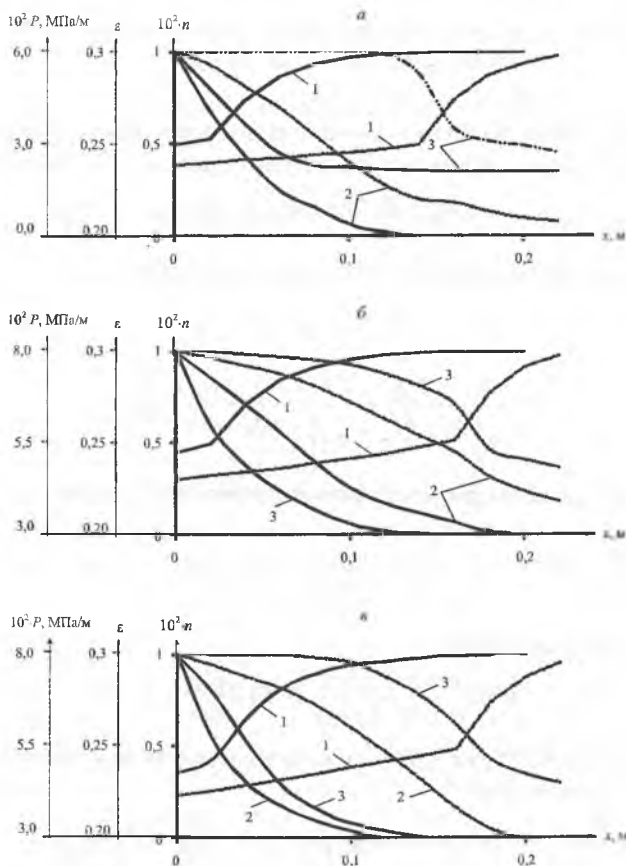


Рис.5.6. Профили изменения ε (1), n (2), P (3) при $v_0=3 \cdot 10^{-5}$ м/с, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,05$ с $^{-1}$, $t=3600$ (—), 23600 с (----)

Система уравнений фильтрации дисперсной системы с учетом отмеченного в одномерном случае принимается в виде [210]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v(t)n}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \quad (5.19)$$

$$v(t) = K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|).$$

Начальные и граничные условия задачи, исходя из постановки, имеют вид

$$\begin{aligned} n(0, x) &= 0, \quad \varepsilon(0, x) = \varepsilon_0, \quad p(t, 0) = p_n, \\ n(t, 0) &= n_0, \quad p(t, l) = p_k. \end{aligned} \quad (5.20)$$

При достаточно больших t пористость достигает своего стационарного значения. Последнее определяется из второго уравнения (5.19) при $\partial\varepsilon/\partial t = 0$:

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)\omega_1 \left(\frac{p_n - p_k}{l} - |\nabla p_c| \right) - \omega_2 n_0 \varepsilon = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно ε , находим

$$\varepsilon_{st} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \theta},$$

где

$$\theta = \frac{\omega_2 n_0}{\omega_1 \left(\frac{p_n - p_k}{l} - |\nabla p_c| \right)} = \frac{\omega_2 l n_0}{\omega_1 (p_n - p_k - l |\nabla p_c|)}.$$

Из уравнения неразрывности, используя обобщенный закон Дарси, приходим к

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(\varepsilon) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \right) \right] = 0,$$

откуда получается уравнение

$$K'(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \right) + K(\varepsilon) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (5.21)$$

Уравнение (5.21) для $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ аппроксимируем следующим конечно-разностным уравнением:

$$\frac{\varepsilon'_i - \varepsilon'_{i-1}}{h} \left(\frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} - |\nabla p_0| \right) + \varepsilon'_i \frac{p_i^{j+1} - 2p_{i-1}^{j+1} + p_{i-2}^{j+1}}{h^2} = 0. \quad (5.22)$$

Разностное уравнение (5.22) можно записать в виде

$$Ap_i^{j+1} - Bp_{i-1}^{j+1} + Cp_{i-2}^{j+1} = -Y_i, \quad (5.23)$$

$$A = \varepsilon'_{i-1}, \quad B = \varepsilon'_{i-1} - \varepsilon'_i, \quad C = \varepsilon'_i, \quad Y_i = (\varepsilon'_i - \varepsilon'_{i-1}) |\nabla p_0| h, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad i = \overline{0, J-1}.$$

Условия (5.20) аппроксимируем так:

$$\begin{aligned} n_i^0 &= 0, \quad \varepsilon_i^0 = \varepsilon_0, \quad p_0^{j+1} = p_n, \quad p_i^{j+1} = p_k, \quad n_0^j = n_0, \\ \varepsilon_0^j &= \varepsilon_{st}, \quad p_i^0 = 0, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Расчетная формула для нахождения пористости имеет вид

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau (\varepsilon_0 - \varepsilon_0^j) \omega_1 \left(\frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} - |\nabla p_c| \right) - \omega_2 \varepsilon_{ij} \bar{n}_y, \quad (5.25)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_y = \frac{1}{2}(\varepsilon'_{i-1} + \varepsilon'_i), \quad \tilde{n}_{ij} = \frac{1}{2}(n'_{i-1} + n'_i).$$

Для определения концентрации аппроксимируем уравнение баланса

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} + \frac{v_i^{j+1}}{\varepsilon_0} \frac{n_i^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}}{h} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau}, \quad (5.26)$$

а из закона Дарси определяем скорость фильтрации

$$v_i^{j+1} = v_i(t_{i+1}) = k_0 \varepsilon_i^{j+1} \left(\frac{|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|}{h} - |\nabla p_0| \right) \quad (5.27)$$

Из (5.26) с учетом (5.27) можно получить

$$n_i^{j+1} = \frac{1}{1 + a_y} \left[n_i^j + a_y n_{i-1}^{j+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) \right], \quad (5.28)$$

где

$$a_y = \frac{\tau k_0 \varepsilon_i^{j+1}}{h^2 \varepsilon_0} (|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| - h |\nabla p_0|).$$

Вычислительный процесс организуется так: решая (5.23) определяется давление на $(j+1)$ -ом слое, из уравнения (5.25) определяется текущая пористость ε_i^{j+1} , а затем из уравнения (5.28) – текущая концентрация частиц в потоке – n_i^{j+1} .

По формулам (5.23)-(5.28) проводились численные расчеты при различных значениях параметров p_n , ω_1 , ω_2 . Во всех расчетах $h=0,01$ м, $\varepsilon_0=0,3$, $k_0=1,0$ м²/(МПа·с), $|\nabla p_0|=0,001$ МПа/м, $|\nabla p_c|=0,015$ МПа/м, $l=4$ м, $p_k=0$. Для двух значений $p_n=0,75$; $0,021$ МПа рассмотрены варианты расчетов при а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹, б) $\omega_1=0,1$, $\omega_2=0,1$, в) $\omega_1=0,1$, $\omega_2=0,05$.

Результатами расчетов установлено, что при очень медленных течениях, когда текущий градиент давления меньше предельного суффозионного градиента давления, суффозионный процесс не развивается.

На рис.5.7, 5.8 приведены графики зависимостей p , ε , n при различных ω_1 , ω_2 . На рис.5.7 текущий $|\nabla p|$ меньше $|\nabla p_c|$, а на рис.5.8 $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. Из графиков видно, что при отсутствии суффозионных эффектов профили ε и n являются крутыми, а при $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ они более пологи. Скорость распространения переднего фронта профилей в последнем случае больше, чем в случае $|\nabla p| < |\nabla p_c|$.

5.4. Фильтрация в конечном пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации

Здесь рассмотренная в разделе 5.3 задача обобщается на случай нелинейного коэффициента $K(\varepsilon)$ по закону Кармана-Козени [170, 171].

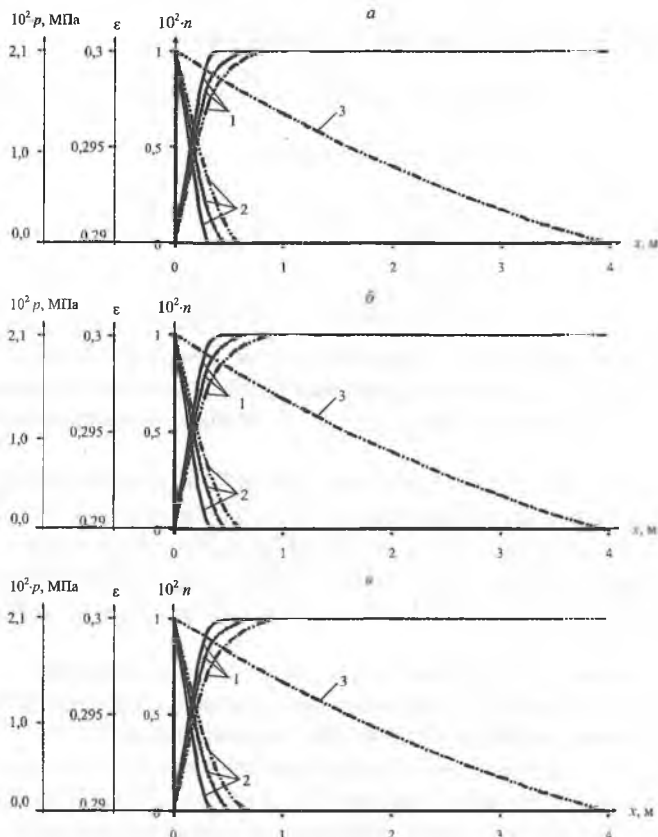


Рис.5.7. Изменения ε (1), n (2), p (3) при $p_n=0,021$ МПа, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; б) $\phi_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,05$ с⁻¹; $t=5$ (—), 10 (----), 20 (- · - ·) с

В пористую среду длиной l , заполненную чистой (без частиц) жидкостью, начиная с момента $t>0$, втекает дисперсная жидкость с концентрацией дисперсных частиц n_0 . Как и в [196, 269] при условии малости n_0 можно при-

нять $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. Во втором члене первого уравнения системы (5.10), следовательно, можно положить $\varepsilon \approx \varepsilon_0$.

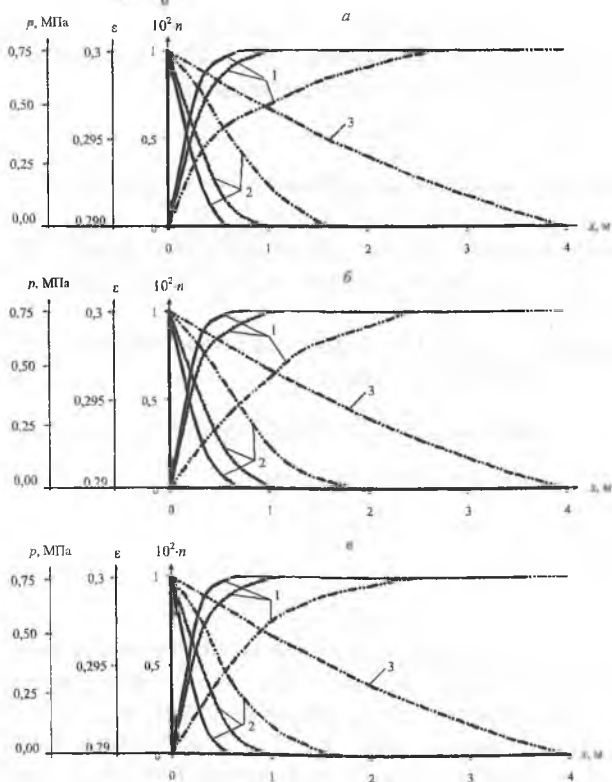


Рис.5.8. Изменения ε (1), n (2), p (3) при $p_n=0,75$ МПа, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с $^{-1}$; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,05$ с $^{-1}$; $t=5$ (—), 20 (---), 105 (— · —) с

С учетом сказанного, систему (5.10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v(t)}{\varepsilon_0} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ v(t) &= \frac{k_0 \varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \end{aligned} \quad (5.29)$$

где l — длина пласта.

Начальные и граничные условия принимаются в виде

$$n(0, x) = 0, \quad \varepsilon(0, x) = \varepsilon_0, \quad (5.30)$$

$$n(t, 0) = n_0, \quad p(t, 0) = p_n, \quad p(t, l) = p_k. \quad (5.31)$$

Пусть p_n, p_k такие, что выполняется $|\nabla p| < |\nabla p_c|$ для всех x . Тогда уравнение кинетики пористости записывается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\omega_2 \varepsilon n. \quad (5.32)$$

Текущий градиент давления определяется из закона Дарси

$$|\nabla p| = |\nabla p_c| + v(t)(1 - \varepsilon)^2 / (k_0 \varepsilon^3). \quad (5.33)$$

После определенных t за счет кольтационных эффектов может стать $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ и кинетика пористости полностью будет определяться вторым уравнением системы (5.29).

В предельном случае ($t \rightarrow \infty$) наступает стационарный режим, когда $\partial \varepsilon / \partial t = 0, \quad \partial n / \partial t = 0$. Из $\partial \varepsilon / \partial t = 0$ следует

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 \left(\frac{p_n - p_k}{l} - |\nabla p_c| \right) - \omega_2 \varepsilon n = 0. \quad (5.34)$$

Решая (5.15) относительно ε , получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_{st} = \frac{\varepsilon_0}{1 + \theta}, \quad (5.35)$$

где

$$\theta = \frac{\omega_2 l n_0}{\omega_1 (p_n - p_k - l |\nabla p_c|)}.$$

Из закона Дарси и уравнения неразрывности получаем уравнение (5.21).

Так как поставленная задача (5.29)–(5.33) является нелинейной, для ее решения применим метод конечных разностей [157]. В области $D\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$ вводим сетку, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого отрезок $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ , а $[0, l]$ на I частей с шагом h . В результате имеем сетку $\omega_{kr} \{(x_i, t_j), i = 0, I, j = 0, J, x_i = ih, t_j = j\tau, h = l/I, \tau = T/J\}$.

На введенной сетке уравнение (5.21) аппроксимируется так:

$$\begin{aligned} k_0 \frac{(\varepsilon_i^j)^2 (3 - \varepsilon_i^j) \varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j \left(\frac{|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|}{h} - |\nabla p_0| \right)}{(1 - \varepsilon_i^j)} + \\ + \frac{k_0 (\varepsilon_i^j)^3}{(1 - \varepsilon_i^j)^2} \frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) можно записать в виде

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Bp_i^{j+1} + Cp_{i+1}^{j+1} = -Y_i, \quad (5.37)$$

где

$$A = \varepsilon_i^j - \frac{3 - \varepsilon_i^j}{1 - \varepsilon_i^j} (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j), \quad B = \varepsilon_i^j + A, \quad C = \varepsilon_i^j, \\ Y_i = \frac{h(3 - \varepsilon_i^j)}{(1 - \varepsilon_i^j)} (\varepsilon_i^j - \varepsilon_{i-1}^j), \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Начальные и граничные условия (5.30), (5.31) аппроксимируются так:

$$n_0^0 = 0, \quad n_0^{j+1} = n_0, \quad \varepsilon_0^0 = \varepsilon_0, \\ p_0^{j+1} = p_n, \quad p_i^{j+1} = p_k, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (5.38)$$

Аппроксимируя кинетическое уравнение, находим

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \tau (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_{ij}) \omega_i \left(\frac{|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|}{h} - |\nabla p_c| \right) - \omega_2 \tau \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{n}_{ij} = 0, \quad (5.39)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \varepsilon_i^j), \quad \tilde{n}_{ij} = \frac{1}{2} (n_{i-1}^{j+1} + n_i^j).$$

Уравнение баланса системы (5.30) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} + \frac{v(t)}{\varepsilon} \frac{n_i^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}}{h} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau}. \quad (5.40)$$

При известных ε_i^{j+1} , p_i^{j+1} , p_{i-1}^{j+1} из уравнения Дарси можно определить скорость фильтрации

$$v_i^{j+1} = \frac{k_0 (\varepsilon_i^{j+1})^3}{(1 - \varepsilon_i^{j+1})^2} \left(\frac{|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}|}{h} - |\nabla p_0| \right). \quad (5.41)$$

С учетом (5.41) из (5.40) определяем

$$n_i^{j+1} = \frac{1}{1 + a_{ij}} \left[n_i^j + a_{ij} n_{i-1}^{j+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) \right], \quad (5.42)$$

где

$$a_{ij} = \frac{k_0 \tau (\varepsilon_i^{j+1})^3}{h^2 \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_i^{j+1})^2} (|p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}| - h |\nabla p_0|).$$

По полученным сеточным решениям произведены численные расчеты при следующих исходных данных: $h = 0,01$ м, $\tau = 0,025$ с, $\varepsilon_0 = 0,3$, $n_0 = 0,01$, $p_k = 0$, $k_0 = 1,0$ м²/(МПа·с). Значения p_n принимались равными 0,021; 0,75 МПа, а ω_1 и ω_2 принимались как: а) $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹, б) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,1$, в) $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,05$.

Предельные градиенты давлений:

-по потоку $-|\nabla p_0| = 0,001$ МПа/м,

- по суффозии $|\nabla p_c| = 0,005 \text{ МПа/м}$.

Один из вариантов полученных результатов приведен на рис.5.9, 5.10. Сравнительный анализ полученных результатов со случаем $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ показывает, что в случае обобщенной зависимости $K(\varepsilon)$ по закону Кармана-Козени процесс фильтрации происходит значительно медленнее. Влияние параметров ω_1, ω_2 на характер профилей также существенно. С увеличением интенсивности суффозии и уменьшением интенсивности кольтации скорости продвижения профилей концентрации, пористости увеличиваются.

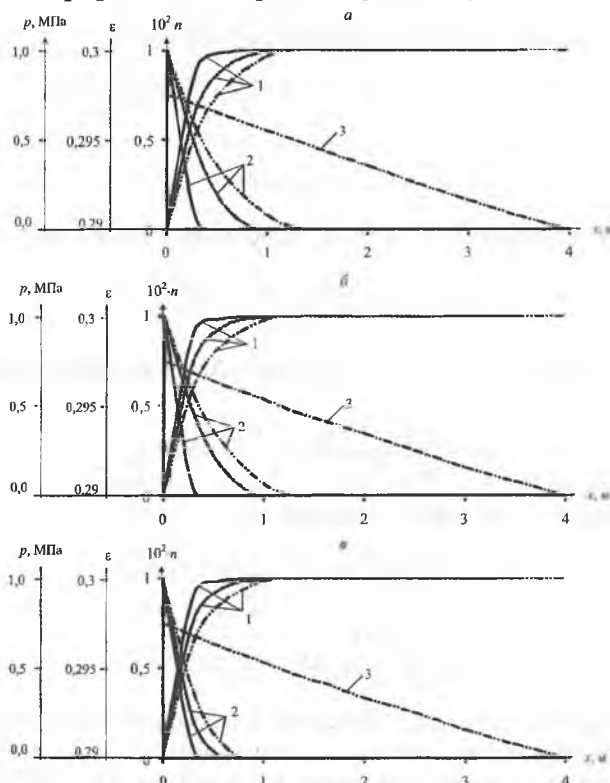


Рис.5.9. Изменения ε (1), n (2), p (3) при $p_n = 0,75 \text{ МПа}$, а) $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1 = 0,1 \text{ м/(МПа·с)}$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1 = 0,1 \text{ м/(МПа·с)}$; $\omega_2 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $t = 1$ (—), 10 (----), 20 (- · -) с

Кроме отмеченных явлений при использовании обобщенного закона Кармана-Козени по сравнению с линейным законом наблюдается резкое

уменьшение пористости и увеличение концентрации частиц на сравнительно небольшой глубине пласта.

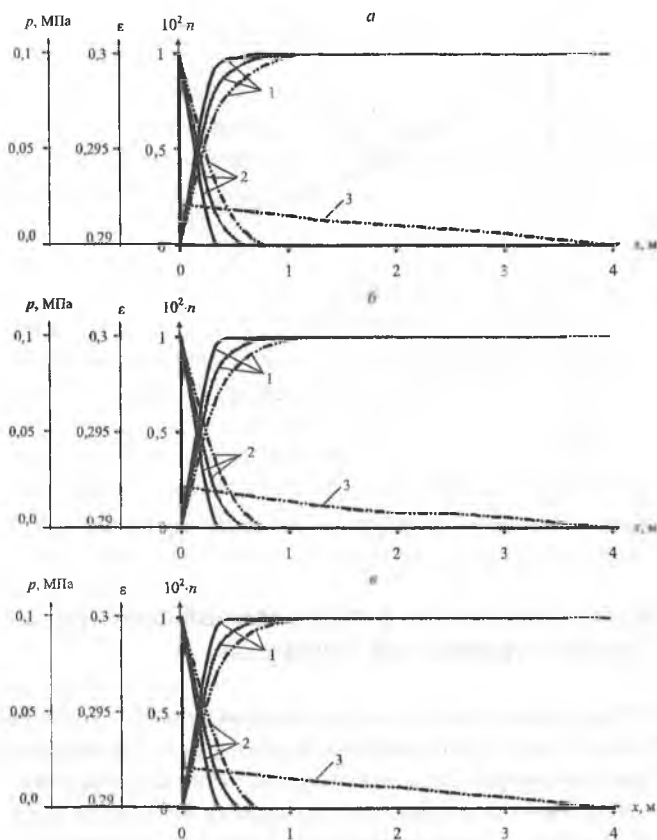


Рис.5.10. Изменения ϵ (1), n (2), p (3) при $p_0=0,021$ МПа, а) $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,05$ с⁻¹; $t=1$ (—), 10 (---), 20 (- · -) с

Исследовалась динамика скорости фильтрации для рассмотренных вариантов расчетов (рис.5.11). Сравнение случаев линейного и нелинейного $K(\epsilon)$ показывает, что для закона Кармана-Козени значения скорости фильтрации меньше, чем в линейном случае. Однако темп снижения скорости фильтрации в линейном случае является более высоким, чем в случае нелинейного коэффициента.

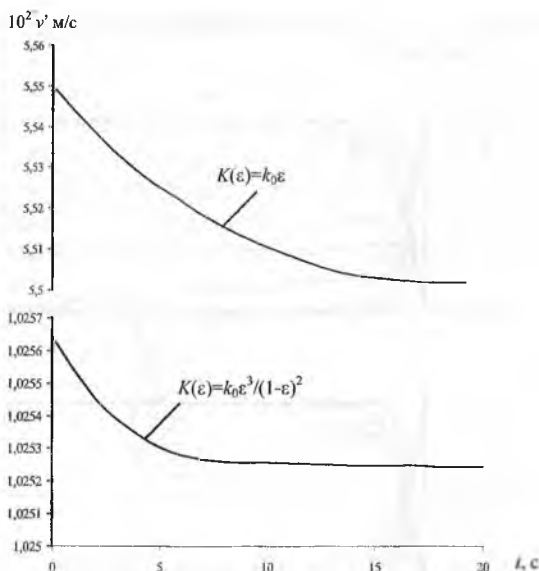


Рис.5.11. Изменение скорости фильтрации по времени, $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с⁻¹

5.5. Кольматационно-суффозионная фильтрация в случае переменной диффузии

В пористых средах, наряду с конвективным переносом, существенное значение может приобретать диффузионный перенос. Процесс перемешивания жидкостей в пористых средах (т.е. конвективная диффузия) показывает, что интенсивность перемешивания зависит от средней скорости потока [129]. В работе решены некоторые задачи конвективной диффузии в пористых средах с учетом зависимости коэффициента диффузии от скорости фильтрации. В [127, 257] рассмотрены задачи конвективной диффузии и при некоторых упрощающих ограничениях получены точные решения. В [1] решена плоско-радиальная задача для уравнения конвективной диффузии методом конечных разностей в случае переменной диффузии.

Рассмотрим нестационарное уравнение баланса с переменным коэффициентом диффузии $D = D_0 + \lambda v_0 / \varepsilon$, где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, v_0 – постоянная скорость фильтрации, v_0 / ε – физическая скорость движения жидкости [191],

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v_0}{\varepsilon} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D + \frac{\lambda v_0}{\varepsilon} \right) \frac{\partial n}{\partial x} \right] + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= (\varepsilon_0 - \varepsilon) \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon n, \\ v_0 &= k_0 \varepsilon (|\nabla p| - |\nabla p_0|).\end{aligned}\quad (5.43)$$

Как и в случае с постоянным коэффициентом диффузии D (раздел 2.1) рассмотрим полубесконечную плоскую пористую среду. Начальные и граничные условия остаются прежними

$$\begin{aligned}n(0, x) &= 0, & \varepsilon(0, x) &= \varepsilon_0, \\ n(t, 0) &= n_0, & n(t, \infty) &= 0.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Движение смеси происходит с постоянной скоростью фильтрации $v = v_0 = \text{const}$.

Процесс изменения давления в пласте зависит от выбора закона Дарси. В данном случае закон Дарси принимается в виде

$$v = K(\varepsilon) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \quad (5.45)$$

где $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$ – коэффициент фильтрации.

В соответствии с (5.45) текущий градиент давления будет равен

$$|\nabla p| = |\nabla p_0| + v_0 / (k_0 \varepsilon_0). \quad (5.46)$$

Применим к решению задачи метод конечных разностей. В области $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty\}$ введем сетку

$$\Omega \left\{ (t_j, x_i), \quad t_j = j\tau, \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, j = 0, J; \tau = \frac{T}{J} \right\},$$

где h – величина шага по x .

Аппроксимируем первое уравнение (5.43) на сетке Ω с помощью однопараметрической разностной схемы

$$\begin{aligned}\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} + \frac{v_0}{\varepsilon_i^j} \frac{n_{i+1}^j - n_{i-1}^j}{2h} &= D_0 \left[\sigma \frac{n_{i-1}^{j+1} - 2n_i^{j+1} + n_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{n_{i-1}^{j+1} - 2n_i^{j+1} + n_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{h} \left[\frac{\lambda v_0}{\varepsilon_{i+1}^j} \frac{n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1}}{h} - \frac{\lambda v_0}{\varepsilon_i^j} \frac{n_i^{j+1} - n_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau},\end{aligned}\quad (5.47)$$

где σ – параметр разностной схемы.

Текущая пористость и модуль градиента давления определяются по формулам

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^{j+1} &= \varepsilon_i^j + \tau (\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_y) \omega_1 \left(|\nabla p_0| - |\nabla p_c| + \frac{v_0}{k_0 \tilde{\varepsilon}_y} \right) - \omega_2 \tau \varepsilon_y \bar{n}_{ij}, \\ |\nabla p_i^{j+1}| &= |\nabla p_0| + \frac{v_0}{k_0 \varepsilon_i^{j+1}}.\end{aligned}\quad (5.48)$$

$$\tilde{\varepsilon}_y = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \varepsilon_i^j), \quad \bar{n}_y = \frac{1}{2}(n_{i-1}^{j+1} + n_i^j). \quad (5.49)$$

Начальные и граничные условия после аппроксимации имеют вид

$$n_0^0 = 0; \quad n_0^{j+1} = n_0; \quad n_I^{j+1} = 0; \quad \varepsilon_0^0 = 0, \quad (5.50)$$

где I – достаточно большое целое число.

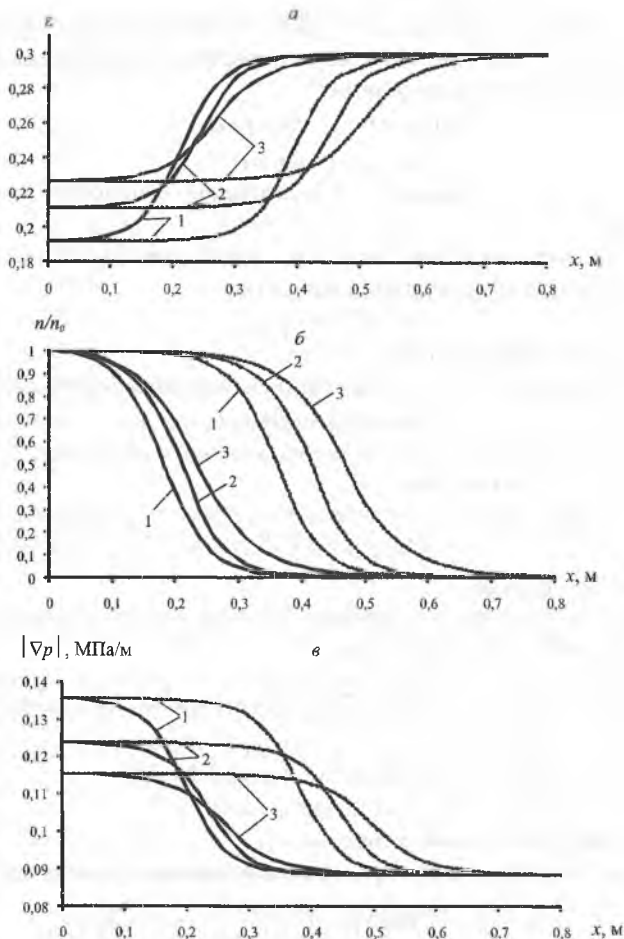


Рис.5.12. Профили изменения ε (а), n/n_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\lambda=0$ м;
 $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_2=0,1$ с⁻¹ (1); $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с) $\omega_2=0,1$ с⁻¹ (2); $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с),
 $\omega_2=0,05$ с⁻¹ (3); $t=3000$ с (сплошные линии), 6000 с (штриховые линии)

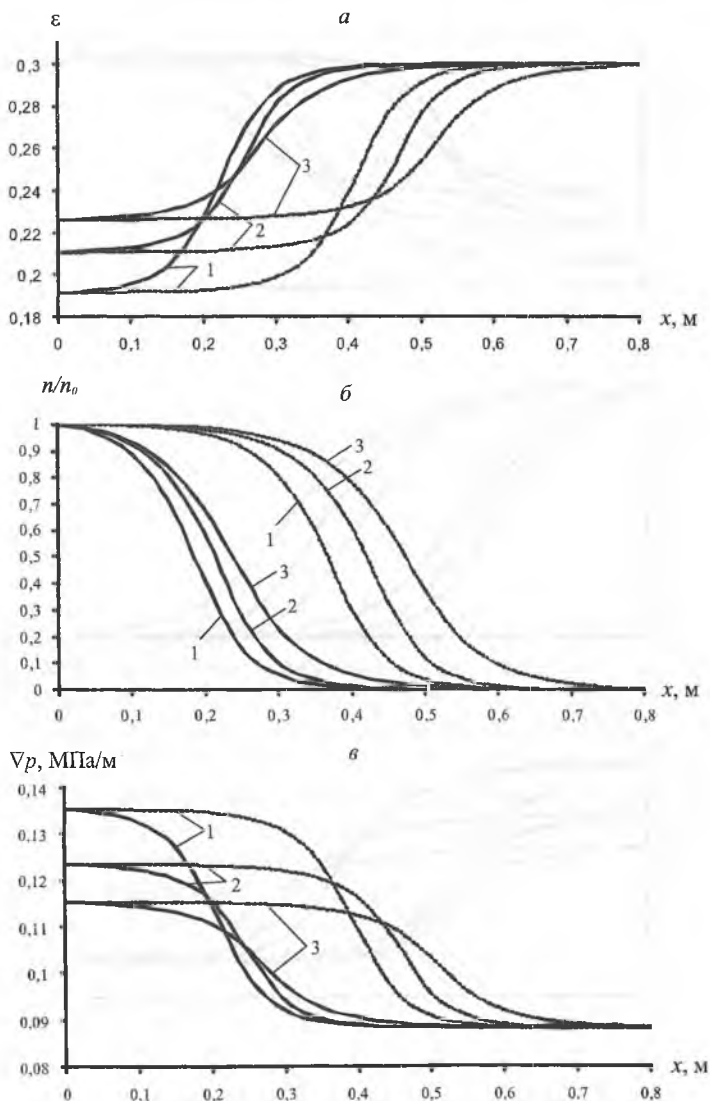


Рис.5.13. Профили изменения ε (а), n/n_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\lambda=0,01 \text{ м}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$ $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\omega_2=0,05 \text{ с}^{-1}$ (3); $t=3000 \text{ с}$ (сплошные линии), 6000 с (штриховые линии)

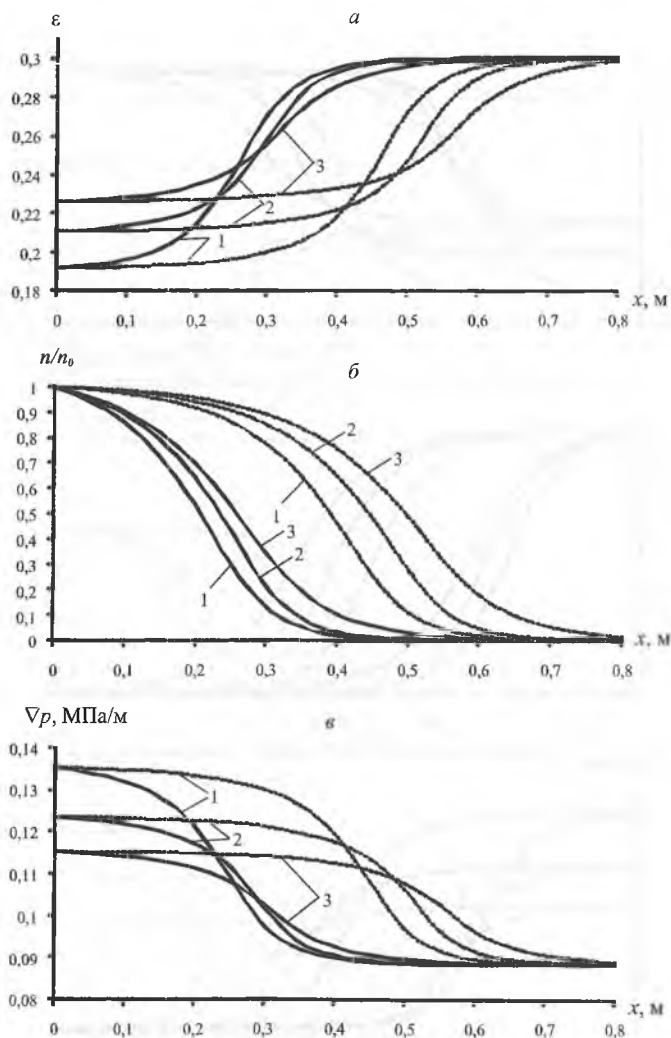


Рис.5.14. Профили изменения ε (а), n/n_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\lambda=0,05 \text{ м}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$, $\omega_2=0,05 \text{ с}^{-1}$ (3); $t=3000 \text{ с}$ (сплошные линии), 6000 с (штриховые линии)

При $0 \leq \sigma \leq 1$ разностная схема (5.48) может быть приведена к системе линейных алгебраических уравнений

$$An_{i-1}^{j+1} - Bn_i^{j+1} + Cn_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (5.51)$$

где

$$A = \left(D_0 \sigma + \frac{\lambda v_0}{\varepsilon_{i+1}'} \right) \frac{\tau}{h^2}, \quad B = 1 + \left(2D_0 \sigma + \frac{\lambda v_0}{\varepsilon_{i+1}'} + \frac{\lambda v_0}{\varepsilon_i'} \right) \frac{\tau}{h^2},$$

$$C = \left(D_0 \sigma + \frac{\lambda v_0}{\varepsilon_{i+1}'} \right) \frac{\tau}{h^2},$$

$$F_i^j = n_i^j + \tau \left(\left(\frac{D_0(1-\sigma)}{h^2} - \frac{\lambda v_0}{2\varepsilon_{ij} h} \right) n_{i+1}^j + \left(\frac{D_0(1-\sigma)}{h^2} + \frac{\lambda v_0}{2\varepsilon_{ij} h} \right) n_{i-1}^j - 2 \frac{D_0(1-\sigma)}{h^2} n_i^j \right) + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j}{\tau}$$

Данную систему решаем методом прогонки

$$n_i^{j+1} = \alpha_{i+1} n_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{I-1, 1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (5.52)$$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{C}{A\alpha_i - B}; \quad \beta_{i+1} = -\frac{A\beta_i + F_i^j}{A\alpha_i - B}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (5.53)$$

Из граничного условия имеем

$$n_0^{j+1} = \alpha_1 n_1^{j+1} + \beta_1 = 0,$$

где $\alpha_1 = 0$; $\beta_1 = n_0$.

Результаты расчетов на ЭВМ показывают, что при увеличении коэффициента диффузии D за счет увеличения λ при одинаковой скорости фильтрации v_0 , профили показателей n , ε , ∇n получаются более размытыми (рис.5.12-5.13). Сравнивая результаты при одинаковых значениях скорости фильтрации v_0 и D_0 для постоянного и переменного коэффициентов диффузии D видим, что для переменного коэффициента D профили получаются более размытыми, т.е. в этом случае в призабойной зоне фронт увеличения пористости и уменьшения концентрации является более расширенным за счет члена $\lambda v_0 / \varepsilon$ в коэффициенте D .

Результаты расчетов также показывают, что увеличение скорости фильтрации v_0 приводит к ускорению движения этих профилей.

Глава 6.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ С ОБЩЕЙ СХЕМАТИЗАЦИЕЙ ЗАПОЛНЕНИЯ ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА

- 6.1. Задача кольматационно-суффозионной
фильтрации с заданным скоростным
режимом**

- 6.2. Задача кольматационно-суффозионной
фильтрации для конечного фильтра с
заданным режимом по давлению**

- 6.3. Задача кольматационно-суффозионной
фильтрации с учетом диффузионных
эффектов**

В данной главе составлена система уравнений кольтационно-суффозионной фильтрации для схемы заполнения порового пространства по Ю.М.Шехтману [228]. При этом используется кинетическое уравнение относительно насыщенности порового пространства осевшей массой в рыхлом теле – ζ . Рассмотрены полубесконечный, конечный пласты, где постановки задач отличаются по режиму организации потока фильтруемой смеси. В отдельном параграфе оценена роль диффузионных эффектов.

6.1. Задача кольтационно-суффозионной фильтрации с заданным скоростным режимом

На основе предложенной модели рассмотрим задачу кольтационно-суффозионной фильтрации в пористой среде.

Систему уравнений кольтационно-суффозионной фильтрации в пористой среде в одномерном случае запишем в виде [182]

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}, & B = \frac{m_0(1-\varepsilon)}{v_0}, \quad B_1 = \frac{m_0}{v_0}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1+\gamma|\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \\ v_0 = K(m) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), & K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1-\varepsilon)). \end{cases} \quad (6.1)$$

Так как $\alpha = \delta(1 - \zeta)$, изменим первое уравнение системы (6.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1 - \zeta) + B_1 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1+\gamma|\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \\ v_0 = K(m) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), & K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1-\varepsilon)). \end{cases} \quad (6.2)$$

Рассмотрим полубесконечный однородный пласт с первоначальной пористостью m_0 , заполненный однородной жидкостью (т.е. жидкостью без дисперсных частиц). В точке $x=0$, начиная с $t>0$, в пласт поступает дисперсная жидкость с концентрацией твердых частиц δ_0 со скоростью фильтрации $v(t)v_0 = \text{const}$. Тогда граничное и начальные условия для задачи имеют вид

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0. \quad (6.3)$$

Таким образом, задача приведена к решению системы уравнений (6.2) при условиях (6.3).

Для решения этой задачи применим метод конечных разностей. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого интервал $[0, \infty]$ разбиваем с шагом h , а $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ . В результате имеем сетку:

$$\omega_{ij} = \{x_i, t_j\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, J, \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \quad \tau = T/J.$$

Вместо функций $\delta(x, t)$, $\zeta(x, t)$ и $|\nabla p(x, t)|$ будем рассматривать сеточные функции, значения которых в узлах (x_i, t_j) соответственно обозначим через δ_i^j , ζ_i^j и $|\nabla p|_i^j$. Для аппроксимации первого уравнения системы (6.2) выберем шаблон в виде правого верхнего уголка. При этом входящие в уравнение производные аппроксимируются конечно-разностными соотношениями с использованием односторонних разностей

$$\frac{\delta_i^{j+1} - \delta_{i-1}^{j+1}}{h} = -B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} - B_1 \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + B_1 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau}. \quad (6.4)$$

Разностная схема для второго уравнения системы (6.2) будет иметь вид

$$\frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}} \delta_i^j - \omega_1 |\nabla p|_i^{j+1} \zeta_i^j. \quad (6.5)$$

Из третьего уравнения системы (6.2) определим $|\nabla p|$

$$|\nabla p| = \frac{v_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon))} + |\nabla p_0|. \quad (6.6)$$

Аппроксимируя (6.6), получим

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{v_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta_i^j (1 - \varepsilon))} + |\nabla p_0|. \quad (6.7)$$

Граничные и начальные условия (6.3) также записываются в сеточном виде:

$$\begin{aligned} \zeta_i^0 &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, I, \\ \delta_i^0 &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, I, \\ \delta_0^j &= \delta_0, \quad j = 0, 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (6.2)-(6.3) сводится к решению разностной задачи (6.4), (6.5), (6.7), (6.8).

Схема расчета следующая. Согласно условиям (6.8), определяются значения δ , ζ , $|\nabla p|$ во всех точках нулевого слоя. Вычисления проводятся в следующей последовательности. Согласно (6.7), определяются значения $|\nabla p|_i^{j+1}$ в соответствующих точках, подставляя найденные $|\nabla p|_i^{j+1}$ в (6.5), находятся ζ_i^{j+1} и, согласно (6.4), определяются δ_i^{j+1} .

Укажем некоторые свойства разностной схемы (6.4). Это двухслойная трехточечная схема, аппроксимирующая задачу с первым порядком точности, т.е. невязка имеет порядок $O(\tau + h)$. Схема безусловно устойчива, что исключает ограничение на величину шага τ .

В качестве исходных параметров примем следующие числовые величины: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\varepsilon = 0,01$, $|\nabla p_0| = 0,01 \text{ МПа/м}$, $v_0 = 10^{-4} \text{ м/с}$, $\gamma = 0,1$; 1; 10; 100 м/МПа.

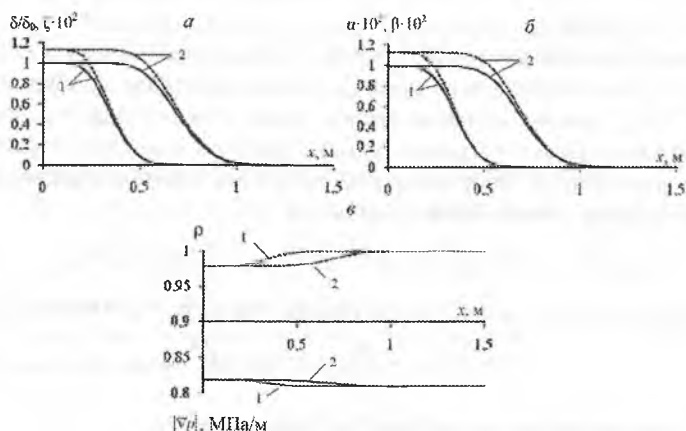


Рис. 6.1. Профили δ/δ_0 (а), α (б), $|\nabla p|$ (в) (сплошные кривые), ζ (а), β (б), ρ (в) (штриховые кривые) при $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\gamma = 0,1 \text{ м}/\text{МПа}$, $t = 1800$ (1), 3600 (2) с

Проведем анализ результатов для величин δ , ζ . С течением времени значения δ , ζ в фиксированных точках пласта возрастают (рис.6.1а-6.3а). С продвижением же жидкости в глубь фильтра их значения резко уменьшаются, причем ζ в большей степени, чем δ . При увеличении параметра γ в 10 и 100 раз, расчеты показывают уменьшение значений ζ и увеличение δ в соответствующих точках, что подтверждает гипотезу о влиянии γ на кольматационно-суффозионные эффекты. С увеличением γ кольматация становится менее ощутимой, что сокращает насыщенность фильтра осевшими частицами ζ и увеличивает концентрацию взвешенных частиц δ . Профили их изменения становятся более размытыми и пологими. Увеличив скорость фильтрации, замечаем резкое продвижение фронта в глубь фильтра. Проводя сравнительную характеристику результатов δ и ζ при различных скоростях фильтрации, отметим, что концентрация частиц в фиксированных точках пласта с увеличением скорости фильтрации увеличивается, а насыщенность осевшими ча-

стидами уменьшается, что говорит о прямом влиянии v_0 на суффозионный эффект. Очевидно, что варьируя ω_0, ω_1 также можно изменить характер фильтрационного процесса либо в пользу суффозии, либо – кольтматации. Так, увеличив ω_1 в 5 раз, наблюдаем падение значений ζ , сравнивая результаты при одинаковых скоростях фильтрации и одинаковых γ , и возрастание значений δ .

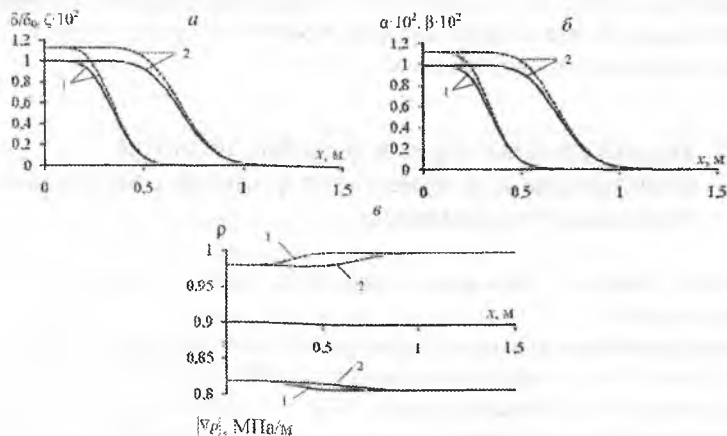


Рис. 6.2. Профили δ/δ_0 (а), α (б), $|\nabla p|$ (в) (сплошные кривые), ζ (а), β (б), ρ (в) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 3600 (2) с

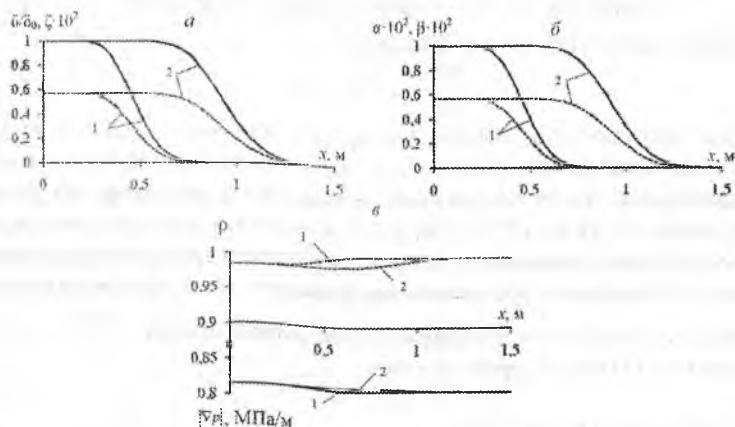


Рис. 6.3. Профили δ/δ_0 (а), α (б), $|\nabla p|$ (в) (сплошные кривые), ζ (а), β (б), ρ (в) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 3600 (2) с

Характеристика результатов для α, β (рис.6.1б-6.3б) аналогична представленной выше.

С увеличением времени значения $|\nabla p|$ в соответствующих точках возрастают (рис.6.1в-6.3в). Увеличение параметра γ не очень существенно влияет на изменение $|\nabla p|$, тем не менее, стоит отметить его уменьшение. Градиент давления резко возрастает с увеличением скорости фильтрации. Сравнивая же расчеты для $|\nabla p|$ при различных ω_1 отметим, что с его увеличением наблюдается уменьшение градиента давления $|\nabla p|$.

6.2. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации для конечного фильтра с заданным режимом по давлению

Здесь рассматривается задача для конечной области с граничным режимом по давлению.

В однородный пласт длины l , пористостью m_0 , насыщенный чистой (без частиц) жидкостью, с некоторого момента времени $t > 0$ начинает поступать дисперсная система с концентрацией взвешенных твердых частиц δ_0 . Течение происходит под действием градиента давления, создаваемого постоянными граничными давлениями p_n и p_k . Исходя из сформулированных условий задачи начальные и граничные условия записываются так:

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0, p(t, 0) = p_n, p(t, l) = p_k. \quad (6.9)$$

Воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial mp}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.10)$$

Здесь ради простоты считаем, что процесс движения жидкости происходит в квазистатическом режиме, в то время как перенос частиц остается нестационарным. Такой подход ранее использовался неоднократно. Достаточно упомянуть работы [236-238, 261]. Естественно, в общем случае необходимо учитывать локальные изменения пористости среды и плотности неоднородной жидкости в уравнении неразрывности. Итак, принимая $\rho \approx \text{const}$ и считая, что пористость изменяется слабо, можно принять $\frac{\partial mp}{\partial t} \approx 0$. Тогда уравнение (6.10) можно принять в виде

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (6.11)$$

Запишем закон Дарси в виде

$$v = K(m)(|\nabla p| - |\nabla p_0|). \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.11) для одномерного случая имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} [K(m)(|\nabla p| - |\nabla p_0|)] = 0,$$

откуда

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \right) + K(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (6.13)$$

где $K'_m(m)$ – производная $K(m)$ по m .

Таким образом, для определения неизвестных $p(t, x)$, $\delta(t, x)$, $\zeta(t, x)$ необходимо решить систему, состоящую из уравнения баланса системы (6.2), кинетики системы (6.2), закона фильтрации (6.12) и уравнения (6.13). Система решается при условиях (6.9) методом конечных разностей [157]. Используем неявную разностную схему с точностью аппроксимации $O(\tau+h)$, где τ, h – шаги сетки соответственно по времени и по длине пласта.

На $(j+1)$ -ом слое сетки $\omega_m = \{(x_i, t_j), i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}, x_i = ih, t_j = j\tau, h = l/I, \tau = T/J\}$, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс, I, J – количество точек деления сетки, аппроксимируется уравнение (6.13), предварительно записанное в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{(1-\varepsilon)}{1-\zeta(1-\varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1-\varepsilon)}{1-\zeta(1-\varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 = 0. \quad (6.14)$$

Сеточное решение, определенное в точках (x_i, t_j) для давления p обозначим через p_i^{j+1} . В результате получается следующая разностная схема:

$$\frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} + g_i \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{2h} + q_i p_i^{j+1} = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6.15)$$

где

$$g_i = \frac{\varepsilon - 1}{1 - \zeta(1 - \varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_i, \quad q_i = 0, \quad f_i = \frac{\varepsilon - 1}{1 - \zeta(1 - \varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_i \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0.$$

Условия (6.9) для давления принимают вид

$$p_0^{j+1} = p_n, \quad p_n^{j+1} = p_\kappa. \quad (6.16)$$

Приведем систему (6.15) к трехдиагональному виду

$$\begin{cases} p_0^{j+1} = p_n, \\ \alpha_i p_{i-1}^{j+1} - \beta_i p_i^{j+1} + \gamma_i p_{i+1}^{j+1} = \varphi_i, \\ p_n^{j+1} = p_\kappa. \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i^{j+1}}{2h}, \quad \beta_i = \frac{2}{h^2} - q_i, \quad \gamma_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i^{j+1}}{2h}, \quad \varphi_i = f_i.$$

Из разностных уравнений баланса и кинетики системы (6.2) соответственно получим

$$\delta_i^{j+1} = \delta_{i-1}^{j+1} - h \left(B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + B_1 \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) - B_1 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} \right), \quad (6.18)$$

$$\zeta_i^{j+1} = \zeta_i^j + \tau \left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}} \delta_i^j - \omega_1 |\nabla p|_i^{j+1} \zeta_i^j \right), \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J-1}. \quad (6.19)$$

Условия (6.3) после аппроксимации имеют вид

$$\zeta_0^j = 0, \quad \delta_0^j = 0, \quad \delta_0^{j+1} = \delta_0^j. \quad (6.20)$$

Решая систему уравнений (6.17) при условиях (6.16) методом прогонки, определяется давление на $(j+1)$ -ом слое и в соответствующих точках находится градиент давления по формуле:

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{|p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}|}{h}. \quad (6.21)$$

Затем по уравнениям (6.19), (6.18) и условиям (6.20) обычным рекуррентным расчетом определяются ζ и δ также на $(j+1)$ -ом слое.

Скорость фильтрации, согласно закону Дарси, определяется как

$$v_i^{j+1} = K(m_i^{j+1}) (|\nabla p|_i^{j+1} - |\nabla p_0|) = k_0 m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon)) (|\nabla p|_i^{j+1} - |\nabla p_0|). \quad (6.22)$$

По разностным уравнениям (6.16)-(6.20) производились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $l = 2,5$ м, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м²/(МПа·с), $p_n = 2,05$ МПа, $p_k = 0$, $\varepsilon = 0,01$.

По полученным решениям определены профили градиента давления, концентрации твердых взвешенных частиц, насыщенности осевшими частицами в различные моменты времени (рис.6.4-6.6).

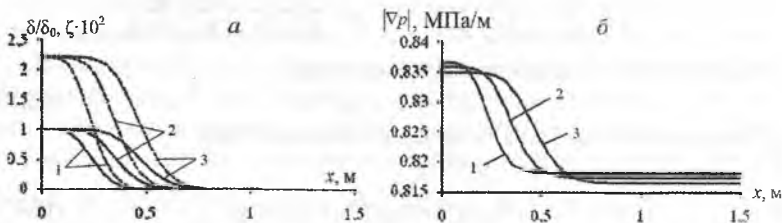


Рис. 6.4. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0 = 0,1$ с⁻¹, $\omega_1 = 0,05$ м/(МПа·с), $\gamma = 0,1$ м/МПа, $t = 1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

Из рис.6.4а - 6.6а видно, что изменение δ , ζ по глубине пласта носит монотонно-убывающий характер, а затем стабилизируется, достигнув нуля. С

увеличением времени в одних и тех же точках пласта значения δ и ζ возрастают, что объясняется продвижением их профилей вглубь пласта. Сравнение графических результатов показывает, что увеличение параметра γ приводит к уменьшению абсолютных значений насыщенности осевшими частицами ζ в одинаковых точках пласта. Увеличение γ , по сути дела, приводит к уменьшению кольтматационных эффектов, так как интенсивность влияния $|\nabla p|$ на кольтматацию усиливается. Это приводит к отмеченному явлению уменьшения ζ .

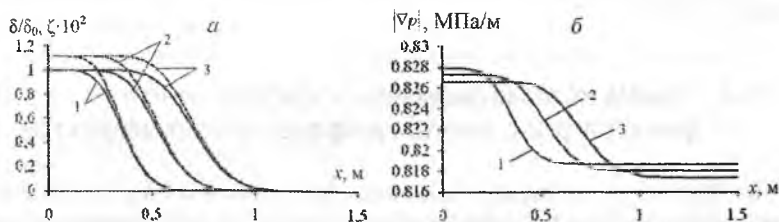


Рис. 6.5. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

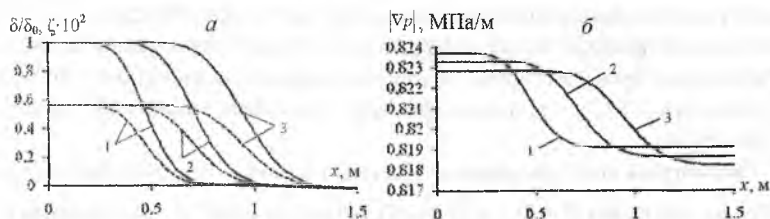


Рис. 6.6. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

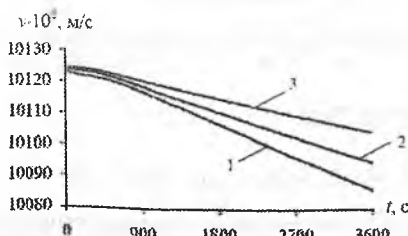


Рис. 6.7. Профили изменения ν по t при $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, 1) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 2) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 3) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$

Анализируя профили распределения $|\nabla p|$ (рис. 6.4б-6.6б) отметим, что они также носят монотонно убывающий характер, а затем стабилизируются, достигнув определенной величины. Причем, с увеличением значения γ процесс стабилизации происходит медленнее, а профили $|\nabla p|$ становятся более размытыми по глубине пласта. Стоит отметить, что скорость фильтрации $v(t)$ (рис.6.7) в различных точках i принимает постоянное значение, что согласуется с уравнением неразрывности (6.11). Однако $v(t)$ с течением времени монотонно уменьшается, что объясняется кольматационными эффектами (рис.6.7).

6.3. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом диффузионных эффектов

В пористых средах наряду с конвективным переносом существенное значение может приобрести диффузионный перенос. Процесс перемешивания жидкостей в пористых средах (конвективная диффузия) показывает, что интенсивность перемешивания зависит от средней скорости потока [126]. Здесь решены задачи конвективной диффузии в пористых средах с учетом зависимости коэффициента диффузии от скорости фильтрации в полубесконечном однородном пласте с заданным скоростным режимом [180] на основе модели [181] и в конечном фильтре с заданным скоростным режимом по давлению.

Рассмотрим нестационарное уравнение баланса с переменным коэффициентом диффузии $D = D_0 + \lambda \frac{v_0}{m}$, где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, v_0 – постоянная скорость, v_0/m – физическая скорость движения жидкости.

В этом случае система уравнений (6.2) имеет вид

$$\begin{cases} q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = -m_0(1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1-\zeta) + m_0 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \\ v_0 = K(m) |\nabla p| - |\nabla p_0|, \quad K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon)). \end{cases} \quad (6.23)$$

Рассмотрим задачу кольматационно-суффозионной фильтрации в полубесконечном однородном пласте с заданным скоростным режимом v_0 [182].

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0, \delta(t, \infty) = 0. \quad (6.24)$$

Применим к решению данной задачи метод конечных разностей [157]. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку ω_h . На этой сетке аппроксимируем первое уравнение системы (6.23)

$$\frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h} = -B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} - B_1 \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + B_1 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \frac{1}{v_0 m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) \frac{\delta_{i+1}^{j+1} - 2\delta_i^{j+1} + \delta_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda}{m_0} \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_{i-1}^{j+1}}{h}. \quad (6.25)$$

Разностные схемы для второго и третьего уравнений системы (6.23) принимаются как (6.5) и (6.7).

Начальные и граничные условия для разностной задачи записываются в виде

$$\zeta_i^0 = 0, \delta_i^0 = 0, \delta_0^{j+1} = \delta_0, \delta_n^{j+1} = 0,$$

где n – достаточно большое число.

Разностная схема (6.25) может быть приведена к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$A_i \delta_{i-1}^{j+1} - B_i \delta_i^{j+1} + C_i \delta_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (6.26)$$

где

$$A_i = 1 + \frac{1}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) - \frac{\lambda}{m_0} \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2},$$

$$B_i = 1 + \frac{h B_1}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + \frac{2}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) - \frac{\lambda}{m_0} \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2},$$

$$C_i = \frac{1}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right),$$

$$F_i^j = \frac{h B_1}{\tau} (1 - \zeta_i^j) \delta_i^j - \frac{h B}{\tau} (\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j) + h B_1 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau}.$$

Данную систему решаем методом прогонки при известных ζ_i^{j+1} , определенных в соответствии с (6.5),

$$\delta_i^{j+1} = \alpha_{i+1} \delta_{i+1}^{j+1} + \beta_i^{j+1}, \quad i = \overline{I-1, 1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (6.27)$$

где

$$\alpha_{i+1} = -\frac{C_i}{A_i \alpha_i - B_i}, \quad \beta_{i+1}^{j+1} = -\frac{A_i \beta_i^{j+1} + F_i^j}{A_i \alpha_i - B_i}, \quad i = \overline{I-1, 1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Из начального условия имеем

$$\delta_0^{j+1} = \alpha_1 \delta_1^{j+1} + \beta_1^{j+1} = \delta_0, \text{ откуда } \alpha_1 = 0, \beta_1 = \delta_0. \quad (6.28)$$

По разностным уравнениям (6.7), (6.5), (6.28), (6.27) проводились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м²/с (МПа·с), $\varepsilon = 0,01$, $|\nabla p_0| = 0,01$ МПа/м, $v_0 = 10^{-4}$ м/с, $D_0 = 10^{-5}$ м²/с, $\lambda = 0,005$ м.

Рассмотрим задачу конвективной диффузии в конечном фильтре с заданным режимом по давлению. Переменный коэффициент диффузии примем в следующем виде: $D = D_0 + \lambda \frac{v}{m}$, где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $v = v(t)$ определяются из закона Дарси.

В этом случае, вместо уравнения баланса системы (6.23) принимается

$$q(i) \frac{\partial \delta}{\partial x} = -m_0(1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1-\zeta) + m_0 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 + \frac{\lambda v}{m} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right]. \quad (6.29)$$

Алгоритм решения данной задачи аналогичен алгоритму задачи, приведенной в разделе 6.2. В итоге разностная схема для определения δ_i^{j+1} имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h} = & -B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} - B_1 \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + B_1 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \\ & + \frac{1}{v_i^{j+1} m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) \times \frac{\delta_i^{j+1} - 2\delta_i^{j+1} + \delta_i^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda}{m_0} \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Значения ζ_i^{j+1} определяются по (6.5).

Разностные уравнения (6.30) приводятся к СЛАУ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$A_i \delta_{i-1}^{j+1} - B_i \delta_i^{j+1} + C_i \delta_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (6.31)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= 1 + \frac{1}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right), \\ B_i &= 1 + \frac{hB}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + \frac{2}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) + \frac{\lambda k_0}{h^2} (p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}), \\ C_i &= \frac{1}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) + \frac{\lambda k_0}{h^2} (p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}), \\ F_i^j &= -\frac{hB}{\tau} (\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j) + \frac{hB}{\tau} \delta_i^j (1 - \zeta_i^j). \end{aligned}$$

Поле давления определяется аналогично разделу 6.2 на основе решения системы уравнений (6.17), а градиент давления определяется из (6.21). Затем, в соответствии с (6.22) определяется v_i^{j+1} , предварительно определив ζ_i^{j+1} по (6.5).

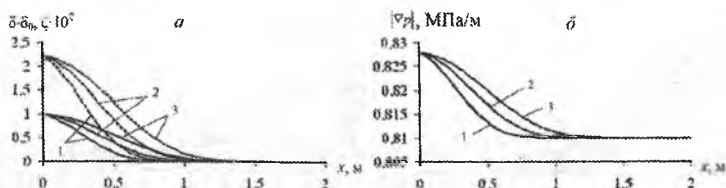


Рис. 6.8. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

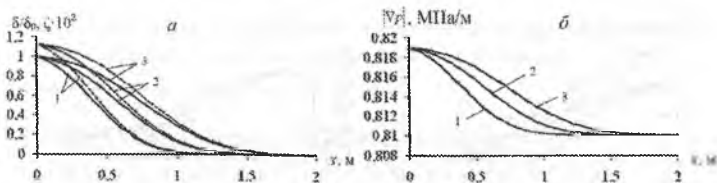


Рис. 6.9. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

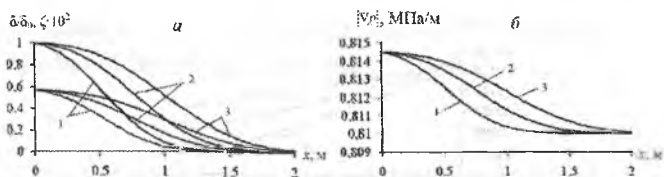


Рис. 6.10. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

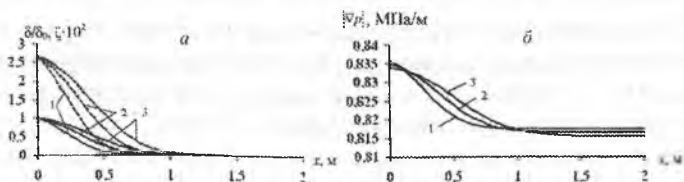


Рис. 6.11. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

СЛАУ (6.31) решаем методом прогонки по схеме (6.27), (6.28). По разностным уравнениям (6.17), (6.21), (6.22), (6.5), (6.31) проводились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $\varepsilon = 0,01$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{МПа·с})$, $|\nabla p_0| = 0,01 \text{ МПа/м}$, $D_0 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 0,005 \text{ м}$, $l = 2,5 \text{ м}$, $p_0 = 2,05 \text{ МПа}$, $p = 0 \text{ МПа}$.

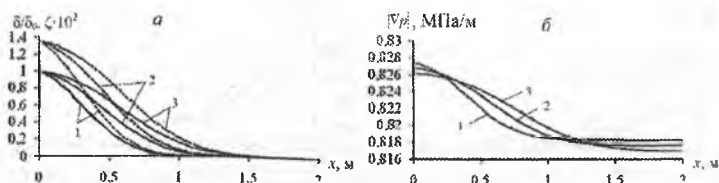


Рис. 6.12. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

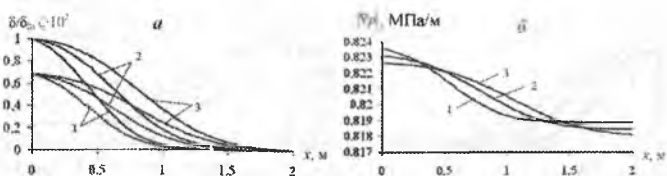


Рис. 6.13. Профили δ/δ_0 (а), $|\nabla p|$ (б) (сплошные кривые), ζ (а) (штриховые кривые) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, $t=1800$ (1), 2700 (2), 3600 (3) с

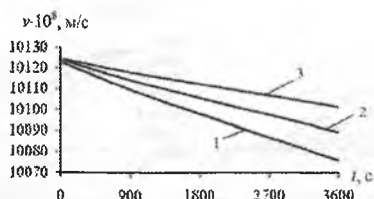


Рис.6.14. Профили изменения v по t при $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, 1) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 2) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 3) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$

По результатам расчетов обеих задач были построены графики изменения искомых величин во времени (рис.6.8-6.14). Как видно из рисунков, изменения δ и ζ по глубине пласта носят монотонно убывающий характер, а затем стабилизируются, достигнув нулевого значения. С увеличением времени в одних и тех же точках пласта значения δ и ζ возрастают, что объясняется продвижением их профилей вглубь пласта. Со временем профили становятся более размытыми. При увеличении параметров λ и D_0 профили показателей δ и ζ распростираются более широким фронтом, что объясняется влиянием диффузионного члена, включенного в балансовое уравнение. Результаты расчетов показывают также, что увеличение скорости фильтрации приводит к ускорению движения профилей δ и ζ .

Глава 7.

Задачи кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом предельного суффозионного градиента давления

- 7.1. Кольматационно-суффозионная
фильтрация в полубесконечном пласте**
- 7.2. Фильтрация в конечном пласте с заданным
режимом по давлению**
- 7.3. Фильтрация в полубесконечном пласте с
учетом диффузионных эффектов**
- 7.4. Фильтрация в конечном пласте с учетом
диффузионных эффектов**

В этой главе в разделах 7.1, 7.2 решены и анализированы задачи кольматационно-суффозионной фильтрации в полубесконечном и конечном пласте с учетом ПСГД. В разделах 7.3 и 7.4 решены задачи кольматационно-суффозионной фильтрации в полубесконечном и конечном пласте с учетом диффузионных эффектов. Анализировано влияние ПСГД на коллекторские свойства породы при фильтрации дисперсных систем.

7.1. Кольматационно-суффозионная фильтрация в полубесконечном пласте

Систему уравнений кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом ∇p_c в пористой среде в одномерном случае запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial x} &= -B \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1 - \zeta) + B_1 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \begin{cases} \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) \text{ если } |\nabla p| > |\nabla p_c|, \\ \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \text{ если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c|, \end{cases} \quad (7.1) \\ v &= K(m) |\nabla p|, \end{aligned}$$

где $K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon))$, $B = \frac{m_0(1 - \varepsilon)}{q(t)}$, $B_1 = \frac{m_0}{q(t)} m_0$, m – первоначальная и текущая пористости среды; ω_0 , ω_1 – параметры, характеризующие интенсивность кольматации и суффозии, соответственно; γ – параметр, характеризующий интенсивность влияния ∇p на кольматацию.

Рассмотрим полубесконечный однородный пласт с первоначальной пористостью m_0 , заполненный однородной жидкостью (т.е. жидкостью без дисперсных частиц). В точке $x=0$, начиная с $t>0$, в пласт поступает дисперсная жидкость с концентрацией твердых частиц δ_0 со скоростью фильтрации $v(t) = v_0 = \text{const}$. Тогда граничные и начальные условия для задачи имеют вид [203, 267]

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0. \quad (7.2)$$

Таким образом, задача приведена к решению системы уравнений (7.1) при условиях (7.2).

Для решения этой задачи применим метод конечных разностей. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого интервал $[0, \infty)$ разбиваем с шагом h , а $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ . В результате имеем сетку: $\omega_{it} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, \dots, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J\}$.

Вместо функций $\delta(x, t)$, $\zeta(x, t)$ и $|\nabla p(x, t)|$ будем рассматривать сеточные функции, значения которых в узлах (x_i, t_j) соответственно обозначим δ_i^j , ζ_i^j и $|\nabla p|_i^j$. Для аппроксимации первого уравнения системы (7.1) выберем шаблон в виде правого верхнего угла.

Разностная схема для уравнения баланса системы (7.1) принимается как (6.4).

Разностная схема для второго уравнения системы (7.1) будет иметь вид

$$\frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} = \begin{cases} \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^j} \delta_i^j - \omega_1 (|\nabla p|_i^{j+1} - |\nabla p_c|) \zeta_i^j, & \text{если } |\nabla p|_i^{j+1} > |\nabla p_c| \\ \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}} \delta_i^j, & \text{если } |\nabla p|_i^{j+1} \leq |\nabla p_c| \end{cases} \quad (7.3)$$

Из третьего уравнения системы (7.1) определим $|\nabla p|$

$$|\nabla p| = \frac{\nu_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon))} \quad (7.4)$$

Аппроксимируя (7.4), получим

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{\nu_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta_i^j (1 - \varepsilon))}. \quad (7.5)$$

Граничные и начальные условия (7.2) записываются в сеточном виде

$$\delta_0^j = \delta_0, j = 0, 1, \dots, J, \delta_i^0 = 0, \zeta_i^0 = 0, i = 0, 1, \dots, I, \quad (7.6)$$

где I – достаточно большое число, для которого приблизительно выполняется $\delta_I^j = 0, \zeta_I^j = 0$.

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (7.1)–(7.2) сводится к решению разностной задачи (6.4), (7.3), (7.5), (7.6).

Схема расчета следующая. Согласно условиям (7.6), определяются значения $\delta(x, t)$, $\zeta(x, t)$ во всех точках нулевого слоя. Вычисления проводятся в следующей последовательности. Согласно (7.5), определяются значения $|\nabla p|_i^{j+1}$ через известные величины ζ_i^j нижнего слоя в соответствующих точках, подставляя найденные $|\nabla p|_i^{j+1}$ в (7.3) находят ζ_i^{j+1} и, согласно (6.4), определяются δ_i^{j+1} .

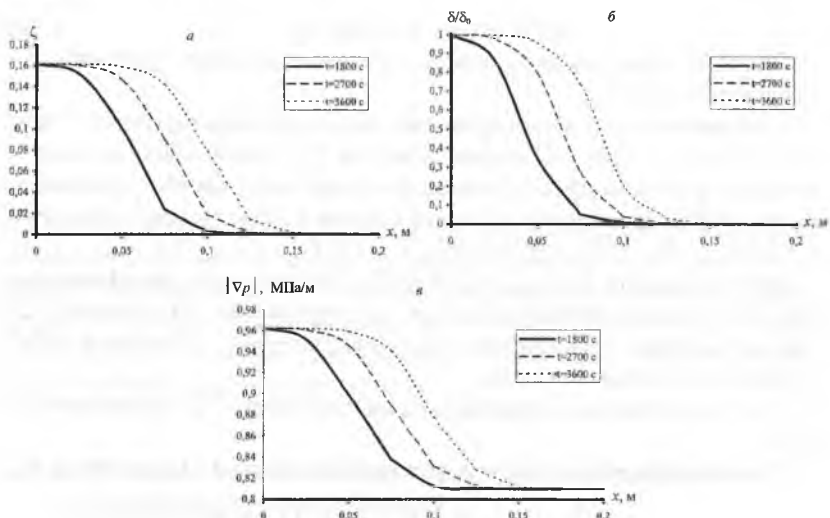


Рис. 7.1. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0.1 \text{ c}^{-1}$, $\omega_1 = 0.05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0.1 \text{ м/МПа}$

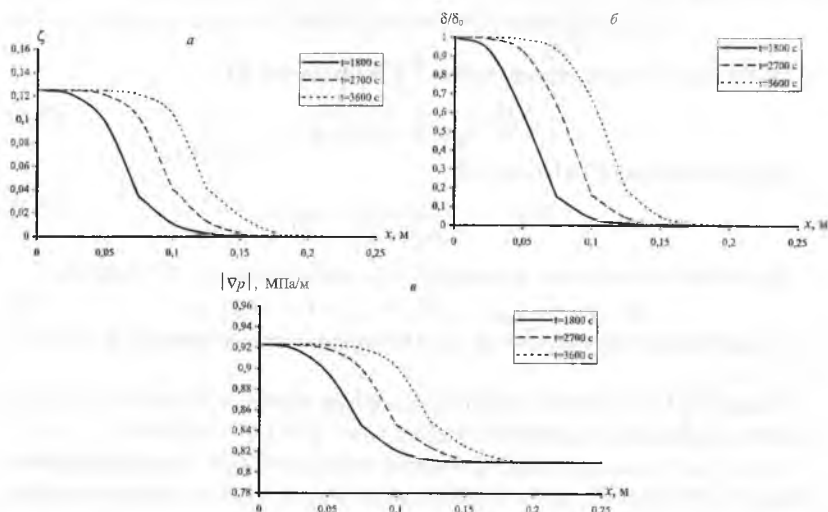


Рис. 7.2. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0.05 \text{ c}^{-1}$, $\omega_1 = 0.05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0.1 \text{ м/МПа}$

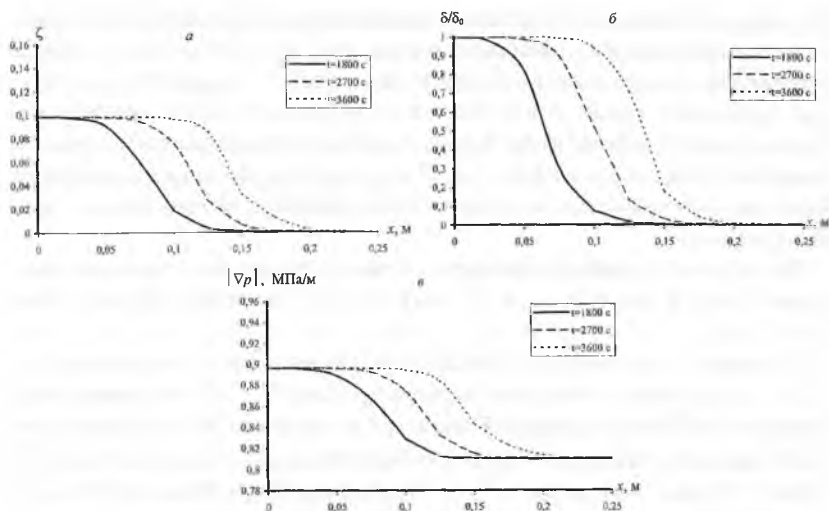


Рис. 7.3. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$

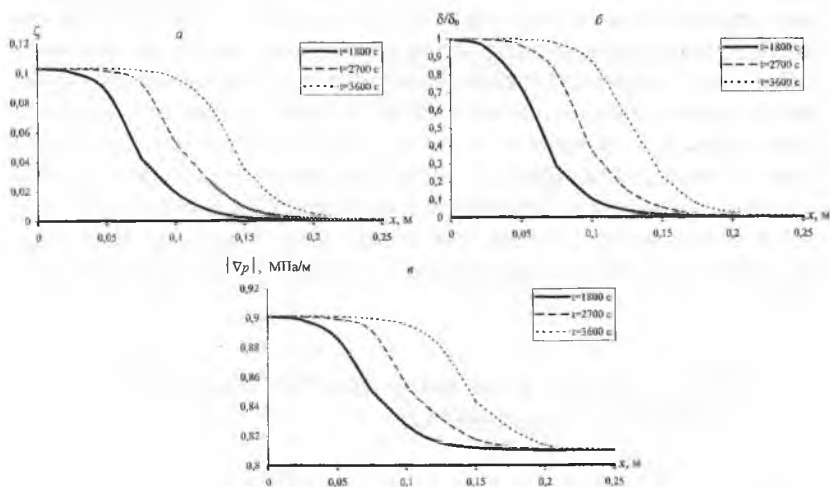


Рис. 7.4. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$

Распределение $|\nabla p|_{i_0}^{j+1}$ определяет схему расчета по (7.3) в последующих слоях. Находится соответствующее значение $i=i_0$, для которого $|\nabla p|_{i_0}^{j+1} \leq |\nabla p|_c$.

Значение i_0 определяет положение суффозионного фронта. Для значений $i \leq i_0$ текущий градиент давления не меньше, чем $|\nabla p_c|$. Это – зона кольтматации и суффозии. Для $i > i_0$ значение $|\nabla p|$ не больше, чем $|\nabla p_c|$. Следовательно, в этой зоне происходят только кольтматационные эффекты. Так как в данной задаче задается скорость фильтрации и поле давления не определяется, а градиент давления определяется из формулы (7.5), выделение границы изменения режима чистой кольтматации на кольтматации и суффозии не представляет большой трудности.

В качестве исходных параметров примем следующие числовые величины: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $|\nabla p_c| = 0,85 \text{ МПа/м}$, $\varepsilon = 0,01$, $v_0 = 10^{-4} \text{ м/с}$.

На основе полученных результатов построены графики изменений ζ , δ/δ_0 , ∇p при различных значениях ω_0 , ω_1 и др. (рис.7.1-7.4). Числовые значения ω_0 , ω_1 выбраны в диапазоне, анализированном в [196, 259]. Результаты показывают, что путем регулирования значений ω_0 , ω_1 можно получить различные профили изменения ζ , δ/δ_0 , ∇p , где кольтматационные эффекты либо преваляют, либо незначительны. Введение параметра ∇p_c существенно меняет картину фильтрационных показателей. Показано, что в пористой среде образуются две зоны: одна с $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ и другая с $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$. В этих зонах фильтрационные характеристики имеют различные темпы изменения.

Сравнение графических результатов показывает, что увеличение параметра γ приводит к уменьшению абсолютных значений насыщенности осевшими частицами ζ в одинаковых точках пластов. При этом, если при $\gamma=0,1$ в точке $x=0$ было $\zeta=0,125$ (рис.7.2), то при $\gamma=1$ имеем $\zeta=0,15$ (рис.7.4). Если увеличение параметра ω_0 приводит к увеличению ζ , то увеличение ω_1 приводит к уменьшению ζ в одинаковых точках пласта. В процессе фильтрации смеси размер первой зоны постепенно расширяется от места закачки жидкости.

7.2. Фильтрация в конечном пласте с заданным режимом по давлению

Здесь рассматривается задача для конечной области с граничным режимом по давлению, как в разделе 6.2.

В однородный пласт длины l , пористостью m_0 , насыщенным чистой (без частиц) жидкостью с некоторого момента времени $t > 0$ начинает поступать дисперсная система с концентрацией взвешенных твердых частиц

δ_0 . Течение происходит под действием градиента давления, создаваемого постоянными граничными давлениями p_n и p_k . Исходя из сформулированных условий задачи, начальные и граничные условия записываются так [87, 210]:

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0, p(t, 0) = p_n, p(t, l) = p_k. \quad (7.7)$$

Воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0. \quad (7.8)$$

Здесь ради простоты считаем, что процесс движения жидкости происходит в квазистатистическом режиме, в то время как перенос частиц остается нестационарным. Такой подход ранее использовался неоднократно. Достаточно упомянуть работы [236, 237, 238, 261]. Естественно, в общем случае необходимо учитывать локальные изменения пористости среды и плотности неоднородной жидкости в уравнении неразрывности. Итак, принимая $\rho \approx \text{const}$ и считая, что пористость изменяется слабо, можно принять $\frac{\partial m \rho}{\partial t} \approx 0$. Тогда уравнение (7.8) принимает вид

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (7.9)$$

Запишем закон Дарси в виде

$$v = K(m) \left(|\nabla p| - |\nabla p_0| \right). \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в (7.9), для одномерного случая имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K(m) \left(|\nabla p| - |\nabla p_0| \right) \right] = 0,$$

откуда

$$K'_m(m) \frac{\partial m}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0 \right) + K(m) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad (7.11)$$

где $K'_m(m)$ – производная $K_m(m)$ по m .

Таким образом, для определения неизвестных $p(t, x)$, $\delta(t, x)$, $\zeta(t, x)$ необходимо решить систему, состоящую из уравнения баланса (7.1), уравнения кинетики, закона фильтрации (7.10) и уравнения (7.11). Система решается при условиях (7.7) методом конечных разностей [157]. Используем неявную разностную схему с точностью аппроксимации $O(\tau + h)$, где τ , h – шаги сетки соответственно по времени и по длине пласта.

На $(j+1)$ -ом слое сетки

$$\omega_{\text{нч}} = \{ \langle x_i, t_j \rangle, x_i = ih, i = 0, 1, \dots, I, h = l/I, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J, \tau = T/J \},$$

где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс, I, J – количество точек деления сетки, аппроксимируется уравнение (7.11), предварительно записанное в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{(1-\varepsilon)}{1-\zeta(1-\varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1-\varepsilon)}{1-\zeta(1-\varepsilon)} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_n = 0. \quad (7.12)$$

Сеточное решение, определенное в точках (x_i, t_j) для давления p обозначим через p_i^j . В результате получается следующая разностная схема:

$$\frac{p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}}{h^2} + g_i \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{2h} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (7.13)$$

$$\text{где } g_i = \frac{\varepsilon - 1}{1 - \zeta_i^j(1 - \varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_i, \quad \varphi_i = \frac{\varepsilon - 1}{1 - \zeta_i^j(1 - \varepsilon)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_i \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_0.$$

Условия (7.7) для давления принимают вид

$$p_0^{j+1} = p_n, \quad p_n^{j+1} = p_k. \quad (7.14)$$

Систему (7.13) с учетом (7.14) приводим к виду

$$\begin{cases} p_0^{j+1} = p_n, \\ \alpha_i p_{i-1}^{j+1} - \beta_i p_i^{j+1} + \gamma_i p_{i+1}^{j+1} = \varphi_i, \\ p_n^{j+1} = p_k, \end{cases} \quad (7.15)$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{1}{h^2} - \frac{g_i}{2h}, \quad \beta_i = \frac{2}{h^2}, \quad \gamma_i = \frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{2h}.$$

Из разностных уравнений баланса и кинетики (7.1) соответственно получим

$$\delta_i^{j+1} = \delta_i^{j+1} - h \left(B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + B_i \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) - B_i \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} \right), \quad (7.16)$$

$$\zeta_i^{j+1} = \zeta_i^j + \tau \cdot \begin{cases} \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^{j+1}} \delta_i^j - \omega_i (|\nabla p|_i^j - |\nabla p_c|_i^j) \cdot \text{если } |\nabla p|_i^j > |\nabla p_c|_i^j, \\ \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_i^j} \delta_i^j, \quad \text{если } |\nabla p|_i^j \leq |\nabla p_c|_i^j. \end{cases} \quad (7.17)$$

Условия (7.8) после аппроксимации имеют вид

$$\zeta_i^0 = 0, \quad \delta_i^0 = 0, \quad \delta_0^{j+1} = \delta_0, \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (7.18)$$

Решая систему уравнений (7.15), методом прогонки определяют давление на $(j+1)$ -ом слое и в соответствующих точках находят градиент давления по формуле

$$|\nabla p|_i^{j+1} = \frac{|p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}|}{h}. \quad (7.19)$$

Затем по уравнениям (7.17), (7.16) и условиям (7.18) обычным рекуррентным расчетом определяются ζ_i^{j+1} и δ_i^{j+1} .

Скорость фильтрации, согласно закону Дарси, определяется как

$$v_i^{j+1} = K(m_i^{j+1}) (|\nabla p|_i^{j+1} - |\nabla p_0|) = k_0 m_0 (1 - \zeta_i^{j+1}(1 - \varepsilon)) (|\nabla p|_i^{j+1} - |\nabla p_0|). \quad (7.20)$$

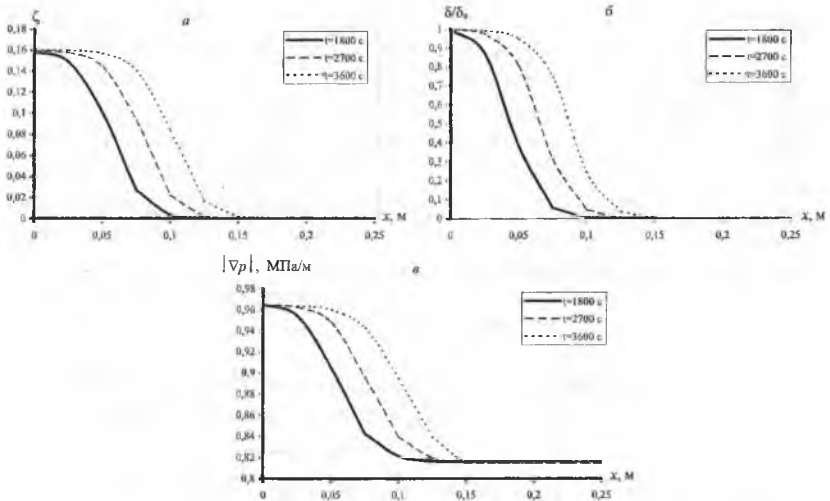


Рис. 7.5. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0,1 \text{ м/МПа}$

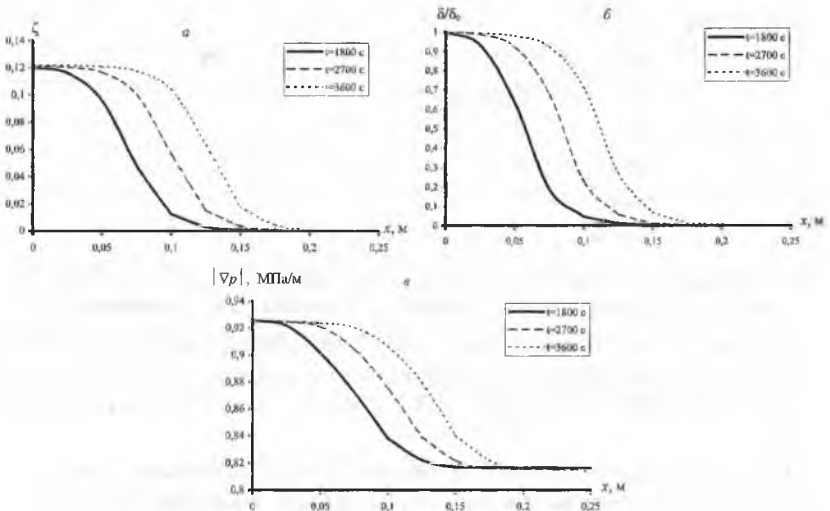


Рис. 7.6. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0,1 \text{ м/МПа}$

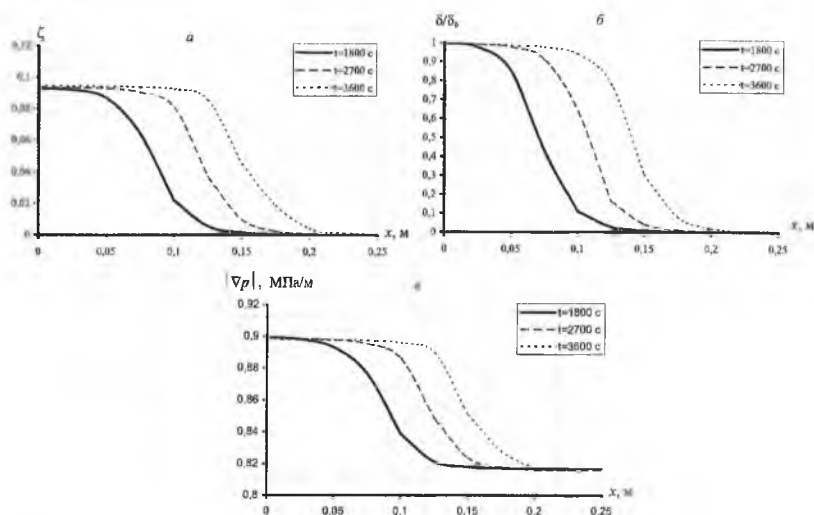


Рис. 7.7. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$

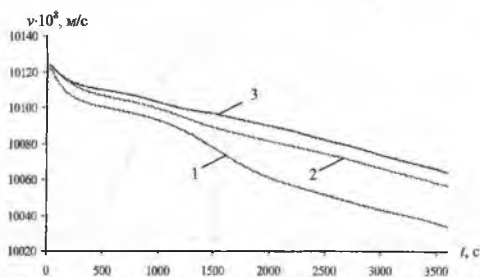


Рис.7.8. Профили изменения v по t при $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$, 1) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 2) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; 3) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$

По разностным уравнениям (7.16)-(7.20) производились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{МПа·с})$, $|\nabla p_c| = 0,85 \text{ МПа/м}$, $l=2,5 \text{ м}$, $p = 2,05 \text{ МПа}$, $p = 0 \text{ МПа}$, $\varepsilon=0,01$.

По полученным решениям определены профили давления, концентрации твердых взвешенных частиц, насыщенности осевшими частицами в различные моменты времени, градиента давления (рис.7.5-7.7) и скорости фильтрации в точке $x=0$ (рис.7.8). Анализ результатов расчетов показывает, что, как и в задаче с заданной скоростью фильтрации (раздел 7.1), здесь

также образуются две зоны: 1) зона с $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ и 2) зона с $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$. В этих зонах темпы изменения фильтрационных характеристик различны.

Влияние параметров γ , ω_0 , ω_1 аналогично приведенному в задаче с заданной скоростью фильтрации. В отличие от задачи с $v_0 = \text{const}$ в точке $x=0$ уменьшение ζ и увеличение $|\nabla p|$ прогрессирует. На рис.7.8 показано изменение скорости фильтрации в точке $x=0$. Как видно из рисунка, темпы изменения скорости фильтрации для различных режимов изменения γ , ω_0 , ω_1 различны. На графиках можно заметить уменьшение темпа снижения скорости фильтрации при уменьшении параметра кольтматации (кривая 2) и увеличении параметра суффозии (кривая 3).

7.3. Фильтрация в полубесконечном пласте с учетом диффузионных эффектов

В пористых средах, наряду с конвективным переносом, существенное значение может приобретать диффузионный перенос. Процесс перемешивания жидкостей в пористых средах (конвективная диффузия) показывает, что интенсивность перемешивания зависит от средней скорости потока [126]. Здесь решены задачи конвективной диффузии в пористых средах с учетом зависимости коэффициента диффузии от скорости фильтрации в полубесконечном однородном пласте с заданным скоростным режимом на основе модели и в конечном фильтре с заданным скоростным режимом по давлению. Такая задача без учета ∇p на основе модели [181] решена в [180].

Рассмотрим нестационарное уравнение баланса с переменным коэффициентом диффузии $D = D_0 + \lambda \frac{v_0}{m}$, где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, v_0 – постоянная скорость фильтрации, v_0/m – физическая скорость движения жидкости.

В этом случае система уравнений (7.1) имеет вид [191]

$$q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = -m_0(1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1-\zeta) + m_0 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right],$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) \zeta, & \text{если } |\nabla p| > |\nabla p_c| \\ \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta, & \text{если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c| \end{cases} \quad (7.21)$$

$$v_0 = K(m) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \quad K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon)).$$

В первом уравнении системы (7.21) последний член справа представляет собой классический диффузионный член, получающийся из уравнения баланса переносимой массы. Член слева соответствует изменению количества частиц за счет конвективного переноса, а члены с производными по времени – локальному изменению осевшей массы.

Сначала рассмотрим задачу кольматационно-суффозионной фильтрации в полубесконечном однородном пласте с заданным скоростным режимом v_0 .

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\zeta(0, x) = 0, \delta(0, x) = 0, \delta(t, 0) = \delta_0, \delta(t, \infty) = 0. \quad (7.22)$$

Применим к решению данной задачи метод конечных разностей [156, 157]. В области $D = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ вводим сетку ω_{π} (раздел 7.1). Аппроксимируем первое уравнение системы (7.21)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h} = & B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} - B \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + B \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \\ & + \frac{1}{v_0 m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) \frac{\delta_{i+1}^{j+1} - 2\delta_i^{j+1} + \delta_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda}{m_0} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_{i-1}^{j+1}}{h}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Разностная схема для второго уравнения системы будет как (7.3).

Из третьего уравнения (7.21) выражаем $|\nabla p|^{j+1}$ через остальные известные величины

$$|\nabla p|^{j+1} = \frac{v_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta_i^j (1 - \varepsilon))} |\nabla p_0|. \quad (7.24)$$

Начальные и граничные условия для разностной задачи записываются в виде:

$$\zeta_i^0 = 0, \delta_i^0 = 0, \delta_0^{j-1} = \delta_0, \delta_I^{j-1} = 0,$$

где I достаточно большое число (как в разделе 7.1).

Разностная схема (7.23) может быть приведена к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$A_i \delta_{i-1}^{j+1} - B_i \delta_i^{j+1} + C_i \delta_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (7.25)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= 1 + \frac{1}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) - \frac{\lambda}{m_0} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2}, \\ B_i &= 1 + \frac{h B_1}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + \frac{2}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) - \frac{\lambda}{m_0} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2}, \\ C_i &= \frac{1}{h m_0 v_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right), \end{aligned}$$

$$F_i' = \frac{hB_1}{\tau}(1 - \zeta_i')\delta_i' - \frac{hB}{\tau}(\zeta_i^{j+1} - \zeta_i') + hB_1\delta_i' \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i'}{\tau}.$$

Данную систему решаем методом прогонки при известных ζ_i^{j+1} , определенных в соответствии с (2.4):

$$\delta_i^{j+1} = \alpha_{i+1}\delta_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{j+1}, \quad i = \overline{1, I-1} \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (7.26)$$

где

$$\alpha_{i+1} = -\frac{C_i}{A_i\alpha_i - B_i}, \quad \beta_{i+1}^{j+1} = -\frac{A_i\beta_i^{j+1} + F_i'}{A_i\alpha_i - B_i}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}.$$

Из начального условия имеем:

$$\delta_0^{j+1} = \alpha_1\delta_1^{j+1} + \beta_1^{j+1} = \delta_0, \quad \text{откуда } \alpha_1 = 0, \beta_1 = \delta_0. \quad (7.27)$$

По разностным уравнениям (7.24), (7.26), (7.27), (7.3) проводились численные расчеты при следующих значениях исходных данных: $\delta_0 = 0,01$, $m_0 = 0,2$, $k_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $|\nabla p_c| = 0,85 \text{ МПа/м}$, $|\nabla p_0| = 0,01 \text{ МПа/м}$, $\varepsilon = 0,01$, $v_0 = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D_0 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 0,005 \text{ м}$.

Результаты расчетов представлены на рис.7.9-7.11. Анализ результатов показывает, что влияние ω_p , ω_v , γ аналогично со случаем, рассмотренным ранее. Влияние же диффузионных эффектов обнаруживается в размытии профилей δ/δ_0 , ζ , ∇p по направлению течения дисперсной смеси. Как и в [259], представляется интересным изучение взаимовлияния параметров ω_p , ω_v , γ , D_p , λ . В отдельных случаях можно говорить об аналогичности влияния суффузионных и диффузионных эффектов. Однако кольтматационные и диффузионные эффекты влияют на характеристики фильтрации взаимнообратно.

7.4. Фильтрация в конечном пласте с учетом диффузионных эффектов

Рассмотрим задачу конвективной диффузии в конечном фильтре с заданным режимом по давлению. Переменный коэффициент диффузии примем в виде

$$D = D_0 + \lambda \frac{v}{m},$$

где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $v = v(t)$ определяются из закона Дарси.

В этом случае вместо уравнения баланса (7.21) принимается

$$q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = -m_0(1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m_0 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1 - \zeta) + m_0 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 + \frac{\lambda v}{m} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right]. \quad (7.28)$$

Алгоритм решения данной задачи аналогичен алгоритму задачи, приведенной в разделе 7.2.

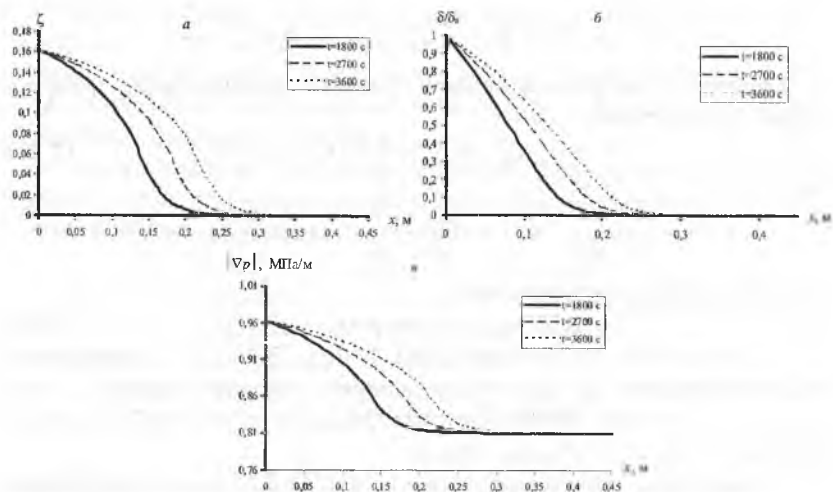


Рис. 7.9. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,1$ с⁻¹, $\omega_1=0,05$ м/(МПа с), $\gamma=0,1$ м/МПа

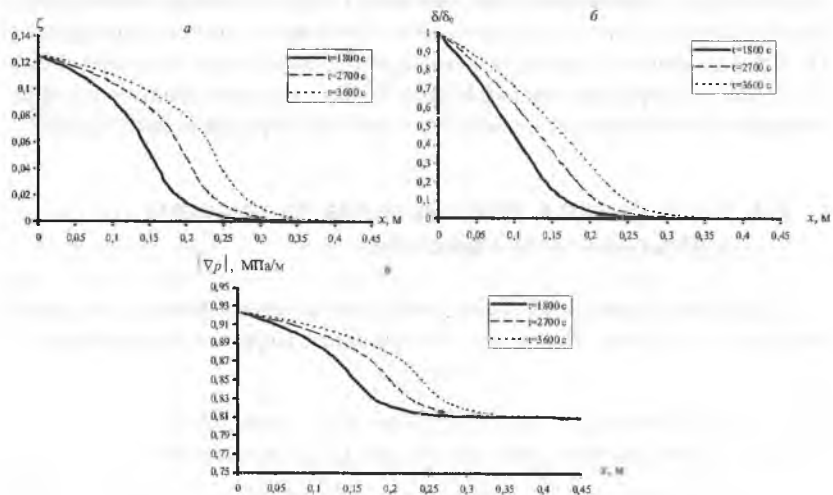


Рис. 7.10. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05$ с⁻¹, $\omega_1=0,05$ м/(МПа с), $\gamma=0,1$ м/МПа

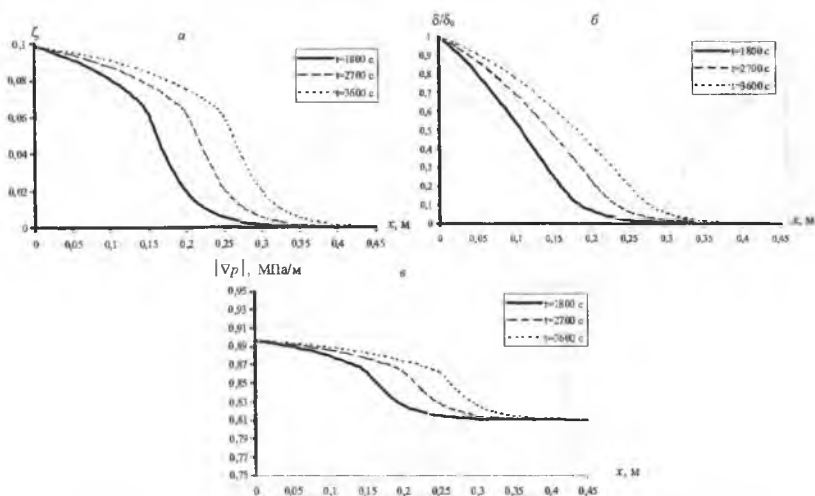


Рис. 7.11. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma=0,1 \text{ м/МПа}$

Уравнение (7.28) аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h} = & -B \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} - B_1 \frac{\delta_i^{j+1} - \delta_i^j}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + B_2 \delta_i^j \frac{\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j}{\tau} + \\ & + \frac{1}{v_i^{j+1} m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) \times \frac{\delta_{i+1}^{j+1} - 2\delta_i^{j+1} + \delta_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\lambda}{m_0} \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))^2} \frac{\delta_{i+1}^{j+1} - \delta_i^{j+1}}{h}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Значения ζ_i^{j+1} определяются по формуле (7.3).

Разностные уравнения (7.29) приводятся к СЛАУ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$A_i \delta_{i-1}^{j+1} - B_i \delta_i^{j+1} + C_i \delta_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (7.30)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= 1 + \frac{1}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right), \\ B_i &= 1 + \frac{h B_1}{\tau} (1 - \zeta_i^{j+1}) + \frac{2}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) - \frac{\lambda k_0}{h^2} (p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}), \\ C_i &= -\frac{1}{v_i^{j+1} m_0 h} \left(D_0 + \frac{\lambda v_i^{j+1}}{m_0 (1 - \zeta_i^{j+1} (1 - \varepsilon))} \right) + \frac{\lambda k_0}{h^2} (p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}), \\ F_i^j &= -\frac{h B}{\tau} (\zeta_i^{j+1} - \zeta_i^j) + \frac{h B_1}{\tau} \delta_i^j (1 - \zeta_i^j). \end{aligned}$$

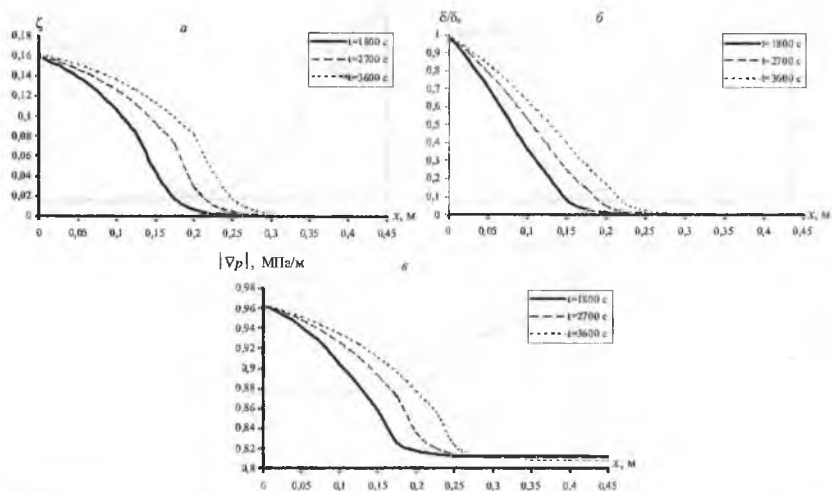


Рис. 7.12. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0,1 \text{ c}^{-1}$, $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0,1 \text{ м/МПа}$

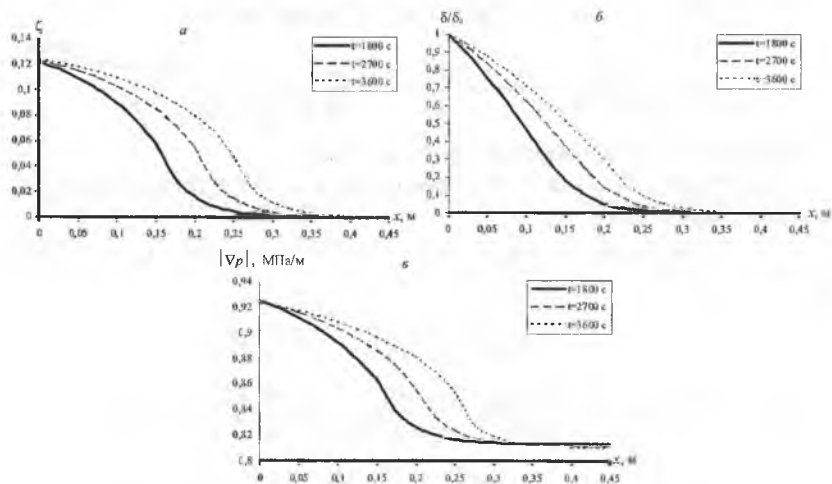


Рис. 7.13. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0 = 0,05 \text{ c}^{-1}$, $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$, $\gamma = 0,1 \text{ м/МПа}$

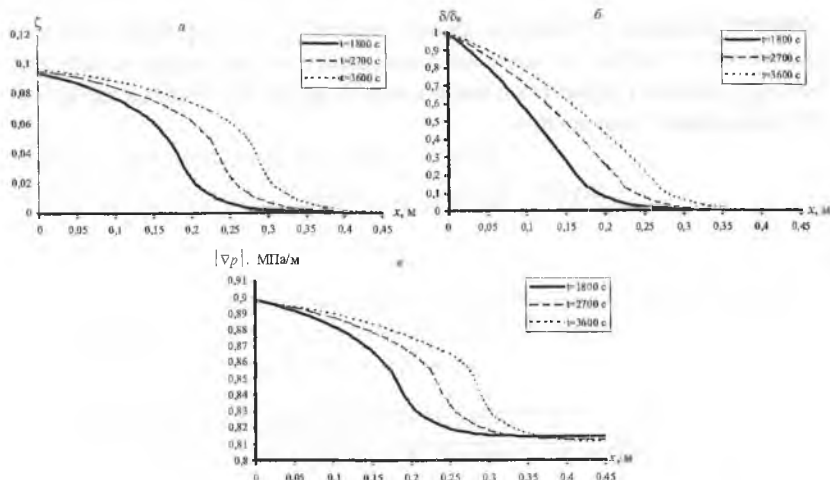


Рис. 7.14. Профили ζ (а), δ/δ_0 (б), $|\nabla p|$ (в) при $\omega_0=0,05$ с⁻¹, $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с), $\gamma=0,1$ м/МПа

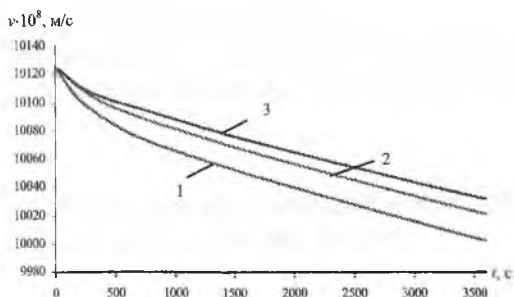


Рис.7.15. Профили изменения ν по t при $\gamma=0,1$ м/МПа, 1) $\omega_0=0,1$ с⁻¹, $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 2) $\omega_0=0,05$ с⁻¹, $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 3) $\omega_0=0,05$ с⁻¹, $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с)

Поле давления определяется аналогично разделу 7.2 на основе решения системы уравнений (7.15), а градиент давления – из (7.19). Затем в соответствии с (7.20) определяется ν_i^{j+1} при предварительном определении ζ_i^{j+1} по (7.17).

Результаты расчетов представлены на рис.7.12-7.15. Роль диффузионных эффектов в этом случае аналогична со случаем полубесконечного пласта. Однако в этом случае отмечаются явления, присущие конечному пласту. Скорость фильтрации уменьшается со временем (см. рис.7.15). Диффузионные

эффекты приводят к размытию профилей δ/δ_0 , ζ , ∇p и др. Как и для полубесконечного пласта, исследовано взаимодействие влияний кольматационно-суффозионных эффектов и конвективной диффузии. Выводы здесь соответствуют ранее полученным.

Глава 8.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

**8.1. Нестационарная фильтрация в
полубесконечной двухслойной среде**

**8.2. Релаксационная фильтрация в
полубесконечной двухслойной среде с
учетом релаксационных эффектов**

**8.3. Релаксационная фильтрация в конечном
закрытом двухслойном пласте**

8.4. Фильтрация с затухающим расходом

Рассмотрим задачи фильтрации дисперсных систем в двухслойных в горизонтальном направлении средах, каждый из слоев которых обладает различными внутренними структурами. В отличие от известных модельных подходов задачи рассмотрены с учетом релаксационных явлений. Учитывая трудность получения аналитических решений для решения задач, применен метод конечных разностей. В первом разделе в соответствии с [29] приведен анализ фильтрации в двухслойной среде без учета релаксационных явлений как с учетом, так и без учета затухания фильтрационного расхода (затухание происходит за счет кольтматационных эффектов). Затем дана постановка этой задачи на случай релаксационной фильтрации. В отдельных разделах рассмотрены случаи работы пласта в замкнуто-упругом режиме и затухания фильтрационного расхода.

8.1. Нестационарная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде

Задачи нестационарной фильтрации однородных жидкостей, суспензий или взвесей представляют интерес при изучении процессов переноса в различных природных и искусственных неоднородных пористых средах. Часто такие среды имеют слоистый характер, причем слои отличаются по ряду физико-химических параметров: проницаемости, сжимаемости, пьезопроводности и характеру пористости. В случаях, когда каждый из слоев описывается моделью простой пористой среды, уравнение фильтрации аналогично уравнению диффузии, и фильтрация в многослойных средах может быть описана методами диффузионной кинетики [65].

Особый интерес представляют ситуации, в которых хотя бы один из слоев имеет усложненную пористую структуру, тогда, кроме пор, могут учитываться трещины. Примерами таких сред являются трещиновато-пористые

горные породы [23–25], анизотропные мембраны, используемые в химической технологии для разделения смесей [64]. Эти слои могут возникать вблизи поверхности различных материалов, нарушенных в результате механического воздействия. В качестве примера такого воздействия можно рассматривать обработку призабойной зоны скважины с целью интенсификации добычи нефти. Обработка может осуществляться различными способами: механическим, созданием физических полей, физико-химической обработкой и др. При этом в призабойной зоне образуется слой, коллекторские свойства которого резко отличаются от удаленного слоя.

Математически слой может быть описан моделью бипористой среды. В процессе фильтрации в таких средах происходит массообмен между порами различных типов, который существенным образом сказывается на характере перераспределения порового давления в системе. Учет этого обмена требует модификации уравнения фильтрации и обуславливает специфический вид граничных условий.

Наличие такого слоя (описываемого моделью бипористой среды) в многослойной среде существенно влияет на характер порового давления в обычных пористых средах других слоев на временных интервалах, сравнимых с характерными временами переходных процессов в бипористой среде.

Приведем некоторые модельные подходы, примененные для анализа фильтрации в слоистой среде.

В [29] исследуется простейшая модель фильтрации в двухслойной среде, один из слоев которой (первый) описывается бипористой моделью. Расположение слоев горизонтальное (рис.8.1). Пусть второй слой, занимающий область пространства $x_0 \leq x < \infty$, является чисто пористым с проницаемостью k_1 и пьезопроводностью χ_2 . Давление жидкости в слое II обозначено через $p_p(x, t)$. Одномерная фильтрация в этом слое описывается обычным уравнением пьезопроводности [21, 194, 230]

$$\frac{\partial p_p}{\partial t} = \chi_2 \frac{\partial^2 p_p}{\partial x^2}. \quad (8.1)$$

Первый слой толщиной x_0 представляет собой бипористую среду [49, 104, 221], проницаемые каналы которой представлены трещинами (макропорами) и порами. Уравнение одномерной фильтрации жидкости в такой среде [194, 230] имеет вид

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2 \partial t} + \chi_1 \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2}, \quad (8.2)$$

где $\eta = (k_1 / k_{\text{пл}})^2$.

Первый член в правой части уравнения (8.2) учитывает внутренние потоки фильтрующей жидкости между порами плохо проницаемых блоков и отделяющими блоки трещинами. Ввиду низкой проницаемости пористых блоков обмен жидкостью между соседними их точками мал в сравнении с потоком из трещин в блоки.

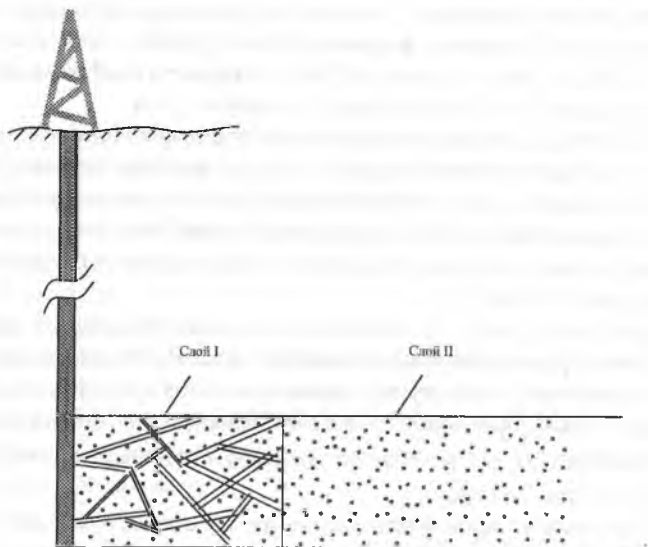


Рис. 8.1. Схема двухслойного пласта

Таким образом, выравнивание поровых давлений в соседних точках би-пористой среды возможно лишь путем обмена жидкостью между блоками и трещинами и движением жидкости по трещинам. Это приводит к тому, что скачки порового давления в такой среде не размываются мгновенно, а затухают с течением времени.

Давление на границе полупространства ($x=0$) поддерживается постоянным и равным p_1 . Давление в среде в начальный момент времени равно p_2 . Задача определения $p_p(x, t)$ и $p_f(x, t)$ сводится к решению системы уравнений (8.1) и (8.2) при следующих начальных и граничных условиях:

$$p_p(x, 0) = p_2, \quad p_f(x, 0) = p_2, \quad (8.3)$$

$$p_p(\infty, t) = p_2. \quad (8.4)$$

В начальный момент времени $t=0$ на границе слоя I в точке $x=0$ имеет место скачок давления, равный $p_1 - p_2$. Как показано в [23, 24], закон затухания

скачков порового давления носит экспоненциальный характер и в момент времени t этот скачок будет равен $(p_1 - p_2) \exp(-\chi_1 t / \eta)$.

Таким образом, давление на границе равно

$$p_f(0, t) = p_1 + (p_2 - p_1) \exp(-\chi_1 t / \eta). \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) определяет граничное условие для уравнения (8.2). Характерное время запаздывания $\tau = \eta / \chi_1$ определяется свойствами бипористой среды и вязкостью фильтрующейся жидкости.

В точке x_0 (на границе слоев) имеет место условие равенства давлений

$$p_f(x_0 - 0, t) \text{ и } p_p(x_0 + 0, t),$$

следовательно, $p_f(x_0 - 0, t) = p_p(x_0 + 0, t)$.

Кроме того, необходимо обеспечивать непрерывность потоков жидкости слева и справа от точки x_0

$$\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right)_{x=x_0-0} = \frac{k_2}{\mu} \left(\frac{\partial p_p}{\partial x} \right)_{x=x_0+0}, \quad (8.6)$$

где μ - вязкость фильтрующейся жидкости.

Для отыскания решения системы уравнений (8.1), (8.2) положено

$$p_f(x, t) = p_2 + U_f(x, t), \quad (8.7)$$

$$p_p(x, t) = p_2 + U_p(x, t). \quad (8.8)$$

Переходя от $U_f(x, t)$ и $U_p(x, t)$ к их лапласовым изображениям $U_f(x, s)$, $U_p(x, s)$, получим следующую систему уравнений для определения $U_f(x, s)$ и $U_p(x, s)$:

I слой

$$\frac{d^2 U_f(x, s)}{dx^2} - \frac{s U_p(x, s)}{\chi_1 + s \eta} = 0, \quad (8.9)$$

$$U_f(0, s) = \frac{(p_1 - p_2) \chi_{11}}{s(\chi_1 + s \eta)}; \quad (8.10)$$

II слой

$$\frac{d^2 U_p(x, s)}{dx^2} - \frac{s U_p(x, s)}{\chi_2} = 0, \quad (8.11)$$

$$U_p(\infty, s) = 0, \quad (8.12)$$

$$U_f(x_0, s) = U_p(x_0, s),$$

$$k_1 \left(\frac{dU_f(x_0, s)}{dx} \right)_{x=x_0-0} \left(1 + \frac{\eta s}{\chi_1} \right) = k_2 \left(\frac{dU_p(x_0, s)}{dx} \right)_{x=x_0+0}. \quad (8.13)$$

Разрешая эту систему относительно $U_f(x, s)$ и $U_p(x, s)$, получим

$$U_f(0, s) = \frac{(p_1 - p_2)\chi_1}{s(\chi_1 + s\eta)} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{s}{\chi_1 + s\eta}\right)^{\frac{1}{2}} x\right] + \exp\left[-\left(\frac{s}{\chi_1 + s\eta}\right)^{\frac{1}{2}} (2x_0 + x)\right] \frac{\chi_2^{\frac{1}{2}} - a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}}{\chi_2^{\frac{1}{2}} + a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}} \right\} \times \left[1 + \frac{\chi_2^{\frac{1}{2}} - a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}}{\chi_2^{\frac{1}{2}} + a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-2\left(\frac{s}{\chi_1 + s\eta}\right)^{\frac{1}{2}} x_0\right] \right]^{-1}, \quad (8.14)$$

$$U_p(x, s) = \frac{2(p_1 - p_2)\chi_1}{s(\chi_1 + s\eta)} \left\{ \frac{\chi_2^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{s}{\chi_1 + s\eta}\right)^{\frac{1}{2}} x_0 + \left(\frac{s}{\chi_2}\right)^{\frac{1}{2}} (x_0 - x)\right]}{\chi_2^{\frac{1}{2}} + a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}} \right\} \times \left[1 + \frac{\chi_2^{\frac{1}{2}} - a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}}{\chi_2^{\frac{1}{2}} + a\chi_1(\chi_1 + s\eta)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-2\left(\frac{s}{\chi_1 + s\eta}\right)^{\frac{1}{2}} x_0\right] \right]^{-1}, \quad (8.15)$$

$$\text{где } a = \frac{k_2}{k_1}.$$

Соотношения (8.14) и (8.15) позволят получить распределения давления в чисто пористой двухслойной среде, если устремить в них η к нулю, что фактически означает отсутствие обмена жидкостью между трещинами и порами блоков. Случай стационарной фильтрации в бипористой среде совпадает со случаем стационарной фильтрации в пористой среде, так как при этом имеются в виду времена, много большие характерного времени запаздывания $t \gg \frac{\eta}{\chi_1}$.

Установлено асимптотическое поведение функций $U_f(x, t)$ и $U_p(x, t)$ при $t \ll \frac{\eta}{\chi_1}$, т.е. для времен, меньших характерного времени переходных процессов, получим

$$U_f(x, t) \approx (p_1 - p_2) \left(1 - \exp(-\chi_1 t / \eta) \right) \frac{\exp(-\chi_1 t / \eta) \exp((x - 2x_0)\eta^{-1/2})}{1 + \exp(-2x_0\eta^{-1/2})}, \quad (8.16)$$

$$U_p(x, t) \approx \frac{2(p_1 - p_2)\chi_1 \exp(-\chi_0 \eta^{-1/2})}{\eta(1 + \exp(-2x_0\eta^{-1/2}))} \int_x^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - x_0}{2(\chi_2 \tau)^{1/2}}\right) d\tau, \quad (8.17)$$

$$\text{где } \operatorname{erfc}(z) = 2\pi^{-1/2} \int_z^{\infty} \exp(-g^2) dg.$$

Из (8.16) видно, что $U_j(x, t)$ зависит от толщины первого слоя и не зависит от проницаемости и пьезопроводности второго слоя, т.е. для времен $t \ll \frac{\eta}{\chi_1}$ лишь «чувствуется» граница слоев. Соотношения (8.16) и (8.17) получены в пределах малых времен $t \ll \frac{\eta}{\chi_1}$, однако данная зависимость $U_j(x, t)$ от времени сохраняется вплоть до времен порядка $\frac{\eta}{\chi_1}$. На больших расстояниях от x_0 , т.е. при $\frac{(x-x_0)}{2(\chi_2 \tau)^{1/2}} \gg 1$, из (8.17) находим

$$U_p(x, t) \approx \frac{2(p_1 - p_2) \exp(-\chi_0 \eta^{-1/2} - (x-x_0)^2 (4\chi_2 t)^{-1}) \chi_1 t}{(1 + \exp(-2x_0 \eta^{-1/2})) \pi^{1/2} (x-x_0) (4\chi_2 t)^{-1/2} \eta} \quad (8.18)$$

Исследование фильтрации в первом слое с использованием уравнения (8.2) оправдано в том случае, если характерные времена данной задачи порядка характерного времени запаздывания процессов выравнивания давления в бипористой среде, т.е. если выполняется соотношение $x_0^2 \leq \eta$. Это неравенство фактически означает, что $x_0 \leq 1(k_1/k_{1p})^{1/2}$. Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось условие $x \gg 1$.

Таким образом, условие корректности рассматриваемой постановки задачи запишется в виде

$$1 \ll \frac{x_0}{1} (k_1/k_{1p})^{1/2}.$$

Использовано асимптотическое поведение давления $p_j^0(x, s)$ при $s \gg \chi_1/\eta$ (т.е. $t \ll \frac{\eta}{\chi_1}$). Разлагая найденное решение в ряд по степеням $1/s$, ограничиваясь первыми двумя членами ряда, переходя почленно к оригиналам [101], получим

$$p_j^0(x, s) \approx p_2 + (p_2 - p_1) \exp(-\chi_1 t / \eta)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\chi_1 x_1}{2\eta^{3/2}} \right\}.$$

Отсюда видно, что давление в полубесконечной трещиновато-пористой среде в области малых времен вблизи границы пласта мало отличается от p_1 по сравнению с давлением в порах трещиновато-пористой среды конечной толщины (8.7), (8.16).

Времена запаздывания η/χ_1 при определенных параметрах бипористой среды могут быть значительными. Например, при исследовании геологических структур, являющихся природными бипористыми средами, времена запаздывания достигают 10^4 с.

Для практических целей желательно знать зависимость потока жидкости, поступающей в первый слой, от времени. Этот поток пропорционален производной от давления в трещинах и, как показано в [159], равен

$$Q = -\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f(x, t)}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f(x, t)}{\partial x \partial t} \right)_{x=0} \quad (8.19)$$

Для времен $t \ll \frac{\eta}{\chi_1}$ из (8.16) и (8.19) найдем удельный расход фильтрата через границу полупространства

$$\int_0^t Q dt = \frac{k_1(p_1 - p_2)(1 - \exp(-2\chi_0\eta^{-1/2}))t}{\mu\eta^{1/2}(1 + \exp(-2\chi_0\eta^{-1/2}))} \quad (8.20)$$

В отличие от чисто пористой двухслойной среды, где при малых временах

$$U_f(x, t) \approx (p_1 - p_2) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2(\chi_1 t)^{1/2}} \right),$$

$$Q \cong \frac{k_1(p_1 - p_2)}{\mu(\pi\chi_1 t)^{1/2}}, \quad U_p(x, t) \approx (p_1 - p_2) \operatorname{erfc} \left(\frac{x - x_0}{2(\chi_2 t)^{1/2}} \right),$$

из (8.16)–(8.20) видно, что наличие бипористого поверхностного слоя приводит к иным зависимостям давления и потока фильтрата от времени. Если характерные времена запаздывания процесса роста порового давления в бипористой среде сравнимы с временами экспериментального наблюдения процесса фильтрации, то при теоретическом описании закономерностей фильтрации нужно пользоваться полученными выше зависимостями.

Наибольший практический интерес представляет изучение нестационарной фильтрации суспензий или коллоидных растворов в слоистых средах. Качественная особенность данного процесса заключается в эффективном снижении проницаемости пористой среды вследствие отложения на ее поверхности частиц дисперсной фазы фильтрующегося раствора. Частицы дисперсной фазы, перекрывая поры поверхностного слоя, препятствуют проникновению фильтрата в среду. Снижение проницаемости пористой среды эквивалентно появлению эффективного, переменного во времени потока жидкости $I(t)$, отраженного от поверхности $x=0$.

В действительности, при фильтрации суспензий или взвесей на поверхности пористой среды образуется слой дисперсных частиц, толщина которого растет во времени. Описание процесса фильтрации однородной жидкости в этом слое в рамках известных уравнений (типа уравнения пьезопроводности) затруднительно, так как для слоя дисперсных частиц не выполняются

предположения об упругом характере деформирования и слабой сжимаемости. Кроме того, данный слой характеризуется переменной по толщине и во времени пористостью и проницаемостью, что также усложняет аналитическое исследование процесса. Однако в большинстве случаев при фильтрации суспензий или взвесей толщина слоя дисперсных частиц остается малой по сравнению с характерными размерами исследуемых пористых образцов, и рассматриваемая задача может быть сведена к нахождению корректного граничного условия, эффективно описывающего снижение проницаемости пористой среды в процессе осаждения на ее поверхности дисперсных частиц.

Обозначая поток, падающий на границу полупространства через I_0 , поток, отраженный через $I(t)$, примем

$$I(t) = I_0 \exp(-\alpha t), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Таким образом, задача фильтрации суспензии в слоистой полубесконечной среде аналогична рассмотренной уже задаче о фильтрации однородной жидкости, но с отличным от (8.5) граничным условием

$$I_0 \exp(-\alpha t) = -\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=0}.$$

Интегрируя это соотношение при условии $(\partial p_f / \partial x)_{x=0} = 0$ при $t=0$, получим окончательно граничное условие в виде

$$\left(\frac{\partial U_f}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{I_0 \mu}{k_1 (1 - \alpha \eta / \chi_1)} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\chi_1 t / \eta)], \quad (8.21)$$

где $U_f(x, t)$ также определяется по первой из формул (8.7). Поток I_0 определяется из решения задачи о фильтрации однородной жидкости в полубесконечной двухслойной среде. Очевидно, $I_0 = Q_{t=0}$, где Q находится из соотношения (8.19).

Нахождение зависимостей $p(x, t)$ и $p_p(x, t)$ в случае фильтрации суспензии или коллоидного раствора сводится к решению системы уравнений (8.1) и (8.2) с граничным условием (8.21) и условиями согласования (8.6). Решение этой системы при условии (8.21) вполне аналогично ее решению при условии (8.5). Первый член асимптотического разложения $U_f(x, t)$ в области малых времен $t \ll \eta / \chi_1$ имеет следующий вид:

$$U_f(x, t) \approx \frac{I_0 \mu}{k_1 (1 - \alpha \eta / \chi_1)} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\chi_1 t / \eta)] x \left[\frac{\exp(-\chi \eta^{1/2}) + \exp(-(2x_0 - x) \eta^{1/2})}{1 - \exp(-2x_0 \eta^{-1/2})} \right]. \quad (8.22)$$

Из (8.22) видно, что снижение проницаемости среды оказывает существенное влияние на распределение давления, в частности, если $\alpha \gg \chi_1 / \eta$ то

$U_j(x, t) \cong \chi_j / (\alpha \eta) \ll 1$. Из (8.7) следует, что давление в слое I практически не возрастает. Поток фильтра в этом слое, как следует из (8.19) и (8.22), равен

$$Q(x, t) \approx I_0 \exp(-\alpha t) \frac{\exp(-\chi \eta^{1/2}) - \exp(-(2x_0 - x) \eta^{1/2})}{1 - \exp(-2x_0 \eta^{1/2})}. \quad (8.23)$$

Как видно из представленных результатов, влияние слоистости среды, трещиноватости при определенных условиях может быть существенным. Однако полученные аналитические решения не эффективны для проведения численных расчетов. Поэтому целесообразно решать задачи такого типа численно, что и делается в последующих разделах.

8.2. Релаксационная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде с учетом релаксационных эффектов

Релаксационная фильтрация однородных жидкостей в пористых средах приобретает актуальное значение в связи с открытием нефтяных и нефтегазовых месторождений на больших глубинах [51, 114]. Коллекторы нефти и газа, как правило, имеют слоистый характер. Каждый слой обладает различными физико-механическими и фильтрационными характеристиками. В отдельных случаях слои могут иметь не только параметрические, но и структурные различия, что существенно меняет характер фильтрационного процесса. Например, некоторые слои нельзя рассматривать как пористые среды, так как в них имеются развитые микро- и макротрещины, каверны и др. В последних механизм фильтрации, следовательно, и уравнения фильтрации отличаются от обычных уравнений диффузии, справедливых в упругих пористых средах, насыщенных упругой, однородной жидкостью.

На больших глубинах практически для всех коллекторов нефти и газа характерно наличие трещиноватости [147], что позволяет получить хорошие притоки при сравнительно небольших перепадах давления (депрессиях). При бурении скважин на больших глубинах из-за изменения (перераспределения) напряженного состояния в прискважинной части пласта возможно образование искусственных трещин, что изменяет фильтрационные свойства этой зоны. Кроме того, в эксплуатационных скважинах в процессе проведения работ по интенсификации отбора нефти и газа осуществляется физико-химическое воздействие на призабойную зону скважин. В результате воздействия на призабойную зону различными физическими полями и закачки

химических реагентов структура коллектора претерпевает существенные изменения. В частности, могут образоваться микро- и макротрещины, в результате чего происходит инверсия типа коллектора. В данном случае в призабойной зоне из пористого пласта получается трещиновато-пористый пласт. Поскольку физико-химическое воздействие в пространстве имеет локальный характер, вне зоны воздействия первоначальные коллекторские свойства пласта сохраняются. Таким образом, вполне возможна ситуация, когда в призабойной зоне пласта имеется трещиновато-пористая зона, а вдали – чисто пористая. Поэтому представляет интерес изучение фильтрации флюидов в такой горизонтально-слоистой зоне, где структуры слоев резко отличаются.

С образованием трещиноватой зоны процесс фильтрации в ней приобретает специфические особенности. Кроме того, в зоне, не претерпевшей структурных изменений, фильтрация может носить аномальный характер. Закон Дарси в этой зоне может нарушаться из-за плохих коллекторских свойств, высокой вязкости нефти, взаимодействия нефти со стенкой пор и др. В частности, закон Дарси, помимо нелинейных эффектов, может носить релаксационный характер.

В [29] рассмотрена нестационарная задача из трещиновато-пористой сред без учета нарушений закона Дарси. Рассмотрим аналогичную задачу с учетом эффектов релаксации в пористой среде [172, 207]. Задача рассматривается в одномерной постановке. Первый слой толщиной x_0 ($0 \leq x \leq x_0$) представляет собой бипористую среду [23–25, 239], состоящую из вложенных друг в друга двух сред с разными проницаемостями и пористостями. Предполагается, что по всему объему зоны значения пористости и проницаемости постоянны и резко отличаются от их величин для трещин и пористых блоков. Здесь в соответствии с [23–25] воспользуемся усеченной системой уравнений. Для трещинной среды из этой системы получается уравнение

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2 \partial t} + \chi_1 \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2}, \quad (8.24)$$

где p_f – давление в трещинной среде; $\eta = (k_1 / k_{1p})l^2$ – время запаздывания, k_1, k_{1p} – проницаемости трещинной и поровой сред; l – характерный размер пористых блоков; χ_1 – пьезопроводность первой зоны; t – время; x – линейная координата.

Первый член в правой части (8.24) учитывает массообмен между трещинами и пористыми блоками [23–25]. Ввиду того, что обменом жидкостью между соседними точками пористых блоков по сравнению с указанным мас-

сообменом пренебрегают, выравнивание поровых давлений в соседних точках биопористой среды протекает за счет обмена жидкостью между блоками и трещинами и движения жидкости по трещинам. Это накладывает требования на вид граничных условий: они задаются с учетом размытия скачков давлений в пространстве.

Второй слой занимает область пространства $x_0 \leq x \leq \infty$ и является чисто пористым с проницаемостью k_p , пьезопроводностью χ_p . Уравнение фильтрации с учетом релаксации градиента давления [114, 131] запишем в виде

$$\frac{\partial p_p}{\partial t} = \chi_2 \left(\frac{\partial^2 p_p}{\partial x^2} + \lambda_p \frac{\partial^3 p_p}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (8.25)$$

где p_p – давление; λ_p – время релаксации градиента давления.

Давление в обеих средах в начальный момент времени равно p_2 .

На границе полупространства ($x=0$) устанавливается постоянное давление $p_1 = \text{const}$. Эти условия можно записать в виде

$$p_f(x, 0) = p_2, \quad p_p(x, 0) = p_2, \quad p_p(\infty, t) = p_2. \quad (8.26)$$

В начальный момент времени $t=0$ на границе слоя I в точке $x=0$ появляется скачок давления $p_1 - p_2$, который будет затухать по экспоненциальному закону $(p_1 - p_2) \exp(-\chi_1 t / \eta)$.

Таким образом,

$$p_f(0, t) = p_1 + (p_2 - p_1) \exp(-\chi_1 t / \eta). \quad (8.27)$$

На границе слоев $x=x_0$ принимаем условия равенства давлений и потоков жидкости, т.е.

$$p_f(x_0 - 0, t) = p_p(x_0 + 0, t), \quad (8.28)$$

$$\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right)_{x=x_0-0} = \frac{k_p}{\mu} \left(\frac{\partial p_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p_p}{\partial x \partial t} \right)_{x=x_0+0}, \quad (8.29)$$

где μ – вязкость фильтрующейся жидкости.

Для определения полей давлений $p_f(x, t)$ необходимо решить уравнения (8.24), (8.25) при дополнительных условиях (8.26)–(8.29).

Как и в [29], вводим новые переменные, полагая

$$p_f(x, t) = p_2 + U_f(x, t), \quad p_p(x, t) = p_2 + U_p(x, t). \quad (8.30)$$

Тогда уравнения (8.24), (8.25) запишутся в идентичном виде относительно новых переменных $U_f(x, t)$, $U_p(x, t)$, а начальные и граничные условия получат вид

$$U_f(x, 0) = U_p(x, 0) = 0, \quad (8.31)$$

$$U_p(\infty, t) = 0, \quad (8.32)$$

$$U_f(0, t) = (p_2 - p_1) \left[\exp\left(-\frac{\chi_1 t}{\eta}\right) - 1 \right], \quad (8.33)$$

$$U_f(x_0 - 0, t) = U_p(x_0 + 0, t), \quad (8.34)$$

$$\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial U_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 U_f}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=x_0-0} = \frac{k_2}{\mu} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 U_p}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=x_0+0} \quad (8.35)$$

Уравнения (8.24), (8.25) относительно $U_f(x, 0)$, $U_p(x, 0)$ нужно решить при условиях (8.31)–(8.35). Для решения этой задачи применим метод конечных разностей [156, 157]. Несмотря на то, что задача является линейной, применение методов операционного исчисления приводит к громоздким выражениям относительно изображений и даже без учета релаксационных эффектов можно получить только асимптотические решения [29].

Область $[0, x_0]$ разобьем на N частей, а область $[x_0, L]$, где L – достаточно большая величина, разобьем на $M - N$ частей. В области изменения времени введем сетку с шагом τ . В двумерной области

$$\omega_{\kappa} = \{(i, j), i = 0, M, j = 0, J, h = L/M, \tau = T/J\},$$

где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Сеточное решение обозначим через U_{fi}^{j+1} ($i = 0, N, j = 0, J$) и U_{pi}^j ($i = N, M, j = 0, J$). Уравнения (8.24), (8.25) относительно U_f , U_p на введенной сетке аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{U_{fi}^{j+1} - U_{fi}^j}{\tau} = \frac{\eta}{\tau h^2} \left[(U_{fi+1}^{j+1} - 2U_{fi}^{j+1} + U_{fi-1}^{j+1}) - (U_{fi+1}^j - 2U_{fi}^j + U_{fi-1}^j) \right] + \frac{\chi_1}{h^2} (U_{fi+1}^j - 2U_{fi}^j + U_{fi-1}^j), \quad (8.36)$$

$$\frac{U_{pi}^{j+1} - U_{pi}^j}{\tau} = \chi_2 \left[\frac{(U_{pi+1}^j - 2U_{pi}^j + U_{pi-1}^j)}{h^2} + \frac{\lambda_p}{\tau} \left(\frac{U_{pi+1}^{j+1} - 2U_{pi}^{j+1} + U_{pi-1}^{j+1}}{h^2} - \frac{U_{pi+1}^j - 2U_{pi}^j + U_{pi-1}^j}{h^2} \right) \right] \quad (8.37)$$

Условия (8.31) – (8.35) аппроксимируем как

$$U_{fi}^0 = 0, \quad i = 0, N, \quad U_{pi}^0 = 0, \quad i = N, M, \quad (8.38)$$

$$U_{pi}^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \quad (8.39)$$

$$U_{f0}^{j+1} = (p_2 - p_1) \left[\exp\left(-\frac{\chi_1 \tau(j+1)}{\eta}\right) - 1 \right], \quad j = 0, J-1, \quad (8.40)$$

$$U_{fN}^{j+1} = U_{pN}^{j+1}, \quad j = 0, J-1, \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_1}{\mu} \left[\frac{U_{fN}^j - U_{fN-1}^j}{h} + \frac{\eta}{\chi_1 \tau} \left(\frac{U_{fN}^{j+1} - U_{fN-1}^{j+1}}{h} - \frac{U_{fN}^j - U_{fN-1}^j}{h} \right) \right] = \\ & = \frac{k_2}{\mu} \left[\frac{U_{pN+1}^j - U_{pN}^j}{h} + \frac{\lambda_2}{\tau} \left(\frac{U_{pN+1}^{j+1} - U_{pN}^{j+1}}{h} - \frac{U_{pN+1}^j - U_{pN}^j}{h} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.42)$$

Разностное уравнение (8.36) можно записать в виде

$$A \cdot U_{f,i-1}^{j+1} - B \cdot U_{f,i}^{j+1} + C \cdot U_{f,i+1}^{j+1} = H_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (8.43)$$

где

$$A = C = \frac{\eta}{h^2}, \quad B = 1 - \frac{2\eta}{h^2}, \quad H_i = \frac{1}{h^2} (\eta - \tau \chi_1) (U_{f,i+1}^j - 2U_{f,i}^j + U_{f,i-1}^j) - U_{f,i}^j.$$

Уравнение (8.37) приводится к аналогичному виду

$$E \cdot U_{p,i-1}^{j+1} - F \cdot U_{p,i}^{j+1} + G \cdot U_{p,i+1}^{j+1} = K_i, \quad i = \overline{N+1, M-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad (8.44)$$

$$E = G = \frac{\chi_2 \lambda_2}{h^2}, \quad F = 1 + \frac{2\chi_2 \lambda_2}{h^2}, \quad K_i = -U_{p,i}^j - \frac{\chi_2}{h^2} (\tau - \lambda_2) (U_{p,i+1}^j - 2U_{p,i}^j + U_{p,i-1}^j) - U_{p,i}^j.$$

Для решения систем уравнений (8.43), (8.44) применим метод прогонки [156, 157], используя соотношения

$$U_{f,i}^{j+1} = \beta_{i+1} + \alpha_{i+1} \cdot U_{f,i+1}^{j+1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (8.45)$$

$$U_{p,i+1}^{j+1} = \gamma_i + \eta_i \cdot U_{p,i}^{j+1}, \quad i = \overline{N, M-1}, \quad (8.46)$$

где α_{i+1} , β_{i+1} , γ_i , η_i — прогоночные коэффициенты. Условия устойчивости метода прогонки выполняются согласно [156, 157].

Для определения прогоночных коэффициентов получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{i+1} = -\frac{C}{A\alpha_i - B}, \quad \beta_{i+1} = \frac{H_i - A\beta_i}{A\alpha_i - B}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (8.47)$$

$$\eta_{i-1} = -\frac{E}{G\eta_i - F}, \quad \gamma_{i-1} = \frac{K_i - G\gamma_i}{G\eta_i - F}, \quad i = \overline{M-1, M-2, \dots, N+1}. \quad (8.48)$$

Используя соотношения (8.45), (8.46) с учетом граничных условий (8.39), (8.40), получим стартовые значения прогоночных коэффициентов

$$\alpha_i = 0, \quad \beta_1 = (p_2 - p_1) \left[\exp\left(-\frac{\chi_1 \tau (j+1)}{\eta}\right) - 1 \right], \quad (8.49)$$

$$\gamma_{M-1} = 0, \quad \eta_{M-1} = 0. \quad (8.50)$$

Записывая соотношения (8.45), (8.46) в точке $i = N-1$ и $i = N$,

$$U_{f,N-1}^{j+1} = \beta_N + \alpha \cdot U_{f,N}^{j+1}, \quad U_{p,N+1}^{j+1} = \gamma_N + \eta_N \cdot U_{p,N}^{j+1},$$

определив $U_{f,N}^{j+1}$, $U_{p,N}^{j+1}$ и подставляя их в (8.42) с учетом (8.41), получим

$$U_{fN}^{j+1} = \frac{\lambda_p \gamma + \frac{\beta_N a \eta}{\chi_1} + R}{\frac{a \eta}{\chi_1} (1 - \alpha_N) + \lambda_p (1 - \eta_N)} \quad (8.51)$$

где $a = k_1/k_2$

$$R = a \left[\tau \left(U_{fN-1}^j - U_{fN}^j \right) + \frac{\eta}{\chi_1} \left(U_{fN}^j - U_{fN}^j \right) \right] + \left(U_{fN+1}^j - U_{fN}^j \right) + \left(U_{fN}^j - U_{fN+1}^j \right) \lambda_f.$$

Расчет решений осуществляется с первого слоя $j=1$. Последовательность расчета можно условно разделить на три этапа.

1. По формулам (8.47) с учетом (8.49), для $i = \overline{1, N-1}$ определяются $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_N, \beta_N$ а по формулам (8.48) с учетом (8.50) для $i = M-1, M-2, \dots, N+1$ определяются $\gamma_{M-2}, \gamma_{M-3}, \gamma_{M-3}, \dots, \gamma_N, \gamma_N$.

2. По формуле (8.51) определяется U_{fN}^{j+1} , значит и U_{fN}^{j+1} .

3. По формуле (8.45) для $i = N-1, N-2, \dots, 0$ определяются $U_{fN-1}^{j+1}, U_{fN-2}^{j+1}, \dots, U_{f0}^{j+1}$, а по формулам (8.46) для $i = N, N+1, \dots, M-1$ определяются $U_{fN+1}^{j+1}, U_{fN+2}^{j+1}, \dots, U_{fM}^{j+1}$.

После определения $U_{fi}^{j+1}, U_{pi}^{j+1}$, по формулам (8.30) можно найти $p_f(x, t)$ и $p_p(x, t)$.

Таблица 8.1

Значения $10^{-5} \cdot p_f$ и $10^{-5} \cdot p_p$ (Н/м²) при $t=500$ с, $\eta=0,1$ м²

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трециновато-пористый пласт				
0,0	1,06064	1,06064	1,06064	1,06064
0,5	4,96848	4,96915	4,96975	4,97030
1,0	7,43272	7,43455	7,43623	7,43777
1,5	8,67670	8,68089	8,68452	8,68846
2,0	9,07769	9,086640	9,09476	9,102700
Пористый пласт				
2,0	9,07769	9,086640	9,09476	9,102700
2,5	9,79677	9,76994	9,74637	9,72579
3,0	9,96722	9,94981	9,93425	9,92000
3,5	9,99621	9,99026	9,983965	9,97751
4,0	9,99969	9,99829	9,99628	9,99386
4,5	9,99998	9,99972	9,99917	9,99837
5,0	9,99999	9,99996	9,99982	9,99957
5,5	9,99999	9,99999	9,99996	9,99989
6,0	9,99999	9,99999	9,99999	9,99997
6,5	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999
7,0	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999
7,5	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999

По приведенному решению задачи проводились численные расчеты при следующих исходных данных: $h = 0,05$ м, $\tau = 0,5$ с, $\eta = 0,1$; $0,02$ м², $\mu = 0,01$ Па·с, $\lambda_p = 0,0$; 50; 100; 150 с, $k_1 = 0,1 \times 10^{-12}$ м², $k_2 = 1,0 \times 10^{-12}$ м², $\chi_1 = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $\chi_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $x_0 = 2,0$ м, $L = 10$ м, $p_1 = 1,0 \times 10^5$, $p_2 = 100 \times 10^5$ Н/м².

Таблица 8.2

Значения $10^{-5} \cdot p_1$ и $10^{-5} \cdot p_2$ (Н/м²) при $t = 1000$ с, $\eta = 0,1$ м²

$x, \text{ м}$	$\lambda_p, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00041	1,00041	1,00041	1,00041
0,5	3,42598	3,57989	3,58147	3,58300
1,0	5,47475	5,66251	5,666608	5,66956
1,5	6,86664	7,00314	7,00940	7,01558
2,0	7,46093	7,55220	7,56174	7,571300
Пористый пласт				
2,0	7,46093	7,55220	7,56174	7,571300
2,5	9,08324	9,04572	9,02112	8,99683
3,0	9,73056	9,67225	9,641622	9,61303
3,5	9,93576	9,89937	9,878438	9,85873
4,0	9,98760	9,97201	9,96133	9,95074
4,5	9,99807	9,99287	9,98835	9,98347
5,0	9,99976	9,99832	9,99665	9,994637
5,5	9,99998	9,99963	9,99908	9,99830
6,0	9,99999	9,99992	9,99975	9,99948
6,5	10,0000	9,99998	9,99993	9,99984
7,0	10,0000	9,99999	9,99998	9,99995
7,5	10,0000	9,99999	9,99999	9,99998

Результаты расчетов представлены в табл. 8.1–8.4. Как установлено, увеличение времени релаксации приводит к замедлению темпа понижения давления. Причем это замедление более отчетливо наблюдается при малых временах t . С увеличением времени это запаздывание ликвидируется и динамика давлений p_1 и p_2 станет аналогичной со случаем $\lambda_p = 0$. В табл. 8.3, 8.4 приведены значения давлений при $\eta = 0,02$ м².

Сравнение этих результатов с данными для $\eta = 0,1$ м² (см. табл. 8.1, 8.2) показывает, что в приграничной области $0 \leq x \leq \delta$ уменьшение p_1 до граничного значения p_1 протекает ускоренно. Поэтому в этой зоне профили давления p_1 опережающе уменьшаются до определенных x по сравнению со случаем $\eta = 0,1$ м². Однако в более удаленной от $x = 0$ зоне профили давления при $\eta = 0,1$ м² при соответствующих t и λ_p находятся ниже, чем в случае $\eta = 0,02$ м². Это говорит о том, что в этой зоне эффекты запаздывания, обусловленные массообменом между трещинами и пористыми блоками, оказывают более силь-

ное влияние на давления по сравнению с граничным режимом изменения давления. Это отчетливо видно по данным для $\lambda_p = 0$.

Таблица 8.3

Значения $10^{-6} \cdot p_f$ и $10^{-5} \cdot p_p$ (Н/м²) при $t=500$ с, $\eta=0,02$ м²

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,5	4,53026	4,53071	4,53107	4,53137
1,0	7,19608	7,19760	7,19892	7,2000081
1,5	8,69977	8,70416	8,70813	8,71115
2,0	9,199085	9,20950	9,21939	9,22862
Пористый пласт				
2,0	9,1999085	9,20950	9,21939	9,22862
2,5	9,86102	9,83129	9,80653	9,78569
3,0	9,98343	9,96863	9,95512	9,94259
3,5	9,99865	9,99476	9,99011	9,985067
4,0	9,99992	9,99919	9,9979	9,996208
4,5	9,99999	9,99988	9,99957	9,999056
5,0	9,99999	9,99998	9,99991	9,99976
5,5	9,99999	9,99999	9,99998	9,99994
6,0	10,0000	9,99999	9,99999	9,99998
6,5	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999
7,0	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999
7,5	10,0000	9,99999	9,99999	9,99999

Таблица 8.4

Значения $10^{-8} \cdot p_f$ и $10^{-5} \cdot p_p$ (Н/м²) при $t=1000$ с, $\eta=0,02$ м²

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,5	3,425986	3,42784	3,58887	3,43135
1,0	5,47475	5,47897	5,75732	5,48709
1,5	6,86663	6,87386	7,21004	6,88815
2,0	7,46093	7,47124	7,81587	7,49226
Пористый пласт				
2,0	7,46093	7,47124	7,81587	7,49226
2,5	9,08324	9,05570	9,21102	8,99991
3,0	9,73055	9,69387	9,71138	9,65871
3,5	9,93576	9,91208	9,92150	9,869708
4,0	9,98760	9,97724	9,97762	9,95632
4,5	9,998065	9,99461	9,99394	9,985907
5,0	9,99975	9,99882	9,99843	9,99559
5,5	9,99997	9,99975	9,99960	9,99866

Продолжение табл. 8.4

6,0	9,99999	9,99995	9,99990	9,99960
6,5	9,99999	9,99999	9,99997	9,99988
7,0	9,99999	9,99999	9,99999	9,99996
7,5	9,99999	9,99999	9,99999	9,99999

Таблица 8.5

Изменение скорости фильтрации $10^3 \cdot v(t)$, м/с по времени, $\eta=0,1 \text{ м}^2$

$t, \text{с}$	$\lambda, \text{с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
100	1,9749216557	1,9749216953	1,9749217182	1,9749217348
200	1,2426581628	1,2426593493	1,2426601365	1,2426607388
300	0,9797893889	0,9797976071	0,97980361059	0,97980839951
400	0,8353573978	0,8353859132	0,83540829320	0,83842680432
500	0,7399159352	0,7399822859	0,7400373208	0,74008431865
600	0,6700955822	0,6702153114	0,67031900765	0,67041007674
700	0,6154201746	0,6156022533	0,61576539637	0,61591220938
800	0,5704359924	0,5706817089	0,57090783390	0,57111564229
900	0,5320462348	0,5323505926	0,53263664013	0,53290426423
1000	0,4983917719	0,4987458120	0,49908411986	0,49940546061

Таблица 8.6

Изменение скорости фильтрации $10^3 \cdot v(t)$, м/с по времени, $\eta=0,02 \text{ м}^2$

$t, \text{с}$	$\lambda, \text{с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
100	1,3109872322	1,3109935596	1,310998108	1,3110017290
200	1,4077048675	1,4077264343	1,407743641	1,4077580156
300	1,2322570954	1,2323303461	1,2323426020	1,2323764277
400	1,0421344571	1,0422139052	1,0422835594	1,0423452876
500	0,8908510687	0,8909694980	0,8910761780	0,89117274189
600	0,7782188813	0,7783793671	0,77852700947	0,77866293362
700	0,6941142363	0,6943172225	0,69450705784	0,69468428404
800	0,6294545353	0,6296980015	0,62992878509	0,63014689612
900	0,5778851022	0,5781653708	0,57843399580	0,57869050046
1000	0,5352830475	0,5355952180	0,53589719176	0,53618811406

Исследовалось также изменение скорости фильтрации во времени при различных η и λ (табл.8.5, 8.6). При уменьшении η за счет релаксационного характера изменения граничного режима при малых временах скорость фильтрации оказывается несколько большей. Для $\eta=0,02 \text{ м}^2$ скорость фильтрации становится меньше чем для случая $\eta=0,1 \text{ м}^2$. Видимо, влияние граничного режима на скорость фильтрации при малых временах является бо-

лее сильным. Влияние же λ_p на скорость фильтрации слабо. Сравнением данных табл. 8.5 и 8.6 для различных λ_p нами установлено, что с его увеличением $v(t)$ незначительно увеличивается.

8.3. Релаксационная фильтрация в конечном закрытом двухслойном пласте

В практике нефтедобычи нередко приходится иметь дело с ограниченными замкнутыми пластами с ограниченными энергетическими ресурсами (имеется в виду энергия пласта). В таких объектах, несмотря на большие первоначальные дебиты скважин из-за ускоренного снижения пластового давления, дебиты относительно быстро уменьшаются. Если не начинать вовремя геолого-технические мероприятия, направленные на сбережение пластовой энергии и восстановление давления, добыча нефти значительно сократится, коэффициент нефтеотдачи будет небольшим. В открытых пластах за счет питания от контура или подошвы пласта темп снижения давления не так интенсивен, как в закрытых пластах. Законтурные или подошвенные воды при этом создают необходимый напор и питание пласта.

Решенная в 3.2 задача здесь рассматривается для закрытого пласта [172]. Схема залежи и уравнения фильтрации остаются без изменения. Однако здесь считается, что правый конец залежи $x=\infty$ (или некоторый условный $x=L$) закрыт, т.е. на этом конце поток жидкости отсутствует. В случае $x=L$ пласт является конечным. Но в случае неограниченной области при наличии плохой гидродинамической связи залежи при больших x можно условно выбрать L и принимать условие отсутствия потока.

Таким образом, уравнения (8.24), (8.25) репаются при следующих условиях:

$$p_f(x, 0) = p_p(x, 0) = p_2, \quad (8.52)$$

$$p_f(0, t) = p_1 + (p_2 - p_1) \exp(-\chi_1 t / \eta), \quad (8.53)$$

$$\frac{\partial p_p(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (8.54)$$

$$p_f(x_0 - 0, t) = p_p(x_0 + 0, t), \quad (8.55)$$

$$\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=x_0-0} = \frac{k_2}{\mu} \left(\frac{\partial p_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p_p}{\partial x \partial t} \right) \Big|_{x=x_0+0} \quad (8.56)$$

Вводя функции $U_f(x, t)$ и $U_p(x, t)$, как в (8.30), вместо (8.31) – (8.35) получаем

$$U_f(x, 0) = U_p(x, 0) = 0, \quad (8.57)$$

$$\frac{\partial U_f(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (8.58)$$

$$U_f(0, t) = (p_2 - p_1) \left[\exp\left(-\frac{\chi_1 t}{\eta}\right) - 1 \right], \quad (8.59)$$

$$p_f(x_0 - 0, t) = p_p(x_0 + 0, t), \quad (8.60)$$

$$\left. \frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right) \right|_{x=x_0-0} = \left. \frac{k_2}{\mu} \left(\frac{\partial p_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 p_p}{\partial x \partial t} \right) \right|_{x=x_0+0}. \quad (8.61)$$

Аппроксимации (8.36), (8.37) остаются в силе, а в условиях (8.38) – (8.42) изменяется только (8.39):

$$U_{pM}^{j+1} = U_{pM-1}^{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1. \quad (8.62)$$

Методика решения систем уравнений (8.43), (8.44) остается без изменения. Только стартовые значения прогоночных коэффициентов вместо (8.50), исходя из (8.62), определяются как

$$\gamma_{M-1} = 0, \quad \eta_{M-1} = 1. \quad (8.63)$$

Таблица 8.7

Значения $10^{-5} p_f$ и $10^{-5} p_p$ (Н/м²) при $t=500$ с, $\eta=0,1$ м²

x, м	$\lambda, \text{с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,06033907	1,06033907	1,06033907	1,06033907
0,5	5,01123635	5,01170610	5,01208488	5,01238749
1,0	7,56454633	7,56579750	7,56684125	7,56769557
1,5	9,02080138	9,02354420	9,02594439	9,02797968
2,0	9,92018797	9,92559396	9,93061489	9,93507597
Пористый пласт				
2,0	9,92018797	9,92559396	9,93061489	9,93507597
2,5	9,98130588	9,98088713	9,98053263	9,98028137
3,0	9,99676609	9,99575837	9,99494705	9,99427547
3,5	9,99959698	9,99916478	9,99876643	9,99839677
4,0	9,99996474	9,99985097	9,99971292	9,99956234
4,5	9,99999788	9,99997491	9,99993287	9,99987590
5,0	9,99999980	9,99999175	9,99997028	9,99993584

По приведенному решению задачи проводился численный расчет при следующих исходных данных: $\eta=0,1$; $0,02$ м², $\mu=0,01$ Па·с, $\lambda=0,0$; 50; 100; 150 с, $k_1=0,1 \cdot 10^{-12}$ м², $k_2=1,0 \cdot 10^{-12}$ м², $\chi_1=1,0 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $\chi_2=5 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $x_0=2,0$ м, $L=5$ м, $p_1=1,0 \cdot 10^5$, $p_2=10,0 \cdot 10^5$ Н/м². Результаты расчетов представлены в

табл. 8.7-8.12. Как установлено, увеличение времени релаксации приводит к замедлению темпа понижения давления. Причем это замедление более отчетливо наблюдается при малых временах t . С увеличением времени это запаздывание ликвидируется и динамика давлений p_i и p_e становится аналогичной со случаем $\lambda_p = 0$. В таблицах 8.9, 8.10 приведены значения давлений при $\eta = 0,02 \text{ м}^2$.

Таблица 8.8

Значения $10^{-5} \cdot p_i$ и $10^{-5} \cdot p_e$ (Н/м²) при $t=5000 \text{ с}$, $\eta=0,1 \text{ м}^2$

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
0,5	3,08908189	3,08947400	3,08987179	3,09027583
1,0	5,17254304	5,17329004	5,17404823	5,17481854
1,5	7,24504919	7,24607886	7,24712513	7,24818893
2,0	9,30176437	9,30297371	9,30420543	9,30545992
Пористый пласт				
2,0	9,30176437	9,30297371	9,30420543	9,30545992
2,5	9,48849459	9,48959122	9,49070502	9,49183493
3,0	9,63573970	9,63632965	9,63692335	9,63751784
3,5	9,74529827	9,74515846	9,74501158	9,74485504
4,0	9,82000261	9,81913197	9,81825176	9,81736229
4,5	9,86279815	9,86140273	9,86000077	9,85859595
5,0	9,87584552	9,87427253	9,87269491	9,87111771

Таблица 8.9

Значения $10^{-5} \cdot p_i$ и $10^{-5} \cdot p_e$ (Н/м²) при $t=500 \text{ с}$, $\eta=0,02 \text{ м}^2$

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
0,5	4,54428940	4,54453709	4,54469944	4,54481186
1,0	7,25943538	7,26031779	7,26094252	7,26139357
1,5	8,93262971	8,93517367	8,93715634	8,93867054
2,0	9,93624941	9,94227800	9,94753431	9,95185351
Пористый пласт				
2,0	9,93624941	9,94227800	9,94753431	9,95185351
2,5	9,98863955	9,98784943	9,98728953	9,98692290
3,0	9,99860308	9,99776763	9,99710593	9,99656223
3,5	9,99988196	9,99963085	9,99937219	9,99911976
4,0	9,99999317	9,99994389	9,99986886	9,99977880
4,5	9,99999973	9,99999189	9,99997241	9,99994226
5,0	9,99999998	9,99999764	9,99998871	9,99997182

Сравнение этих результатов с данными для $\eta=0,1 \text{ м}^2$ (см. табл.8.7, 8.8) показывает, что в приграничной области $0 \leq x \leq \delta$ уменьшение p до граничного значения p_i протекает ускоренно. Поэтому в этой зоне профили давления p , опережающе уменьшаются по сравнению со случаем $\eta=0,02 \text{ м}^2$.

Однако в более удаленной от $x=0$ зоне профили давления при $\eta=0,1 \text{ м}^2$ и соответствующих t и λ , находятся ниже, чем в случае $\eta=0,02 \text{ м}^2$. Это говорит о том, что в данной зоне эффекты запаздывания, обусловленные массообменом между трещинами и пористыми блоками, оказывают более сильное влияние на давления по сравнению с граничным режимом изменения давления. Это отчетливо видно по данным для $\lambda_p=0$.

Таблица 8.10

Значения $10^{-5} \cdot p_f$ и $10^{-5} \cdot p_i$ (Н/м²) при $t=5000 \text{ с}$, $\eta=0,02 \text{ м}^2$

x, м	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000
0,5	3,08829940	3,08868685	3,08907952	3,08947798
1,0	5,17120660	5,17194543	5,17269470	5,17345533
1,5	7,24352722	7,24454723	7,24558309	7,24663571
2,0	9,30042868	9,30162925	9,30285185	9,30409678
Пористый пласт				
2,0	9,30042868	9,30162925	9,30285185	9,30409678
2,5	9,48738413	9,48847745	9,48958833	9,49071576
3,0	9,63496502	9,63555788	9,63615551	9,63675492
3,5	9,74489547	9,74476102	9,74462026	9,74447045
4,0	9,81992825	9,81906079	9,81818357	9,81729686
4,5	9,86294411	9,86154796	9,86014417	9,85873658
5,0	9,87606379	9,87448834	9,87290683	9,87132455

Исследовалось также изменения скорости фильтрации во времени при различных η и λ (табл.8.11, 8.12). При уменьшении η за счет релаксационного характера изменения граничного режима при малых временах скорость фильтрации оказывается несколько большей, чем при больших η . Но, начиная с определенных времен для $\eta=0,02 \text{ м}^2$, скорость фильтрации становится меньшей, чем для случая $\eta=0,1 \text{ м}^2$. Видимо, влияние граничного режима на скорость фильтрации при малых временах является более сильным.

Влияние же λ на скорость фильтрации слабо. Сравнивая данные табл. 8.11 и 8.12 для различных λ , мы установили, что с его увеличением $v(t)$ незначительно повышается.

Таблица 8.11

Изменение скорости фильтрации $10^6 \cdot v(t)$, м/с во времени при $\eta=0,1 \text{ м}^2$

$t, \text{с}$	$\lambda, \text{с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
500	7,71627	7,71736	7,71827	7,71901
1000	5,48347	5,48555	5,48753	5,48937
1500	4,77807	4,78040	4,78272	4,78501
2000	4,49594	4,49807	4,50024	4,50244
2500	4,36747	4,36930	4,37116	4,37308
3000	4,29937	4,30091	4,30248	4,30409
3500	4,25640	4,25770	4,25902	4,26036
4000	4,22470	4,22580	4,22691	4,22804
4500	4,19859	4,19951	4,20044	4,20139
5000	4,17557	4,17634	4,17712	4,17791

Таблица 8.12

Изменение скорости фильтрации $10^6 \cdot v(t)$, м/с во времени при $\eta=0,02 \text{ м}^2$

$t, \text{с}$	$\lambda, \text{с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
500	7,26216	7,26260	7,26289	7,26308
1000	5,28569	5,28779	5,28968	5,29134
1500	4,66852	4,67113	4,67373	4,67627
2000	4,44245	4,44478	4,44716	4,44959
2500	4,34417	4,34609	4,34807	4,35010
3000	4,29051	4,29208	4,29370	4,29536
3500	4,25398	4,25530	4,25664	4,25801
4000	4,22505	4,22616	4,22728	4,22842
4500	4,20008	4,20101	4,20196	4,20292
5000	4,17752	4,17830	4,17910	4,17990

Как показывают расчеты, что замкнутость пласта приводит к тому, что в динамике давления наблюдается прогрессирующее снижение по всему пласту. Это особенно заметно при больших временах. Однако для больших времен влияние релаксационных эффектов заметно ослабевает, так что результаты при этом будут близкими к соответствующим результатам для обычной задачи без учета релаксационных эффектов. В ситуации, когда рассматривается ограниченная замкнутая область пласта с небольшим характерным размером, релаксационные эффекты будут проявляться в сочетании с влиянием замкнутости пласта. Вполне возможно, что при этом будет получена релаксационная динамика давления с его прогрессирующим снижением во всех точках пласта.

8.4. Фильтрация с затухающим расходом

Рассмотрим задачу фильтрации в двухслойной среде, когда расход жидкости монотонно затухает. В данной постановке задача косвенно моделирует процесс дренирования нефтяной залежи, когда дебиты скважин за счет влияния различных факторов монотонно снижаются.

Возможными факторами снижения расхода являются загрязнение призабойной зоны пласта за счет отложения тяжелых компонентов нефти (асфальтенов, смол, парафина и т.д.), образование солей и их отложение в порах в процессе смещения пластовых и закачиваемых вод, уменьшение коллекторских свойств пласта за счет увеличения эффективных напряжений на пласт и др.

Естественно, когда исследуются факторы отложения различных частиц в порах, следует рассматривать гидродинамические модели фильтрации неоднородных жидкостей с соответствующей кинетикой отложения частиц в порах и их освобождения от частиц под действием различных сил. Следовательно, нужно использовать модели, исследованные в разделе 3,5. Однако здесь используем косвенный подход, заключающийся в рассмотрении фильтрации однородных жидкостей, но с затухающим режимом изменения расхода (скорости фильтрации) жидкости.

Предположим, как и в разделе 8.1, что расход жидкости (здесь скорость фильтрации) на границе пласта $x=0$ является затухающей во времени функцией

$$v|_{x=0} = I_0 \exp(-\alpha t), \quad I_0, \alpha > 0. \quad (8.64)$$

Исследованную в разделе 3.2 задачу рассмотрим для условия (8.45). Следовательно, вместо граничного режима с заданным законом изменения давления – (8.27) задается (8.64). Скорость фильтрации в двухслойной среде в точке $x=0$ определяется как

$$v|_{x=0} = -\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right) \bigg|_{x=+0}. \quad (8.65)$$

Из (8.64), (8.65) имеем

$$I_0 \exp(-\alpha t) = -\frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x \partial t} \right) \bigg|_{x=+0}. \quad (8.66)$$

Из начальных условий

$$p_f(x, 0) = p_p(x, 0) = p_2 \quad (8.67)$$

следует, что в начальный момент в среде было постоянное давление p_2 , так что градиент давления везде был нулевым, (в том числе в точке $x=+0$), т.е.

$$\left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right|_{x=0, t=0} = 0. \quad (8.68)$$

Решая (8.66) с (8.68) относительно $\left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right|_{x=0}$ = 0 определим

$$\left. \frac{\partial p_f}{\partial x} \right|_{x=0} = - \frac{I_0 \mu}{k_1 \left(1 - \frac{\alpha \eta}{\chi_1} \right)} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\chi_1 t / \eta)]. \quad (8.69)$$

Таким образом, решаем уравнения (8.24), (8.25) с условиями (8.67), (8.69), $p_p(\infty, t) = p_w$ (8.28), (8.29). Вводя функции $U_f(x, t)$, $U_p(x, t)$ в соответствии с (8.30), получим идентичные с (8.24), (8.25) уравнения относительно U_f и U_p , а начальные и граничные условия будут иметь вид

$$U_f(x, 0) = U_p(x, 0) = 0,$$

$$U_p(\infty, t) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial U_f}{\partial x} \right|_{x=0} = - \frac{I_0 \mu}{k_1 \left(1 - \frac{\alpha \eta}{\chi_1} \right)} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\chi_1 t / \eta)],$$

$$U_f(x_0 - 0, t) = U_p(x_0 + 0, t),$$

$$\left. \frac{k_1}{\mu} \left(\frac{\partial U_f}{\partial x} + \frac{\eta}{\chi_1} \frac{\partial^2 U_f}{\partial x \partial t} \right) \right|_{x=x_0-0} = \left. \frac{k_2}{\mu} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x} + \lambda_p \frac{\partial^2 U_p}{\partial x \partial t} \right) \right|_{x=x_0+0}.$$

Данная задача также решается методом конечных разностей [156, 157]. Как и в предыдущих задачах, получаем системы алгебраических уравнений типа (8.43), (8.44), которые решаются методом прогонки. Стартовые значения прогоночных коэффициентов (8.49) в данном случае определяются как

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = \frac{I_0 \mu h}{k_1 \left(1 - \frac{\alpha \eta}{\chi_1} \right)} [\exp(-\alpha \tau(j+1)) - \exp(-\chi_1 \tau(j+1)/\eta)].$$

Численный расчет решения осуществлялся при тех же значениях исходных параметров, что и в разделе 8.2, и с несколькими значениями I_0 и α . Некоторые представительные результаты показаны в табл. 8.13–8.15. Из табл. 8.13 видно, что, когда расход жидкости является незатухающим ($\alpha=0$), давление во всех точках среды монотонно снижается. Роль времени релаксации λ_p проявляется в обоих слоях (как в трещиновато-пористом, так и в чисто пористом). Если в первом слое λ_p приводит к замедлению понижения

давления, то во втором можно заметить опережающее понижение давления при увеличении этого параметра. Затухающий расход жидкости приводит к немонотонной динамике давления (см. табл.8.14).

Таблица 8.13

Значения $10^5 p_i$ и $10^5 p_e$ (Н/м²) при $\eta=0,1$ м², $I_0=10^{-4}$ м/с, $\alpha=0,0$

x, м	λ, c			
	0,0	50,0	100,0	150,0
$t=25 c$				
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	8,87458249	8,87458249	8,87458249	8,87458249
0,5	9,74496367	9,74497035	9,74497200	9,74497279
1,0	9,94245023	9,94248057	9,94248828	9,94249202
1,5	9,98740372	9,98753432	9,98756870	9,98758538
2,0	9,99886109	9,99941857	9,99957100	9,99964519
Пористый пласт				
2,0	9,99886109	9,99941857	9,99957100	9,99964519
2,5	9,99999937	9,99996586	9,99994810	9,99993876
3,0	10,0000000	9,99999804	9,99999375	9,99998944
3,5	10,0000000	9,99999989	9,99999925	9,99999818
4,0	10,0000000	9,99999999	9,99999991	9,99999969
4,5	10,0000000	10,0000000	9,99999999	9,99999995
5,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	9,99999999
5,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
6,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
6,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
***	***	***	***	***
10,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000

$t=100 c$

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	6,83022317	6,83022317	6,83022317	6,83022317
0,5	9,08149461	9,08152034	9,08153244	9,08153941
1,0	9,74238376	9,74248206	9,74253047	9,74255867
1,5	9,93268754	9,93303000	9,93320922	9,93331528
2,0	9,99541403	9,99656339	9,99721159	9,99760265
Пористый пласт				
2,0	9,99541403	9,99656339	9,99721159	9,99760265
2,5	9,99983313	9,99965834	9,99957148	9,99952288
3,0	9,99999878	9,99996912	9,99993571	9,99990592
3,5	10,0000000	9,99999739	9,99999054	9,99998160
4,0	10,0000000	9,99999979	9,99999863	9,99999643
4,5	10,0000000	9,99999998	9,99999980	9,99999931
5,0	10,0000000	10,0000000	9,99999997	9,99999987

Продолжение табл. 8.13

5,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	9,99999997
6,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
6,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
***	***	***	***	***
10,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000

 $t=500$ с

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	5,03352171	5,03352171	5,03352171	5,03352171
0,5	7,22846464	7,22872561	7,22893605	7,22910416
1,0	8,64697018	8,64766528	8,64824514	8,64871976
1,5	9,45600077	9,45752455	9,45885800	9,45998871
2,0	9,95565998	9,95866331	9,96145272	9,96393110
Пористый пласт				
2,0	9,95565998	9,95866331	9,96145272	9,96393110
2,5	9,98961438	9,98938174	9,98918480	9,98904523
3,0	9,99820338	9,99764354	9,99719282	9,99681978
3,5	9,99977610	9,99953599	9,99931476	9,99910962
4,0	9,99998041	9,99991726	9,99984089	9,99975807
4,5	9,99999883	9,99998643	9,99996457	9,99993591
5,0	9,99999995	9,999997939,9	9,99999238	9,99998339
5,5	10,0000000	9,99999970	9,99999841	9,99999577
6,0	10,0000000	9,99999996	9,99999968	9,99999894
6,5	10,0000000	9,99999999	9,99999994	9,99999974
7,0	10,0000000	10,0000000	9,99999999	9,99999994
7,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
***	***	***	***	***
10,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000

 $t=1000$ с

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	5,00022587	5,00022587	5,00022587	5,00022587
0,5	6,56069775	6,56125483	6,56177854	6,56226224
1,0	7,90952214	7,91075112	7,91192880	7,91303721
1,5	8,99179817	8,99387613	8,99592359	8,99790617
2,0	9,89028188	9,89331687	9,89640918	9,89951497
Пористый пласт				
2,0	9,89028188	9,89331687	9,89640918	9,89951497
2,5	9,95738389	9,95794079	9,95839609	9,95877832
3,0	9,98606451	9,98538810	9,98475951	9,98418890
3,5	9,99618275	9,99546355	9,99482706	9,99425621
4,0	9,99912857	9,99872522	9,99835348	9,99800542
4,5	9,99983508	9,99967210	9,99950394	9,99933331

Продолжение табл. 8.13

5,0	9,99997426	9,99992204	9,99985749	9,99978437
5,5	9,9999671	9,99998272	9,99996073	9,99993223
6,0	9,9999966	9,9999641	9,99998957	9,99997925
6,5	9,9999997	9,9999929	9,9999733	9,99999382
7,0	10,0000000	9,9999987	9,9999937	9,99999832
7,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
10,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000

Таблица 8.14

Значения $10^{-5} p_i$ и $10^{-5} p_p$ (Н/м²) при $\eta=0,1$ м², $I_0=10^{-4}$ м/с, $\alpha=0,005$ с⁻¹

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
1	2	3	4	5

$t=25$ с

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	8,94623082	8,94623082	8,94623082	8,94623082
0,5	9,76069869	9,76070486	9,76070642	9,76070717
1,0	9,94589879	9,94592674	9,94593401	9,94593754
1,5	9,98814233	9,98826217	9,98829453	9,98831026
2,0	9,99894301	9,99945217	9,99959539	9,99966525
Пористый пласт				
2,0	9,99894301	9,99945217	9,99959539	9,99966525
2,5	9,99999938	9,99996767	9,99995095	9,99994216
3,0	10,0000000	9,99999814	9,99999408	9,99999002
3,5	10,0000000	9,99999990	9,99999929	9,99999828
4,0	10,0000000	9,99999999	9,99999991	9,99999970
4,5	10,0000000	10,0000000	9,99999999	9,99999995
5,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	9,99999999
5,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
6,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
6,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
7,5	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000
10,0	10,0000000	10,0000000	10,0000000	10,0000000

$t=100$ с

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	7,61028408	7,61028408	7,61028408	7,61028408
0,5	9,28566407	9,28568446	9,28569448	9,28570031
1,0	9,79505318	9,79512968	9,79516932	9,79519270
1,5	9,94559190	9,94585158	9,94599616	9,94608302
2,0	9,99635761	9,99719823	9,99771146	9,99802700

Продолжение табл. 8.14

Пористый пласт				
2,0	9,99635761	9,99719823	9,99771146	9,99802700
2,5	9,99985136	9,99971214	9,99964259	9,99960346
3,0	9,99999885	9,99997342	9,99994569	9,99992114
3,5	10,00000000	9,99999772	9,99999193	9,99998446
4,0	10,00000000	9,99999982	9,99999882	9,99999696
4,5	10,00000000	9,99999999	9,99999983	9,99999941
5,0	10,00000000	10,00000000	9,99999998	9,99999989
5,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	9,99999998
6,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
6,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
7,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

 $t=500$ с

Трешиновато-пористый пласт				
0,0	9,24824299	9,24824299	9,24824299	9,24824299
0,5	9,24564487	9,24575959	9,24585995	9,24594430
1,0	9,52321349	9,52349202	9,52374823	9,52397154
1,5	9,78059647	9,78111485	9,78163220	9,78211093
2,0	9,98051449	9,98127505	9,98214364	9,98303060
Пористый пласт				
2,0	9,98051449	9,98127505	9,98214364	9,98303060
2,5	9,99439078	9,99442872	9,99442525	9,99441397
3,0	9,99887618	9,99863586	9,99844091	9,99827889
3,5	9,99984411	9,99971191	9,99959767	9,99949531
4,0	9,99998524	9,99994587	9,99990245	9,99985766
4,5	9,99999906	9,99999075	9,99997750	9,99996111
5,0	9,99999996	9,99999854	9,99999502	9,99998965
5,5	10,00000000	9,99999978	9,99999894	9,99999731
6,0	10,00000000	9,99999997	9,99999978	9,99999931
6,5	10,00000000	10,00000000	9,99999996	9,99999983
7,0	10,00000000	10,00000000	9,99999999	9,99999996
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

 $t=1000$ с

Трешиновато-пористый пласт				
0,0	9,93324050	9,93324050	9,93324050	9,93324050
0,5	9,74592031	9,74602547	9,74613883	9,74625582
1,0	9,73309221	9,73327472	9,73348221	9,73370725
1,5	9,83133921	9,83151420	9,83174320	9,83202296
2,0	9,97453874	9,97452294	9,97458910	9,97475629

Продолжение табл. 8.14

Пористый пласт				
2,0	9,97453874	9,97452294	9,97458910	9,97475629
2,5	9,98675388	9,98704865	9,98730563	9,98752116
3,0	9,99462695	9,99462580	9,99459464	9,99454851
3,5	9,99826460	9,99809913	9,99795070	9,99781770
4,0	9,99954925	9,99941008	9,99928978	9,99918247
4,5	9,99990545	9,99983597	9,99977104	9,99970949
5,0	9,99998397	9,99995849	9,99993049	9,99990115
5,5	9,99999780	9,99999032	9,99997994	9,99996757
6,0	9,99999976	9,99999790	9,99999446	9,99998970
6,5	9,99999998	9,99999957	9,99999853	9,99999683
7,0	10,00000000	9,99999992	9,99999964	9,99999912
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
***	***	***	***	***
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

Таблица 8.15

Значения $10^6 p$ и $10^6 p_p$ (Н/м²) при $\eta=0,1$ м², $I_0=10^{-4}$ м/с, $t=2244,50$ с, $\alpha=0,0$ с⁻¹

$x, \text{ м}$	$\lambda, \text{ с}$			
	0,0	50,0	100,0	150,0
1	2	3	4	5
Трещиновато-пористый пласт				
0,0	5,00000000	5,00000000	5,00000000	5,00000000
0,5	6,23408582	6,23465120	6,23522884	6,23581754
1,0	7,44592284	7,44701282	7,44812925	7,44927108
1,5	8,62319128	8,62471761	8,62628593	8,62789747
2,0	9,76778476	9,76960676	9,77148317	9,77341928
Пористый пласт				
2,0	9,76778476	9,76960676	9,77148317	9,77341928
2,5	9,86462513	9,86587211	9,86709625	9,86828996
3,0	9,92748305	9,92778010	9,92802356	9,92821678
3,5	9,96440093	9,96397304	9,96352810	9,96307546
4,0	9,98401619	9,98330397	9,98261864	9,98196270
4,5	9,99344594	9,99278815	9,99216987	9,99158667
5,0	9,99754865	9,99708607	9,99664979	9,99623505
5,5	9,99916455	9,99889471	9,99863284	9,99837737
6,0	9,99974081	9,99960521	9,99946641	9,99932534
6,5	9,99992701	9,99986755	9,99980207	9,99973209
7,0	9,99998216	9,99996100	9,99993593	9,99990788
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
***	***	***	***	***
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

 $t = 256,0$ с, $\alpha = 0,001$ с⁻¹

Продолжение табл. 8.15

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	6,12924510	6,12924510	6,12924510	6,12924510
0,5	8,35731437	8,35739863	8,35745467	8,35749336
1,0	9,37366305	9,37392846	9,37411330	9,37424377
1,5	9,79284204	9,79356532	9,79410202	9,79449300
2,0	9,98553374	9,98735517	9,98882152	9,98993543
Пористый пласт				
2,0	9,98553374	9,98735517	9,98882152	9,98993543
2,5	9,99816117	9,99786181	9,99766987	9,99754980
3,0	9,99987041	9,99968742	9,99954047	9,99941895
3,5	9,99999541	9,99995901	9,99991319	9,99986514
4,0	9,99999992	9,99999506	9,99998416	9,99996926
4,5	10,00000000	9,99999944	9,99999719	9,99999310
5,0	10,00000000	9,99999994	9,99999951	9,99999847
5,5	10,00000000	9,99999999	9,99999992	9,99999967
6,0	10,00000000	10,00000000	9,99999999	9,99999993
6,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	9,99999998
7,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

$$t = 138,50 \text{ с}, \alpha = 0,005 \text{ с}^{-1}$$

Трещиновато-пористый пласт				
0,0	7,51150902	7,51150902	7,51150902	7,51150902
0,5	9,18871911	9,18874524	9,18875929	9,18876781
1,0	9,75062216	9,75071597	9,75076927	9,75080214
1,5	9,93020774	9,93050889	9,93069331	9,93080971
2,0	9,99536764	9,99627918	9,99689495	9,99729524
Пористый пласт				
2,0	9,99536764	9,99627918	9,99689495	9,99729524
2,5	9,99972830	9,99956726	9,99948228	9,99943339
3,0	9,99999563	9,99995551	9,99991662	9,99988296
3,5	9,99999999	9,99999580	9,99998693	9,99997611
4,0	10,00000000	9,99999963	9,99999800	9,99999517
4,5	10,00000000	9,99999997	9,99999970	9,99999903
5,0	10,00000000	10,00000000	9,99999996	9,99999981
5,5	10,00000000	10,00000000	9,99999999	9,99999996
6,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	9,99999999
6,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
7,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
7,5	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000
10,0	10,00000000	10,00000000	10,00000000	10,00000000

Время релаксации давления λ , и в этом случае действует как задерживающий динамику давления фактор в первом слое и опережающий – во втором. Давление, понижаясь до определенного момента времени в фиксированной точке пласта, в дальнейшем увеличивается, что можно рассматривать как восстановление давления при затухании расхода жидкости. Характеристики перехода давления от режима понижения в режим восстановления зависит от характеристик затухания расхода жидкости, т.е. от I и α . Для нескольких значений α распределение давления в момент перехода от режима понижения в режим восстановления показано в табл. 8.15. Анализируя данные, заметим, что с увеличением α , т.е. с интенсификацией затухания расхода, время наступления перехода режима понижения в режим восстановления уменьшается. В момент перехода режима при больших α сами значения давления также больше, чем при относительно малых α .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамова В.И., Цыбульский Г.П. Решение плоско-радиальных задач для уравнения конвективной диффузии методом конечных разностей // Применение математических методов и ЭЦВМ в исследованиях по добыче нефти и газа. М.: Недра, 1971. С.75-82.
2. Акилов Ж.А., Ан В.В. Неравновесные явления при фильтрации растворов полимеров в пористой среде // ДАН РУз. 1976. №7. С. 56-58.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982. – 104 с.
4. Акилов Ж.А., Хужаёров Б.Х. Задачи фильтрации однородной жидкости с учетом релаксации давления // ДАН РУз. 1977. №1. С. 52-54.
5. Акилов Ж.А., Хужаёров Б.Х., Исламов Я.Р. Об одном способе определения параметров гидродинамического потока вязко-пластичной жидкости // Изв. АН РУз. Серия техн. наук. 1978. №1. С.71-74.
6. Акилов Ж.А., Хужаёров Б.Х. Некоторые прямые и обратные задачи фильтрации вязкоупругой жидкости // Тез. докл. II Всесоюзной конф. по механике аномальных систем. Баку, 1977. С. 72-73.
7. Акилов Ж.А., Хужаёров Б.Х. Об одном методе решения обратных гидродинамических задач // ДАН РУз. 1977. №5. С.22-24.
8. Акилов Ж.А., Хужаёров Б.Х. Решение задачи о работе стоков, равномерно распределенных в круговой области с учетом релаксации давления // Тр. СредазНИПИнефть. Вып. 3. Грозный. 1976. С. 74-82.
9. Ализаде И.М., Аметов И.М., Мамедзаде Р.Б. О нестационарной фильтрации вязкоупругих жидкостей в пористой среде // Изв. Вузов. Нефть и газ. 1975. №9. С. 52-54.
10. Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. Вузов. Нефть и газ. 1975. № 6. С. 71-74.
11. Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления // Тр. Московского обл. пед. ин-та им. Н.К.Крупской. «Гидромеханика». М., 1974. Вып. 111. С. 166-177.
12. Аметов И.М., Азизов М.Г. Об оценке решений уравнений фильтрации газированной жидкости в автомоделном случае // Изв. Вузов. Нефть и газ, 1974. №1. С. 44-47.

13. Аметов И.М., Аметов А.М. Локализация процессов перераспределения давления в фильтрационных потоках // ДАН СССР. 1987. Т. 293. №4. С. 814-818.
14. Аметов И.М. и др. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей. М.: Недра, 1985. – 205 с.
15. Аметов И.М. Метод построения оценок решения уравнений фильтрации газированной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1975, №3. С. 77-82.
16. Антонцев С.Н. и др. Математические модели фильтрации в почвогрунтах // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 5-15.
17. Атауллаев А.Х., Равшанов Н. К теории фильтрации с учетом сжимаемости слоя // Средаз. научно-исследовательский и проектно-конструкторский ин-т пищ. пром-ти. Ташкент. 1987. – 7 с. Рук. деп. В АгроНИИТЭИпищепром от 09.09.87, № 1634-пш87.
18. Ахмедов З.М. и др. Особенности разработки нефтегазовых месторождений с низкими коллекторскими свойствами // Изв. вузов. Нефть и газ. 1980, №2.
19. Азров М.Э., Тодес О.М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968.
20. Балаян Н.М., Костерин А.В., Осипова П.П. О фильтрации тиксотропной жидкости // Исслед. по подземной гидромеханике. Казань, 1989. № 10. С. 19-24.
21. Бан А., Богомолова А.Ф., Максимов В.А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: Недра, 1962.
22. Баренблатт Г.И., Ентов В.М. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей // Труды IV-го Всесоюзного совещания по тепло- и массообмену. Минск: Наука и техника. 1972. Т.3. С. 18-19.
23. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. – 288 с.
24. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. мат. и мех. 1960. Т.24, № 5. С. 852-864.
25. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545-548.
26. Баренблатт Г.И. Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 5. С. 76-83.

27. Баренблатт Г.И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 5. С. 144-151.
28. Бедриковецкий П.Г., Каневская Р.Д., Лурье М.В. Влияние кинетики процессов сорбции, растворения и теплообмена на вытеснение нефти растворами активных примесей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. №6. С. 60-71.
29. Белый А.А., Эйгельс Р.М., Элькина А.Ф. Нестационарная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде // ИФЖ. 1987. Т. 52. №1. С. 25-32.
30. Бендеман Н.Н. Применение формулы Стокса к определению вымывающих скоростей. М.: Гостоптезидат, 1934.
31. Бобков Н.В. Инженерно-химические исследования в связи с проектировкой различных инженерных сооружений. НКТП гос. Геол.-разв. изд., 1932.
32. Бойко Р.В., Лейчикс И.М. Стохастическая модель процесса фильтрации с применением вспомогательных веществ // Механика. Киев, 1985. №5. С. 70-74.
33. Бондарев Э.А., Николаевский В.Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явлений адсорбции // ЖПМТФ. 1962. №5. С.128-134.
34. Буевич Ю.А., Зубарев А.Ю., Хужаёров Б.Х. К проблеме описания релаксационных явлений в фильтрационных процессах // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук. 1989. №1. С. 47-51.
35. Буевич Ю.А., Леснов А.И. Фильтрация жидкости в среде со случайной пористостью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №6. С. 167-175.
36. Буевич Ю.А. Массообмен при фильтрации в случайно неоднородной среде // ИФЖ. 1986. Т.51. №3. С.455-458.
37. Буевич Ю.А., Перминов Е.Б. Нестационарный нагрев неподвижного зернистого массива // ИФЖ. 1980. Т. 37. №1. С. 29-36.
38. Буевич Ю.А., Устинов А.Ю., Хужаёров Б.Х. Нестационарный перенос в дисперсных и гетерогенных средах // Инж.-физ. журнал. 1989. Т.56. № 57. С.779-787.
39. Буевич Ю.А., Устинов В.А., Хужаёров Б.Х. Фильтрация высокодисперсных аэрозолей в зернистых насыпках // «Актуальные вопросы физики аэродисперсных систем». Тез. Докл. XV Всесоюзн. Конф. 26-29.09.89. Одесса: ОдГУ им. И.Н.Мечникова, 1989. Т.2. С.87.
40. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М.: Недра, 1973. – 248 с.
41. Вахитов Г.Г., Симкин Э.М. Использование физических полей для извлечения нефти из пластов. М.: Недра, 1985. – 230 с.

42. Веницианов Е.В. Волновой режим фильтрования суспензий // ИФЖ. 1979. Т. 37. №6. С.1035-1042.
43. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н. Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983. – 239 с.
44. Веницианов Е.В., Сенявин М.М. Математическое описание фильтрационного осветления суспензий // Теор. основы хим. технол. 1976. Т. 10, №4. С. 584-591.
45. Вознесенский С.А. Физико-химические процессы очистки воды. Журнал, ОНТИ, Госстройиздат, 1994.
46. Выбор методов вовлечение в активную разработку трудноизвлекаемых запасов III горизонта месторождения Майли-Су-IV – Восточный Избаскент // Научный отчет СредазНИПИнефть по заказ-наряду 0135464.711.0148327.82.4612.85. Фонды СредазНИПИнефть, г.Ташкент. Инв. № 1992. Руководитель темы – Б.Хужаёров. – 118 с.
47. Галиакбаров В.Ф. и др. Технология бурения с управляемой кольматацией слабоцементированных проницаемых коллекторов // ВНИИ бур. техники. М., 1987. – 7 с. Рук.деп. в ВНИИОЭНГ 15.09.87, № 1460-нг87.
48. Галин Л.А. Перенос частиц в потоке, движущемся в пористой среде // Отчет за 1958 г. М.: Ин – т механики АН СССР.
49. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М.: Недра, 1986.
50. Гольдберг В.М., Скворцов Н.П. Проницаемость и фильтрация глинах. М.: Недра, 1986. – 160 с.
51. Горбунов А.Г. Разработка аномальных нефтяных месторождений. М.: Недра, 1981. – 237 с.
52. Горковенко А.И., Аметов И.М., Даниельян Ю.С. Об одном способе определения параметров пласта по нестационарным исследованиям // Изв. вузов. Нефть и газ. 1975. №10. С. 46-48.
53. Григорашенко Г.И. и др. Применение полимеров в добыче нефти. - М.: Недра, 1978. – 213 с.
54. Даниельян Ю.С., Аметов И.М. Об оценках решений задач Стефана // Изв. вузов. Нефть и газ. 1973. №4. С.45-48.
55. Демчик И.Ш. К вопросу о статистической интерпретации модели фильтрования Д.М.Минца // Укр. ин-т инж.вод.х-ва. Ровно, 1989. – 10 с. Деп. в УкрНИИНТИ 17.11.89. № 6448-Ук89.
56. Дерягин Б.В. Исследования по внешнему трению и прилипанию // Журн. физ. хим. 1935. Т.6. Вып.10.
57. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа. М.: Физматгиз, 1958.

58. Джабаров К.А. Давление в жидкой фазе буровых и тампонажных суспензий в скважине // Изв. вузов. Нефть и газ, 1987. №9. С. 26-30.
59. Джабилов К.Н., Агаев Н.Б., Мамедов А.М. О вытеснении вязкоупругой жидкости к системе скважин // Изв. АН СССР. Сер. наук о Земле. 1988. №5. С.25-32.
60. Динариев О.Ю., Николаев О.В. О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // ИФЖ. 1990. Т. 58. №1. С. 78-87.
61. Динариев О.Ю., Николаев О.В. Релаксационные явления при фильтрации плотного газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. №1. С. 105-113.
62. Дорфман М.Б., Дьяконов М.А. Фильтрация вязкоупругой жидкости в неоднородной пористой среде // Изв. вузов. Нефть и газ. 1985. №12. С. 47-50.
63. Дунымалыев М.А. О притоке жидкости к системе скважин в неоднородной среде с учетом явлений запаздывания // Изв. Вузов. Нефть и газ. 1986. №3. С. 42-46.
64. Дытнерский Ю.И. Обратный осмос и ультрафильтрация. М., 1978.
65. Егоров В.К. Диффузионная кинетика в неподвижных средах. М.: Химия, 1970.
66. Ельшин А.И. Расширенное уравнение процесса фильтрования с закурпированием пор для дисперсионной среды со степенным реологическим законом течения // Изв. вузов. Химия и хим. технол. 1986. Т. 29. №5. С. 100-104.
67. Ентов В.М. и др. О вытеснении нефти водой из глинизированных пластов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. №4. С. 59-65.
68. Ентов В.М., Полищук А.М. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. №3. С. 68-76.
69. Ентов В.М. Современное состояние и проблемы физико-химической подземной гидравлики // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 80-88.
70. Ентов В.М. Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 200-205.
71. Ентов В.М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (Математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов): Препринт ИПМ АН СССР. М., 1980. №161. – 64 с.
72. Ефимова Л.Н., Рейтенбах В.Г., Гагин Г.Н. Приближенный метод расчета фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде // Изв. вузов. Нефть и газ. 1976. №11. С.69-73.
73. Желтов Ю.П. и др. Об особенностях заводнения нефтяных залежей с глинодержащими коллекторами // Нефтяное хозяйство. 1981. №7.

74. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986. – 332 с.
75. Жужиков В.А. Фильтрование. Теория и практика разделения суспензий. 4-е изд. М.: Химия, 1980. – 400 с.
76. Жуховицкий А.А., Забежинский Я.Л., Тихонов А.Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала // Журн. физ. хим. 1946. Т.20. вып. 10.
77. Загман Ю.В., Семенова Л.В., Харин А.Ю. Исследование влияния ПАВ на взаимодействие глинистого материала с жидкостями // Применение реагентов в процессах добычи нефти и газа и их получение на базе нефтехимического сырья. Тез.докл. Башк. обл. правл. ВХО им. Д.И.Менделеева. Уфа, 1989. С.38-39.
78. Закиров С.Н., Сомов Б.Е., Гордон В.Я., Паматник Б.М., Юфин П.А. Многомерная и многокомпонентная фильтрация. М.: Недра, 1988. – 335 с.
79. Зубарев А.Ю., Хужаёров Б.Х. К теории релаксационной фильтрации // ИФЖ. 1988. Т.55, №3. С. 442-447.
80. Зубарев А.Ю., Хужаёров Б.Х. О нестационарной фильтрации, осложненной коильматационными эффектами // «Механика сплошных сред». Тез. докл.респ.конф., посвященной памяти акад. АН РУз Х.А.Рахматулина. 26-27.04.89. Ташкент: Фан, 1989. С. 20-21.
81. Иванников В.И., Кучеренко Э.И., Михлин Л.П. Аналитическое исследование процессов фильтрации бурового раствора из скважины в пласт // ДАН СССР. 1986. Т. 290. №5. С. 1072-1076.
82. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б.К.Чемоданова. М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
83. Избаш С.В. Фильтрационные деформации грунта // Изв. НИИГ. 1996. №10. С. 28-32.
84. Избаш С.В. Экспериментальные исследования фильтрационных деформаций двух смежных разнородных слоев грунта // Изв. НИИГ. 1934. №14.
85. Ирматов Э.К., Агзамов А.Х., Хужаёров Б.Х., Закиров А.А. Особенности разработки глубокопогруженных нефтяных месторождений. Ташкент: Фан, 2004. – 128 с.
86. Ирматов Э.К., Хужаёров Б.Х., Агзамов А.Х. Метод прогнозирования технологических показателей разработки нефтяных залежей // ДАН РУз. 1984. №7. С. 49-50.
87. Ирматов Э.К., Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Жаманкулова Ф.Э., Зокиров А.А. Моделирование изменения коллекторских свойств пласта при

фильтрации неоднородных жидкостей // Узб. журнал «Нефть и газ». Ташкент, 2003. №2. С. 16-19.

88. Климушкин И.М. и др. Геологические условия, определяющие эффективность физико-химических методов вытеснения нефти в терригенных коллекторах // Сб. науч. тр. ВНИИ. 1980. Вып. 72.

89. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. – 351 с.

90. Колмогоров А.В. Релаксационные эффекты при фильтрации жидкости в вязкоупругой пласте // «Динамика многофазных сред». Матер. Всесоюз. сем. «Совр.проб. и матем. методы теории фильтрации». Объед. 7. Семинар 1. «Численные методы решения задач фильтрации многофазн. несжим. жидкости» и семинар 2 – «Совр.проблемы теории фильтрации». Новосибирск, 1985. С. 88-92.

91. Коммунар Г.М. Перенос загрязнений в неоднородных пластах // Гидрогеологические исследования и расчеты защиты подземных вод от загрязнений. Сб. науч. тр. М.: Изд. ВНИИ ВОДГЕО, 1987. С. 37-50.

92. Коммунар Г.М., Середкина Е.В. Массообмен при конвективном переносе загрязнений в неоднородных пластах // Защите подземных вод от загрязнения и истощения. Сб. науч. тр. М.: Изд. ВНИИ ВОДГЕО, 1989. С. 13-16.

93. Котяхов Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов. М.: Недра, 1977. – 288 с.

94. Кочина П.Я. О математических методах в механике // В сб.: «Движение растворимых примесей в фильтрационных потоках». Тула. 1984. С. 3-7.

95. Крейг Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении. М.: Недра. 1974.

96. Кремез В.С. Численное решение задачи о промывках засоленных почв с учетом температуры промывной воды // Гидромеханика. Киев, 1975, №5. С.67-70.

97. Крыштул В.П. Исследование задерживающей способности кварцевых фильтров городских водопроводных станций: Дис. ... Акад. коммун. хоз., 1951.

98. Лейбензон А.С. Собрание трудов. Т.2. Подземная гидрогазодинамика. М., 1953. – 544 с.

99. Лиштван И.И. и др. Фильтрация сапропелевых буровых растворов в пористой среде // ИФЖ. 1988. Т.55. №4. С. 594-599.

100. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. – 904 с.

101. Луан Чжи-Ань. Анализ релаксационных фильтраций неньютоновских жидкостей // Изв. вузов. Нефть и газ. 1989. №2. С. 25-27.
102. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
103. Мавлятов М.Р. и др. Управляемая коьматация при вскрытии продуктивных пластов на полимерном растворе // Изв. вузов. Нефть и газ, 1990. №4. С.30-34.
104. Майдебор В.Н. Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М.: Недра, 1980.
105. Мархасин И.А. Физико-химическая механика нефтяного пласта. М.: Недра, 1977.
106. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
107. Минц Д.М. Кинетика фильтрации малооконцентрированных суспензий на водоочистных фильтрах // Докл. АН СССР. 1951. Т. 72.
108. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды. М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1964. – 156 с.
109. Минц Д.М. Фильтрация малооконцентрированных водных суспензий через зернистые слои // Науч.тр. Акад. коммунал. хоз. им. К.Д.Памфилова. Вып. 2-3, 1951.
110. Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М. Гидродинамика в бурении. М.: Недра, 1985. – 196 с.
111. Мирзаджанзаде А.Х., Ентов В.М. К оценке адсорбционной емкости пород // ИФЖ. 1975. Т. 28, №5. С. 807-810.
112. Мирзаджанзаде А.Х., Караев А.М., Ширинзаде С.А. Гидравлика в бурении и цементировании нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1977. – 232 с.
113. Мишечев В.И. Гидродинамические исследования поглощающих пластов и методы их изоляции. М.: Недра, 1974. – 208 с.
114. Молокович Ю.М. и др. Релаксационная фильтрация. Казань: КГУ, 1980. – 136 с.
115. Молокович Ю.М. К теории линейной фильтрации с учетом релаксационных эффектов // Изв. вузов. Математика. 1977. №5. С. 66-73.
116. Молокович Ю.М. К теории одномерной нестационарной нелинейной фильтрации при учете двойной релаксации // Краевые задачи теории фильтрации. Ужгород, 1976. С. 65-66.
117. Молокович Ю.М., Осипов П.П. К теории линейной релаксационной фильтрации. Казань, 1983. – 32 с. Деп. в ВИНТИ, № 1714-83.
118. Молокович Ю.М., Осипов П.П. О постановках краевых задач в те-

ории фильтрации с релаксацией. Казань, 1983. – 16 с. Деп. в ВИНТИ, № 1711-83.

119. Молокович Ю.М., Осипов П.П., Шарафутдинов В.Ф. Об основных уравнениях релаксационной фильтрации. Казань, 1983. – 13 с. Деп. в ВИНТИ, № 1713-83.

120. Молокович Ю.М., Осипов П.П., Шарафутдинов В.Ф. О скачках при фильтрации, описываемой линейными релаксационными моделями. Казань, 1983. – 12 с. Деп. в ВИНТИ, № 1712-83.

121. Молокович Ю.М. Основы релаксационной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 142-153.

122. Молокович Ю.М. Особенности одномерной нестационарной нелинейной фильтрации при учете двойной релаксации // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1977. С. 152-157.

123. Молокович Ю.М., Шкуро А.С. Учет влияния сил инерции на распределение давления в пласте и дебит при пуске галереи с постоянным забойным давлением // Изв. вузов. Нефть и газ. 1975. №3. С. 33-36.

124. Мукук К.В. Элементы гидравлики релаксирующих аномальных систем. Ташкент: Фан, 1980. – 121 с.

125. Неговская Т.А. Кольматация как метод борьбы с фильтрацией из каналов // Гидротехн. стр. 1949. №7.

126. Николаевский В.Н. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. – 192 с.

127. Николаевский В.Н. Конвективная диффузия в пористых средах // Прикл. мат. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1042-1050.

128. Николаевский В.Н. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.

129. Николаевский В.Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках // Изв. АН СССР. ОТН, механика и машиностроение. 1960. №5.

130. Нустров В.С., Сайфуллаев Б.Н., Хужаёров Б.Х. Квазистационарные приближения в теории нелинейного тепломассопереноса в зернистых средах // Тепломассообмен ММФ – Heat/Mass transfer MIF. Тезисы докладов Минского международного форума. Минск. 24-27.05.1988. Секция: «Тепломассообмен в дисперсных системах». Минск, 1988. С. 98-100.

131. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Механика физических процессов. М.: МГУ, 1976. – 368 с.

132. Однорог Д.С., Перелова В.Г. Влияние химических реагентов на набухаемость глин // Изучение особенностей применения методов повышения нефтеотдачи пластов. Сб. тр. ВНИИнефть им. А.П.Крылова. 1985. Вып. 102. С. 29-35.

133. Олейник А.Я. Математические модели фильтрации и массоперенос в связи с решением задач гидротехники, мелиорации и охраны окружающей среды // Прикладная гидродинамика. Сб. науч. тр. Ин-та гидромеханики АН УССР. Киев, 1989. С. 100-122.

134. Оскольников А.П., Ахматов М.М. Сходящиеся разностные схемы для уравнений фильтрации жидкости с запаздыванием // Зап. научн. семинаров Ленингр. отд-я мат. ин-та АН СССР. 1986. Вып. 152. С.86-93.

135. Островский Я.М., Мелкумова М.С. Зависимость перепада давления в призабойной зоне эксплуатационных и нагнетательных скважин от глинистости // Тр. ТуркменНИПИнефть. Грозный, 1977. Вып. 17.

136. Павловский Н.Н. Краткий гидравлический справочник. Стройиздат, 1940.

137. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. – 288 с.

138. Патрашев А.Н. Напорное движения грунтового потока, насыщенного песчаными глинистыми частицами //Изв. НИИГ, 1935. №15,16.

139. Пешкин О.В., Шаихов Д.З., Пашин С.Т. Набухаемость глин в различных средах // Физикохимия и разработка нефтегазовых месторождений. Уфа. УНИ. Межвуз. науч. тем. об. 1989. С. 155-160.

140. Пикалов Ф.И., Неговская Т.А. и др. Способы борьбы с потерями воды на фильтрацию из оросительных каналов. Сельхозгиз. 1952.

141. Пирвердян А.М. Об одном способе оценок приближенных решений уравнения нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. Вып.4. С. 756-760.

142. Пирвердян А.М. Об оценках некоторых приближенных методов решения задач нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР, сер. Механика и машиностроение. 1962. №5. С. 46-50.

143. Питкевич В.Т. Влияние минерализации закачиваемой воды на проницаемость глинистых пластов // Нефтяное хозяйство. 1978. №7.

144. Поваров И.А., Тушканов И.В. Влияние глинистости пласта на проницаемость нагнетательных скважин // Нефтяное хозяйство. 1978. №6.

145. Покровский Г.И. Кольматация как средство борьбы с фильтрацией в плотинах, возводимых направленным взрывом // Иссл. в обл. пром. гидротехники. М., 1989. С. 13-15.

146. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978. – 256 с.
147. Проппяков Б.К., Дмитриевский А.Н., Гальянова Т.И. Некоторые итоги и задачи в области изучения коллекторов нефти и газа на больших глубинах // Сб.тр. МИНХ и ГП «Изучение коллекторов нефти и газа, залегающих на больших глубинах». Вып. 123, 124. М.: Недра, 1977. С.3-8.
148. Рабинович Н.Р., Смирнова Н.В., Крезуб А.П. Определение глубины проникновения фильтра бурового раствора // Нефтяное хозяйство. 1989, №9. С.28-31.
149. Равшанов Н., Атауллаев А.Х., Ким М. Математическая модель фильтрования растительных масел в сжимаемой пористой среде // Средаз. научно-исследовательский и проектно-конструкторский ин-т пищ. пром-ти. Ташкент. 1988. – 7 с. Рук. деп. в АгроНИИТЭИпищепром от 30.05.88, № 1835-пд88.
150. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967 гг.) / Под ред. акад. Полубариновой-Кочиной П.Я. М.: Наука, 1969.
151. Расулов М.А., Рагимова Т.А. О математическом моделировании нестационарной фильтрации жидкости с памятью // Изв. АН СССР. Сер. Наук о Земле. 1988, №2. С. 43-48.
152. Рачинский В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. – 137 с.
153. Розенберг М.Д., Кундин С.А., Курбанов А.К., Суворов Н.И., Шовкринский Г.Ю. Фильтрация газированной жидкости и других многокомпонентных смесей в нефтяных пластах. М.: Недра, 1969. – 456 с.
154. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. – 240 с.
155. Сайфуллаев Б.Н., Хужаёров Б.Х. Оценка решений асимптотических уравнений релаксационной фильтрации // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: НПО «Кибернетика», 1988. Вып.84. С. 144-149.
156. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. – 232 с.
157. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. – 616 с.
158. Сагтаров Р.М., Хужаёров Б.Х. К способу определения структурно-механических свойств бурового раствора // Тр. «СредАзНИПИнефть», М., ВНИИОЭНГ, 1980. Вып. 7. С. 36-40.
159. Свалов А.М. О некоторых факторах, влияющих на глубину проникновения тиксотропных жидкостей в проницаемые породы в процессе бурения // Коллоидный журнал. 1988. Т.50, №2. С. 301-307.

160. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов // Прикладная гидромеханика. Сб.н.тр. ин-та гидромеханики АН УССР. Киев: Наукова думка, 1989. С. 220-246.

161. Сургучев М.А. Вторичные методы увеличения нефтеотдачи пластов. М.: Недра, 1985. – 308 с.

162. Сухоставская С.Р., Литвишко В.Г. О влиянии эффектов запаздывания фильтрации бурового раствора на процессы углубления скважин // Ускорен. освоение ресурсов нефти и газа Прикаспийского региона. М., 1989. С. 97-102.

163. Телков А.П., Федорцев В.К., Гороховцев А.Н. Исследование явления молекулярной и конвективной диффузии в пористых средах // «Фазовые переходы углеводородных систем в пласте и скважине». Тюмень. 1989. С. 51-69.

164. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостоптехиздат. 1956. – 204 с.

165. Трутин Б.Ф., Сергутин В.Е. Фильтрационный расход каналов при кольматации // Изв. вузов. Энергетика. 1986. № 5. С. 97-101.

166. Тябин Н.В., Кондакова Л.Н., Балашов В.А. Течение вязкоупругих жидкостей через пористые среды // «Новое в реологии полимеров». Мат. II Всесоюзного симпозиума по реологии. Суздаль, 1980. Вып. 2. М., 1980. С.196-200.

167. Файбишенко Б.А. Водно-солевой режим грунтов при орошении. М.: Атомиздат, 1986. – 303 с.

168. Фетодкин И.М., Воробьев Е.И., Вьюн В.И. Гидродинамическая теория фильтрования суспензий. Киев: Высшая школа, 1986. – 166 с.

169. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968. – 427 с.

170. Хамзина Б.С., Аманбаева Л.Ж. Фильтрация в конечном пласте для обобщенного закона Дарси // Материалы Международной научно-практической конференции «Экология и нефтегазовый комплекс». Атырау, 2004. С. 300-304.

171. Хамзина Б.С. Моделирование гидродинамических процессов выноса песка из нефтяных пластов // Журнал «Вестник Атырауского института нефти и газа». Атырау, 2004.

172. Хамзина Б.С. Релаксационная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде с учетом релаксационных эффектов // Журнал «Вестник КарГУ». Караганда, 2004.

173. Хамзина Б.С., Турдиев М.Ф., Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Моде-

лирование процессов изменения коллекторских свойств нефтяных пластов при их заводнении // Казахский журнал «Нефть и газ». 2001. №2. С.33-39.

174. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. – 636 с.

175. Харин О.Н. Упрощение решений задач теории упругого режима фильтрации // Тр. МИНХиГП. М., 1972. Вып. 94. С. 27-35.

176. Хеиров М.Б. и др. Некоторые рекомендации для повышения эффективности разработки продуктивных горизонтов КСйПК свит площади Кирмаку // Тем.сб.науч.тр. АзНИПИнефть. 1977. Вып. 14.

177. Хужаёров Б.Х., Агзамов А.Х. Методика определения технологической эффективности применения геолого-технических мероприятий при разработке нефтяных месторождений по «Киргизнефть» // Фонды СредазНИПИнефть. Ташкент. 1986. – 54 с.

178. Хужаёров Б.Х., Бобокулов Ё.О., Худоёров Ш.Ж. Релаксационная фильтрация однородных жидкостей в трещиновато-пористых средах // Инж.-физ.журнал. 2001. Т. 74. №5. С. 17-23.

179. Хужаёров Б.Х. Влияние коьматации и суффозии на фильтрацию суспензий // ИФЖ. 1990. Т.58. №2. С. 244-250.

180. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. Коьматационно-суффозионная фильтрация с учетом диффузионного переноса // Суюклаиклар, куп фазали аралашмалар ва туташ мухитларда тулкинлар таркалишининг долзарб муаммолари: Акад. Рахматуллиннинг 90-йиллигига багишланган Республика конф. маърузалар туплами. Тошкент. 21-23.04.99. II -кисм. 372-375 бб.

181. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О моделях переноса твердых частиц в пористой среде // Актуальные проблемы механики контактного взаимодействия: Тез. докл. Респ. науч. конф. Самарканд, 1997. С. 167-169.

182. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О модификации модели коьматационно-суффозионной фильтрации // ДАН РУз. 1997. №5. С.25-28.

183. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А., Шодмонов И.Э. Фильтрация однородной жидкости в упруго-пластическом режиме с учётом разрушения пород // Узб.журнал «Проблемы механики». 1997. № 3. С. 40-43.

184. Хужаёров Б.Х., Жаманкулова Ф.Э. Гидравлическое обоснование выноса песка из нефтедобывающих скважин // Узбекский журнал «Нефть и газ». 2000. №4. С.20-23.

185. Хужаёров Б.Х. Захват и вымывание частиц в пористых фильтрах // Материалы II Международного форума MIF-92, Minsk International Forum «Heat/-Mass Transfer». Т.5. Тепло-массообмен в дисперсных средах. Минск, 1992. С.156-158.

186. Хужаёров Б.Х. К теории нестационарной фильтрации // Деп. в ВИНИТИ 14.10.89г. рег. №7443-B88. Анн в ИЖФ. 1989. Т. 56. №4. С.13.

187. Хужаёров Б.Х. К экспериментальному определению релаксационных характеристик бурового раствора // Тезисы докл. VI Всесоюзного семинара по гидравлике промысловых жидкостей и тампонажных растворов. М., 1978. С.3-6.

188. Хужаёров Б.Х. Макроскопическое моделирование релаксационного переноса вещества в пористой среде // Изв. РАН «Механика жидкости и газа». 2004. №5. С. 21-30.

189. Хужаёров Б.Х., Маматкулов М. Определение гидравлических характеристик системы «бурильная труба - кольцевое пространство» // Тезисы докл. VI Всесоюзного семинара по гидравлике промысловых жидкостей и тампонажных растворов, М., 1978. С.28.

190. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Кольматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостями // Инженерно-физический журнал, 2007. Т.80. №1. С. 46-53.

191. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Хамзина Б.С. Кольматационно-суффозионная фильтрация дисперсных систем с учетом диффузионных эффектов // Узб. журнал «Проблемы механики». 2003. №1. С. 51-54.

192. Хужаёров Б.Х. Моделирование релаксационных явлений при движении неньютоновских жидкостей // Узб.журнал «Проблемы механики». 1994. № 3-4. С. 55-56.

193. Хужаёров Б.Х. Моделирование релаксационных явлений при фильтрации // «Механика жидкостей и многофазных сред». Тез.докл.респ.конф. 5-7.12.1988. Ташкент: Фан, 1988. С.35.

194. Хужаёров Б.Х. Модель многокомпонентной кольматационно-суффозионной фильтрации // Инженерно-физический журнал.1994. Т. 66. № 4. С.427-433.

195. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации дисперсных систем с учетом кольматации и суффозии // Узбекский журнал «Проблемы механики». 1995. № 3-4. С. 62-65.

196. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации суспензий с учетом кольматации и суффозии // Инженерно-физический журнал. 1992. Т. 63. №1. С. 72-79.

197. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации суспензий, учитывающая суффозию и кольматацию // «Математические модели и численные методы нелинейных колебаний». Тр. СамГУ. Самарканд, 1990. С. 78-81.

198. Хужаёров Б.Х. Об уравнений фильтрации в упруго-пластическом режиме с выносом песка // ДАН РУз. 1997. № 4. С. 22-24.

199. Хужаёров Б.Х. О влиянии капиллярных эффектов на реологические свойства эмульсии // Инженерно-физический журнал. 1990. Т. 59. №6. С. 968-974.

200. Хужаёров Б.Х. О модели кольтматационно-суффозионной фильтрации дисперсных систем в пористой среде // Инженерно-физический журнал. Т. 73. №4. 2000. С.680-685.

201. Хужаёров Б.Х. О моделировании релаксационных явлений при фильтрации // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук. 1989, №4, с.43-46.

202. Хужаёров Б.Х. Приближенная оценка решений задач релаксационной фильтрации // Особенности разработки и эксплуатации нефтяных месторождений Средней Азии. Тр. СредазНИПИнефть. М.: ВНИИОЭНГ, 1985. С. 49-57.

203. Хужаёров Б.Х., Рахимов М.Н., Махмудов Ж.М. Гидродинамические моделирование процессов кольтматации и суффозии пор при заводнении нефтяных залежей // Проблемы разработки нефтегазоконденсатных месторождений и пути их решения: Тез. докл. Респ. науч.-прак. конф. 18-19.10.06. Ташкент, 2006. С. 27-31.

204. Хужаёров Б.Х. Реологические свойства смесей. Самарканд: Согдана, 2000.

205. Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Модель фильтрации суспензий с учетом предельных градиентов давлений по потоку и суффозии // Узб. журнал «Проблемы механики». 1995. №1. С. 34-37.

206. Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Об особенностях кольтматационно-суффозионной фильтрации с переменной диффузией // Республиканская научная конференция по механике, посвященная 90-летию академика М.Т.Уразбаева. Ташкент. 1-2 октября 1996. С. 39.

207. Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Релаксационная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде // ДАН РУз. 1997. №12. С.18-21.

208. Хужаёров Б.Х., Тургунов Х.М., Нагаев М.Г., Леонтьев С.Г. Возможные пути вовлечения в активную разработку трудноизвлекаемых запасов нефти III горизонта месторождения «Майли-Су-IV-Восточный Избаскент» // Тезисы докл. Научно-прак. конф. по проблемам разработки нефтяных и газовых месторождений Киргизской ССР, пос. Кочкар-Ата, Киргиз. ССР. 1984. С.26-27.

209. Хужаёров Б.Х., Турдиев М.Ф., Хамзина Б.С. Кольтматационно-суффозионная фильтрация дисперсных систем в пористой среде // I Международная научно-техническая конференция, посвященная 20-летию образования АИНиГ «Современные проблемы геофизики, геологии, освоения,

переработки и использования углеводородного сырья Казахстана» 18-19 декабря 2000 г. Атырау, 2000. Т.2. С. 562-564.

210. Хужаёров Б.Х., Хамзина Б.С., Махмудов Ж.М. Кольматационно-суффозионная фильтрация в конечном пласте с учетом предельного суффозионного градиента давления // ДАН РУз. 2001. №10—11. С. 38-40.

211. Хужаёров Б.Х., Холиков А.С. Задачи релаксационного переноса вещества в пористой среде // Узб. журнал «Проблемы механики», 2006. № 1-2. С. 54-57.

212. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Бурнашев Р.Ф. Задача идентификации параметров при упругопластическом режиме фильтрации // ДАН РУз, 2005. №2. С.32-35.

213. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч. Обратные задачи упругопластической фильтрации жидкости в пористой среде // Инженерно-физический журнал. 2007. Т.80. №3. С.86-93.

214. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Умаров Т.И. Определение параметров пласта при упруго-пластическом режиме фильтрации // «Актуальные вопросы механики и математики» Сб.тр. КНИИРП Сам. отд. АН РУз. 2007. С.114-121.

215. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э. Упруго-пластическая фильтрация с учётом разрушения пласта // Узбекский журнал «Проблемы механики». 1998. №3. С. 24-29.

216. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э., Холияров Э.Ч., Закиров А.А. Упругопластическая фильтрация жидкости в неустойчивых пластах // Инженерно-физический журнал. 2003. Т.76. №6. С.123-128.

217. Хужаёров Б.Х., Шодмонов К.И. Фильтрация дисперсных систем с учётом кольматации и суффозии // Узбекский журнал «Проблемы механики». 1993. № 6. С. 6.

218. Хужаёров Б.Х. Экспериментальный способ определения времени релаксации давления при фильтрации неравновесных жидкостей // Тез. докл. респ. конф. мол. ученых и спец-ов. Часть 1. Ташкент, 1978. С. 80.

219. Чаплыгин С.А. Избранные труды по механике и математике. М.: Гостехиздат, 1954. – 568 с.

220. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1960. – 396 с.

221. Шаймуратов Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980.

222. Шантарин В.Д., Аринштейн Э.А. Образование фильтрационной корки // Изв. вузов. Нефть и газ. 1987. №11. С.21-25.

223. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. – 288 с.
224. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М.: Гостоптехиздат. 1960. – 249 с.
225. Шехтман Ю.М. Исследование вымыв фильтрационным потоком мелких частиц грунта. // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №6.
226. Шехтман Ю.М. О фильтрации жидкости, несущей взвешенные твердые частицы // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. №2.
227. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий // Изв. АН СССР. ОТН. 1949. №3.
228. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М., 1961. – 212 с.
229. Шульгин Д.Ф., Васильев В.В. Решение профильной задачи миграции подземных вод методом конечных элементов // Гидравлика русловых потоков. Калинин, 1986. С. 58-65.
230. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостоптехиздат, 1959. – 468 с.
231. Ярошевская Н.В. Совершенствование метода технологического моделирования процесса очистки воды фильтрованием через зернистые загрузки // Журнал прикладной химии. 1986. Т. 59. №5. С. 1048-1052.
232. Ackerer Ph. Random-walk method to simulate pollutant transport in alluvial aquifers or fractured rocks // Groundwater flow and quality model. Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Lisbon, June 2-6. 1987. – Dordrecht ets., 1988. P. 475-286.
233. Akiyama T., Atsumi K. Mathematical formulation of cake filtration for deformable solid and uniqueness of a similarity solution // Chem. Eng. Sci. 1987. Vol. 42, N 11. P. 2790-2792.
234. Aksay I.A., Schilling C.N. Mechanics of colloidal filtration // Form. German. Proc. Spec. Conf. 85th Annu. Meet. Amer. German. Soc., Chicago. Ill., Apr. 24-27. 1983. Columbus. Chic., 1984. P. 85-93.
235. Antos P., Bleyer A., Vajda T. A novel mathematical description of filtration processes. The case of compressible filter cakes // Hung. J. Ind. Chem. 1985. 13, N 4. P. 441-447.
236. Auriault J.-L., Adler P.M. Taylor dispersion in porous media: Analyses by multiple scale expansions // Advances in Water Resources. 1995. - № 4(18). - P. 217-226.
237. Auriault J.-L., Lewandowska J. Diffusion/adsorption/advection macro-transport in soils // Eur. J. Mech. A/Solids. 1996. - № 4(15). - P. 681-204.

238. Auriault J.-L., Lewandowska J. Homogenization analyses of and adsorption macrotransport in porous media: macrotransport in the absence of advection // *Geotechnique*. 1993a. - № 3(43). - P. 457-469.

239. Barenblatt G.I., Entov V.M. and Ryzhik V.M. *Theory of Fluid Through Natural Rocks. Kluwer Academic Natural Publisher*. Dordrecht/Boston/ London, 1990.

240. Bear J. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Publishing Company. 1972. – 764 p.

241. Bear J., Verruijt A. *Modelling Groundwater Flow and Pollution*. Reidel. Dordrecht, 1987.

242. Brusseau M.L., Jessup R.E., Rao P.S.C. Modeling the transport of solutes influenced by multiprocess nonequilibrium // *Water Resours. Res.*, 1989. N 9. P. 1971-1988.

243. Buyevich Yu.A., Leonov A.I., Safrai V.M. Variations in filtration velocity due to random large-scale fluctuations of porosity // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol.37, pt.2. P. 371-381.

244. Buyevich Yu.A. On the fluctuation of concentration in disperse system. Spectral description of the random concentration field and application to solute dispersion in packed beds // *Chem. Eng. Sci.* 1972. Vol.27, N 10. P. 1699-1708.

245. Clark I., Fritz P. *Environmental Isotopes in Hydrogeology*. Lewis Publishers. Boca Raton. 1997.

246. Clark M.M. *Transport Modelling for Environmental Engineers and Scientists*, John Wiley, New York, 1996.

247. Coats K.H., Smith B.D. Dead-end pore volume and dispersion in porous media // *Soc. Pet. Eng. J.* 1964. No. 4. Pp. 73-84.

248. De Smedt F., Wierenga P.J. A general solution for solute flow in soils with mobile and immobile water // *Water Resours. Res.*, 1979a. 15(5), 1137-1141.

249. De Smedt F., Wierenga P.J. Solute transport through of glass beads // *Water Resours. Res.*, 1984. 20(2), 225-232.

250. Dorgarten H.W., Pelka W. Finite element modeling of nonconservative pollutant transport in groundwater flow // *Finite Elem. Water Resour. Proc.* 6th Int. Conf., Lisboa, June. 1986. Berlim e.a., 1986. P. 313-323.

251. Eliassen R. Geogging of a rapid sand filter // *J. of th Amer. Water works Ass.*, 1941. Vol. 33. №5.

252. Fetter C.W. *Contaminant Hydrology*. 2nd ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1999.

253. Gaudet J.P., Jégat H., Vachaud G., Wierenga P. Solute transfer with exchange between mobile and stagnant water through unsaturated sand // Soil Sci. Soc. Am. J., 1977. 41, 655-671.

254. Goltz M.N., Roberts P.V. Three-dimensional solutions for solute transport in an infinite medium with mobile and immobile zones // Water Resour. Res., 1986. 22(7), 1139-1148.

255. Griffioen J.W., Barry D.A. and Parlange J.Y. Interpretation of two-region model parameters // Water Resour. Res., 1998. 34(3), 373-384.

256. Gruber J. Contaminant accumulation during transport through porous media // Water Resour. Res. 1990. Vol. 26, N 1. P. 99-107.

257. Harlman D., Remer R. Longitudinal and lateral dispersion in a isotropic porous medium // J.Fluid Mech., 1963. Vol. 16. P.3.

258. Kass W. Tracing Technique in Geohydrology. A.A.Balkema publishers, Rotterdam, Netherlands, 1998.

259. Khuzhayorov B.Kh. A model of Colmatation-suffosion Filtration // Journal of Porous Media.1999. 2(2). P. 163-172.

260. Khuzhayorov B.Kh., Auriault J.-L., Royer P. Derivation of macroscopic filtration law for transient linear visco-elastic fluid flow in porous media // International Journal of Engineering Science. Vol. 38, 2000 p.487-504.

261. Khuzhayorov B.Kh., Auriault J.-L., Royer P. Macroscopic modelling of solute transport in porous media saturated by two immiscible liquids // "Poro-mechanics II", Proceedings of the second international Biot conference on poromechanics. A.A.Balkema publishers. 26-28.08.02. Grenoble. – France, 2002. - P. 473-479.

262. Khuzhayorov B.Kh., Burnashev V.F. Modelling the multiphase flow of an oil-gas-condensate system in porous media // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2001. Vol. 29. 67-82.

263. Khuzhayorov B.Kh., Burnashev V.F. On dynamics of Perturbation at the filtration of oilgascondensate mixtures // «Waves in two-phase flows». Europe colloquim 376. April 27-30. 1998. Istambul. Book of abstracts. p.43-44.

264. Khuzhayorov B.Kh. Elastico-plastical filtration with taking into consideration the destruction of the bed // 3-rd European Fluid Mechanics Conference. 1997. Book of abstracts. Göttingen. Germany. 15-18 Sept. 1997. p.181.

265. Khuzhayorov B.Kh. Filling and releasing kinetics of pores by particles // Int.conf. "Porous media and its applications in science, engineering and industry". June 16-21. 1996. Hawaii. USA. 3 p.

266. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M. Flow of suspensions in 2D porous media with mobile and immobile liquid zones // *Journal of Porous Media*. 2010. Vol. 13, No. 5. Pp. 423-437.
267. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M., Turdiev M.F., Khamzina B.S. Colmatation-suffosion filtration of non-homogeneous liquids in porous media // *Association of universities of pre-Caspian States. "Science and Technology". International Journal of Scientific Articles*. Atyrau. 2002. Part I. 29-30.
268. Khuzhayorov B.Kh. Model of colmatage-suffosion filtration of disperse systems in a porous medium // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2000, Vol. 73, №4. 668-673.
269. Khuzhayorov B.Kh. Phenomenological model of suspension filtration // *International conference on flow through porous media: Fundamentals and reservoir engineering applications*. September 21-26, 1992. Moscow, 1992. P.81-84.
270. Khuzhayorov B.Kh. Rheologic properties of suspension with viscoelastic particles // *International Conference «Fluid Particle Interaction IV»*. 12-17.05.96. Davos, Switzerland. 6p.
271. Kinzelbach W. The random-walk method in pollutant transport simulation // *Grandwater flow and quality model.: Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Lisbon, June 2-6. 1987. – Dordrecht ets., 1988. P. 227-245.*
272. Rao P.S.C., Jessup R.E., Rolston D.E., Davidson J.M. and Kilcrease D.P. Experimental and mathematical description of nonadsorbed solute transfer by diffusion in spherical aggregates // *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980a. 44(4), 684-688.
273. Saffman P.G. A theory of dispersion in porous medium // *J. Fluid Mech.* 1959, Vol. 6, N 3. Pp. 321-349.
274. Scheidegger A.E. The physics of flow through porous media. University of Toronto Press, 1957. Русский перевод: Шейдеггер А.Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. – М.: Гостоптехиздат, 1960.
275. Selim H.M., Amacher M.C. Reactivity and Transport of Heavy Metals in Soils. Lewis Publishers, Roca Raton, FL. 1996.
276. Sharma M.M., Yortsos Y.C. Fines migration in porous media // *AIChE Journal*. 1987. Vol. 33, N 10. P. 1654-1662.
277. Sharma M.M., Yortsos Y.C. Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation // *AIChE Journal*. 1987. Vol. 33, N 10. P. 1636-1643.
278. Sichart W. Das Fassungs verogen von Rohrbrunner u. Seine Bedeutung fur die Grundwasserabsenkung, insbesondere fur grossere Absenkungstiefen. Berlin, J. Springer, 1928.

279. Singh R. Mathematical models of dispersion in finite porous media flow // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1987. Sec. A. Vol. 57, N 2. P.249-257.
280. Skopp J., Gardner W.R., Tyler E.Y. Solute movement in structured soils: Two-region model with small interaction // Soil Sci. Soc. Am. J., 1981. 45, 837-842.
281. Smiles D.E., Kirby J.M. Aspects of onedimensional filtration // Separ. Sci. and Technol. 1987. 22, N 5. P. 1405-1423.
282. Sydansk Robert D. Permeability restoration of damaged formations. Marathon Oil Co. Патент №4673040 США. заявл. 17.04.86. № 853305, опубл. 16.06.87. МКИ E21 B 43/25, НКИ 166/305.
283. Traska A., Sobowska K. The effect of colmatage on the distribution of pressure under the conditions of axisymmetric flow // Arch. Mining Sci. 1987. Vol. 32, N 3. P. 335-369.
284. Van Genuchten M., Wierenga P.J. Mass transfer studies in sorbing porous media. 1. Analytical Solution // Soil Sci. Soc. Am. J. 1976. No. 40. Pp. 473-479.
285. Wakeman R.J. Transport equations for filter cake washing // Chem. Eng. Res. and Des. 1986. Vol. 64, N 4. P. 308-319.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. Релаксационные явления при фильтрации жидкостей и их модели	9
1.1. Релаксационные явления при фильтрации жидкостей	10
1.2. Модели релаксационной фильтрации	19
1.3. Составление моделей фильтрации смолистых и парафинистых нефтей с использованием методов САР	24
1.4. Релаксационные явления при фильтрации в глинистых пластах	28
1.5. Гидродинамические методы определения релаксационных характеристик фильтрационного потока	39
1.6. Задачи релаксационной фильтрации	50
1.7. Приближенная оценка решений задач фильтрации с релаксацией давления	58
Глава 2. Кинетика пористости среды при кольтматации и суффозии	67
2.1. Кольтматация и суффозия пор частицами	68
2.2. Модель релаксационной фильтрации микронееднородных жидкостей	75
2.3. Модель фильтрации суспензии при обобщенной зависимости проницаемости от пористости	82
2.4. Модель фильтрации суспензии с учетом эффектов предельного градиента давления	89
2.5. О модификации модели кольтматационно-суффозионной фильтрации	96
Глава 3. О моделях кольтматационно-суффозионной фильтрации дисперсных систем	99
3.1. Кольтматационно-суффозионная фильтрация	100
3.2. О моделях кольтматационно-суффозионной фильтрации	104
3.3. О методах решения задач кольтматационно-суффозионной фильтрации	110
3.4. Дифференциальные приближения для задач кольтматационно-суффозионной фильтрации	112
Глава 4. Задачи фильтрации с учетом кольтматации и суффозии ...	115
4.1. Модель фильтрации с учетом кольтматации и суффозии и корректная постановка задач	116
4.2. Задача кольтматационной фильтрации с заданным скоростным режимом	127
4.3. Задача кольтматационно-суффозионной фильтрации для конечного пласта с заданным режимом по давлению	141

4.4. Кольматационная фильтрация с учетом эффектов конвективной диффузии ...	148
4.5. Кольматация и суффозия в неоднородной по размерам пор среде	159

Глава 5. Задачи кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом предельных градиентов давления

165

5.1. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае линейного коэффициента фильтрации	166
5.2. Фильтрация дисперсных систем в плоском пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации	171
5.3. Задача движения жидкости в конечном пласте для линейного коэффициента фильтрации	175
5.4. Фильтрация в конечном пласте в случае нелинейного коэффициента фильтрации	180
5.5. Кольматационно-суффозионная фильтрация в случае переменной диффузии	186

Глава 6. Численный анализ моделей с общей схематизацией заполнения порового пространства

193

6.1. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации с заданным скоростным режимом	194
6.2. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации для конечного фильтра с заданным режимом по давлению	198
6.3. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом диффузионных эффектов	202

Глава 7. Задачи кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом предельного суффозионного градиента давления

207

7.1. Кольматационно-суффозионная фильтрация в полубесконечном пласте	208
7.2. Фильтрация в конечном пласте с заданным режимом по давлению	212
7.3. Фильтрация в полубесконечном пласте с учетом диффузионных эффектов	217
7.4. Фильтрация в конечном пласте с учетом диффузионных эффектов	219

Глава 8. Нестационарная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде

225

8.1. Нестационарная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде	226
8.2. Релаксационная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде с учетом релаксационных эффектов	234
8.3. Релаксационная фильтрация в конечном закрытом двухслойном пласте	243
8.4. Фильтрация с затухающим расходом	248

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	257
---	------------

X 98

Хужаёров, Б.Х.

Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах / Б.Х. Хужаёров; отв. ред. Ж.А. Акилов; М-во высшего и среднего специального образования РУз; Самаркандский государственный ун-т. – Ташкент: Фан, 2012. – 280 с.

УДК 532.546

ББК 24.6; 22.365

ISBN 978-9943-19-235-5

Утверждено к печати Ученым советом Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан

Редактор: К.Загряжская
Корректор: Б.Мирзаева
Технический редактор: М.Абидова
Верстка: Д.Абдуллаев

Лицензия издательства АІ №138, 27.04.2009 г.

Изд. № 3-86. Сдано в набор 30.11.2012.

Подписано в печать 31.12.2012. Формат 60х84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Апто Про. Уч.-изд. л. 12,0. Усл.-печ. л. 16,27.

Тираж 100. Цена договорная.

Издательство «Фан» АН РУз. 100170, Ташкент, ул. И.Муминова, 9.

Тел./факс: (8-371) 262-80-65, 262-70-40.

E-mail: fannashriyot@yandex.com

Отпечатано с оригинал-макета Издательства «Фан» АН РУз в типографии

ООО «Ko'hi-Nur». Заказ №277.

100097, Ташкент, проспект Бунёдор, 44.



Бахтиёр Хужаёров – доктор физико-математических наук, профессор. Докторскую диссертацию на тему «Гидродинамические характеристики движения неравновесных жидкостей в трубах и пористых средах» защитил в 1992 г. в Тюменском государственном университете (Россия). Автор более 250 научных работ, в том числе трех монографий, одного учебного пособия и более 20 полноформатных статей в зарубежных широко рецензируемых научных журналах. Отдельные его научные результаты со значительными технологическими и экономическими эффектами применены в производстве. Автор более 15 успешно реализованных проектов по разработке нефтяных и нефтегазовых месторождений Узбекистана.

ISBN 978-9943-19-235-5

