

Б.Х. ХУЖАЁРОВ, Ж.М. МАХМУДОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ
НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ
В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. АЛИШЕРА НАВОИ

Б. Х. ХУЖАЁРОВ, Ж. М. МАХМУДОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ



Издательство «Фан»
Академии наук Республики Узбекистан
Ташкент – 2014

УДК 532.546

ББК 35.113

X-98

Книга посвящена математическому моделированию фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах. На базе фундаментальных принципов механики и используя некоторые феноменологические подходы, выведены и численно анализированы обобщенные модели фильтрации и переноса вещества в пористых средах. Оценены влияния некоторых модельных параметров на характеристики фильтрации и переноса вещества. Даны физические интерпретации полученных результатов. Для специалистов и исследователей в области механики жидкости и газа, прикладной математики, физики, нефтяной, химической промышленности, экологии.

Монография может быть использована в качестве учебного пособия в бакалавриате и магистратуре, а также при подготовке выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций по специальностям «Вычислительная математика», «Прикладная математика», «Математическое моделирование», «Механика».

The book is devoted to the mathematical modeling of filtration of non-homogeneous liquids in porous media. On the basis of fundamental principles of mechanics and using some phenomenological approaches generalized filtration and solute transport models in porous media are derived and numerically analyzed. Influences of several model parameters on filtration and solute transport characteristics are estimated. Physical interpretations of results are given. This book is intended for scientists and researchers in fluid and gas mechanics, applied mathematics, petroleum, chemical, and environmental engineers, physicists involved in mathematical modeling of filtration processes, and for the undergraduate senior and graduate applied mathematics, mechanics students. The book can be used in special training courses for B.S. and M.S. students, and at the preparation of graduate qualification works and Masters degree theses in "Numerical mathematics" and «Applied mathematics», "Mathematical modeling", "Mechanics" etc.

Ответственный редактор:

доктор физико-математических наук, профессор *Ж. А. Акилов*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент *В. Ф. Бурнашев*

кандидат технических наук, доцент *И. Э. Шадманов*

ISBN 978-9943-19-289-8

©Издательство «Фан» АН РУз, 2014 г.

Введение

Пористые среды встречаются во многих отраслях техники и технологии, промышленности и в других сферах человеческой деятельности, в частности в сельском хозяйстве, химической технологии, нефтегазовой, пищевой промышленности, гидрогеологии [103, 112, 130], экологии [104, 116] и др. В течение нескольких последних десятилетий наука о пористых средах развивалась весьма интенсивно. С появлением точных инструментов и новых экспериментальных методов стало возможным измерение широкого разнообразия физических свойств пористых сред, движения жидкости и газа, переноса различных веществ в них. С развитием новых вычислительных методов и технологий появились возможности математического моделирования различных явлений в пористых средах, и тем самым глубже понять их природу и механизмы реализации.

Можно выделить два основных подхода к моделированию явлений движения жидкости и переноса веществ в пористых средах [169]. Первый подход связан с использованием континуального приближения, соответствующие модели называются континуальными. Эти модели в значительной степени основаны на классических уравнениях движения и переноса вещества, выводимых на основе базовых физических принципов, в частности, законов сохранения. Континуальные модели широко используются в инженерной практике.

Второй подход основывается на дискретные модели, в которых пористая среда представляется дискретным набором элементов и используется крупномасштабное моделирование Монте Карло, а также различные статистические методы. Дискретные модели не так широко используются как континуальные, но в ряде случаев они дают ценную информацию об изучаемом явлении. Много новых идей и понятий было развито в результате использования этого класса моделей, новые результаты позволили достичь намного лучшего понимания пористых систем. Кроме того, такие идеи и понятия как процессы перколяции, универсальные законы масштабирования и фракталы – основные инструменты дискретных моделей [168], постепенно занимают значительное положение в науке о пористых средах [93, 176, 177, 178].

В данной работе мы в основном используем первый подход, хотя многие положения, утверждения и результаты могут быть интерпретированы и с точки зрения методологии и идей второго подхода.

Заметим, что отмеченные подходы в равной мере используются и при исследовании процессов движения жидкости и переноса веществ в трещиновато-пористых средах [2, 3, 4, 37, 49, 71, 75, 90, 117, 169, 188].

Процесс фильтрации коллоидной суспензии в пористой среде имеет ряд особенностей и встречается во многих отраслях техники и технологии. Целью процесса может быть как перенос частиц через пористую среду, так и предупреждение их движения. Физические и химические силы между взвешенными частицами и зернами пористой среды, размер частиц, скорость жидкости и размер зерен играют важную роль в выпадении частиц от суспензии в поры. Выпадение частиц может изменить морфологию пор, следовательно, пористости среды и местного градиента давления. Это может вызвать снижение проницаемости и поэтому, потерю производительности фильтрующих элементов [181, 182, 193]. При фильтрации суспензий важными показателями, характеризующими процесс работы фильтра, являются: 1) Концентрация взвешенных частиц на выходе фильтра, которая описывает качество фильтрата; 2) Перепад давления в фильтре, через которого пропускается суспензия. Увеличение перепада давления через фильтр ограничивает продолжительность фильтрации и эффективность фильтра.

Размеры дисперсных частиц могут меняться в широких пределах, начиная от нескольких долей миллиметра до размеров макромолекул. Обычно различают коллоидные и взвешенные частицы, отличающиеся средним размером, приблизительно $1\mu\text{m}$. Частицы с размером менее $1\mu\text{m}$ относятся к коллоидным, и более – взвешенным (суспендированным), хотя эта граница сугубо условная [115]. Кроме того, нельзя указать четкую границу и физические условия перехода от одного типа в другой, скорее всего, уместно говорить о последовательном, плавном переходе.

С суспендированными частицами происходит два основных физических явления – агрегация и осаждение [115, 181, 182]. Эти явления имеют много общего и, в то же самое время, важные отличия. При агрегации частицы ассоциируясь, образуют кластеры. При осаждении же, частицы, двигаясь к поверхности породы среды, там

фиксируются, т.е. задерживаются. В данной книге мы рассматриваем только второе явление, т.е. осаждение, и зачастую используем термин «кольтматация», широко используемый в технической литературе, означающий забивание пор частицами суспензии при ее фильтрации. Аналогично, для обратного явления, т.е. освобождения захваченных частиц и последующего перехода их в суспензию, используем термин «суффозия».

Процесс переноса вещества, в частности взвешенных в жидкости частиц, в пористой среде определяется множеством факторов, таких как конвективный перенос, диффузия, гидродинамическая дисперсия, адсорбция, осаждение в порах, освобождение их с переходом в мобильное состояние и др. Конвективный перенос, диффузия, гидродинамическая дисперсия, локальное изменение концентрации можно описать уравнением сохранения массы. Осаждение и захват частиц в порах, освобождение их под действием различных сил представляет собой кинетический процесс и зависит от количества частиц, доступных для осаждения, то есть концентрации взвешенных частиц, а также от концентрации осажденных частиц. Предложено множество кинетических уравнений, соответствующих различным условиям фильтрации [100, 101, 102, 125, 126, 127, 129, 147, 152, 161, 181, 183]. В данной монографии развиваются некоторые новые идеи и подходы для описания процессов осаждения и освобождения частиц, в частности предложены кинетические уравнения, учитывающие предельный суффозионный градиент давления, динамические эффекты и др. Обоснование этих подходов и построенные модели можно найти в [38 – 41, 45, 50, 61, 63 – 66, 69, 70, 72, 74, 76, 78].

Наряду с неоднородностью жидкости интересно исследовать неоднородность структуры самой пористой среды. Природные резервуары – водоносные пласты, нефтяные и газовые месторождения, имеют микро – и макромасштабную неоднородность, как следствие различных геологических процессов – седиментации, литогенеза, диагенеза, катагенеза, метаморфизма, тектонических деформаций и др. Учет неоднородности пористой среды осуществляется с помощью статистических методов. Зональную, крупномасштабную неоднородность можно смоделировать и на основе детерминистического подхода, рассматривая пористые среды с различными структурами, с определенной геометрией, каждая структура которой имеет свои фильтрационно-емкостные свойства. Эти свойства иногда могут

быть резко контрастными. Одной из таких является двухзонная среда, одна из зон которой является хорошо проницаемой, следовательно, жидкость в ней можно считать подвижной, а другая – плохо – или малопроницаемой с неподвижной жидкостью. В таких средах перенос вещества и движение жидкости происходит с проявлением специфических эффектов. Исследование таких эффектов является одной из основных задач, включенных в данную монографию.

В монографии рассмотрены прямые задачи фильтрации и переноса вещества в пористой среде, где входящие в модели параметры считаются известными, а неизвестные функции определяются как решение соответствующих дифференциальных уравнений. В последнее время начаты исследования по обратным задачам, где те или иные параметры модели определяются из значений решения (понимаемого как в прямой задаче) в некоторых точках области определения задачи. Полученные результаты показывают, что используя методологии решения обратных некорректных задач [1, 6, 14, 34, 35] можно с достаточной точностью, определяемой погрешностью исходной информации, идентифицировать параметры модели [31, 36]. Здесь эти результаты не приводятся, они могут быть предметом отдельной работы. Отметим, что некоторые результаты решения обратных задач по переносу вещества в пористых средах с использованием простой кинетики осаждения частиц приведены в [81 – 84].

Здесь приводятся исследования в рамках феноменологических моделей фильтрации и переноса вещества. Для пористых сред определенной структуры, например рандомизированной или периодической, весьма эффективным инструментом может стать макроскопическое моделирование. Используя методологию [85 – 88] в [49, 133, 134] построены макроскопические модели для некоторых задач переноса вещества и движения жидкости.

В книгу вошли результаты авторов, полученные за последние годы. Методология исследования достаточно обоснована в работах [38, 41, 43, 50, 61, 64, 65, 66, 69, 70, 72, 73, 74, 76, 78, 132, 133, 134, 136, 137, 139, 141, 142, 143].

В главах 4 и 5 приведены материалы исследований, выполненных совместно с Ш.Х. Зикиряевым и Ф.У. Сулаймоновым. Материалы включаются в книгу с их согласия, за что авторы выражают им свою признательность. Авторы благодарят ответственного редактора книги проф. Акилова Ж.А., чьи советы и предложения позволили улучшить содержание книги.

ГЛАВА 1. Колматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью

В первом параграфе данной главы рассмотрен краткий обзор подходов, использованных при моделировании движения неоднородных жидкостей в пористых средах. Определены наиболее общие характерные особенности использованных до сих пор подходов. В частности, установлено, что феноменологические подходы моделирования основаны на использовании уравнений баланса вещества, кинетики процессов осаждения частиц (изменения характера заполнения порового объема частицами, сорбции, десорбции и др.), а также обобщенного закона Дарси. Аналогичный подход используется и здесь в процессе моделирования колматационно-суффозионной фильтрации дисперсных систем в пористых средах.

Во втором параграфе дается краткий обзор работ, посвященных двухзонным моделям переноса веществ.

Роль поперечной диффузии анализируется в параграфе 1.3. На основе существующих экспериментальных данных определены характерные значения отношения продольной диффузии к поперечной. Далее это соотношение использовано при проведении конкретных расчетов решения задач.

В 1.4 рассмотрена задача колматационно-суффозионной фильтрации в среде, состоящей из двух зон: с подвижной и неподвижной жидкостью. Задача решена численно. Определен ряд характеристик задачи: двумерные поля концентрации, пористости, проницаемости, градиента давления, зависимости относительного расхода, общего и суммарного относительного расхода вещества через границу зон, положение и скорость фронта локального максимума относительного расхода и др. На полученные новые результаты даны соответствующие физические интерпретации.

1.1. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористой среде

Проблемы переноса неоднородных жидкостей в пористых средах в последние годы приобретают все большее значение в связи с широким применением третичных методов воздействия на нефтяные пласты, более широким внедрением способов утилизации различных отходов бытового и промышленного происхождения, исследованием подземных резервуаров путем закачки жидкостей с различными добавками, служащими как меченые вещества и др.

В последнее время вопросы математического моделирования процессов переноса вещества развиваются интенсивно в основном за рубежом. Можно показать ряд работ, посвященный этой тематике. В принципе, подходы к моделированию основываются на законе баланса вещества в некотором контрольном объеме с использованием некоторых дополнительных феноменологических соотношений. Можно разделить вопросы изучения переноса растворенных веществ в пористой среде без учета изменения фильтрационных свойств среды и случаи, когда структура порового пространства изменяется в процессе переноса за счет осаждения части растворенного (или взвешенного) вещества, что приводит к непременному изменению фильтрационных свойств среды. Подходы к моделированию обоих случаев, в принципе, аналогичны. Однако во втором случае необходимо учесть изменение коллекторских свойств пористой среды за счет изменения структуры порового объема.

Ниже отметим некоторые работы, посвященные этой тематике. В [166] рассмотрена двумерная задача дисперсии от дискового источника совместно с уравнениями сорбции в частицах. Задача решена путем применения преобразований Лапласа и Ханкеля и решение выражено в виде несобственных двойных интегралов. В предыдущей статье [167] исследована модель диффузии и сорбции в частицах и продольная дисперсия в упакованном слое. Основным допущением существующих методов моделирования являются:

1) размеры частиц (эффективный диаметр) намного меньше макроскопического расстояния и пористая среда является макроскопически однородной;

2) сорбция является равновесной, линейной, что связывает концентрацию внутри частицы как функция концентрации вещества вне частицы;

3) быстро достигается локальное равновесие сорбции;

4) движение вещества внутри частицы описывается диффузионным уравнением типа фиковского закона с некоторым эффективным коэффициентом диффузии, не зависящим от концентрации;

5) частицы для процессов внутренней диффузии могут быть рассмотрены как сферические.

В [166] задача переноса вещества рассмотрена с учетом поперечной диффузии.

В практике нефтегазодобычи известны случаи, когда тонкие частицы песка отлагаясь в призабойной зоне создают дополнительные фильтрационные сопротивления, что приводит к резкому, аномальному уменьшению дебита добывающих скважин [128, 151, 155, 157, 159, 179, 189, 190, 192]. Некоторые вопросы гидродинамического описания пескопроявления обсуждены в [11, 12, 42, 43, 44, 68, 77, 79, 135, 136, 141]. В [123] описаны результаты исследований, определяющих факторы, влияющие на это явление. Приводились экспериментальные исследования, которые затем использованы как основа предложенной феноменологической теории входа и осаждения частиц в пористой среде. Основа теории заключается в разделении размеров как частиц так и размеров пор на любом поперечном сечении среды на закупоривающиеся и незакупоривающиеся параллельные пути. Эта простая модель способна адекватно объяснить широкий класс фильтрационных явлений. Показано также, что явления переноса и осаждения тонких частиц могут быть рассмотрены как механизмы, присущие к некоторой призабойной зоне скважин и приводящие к резкому аномальному уменьшению дебита скважин. Обычно предполагается, что тонкие частицы в среде с крупными порами не отлагаются. Имея в виду это предположение эксперименты проводились в искусственной пористой среде, сложенной из песка со средними диаметрами зерен от 840 до 2000 μm с суспензиями CaCO_3 в воде, где средний размер частиц был в пределах 8,0 μm . Эксперименты осуществлялись в две серии: в первой первоначально в «чистую» колонку закачивалась «грязная» жидкость, а во второй – наоборот в насыщенной с «грязной» жидкостью колонку закачали «чистую» жидкость.

Уравнение баланса для частиц имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon c + \epsilon_0 \sigma) + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

где ϵ , ϵ_0 – текущая и первоначальная пористость среды, c – концентрация частиц в жидкости, σ – объем частиц, осажденных в единице

объема пор среды, u – скорость потока смеси, x – расстояние вдоль образца.

Для описания кинетики осаждения частиц использовано уравнение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \beta c, \quad (1.2)$$

где β – постоянная, соответствующая поверхностному осаждению частиц.

Используя $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \sigma)$ в (1.1) получим

$$\varepsilon_0(1 - \sigma) \frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon_0(1 - c) \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Предполагая $c, \sigma \ll 1$ из (1.3) получим

$$\varepsilon_0 \frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Отмечено хорошее совпадение экспериментальных результатов с теоретическими данными, полученными на основе (1.4).

В [191] предполагается, что имеется два класса в темпе изменения деградации проницаемости пористой среды за счет осаждения частиц: 1) осаждение частиц, и следовательно уменьшение проницаемости локализовано в группах, растущих ортогонально к осредненному локальному направлению движения жидкости, 2) деградация проницаемости происходит в полосках, параллельных локальному, осредненному направлению движения жидкости. Эти полоски пока развиваются не оказывают существенного влияния на общее изменение проницаемости. В работе анализируется, как различные условия течения, такие как постоянный расход, постоянное давление влияют на процесс осаждения частиц. Установлено, что режим с постоянным давлением по сравнению с режимом с постоянным расходом является более щадящим в смысле уменьшения проницаемости. Основные выводы по работе получены на основе численного моделирования на простом образце по миграции и осаждению частиц.

Пусть c – массовая концентрация взвешенных частиц, s – концентрация осажденных частиц, v – средняя скорость движения суспензии в пористой среде (скорость фильтрации), ε – пористость среды, D_1 – продольный коэффициент дисперсии, D_2 – поперечный коэффициент дисперсии. Тогда общее уравнение переноса вещества в пористой среде может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(c + s) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \nabla c = D_1 \Delta c + D_2 \Delta c. \quad (1.5)$$

В принципе, уравнение (1.5) справедливо в случае, когда проницаемость не изменяется в процессе переноса вещества и движения жидкости. Однако в работе предполагается, что это уравнение справедливо и в случае изменения проницаемости. При этом предполагается, что характерное время изменения проницаемости гораздо больше характерного времени диффузии и конвекции. Полученные результаты подтверждают данное предположение. В процессе прокачки жидкости в нескольких единицах объема пор характерное время конвекции имеет порядок $O(1)$. Характерное время же изменения проницаемости за счет осаждения частиц имеет порядок – сотни и тысячи от объема прокачки в долях объема пор. К уравнению (1.5) должно быть добавлено конституционное уравнение, определяющее процесс осаждения частиц

$$\frac{\partial s}{\partial t} + R(\epsilon, v, c, s) = 0, \quad (1.6)$$

где $v = |v|$, R – функция темпа осаждения частиц.

Скорость фильтрации определяется на основе закона Дарси

$$v = -\frac{k_{np}}{\mu} \nabla p, \quad (1.7)$$

где k_{np} – проницаемость, μ – вязкость жидкости, p – давление.

Функция R принимается в виде

$$R(\epsilon, v, c, s) = \frac{v_p}{l(\phi, v, s)} c, \quad (1.8)$$

где $l(\phi, v, s)$ – характерный масштаб длины, описывает среднюю дистанцию, которую частицы преодолевают прежде чем осаждаются, $v_p = v/\phi$ – средняя скорость движения жидкости в порах (поровая скорость). Отношение l/v_p определяет «времени жизни» движущихся частиц.

Проницаемость изменяется как функция пористости

$$k_{np} = a\epsilon^m, \quad a, m = \text{const}. \quad (1.9)$$

Вход твердых частиц в пористую среду составляет основу многих технологических процессов нефтегазодобычи. В частности, глинистые растворы, используемые в процессе бурения нефтяных и газовых скважин, могут образовать корку на стенке скважины и поступать в приствольную часть и мигрировать по пласту. Такое явление довольно часто возникает и при заводнении нефтяных и газовых залежей. Поступающие вместе с водой различные частицы могут образовать пробку на забое скважин, поступать в пласт и дальше

продвигаться в глубь пласта. В любом случае внедрение и осаждение частиц в пласте приводит к изменению структуры порового пространства, и следовательно, уменьшению проницаемости и пористости. В свою очередь, это приводит к уменьшению продуктивности добывающих скважин и приемистости нагнетательных скважин. Вопросам математического моделирования образования слоя частиц на поверхности пористой среды у входа к ней посвящена работа [108]. Для этого в работе сначала дается определение и идентификация соответствующих механизмов, вносящих вклад образованию корки и осаждению частиц в пористой среде. Затем с целью получения количественной оценки указанных механизмов используя фундаментальные принципы сохранения, составлена соответствующая математическая модель, состоящая из системы дифференциальных уравнений в частных производных. Чтобы получить аналитические выражения, предсказывающие толщину корки как функцию от концентрации твердых частиц, объемов закачки жидкости за единицу времени (темпа закачки) и времени, система уравнений осреднена. Теоретические оценки сравнены с результатами экспериментальных данных других авторов и получено хорошее их соответствие.

Проведенные ранее исследования показали, что в фильтрационной корке и в самом фильтре пористость уменьшается во времени, а потери давления, наоборот, увеличиваются во времени. Кроме того, выход фильтрата и толщина корки при постоянном перепаде давления являются параболическими функциями времени. Несмотря на большое количество исследований по образованию корки и осаждению частиц, только впервые, по-видимому, в [108] использован подход, основанный на осреднении уравнений по толщине корки. В работе получено выражение для образования корки путем осреднения уравнений сохранения массы для твердых частиц и жидкости по толщине пласта.

Из приведенного выше краткого обзора видно, что подходы к моделированию переноса вещества в пористой среде в большинстве своем основываются на использовании уравнений баланса вещества, конституционных соотношений, выражающих динамику осаждения (или сорбции в задачах сорбционного переноса веществ в пористой среде), а также обобщенного закона Дарси. В задачах сорбционного переноса обычно предполагается, что сорбция частиц на поверхности скелета пористой среды не изменяет структуру порового про-

странства и следовательно проницаемость и пористость среды не изменяются. В данном случае обычно нет необходимости использования закона Дарси. Из приведенного обзора также видно, что задачи в основном рассматривались в одномерной постановке. Многомерные задачи, когда гидродинамическая дисперсия в различных направлениях протекает с различной интенсивностью, исследовались мало. Кроме того, задачи многомерной колматационно-суффозионной фильтрации на основе модели [13, 38, 66, 132] не исследовались до настоящего времени. Помимо этого, как показано в [107, 134, 160, 187], наличие зон с плохой проницаемостью в макроскопически неоднородных средах существенно влияет на процессы движения жидкости и переноса вещества. Как правило, в этих зонах жидкость малоподвижна или неподвижна, что позволяет трактовать эти зоны как застойные. При фильтрации жидкости с взвешенными частицами в таких средах движение происходит обычно в высокопроницаемых зонах. Однако, наличие зон с неподвижной жидкостью оказывает существенное влияние на процессы переноса вещества, т.к. происходит диффузионный перенос вещества из зон с подвижной жидкостью в зоны с неподвижной жидкостью. Такие вопросы для задач колматационно-суффозионной фильтрации до сих пор не исследовались.

1.2. Двухзонный подход в процессах переноса веществ в пористой среде

Ниже дадим краткий обзор исследований, посвященных учету неоднородной структуры порового пространства, а именно, наличию зон с подвижной жидкостью. Обзор не претендует на полноту, но даст достаточное обоснование необходимости и важности учета неподвижных зон при исследовании процессов переноса в пористых средах.

Работы в данном направлении начаты после опубликования работы [107]. Предположение о существовании зон с неподвижной жидкостью оказались исключительно полезной для объяснения ряда аномальных явлений, наблюдаемых в процессе переноса веществ в пористой среде. Чтобы раскрыть сущность сказанного, ниже приведем краткий обзор тенденции развития исследований по изучению роли зоны с неподвижной жидкостью.

Для описания процессов переноса веществ в пористых средах и грунтах обычно используется классическое уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (1.10)$$

где c — массовая или объемная концентрация вещества, D — коэффициент дисперсии, m^2/c , v — скорость движения жидкости — истинная физическая (поровая) скорость, которая выражается через скорость фильтрации w как $v = \frac{w}{\theta}$, θ — насыщенность среды движущейся жидкостью, t — время, x — линейная координата.

Когда используется уравнение (1.10) никаких предположений относительно физического или химического взаимодействия жидкости с пористой средой не делается. Однако, для многих жидкостей, особенно с химическими добавками, это предположение не всегда справедливо. Взвешенные в жидкости частицы или растворенные вещества могут адсорбироваться или десорбироваться, часть пористой среды может быть застойной зоной и не участвовать в процессе фильтрации. Эти явления ограничивают использование (1.10). В качестве одного из обобщений уравнения (1.10) предложено учитывать наличие зоны с неподвижной жидкостью [107]. В этой работе показано, что асимметрическое поведение кривых вытеснения может быть объяснено наличием зон с неподвижной жидкостью. Аналогичный подход был использован в [187], где описан процесс адсорбционного переноса химических веществ в среде с зоной неподвижной жидкости. В [120] экспериментально изучается влияние неподвижной зоны, образованной наличием аэрированной части порового объема среды. На основе экспериментальных данных показана возможность использования модели [107] и оценены параметры этой модели. Отмечается, что наличие зоны с неподвижной жидкостью (мертвые зоны) не является единственно возможной причиной асимметрии кривых вытеснения (КВ). Капиллярные модели с косым распределением скоростей движения также показывают асимметрию КВ.

Уравнения переноса веществ при наличии мертвых зон может быть в одномерном случае (полубесконечная среда) написаны так:

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \theta_m D \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - v \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (1.11)$$

$$\theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \alpha (c_m - c_{im}), \quad (1.12)$$

где индексы m , im соответствуют зонам с подвижной и неподвижной жидкости, α – диффузионный массообменный коэффициент.

В модели [187] в уравнениях (1.11), (1.12) дополнительно учитываются сорбционные явления. Для полубесконечной среды начальные и граничные условия для (1.10), (1.11) могут быть заданы в виде

$$\left(\nu c_m - D \frac{\partial c_m}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \begin{cases} \nu c_0 & \text{при } 0 < t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1, \end{cases}$$

$$c_m(t, \infty) = 0,$$

$$c_m(0, x) = c_{im}(0, x) = 0,$$

где c_0 – входная постоянная концентрация, t_1 – время, в течение которого подается концентрированная жидкость на границе $x=0$.

В [94] показано, что в агрегированных средах существует бимодальное распределение размеров пор: с большими порами между агрегатов и малыми порами в самих агрегатах. Движение жидкости и перемешивание веществ имеет доминирующее значение в больших порах, а поры в агрегатах действуют как стоки или источники.

В [113] показано, что условия неполной насыщенности пористой среды приводит к бимодальному распределению пор даже для однородных сред. КВ и концентрационные профили в колонне могут быть смоделированы при предположениях о движении жидкости в подвижной зоне с диффузией вещества в направлении зоны с неподвижной жидкостью.

В [165] КВ для ^{36}Cl и $^3\text{H}_2\text{O}$ в пористой среде с агрегатами и без агрегатов были измерены в диапазоне скоростей движения (поровая скорость) от 2 до 96 см/час. Эти КВ были использованы для установления справедливости двух концептуальных моделей переноса вещества, в которых поровая жидкость разделена на меж- и внутри-агрегатные зоны. В межагрегатной зоне предполагается осуществление конвективно-дисперсионного переноса, в то время как интраагрегатная зона действует как источник/сток для переноса вещества. Интенсивность переноса вещества между двумя зонами описана либо вторым законом диффузии Фика (модель I), либо принимается пропорциональной разности концентраций в двух зонах (модель II). Вычисленные по результатам модельного описания и физические КВ хорошо согласуются для обеих моделей. Значения потока массопереноса в модели II зависят от радиуса агрегатов, времени и скорости движения жидкости. Условия, при которых диффузия вещества

внутри агрегатов приводит к хвостообразованию или асимметрии в измеренных КВ (в условиях насыщенного течения), были определены из анализа чувствительности используя модель I. Для некоторых радиусов агрегатов, скоростей течения, источник/сток эффекты агрегатов могут быть включены в коэффициент дисперсии. Такой подход был использован для описания измеренных КВ.

В работе [153] КВ катиона $^{45}\text{Ca}^{2+}$, аниона $^{36}\text{Cl}^-$ и $^3\text{H}_2\text{O}$ были измерены при смешивающемся вытеснении через водонасыщенный грунт с агрегатами из Оксисола. Две концептуальные модели были использованы для описания полученных КВ, в частности асимметрию и хвостообразование, вызванное кажущейся неравновесной ситуацией в пористой среде. В обеих моделях обменные процессы в одних местах среды предполагались мгновенными, в то время как в других местах интенсивность обмена изотопов была либо диффузионно-контролируемый процесс (модель I), либо обратимый кинетический процесс первого порядка (модель II). Обмен изотопов в обеих моделях описан с линейной изотермой. Показано, что обе модели математически эквивалентны по отношению к выведенным КВ.

Авторы [118] показали возможность применения решения двухместных/двухзонных моделей переноса при анализе одновременной сорбции и деградаций пестицидов в почвах. Проводились эксперименты по вытеснению $^3\text{H}_2\text{O}$, Cl и атразина в образцах почвы в стационарных условиях для двух скоростей течения и двух концентраций веществ. Экспериментальные данные использовались для того, чтобы проверить возможность использования аналитических решений, а также методы оценки параметров моделей. Для каждой скорости течения оценена возможность использования лабораторных данных по равновесной сорбции для описания сорбционных явлений в условиях течения. Обсуждены также преимущества и недостатки моделей и предложения по дальнейшим исследованиям.

Экспериментальному исследованию переноса вещества в пористых средах посвящена также работа [95]. Эксперименты проводились в среде с тонким песком в присутствии неподвижной жидкости и в условиях неполного насыщения для различных режимов течения. Рассмотрены стационарные и нестационарные режимы течения, однако в каждом режиме средняя поровая скорость и содержание воды были одинаковыми. В стационарных условиях течения получено строгое влияние присутствия неподвижной воды на распределение

концентрации вещества, но в нестационарных условиях такое явное влияние не установлено.

В [174] была предложена модифицированная двухзонная модель, учитывающая химическую и физическую неравновесность вещества в почвах. Химическая неравновесность описывается через двухместную модель второго порядка, в то время как физическая неравновесность вводится через двухзонную модель (подвижная — неподвижная зоны). Справедливость модели была проверена с помощью экспериментов по смешивающемуся вытеснению атразина в глинистой почве Шаркей (очень тонкая, монтмориллонитовая, некислая глина) для различных режимов течения, размеров агрегатов, длин колон, прерывания течения и др. Были оценены две модельные формулировки: Модель I была известной двухфазной моделью, учитывающая наличие неподвижной зоны. В модели II предполагается, что скорость реакции вещества с почвой в каждой зоне является функцией общего числа свободных мест почвы. Таким образом исчезает необходимость введения коэффициента f , учитывающего долю насыщения подвижной водой, трудного для измерений. Таким образом, количество вещества, задерживаемого каждой из зон является только функцией коэффициента реакции. Модель I с $f = F$, $F = \theta_m / \theta$, θ_m — насыщенность подвижной водой, θ — общая насыщенность водой, дает необходимую оценку переноса атразина. Более того, оценки на базе модели I с $f = \theta$ и $f = 1$ показали, что значение физической неравновесности были зависимы от экспериментальных условий, таких как размеры агрегатов, скорости течения и др. Используя метод наименьших квадратов показано, что модель II наилучшим образом описывает экспериментальные данные. Сделан вывод, что модель II, который включает небольшое количество параметров, является предпочтительным, чем модель I в смысле описания процессов переноса веществ.

Такое обобщение модели является очень продуктивным. Поэтому ниже более подробно рассмотрим подходы, использованные при таком обобщении. Сначала приведем модель [187], считающейся обобщением модели [107]. Как уже отмечалось выше, при использовании двухфазного подхода жидкость в пористой среде подразделяется на подвижную и неподвижную зоны. Соответствующие зоны пористой среды называются динамическими и застойными зонами. В динамической части вещество взаимодействует с поро-

дой только динамической зоны, а в застойной – только с породой застойной зоны.

В динамической зоне перенос активной примеси в одномерном случае описывается уравнением

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + f\rho \frac{\partial s_m}{\partial t} = \theta_m D \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - v\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x} - \alpha(c_m - c_{im}), \quad (1.13)$$

$$\theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} + (1-f)\rho \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = \alpha(c_m - c_{im}), \quad (1.14)$$

где s_m, s_{im} – количество вещества, сорбированного в динамической и застойной зонах мг/кг.

В (1.13), (1.14) предполагается, что как в подвижной, так и в неподвижной зонах происходит химическое взаимодействие вещества с породой среды, т.е. адсорбция и десорбция. Ниже приводим двухместный неравновесный подход второго порядка для описания сорбционных процессов. Он основан на введении понятия максимальной адсорбции (адсорбционной емкости), что представляет собой максимальное (общее) место для адсорбции на поверхности породы среды. Это – свойство каждой среды, таким образом он характеризует ее внутреннее поведение и как правило считается постоянной величиной. Такой подход в [187] не был использован, а предложен в [например, 119, 170, 175].

Приближение второго порядка учитывает две обратимые кинетические реакции и одну необратимую [148]. В соответствии с этим приближением скорость реакции не является только функцией концентрации вещества, но и числа возможных мест на поверхности матрицы, задерживающих вещество. В процессе задерживания вещества на поверхности матрицы, концентрация свободных, т.е. не занятых веществом мест, которая обозначается через Φ , мг/кг, стремится к нулю. Тем временем, концентрация задержанного вещества матрицей почвы достигает общей емкости или максимальной сорбции, $s_{\max}$.

Когда учитывается приближение второго порядка в двухзонной модели реакция в динамической зоне описывается уравнениями

$$\frac{\partial s_c^m}{\partial t} = k_1 \theta_m c_{im} \Phi_m - k_2 s_c^m, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial s_k^m}{\partial t} = k_3 \theta_m c_m \Phi_m - k_4 s_k^m - k_5 s_k^{im}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial s_i^m}{\partial t} = k_3 s_k^m. \quad (1.17)$$

Соответствующие кинетики реакции в неподвижной зоне даются уравнениями

$$\frac{\partial s_e}{\partial t} = k_1 \theta_{im} c_{im} \varphi_{im} - k_2 s_e^{im}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial s_k^{im}}{\partial t} = k_3 \theta_{im} c_{im} \varphi_{im} - k_4 s_k^{im} - k_5 s_k^{im}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial s_k^{im}}{\partial t} = k_5 s_k^{im}. \quad (1.20)$$

В предыдущих уравнениях s_e^m , s_k^m — величины обратимо адсорбированного вещества в динамической зоне, s_e^m — величина необратимо адсорбированного вещества в динамической зоне, s_e^{im} — величины обратимо адсорбированного вещества в неподвижной зоне, s_k^{im} — величина необратимо адсорбированного вещества в неподвижной зоне, k_1 , k_3 — коэффициенты способствующие реакции, k_2 , k_4 — коэффициенты, тормозящие реакции, k_5 — скорость необратимой адсорбции, φ_m , φ_{im} (мг/кг) — количество свободных мест в динамической и неподвижной зонах.

Справедливы следующие соотношения

$$\varphi_m = s_{max}^m - (s_e^m + s_k^m) = f s_{max} - (s_e^m + s_k^m), \quad (1.21)$$

$$\varphi_{im} = s_{max}^{im} - (s_e^{im} + s_k^{im}) = (1 - f) s_{max} - (s_e^{im} + s_k^{im}),$$

где s_{max}^m , s_{max}^{im} — общее количество мест адсорбции в динамической и неподвижной зонах. Очевидно, что

$$s_{max} = s_{max}^m + s_{max}^{im} = f s_{max} + (1 - f) s_{max},$$

где f представляет собой долю максимальных мест адсорбции в динамической зоне в общем месте максимальной адсорбции, т.е. $f = s_{max}^m / s_{max}$.

Если в (1.15) и (1.18) k_1 и k_2 очень большие, довольно быстро достигается квазиравновесное состояние и эти уравнения приводятся к

$$s_e^m = K_e \theta_m c_{im} \varphi_m, \quad s_e^{im} = K_e \theta_{im} c_{im} \varphi_{im},$$

где $K_e = k_1 / k_2$ — константа равновесной адсорбции. В этих условиях модель становится «равновесно-кинетической», которая учитывает эффекты необратимой адсорбции.

В модели [174] указанный выше подход второго порядка модифицируется путем рассмотрения динамической и застойной зон как один континуум. Задержка вещества может происходить как в дина-

мической, так и в застойной зоне, причем конкурентно, до тех пор, пока равновесное состояние не достигается, т.е. все свободные места не заполняются. Основное допущение в модифицированной модели заключается в том, что скорости реакции в динамической и застойной зонах являются функциями общих свободных мест в почве. Другими словами в уравнениях (1.15), (1.16), (1.18), (1.19) не делаются никаких отличий относительно свободных мест в динамической и застойной зонах, так что исчезает необходимость на использование долевого коэффициента f .

Учитывая это, уравнения переноса вещества (1.13), (1.14) могут быть записаны так

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \rho \frac{\partial s_m}{\partial t} = \theta_m D \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - v \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x} - \alpha(c_m - c_{im}), \quad (1.22)$$

$$\theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} + \rho \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = \alpha(c_m - c_{im}). \quad (1.23)$$

Пусть φ — общее количество свободных для реакции мест. В динамической зоне уравнения реакции в «равновесно-кинетическом» подходе записываются в следующем виде

$$s_e^m = K_e \theta_m c_m \varphi, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial s_k^m}{\partial t} = k_3 \theta_m c_m \varphi - k_4 s_k^m - k_5 s_k^m, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial s_i^m}{\partial t} = k_5 s_k^m. \quad (1.26)$$

Для застойной зоны соответствующие уравнения имеют вид

$$s_e^{im} = K_e \theta_{im} c_{im} \varphi, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial s_k^{im}}{\partial t} = k_3 \theta_{im} c_{im} \varphi - k_4 s_k^{im} - k_5 s_k^{im}, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial s_i^{im}}{\partial t} = k_5 s_k^{im}, \quad (1.29)$$

В (1.24) – (1.29) максимальная адсорбционная емкость, s_{max} , с общими свободными местами связан так

$$s_{max} = \varphi + s_e^m + s_k^m + s_e^{im} + s_k^{im}.$$

Уравнения (1.22) – (1.29) представляют модифицированную модель. Для постановки задач для этой модели в конечной одномерной среде $[0, L]$ могут быть заданы следующие начальные и граничные условия

$$c_m = c_{im} = 0, \quad t = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$s_e^m = s_n^m = s_i^m = s_e^{im} = s_k^{im} = s_i^{im} = 0, \quad t = 0, \quad 0 < x < L_e,$$

$$vc_0 = -\theta_m D \frac{\partial c_m}{\partial x} + vc_m, \quad x = 0, \quad t \leq t_p,$$

$$0 = -\theta_m D \frac{\partial c_m}{\partial x} + vc_m, \quad x = 0, \quad t > t_p,$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial x} = 0, \quad x = L_e, \quad t > 0,$$

где t_p — продолжительность времени, в течение которого продолжается подача вещества через границу $x = 0$, c_0 — подаваемая концентрация вещества.

Методам решения уравнений переноса веществ в двухзонной пористой среде посвящена работа [106]. Для решения системы уравнений, состоящую из уравнения баланса и уравнения массообмена ((1.21), (1.22) или (1.13), (1.14)) могут быть применены различные методы, в частности, 1) непосредственное решение системы; 2) дискретизация уравнения кинетики и подстановки алгебраического решения в уравнение баланса; 3) аналитическое решение кинетического уравнения и подстановка его в уравнение баланса, т.е. получение интегро-дифференциального уравнения; 4) использование преобразования Лапласа. Сделан вывод, что метод алгебраической подстановки является очень эффективным методом. Метод интегрально-дифференциальных уравнений также является эффективным после метода алгебраической подстановки, однако требуется очень мелкий шаг по времени, когда коэффициент массопереноса является большим.

В [122] обсуждается поведение параметров $\beta = \theta_m/\theta$ и коэффициента массопереноса между подвижной и неподвижной зонами α . Анализируя целый ряд опубликованных работ установлено, что α линейно зависит от скорости движения жидкости v . Для того, чтобы развивать подход, справедливый для большого класса пористых сред, масштаб времени переноса вещества сравнен с масштабом массопереноса $1/\alpha$. Было найдено, что локальный адвекционный масштаб времени наилучшим образом характеризует масштаб времени массопереноса. Для агрегированных насыщенных пористых сред найдено, что β либо является константой, либо линейно изменяется от v , а для ненасыщенных сред β — либо константа, либо увеличивается с увеличением насыщенности.

Многочисленные исследования показывают, что простой коэффициент скорости сорбции недостаточно хорошо описывает нерав-

новесную сорбцию и перенос органических веществ в почвах [99]. Чтобы исследовать эффект неоднородности скорости сорбции (вообще сорбционных мест) на перенос вещества в работе предложена модель, учитывающая гамма-распределение и скорости сорбции и параметра разделения. Модель проверена проведением многочисленных экспериментов на колонках в различных масштабах времени используя атразин. Полученные асимметрические поведения, сдвиг влево в КВ с увеличением скорости течения (с 0,51 до 21,3 см/час) или уменьшением длины колонны (от 15,5 до 6,0 см) удачно описаны предложенной моделью, причем адсорбционные параметры определены на основе независимых экспериментов. Показано также, экспериментальные данные плохо описываются ранее известными моделями: 1) двухместной первого порядка сорбции; 2) двухместная со сферической диффузией.

Ненасыщенность пористой среды также приводит к ряду аномальных явлений [156]. Чтобы исследовать это явление в работе экспериментально исследовано содержание воды в среде на перенос $NaCl$ в стационарных условиях. Насыщенность водой была от 15% до полного насыщения. Эксперименты проводились на колонке длиной 25 см, заполненной гомогенным песком. Результаты показывают, что при переносе в ненасыщенных средах вариация скорости более выражена, а перемещение вещества происходит медленнее. В результате КВ для $NaCl$ подходят к концу колонны быстрее, проявляя более выраженное хвостообразование по мере уменьшения средней насыщенности водой. Все это показывает, что в условиях экспериментов процессы переноса вещества при малых водонасыщенностях не подчиняется закону Фика. При этом классическое конвективно-дисперсионное уравнение не способно адекватно описать процессы переноса, известная модель «подвижная-неподвижная жидкость» была использована для описания экспериментальных данных. Результаты показали, что при малых водонасыщенностях среда проявляет более высокую фракцию неподвижной воды, более высокую дисперсию и более медленный массоперенос между подвижной и неподвижной зонами. Следовательно дисперсивность среды является функцией не только свойств среды, но и водосодержания.

В подходе, использующем «подвижная-неподвижная» жидкости, т.е. в двухзонном подходе, параметр массообмена α , как правило, считается константой. Однако многочисленные данные показывают,

что этот коэффициент не является зачастую постоянным. В [149] на основе многочисленных данных показано, что коэффициент массообмена зависит от системных параметров, таких как поровая скорость жидкости, масштаба длины, ретардационный коэффициент, размер агрегатов и частиц и др., установлена зависимость α от времени пребывания вещества в пористой среде. Зависимость адекватно описывает ранее определенные в полевых условиях значения α .

Как видно из приведенного краткого обзора, наличие застойных зон в пористой среде в корне меняет характеристики переноса вещества. Данный подход является весьма продуктивным для объяснения различных аномальных явлений, таких как хвостообарзование в КВ, преждевременный прорыв КВ к выходу из пласта, массообменные явления между подвижной и неподвижной зонами в пористой среде и др. Анализ источников показывает, что этот подход в основном использован при анализе переноса растворенных в жидкости веществ. Для процессов переноса взвешенных в жидкости твердых веществ, таких как тонкие пылинки, песчинки, глины и т.д. данный подход не был использован. Далее, в последующих параграфах, мы обобщим модели колматационно-суффозионной фильтрации в средах, часть из которых является застойной для движения жидкости. Жидкость с взвешенными твердыми частицами (суспензии) двигается в другой части среды. Между подвижной и неподвижной (застойной) зонами среды происходит диффузионный обмен твердыми частицами. Как будет показано далее, наличие застойных зон приводит к существенному изменению характеристик переноса. Массообмен между подвижной и неподвижной зонами имеет ряд особенностей, определяемых параметрами переноса и свойств среды.

1.3. Поперечная конвективная диффузия

Для исследований намечалось решение двумерных задач колматационно-суффозионной фильтрации. В связи с этим возникает вопрос использования коэффициента поперечной конвективной диффузии в уравнениях переноса наряду с коэффициентом продольной диффузии. Чтобы оценить относительное влияние коэффициента поперечной диффузии $D_{\perp}$ на характеристики переноса необходимо оценить ее роль по сравнению с коэффициентом продольной диффузии $D_{\parallel}$.

Коэффициент продольной диффузии в задачах переноса веществ в пористой среде определялся многими исследователями на основе различных экспериментов. Все эти эксперименты подтверждают основные положения теории переноса вещества в пористой среде и фундаментальную зависимость $D_1 = \lambda_1 u$, где λ_1 — продольный параметр рассеивания, u — средняя скорость движения смеси в порах.

По определению коэффициента поперечной диффузии D_2 также проводились многочисленные экспериментальные исследования. Необходимость проведения этих исследований в первую очередь продиктована интересом к исследованию перемешивания неоднородных жидкостей в пористой среде. Но и для перемешивания однородных жидкостей эти исследования имеют немаловажную роль. Основное внимание в исследованиях было уделено на влияние скорости течения жидкости, размеров частиц на значение D_2 . На основе анализа и обобщения результатов исследований в [26] относительно влияния u на D_2 сделаны следующие выводы.

1. Скорость движения жидкости очень мала, т.е. $du < D_0$, где d — средний диаметр частиц, D_0 — коэффициент молекулярной диффузии. В этом диапазоне движения конвективная диффузия незначительна и преобладающую роль в механизме перемешивания играет молекулярная диффузия. В опытах М.И.Миркина [26] этой области движения соответствует $du/D_0 < 0,51$, что соответствует скорости $u < 2 \cdot 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-6}$ м/с. В указанной области D_2/D_0 меняется в интервале 0,57 — 0,60, что позволяет отнести влияние D_2 к влиянию молекулярной диффузии D_0 с учетом коэффициента извилистости. Отмеченное означает, что при $du/D_0 < 0,51$ поперечная диффузия не зависит от скорости течения и полностью определяется молекулярной диффузией.

2. Скорость движения жидкости мала ($du \approx D_0$), но конвективный перенос уже играет заметную роль в механизме перемешивания. И в данном случае коэффициент поперечной дисперсии определяется порядком молекулярной диффузии, тем не менее в механизме перемешивания может превалировать тот или иной фактор в зависимости от значения вязкости жидкостей, диаметра и распределения частиц по размерам в упаковке, и наконец, величины скорости движения жидкости. Границы этой области задаются интервалом значений числа Пекле $0,51 < Pe < 50 \div 55$, $Pe = ud/D_0$.

3. Скорость движения жидкости значительна, $du > D_0$, однако конвективная диффузия все еще связана с молекулярным перемешиванием. В этой области конвективный перенос уже играет существенную роль и значения коэффициента поперечной дисперсии D_2 на порядок выше значения D_0 . Границей этой области является $Pe = 10^2$.

4. Скорость еще более значительна, $du > D_0$, однако закон Дарси не нарушается. В этом режиме молекулярная диффузия не влияет на поперечную дисперсию, которая определяется только конвективным переносом. Эта область называется областью чистой конвективной диффузии и является областью предельной автомодельности по числу Рейнольдса и, следовательно, параметр рассеивания является постоянным $\lambda_2 = D_2/u = const$. Этой области соответствуют $Pe > 10^2$.

Экспериментальные результаты представлены в виде зависимости

$$\frac{D_2}{\nu} = c Re^n, \quad (1.30)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости $c = c(Pr)$ ($Pr = \nu/D_0$ — число Прандтля), n — эмпирические параметры.

Заметим, что в области чистой конвективной диффузии ($Pe > 10^2$) зависимость (1) является линейной, т.е. $n = 1$. В экспериментах М.И.Миркина [26] в области 4 был определен параметр рассеивания $\lambda_2 = D_2/u$, который для опытов с диаметрами частиц $d_1 = 2,0 \cdot 10^{-4}$, $d_2 = 3,15 \cdot 10^{-4}$, $d_3 = 4,0 \cdot 10^{-4}$ м оказался равным $2,5 \cdot 10^{-5}$, $2,7 \cdot 10^{-5}$, $3,2 \cdot 10^{-5}$ м соответственно. Эксперименты также показали, что коэффициент c определяется размером и, возможно, структурой фракции (форма частиц и их распределение). При этом результаты показывают, что по мере роста d коэффициент c снижается. Величина же n , по видимому, определяется параметрами жидкостей, т.е. n является функцией числа Прандтля $Pr = \nu/D_0$.

Влияние размера частиц на величину коэффициента D_2 исследовалось также многими авторами, но представить универсальную зависимость не удалось. Отмечается тенденция увеличения D_2 в зависимости от увеличения d . Однако есть данные, утверждающие совершенно противоположный вывод: с ростом размера частиц коэффициент D_2 уменьшается. В опытах М.И.Миркина [26] обнаружено увеличение D_2 с ростом размера частиц.

Определенный интерес представляет определение соотношения D_1/D_2 . Данный вопрос исследовался тоже многими исследователя-

ми, в частности [7], где моделировался мгновенный точечный источник динамически нейтральной примеси. Результаты экспериментов подтвердили наличие зависимостей $D_1 = \lambda_1 u$, $D_2 = \lambda_2 u$ в диапазоне течений, подчиняющихся закону Дарси. При этом получены следующие значения параметров рассеивания: $\lambda_1 = 1,27 \cdot 10^{-3}$ м, $\lambda_2 = 8,9 \cdot 10^{-5}$ м, а отношение $\lambda_1/\lambda_2 = 14,3$. Вообще, отношение λ_1/λ_2 изменяется в довольно широких пределах. Есть экспериментальные данные, где это отношение достигает значений $50 \div 60$.

Как видно из представленного материала поперечная дисперсия (диффузия) в пористой среде может иметь существенное влияние на процесс переноса вещества. Отмеченные значения D_1 и D_2 будут использованы в следующем параграфе при решении конкретных задач.

1.4. Кольматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью

Здесь дадим постановку и решение задачи кольматационно-суффозионной фильтрации в среде, состоящей из двух зон, в одной из которых жидкость подвижна, а в другой – неподвижна. Задача рассматривается в двумерной постановке [19, 22, 23, 24, 50, 51, 52, 53, 62, 137].

Пусть область исследования задачи состоит из двух частей: $R^+ \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ и $R^- \{0 \leq x < \infty, -\infty < y \leq 0\}$ (Рис.1.1). В области R^+ жидкость подвижна, а в R^- – неподвижна. Первоначально области R^+ и R^- заполнены жидкостью без частиц. В область R^+ начиная с $t > 0$ через границу $x = 0$, $0 \leq y \leq h$ поступает жидкость с концентрацией твердых частиц $c_0 = \text{const}$. Движение жидкости в R^+ осуществляется постоянной скоростью u . Продольный и поперечный коэффициенты диффузии, как и прежде, обозначим через D_1 и D_2 , соответственно.



Рис.1.1. Схема кольматационно-суффозионного переноса вещества в двумерной области

Диффузионный перенос частиц осуществляется по классическому закону Фика

$$\vec{q} = -\mathbf{D} \nabla c, \quad (1.31)$$

где в общем случае тензор диффузии $\mathbf{D}$ для плоского переноса вещества имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix},$$

$\vec{q}$ – поток вещества, c – концентрация вещества.

Пусть направление движения вещества совпадает с главными осями, что дает $D_{11} = D_1$, $D_{12} = D_{21} = 0$, $D_{22} = D_2$, т.е.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда величины продольного и поперечного потока вещества выражаются как

$$q_x = -D_1 \frac{\partial c}{\partial x}, \quad q_y = -D_2 \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (1.32)$$

Верхняя граница области R^+ непроницаема для жидкости и частиц. Жидкость движется только в направлении x в области R^+ . В R^+ по мере продвижения взвешенных частиц в глубь области происходит их осаждение (кольматация), частичный их срыв из захваченного (осажденного) состояния и дальнейший перенос в другие поры (суффозия). Примем, что кинетика процесса кольматации и суффозии описывается уравнением, предложенным ранее в [13, 38] и использованным при решении конкретных задач [70, 142]. При этих предположениях процесс кольматационно-суффозионного переноса вещества в области R^+ с учетом (1.31), (1.32) можно описать уравнениями

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon) |\nabla p| - \omega_2 \varepsilon c, \quad (1.34)$$

где ε_0 , ε – первоначальная и текущая пористости, ω_1 , ω_2 – коэффициенты, характеризующие интенсивность суффозии и кольматации пор, $|\nabla p|$ – модуль градиента давления p , t – время.

В области R^- происходит только диффузионный перенос вещества. Учитывая плохую проницаемость этой области предположим,

что процесс переноса вещества происходит с некоторым эффективным коэффициентом диффузии D_3 , отличающимся от молекулярного коэффициента диффузии D_0 . Кроме того, в этой области поперечным коэффициентом диффузии, что характеризует перенос вещества в направлении x , пренебрегаем.

Тогда процесс переноса вещества в R^- можно описать обычным уравнением диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in R^-. \quad (1.35)$$

Движение жидкости в области R^+ происходит с постоянной скоростью u . Поскольку рассматривается движение неоднородной жидкости и пористость среды изменяется под влиянием кольтматационно-суффозионных эффектов в R^+ образуется неоднородное поле скорости фильтрации $w = u \cdot \varepsilon$, что в свою очередь создаст неоднородное поле давления p . Пусть справедлив обобщенный закон Дарси

$$\vec{w} = -K(\varepsilon) \nabla p, \quad (1.36)$$

где $K(\varepsilon)$ — коэффициент фильтрации.

Этот коэффициент может быть задан в виде линейной или нелинейной функции от пористости [13, 38, 66, 132]. В линейном случае принимается $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon$, $k_0 = \text{const}$, а из нелинейных зависимостей наибольшее распространение нашел закон Кармана-Козени $K(\varepsilon) = k_0 \varepsilon^3 / (1 - \varepsilon)^2$.

Заметим, что в линейном случае изменения $K(\varepsilon)$ из (1.36) получаем поле градиента давления $|\nabla p| = u/k_0$, а в случае использования закона Кармана-Козени имеем

$$|\nabla p| = \frac{u(1 - \varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^2}. \quad (1.37)$$

Представляя $K(\varepsilon) = k_{np} / \mu$, где k_{np} — проницаемость среды, μ — вязкость жидкости, зная поле пористости можно определить k_{np} , что в общем случае также является неоднородным полем. Отметим, что вязкость жидкости является постоянной величиной $\mu = \text{const}$. В общем случае вязкость смеси является функцией концентрации дисперсной фазы c . Наиболее простой случае для малых c описывается уравнением Эйнштейна $\mu = \mu_0(1 + 2,5c)$, где μ_0 — вязкость дисперсной фазы. Для простоты здесь такими зависимостями пренебрегаем.

Через общую границу областей R^+ и R^- происходит перенос массы вещества (частиц). В R^+ когда $x \rightarrow \infty$, и в R^- когда $y \rightarrow -\infty$ считаем, что потоки вещества отсутствуют. Это по сути дела означает, что

рассматривается такой начальный этап распространения примеси по пласту, когда концентрационные профили еще не достигают границу $x \rightarrow \infty$ в R^+ и $y \rightarrow -\infty$ в R^- . На общей границе областей R^+ и R^- , т.е. на $y = 0$, потребуем непрерывность изменения концентрации и потока вещества. При сформулированных условиях начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$c = 0 \text{ в } R^+ \cup R^- \text{ при } t = 0, \quad (1.38)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \text{ в } R^+ \text{ при } t = 0, \quad (1.39)$$

$$c = c_0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x = \infty, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad y = h, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1.42)$$

$$c|_{y=0} = c|_{y=0}, \quad (1.43)$$

$$D_2 \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} = D_3 \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad y = -\infty, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.45)$$

В данной постановке концентрация вещества в $R^+ \cup R^-$ является функцией $c = c(t, x, y)$.

Задача (1.33) – (1.45) решена методом конечных разностей. Несмотря на линейность уравнений (1.33), (1.35) даже при линеаризации (1.34) решение задачи одним из аналитических методов сопровождается рядом трудностей и, как правило, применение аналитических методов приводит к громоздким решениям, расчет характеристик по которым представляет собой нелегкую задачу. Для этого, построим сетку в области $R^+ \cup R^-$, $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \omega_{h_1 h_2 \tau}^+ \cup \omega_{h_1 h_2 \tau}^-$ где $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+ = \{(t_k, x_i, y_j) | t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = j h_2, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J}, \tau = T/K, h_1 = h/J\}$, $\omega_{h_1 h_2 \tau}^- = \{(t_k, x_i, y_j) | t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = -h_2 j, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J}, \tau = T/K\}$. В этой сетке: h_1 – шаг сетки по направлению x , h_2 – шаг сетки по направлению y в R^+ , h_2 – шаг сетки по направлению y в R^- , τ – шаг сетки по времени, T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс, K – количество интервалов сетки по t , J – количество интервалов сетки по y в R^+ .

На этой сетке аппроксимируем уравнения (1.33), (1.35) следующим образом

$$\frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{ij}^k}{0,5\tau} + u \frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} = D_1 \Lambda_1 c_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ c_{ij}^k + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1/2} - \varepsilon_{ij}^k}{0,5\tau},$$

$$i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = \overline{0, 1, \dots}, \quad (1.46)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} + u \frac{c_{ij}^{k+1} - c_{i-1,j}^{k+1}}{h_1} = D_1 \Lambda_1 c_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ c_{ij}^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau},$$

$$i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = \overline{0, 1, \dots}, \quad (1.47)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{ij}^k}{0,5\tau} = D_3 \Lambda_2^- c_{ij}^{k+1/2}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^- + 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1.48)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = D_2 \Lambda_2^- c_{ij}^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^- + 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1.49)$$

где

$$\Lambda_1 c_{ij}^k = \frac{c_{i-1,j}^k - 2c_{ij}^k + c_{i+1,j}^k}{h_1^2}, \quad \Lambda_2^+ c_{ij}^k = \frac{c_{i,j-1}^k - 2c_{ij}^k + c_{i,j+1}^k}{(h_2^+)^2},$$

$$\Lambda_2^- c_{ij}^k = \frac{c_{i,j-1}^k - 2c_{ij}^k + c_{i,j+1}^k}{(h_2^-)^2},$$

$c_{ij}^{k+1/2}$ — значения сеточной функции на половинном временном слое $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$.

Уравнение (1.34) на $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+$ аппроксимируем следующим образом

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{k+1/2} - \varepsilon_{ij}^k}{0,5\tau} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}) [\nabla p]_{ij}^k - \omega_2 \varepsilon_{ij}^k c_{ij}^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^-}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1.50)$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}) [\nabla p]_{ij}^{k+1/2} - \omega_2 \varepsilon_{ij}^{k+1/2} c_{ij}^{k+1/2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (1.51)$$

Начальные и граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$c_{ij}^0 = 0 \text{ в } \omega_{h_1 h_2 \tau}, \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_0 \text{ в } \omega_{h_1 h_2 \tau}^+, \quad (1.53)$$

$$c_{0j}^k = c_0, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.54)$$

$$c_{i,j}^k = c_{i-1,j}^k, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.55)$$

$$c_{i,j^+-1}^k = c_{i,j^+}^k, \quad i = \overline{0, 1, \dots}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.56)$$

$$c_{i,0}^k = c_{i,-0}^k, \quad i = \overline{0, 1, \dots}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.57)$$

$$D_2 \frac{c_{i,1}^k - c_{i,0}^k}{h_2^+} = D_3 \frac{c_{i,0}^k - c_{i,-1}^k}{h_2^-}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.58)$$

$$c_{i,j}^k = c_{i,j^+-1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.59)$$

где I, J^- — берутся достаточно большими, чтобы концентрационные профили не доходили до выбранных условных границ областей.

Уравнения (1.46), (1.47) приводятся к виду

$$A_1 c_{i-1,j}^{k+1/2} - B_1 c_{ij}^{k+1/2} + E_1 c_{i+1,j}^{k+1/2} = -F_{ij}^{(1)}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1.60)$$

$$A_2 c_{i,j-1}^{k+1} - B_2 c_{ij}^{k+1} + E_2 c_{i,j+1}^{k+1} = -F_{ij}^{(2)}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (1.61)$$

где

$$A_1 = 0,5\tau \left(\frac{D_1}{h_1^2} + \frac{u}{h_1} \right), \quad B_1 = 1 + 0,5\tau \left(\frac{2D_1}{h_1^2} + \frac{u}{h_1} \right), \quad E_1 = 0,5\tau \frac{D_1}{h_1^2},$$

$$F_{ij}^{(1)} = c_{ij}^k + 0,5\tau \frac{D_2}{(h_2^+)^2} (c_{i,j-1}^k - 2c_{ij}^k + c_{i,j+1}^k) + \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1/2} - \varepsilon_{ij}^k}{\varepsilon_0},$$

$$A_2 = 0,5\tau \left(\frac{D_2}{(h_2^+)^2} + \frac{u}{h_1} \right), \quad B_2 = 1 + 0,5\tau \left(\frac{2D_2}{(h_2^+)^2} + \frac{u}{h_1} \right), \quad E_2 = 0,5\tau \frac{D_2}{(h_2^+)^2},$$

$$F_{ij}^{(2)} = c_{ij}^{k+1/2} + 0,5\tau \frac{D_1}{h_1^2} (c_{i-1,j}^{k+1/2} - 2c_{ij}^{k+1/2} + c_{i+1,j}^{k+1/2}) + \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}}{\varepsilon_0}.$$

Уравнения (1.48), (1.49) приводятся также к виду

$$A_3 c_{i,j-1}^{k+1/2} - B_3 c_{ij}^{k+1/2} + E_3 c_{i,j+1}^{k+1/2} = -F_{ij}^{(3)}, \quad (1.62)$$

$$A_3 c_{i,j-1}^{k+1} - B_3 c_{ij}^{k+1} + E_3 c_{i,j+1}^{k+1} = -F_{ij}^{(4)}, \quad (1.63)$$

где

$$A_3 = 0,5\tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2}, \quad B_3 = 1 + \tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2}, \quad E_3 = 0,5\tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2},$$

$$F_{ij}^{(3)} = c_{ij}^k, \quad F_{ij}^{(4)} = c_{ij}^{k+1/2}.$$

Уравнения (1.58), (1.59) определены в $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+$, а (1.60), (1.61) — в $\omega_{h_1 h_2 \tau}^-$.

Из (1.37) можно получить поле градиентов давления

$$|\nabla p_{ij}^{k+1}| = \frac{u(1 - \varepsilon_{ij}^{k+1})^2}{k_0 (\varepsilon_{ij}^{k+1})^2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (1.64)$$

что используется при вычислении $\varepsilon_{ij}^{k+1/2}$ и ε_{ij}^{k+1} согласно (1.50), (1.51).

Поле проницаемости определяем из соотношения

$$k_{op,ij}^{k+1} = K(\varepsilon_{ij}^{k+1}) \cdot \mu, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}. \quad (1.65)$$

Устанавливается следующая последовательность расчета. Вычисляя по (1.64) $|\nabla p|_{ij}^k$ по (1.50) определяем $\varepsilon_{ij}^{k+1/2}$. Затем решаем (1.60), (1.62) и определяем $c_{ij}^{k+1/2}$. Определив поле градиента давления $|\nabla p|_{ij}^{k+1/2}$ согласно (1.64) (используя $k + 1/2$ вместо $k + 1$) и используя эти значения в (1.51) определяем ε_{ij}^{k+1} в ω_{h,h_2}^+ . Решая (1.61), (1.63) находим c_{ij}^{k+1} в ω_{h,h_2}^+ . Поле проницаемости определяется из (1.65).

Уравнения (1.60) и (1.61) решаются методом прогонки по направлениям i и j соответственно. Для этого используем следующие соотношения

$$c_{ij}^{k+1/2} = \alpha_i^{(1)} + \beta_i^{(1)} c_{i+1,j}^{k+1/2}, \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ - 1}, \quad (1.66)$$

$$c_{ij}^{k+1} = \alpha_j^{(2)} + \beta_j^{(2)} c_{i,j+1}^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{0, J^+ - 1}, \quad (1.67)$$

где $\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}, \alpha_j^{(2)}, \beta_j^{(2)}$ — прогоночные коэффициенты.

Для решения (1.62), (1.63) также применяется метод прогонки, но только по направлению изменения j , для чего используем соотношения

$$c_{ij}^{k+1/2} = \alpha_j^{(3)} + \beta_j^{(3)} c_{i,j+1}^{k+1/2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+ - 1}, \quad (1.68)$$

$$c_{ij}^{k+1} = \alpha_j^{(4)} + \beta_j^{(4)} c_{i,j+1}^{k+1}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+ - 1}. \quad (1.69)$$

В принципе, уравнение (1.35) может быть аппроксимировано на $k + 1$ слое одним уравнением, минуя аппроксимацию на $k + 1/2$ слое.

Однако для сращения решения $c_{ij}^{k+1/2}$ в ω_{h,h_2}^+ с соответствующим решением в ω_{h,h_2}^- необходимо определить $c_{ij}^{k+1/2}$ в ω_{h,h_2}^- . Поэтому используется аппроксимация уравнения (1.35) на $k + 1/2$ слое тоже, так что использование (1.48), (1.49) диктуется этими соображениями. При использовании (1.66) из (1.60) получаем следующие рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов $\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}$

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{F_{ij}^{(1)} + A_1 \cdot \alpha_{i-1}^{(1)}}{B_1 - A_1 \cdot \beta_{i-1}^{(1)}}, \quad \beta_i^{(1)} = \frac{E_1}{B_1 - A_1 \cdot \beta_{i-1}^{(1)}}, \quad i = 1, \dots, I-1. \quad (1.70)$$

Аналогичным образом получаем следующие рекуррентные формулы для других прогоночных коэффициентов в (1.67) — (1.69)

$$\alpha_j^{(2)} = \frac{F_{ij}^{(2)} + A_2 \cdot \alpha_{j-1}^{(2)}}{B_2 - A_2 \cdot \beta_{j-1}^{(2)}}, \quad \beta_j^{(2)} = \frac{E_2}{B_2 - A_2 \cdot \beta_{j-1}^{(2)}}, \quad j = 1, \dots, J^* - 1, \quad (1.71)$$

$$\alpha_j^{(3)} = \frac{F_{ij}^{(3)} + A_3 \cdot \alpha_{j-1}^{(3)}}{B_3 - A_3 \cdot \beta_{j-1}^{(3)}}, \quad \beta_j^{(3)} = \frac{E_3}{B_3 - A_3 \cdot \beta_{j-1}^{(3)}}, \quad j = 1, \dots, J^- - 1, \quad (1.72)$$

$$\alpha_j^{(4)} = \frac{F_{ij}^{(4)} + A_3 \cdot \alpha_{j-1}^{(4)}}{B_3 - A_3 \cdot \beta_{j-1}^{(4)}}, \quad \beta_j^{(4)} = \frac{E_3}{B_3 - A_3 \cdot \beta_{j-1}^{(4)}}, \quad j = 1, \dots, J^- - 1. \quad (1.73)$$

Стартовые значения прогоночных коэффициентов $\alpha_{i+1}^{(1)}$ и $\beta_{i+1}^{(1)}$ определяются исходя из граничного условия (1.54) на $k + 1/2$ слое, т.е.

$$\alpha_0^{(1)} = c_0, \quad \beta_0^{(1)} = 0. \quad (1.74)$$

Стартовые значения $\alpha_j^{(2)}$ в (1.67) определяются из условия $c_{i+0}^{k+1} = c_{i-0}^{k+1}$, где c_{i-0}^{k+1} известно как решение задачи (1.60), что дает

$$\alpha_0^{(2)} = c_{i-0}^{k+1}, \quad \beta_0^{(2)} = 0. \quad (1.75)$$

При определении стартовых значений $\alpha_0^{(3)}, \beta_0^{(3)}$ в (1.68) используем условие

$$D_2 \frac{c_{i1}^{k+1/2} - c_{i0}^k}{h_2^+} = D_3 \frac{c_{i0}^{k+1/2} - c_{i-1}^{k+1/2}}{h_2^-},$$

что используется при решении (1.62). Это дает

$$\alpha_0^{(3)} = \frac{D_2 h_2^-}{D_3 h_2^+} (c_{i1}^{k+1/2} - c_{i0}^k), \quad \beta_0^{(3)} = 1. \quad (1.76)$$

Наконец, при определении $\alpha_0^{(4)}, \beta_0^{(4)}$ для решения (1.63) используем условие

$$D_2 \frac{c_{i1}^{k+1} - c_{i0}^{k+1/2}}{h_2^+} = D_3 \frac{c_{i0}^{k+1} - c_{i-1}^{k+1}}{h_2^-}.$$

Из этого условия получаем

$$\alpha_0^{(4)} = \frac{D_2 h_2^-}{D_3 h_2^+} (c_{i1}^{k+1} - c_{i0}^{k+1/2}), \quad \beta_0^{(4)} = 1. \quad (1.77)$$

В частном случае, когда рассматривается только область R^+ граница областей R^+ и R^- , т.е. $y = 0$, считается непроницаемой границей, где можно принимать $\partial c / \partial y = 0$, что приводит к $c_{i0}^{k+1/2} = c_{i1}^{k+1/2}$ и $c_{i0}^{k+1} = c_{i1}^{k+1}$.

Кроме полей $c_{ij}^k, \varepsilon_{ij}^k, |\nabla p|_{ij}^k, k_{ij,i,j}^k$ определялся относительный расход вещества через границу $y = 0$

$$Q = D_3 \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0},$$

что после аппроксимации дает

$$Q = D_3 \frac{c_{i0}^{k+1} - c_{i,-1}^{k+1}}{h_2^-}.$$

Граничные условия (1.55), (1.56), (1.59) используются при определении решений по (1.66) – (1.69) в процессе обратной прогонки. Для приведенной процедуры расчетов полей c_{ij}^k , ε_{ij}^k , $|\nabla p|_{ij}^k$, $k_{0,ij}^k$, Q составлена специальная программа в среде Турбо-Паскаль. В практических расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $u = 6 \cdot 10^{-4}$ м/с, $k_0 = 10^{-2}$ м/(МПа·с), $\mu = 10^{-3}$ МПа·с, $h = 1$ м, $c_0 = 0,01$ и различные значения D_1 , D_2 , D_3 , ω_1 , ω_2 .

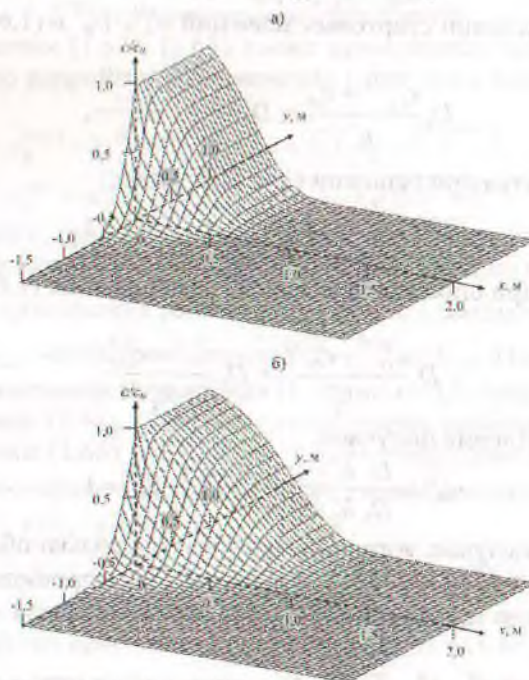


Рис.1.2. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,3$ с⁻¹; $D_1=5 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $D_3=10^{-5}$ м²/с; а) $t=2000$ с; б) $t=4000$ с.

Результаты некоторых расчетов приведены на рис.1.2 – 1.12. На рис.1.2 отражены поверхности относительной концентрации c/c_0 при двух временах $t = 2000$ (а), 4000 (б) с. На поверхностях можно заметить увеличение концентрации вещества в области R^+ , причем при малых x переход вещества в R^- становится значительным. Деформация концентрационных поверхностей не доходит до границы $y = h$ в R^+ . Однако расширение зоны с уменьшением c/c_0 в R^+ в сторону больших y заметно. По-видимому, при больших t можно ожидать достижение фронта уменьшения c/c_0 за счет диффузионного перехода вещества из R^+ в R^- до границы $y = h$ в R^+ . За счет диффузионного переноса вещества из R^+ в R^- при малых y в R^+ концентрационные поверхности уменьшаются по сравнению с относительно большими y . С увеличением времени можно заметить продвижение поверхностей концентрации по направлениям x , y и $-y$. Можно заметить также продвижение области относительного уменьшения концентрации в сторону больших y в R^+ . На рис.1.3, 1.4 представлены результаты при уменьшении ω_2 и увеличении ω_1 по сравнению с рис.1.2. Как видно из этих рисунков, ослабление эффекта колматации и усиление эффекта суффозии существенно влияют на распределение концентрации вещества в R^+ и следовательно в R^- . На рисунках 1.3, 1.4 можно заметить существенное продвижение поверхностей концентрации в сторону больших x . При малых $y \in R^+$ концентрации существенно больше, чем в случае рис.1.2. Как следствие этого концентрационные поверхности в R^- внедряются значительно глубже и шире. С физической точки зрения это объясняется тем, что при слабых эффектах колматации и относительно сильных эффектах суффозии относительно мало частиц отлагается в порах, следовательно относительно большая часть частиц остается во взвешенном состоянии в движущейся жидкости. Это отражается на степени заполнения порового пространства частицами. В рамках предложенной модели осаждение частиц приводит к закрытию проходов для жидкости и частиц в поровом объеме. Следовательно, явления колматации и суффозии прямым образом влияют на активную пористость. Динамика пористости в указанных выше трех режимах колматации и суффозии показана на рис.1.5. Сравнивая представленные результаты можно заметить уменьшение пористости в зоне колматации и суффозии

в R^+ . При этом за счет диффузионного переноса вещества из R^+ в R^- при малых $y \in R^+$ уменьшение ε не столь уж сильно как при относительно больших y . Такая задержка в уменьшении ε наблюдается при определенных x начиная от $x = 0$, где интенсивность диффузионного переноса вещества из R^+ в R^- достаточно высока. При достаточно больших x , куда зона изменения концентрации не доходила, следовательно эффекты диффузионного переноса вещества из R^+ в R^- незначительны, такая динамика ε не наблюдается. Исходя из этого можно сделать вывод о значительности влияния диффузионного переноса вещества из R^+ в R^- на кольтатационно-суффозионные явления в R^+ .

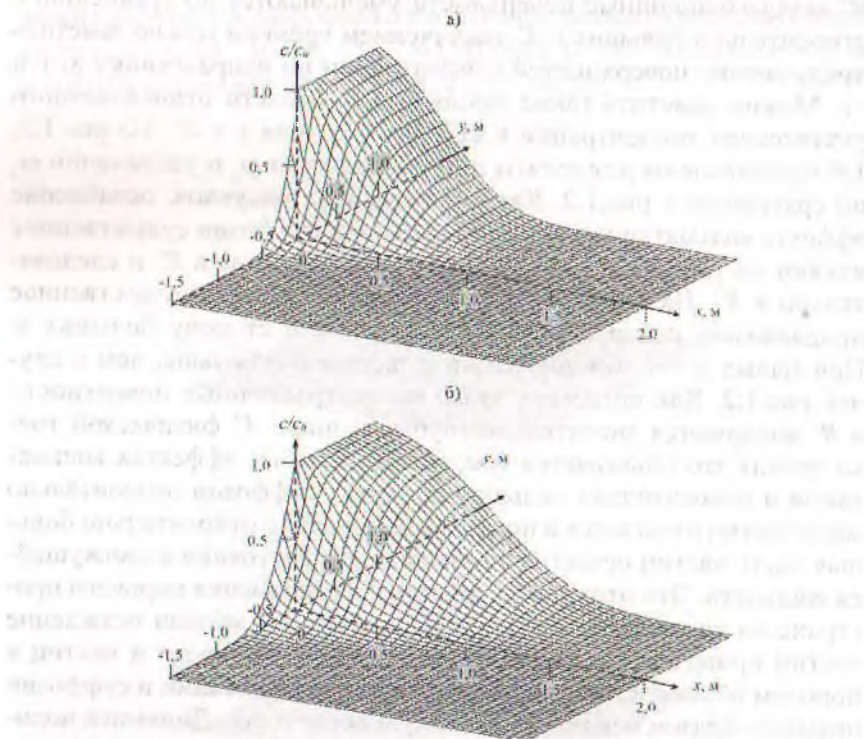


Рис.1.3. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $\omega_1=0,1$ м/(МПа · с); $\omega_2=0,1$ с⁻¹; $D_1=5 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $D_2=10^{-3}$ м²/с; $D_3=10^{-5}$ м²/с; а) $t=2000$ с; б) $t=4000$ с.

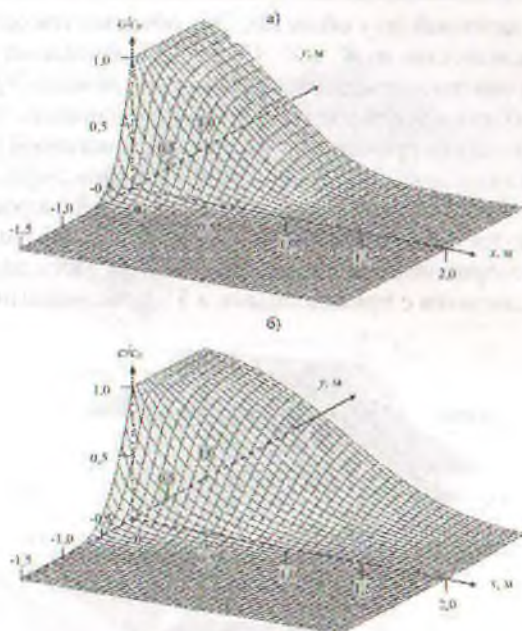


Рис.1.4. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $\omega_1 = 0,3 \text{ м/(МПа} \cdot \text{с)}$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $D_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $t = 2000 \text{ с}$; б) $t = 4000 \text{ с}$.

На рис.1.6 представлены результаты расчетов поля проницаемости для двух значений времени t и различных ω_1, ω_2 . Поскольку в расчетах используется закон Кармана-Козени, что устанавливает монотонную зависимость проницаемости среды от пористости при постоянной вязкости μ , динамика $k_{пр}$ в целом повторяет динамику ε . Однако пропорциональной зависимости между $k_{пр}$ и ε нет, поэтому в динамике $k_{пр}$ можно заметить некоторые особенности, не характерные для ε . В частности, вблизи $y = 0$ значения $k_{пр}$ не так относительно высоки по сравнению с несколько отдаленной по y зоне, как это характерно для соответствующей динамики ε . Наряду с другими характеристиками определено поле градиентов давления в R^+ , что для некоторого набора исходных параметров представлено на рис.1.7. Анализируя данные заметим, что при значительных эффектах колматации образуется зона с высокими значениями градиента давления. Размеры этой зоны определяются размерами зоны изменения концентрации и зонами проявления эффектов колматации и суффозии. В областях, близких к границе $y = 0$ в R^+ , значения $|\nabla p|$ ниже,

чем в более отдаленной по y областях. Это объясняется опять влиянием массопереноса вещества из R^+ в R^- . Сравнивая данные на рис. 1.7а, б, в, обнаруживаем заметное продвижение зоны увеличения $|\nabla p|$ в направлении x при ослаблении эффектов кольтации и усилении эффектов суффозии. Одновременно происходит уменьшение значений $|\nabla p|$ при ослаблении эффектов кольтации и усилении эффектов суффозии. Физическая интерпретация этого очевидна, при постоянной скорости движения смеси, чем меньше кольтация и чем выше суффозия, тем меньше гидравлическое сопротивление среды. Полученная здесь закономерность полностью согласуется с приведенными в § 1.1 сведениями.

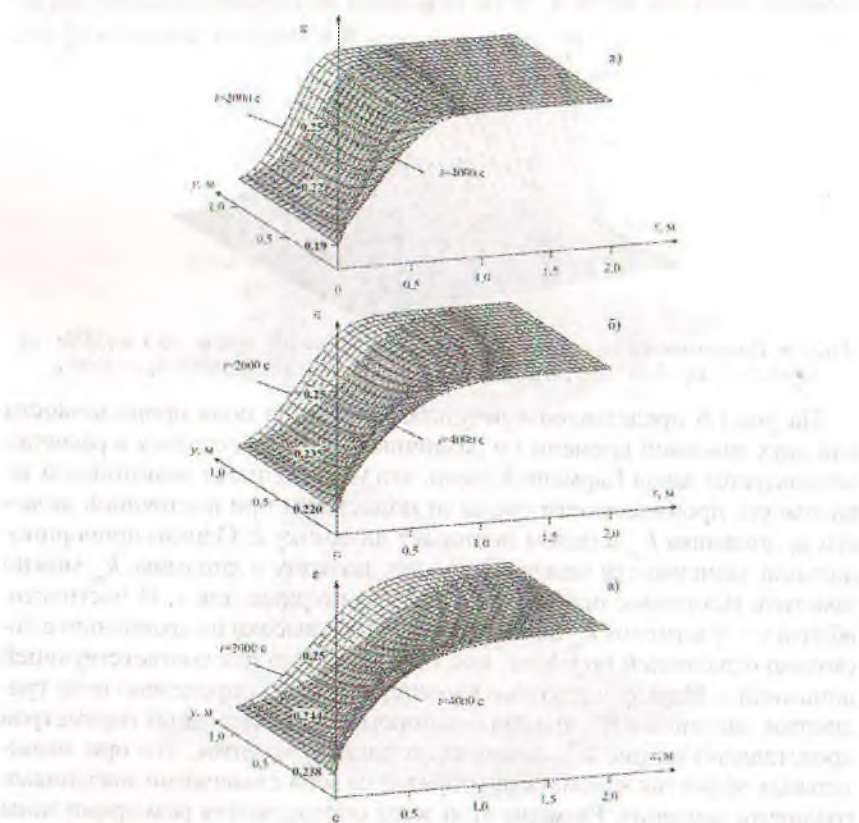


Рис. 1.5. Поверхности пористости в R^* при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

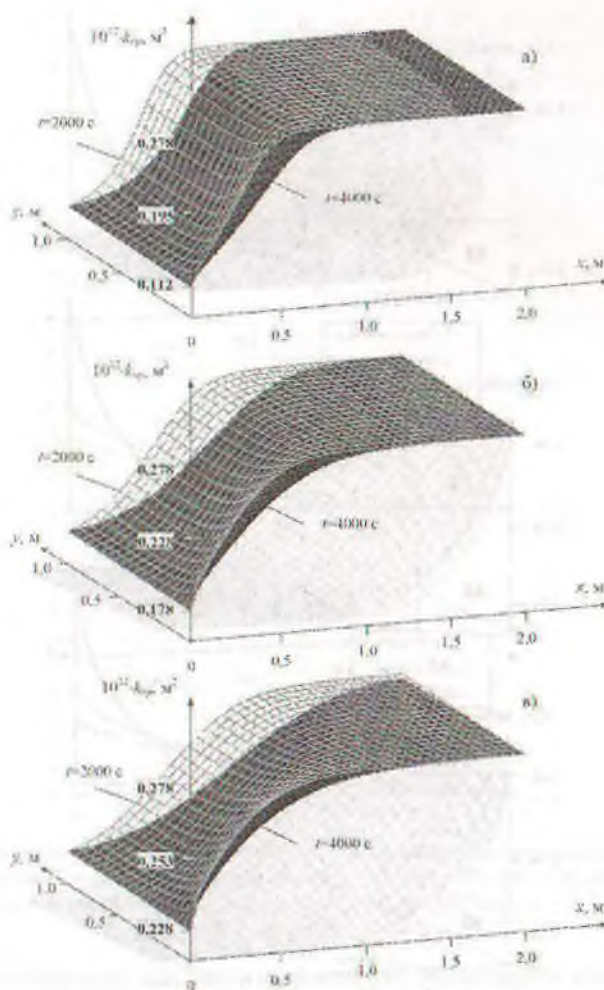


Рис.1.6. Поверхности проницаемости k в R^1 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} м^2/с$; $D_2=10^{-5} м^2/с$; $D_3=10^{-3} м^2/с$; а) $\omega_1=0,1 м/(МПа \cdot с)$; $\omega_2=0,3 с^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 м/(МПа \cdot с)$; $\omega_2=0,1 с^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 м/(МПа \cdot с)$; $\omega_2=0,1 с^{-1}$.

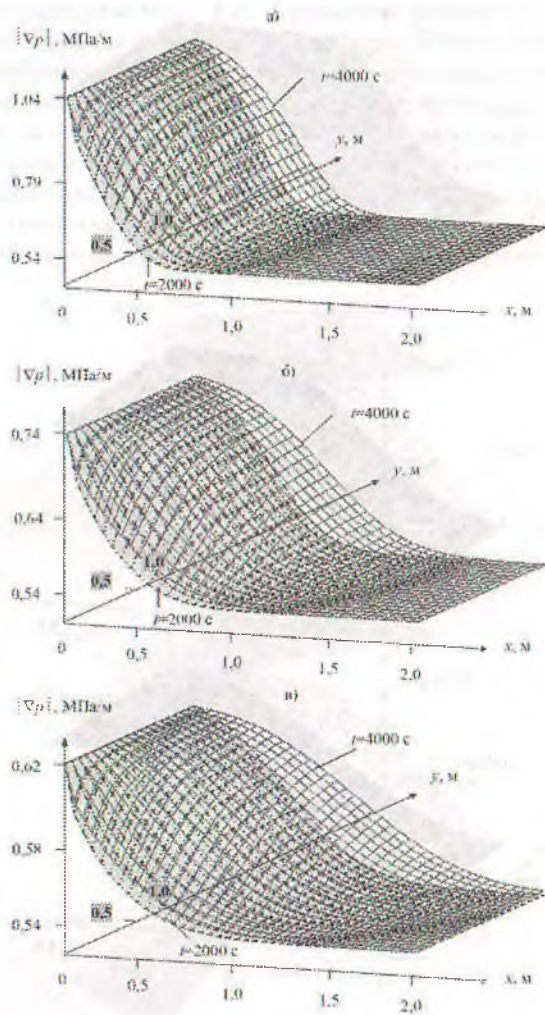


Рис.1.7. Поверхности градиента давления в R^+ при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$: а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

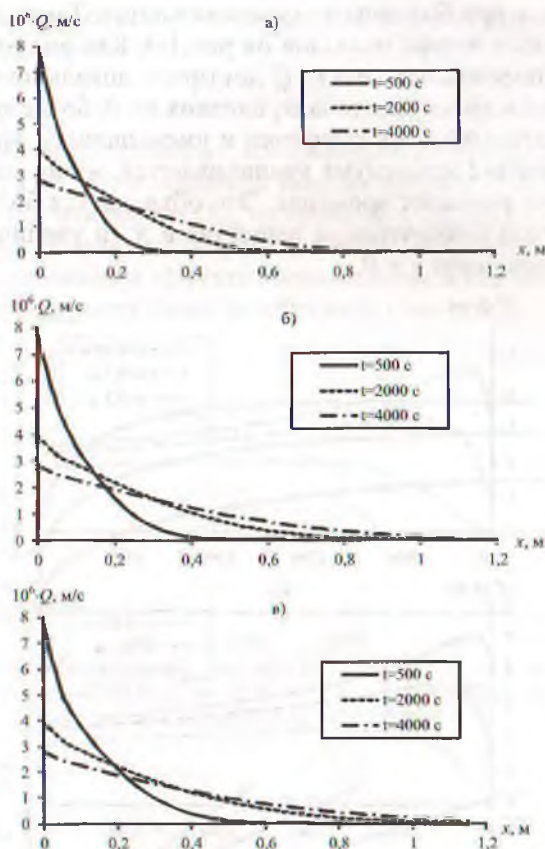


Рис.1.8. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$;
 в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

При проведении численных расчетов оценивался еще относительный расход вещества Q через общую границу R^+ и R^- , т.е. $y = 0$. Результаты расчетов представлены на рис.1.8. Анализ графиков показывает, что ослабление эффектов колматации и усиление эффектов суффозии приводят к продвижению зоны диффузионного массопереноса через $y = 0$ в относительно большие расстояния по x . При этом при малых x значения Q после резкого увеличения умень-

шаются по t , а при больших x — увеличиваются. Такая динамика Q в фиксированных точках показана на рис. 1.9. Как видно из этого рисунка в фиксированных точках Q достигает локального максимума, и причем этот максимум в точках, близких $x=0$, более ярко выражен. С увеличением эффектов суффозии и уменьшением эффектов кольматации значения максимума увеличиваются, и они наступают при относительно меньших временах. Это объясняется более интенсивной динамикой концентрации вещества в R'' и увеличением темпа массопереноса через $y=0$.

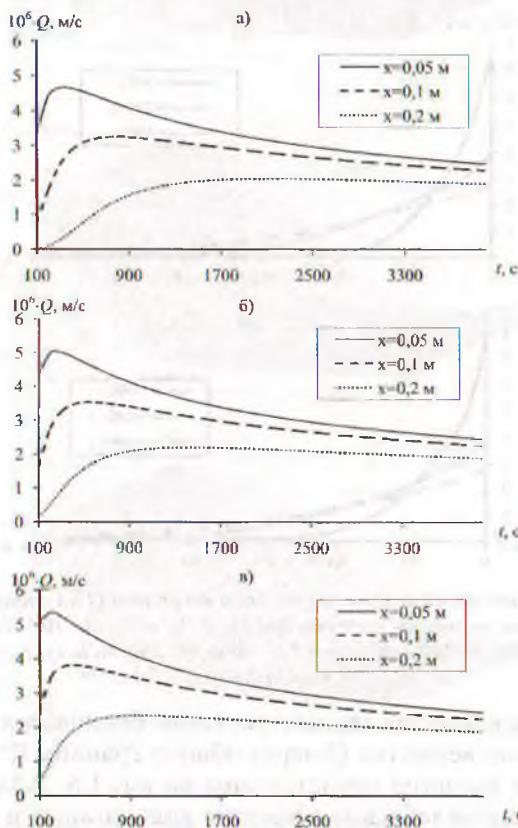


Рис. 1.9. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

На основе кривых рис.1.8 оценивался также общий относительный расход $Q_{\text{общ}}$ через $y = 0$

$$Q_{\text{общ}} = \int_0^{\infty} Q dx$$

для каждого момента времени t , который характеризует общий перенос массы через $y = 0$ в заданный момент времени. На рис.1.10 отражены графики изменения $Q_{\text{общ}}$ от времени t . Можно заметить, что относительный кумулятивный расход монотонно растет по времени. При этом с ослаблением эффектов колматации и усилением эффектов суффозии $Q_{\text{общ}}$ имеет более ускоренный темп роста.

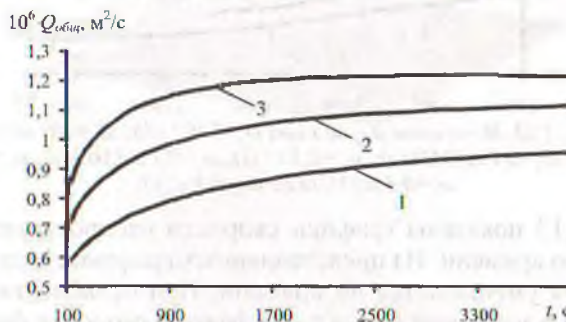


Рис.1.10. Изменение $Q_{\text{общ}}$ по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

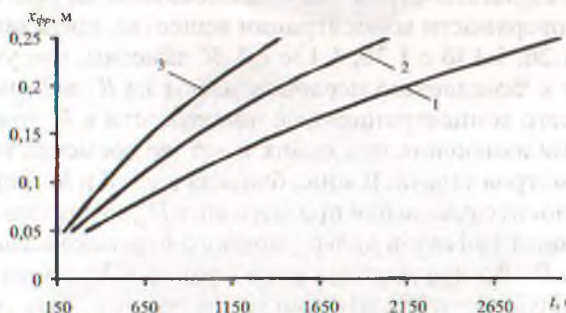


Рис.1.11. Изменение $x_{\text{фр}}$ по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

Из рис.1.9 видно, что в процессе массопереноса через $y = 0$ образуется фронт локального максимального значения Q , который рас-

пространяется в направлении роста x . Положения фронта $x_{\text{фр}}$ показаны на рис.1.11. Видно, что фронт локального максимума Q распространяется начиная с $x = 0$ в сторону роста x . При этом с ослаблением эффектов кольтматации и усилением эффектов суффозии этот фронт распространяется более интенсивно.

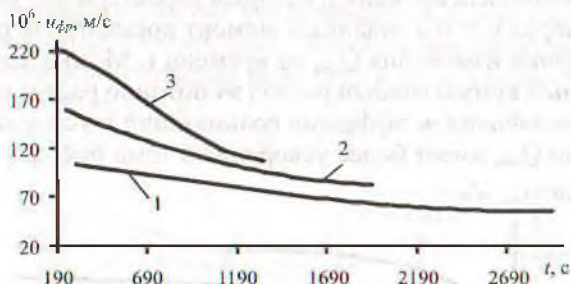


Рис.1.12. Изменение $u_{\text{фр}}$ по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

На рис.1.12 показаны графики скорости распространения этого фронта $u_{\text{фр}}$ по времени. Из представленных графиков видно, что скорость фронта уменьшается по времени. При ослаблении эффектов кольтматации и усилении эффектов суффозии скорости фронтов увеличиваются.

Наряду с отмеченным выше, рассмотрим случай, когда D_3 меньше чем D_2 . Результаты серии расчетов показаны на рис.1.13 – 1.21. Сравнивая поверхности концентрации вещества, представленные на рис.1.13а с 1.2б, 1.13б с 1.3б, 1.13с с 1.4б заметим, что уменьшение D_3 приводит к замедлению переноса массы из R^+ в R^- через $y = 0$, вследствие чего концентрационные поверхности в R^+ претерпевают существенные изменения при одних и тех же временах и значениях других параметров задачи. В зоне, близкой к $y = 0$ в R^+ концентрации вещества относительно выше при меньших D_3 , что также объясняется уменьшением эффектов диффузионного переноса вещества через $y = 0$ из R^+ в R^- . Распределение концентрации в R^- и зона ее изменения в направлении $-y$ относительно уменьшаются. Зона уменьшения ε и $k_{\text{пр}}$ при меньших D_3 приблизительно одинакова в направлении x в R^+ (Рис.1.14, 1.15), а относительное увеличение их значения вблизи $y = 0$ менее ярко выражено. Следует отметить, что при малых D_3 значения ε и $k_{\text{пр}}$ при соответствующих временах относительно вы-

ше. Соответствующие поверхности градиента давления показаны на рис.1.16. Характерным является тот факт, что за счет уменьшения массопереноса через $y = 0$ из R^+ в R^- значения $|\nabla p|$ вблизи $y = 0$ существенно изменяются.

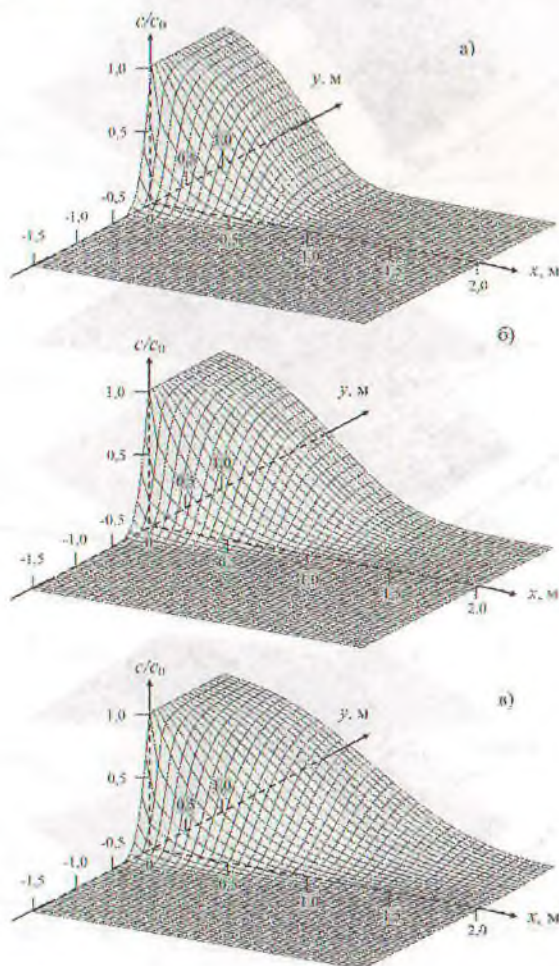


Рис.1.13. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=4000 \text{ с}$; а) $\omega_1=0.1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0.1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0.3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.1 \text{ с}^{-1}$.

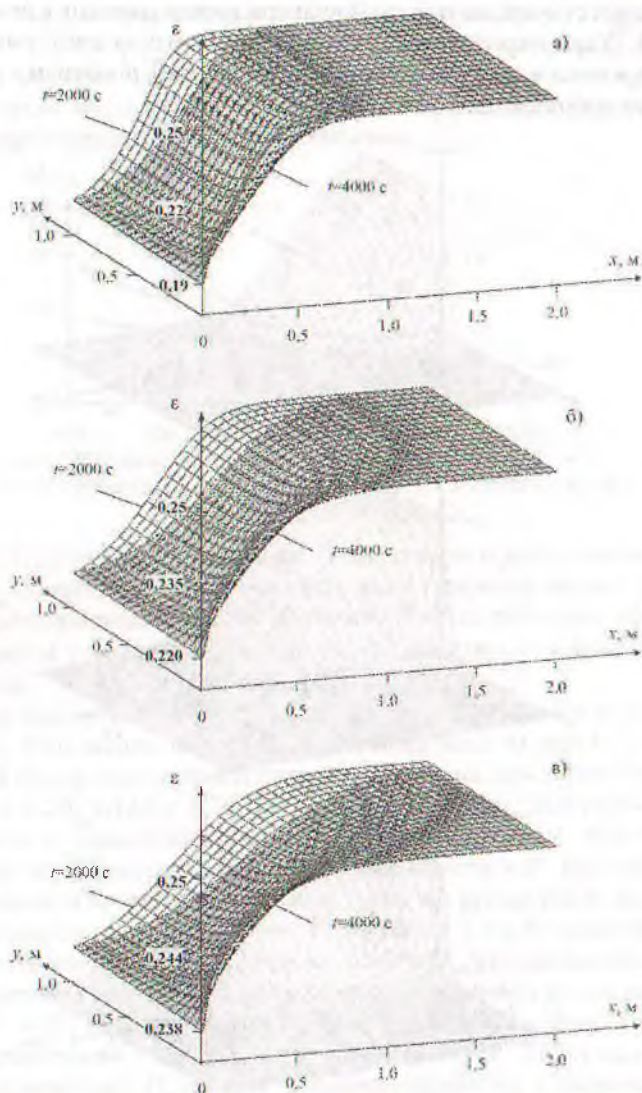


Рис. 1.14. Поверхности пористости в R^1 при $D_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3 = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1 = 0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$.

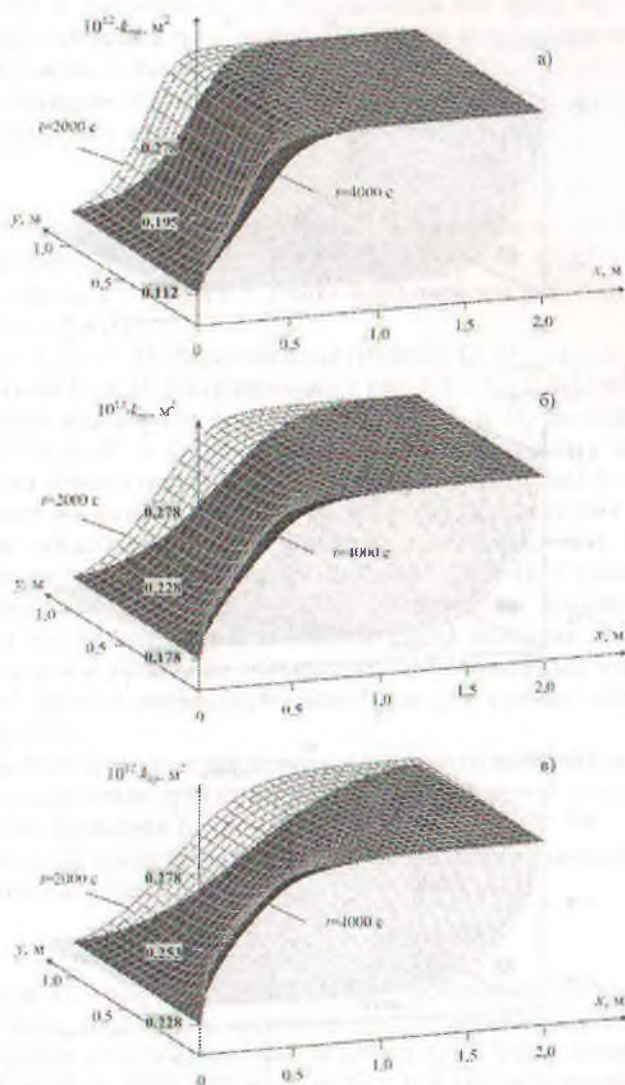


Рис.1.15. Поверхности проницаемости k_{np} в R^3 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} m^2/c$; $D_2=10^{-6} m^2/c$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} m^2/c$; а) $\omega_1=0,1 m/(MPa \cdot c)$; $\omega_2=0,3 c^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 m/(MPa \cdot c)$; $\omega_2=0,1 c^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 m/(MPa \cdot c)$; $\omega_2=0,1 c^{-1}$.

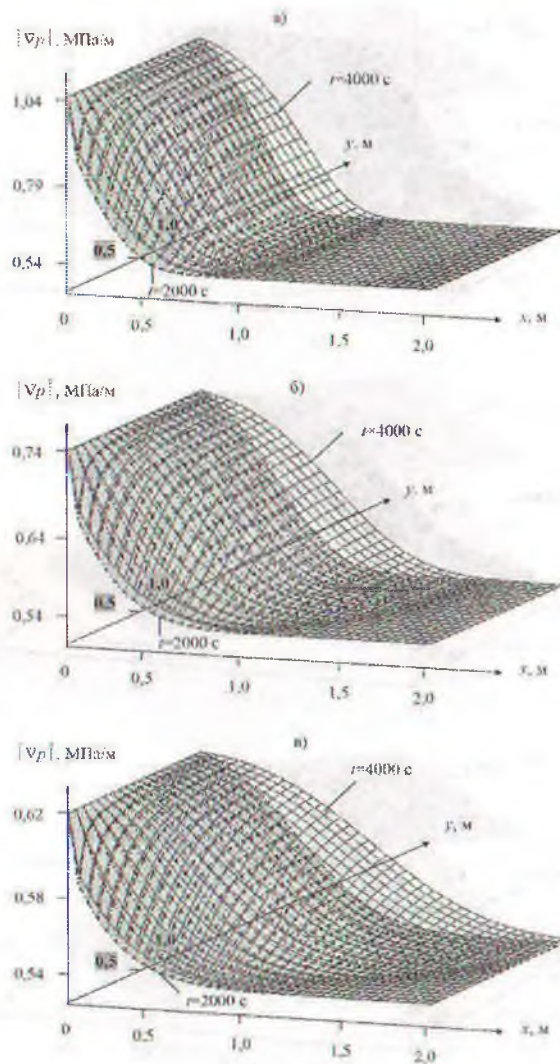


Рис. 1.16. Поверхности градиента давления в R^* при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

Общими в динамике k_{np} , ε , $|\nabla p|$ является тот факт, что на $x=0$ с концентрацией вещества c_0 довольно быстро устанавливается стационарный режим, который зависит от выбора значений ω_1 , ω_2 . Стационарное значение пористости ε_{cm} может быть определено из уравнения кинетики при $d\varepsilon/dt = 0$

$$\omega_1(\varepsilon_0 - \varepsilon_{cm}) \frac{w}{K(\varepsilon_{cm})} - \omega_2 \varepsilon_{cm} c_0 = 0.$$

Стационарные значения k_{np} , $|\nabla p|$ определяются из соответствующих значений $\mu \cdot K(\varepsilon_{cm})$ и $w/K(\varepsilon_{cm})$. На рис.1.5 – 1.7, 1.14 – 1.16 можно увидеть, что на $x = 0$ при $t = 2000$ и 4000 с имеем уже стационарные значения ε , k_{np} и $|\nabla p|$.

На рис.1.17 – 1.21 представлены графики Q , $Q_{общ}$, $x_{фр}$, $u_{фр}$ для других значений D_2 и D_3 по сравнению с рис.1.8 – 1.12. Из представленных данных видно, что при уменьшении D_2 и D_3 расход вещества через $y = 0$ из R^+ в R^- уменьшается, скорости фронта локального максимума относительно концентрации меньше чем в случае относительно больших D_2 и D_3 . В отличие от предыдущих случаев в динамике общего расхода обнаружена немонотонность (рис.1.19). По-видимому, при относительно меньших D_2 и D_3 с ростом t в зоне с меньшими x темп снижения Q становится преобладающим, чем темп его повышения при относительно больших x . Сравнивая рис.1.21 с рис.1.12 можно обнаружить относительное уменьшение скоростей фронта локального максимума Q в случае относительно малых D_2 и D_3 .

Кроме того одни и те же значения $u_{фр}$ при относительно меньших D_2 , D_3 и одинаковых других параметрах достигаются при значительно больших временах t .

На рис.1.22 представлены графики изменения суммарного относительного расхода вещества через $y = 0$ из R^+ в R^-

$$Q_{сум} = \int_0^t Q_{общ} dt = \int_0^t \int_0^\infty Q dx dt$$

от времени. Из графиков видно, что $Q_{сум}$ монотонно растет во времени. При этом ослабление эффектов колматации и усиление эффектов суффозии способствует увеличению $Q_{сум}$. Уменьшение же значений D_2 и D_3 от 10^{-5} , 10^{-5} м²/с до 10^{-6} , $0,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с соответственно приводит к уменьшению $Q_{сум}$ почти на порядок (сравните рис.1.22а с рис.1.22б).

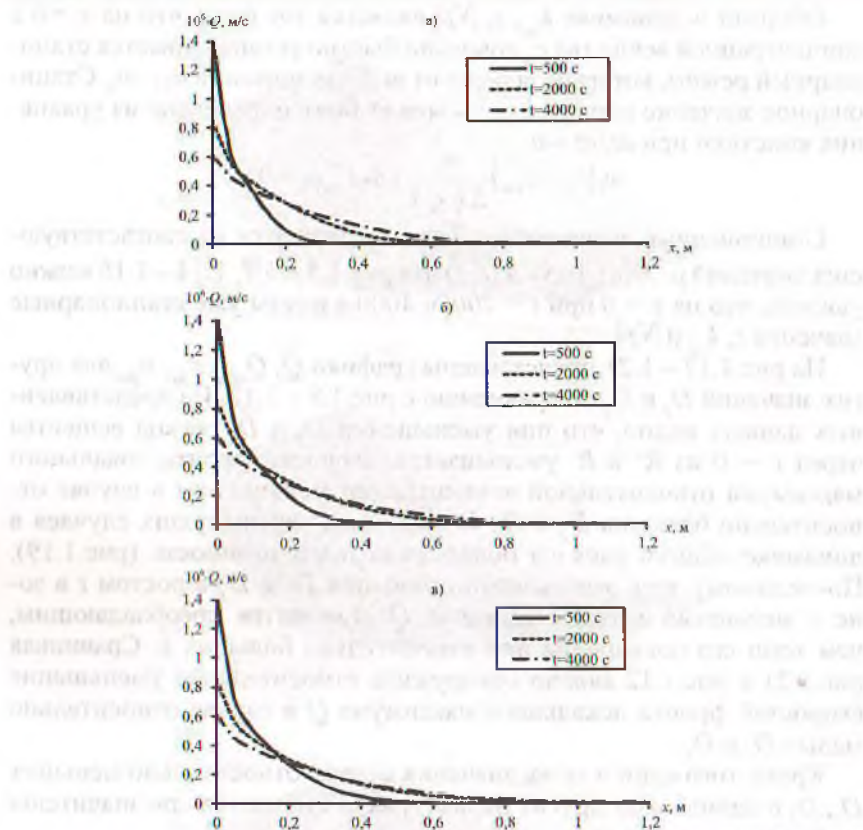


Рис.1.17. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

Чтобы оценить наличие зоны с неподвижной жидкостью на перенос вещества в зоне с подвижной жидкостью проводились расчеты с $D_3 = 0$. Некоторые сравнительные поверхности показателей фильтрации жидкости и переноса вещества показаны на рис.1.23. Из представленных на рисунке поверхностей можно четко обнаружить влияние наличия зоны R^- на перенос вещества и фильтрацию жидкости в R^+ . Вблизи $y = 0$ в R^+ видим зону с пониженной c/c_0 , $|\nabla p|$ и повышенной ϵ и k_{np} .

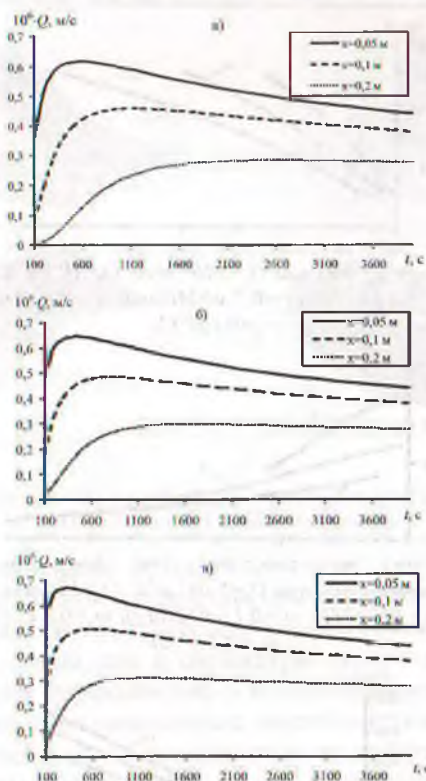


Рис. 1.18. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

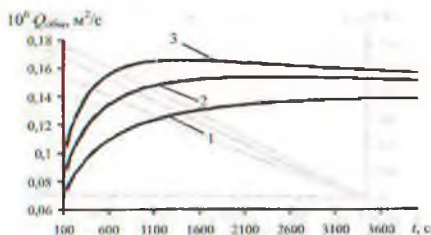


Рис. 1.19. Изменение Q по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

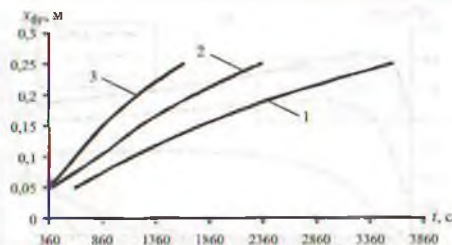


Рис.1.20. Изменение $x_{фр}$ по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

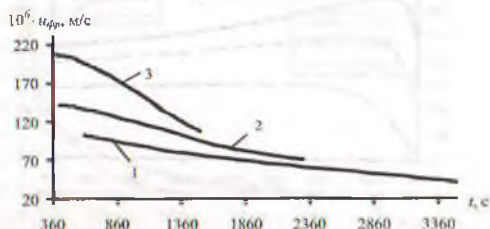


Рис.1.21. Изменение $u_{фр}$ по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

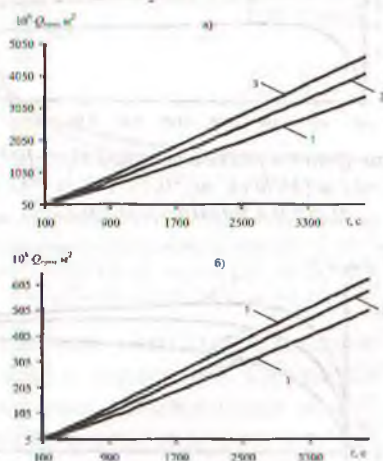


Рис.1.22. Изменение $Q_{ср}$ по t при а) $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; б) $D_1=2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

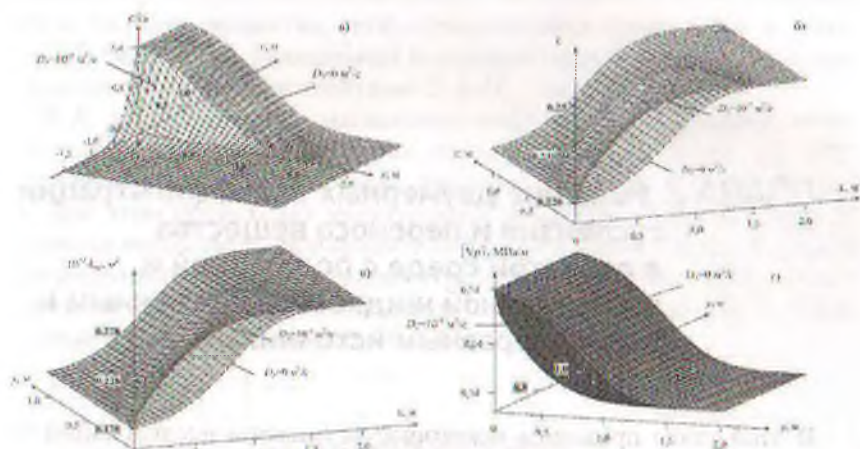


Рис.1.23. Поверхности c/c_0 (а), ε (б), k (в), $|\nabla p|$ (г) при $t=4000$ с, $D_1=5 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0,1$ с⁻¹.

Обобщая полученные результаты можно заключить, что паличие зоны с неподвижной жидкостью при переносе вещества в среде, включающей такие зоны, существенно меняет как фильтрационные характеристики среды, так и параметры переноса вещества. Явления колматации и суффозии пор в зоне с подвижной жидкостью не только влияют на фильтрационные характеристики этой зоны, но и показывают существенное воздействие на диффузионный перенос вещества из зоны с подвижной жидкостью в зону с неподвижной жидкостью.

ГЛАВА 2. Решение двумерных задач фильтрации суспензии и переноса вещества в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью с точечным и полосообразным источниками

В этой главе приводим некоторые результаты исследований задач движения жидкости и переноса вещества в двумерной пористой среде, состоящей из двух зон с различными фильтрационно-емкостными свойствами. Как следствие этого, в зонах среды как движение жидкости, так и перенос вещества происходит с различной интенсивностью. Между зонами возможен обмен веществом, что может привести к изменению общей картины переноса вещества. Рассмотрены различные случаи задания режима подачи жидкости и вещества в среду. Решены задачи с учетом нового параметра — предельного суффозионного градиента давления.

2.1. Кольматационно-суффозионная фильтрация в двумерной области с точечным источником

Здесь рассмотренная ранее задача переноса вещества в двумерной области исследуется в случае точечного источника [24]. Постановка задачи схожа с той, которая была исследована в гл.1.

Пусть рассматривается области $R^+ \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ и $R^- \{0 \leq x < \infty, -\infty < y \leq 0\}$ (Рис.2.1). R^+ представляет собой область с подвижной жидкостью, а R^- — с неподвижной. Первоначально область $R^+ \cup R^-$ была заполнена чистой (без частиц и примеси) жидкостью. Начиная с $t > 0$ в центре левой границы R^+ , т.е. $x = 0, 0 \leq y \leq h$ подается жидкость, содержащая твердые взвешенные частицы с концентрацией c^0 . Движение жидкости в R^+ происходит с постоянной скоростью u . Таким образом, в R^+ осуществляется конвективный пе-

ренос твердого вещества, сопровождающийся продольной и поперечной диффузией. Продольная и поперечная диффузия происходит с постоянными коэффициентами D_1 и D_2 , соответственно.

В R^* происходят кольматационно-суффозионные явления, которые как показывают предыдущие исследования [13, 38, 66, 70, 132], существенно влияют на процесс переноса вещества в пористой среде. При этом происходит значительное изменение всех показателей переноса вещества и фильтрации жидкости в пористой среде: полей концентрации вещества в жидкости, давления, пористости, проницаемости и др. Здесь мы используем те модельные подходы, предложенные в работах [13, 38, 66, 70, 132].

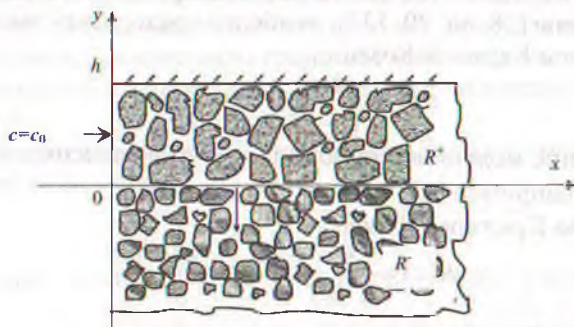


Рис.2.1. Схема кольматационно-суффозионного переноса вещества в двумерной области

Таким образом в R^* рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon) |\nabla p| - \omega_2 \varepsilon c, \quad (2.2)$$

где c — концентрация вещества, ε_0 , ε — первоначальная и текущая пористости, ω_1 , ω_2 — коэффициенты, характеризующие интенсивность суффозии и кольматации пор, $|\nabla p|$ — модуль градиента давления, t — время.

В R^- происходит только диффузионный перенос вещества в продольном направлении. Заметим, что в продольном направлении в R^- , в отличие от R^* , считается направление от 0 к $-y$. Диффузия вещества происходит с некоторым эффективным коэффициентом D_3 , который из-за извилистости пористой среды (области R^-) отличается

от коэффициента молекулярной диффузии D_0 . Как правило, $D_s < D_0$. Так что процесс переноса вещества в R^+ описывается уравнением.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in R^+. \quad (2.3)$$

В R^+ процесс движения смеси подчиняется обобщенному закону Дарси

$$\vec{w} = -K(\varepsilon) \nabla p, \quad (2.4)$$

где $\vec{w}$ — скорость фильтрации, p — давление, $K(\varepsilon)$ — коэффициент фильтрации.

Коэффициент фильтрации в неоднородном поле пористости в общем случае определяется как нелинейная функция [16, 18]. Как показали расчеты [38, 66, 70, 132], наиболее подходящей зависимостью является закон Кармана-Козени

$$K(\varepsilon) = \frac{k_0 \varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = \text{const}. \quad (2.5)$$

В принципе можно использовать и другие зависимости K от пористости ε , например [18]:

— формула Крюгера-Цункера

$$K(\varepsilon) = \frac{k_0 \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = \frac{0,5 d^2}{\mu},$$

— формула Зауэрбрера:

$$K(\varepsilon) = \frac{k_0 \varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = \beta_1 d^2, \quad 135 < \beta_1 < 350,$$

— формула Замарина:

$$K(\varepsilon) = \frac{k_0 \varepsilon^3 (1,275 - 1,5 \varepsilon)^2}{(1 - \varepsilon)^2}, \quad k_0 = \frac{8,4 d^2}{\mu}.$$

В представленных формулах: d — эффективный диаметр, μ — вязкость жидкости.

Из закона Дарси можно определить модуль градиента давления

$$|\nabla p| = \frac{\vec{w}}{K(\varepsilon)}. \quad (2.6)$$

Учитывая известную зависимость $w = u \cdot \varepsilon$ из (2.6) можно получить различные зависимости, соответствующие различным $K(\varepsilon)$

— для линейного закона $K(\varepsilon)$:

$$|\nabla p| = \frac{u}{k_0},$$

— для закона Кармана-Козени:

$$|\nabla p| = \frac{u(1-\varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^2}, \quad (2.7)$$

— для закона Крюгера-Цункера

$$|\nabla p| = \frac{u(1-\varepsilon)^2}{k_0},$$

— для закона Замарина:

$$|\nabla p| = \frac{u(1-\varepsilon)^2}{k_0 \varepsilon^2 (1,275 - 1,5\varepsilon)^2}.$$

Как и в ранее решенной задаче, в R^+ при $x \rightarrow \infty$, и в R^- при $y \rightarrow -\infty$ считаем, что потоки вещества отсутствуют. Эти условия соответствуют закрытым бесконечным границам или этапу исследования задачи, когда концентрационные профили не достигают $x = \infty$ в R^+ и $y = -\infty$ в R^- .

При сформулированных условиях начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$c=0 \text{ в } R^+ \cup R^- \text{ при } t=0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \text{ в } R^+ \text{ при } t=0, \quad (2.9)$$

$$c = c_0 \text{ при } x=0, \quad y=h/2, \quad c=0 \text{ при } x=0, \quad y \neq h/2, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x = \infty, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad y = h, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2.12)$$

$$c|_{y=+0} = c|_{y=-0}, \quad (2.13)$$

$$D_2 \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=+0} = D_3 \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=-0}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0, \quad y = -\infty, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (2.15)$$

Концентрация вещества определяется как двумерное нестационарное поле в $R^+ \cup R^-$, т.е. $c = c(t, x, y)$.

Для решения этой задачи применяем метод конечных разностей [28, 28]. Для этого построим сетку в области $R^+ \cup R^-$, $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \omega_{h_1 h_2 \tau}^+ \cup \omega_{h_1 h_2 \tau}^-$, где $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+ = \{(t_k, x_i, y_j) \mid t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = j h_2^+, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}, \tau = T/K, h_2^+ = h/J^+\}$, $\omega_{h_1 h_2 \tau}^- = \{(t_k, x_i, y_j) \mid t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = -h_2^- j, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, I}, \dots\}$.

$j=0,1,\dots, \tau=T/K\}$. В этой сетке: p_i — шаг сетки по направлению x , h_2^+ — шаг сетки по направлению y в R^+ , h_2^- — шаг сетки по направлению y в R^- , τ — шаг сетки по времени, T — максимальное время, в течение которого исследуется процесс, K — количество интервалов сетки по t , J^+ — количество интервалов сетки по y в R^+ .

На этой сетке аппроксимируем уравнения (2.1), (2.3) следующим образом

$$\frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{ij}^k}{0,5\tau} + u \frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} = D_1 \Lambda_1 c_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ c_{ij}^k + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1/2} - \varepsilon_{ij}^k}{0,5\tau},$$

$$i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.16)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} + u \frac{c_{ij}^{k+1} - c_{i-1,j}^{k+1}}{h_1} = D_1 \Lambda_1 c_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ c_{ij}^{k+1} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau},$$

$$i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.17)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1/2} - c_{ij}^k}{0,5\tau} = D_3 \Lambda_2^- c_{ij}^{k+1/2}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^- + 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (2.18)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1} - c_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = D_3 \Lambda_2^- c_{ij}^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^- - 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (2.19)$$

где

$$\Lambda_1 c_{ij}^k = \frac{c_{i-1,j}^k - 2c_{ij}^k + c_{i+1,j}^k}{h_1^2}, \quad \Lambda_2^+ c_{ij}^k = \frac{c_{i,j-1}^k - 2c_{ij}^k + c_{i,j+1}^k}{(h_2^+)^2},$$

$$\Lambda_2^- c_{ij}^k = \frac{c_{i,j-1}^k - 2c_{ij}^k + c_{i,j+1}^k}{(h_2^-)^2},$$

$c_{ij}^{k+1/2}$ — значения сеточной функции на половинном временном слое $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$.

Уравнение (2.3) в $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+$ аппроксимируем следующим образом

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{k+1/2} - \varepsilon_{ij}^k}{0,5\tau} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}) \|\nabla p\|_{ij}^k - \omega_2 \varepsilon_{ij}^k c_{ij}^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = \omega_1 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{ij}^{k+1/2}) \|\nabla p\|_{ij}^{k+1/2} - \omega_2 \varepsilon_{ij}^{k+1/2} c_{ij}^{k+1/2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (2.21)$$

Начальные и граничные условия в сеточной форме имеют вид

$$c_{ij}^0 = 0 \text{ в } \omega_{h_1 h_2 \tau}^+, \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_0 \text{ в } \omega_{h_1 h_2 \tau}^+, \quad (2.23)$$

$$c_{0,j}^k = c_0, \quad j = J^*/2, \quad k = \overline{0, K}, \quad c_{0,j}^k = 0, \quad j \neq J^*/2, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.24)$$

$$c_{i,j}^k = c_{i-1,j}^k, \quad j = 0, J^*, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.25)$$

$$c_{i,j^{*+}}^k = c_{i,j^*}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.26)$$

$$c_{i,0}^k = c_{i,-1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.27)$$

$$D_2 \frac{c_{i,1}^k - c_{i,0}^k}{h_2^+} = D_3 \frac{c_{i,0}^k - c_{i,-1}^k}{h_2^-}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.28)$$

$$c_{i,j^-}^k = c_{i,j^*-1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (2.29)$$

где I, J – берутся достаточно большими, чтобы концентрационные профили не доходили до выбранных условных границ областей.

Здесь сетка строится таким образом, что $j = J^*/2$ соответствует точке $y = h/2$.

Уравнения (2.16), (2.17), а также (2.18), (2.19) приводятся к системам разностных уравнений с трехдиагональными матрицами коэффициентов [46]. Эти системы решены методом прогонки.

Из (2.7) можно получить поле градиентов давления

$$|\nabla p|_{i,j}^{k+1} = \frac{u(1 - \varepsilon_{i,j}^{k+1})^2}{k_0(\varepsilon_{i,j}^{k+1})^2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^*}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (2.30)$$

что используется при вычислении $\varepsilon_{i,j}^{k+1/2}$ и $\varepsilon_{i,j}^{k+1}$ согласно (2.20), (2.21).

Поле проницаемости определяем из соотношения

$$k_{\theta,\theta}^{k+1} = K(\varepsilon_{\theta}^{k+1}) \cdot \mu, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^*}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (2.31)$$

Методика расчета решения аналогична [46]. Для расчета полей $c_{\theta}^k, \varepsilon_{\theta}^k, |\nabla p|_{\theta}^k, Q$ составленная ранее программа в среде Турбо-Паскаль [46] модифицирована. В расчетах использовались следующие значения параметров: $u = 6 \cdot 10^{-4}$ м/с, $k_0 = 10^{-2}$ м/(МПа·с), $\mu = 10^{-9}$ МПа·с, $h = 1$ м, $c_0 = 0,01$ и различные значения $D_1, D_2, D_3, \omega_1, \omega_2$.

Результаты отдельных расчетов приведены ниже на рис.2.2 – 2.6. Как видно из рис.2.2, кольтатационно-суффозионные эффекты оказывают значительное влияние на распределение концентрационного поля. С уменьшением суффозионных эффектов и с увеличением кольтатационных эффектов можно наблюдать отставание распространения концентрационных пространственных профилей. Соответственно можно наблюдать изменение концентрационного поля в R^* . Особо следует отметить характер изменения c/c_0 при $n = p$ в R^* . На $x = 0, 0 \leq y < h/2, h/2 < y \leq h$ работает обычное диффузионное

уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}.$$

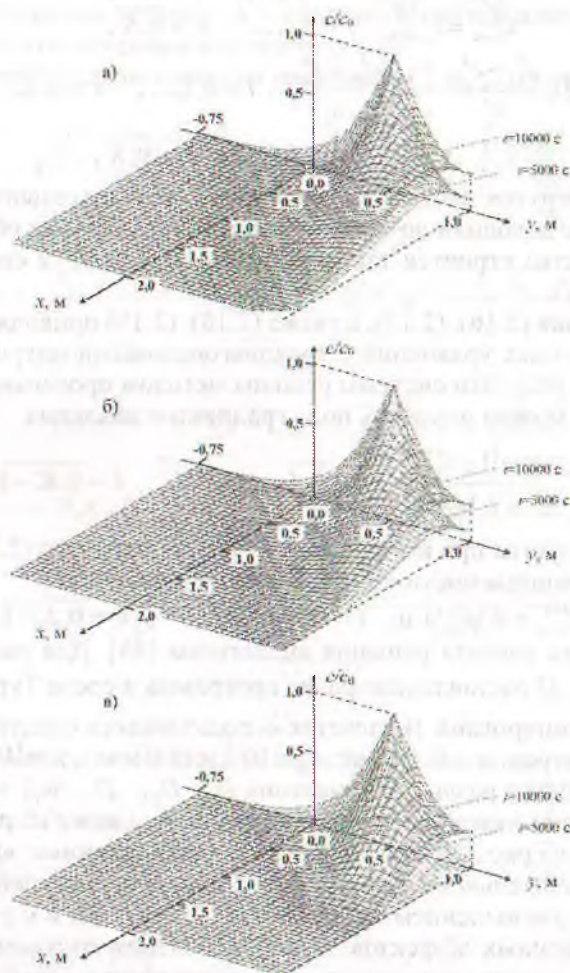


Рис. 2.2. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,1$; $\omega_2=0,3$; б) $\omega_1=0,1$; $\omega_2=0,3$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$.

В области же R работает уравнение (2.1), где наряду с конвекцией и диффузией (как продольной, так и поперечной) кольматационно-суффозионные эффекты выступают в роли источника (стока) концентрации. Поэтому при $y = h$ можно наблюдать немонотонное изменение концентрации по x . Но эта немонотонность менее ярко выражена при ослаблении суффозии и усилении кольматации (сравните профили а, б, в). Можно также обнаружить характер уменьшения профилей в разные направления от точечного источника концентрации, расположенного в точке $(0, h/2)$.

За счет кольматационно-суффозионных эффектов в R^+ образуется поле уменьшения пористости ε от первоначального значения ε_0 (Рис.2.3). С увеличением времени эта зона прогрессирует в R^+ . Ослабление суффозионных и усиление кольматационных эффектов приводит к более значительному уменьшению ε . Однако при этом зона уменьшения ε занимает относительно меньшую область в R^+ . Это, по-видимому, объясняется тем, что за счет увеличения кольматации относительно большее количество частиц отлагается в порах, что уменьшает концентрацию взвешенных частиц в потоке жидкости. Другими словами, при увеличении кольматации взвешенные частицы не успевая продвигаться в глубь пласта относительно интенсивно отлагаются в порах. То же самое можно говорить относительно уменьшения эффектов суффозии.

Аналогичную с распределением концентрации структуру имеют профили $|\nabla p|$ в R^+ . Уменьшение ε в соответствии с законом Кармана-Козени приводит к уменьшению проницаемости пласта, соответственно и коэффициента фильтрации. При заданной скорости фильтрации это приводит к увеличению фильтрационного сопротивления пласта, что отражается на профили $|\nabla p|$ (Рис.2.4). Усиление эффектов кольматации и ослабление эффектов суффозии приводит к относительно увеличению значений $|\nabla p|$ в R^+ . Однако тенденция уменьшения размеров зоны изменения $|\nabla p|$ в R^+ за счет усиления эффектов кольматации и ослабления эффектов суффозии сохраняется и в этом случае.

На рис.2.5 представлены графики изменения относительного расхода вещества Q через границу областей R^+ и R^- , т.е. $y = 0$

$$Q = D_3 \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

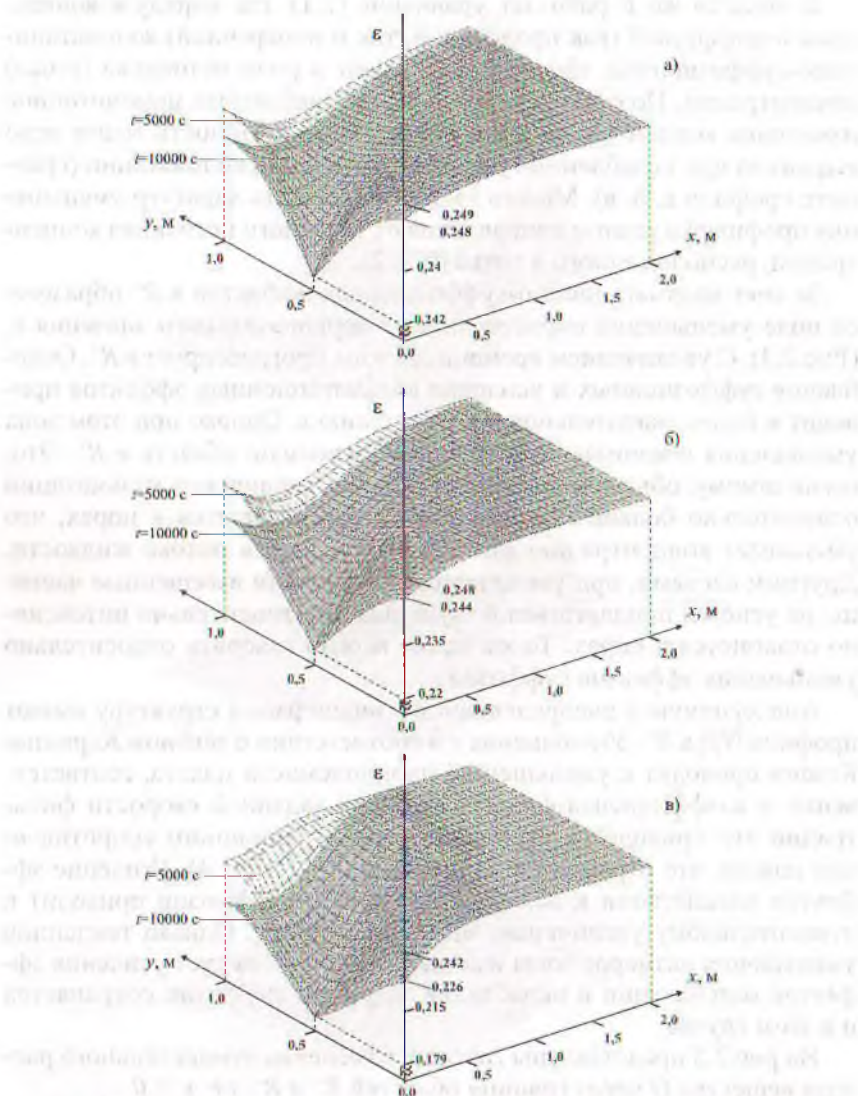


Рис. 2.3. Поверхности пористости в R^1 при $D_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,5 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

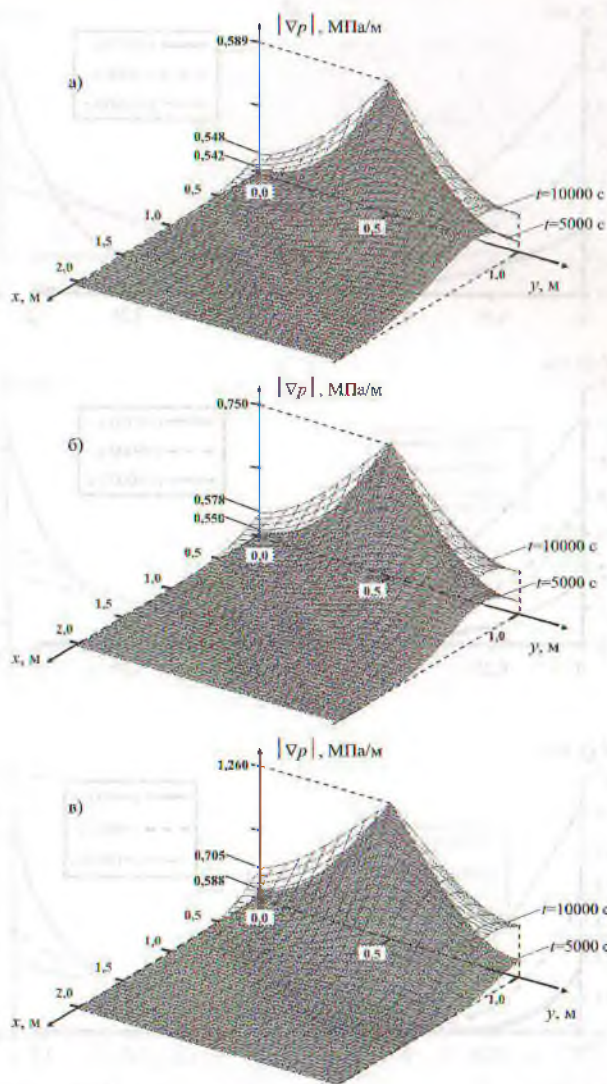


Рис. 2.4. Поверхности $|\nabla p|$ в R^2 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0.5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0.1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0.1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0.5 \text{ с}^{-1}$.

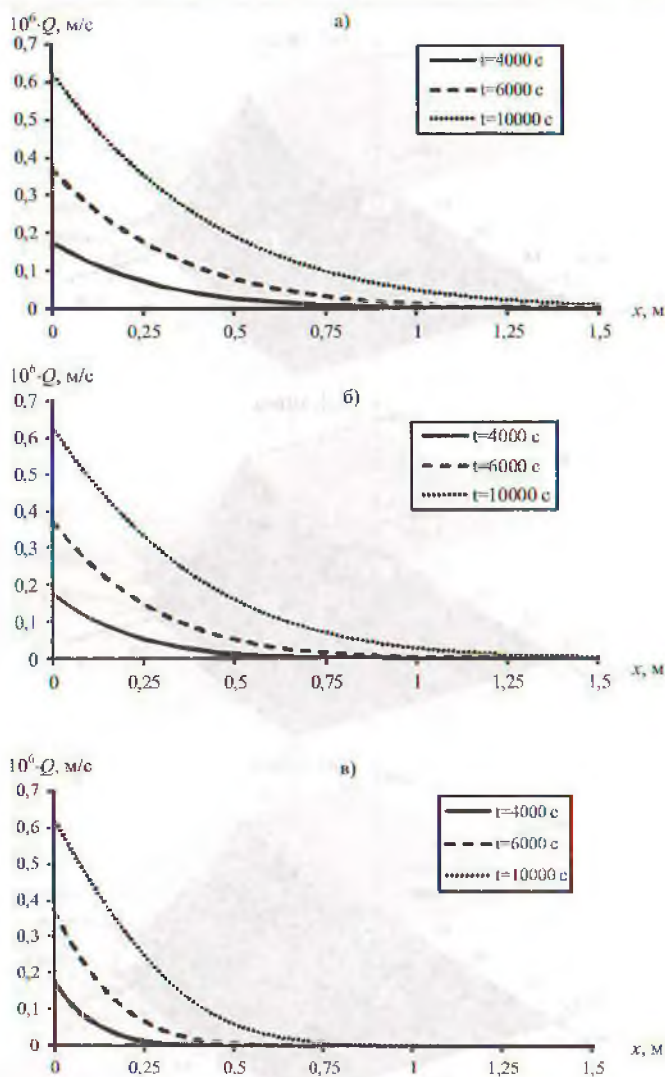


Рис. 2.5. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^1 и R^2 в различные моменты времени при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

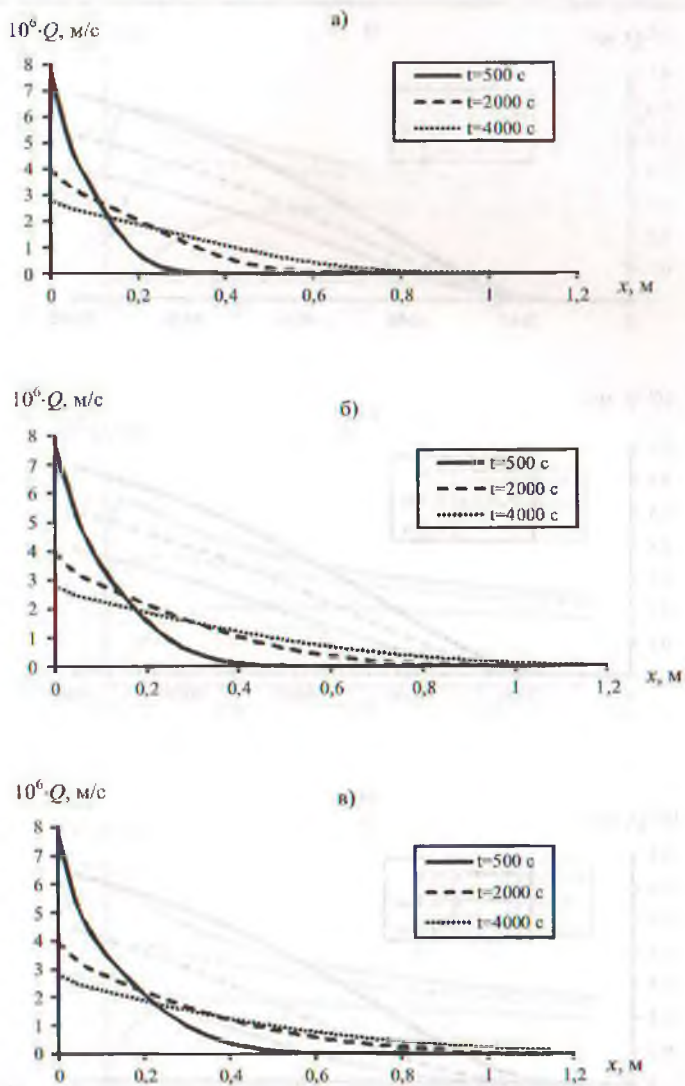


Рис. 2.6. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^I и R^{II} в различные моменты времени при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

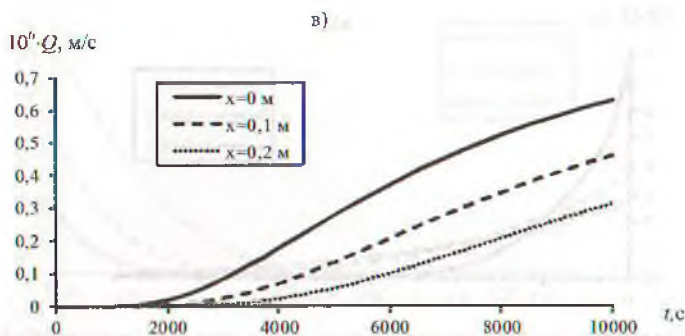
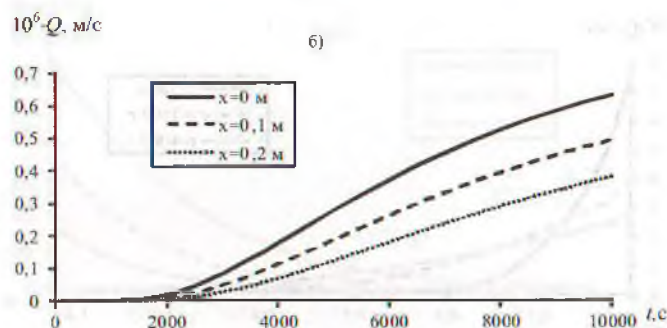
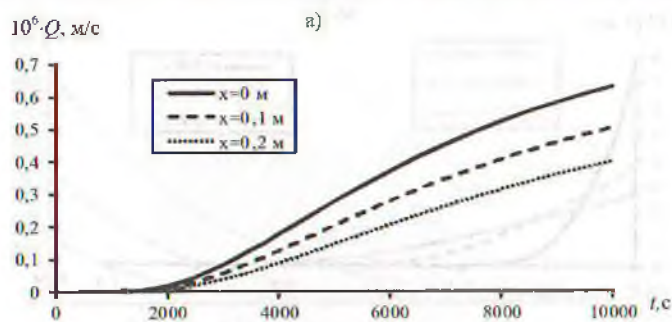


Рис. 2.7. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

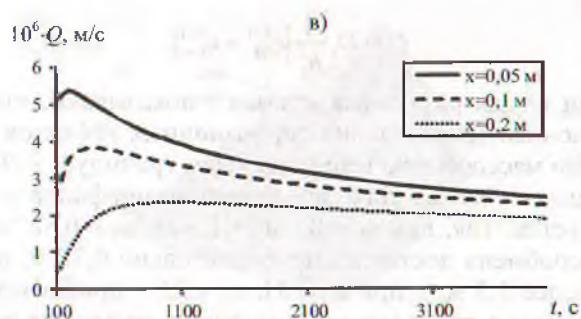
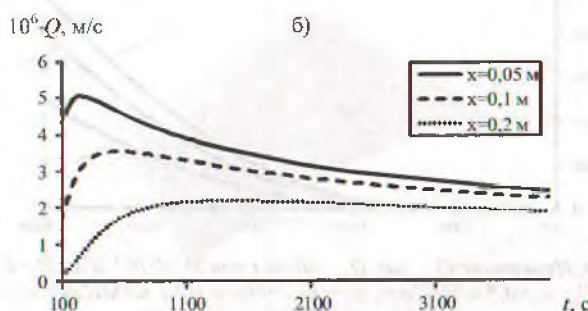
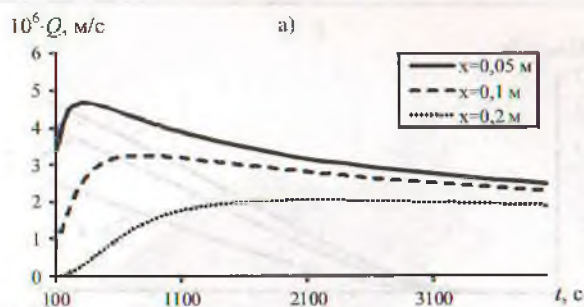


Рис. 2.8. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,3 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,3 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

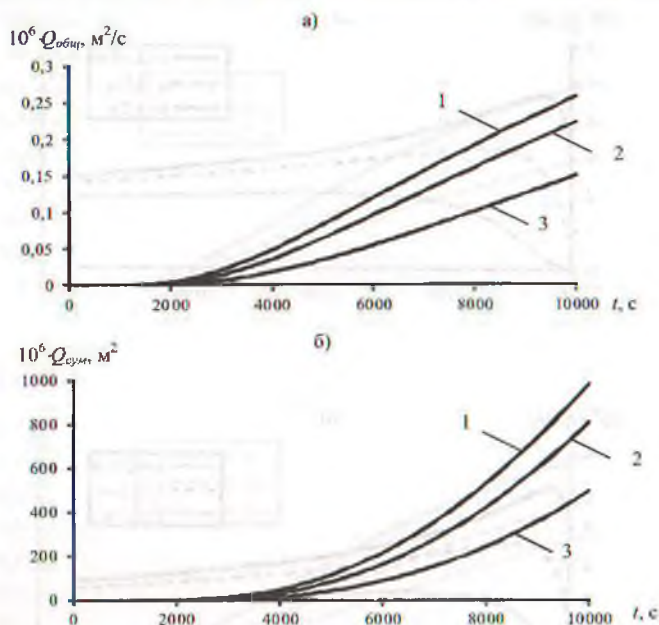


Рис. 2.9. Изменение $Q_{\text{общ}}$ (а), $Q_{\text{сум}}$ (б) по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3).

Расчетные значения Q после разностной аппроксимации определяются как

$$Q = D_3 \frac{1}{h_2} [c_{i,0}^{k+1} - c_{i+1}^{k+1}].$$

Профили Q для различных времен t показывают, что усиление кольматационных и ослабление суффозионных эффектов приводит к уменьшению массообмена вещества через границу $y = 0$ в отдельно взятых точках x . Кроме того, продвижение профилей в глубь пласта замедляется. Так, при $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2 = 0,5 \text{ с}^{-1}$ за 10000 с зона массообмена достигает приблизительно 0,75 м, при $\omega_1 = 0,5$, $\omega_2 = 0,1$ – более 1,5 м, а при $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,1$ – приблизительно 1,25 м. Отметим, что в пределах исследованных времен не наблюдается немонотонное изменение Q , что было обнаружено в задаче, когда смесь входила в область R^* по всей ширине $0 \leq y \leq h$, $x = 0$. Графики немонотонного изменения Q показаны на рис.2.6 [46].

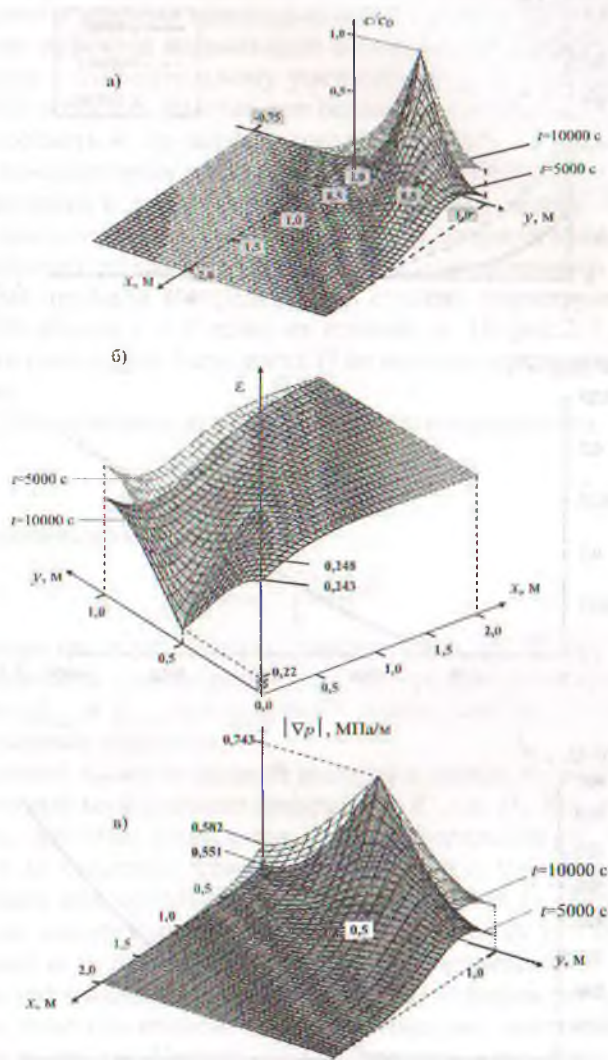


Рис. 2.10. Поверхности c/c_0 (а), ε (б), $|\nabla p|$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

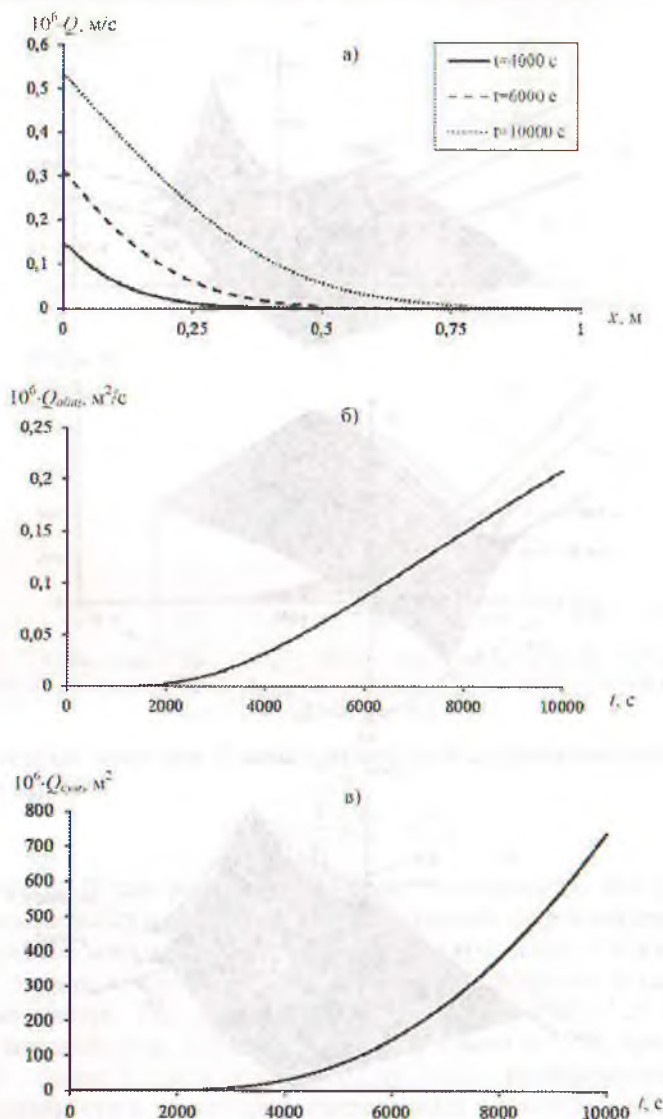


Рис. 2.11. Изменение Q (а), Q_{obs} (б), Q_{cus} (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

Динамика Q в отдельных точках x показана на рис.2.7. В пределах исследованного времени можно наблюдать монотонное увеличение Q . Усиление эффектов кольтации и ослабление эффектов суффозии приводит к относительному уменьшению Q в отдельно взятых точках x , что особенно заметно при больших x . В задаче, когда смесь входила в область R^- по всей границе $x=0$, $0 \leq y \leq h$ [46] была обнаружена немонотонная динамика Q (Рис.2.8). Отсутствие немонотонной динамики в данной задаче, по-видимому, можно объяснить тем, что в пределах исследованного времени профили концентрации до $y = 0$ доходит не сразу, а по истечении определенного времени. За это время профили в определенной степени формируются и характер $\partial c / \partial y$ вблизи $y = 0$ резко не изменится. На рис.2.7 нетрудно обнаружить начальную фазу, когда Q во всех исследованных точках равна нулю.

На рис.2.9 приведены графики общего относительного

$$Q_{\text{общ}} = \int_0^{\infty} Q dx,$$

а также суммарного относительного

$$Q_{\text{сум}} = \int_0^t Q_{\text{общ}} dt$$

расхода вещества через общую границу областей R^+ и R^- для нескольких значений параметров ω_1 и ω_2 . Из графиков можно заметить увеличение $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$ при усилении суффозионных и ослаблении кольтационных эффектов.

Проводились также численные расчеты в случае, когда D_1 меньше чем продольный коэффициент диффузии в R^+ , т.е. D_2 . Как и следовало ожидать, при этом происходит излом поверхности c/c_0 на линии $x \geq 0$, $y = 0$. В характере изменения профилей ε , ∇p не происходит существенных изменений (Рис.2.10). Уменьшение D_1 существенно отразится на относительных расходах через границу $y = 0$. Для одних значений ω_1 и ω_2 графики Q , $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$ приведены на рис.2.11. Сравнивая эти графики с соответствующими графиками рис.2.5 б, 2.9, можем заметить относительное уменьшение значений Q , $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$ в данном случае. Однако следует помнить, что значения Q зависят не только от значений D_1 , но и от градиента концентрации на $y = 0$, $x \geq 0$. Последнее определяется, помимо прочих параметров, распределением c/c_0 в R^+ . Влияние ω_1 , ω_2 на c/c_0 исследовалось вы-

ше. Следовательно, Q , $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$ определяются также кольматационно-суффозионными эффектами в R^+ .

2.2. Двумерная задача с полосообразным источником

Здесь рассмотренная в §2.1 задача обобщается на случай полосообразного источника на границе $x=0$, $0 \leq y \leq h$ области R^+ .

Уравнение (2.1), (2.2), а также (2.3) §2.1 решались при тех же условиях за исключением следующего

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } x=0, \quad 0 \leq y < \gamma_1 h, \quad \gamma_2 h < y \leq h, \\ c_0, & \text{если } x=0, \quad \gamma_1 h \leq y \leq \gamma_2 h, \quad c_0 = \text{const}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \leq 1. \end{cases}$$

Кроме того предполагаем, что в области $x=0$, $0 \leq y < \gamma_1 h$, $\gamma_2 h < y \leq h$ работает обычное уравнение диффузии с коэффициентом D_2 , а в $x=0$, $-\infty < y \leq 0$ — уравнение диффузии с коэффициентом D_3 .

Методика решения задачи аналогична той, что была рассмотрена в §2.1. Не останавливаясь на алгоритме получения численного решения приводим анализ результатов.

На рис.2.12 представлены пространственные профили относительной концентрации c/c_0 для двух моментов времени и различных значений параметров ω_1 , ω_2 . По сравнению с точечным источником (§2.1) здесь профили c/c_0 занимают более широкую область как в R^+ , так и в R^- . От граничной полосы $x=0$, $\gamma_1 h \leq y \leq \gamma_2 h$, где концентрация постоянна, за счет конвекции в направлении x , продольной и поперечной диффузии в R^+ профили c/c_0 развиваются в областях R^+ и R^- . Прогрессирование профилей в R^+ и R^- нетрудно обнаружить на рис.2.12. Кольматационно-суффозионные явления действуют таким же образом, как в случае точечного источника. При уменьшении параметра суффозии ω_1 и увеличении параметра кольматации ω_2 концентрационные профили становятся менее размытыми. Этот факт может быть интерпретирован как относительное уменьшение продольной и поперечной диффузии в R^+ . За счет относительно широкого развития профилей c/c_0 в R^+ в случае полосообразного источника в R^- также можем заметить относительно большее развитие c/c_0 по сравнению с случаем точечного источника. На границе $y=h$, $x \geq 0$ можно заметить немонотонную динамику c/c_0 . Это, по-видимому, происходит за счет того, что на границе $x=0$, $0 \leq y < \gamma_1 h$, $\gamma_2 h < y \leq h$ происходит обычный диффузионный перенос вещества без каких-либо процессов массообразования (кольматация, суффозия и др.), а во внутренних точках R^+ такие процессы происходят.

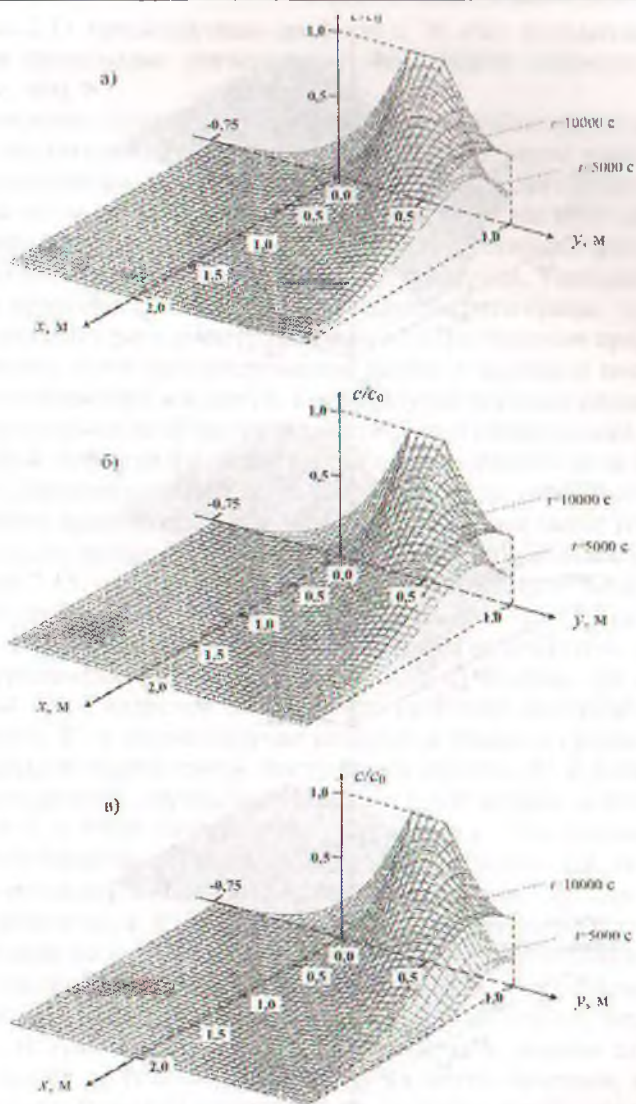


Рис. 2.12. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $D_1=5 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $D_3=10^{-5}$ м²/с; и а) $\omega_1=0.5$; $\omega_2=0.1$; б) $\omega_1=0.1$; $\omega_2=0.1$; в) $\omega_1=0.1$ м/(МПа·с); $\omega_2=0.5$ с⁻¹.

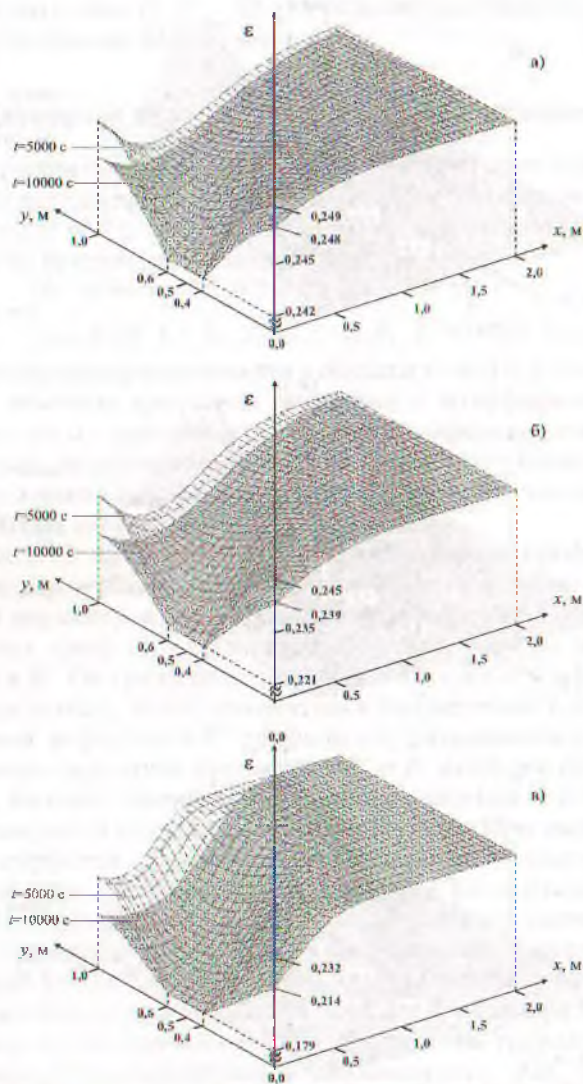


Рис. 2.13. Поверхности пористости в R^* при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

На рис.2.13 представлены профили ε . За счет кольтматационных эффектов происходит значительное уменьшение пористости в R^+ . При этом, чем

значительнее эффекты кольтматации и чем слабее эффекты суффозии, тем значительнее уменьшение ε . Однако, размеры зоны изменения пористости уменьшаются. Сказанное можно интерпретировать еще и так: кольтматационные эффекты действуют как противоположный, суффозионные эффекты как благоприятствующий фактор диффузионному переносу вещества в пористой среде. Уменьшение пористости приводит к уменьшению проницаемости среды, что в свою очередь означает рост фильтрационного сопротивления среды.

Поскольку здесь рассматривается задача с заданной постоянной скоростью движения жидкости, а это в случае использованных здесь законов изменения коэффициента фильтрации равносильно заданию переменной скорости фильтрации для определенного поля пористости, рост фильтрационного сопротивления среды отражается на поле градиента давления в R^+ (Рис.2.14). Отмеченные выше тенденции влияния ω_1, ω_2 на профили c/c_0 и ε здесь также сохраняют свою силу.

На рис.2.15. отражены профили относительного массообмена вещества через границу областей R^- и R^+ , т.е. $y=0$, для различных времен t . По сравнению с задачей с точечным источником, здесь мы увидим увеличение значений Q , что особенно заметно при малых x . Причиной этого является тот факт, что источник поступления смеси в область R^- в данном случае находится ближе к границе $y=0$. В предыдущей задаче смесь поступала в область R^+ в точке $x=0$, $y=h/2$, а в данном случае ближайшей к $y=0$ точкой источника является $x=0$, $y=\gamma/h$. За счет этого на границе $y=0$ в данном случае образуются более высокие градиенты концентрации, что, естественно, дают относительно высокие потоки вещества. Глубина проникновения вещества в R^+ и длина образования ненулевого градиента концентрации на $y=0$ в случае полосообразного источника остаются практически такими же, как в случае точечного источника.

На рис.2.16 показана динамика Q в отдельно взятых точках границы $y=0$. Анализируя кривые заметим, что в данном случае начальное время, в течение которого Q является нулевым, является относительно малым по сравнению со случаем с точечным источником. Значения Q также выше, чем в случае точечного источника. Все это можно объяснить отмеченным выше фактом, т.е. более быстрым подходом изменения концентрации к границе $y=0$ и образованием более заметных концентрационных градиентов.

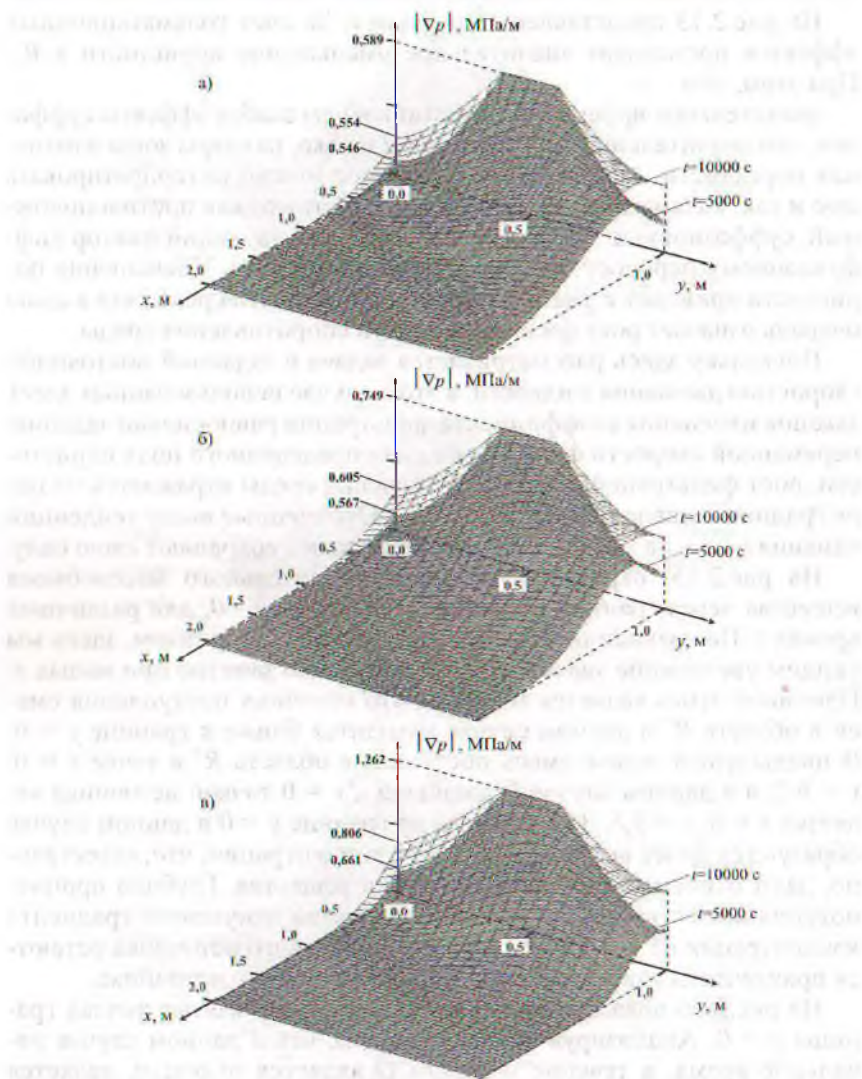


Рис. 2.14. Поверхности $|\nabla p|$ в R^1 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

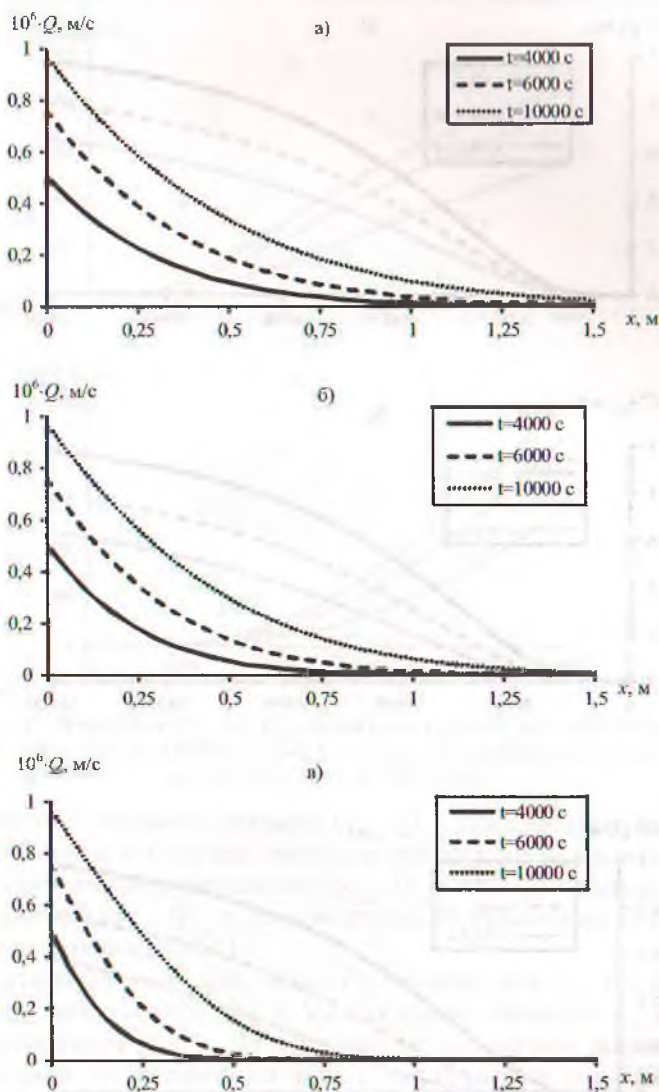


Рис. 2.15. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1 = 0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

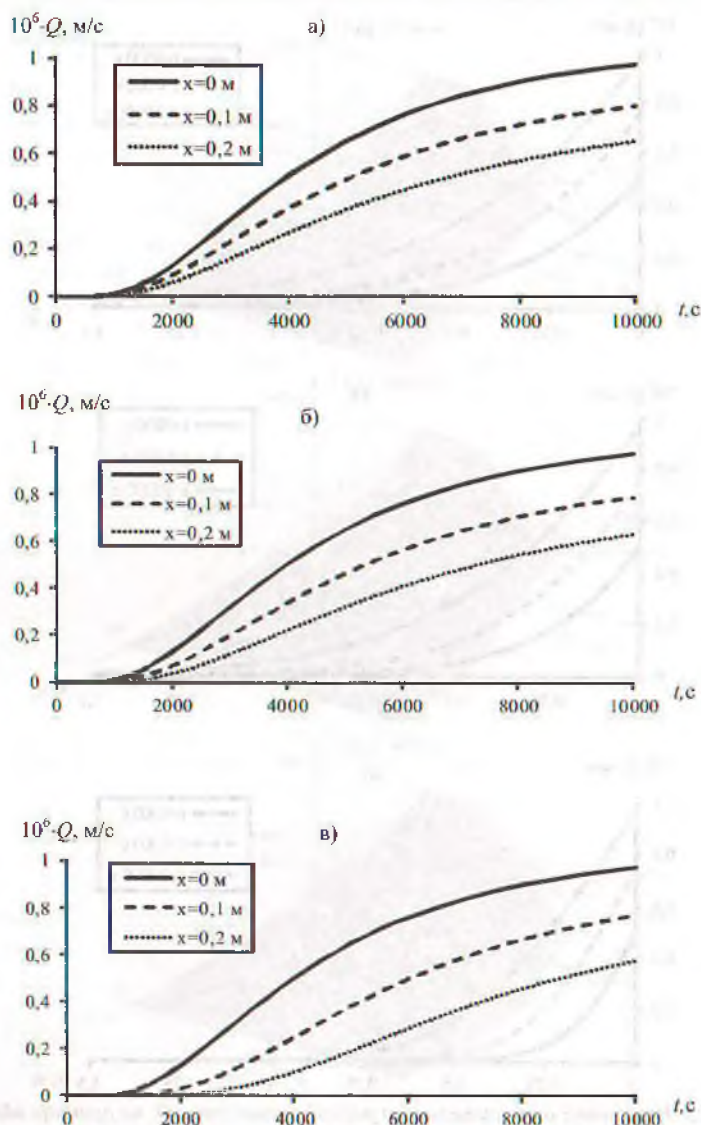


Рис. 2.16. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

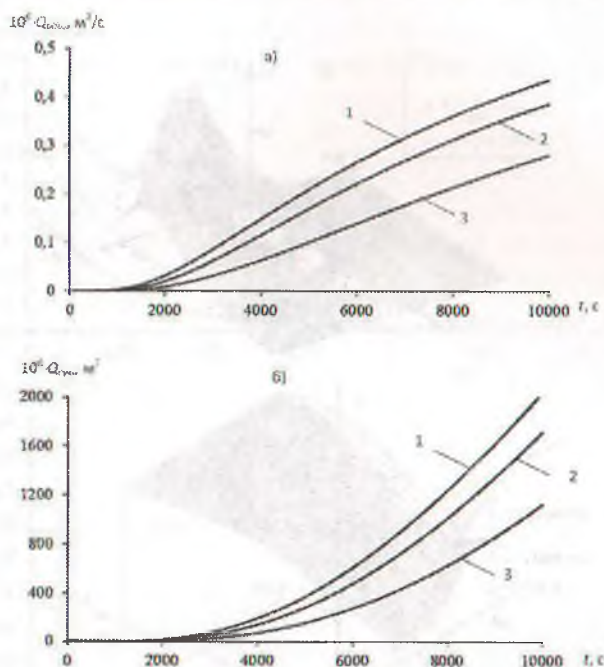


Рис. 2.17. Изменение $Q_{общ}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$ (3).

На рис.2.17 отражены графики $Q_{общ}$, $Q_{сум}$, построенные на основе Q (Рис.2.14). Как и в случае точечного граничного режима здесь характерно монотонное увеличение $Q_{общ}$, $Q_{сум}$. Можно заметить увеличение значений $Q_{общ}$, $Q_{сум}$ в данном случае по сравнению со случаем точечного источника (§2.1).

Анализировался случай, когда D_3 меньше чем D_1 . На рис.2.18 приведены поверхности c/c_0 , ϵ , ∇p для одних значений ω_1 , ω_2 , а на рис.2.19 показаны Q , $Q_{общ}$, $Q_{сум}$ для тех же параметров задачи. Здесь отмечаются те же явления, что и в случае точечного источника. Однако, уменьшения Q , $Q_{общ}$, $Q_{сум}$ за счет уменьшения D_3 не столь существенны как в случае точечного источника. Значения Q , $Q_{общ}$, $Q_{сум}$ выше, чем соответствующие величины в случае точечного источника (Рис.2.11).

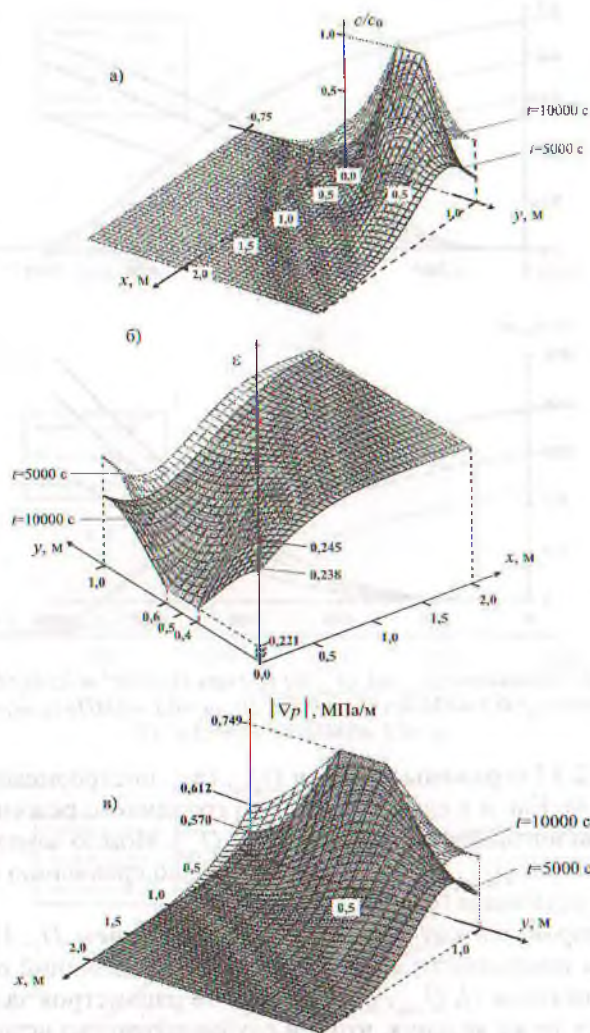


Рис. 2.18. Поверхности c/c_0 (а), ε (б), $|\nabla p|$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{млн} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

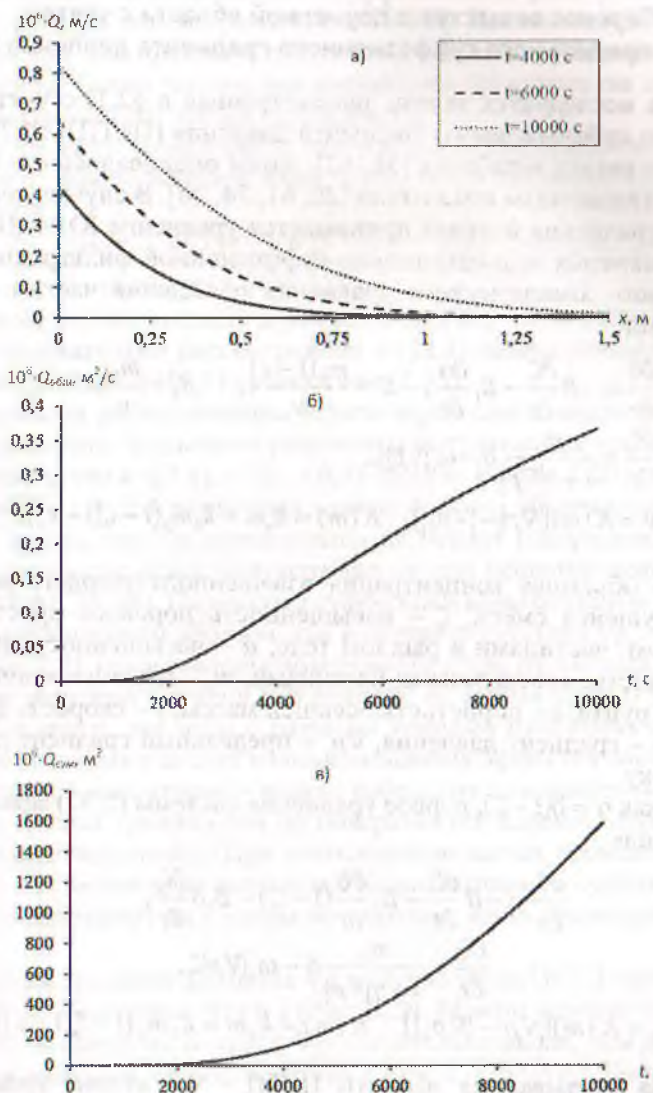


Рис. 2.19. Изменение Q (а), $Q_{\text{всп}}$ (б), $Q_{\text{сум}}$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

2.3. Перенос вещества в двумерной области с учетом предельного суффозионного градиента давления (ПСГД)

Здесь исследуется задача, рассмотренная в §2.1, с учетом предельного суффозионного градиента давления (ПСГД). ПСГД впервые был введен в работах [38, 67], затем оценивалось его влияние на фильтрационные показатели [20, 61, 74, 76]. В случае, когда в качестве уравнения баланса принимается уравнение Ю.М.Шехтмана [80], уравнения кольматационно-суффозионной фильтрации с учетом нового кинетического уравнения осаждения частиц в порах имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}, & B = \frac{m_0(1-\varepsilon)}{v}, & B_1 = \frac{m_0}{v}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1+\gamma|\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \\ v = K(m)(|\nabla p| - |\nabla p_0|), & K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1-\varepsilon)), \end{cases} \quad (2.32)$$

где δ – объемная концентрация взвешенного твердого вещества в движущейся смеси, ζ – насыщенность порового пространства осевшими частицами в рыхлом теле, α – насыщенность порового пространства взвешенными частицами, m_0 – первоначальная пористость грунта, ε – пористость осевшей массы, v – скорость фильтрации, ∇p – градиент давления, ∇p_0 – предельный градиент давления по потоку.

Так как $\alpha = \delta(1-\zeta)$, первое уравнение системы (2.32) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial x} = -B \frac{\partial \zeta}{\partial t} - B_1 \frac{\partial \delta}{\partial t} (1-\zeta) + B_1 \delta \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1+\gamma|\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \\ v_0 = K(m)(|\nabla p| - |\nabla p_0|), & K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1-\varepsilon)). \end{cases} \quad (2.33)$$

Когда учитываются эффекты ПСГД – ∇p_c вторые уравнения в (2.32), (2.33) заменяются на

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1+\gamma|\nabla p|} \delta - \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_s|) \zeta. \quad (2.34)$$

Здесь модель кольтматационно-суффозионной фильтрации в двумерной области рассматривается с ПСГД. В качестве балансового уравнения для простоты принимаем обычное уравнение баланса вещества. Схема заполнения пустотного пространства среды по Ю.М.Шехтману [80] используется в гл.3.

Итак систему уравнений кольтматационно-суффозионной фильтрации в R^+ можно записать в виде (2.1) §2.1, а в качестве (2.2) (§2.1) принимаем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \begin{cases} \omega_1(\varepsilon_0 - \varepsilon)(|\nabla p| - |\nabla p_c|) - \omega_2 \varepsilon c, & \text{если } |\nabla p| > |\nabla p_c|, \\ -\omega_2 \varepsilon c, & \text{если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c|. \end{cases} \quad (2.35)$$

В такой постановке задача решается для случая точечного источника. Следовательно рассмотренная в (§2.1) задача решается заменяя уравнение (2.2) (§2.1) уравнением (2.35).

Не приводя дискретизацию задачи переходим к анализу численных результатов. Численные результаты получены для тех же исходных данных, что в (§2.1), с $\nabla p_c = 0,75$ МПа/м. На рис.2.20 приведены поверхности c/c_0 для различных значений ω_1, ω_2 . Из представленных данных видно, что ∇p_c существенно не меняет распределение c/c_0 , что неоднократно ранее подтверждалось при решении одномерных задач [20, 61, 74, 76]. Параметры суффозии и кольтматации ω_1, ω_2 действуют аналогичным образом, как в случае отсутствия ∇p_c .

На рис.2.21 представлены поверхности ε при различных ω_1, ω_2 и для двух значений времени t . В отличие от случая $\nabla p_c = 0$ здесь мы можем отличить две зоны с разными темпами изменения ε . В первой зоне значения ε за счет кольтматационных эффектов значительно уменьшаются, а во второй – можно наблюдать незначительное изменение ε . Общая граница зон на поверхностях характеризуется резким скачком значений ε . При относительно малых временах общая граница зон менее ярко выражена. Кольтматационно-суффозионные эффекты действуют на ε таким же образом, как в предыдущих случаях.

Текущий градиент давления ∇p в случае учета ПСГД претерпевает такие же изменения, что и ε (Рис.2.22). Можно условно выделить две зоны, в одной из которых ∇p значительно выше, чем в другой. Большие значения ∇p соответствуют зоне с $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. Кольтматационные эффекты за счет осаждения частиц в порах приводят к увеличению фильтрационного сопротивления, что при заданной скорости течения жидкости соответствуют росту ∇p (Рис.2.22).

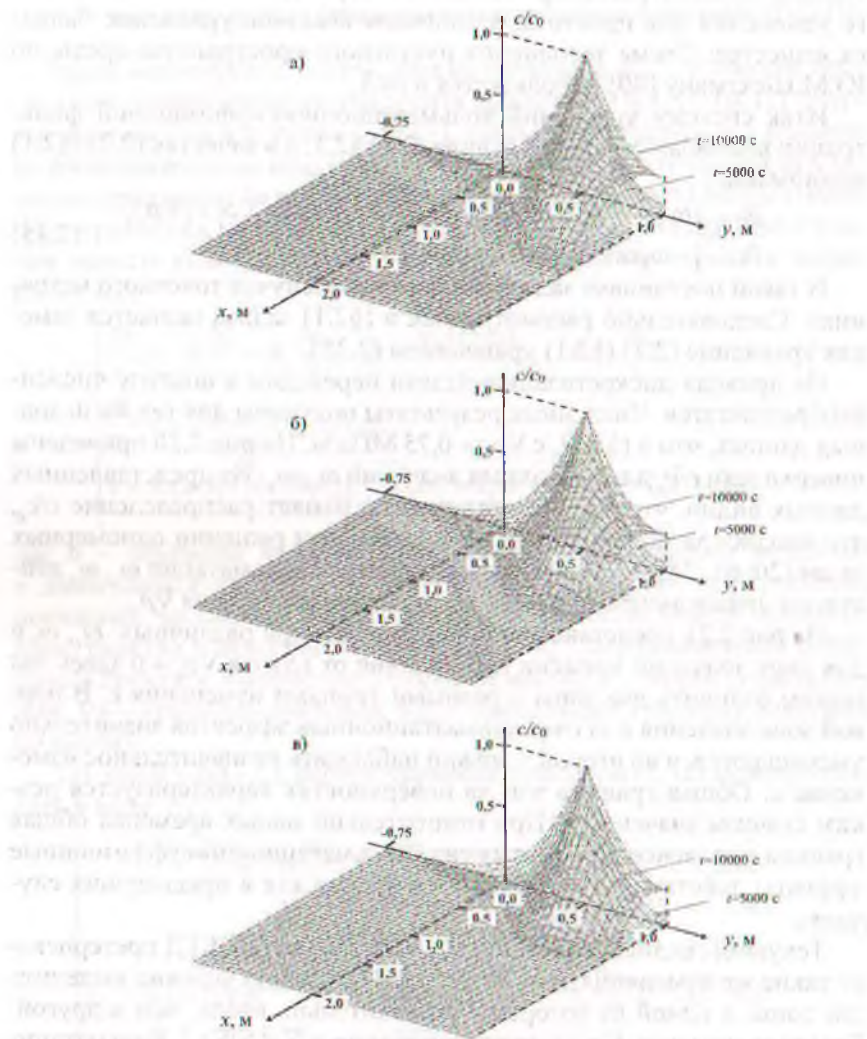


Рис. 2.20. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

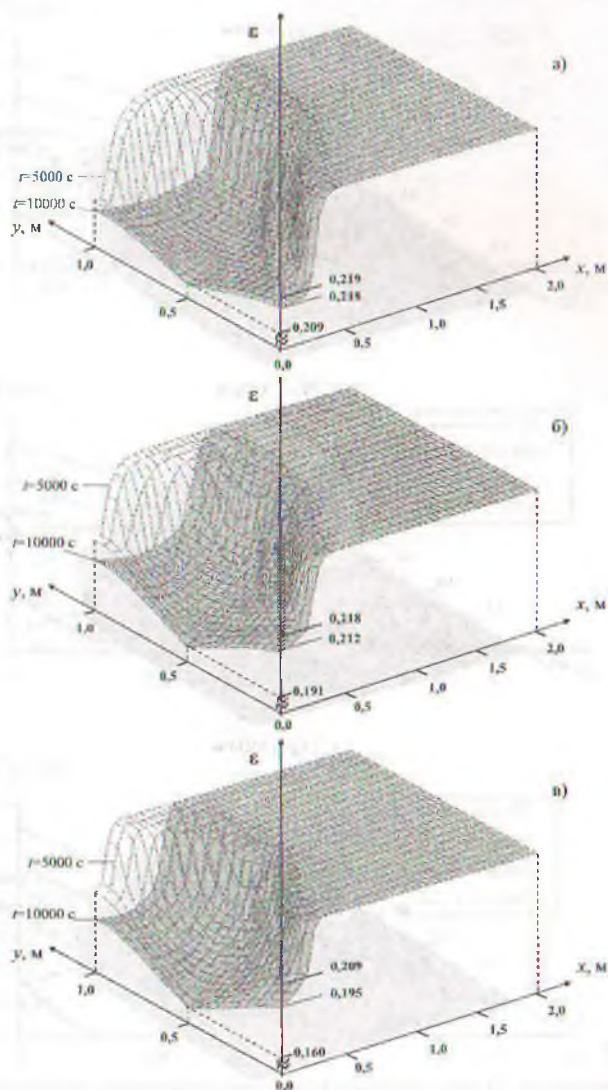


Рис. 2.21. Поверхности пористости в R^* при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

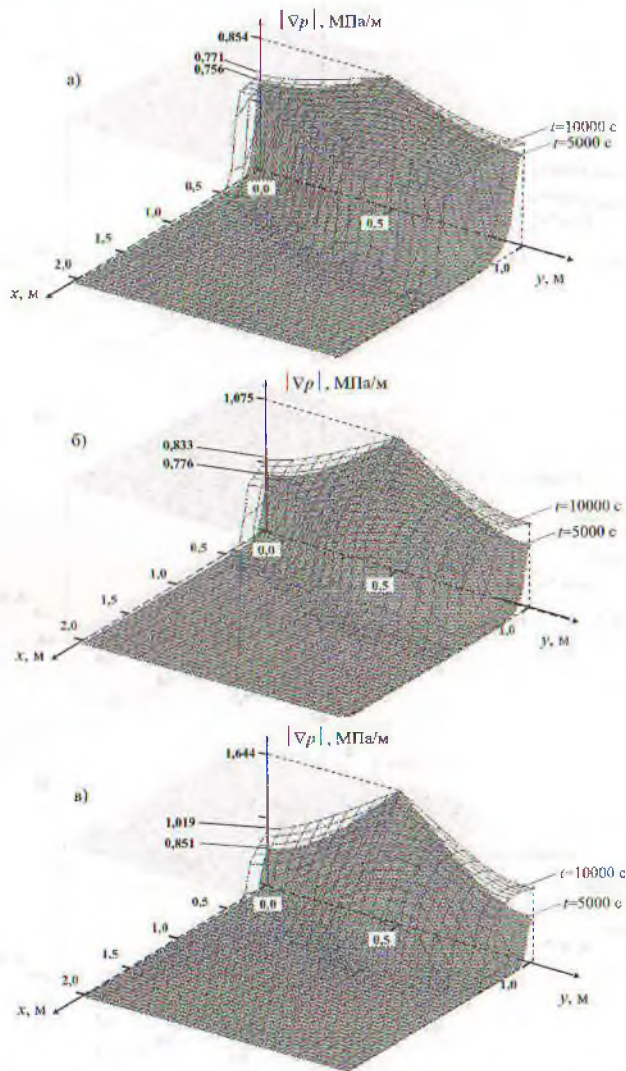


Рис. 2.22. Поверхности $|\nabla p|$ в R^+ при $D_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

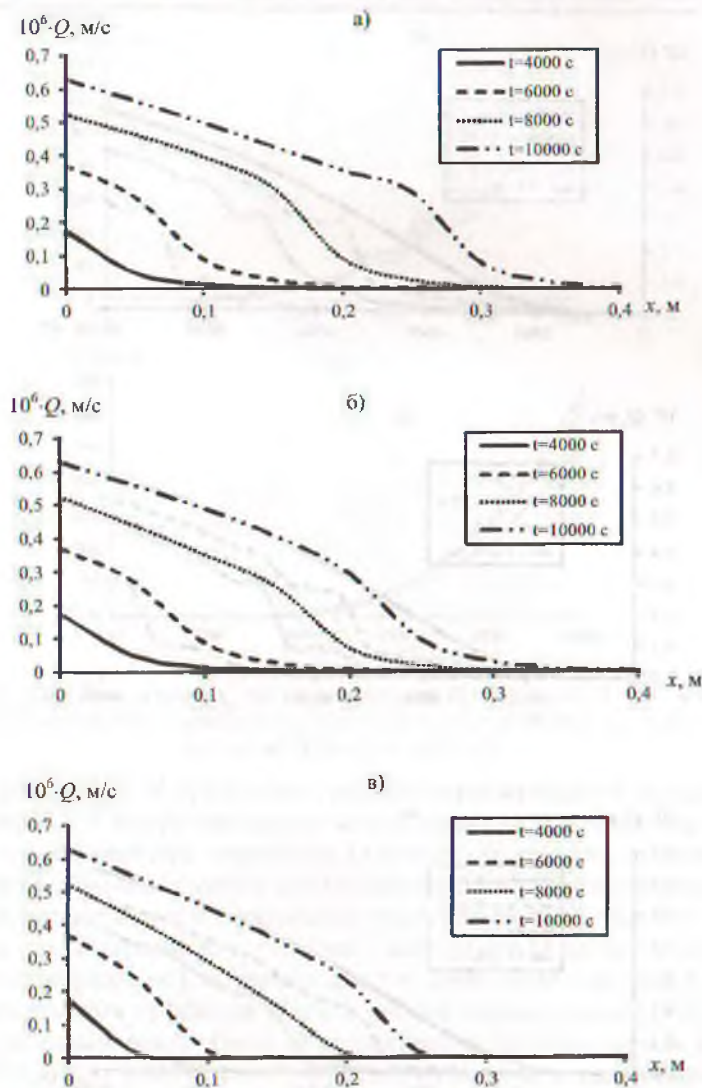


Рис. 2.23. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^1 и R^2 в различные моменты времени при $D_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3 = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1 = 0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2 = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

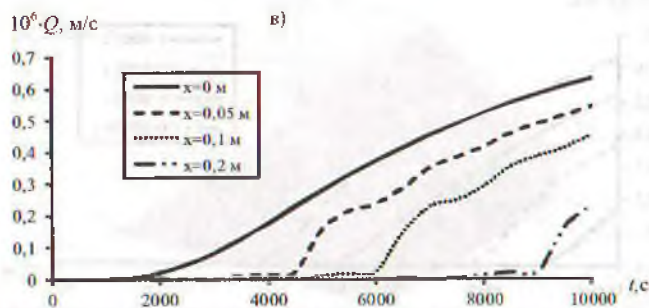
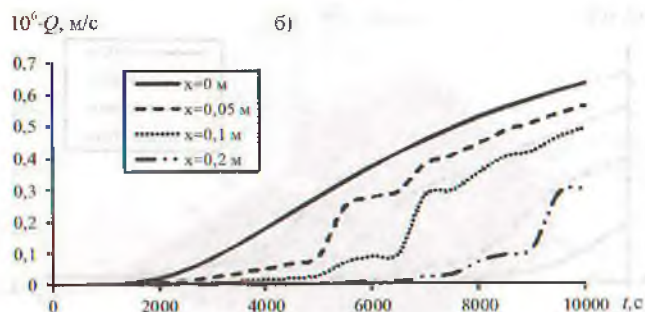
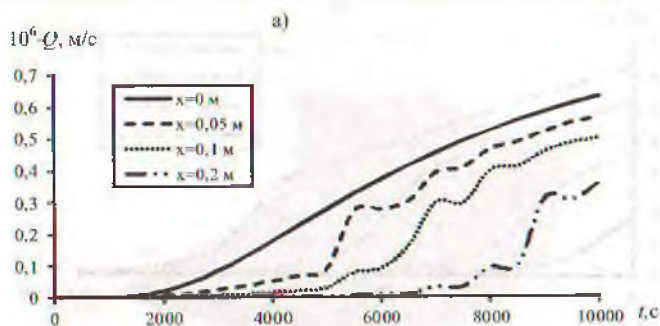


Рис. 2.24. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

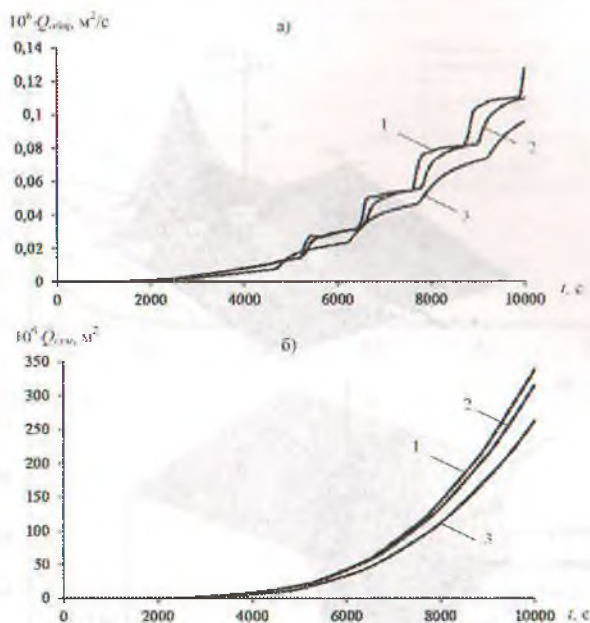


Рис. 2.25. Изменение $Q_{эфф}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$ (3).

На рис.2.23, 2.24 приведены графики относительного массообмена Q через $y = 0$ в различные моменты времени и в различных точках $y = 0$. В характере изменения Q можно обнаружить относительный излом, что объясняется достижением фронта превышения $|\nabla p|$ над $|\nabla p_c|$ границы $y = 0$. При малых временах, когда фронт $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ еще не достиг границы $y = 0$, темп изменения Q является относительно однородным (см. линии при $t = 2000, 4000 \text{ с}$ на рис.2.23). В зоне отсутствия суффозии (зона с чистой кольтатацией) $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$ относительный массообмен Q существенно меньше, чем в зоне с $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. При уменьшении эффектов суффозии и увеличении эффектов кольтатации в точках $x > 0$ значения Q уменьшаются. Кроме того, массообменный поток образуется при сравнительно меньших ε . Последнее объясняется уменьшением зоны распространения c/c_0 при уменьшении суффозии и увеличении кольтатации.

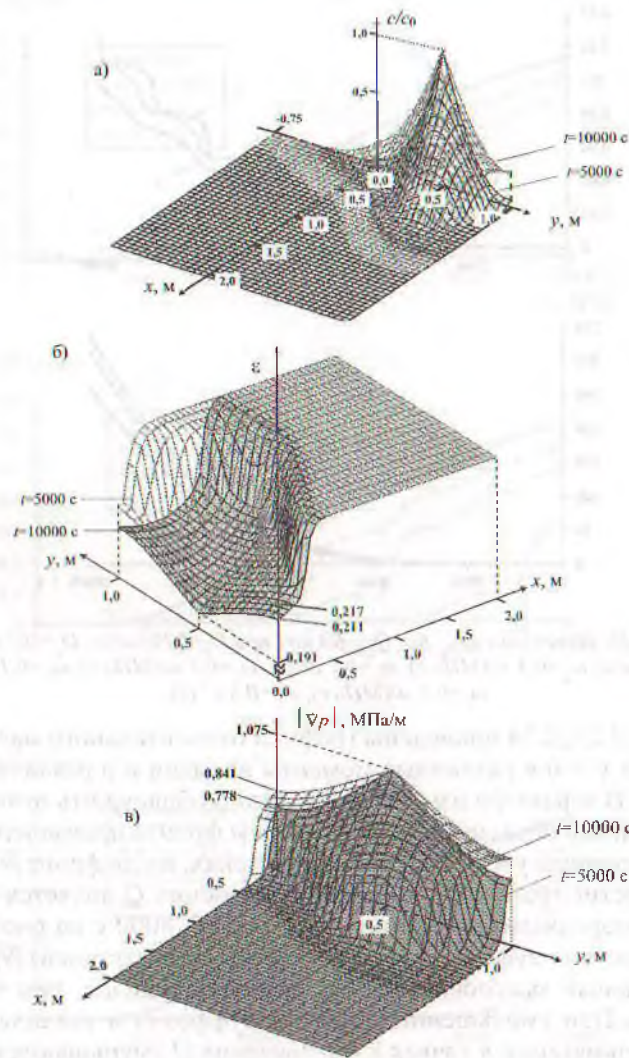


Рис. 2.26. Поверхности c/c_0 (а), ε (б), $|\nabla p|$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа} \cdot \text{с)}$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

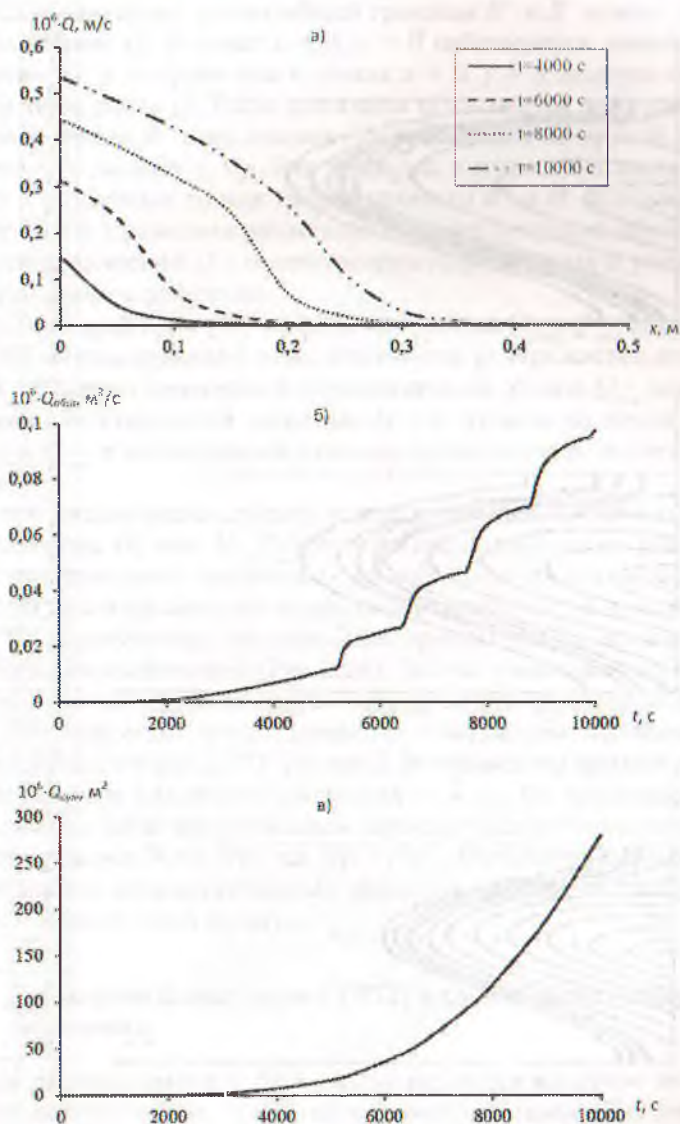


Рис. 2.27. Изменение Q (а), $Q_{\text{обм}}$ (б), $Q_{\text{сум}}$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

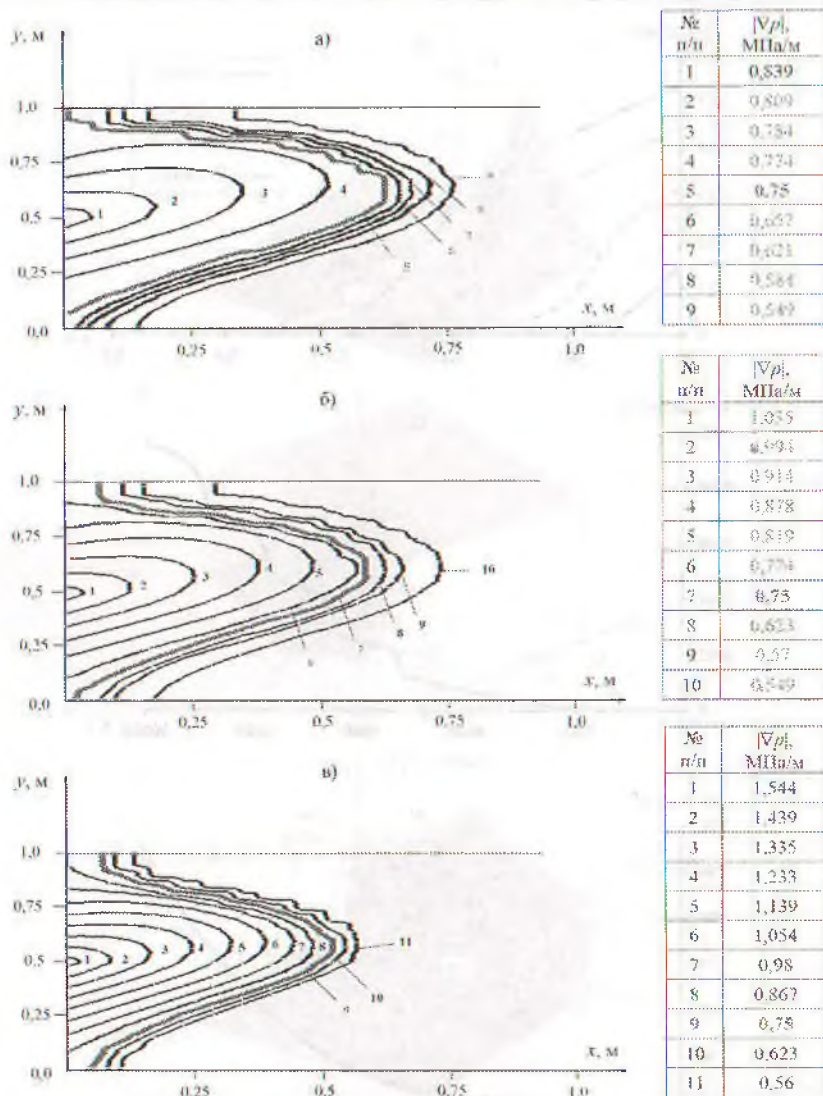


Рис. 2.28. Линии равных уровней $|\nabla p|$ при $t = 5000$ с; и а) $\omega_1 = 0,5$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,5$ с⁻¹.

В отдельно взятых точках общей границы R^+ и R^- можно наблюдать увеличение Q . В точке $x = 0, y = 0$ наблюдается равномерное увеличение Q , в то время как в точках $x > 0, y = 0$ получен пульсирующий темп роста Q . Такая динамика объясняется тем, что $|\nabla p|$ в различных точках R^+ преодолевая $|\nabla p_c|$ переходит на другой режим, что отразится на полях $\varepsilon, \nabla p$. Это приводит к пульсирующему темпу роста Q в различных точках общей границы R^+ и R^- за исключением точки $(0, 0)$. Сравнивая различные графики нетрудно обнаружить уменьшение значений Q с ослаблением суффозионных и усилением кольтматационных эффектов.

На основе графиков Q (Рис.2.23) построены $Q_{\text{общ}}, Q_{\text{сум}}$ от времени (Рис.2.25). Пульсирующий темп изменения Q отражается на динамике $Q_{\text{общ}}$, однако суммарный относительный расход $Q_{\text{сум}}$ малочувствителен пульсирующей динамике Q , т.е. пульсации темпа увеличения Q в $Q_{\text{сум}}$ в значительной степени сглаживаются за счет интегрирования.

Как и в предыдущих случаях анализировалась задача с меньшими значениями D_3 чем D_2 . Результаты представлены на рис.2.26 – 2.28. С уменьшением значения D_3 за счет отличия его значения от D_2 на $x \geq 0, y = 0$ происходит излом поверхности c/c_0 , а на поверхностях $\varepsilon, \nabla p$ характерных изменений не происходит, за исключением изменения самих значений (Рис.2.26). За счет уменьшения D_3 относительный поток Q уменьшается по сравнению с случаем $\bar{D}_3 = D_3$ (Рис.2.23б), что, естественно, приводит к занижению значений $Q_{\text{общ}}, Q_{\text{сум}}$ (Ср. рис.2.25 и рис.2.27). На рис.2.28 приведены кривые равных уровней $|\nabla p|$ при различных значениях ω_1 и ω_2 . Из представленных кривых можно четко проследивать характер распространения фронта смены режима $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$ на $|\nabla p| > |\nabla p_c|$. Ослабление суффозионных и усиление кольтматационных эффектов приводит к замедлению распространения этого фронта.

2.4. Двумерная фильтрация с ПСГД в случае полосообразного источника

Здесь рассмотренная в §2.3 задача решается в случае полосообразного источника, т.е. граничного режима, заданного на полосообразной границе. Как и в §2.2, граничный режим на $x = 0, 0 \leq y \leq h$ задается так

$$c = \begin{cases} c_0, & x=0, \quad \gamma_1 h \leq y \leq \gamma_2 h, \\ 0, & x=0, \quad 0 \leq y < \gamma_1 h, \quad \gamma_2 h < y \leq h, \end{cases}$$

где γ_1, γ_2 — заданные числа, $0 \leq \gamma_i \leq 1, \gamma_1 \leq \gamma_2, i=1,2, c_0 = \text{const}$.

Методика численного решения данной задачи не отличается от методики, изложенной в §2.1, 2.2. Поэтому не останавливаясь на ходе получения решения приводим только результаты. Численные расчеты проводились при тех же исходных данных как в §2.3 и при $\gamma_1 = 0,4, \gamma_2 = 0,6$.

На рис.2.29 показаны поверхности относительной концентрации c/c_0 при различных ω_1, ω_2 . Роль ∇p_c , как и в предыдущих случаях, здесь особо не проявляется. Можно заметить относительно большее изменение c/c_0 в R^- , что объясняется более близким расположением границы источника к линии $y=0, x>0$.

По сравнению с точечным граничным источником (§2.3) здесь пористость уменьшается в относительно большей зоне, ширина зоны значительно больше (Рис.2.30). На поверхностях можно обнаружить четкую границу, разделяющую области с $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ и $|\nabla p| \leq |\nabla p_c|$. Поле градиентов давления также занимает более широкую область в R^+ и значения ∇p в соответствующих точках больше, чем в случае точечного источника (§2.3) при одинаковых других параметрах задач (Рис.2.31). Относительный массообмен через общую границу R^+ и R^- , т.е. $y=0$, показан на рис.2.32. Сравнивая графики с соответствующими графиками рис.2.23 заметим, что здесь Q имеет большие значения, чем в случае точечного источника. Можно наблюдать также более значительное внедрение в глубь пласта зоны появления Q . Так в случае полоскообразного источника при $t=10000$ с зона изменения Q доходит до $x=0,5$ в то время как в случае точечного источника — до $\sim 0,4$ м. В отдельных точках границы $y=0, x \geq 0$ Q (Рис.2.33) имеет такую же динамику, как в случае точечного источника (Рис.2.24). Однако здесь можно заметить увеличение значений Q и более раннее появление потока при соответствующих временах по сравнению со случаем точечного источника.

Общий и суммарный относительные потоки через границу R^+ и R^- показаны на рис.2.34. В обоих потоках можно наблюдать увеличение значений при усилении суффозионных и ослаблении кольматационных эффектов в R^+ . Пульсирующий темп увеличения Q наблюдается для $Q_{\text{общ}}$, а для $Q_{\text{сум}}$ пульсации достаточно сглажены. Но во всех случаях отмечается монотонный рост $Q_{\text{общ}}, Q_{\text{сум}}$. Те немонотонные изменения, что были получены в задачах с входом смеси по всей границе $x=0, 0 \leq y \leq h$ (§1.4) здесь не отмечаются.

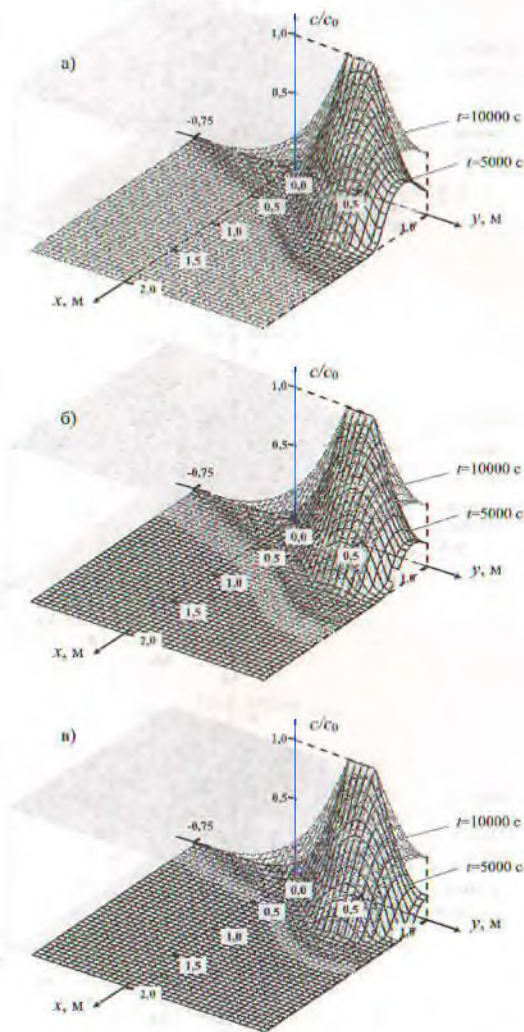


Рис. 2.29. Поверхности относительной концентрации c/c_0 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5$; $\omega_2=0,1$; б) $\omega_1=0,1$; $\omega_2=0,1$; в) $\omega_1=0,1 \text{ М}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

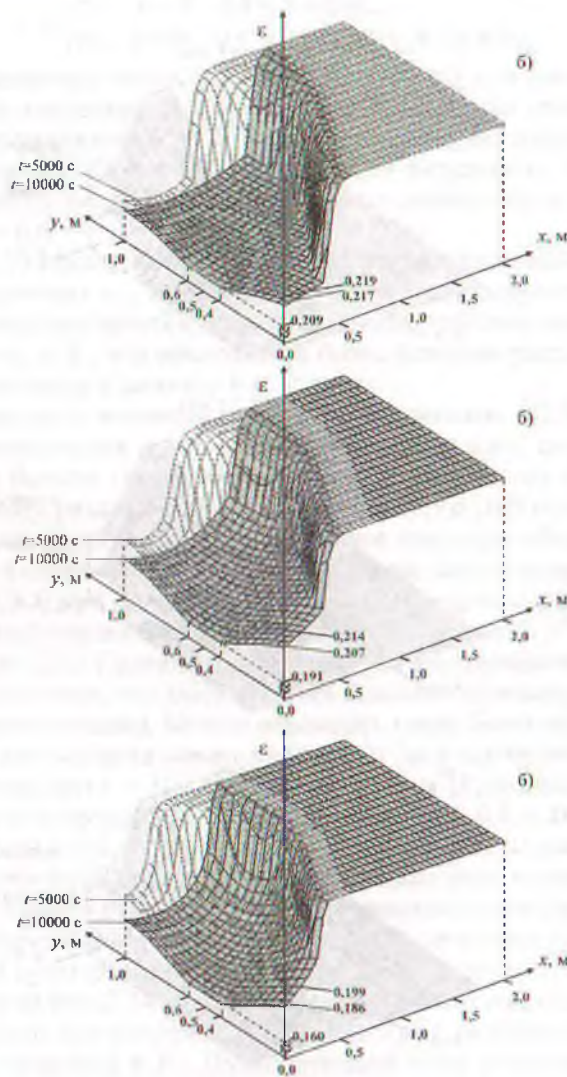


Рис. 2.30. Поверхности пористости в R^+ при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

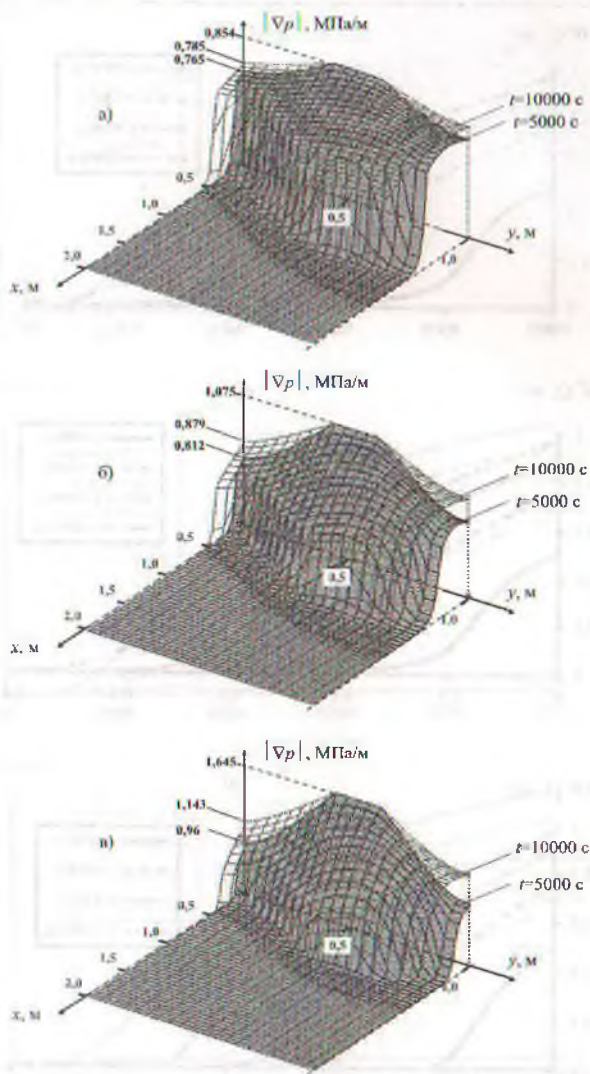


Рис. 2.31. Поверхности градиента давления в R^2 при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

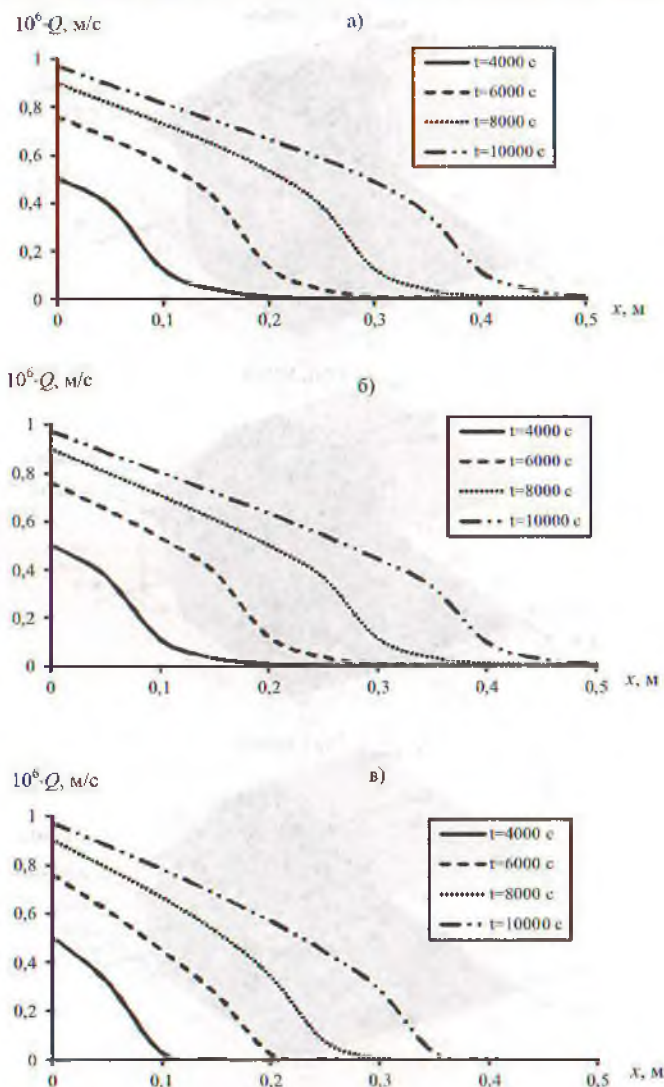


Рис. 2.32. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R' и R в различные моменты времени при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

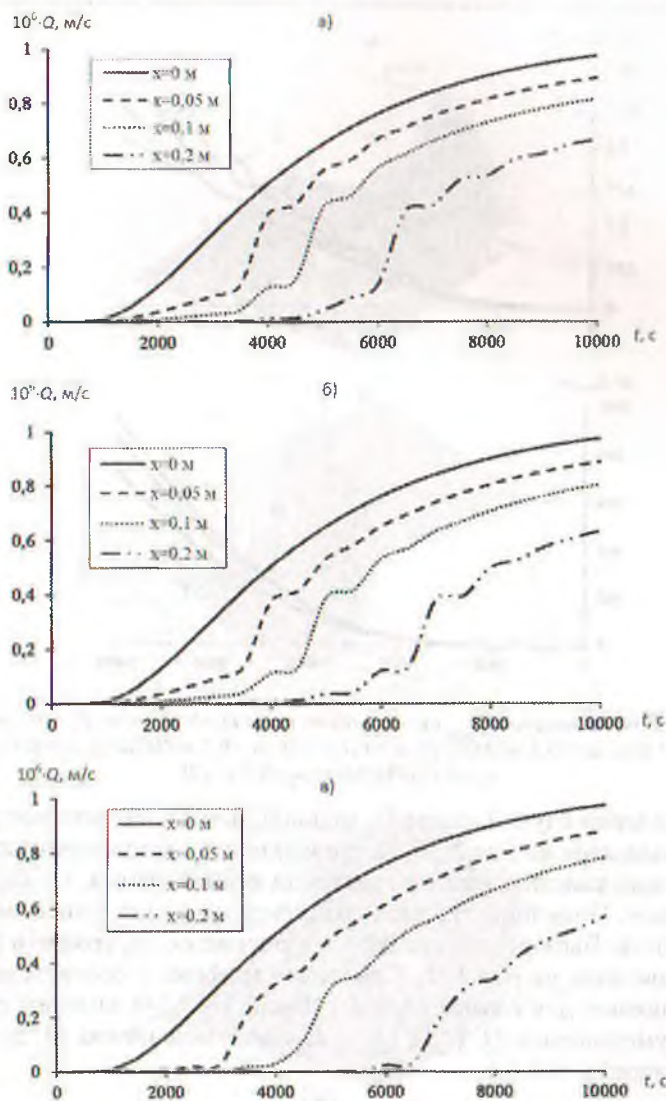


Рис. 2.33. Изменение Q по t в различные x при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$; и а) $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; б) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$; в) $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$.

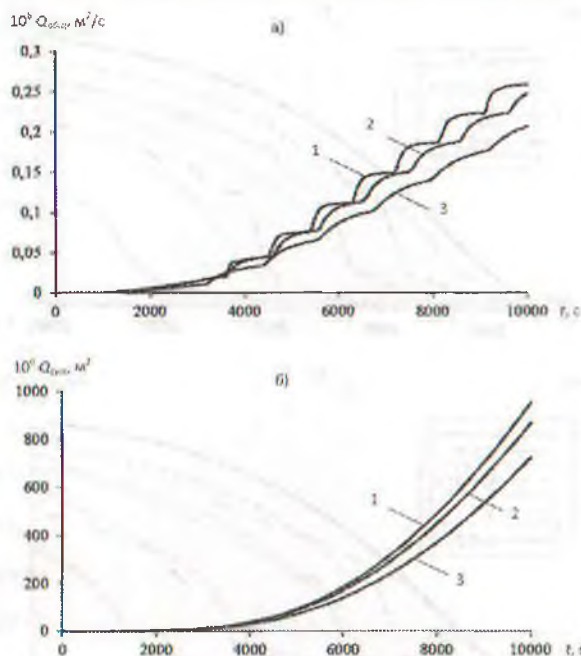


Рис. 2.34. Изменение $Q_{обш}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,5 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,5 \text{ с}^{-1}$ (3).

Исследован случай, когда D_3 меньше, чем D_2 . Некоторые результаты приведены на рис.2.35. На поверхностях концентрации c/c_0 на $y=0$ можно заметить разрыв градиента концентрации, т.е. $\partial c/\partial y$ терпит разрыв. Поля пористости и градиента давления существенно не изменяются. Выборочно, для одних значений ω_1 , ω_2 графики Q , $Q_{обш}$, $Q_{сум}$ приведены на рис.2.36. Сравнивая графики с соответствующими графиками для случая $D_2 = D_3$ (Рис.2.32–2.34) заметим существенное уменьшение Q , $Q_{обш}$, $Q_{сум}$. За счет уменьшения D_3 поток вещества через $y=0$, т.е.

$$Q = D_3 \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0},$$

уменьшается, что в результате приводит к уменьшению $Q_{обш}$, $Q_{сум}$ также.

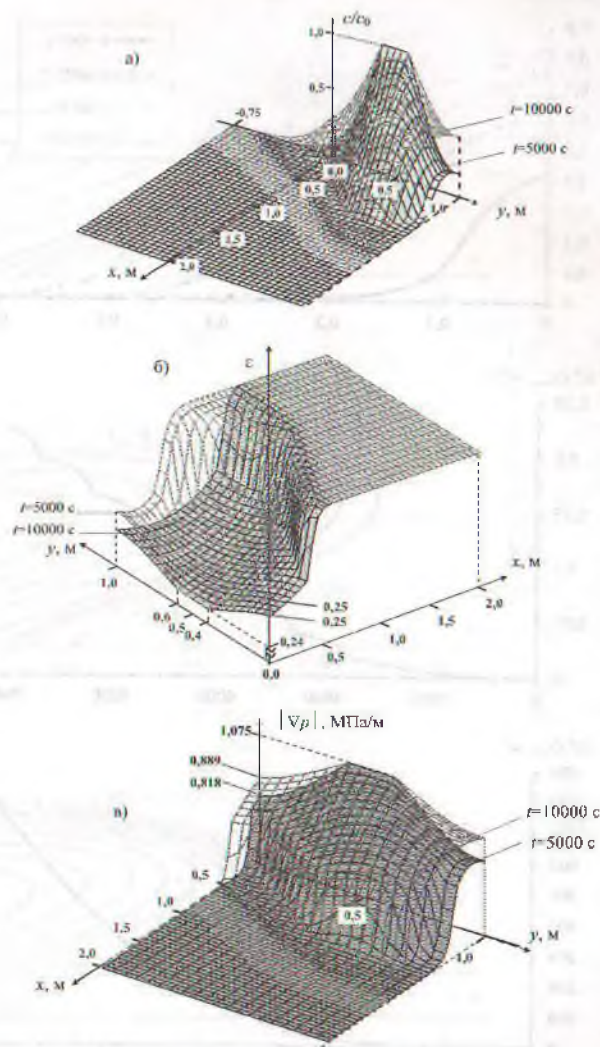


Рис. 2.35. Поверхности c/c_0 (а), ε (б), $|\nabla p|$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_2=10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ и $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

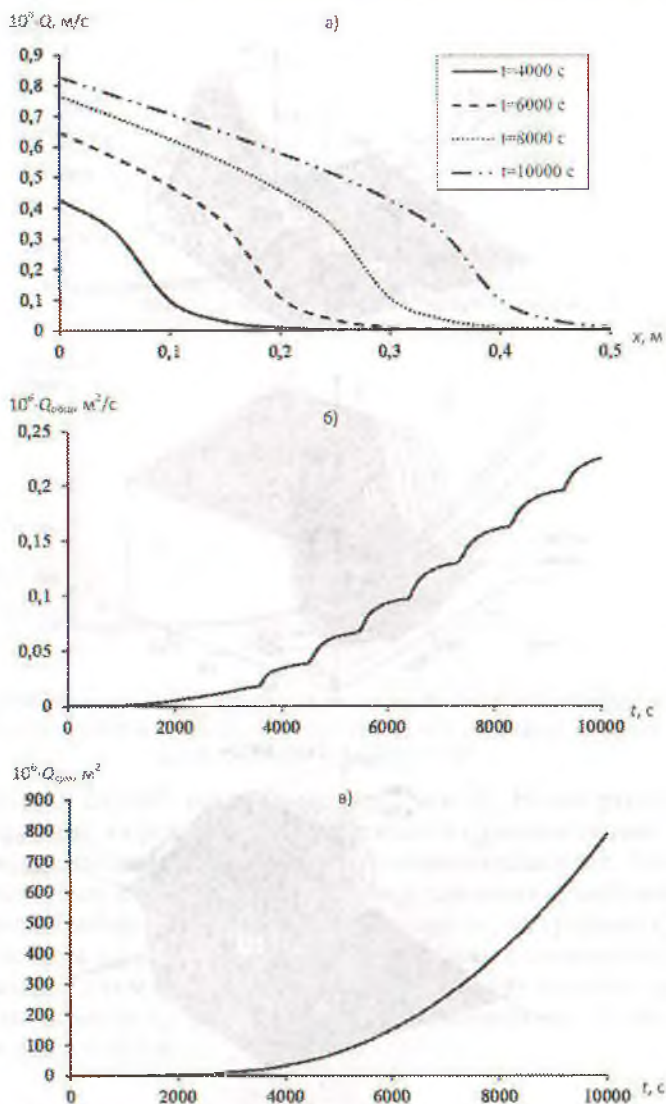


Рис.2.36. Изменение Q (а), $Q_{\text{обм}}$ (б), $Q_{\text{сум}}$ (в) при $D_1=5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

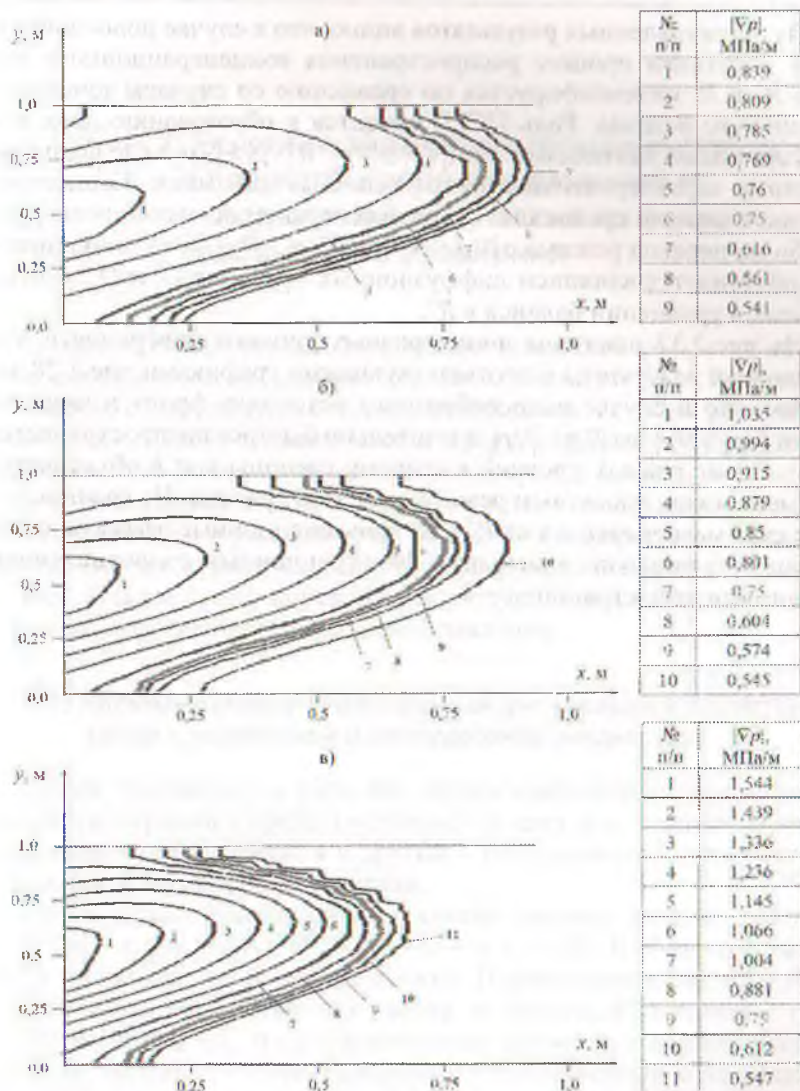
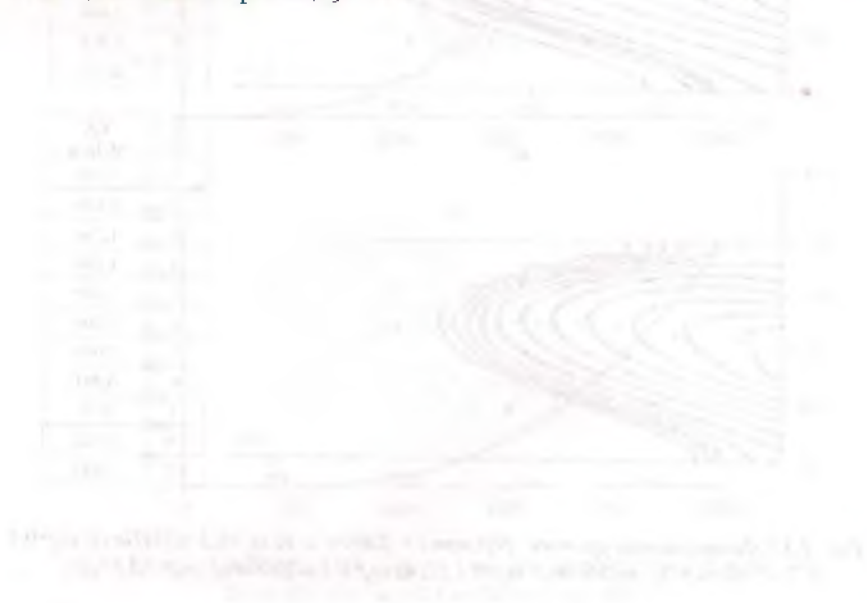


Рис. 2.37. Линии равных уровней $|\nabla p|$ при $t = 5000$ с; и а) $\omega_1 = 0,5$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; б) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,1$ с⁻¹; в) $\omega_1 = 0,1$ м/(МПа·с); $\omega_2 = 0,5$ с⁻¹.

Из представленных результатов видно, что в случае полосообразного источника процесс распространения концентрационного поля в R^+ и R^- интенсифицируется по сравнению со случаем точечного граничного режима. Роль ПСГД сводится к образованию двух зон с различными значениями $|\nabla p|$ ($|\nabla p| \leq |\nabla p|_c$ и $|\nabla p| > |\nabla p|_c$), где фильтрационные характеристики имеют различные динамики. Концентрационное поле по сравнению с другими характеристиками реагирует слабо на переход режима с $|\nabla p| \leq |\nabla p|_c$ на $|\nabla p| > |\nabla p|_c$. Это, по-видимому, объясняется влиянием диффузионных эффектов D_1 и D_2 , учитываемых в уравнении баланса в R^+ .

На рис.2.37 показаны линии равных уровней поверхности ∇p . Сравнивая результаты с соответствующими графиками рис.2.28 заметим, что в случае полосообразного источника фронт изменения $|\nabla p|$ от $|\nabla p| \leq |\nabla p|_c$ на $|\nabla p| > |\nabla p|_c$ значительно быстрее распространяется в R^+ . Сдвиг равных уровней в сторону границы $y = h$ объясняется неймановским граничным режимом на этой границе. На границе $y = 0$ за счет массопереноса из R^+ в R^- кольматационные эффекты ослаблены, что приводит к меньшим фильтрационным сопротивлениям в зоне, близкой к границе $y = 0$.



ГЛАВА 3. Решение задач фильтрации суспензии в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью на основе обобщенного уравнения

В данной главе процесс фильтрации суспензий изучается на основе схематизации насыщения порового объема по Ю.М.Шехтману. В отличие от предыдущих исследований здесь вводятся различные поля концентраций осевшей массы. Уравнение баланса массы записывается относительно концентрации твердого взвешенного вещества в движущейся смеси с учетом кинетики насыщенности осевшими частицами в рыхлом теле. Рассмотрены различные варианты подачи смеси в пористую среду: точечная, по всей ширине среды, по полосе. В нескольких параграфах исследуются задачи с учетом предельного суффозионного градиента давления.

3.1. Кольматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью

Дадим постановку и решение задачи кольматационно-суффозионной фильтрации в среде, состоящей из двух зон, в одной из которых жидкость подвижна, а в другой – неподвижна. Задача рассматривается в двумерной постановке.

Пусть область исследования задачи состоит из двух частей: $R^+ \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h\}$ и $R^- \{0 \leq x < \infty, -\infty < y \leq 0\}$. В области R^+ жидкость подвижна, а в R^- – неподвижна. Первоначально области R^+ и R^- заполнены жидкостью без частиц. В область R^+ начиная с $t > 0$ через границу $x = 0, 0 \leq y \leq h$ поступает жидкость с концентрацией твердых частиц $\delta_0 = \text{const}$. Продольный и поперечный коэффициенты диффузии, обозначим через D_1 и D_2 , соответственно.

Пусть жидкость движется в области R^+ параллельно оси Ox со скоростью фильтрации $v_0 = \text{const}$. Тогда коэффициент D_1 нужно рассматривать как коэффициент гидродинамической дисперсии

$$D_1 = D_0 + \lambda \frac{v_0}{m}, \quad (3.1)$$

где $D_0 = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ — коэффициент рассеивания, v_0/m — физическая скорость движения жидкости.

Верхняя граница области R^+ непроницаема для жидкости и частиц. В R^- по мере продвижения взвешенных частиц в глубь области происходит их осаждение (кольматация), частичный их срыв из захваченного (осажденного) состояния и дальнейший перенос в другие поры (суффозия). Баланс вещества (частиц) в пористой среде для обобщенной схемы заполнения порового пространство дается уравнение Ю.М.Шехтмана [80]. Примем, что кинетика процесса кольматации и суффозии определяется уравнением, предложенным ранее в [38, 66]. При этих предположениях процесс кольматационно-суффозионного переноса вещества в области R можно описать уравнениями

$$q(t) \frac{\partial \delta}{\partial x} = [m_0 \delta - m_0(1-\varepsilon)] \frac{\partial \zeta}{\partial t} - m_0(1-\zeta) \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m} \right) \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] + D_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 |\nabla p| \zeta, \quad (3.3)$$

$$v_0 = K(m) (|\nabla p| - |\nabla p_0|), \quad K(m) = k_0 m = k_0 m_0 (1 - \zeta(1 - \varepsilon)), \quad (3.4)$$

где ζ — насыщенность осевшими частицами в рыхлом теле; δ — объемная концентрация твердого взвешенного вещества в движущейся смеси; m_0 , m — первоначальная и текущая пористости среды; ω_0 , ω_1 — параметры, характеризующие интенсивность кольматации и суффозии, соответственно; ∇p — градиент давления; ∇p_0 — предельный градиент давления по потоку; $q(t)$ — суммарный расход жидкой и твердой фаз через единичную площадь поперечного сечения пористой среды; γ — параметр, характеризующий интенсивность влияния ∇p на кольматацию; v — скорость фильтрации, ε — пористость осевшей массы.

В области R^- происходит только диффузионный перенос вещества. Учитывая плохую проницаемость этой области предположим, что процесс переноса вещества происходит с некоторым эффективным коэффициентом диффузии D_3 , отличающимся от молекулярного коэффициента диффузии D_0 . Кроме того, в этой области поперечным коэффициентом диффузии, что характеризует перенос вещества в направлении x , пренебрегаем. Этот коэффициент определяется через коэффициент молекулярной диффузии D_0 [91]

$$D_3 = \tau D_0,$$

где τ – коэффициент извилистости. Обычно этот коэффициент меньше молекулярного коэффициента диффузии.

Тогда процесс переноса вещества в R^- можно описать обычным уравнением диффузии

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in R^-. \quad (3.5)$$

Через общую границу областей R^+ и R^- происходит перенос массы вещества (частиц). В R^+ когда $x \rightarrow \infty$, и в R^- когда $y \rightarrow -\infty$ считаем, что потоки вещества отсутствуют. Это по сути дела означает, что рассматривается такой начальный этап распространения примеси по пласту, когда концентрационные профили еще не достигают границу $x \rightarrow \infty$ в R^+ и $y \rightarrow -\infty$ в R^- . На общей границе областей R^+ и R^- , т.е. на $y = 0$, потребуем непрерывность изменения концентрации и потока вещества. При сформулированных ограничениях начальные и граничные условия задачи имеет вид:

$$\delta = 0 \text{ в } R^+ \cup R^- \text{ при } t = 0, \quad (3.6)$$

$$\zeta = 0 \text{ в } R^+ \text{ при } t = 0, \quad (3.7)$$

$$\delta = \delta_0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0, \quad x = \infty, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = 0, \quad y = h, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (3.10)$$

$$\delta|_{y=+0} = \delta|_{y=-0}, \quad (3.11)$$

$$D_2 \frac{\partial \delta}{\partial y} \Big|_{y=+0} = D_3 \frac{\partial \delta}{\partial y} \Big|_{y=-0}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = 0, \quad y = -\infty, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (3.13)$$

В данной постановке концентрация вещества в $R^+ \cup R^-$ является функцией $\delta = \delta(t, x, y)$.

Задача (3.2) – (3.13) решена методом конечных разностей [29]. Для этого построим сетку в области $R^+ \cup R^-$, $\omega_{h_1 h_2 \tau} = \omega_{h_1 h_2 \tau}^+ \cup \omega_{h_1 h_2 \tau}^-$ где $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+ = \{(t_k, x_i, y_j) \mid t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = j h_2, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J^+}, j = \overline{0, 1, \dots, J^+}, \tau = T/K, h_2 = h/J^+\}$, $\omega_{h_1 h_2 \tau}^- = \{(t_k, x_i, y_j) \mid t_k = \tau k, x_i = i h_1, y_j = -h_2 j, k = \overline{0, K}, i = \overline{0, 1, \dots, J^+}, j = \overline{0, 1, \dots, \tau = T/K}\}$. В этой сетке: h_1 – шаг сетки по направлению x , h_2

— шаг сетки по направлению y в R^+ , h_2^- — шаг сетки по направлению y в R^- , τ — шаг сетки по времени, T — максимальное время, в течение которого исследуется процесс, K — количество интервалов сетки по t , J^+ — количество интервалов сетки по y в R^+ .

Уравнение (3.2) представим в следующем виде

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{1}{v_0} [\delta - (1 - \varepsilon)] \frac{\partial \zeta}{\partial t} - A_2(\zeta) \frac{\partial \delta}{\partial t} + A_3(\zeta) \frac{\partial \delta}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}, \quad (3.14)$$

$$\text{где } A_2(\zeta) = \frac{1 - \zeta}{v_0},$$

$$A_3(\zeta) = \frac{\lambda(1 - \varepsilon)}{m_0^2 [1 - \zeta(1 - \varepsilon)]^2},$$

$$D_1 = \frac{1}{v_0 m_0} \left[D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 [1 - \zeta(1 - \varepsilon)]} \right],$$

$$D_2 \sim \frac{1}{v_0 m_0} D_2.$$

Уравнение (3.14) преобразуем так:

$$[1 - A_3(\zeta)] \frac{\partial \delta}{\partial x} + A_2(\zeta) \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{1}{v_0} [\delta + \varepsilon - 1] \frac{\partial \zeta}{\partial t} + D_1 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}, \quad (3.15)$$

На введенной сетке аппроксимируем уравнения (3.15), (3.5) следующим образом

$$\begin{aligned} & [1 - A_3(\zeta_{ij}^{k+1/2})] \frac{\delta_{ij}^{k+1/2} - \delta_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} + A_2(\zeta_{ij}^{k+1/2}) \frac{\delta_{ij}^{k+1/2} - \delta_{ij}^k}{0,5\tau} = \\ & = \frac{1}{v_0} [\delta_{ij}^{k+1/2} + \varepsilon - 1] \frac{\zeta_{ij}^{k+1/2} - \zeta_{ij}^k}{0,5\tau} + D_1 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) \Lambda_1 \delta_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ \delta_{ij}^k \\ & i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J^+ - 1}, k = 0, 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & [1 - A_3(\zeta_{ij}^{k+1})] \frac{\delta_{ij}^{k+1/2} - \delta_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1} + A_2(\zeta_{ij}^{k+1}) \frac{\delta_{ij}^{k+1} - \delta_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = \\ & = \frac{1}{v_0} [\delta_{ij}^{k+1} + \varepsilon - 1] \frac{\zeta_{ij}^{k+1/2} - \zeta_{ij}^k}{0,5\tau} + D_1 (\zeta_{ij}^{k+1}) \Lambda_1 \delta_{ij}^{k+1/2} + D_2 \Lambda_2^+ \delta_{ij}^{k+1} \\ & i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J^+ - 1}, k = 0, 1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\frac{\delta_{ij}^{k+1/2} - \delta_{ij}^k}{0,5\tau} = D_3 \Lambda_2^- \delta_{ij}^{k+1/2}, \quad i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J^+ + 1}, k = \overline{0, K-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\delta_{ij}^{k+1} - \delta_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau} = D_3 \Lambda_2^- c_{ij}^{k+1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad j = \overline{1, J^+ + 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3.19)$$

где

$$\Lambda_1 \delta_{ij}^k = \frac{\delta_{i-1,j}^k - \delta c_{ij}^k + \delta_{i+1,j}^k}{h_1^2}, \quad \Lambda_2^+ \delta_{ij}^k = \frac{\delta_{i,j-1}^k - 2\delta_{ij}^k + \delta_{i,j+1}^k}{(h_2^+)^2},$$

$$\Lambda_2^- \delta_{ij}^k = \frac{\delta_{i,j-1}^k - 2\delta_{ij}^k + \delta_{i,j+1}^k}{(h_2^-)^2},$$

$\delta_{ij}^{k+1/2}$ — значения сеточной функции на половинном временном слое $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$.

Уравнение (3.3) на $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+$ аппроксимируем следующим образом

$$\zeta_{ij}^{k+1/2} = \zeta_{ij}^k + 0,5\tau \left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{ij}^{k+1/2}} \delta_{ij}^k - \omega_0 |\nabla p|_{ij}^{k+1/2} \zeta_{ij}^k \right), \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3.20)$$

$$\zeta_{ij}^{k+1} = \zeta_{ij}^{k+1/2} + 0,5\tau \left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{ij}^{k+1}} \delta_{ij}^{k+1/2} - \omega_0 |\nabla p|_{ij}^{k+1} \zeta_{ij}^{k+1/2} \right), \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3.21)$$

Уравнение (3.4) в дискретной форме имеет вид:

$$|\nabla p|_{ij}^{k+1/2} = \frac{v_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta_{ij}^k (1 - \varepsilon))} + |\nabla p_0|, \quad (3.22)$$

$$|\nabla p|_{ij}^{k+1} = \frac{v_0}{k_0 m_0 (1 - \zeta_{ij}^{k+1/2} (1 - \varepsilon))} + |\nabla p_0|. \quad (3.23)$$

Начальные и граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$\delta_{ij}^0 = 0 \quad \text{в } \omega_{h_1 h_2 \tau}, \quad (3.24)$$

$$\zeta_{ij}^0 = \zeta_0 \quad \text{в } \omega_{h_1 h_2 \tau}^+, \quad (3.25)$$

$$\delta_{0,j}^k = \delta_0, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.26)$$

$$\delta_{i,j}^k = \delta_{i-1,j}^k, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.27)$$

$$\delta_{i,j^{*+1}}^k = \delta_{i,j^*}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.26)$$

$$\delta_{i,j=0}^k = \delta_{i,-1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.28)$$

$$D_2 \frac{\delta_{i,j}^k - \delta_{i,0}^k}{h_2^+} = D_2 \frac{\delta_{i,0}^k - \delta_{i,-1}^k}{h_2^-}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.29)$$

$$\delta_{i,J^+}^k = \delta_{i,J^+-1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{0, K}, \quad (3.30)$$

где I, J — берутся достаточно большими, чтобы концентрационные профили не доходили до выбранных условных границ областей.

Уравнение (3.16) приводится к виду

$$A_1 \delta_{i-1,j}^{k+1/2} - B_1 \delta_{ij}^{k+1/2} + E_1 \delta_{i+1,j}^{k+1/2} = -F_{ij}^{(1)}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad J = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3.31)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{h_1^2} D_1 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) + \frac{1}{h_1} [1 - A_3 (\zeta_{ij}^{k+1/2})],$$

$$B_1 = \frac{1}{h_1} (1 - A_3 (\zeta_{ij}^{k+1/2})) + \frac{1}{0,5\tau} A_2 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) + \frac{2D_1 (\zeta_{ij}^{k+1/2})}{h_1^2} - \frac{1}{v_0} \frac{\zeta_{ij}^{k+1/2} - \zeta_{ij}^k}{0,5\tau},$$

$$E_1 = \frac{D_1 (\zeta_{ij}^{k+1/2})}{h_1^2},$$

$$F_{ij}^{(1)} = \frac{1}{0,5\tau} A_2 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) \delta_{ij}^k + \frac{D_2}{(h_2^+)^2} (\delta_{i,j-1}^k - 2\delta_{i,j}^k + \delta_{i,j+1}^k) - \frac{1}{v_0} \frac{\zeta_{ij}^{k+1/2} - \zeta_{ij}^k}{0,5\tau} (1 - \varepsilon),$$

$$A_2 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) = \frac{1 - \zeta_{ij}^{k+1/2}}{v_0},$$

$$A_3 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) = \frac{\lambda(1 - \varepsilon)}{m_0^2 [1 - \zeta_{ij}^{k+1/2} (1 - \varepsilon)]^2},$$

$$D_1 (\zeta_{ij}^{k+1/2}) = \frac{1}{v_0 m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 [1 - \zeta_{ij}^{k+1/2} (1 - \varepsilon)]} \right).$$

Уравнение (3.17) также имеет трехточечный вид

$$A_2 \delta_{i,j-1}^{k+1} - B_2 \delta_{ij}^{k+1} + E_2 \delta_{i+1,j}^{k+1} = -F_{ij}^{(2)}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad J = \overline{1, J^+ - 1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3.32)$$

где

$$A_2 = \frac{1}{(h_2^+)^2} D_2, \quad E_2 = \frac{D_2}{(h_2^+)^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{0,5\tau} A_2 (\zeta_{ij}^{k+1}) + \frac{2D_2}{(h_2^+)^2} - \frac{1}{v_0} \frac{\zeta_{ij}^{k+1} - \zeta_{ij}^{k+1/2}}{0,5\tau},$$

$$F_{ij}^{(2)} = \frac{1}{0,5\tau} A_2 (\zeta_{ij}^{k+1}) \delta_{ij}^{k+1/2} + \frac{D_1 (\zeta_{ij}^{k+1})}{h_1^2} (\delta_{i-1,j}^{k+1/2} - 2\delta_{i,j}^{k+1/2} + \delta_{i+1,j}^{k+1/2}) -$$

$$-\frac{1}{v_0} \frac{\zeta_{i,j}^{k+1} - \zeta_{i,j}^{k+1/2}}{0,5\tau} (1-\varepsilon) + \frac{1}{h_1} (1 - A_3(\zeta_{i,j}^{k+1})) (\delta_{i,j}^{k+1} - \delta_{i-1,j}^{k+1}),$$

$$A_2(\zeta_{i,j}^{k+1}) = \frac{1 - \zeta_{i,j}^{k+1}}{v_0},$$

$$A_3(\zeta_{i,j}^{k+1}) = \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{m_0^2 [1 - \zeta_{i,j}^{k+1} (1-\varepsilon)]^2},$$

$$D_1(\zeta_{i,j}^{k+1}) = \frac{1}{v_0 m_0} \left(D_0 + \frac{\lambda v_0}{m_0 [1 - \zeta_{i,j}^{k+1} (1-\varepsilon)]} \right),$$

Уравнения (3.18), (3.19) аналогично приводятся к виду

$$A_3 \delta_{i,j-1}^{k+1/2} - B_3 \delta_{ij}^{k+1/2} + E_3 \delta_{i,j+1}^{k+1/2} = -F_{ij}^{(3)}, \quad (3.33)$$

$$A_3 \delta_{i,j-1}^{k+1} - B_3 \delta_{ij}^{k+1} + E_3 \delta_{i,j+1}^{k+1} = -F_{ij}^{(4)}, \quad (3.34)$$

где

$$A_3 = 0,5\tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2}, \quad B_3 = 1 + \tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2}, \quad E_3 = 0,5\tau \frac{D_3}{(h_2^-)^2},$$

$$F_{ij}^{(3)} = \delta_{ij}^k, \quad F_{ij}^{(4)} = \delta_{ij}^{k+1/2}.$$

Устанавливается следующая последовательность расчета. Вычисляя по (3.22) $|\nabla p|_{ij}^{k+1/2}$ по (3.20) определяем $\zeta_{i,j}^{k+1/2}$. Затем решаем (3.16), (3.18) и определяем $\delta_{i,j}^{k+1/2}$. Определив поле градиента давления $|\nabla p|_{i,j}^{k+1}$ согласно (3.23) и используя эти значения в (3.21) определяем ζ_{ij}^{k+1} в $\omega_{h_1 h_2 \tau}^+$. Решая (3.18), (3.19) находим δ_{ij}^{k+1} в $\omega_{h_1 h_2 \tau}^-$.

На рис.3.1 – 3.6 приведены результаты расчетов для некоторого набора параметров задачи. Как видно из рис.3.1 в R^+ формируется зона увеличения концентрации, которая увеличивается с увеличением времени. При увеличении эффектов суффозии, уменьшении эффектов кольматации зона продвижения δ/δ_0 заметно расширяется. Это можно объяснить тем, что при уменьшении эффектов кольматации относительно больше частиц остается во взвешенном состоянии и эти частицы за счет конвекции и гидродинамической дисперсии переносятся в направлении движения жидкости. Аналогично, увеличение эффектов суффозии приводит относительно большее количество частиц во взвешенное состояние и повторяется отмеченное явление. В уравнении кинетики явления кольматации и суффозии

имеют конкурирующий характер, и это в полной мере отражается на распределении концентрации в среде. В соответствии с распределением концентрации, а точнее с ее градиентом при $y = 0$, происходит перенос массы из R^+ в R^- . На поверхностях концентрации видна область в R^- , где концентрация увеличивается. Это увеличение особенно заметно при малых x .

Концентрация осевшей массы отражена на рис.3.2. Анализируя представленные поверхности можно сделать выводы относительно действия параметров коагуляции и суффозии. Зона увеличения ζ продвигается в направлении движения жидкости, увеличение эффектов коагуляции способствует относительно большему осаждению частиц, а увеличение эффектов суффозии, наоборот, приводит к уменьшению значений поля ζ . Вблизи $y = 0$ можно заметить значительные деформации поверхностей ζ , что обусловлено массопереносом из R^+ в R^- . В отличие от предыдущих результатов здесь ζ представляет собой концентрацию осевшей массы – осевших частиц вместе с неподвижной жидкостью между ними. Поверхности текущего градиента давления (Рис.3.3) имеют аналогичную динамику. По характеру задачи $|\nabla p|$ представляет собой гидравлическое сопротивление среды на движение жидкости. Это сопротивление помимо прочих факторов определяется также коагуляционно-суффозионными эффектами. Очевидно, коагуляционные эффекты за счет заполнения порового пространства осевшими частицами при заданной скорости фильтрации должны привести к росту фильтрационных сопротивлений, а эффекты суффозии, наоборот, уменьшению их значений. Отмеченное полностью подтверждается на поверхностях $|\nabla p|$. Вблизи $y = 0$ в R^+ можно отметить значительное изменение $|\nabla p|$ по сравнению в другой части R^+ . Такое изменение обусловлено переносом массы через $y = 0$. Хотя в R^- движение жидкости отсутствует, и следовательно, не образуется поле градиентов давления, за счет изменения степени заполнения порового пространства поле градиентов давления претерпевает существенные изменения.

Специально исследовался относительный поток массы частиц через $y=0$. На рис.3.4, 3.5 приведены динамика в отдельно взятых точках и профили относительного расхода через прямой $y=0$

$$Q = D_3 \left| \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{y=0}.$$

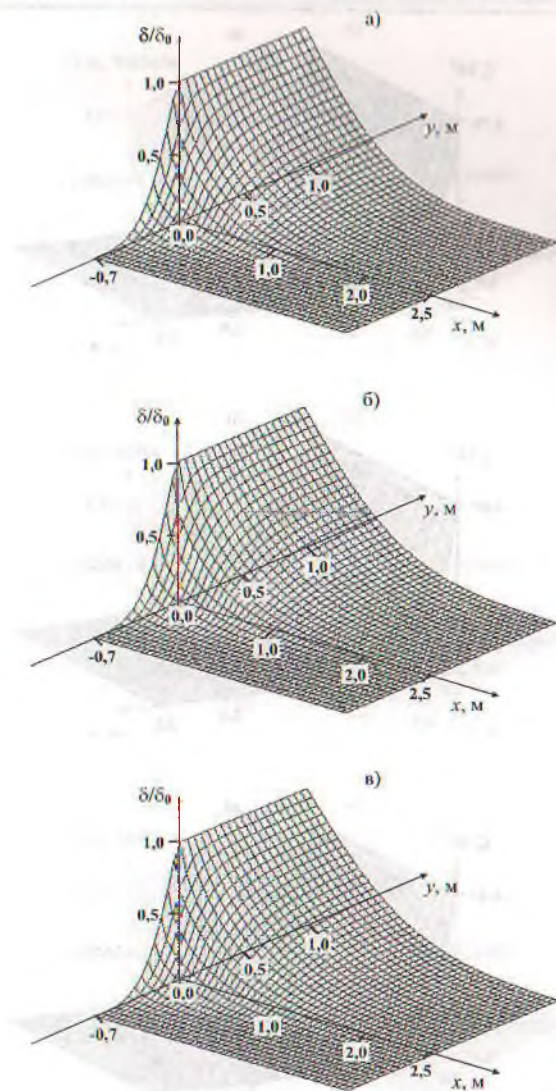


Рис. 3.1. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_1=10^{-5}$ м²/с; $D_2=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $t=3600$ с., а) $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); б) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); в) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

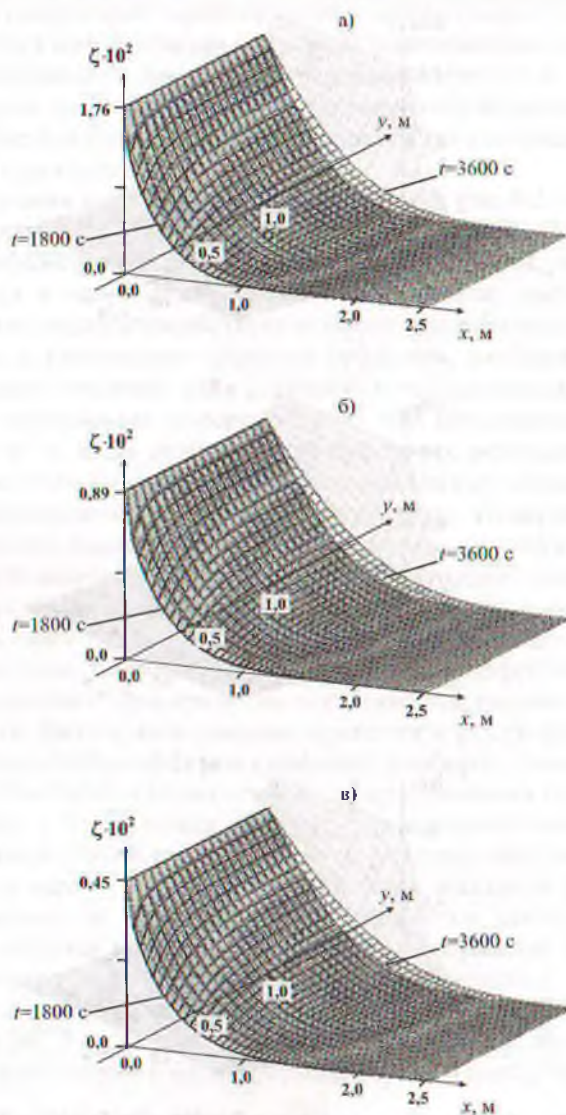


Рис. 3.2. Поверхности ζ в R' при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$.

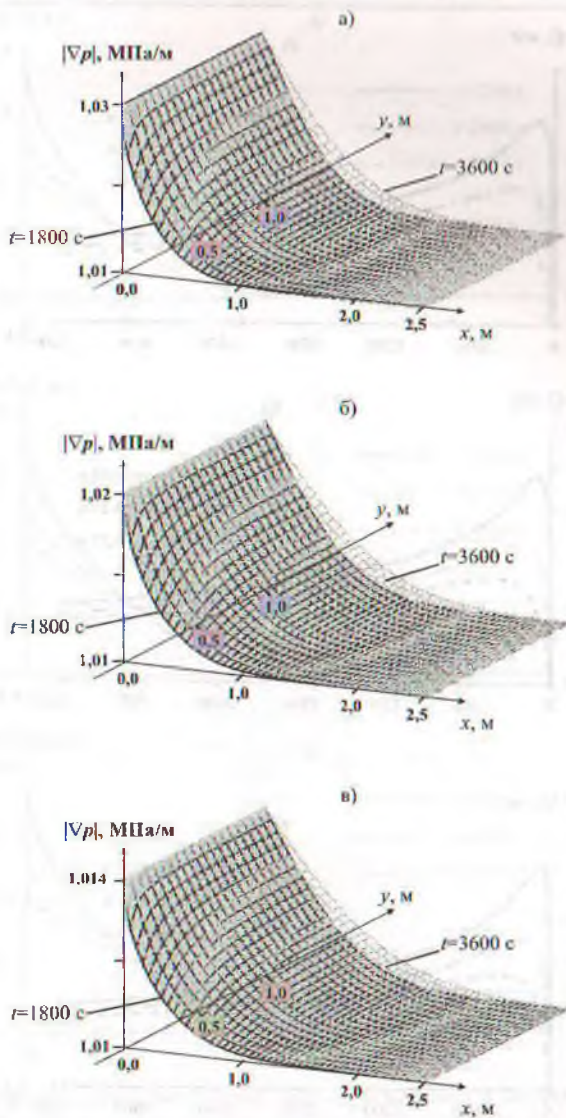


Рис. 3.3. Поверхности $|\nabla p|$ в R^+ при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

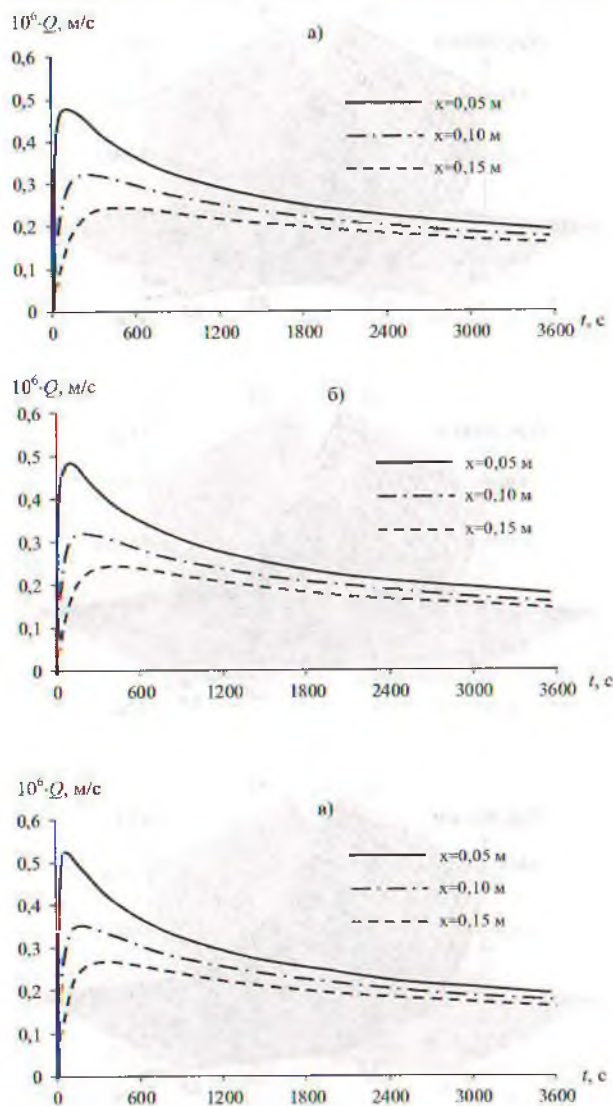


Рис. 3.4. Изменение Q по t в различные x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

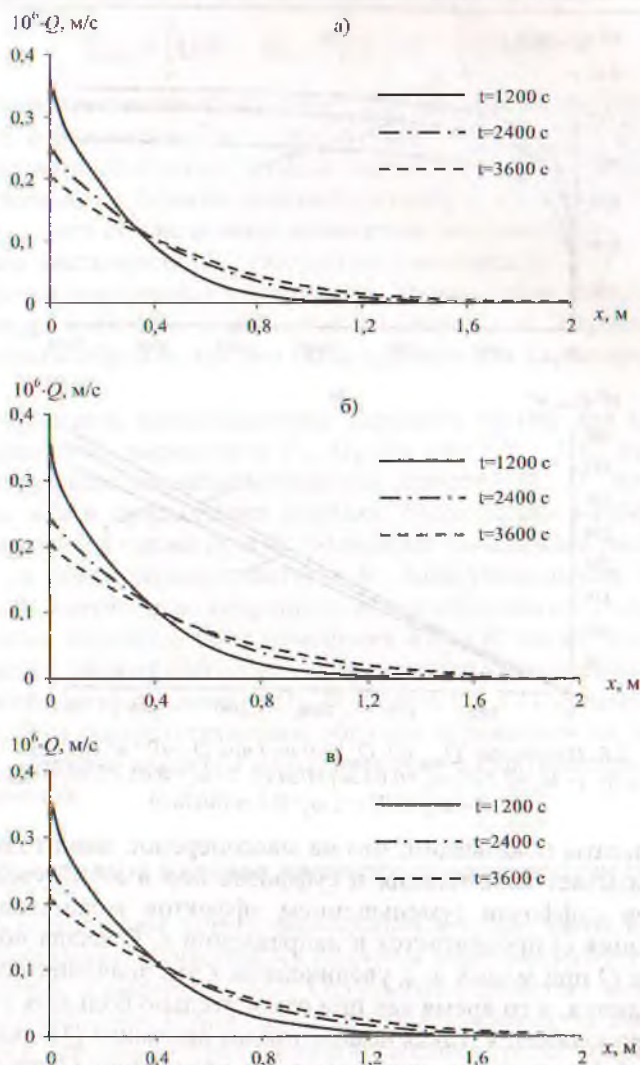


Рис. 3.5. Изменение относительного расхода вещества Q на границы областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_0 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

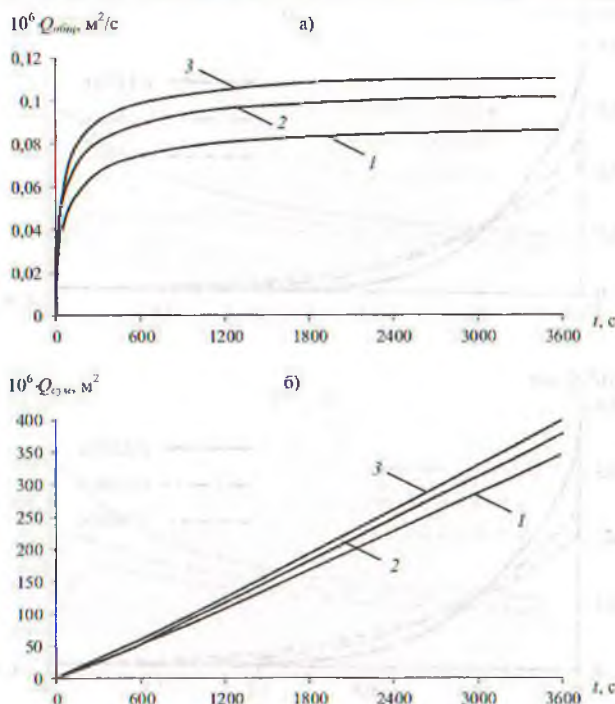


Рис. 3.6. Изменение $Q_{общ}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_1=10^{-5}$ м²/с; $D_2=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; 1— $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 2— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 3— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

Результаты показывают, что на массоперенос значительное влияние оказывает кольтатация и суффозия пор в R^* . С увеличением эффектов суффозии (уменьшением эффектов кольтатации) зона образования Q продвигается в направлении x . Сначала образуются большие Q при малых x , с увеличением t эти значения постепенно уменьшаются, в то время как при относительно больших x увеличение Q продолжается. Такая немонотонная динамика Q хорошо видна на рис.3.5. На границах можно заметить увеличение Q при усилении (уменьшении) эффектов суффозии (кольтатации). Это происходит в соответствии с распределением концентрации, а также с образованием градиента концентрации на $y=0$.

На рис.3.6 приведены графики общего ($Q_{общ}$) и суммарного ($Q_{сум}$) относительного расхода

$$Q_{\text{общ}} = \int_0^{\infty} Q dx, \quad Q_{\text{сум}} = \int_0^{\infty} Q_{\text{общ}} dt = \int_0^{\infty} \int_0^L Q dx dt.$$

Отмеченными выше немонотонные явления в динамике Q в $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$ не отражаются. Это можно объяснить тем, что $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$ представляют собой интегральные характеристики и немонотонности сглаживаются. Можно заметить разницу в характере изменения $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$, хотя обе величины монотонно увеличиваются со временем. Темп увеличения $Q_{\text{общ}}$ постоянно уменьшается, а в темпе $Q_{\text{сум}}$ наблюдается постоянное увеличение. Кольматация задерживает, а суффозия способствует переносу массы через $y=0$. Это объясняется аналогичным образом, как это было сделано для характера изменения Q .

Исследовались характеристики переноса частиц для несколько других значений параметров D_2, D_3 . На рис.3.7 – 3.12 приведены соответствующие характеристики для значений D_2, D_3 , на порядок меньших чем в предыдущих случаях. Уменьшение коэффициента диффузии в R^+ , а также D_3 в R^- уменьшает поперечное рассивание δ/δ_0 в R^+ , а также перенос частиц в R^- . Зона уменьшения δ/δ_0 вблизи $y=0$ в R^+ значительно сокращается, что объясняется ослаблением поперечного переноса. Зона изменения δ/δ_0 в R^- также значительно сокращается. Можно наблюдать повсеместное уменьшение Q за счет уменьшения коэффициентов D_2, D_3 (Рис.3.10, 3.11 сравните с рис. 3.4, 3.5). Это соответствующим образом отражается на значениях $Q_{\text{общ}}, Q_{\text{сум}}$. Однако характер изменения всех характеристик остается без изменения.

3.2. Фильтрация в случае точечного режима подачи смеси

Здесь рассмотрим задачу фильтрации в среде, когда в R^+ жидкость с взвешенными частицами подается через одну точку границы $x=0, 0 \leq y \leq h$, а именно $(0, h/2)$. Остальные параметры задачи остаются без изменения. Изменение граничного режима подачи должно привести к другому распределению вещества в среде, что изменяет и остальные характеристики переноса. Это является основной целью материала данного параграфа.

Итак в постановке задачи §3.1 изменяем только условия (3.8) в следующем виде

$$\delta = \delta_0 \text{ при } x=0, y=h/2; \delta=0 \text{ при } x=0, y \neq h/2. \quad (3.35)$$

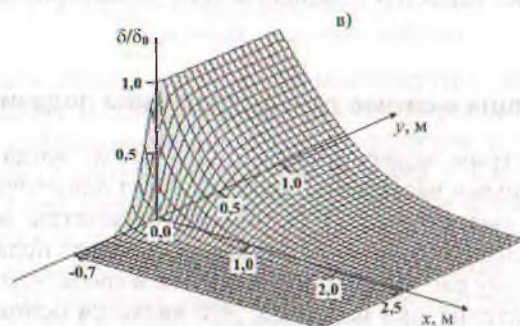
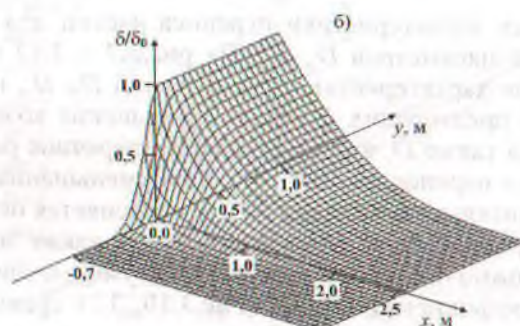
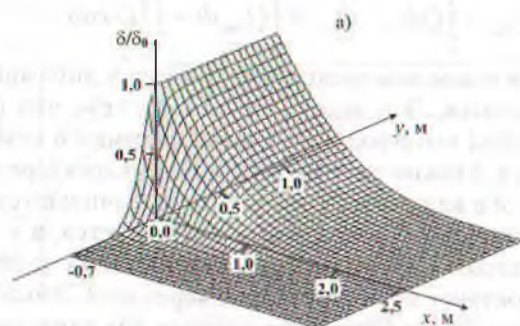


Рис. 3.7. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с.}$ а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа}\cdot\text{с)}$.

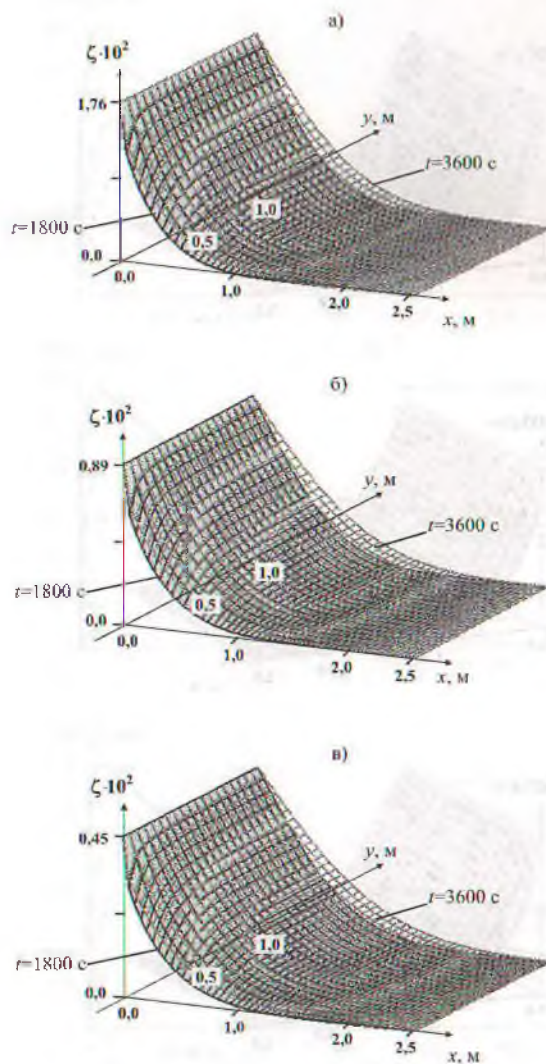


Рис. 3.8. Поверхности ζ в R^+ при $D_0 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

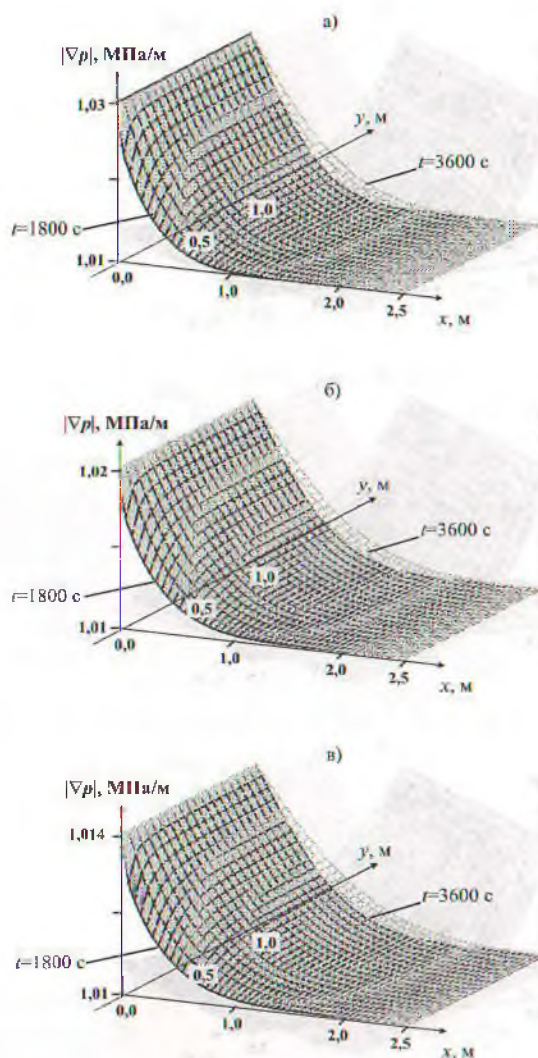


Рис. 3.9. Поверхности $|\nabla p|$ и R^* при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

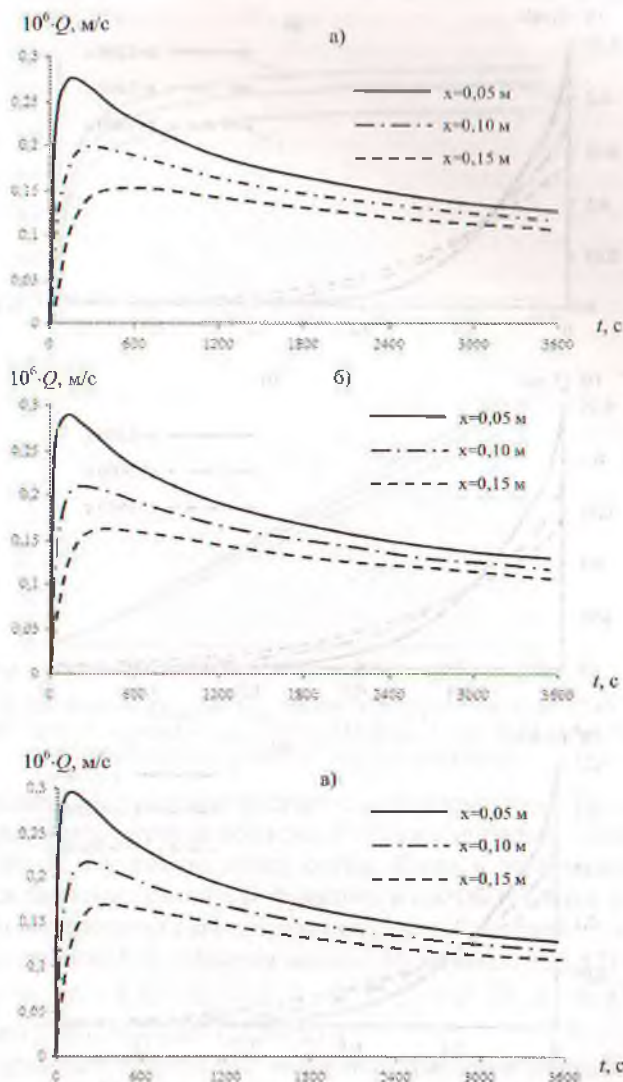


Рис. 3.10. Изменение Q по t в различные x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

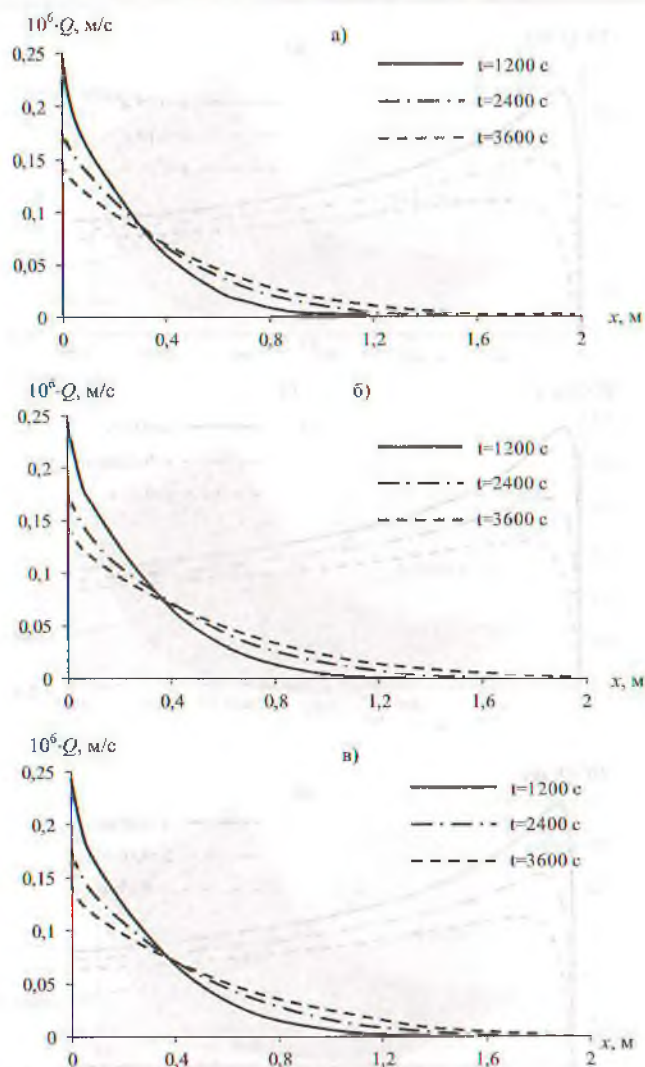


Рис. 3.11. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R' и R в различные моменты времени при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

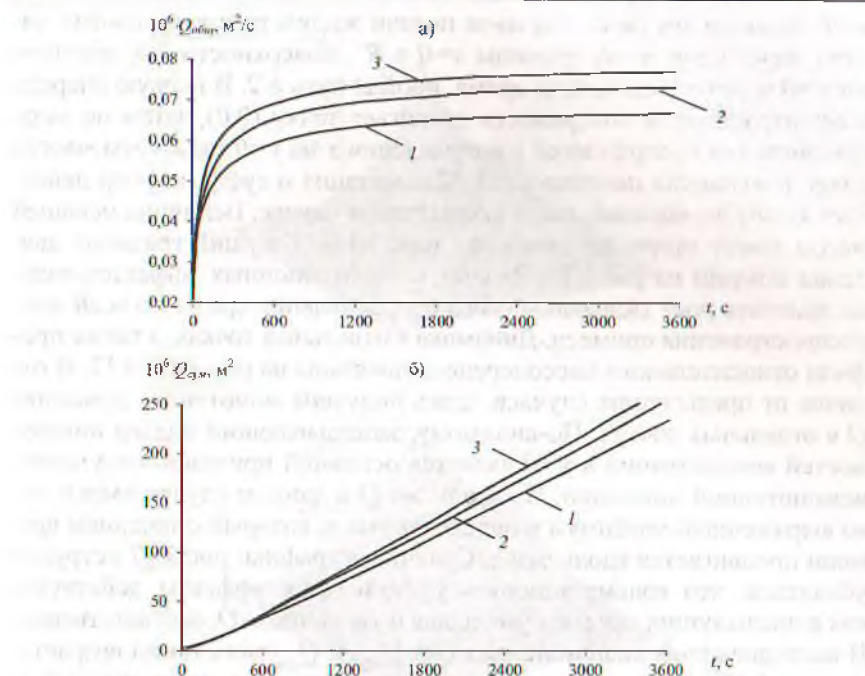


Рис. 3.12. Изменение $Q_{обит}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_2=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; 1— $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 2— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 3— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

Ход численного решения задачи остается прежним. Только необходимо построить сетку в области R^+ таким образом, чтобы точка $(0, h/2)$ попала в узловую точку сетки. Тогда в этой узловой точке задается значение сеточной функции в соответствии с условием (3.35). При построении сетки, таким образом J^+ выбирается как четное число, так что $J^+/2$ является целым. Итак вместо (3.35) имеем

$$\delta_{0,J^+/2}^k = \delta_0, \quad k = \overline{0, K}; \quad \delta_{0,j}^k = 0, \quad j = \overline{0, J^+}, \quad j \neq J^+/2, \quad k = \overline{0, K}. \quad (3.36)$$

Условие (3.36) заменяет (3.26) §3.1.

Ниже приведем результаты численных расчетов решения задачи и других характеристик переноса, определяемых через это решение (рис.3.13 – 3.18). На рис.3.13 отражены поверхности относительной концентрации δ/δ_0 для различных значений параметров ω_0 и ω_1 . Свообразным свойством распространения концентрационных поверхно-

стей является тот факт, что из-за подачи жидкости и взвешенных частиц через одну точку границы $x=0$ в R^+ , поверхности δ/δ_0 достигают $y=0$ через определенное время, пройдя путь $h/2$. В первую очередь концентрационная поверхность достигает точку $(0,0)$, затем по мере продвижения поверхностей в направлении x на $y=0$ также отмечается сдвиг повышения поверхностей. Кольматация и суффозия пор действует таким же образом, как в предыдущем случае. Величина осевшей массы имеет такую же динамику (рис.3.14). Текущий градиент давления показан на рис.3.15. За счет кольматационных эффектов можно заметить рост гидравлического сопротивления среды по всей зоне распространения примеси. Динамика в отдельных точках, а также профили относительного массопереноса показаны на рис.3.16, 3.17. В отличие от предыдущих случаев, здесь получена монотонная динамика Q в отдельных точках. По-видимому, запаздывающий подход поверхностей концентрации к $y=0$ является основной причиной отсутствия немонотонной динамики. Профили же Q в данном случае имеют ярко выраженный максимум в определенных x , который с течением времени продвигается вдоль оси x . Сравнивая графики рис.3.17 нетрудно убедиться, что кольматационно-суффозионные эффекты действуют, как в предыдущих случаях, уменьшая и увеличивая Q , соответственно. В исследованном диапазоне времени $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$ монотонно возрастают (рис.3.18). Однако, при этом в отличие от предыдущего случая (см. §3.1) как $Q_{\text{общ}}$, так и $Q_{\text{сум}}$ имеют возрастающий темп изменения. Кольматация и суффозия значительно (намного больше чем в случае §3.1) влияет на $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$. По-видимому, здесь это также можно интерпретировать следующим образом. Поверхности концентрации развиваясь от точки $(0, h/2)$ пока дойдут до $y=0$ уже подвергаются действию кольматации и суффозии. Поэтому на развитие профилей δ/δ_0 на $y=0$ относительно дольше действуют кольматационно-суффозионные эффекты.

На рис.3.19 – 3.24 приведены результаты расчетов при уменьшенных значениях D_2 и D_3 . При этом тенденции изменения всех характеристик остаются без изменения. Однако поперечное распределение концентрации, и как следствие этого, изменение градиента концентрации на $y=0$ значительно уменьшается. Это отражается на массообменных показателях через $y=0$. Переход вещества через $y=0$ происходит существенно позже, чем в предыдущем случае. Значения остальных показателей переноса в этом случае существенно меньше (рис.3.21 – 3.23).

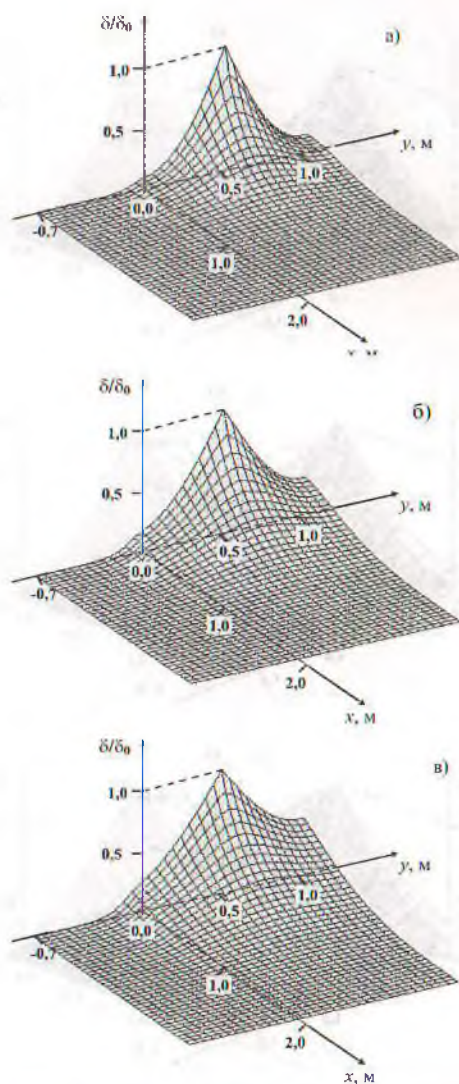


Рис. 3.13. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с}$, а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

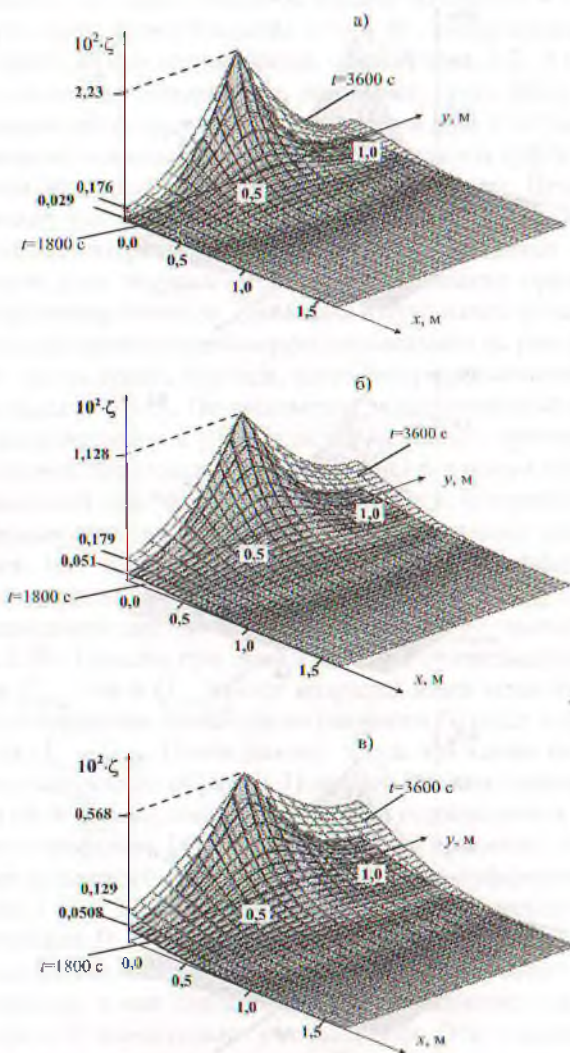


Рис. 3.14. Поверхности ζ в R^+ при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

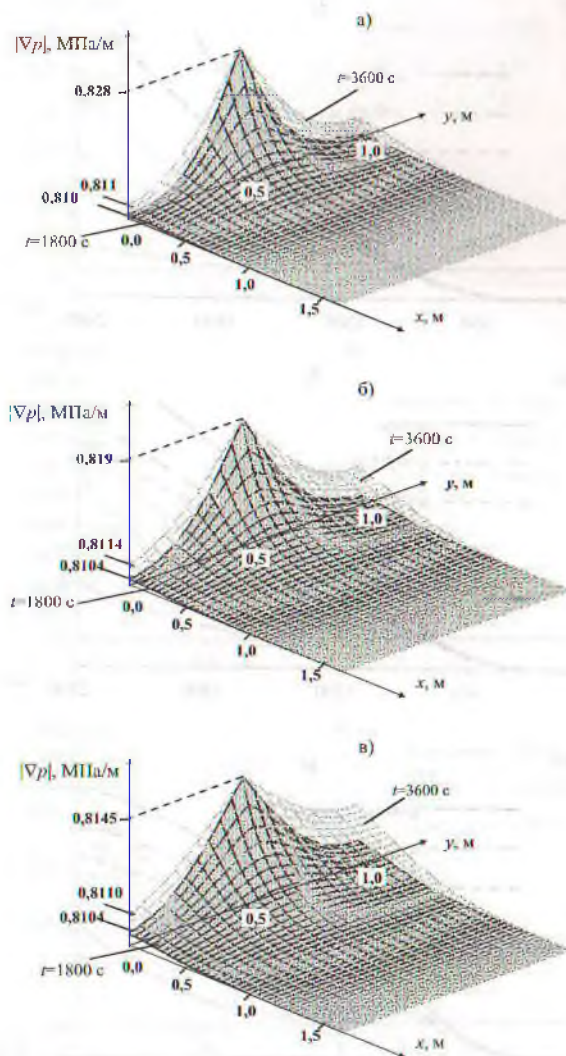


Рис. 3.15. Поверхности $|\nabla p|$ в R^3 при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $D_3=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; а) $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); б) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); в) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

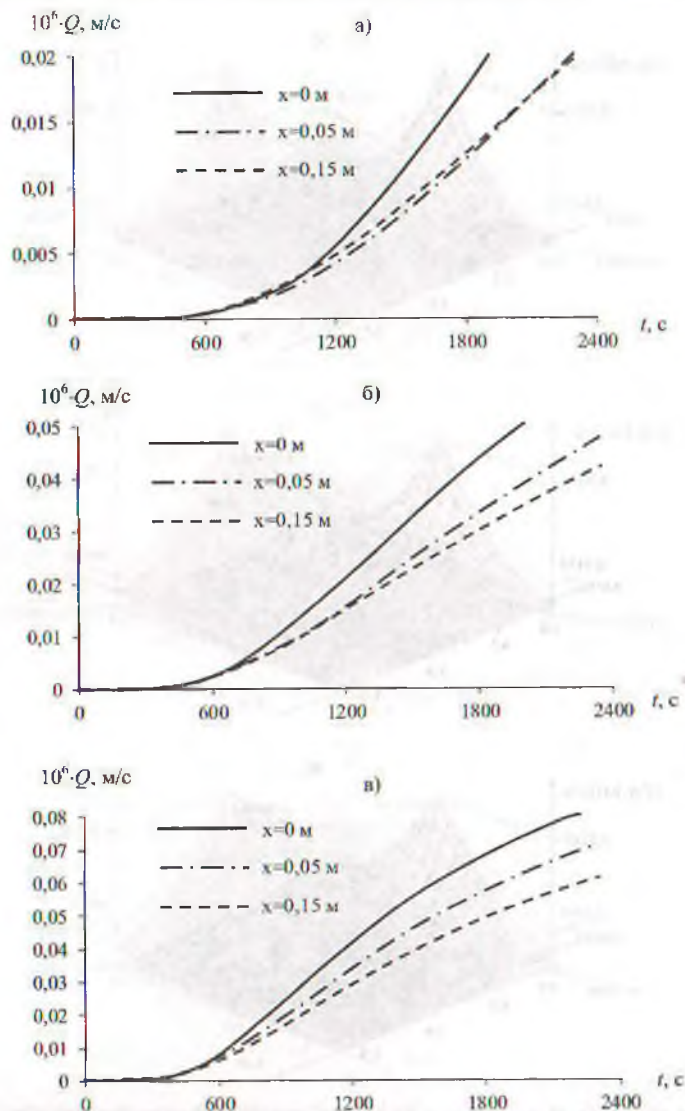


Рис. 3.16. Изменение Q по t в различные x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

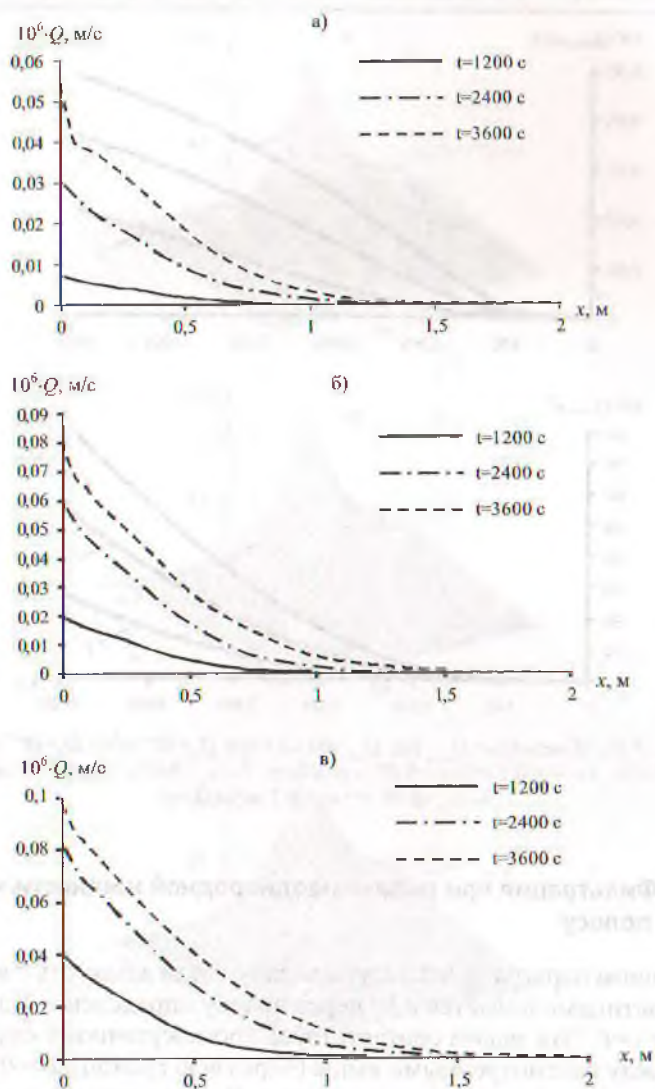


Рис. 3.17. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_1=10^{-5}$ м²/с; $D_2=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; а) $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); б) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); в) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

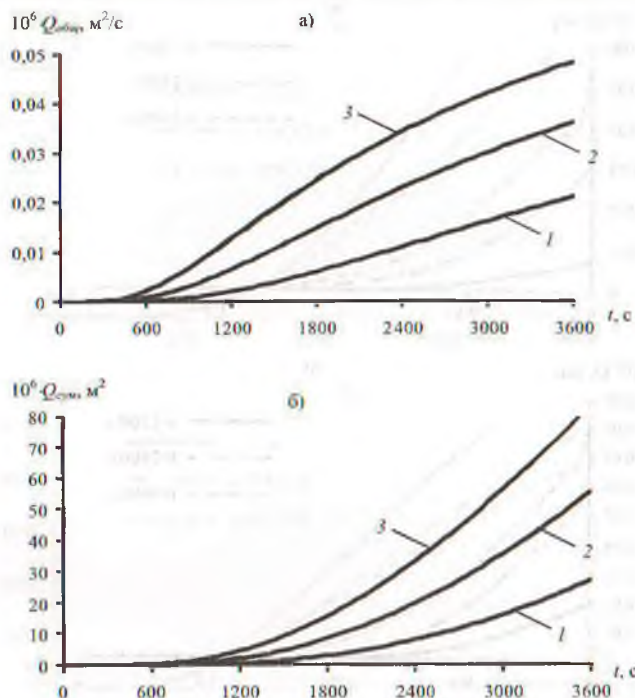


Рис. 3.18. Изменение $Q_{\text{общ}}$ (а), $Q_{\text{ср}}$ (б) по t при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; 1— $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; 2— $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; 3— $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

3.3. Фильтрация при подаче неоднородной жидкости через полосу

В данном параграфе исследуем задачу, когда жидкость с взвешенными частицами подается в R^+ через полосу определенной длины на границе $x=0$. Эта задача соответствует промежуточному случаю подачи между рассмотренными выше (через всю границу $x=0$ области R^+ и через одну фиксированную точку). В постановке задачи только условие (3.8) §3.1 заменяется на

$$\delta=\delta_0 \text{ при } x=0, h_1 \leq y \leq h_2, \quad (3.37)$$

где $0 \leq h_p, h_1 \leq h$.

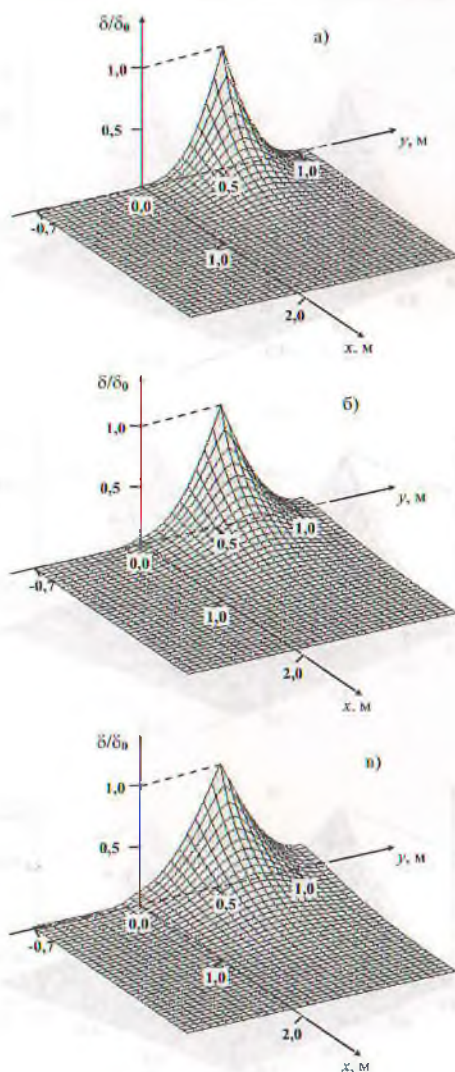


Рис. 3.19. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с}$, а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

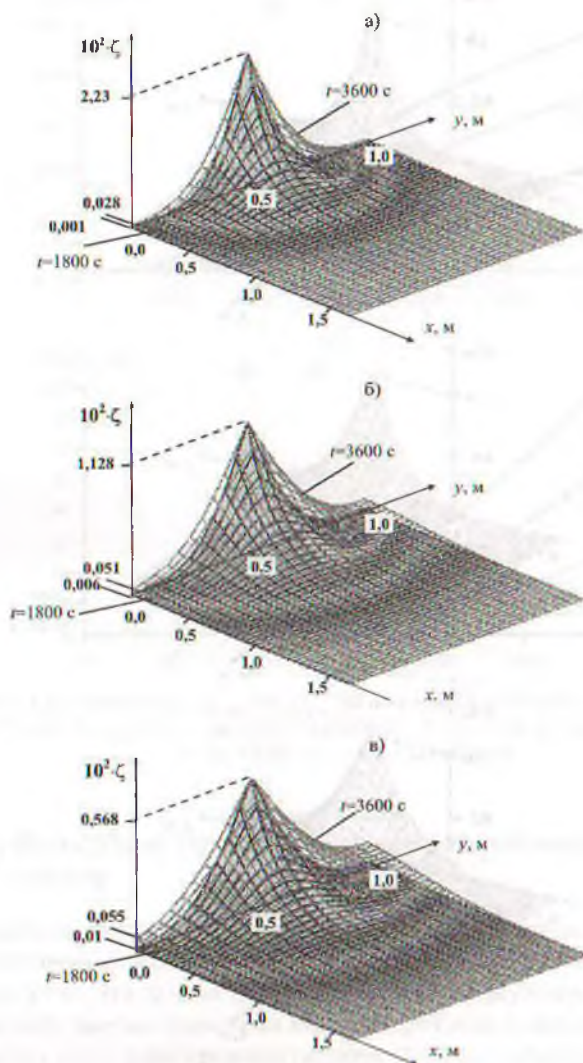


Рис. 3.20. Поверхности ζ в R^3 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

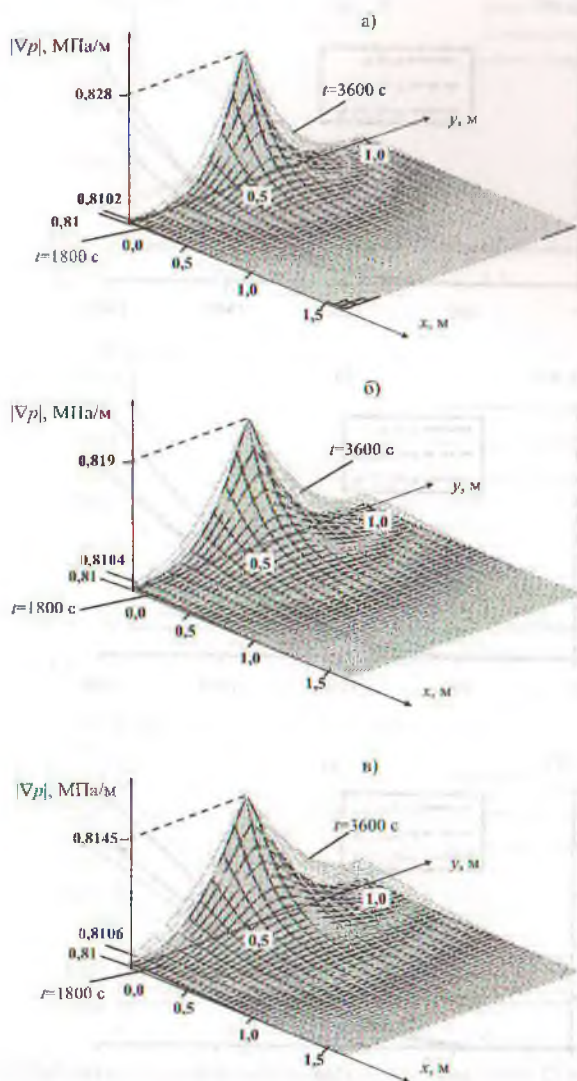


Рис. 3.21. Поверхности ζ в R^3 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

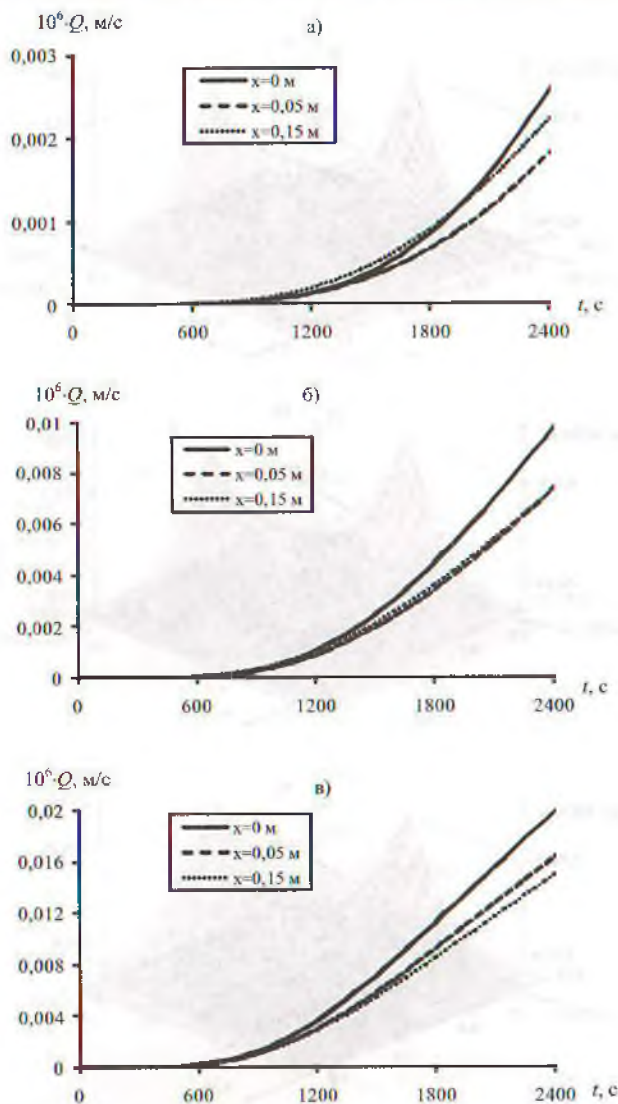


Рис. 3.22. Изменение Q по t в различные x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

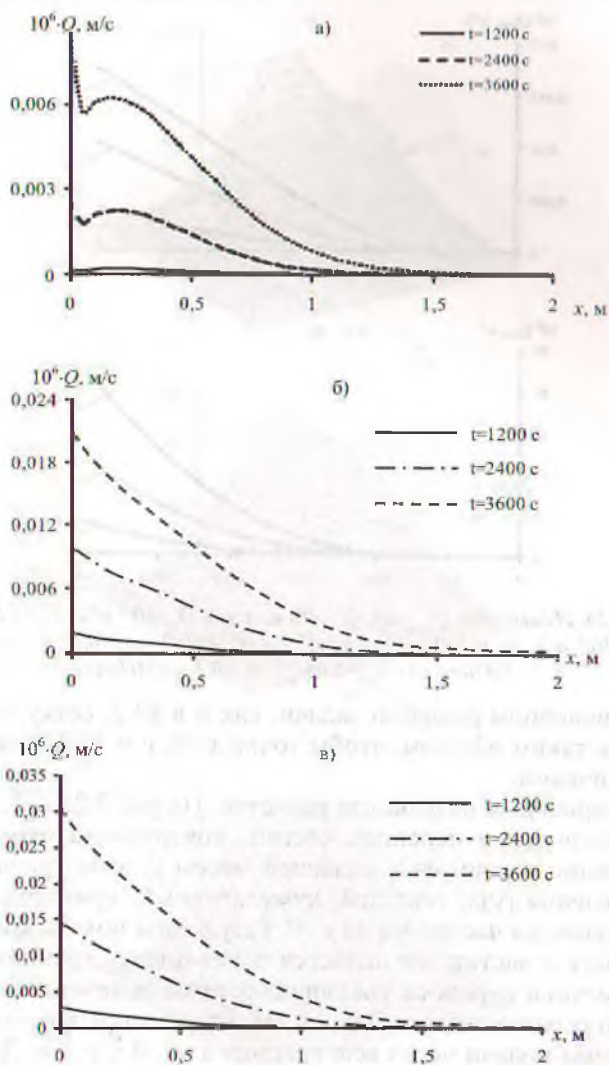


Рис. 3.23. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^+ и R^- в различные моменты времени при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

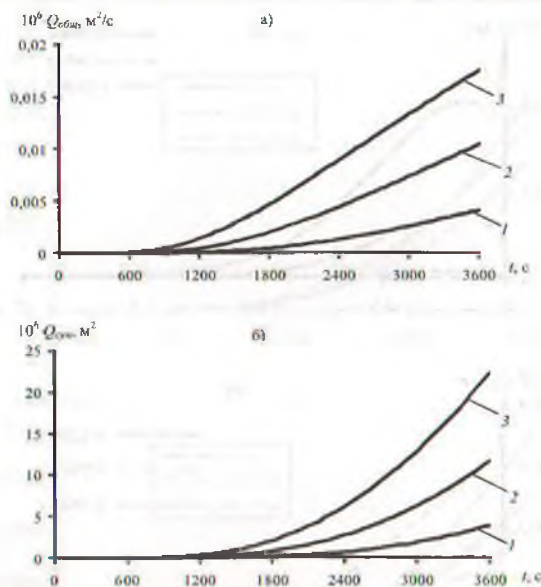


Рис. 3.24. Изменение $Q_{обт}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_2=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $D_3=2,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; 1— $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 2— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); 3— $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

При численном решении задачи, как и в §3.2, сетку необходимо построить таким образом, чтобы точки $x=0$, $y=h_p$, h_2 совпали с узловыми точками.

Ниже приводим результаты расчетов. На рис.3.25 – 3.30 отражены характеристики переноса частиц: поверхности относительной концентрации частиц $\delta=\delta_0$, осевшей массы ζ , поле текущих градиентов давления $|\nabla p|$, текущей, кумулятивный, суммарный относительные расходы частиц через $y=0$. Результаты показывают, что когда жидкость с частицами подается через полосу границы $x=0$ в R^* характеристики переноса увеличиваются по сравнению со случаем точечного режима подачи. Однако характеристики при этом меньше, чем в случае подачи через всю границу $x=0$, $0 \leq y \leq h$. Детально не анализируя все особенности характеристик переноса отметим, что при полосаобразной подаче жидкости с частицами те явления, которые происходили при внедрении жидкости через всю границу $x=0$, $0 \leq y \leq h$, ослабевают, а те явления, которые были присущи для точечной подачи, усиливаются.

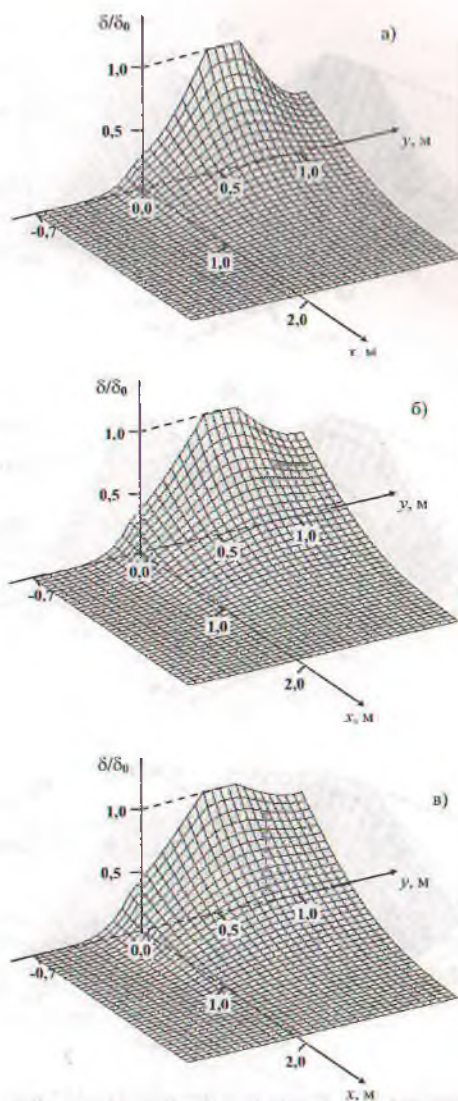


Рис. 3.25. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с.}$, а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

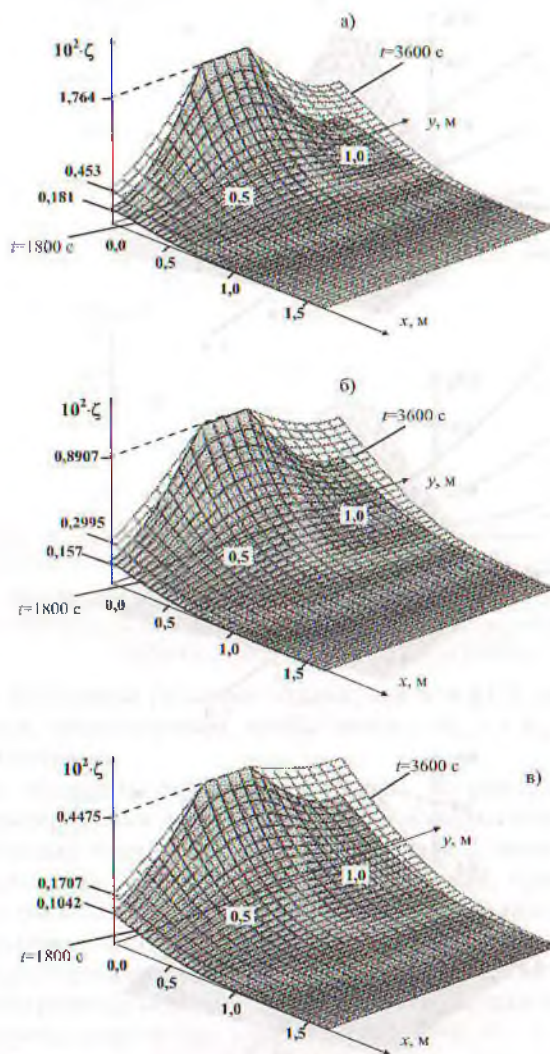


Рис. 3.26. Поверхности ζ в R^3 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_c=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

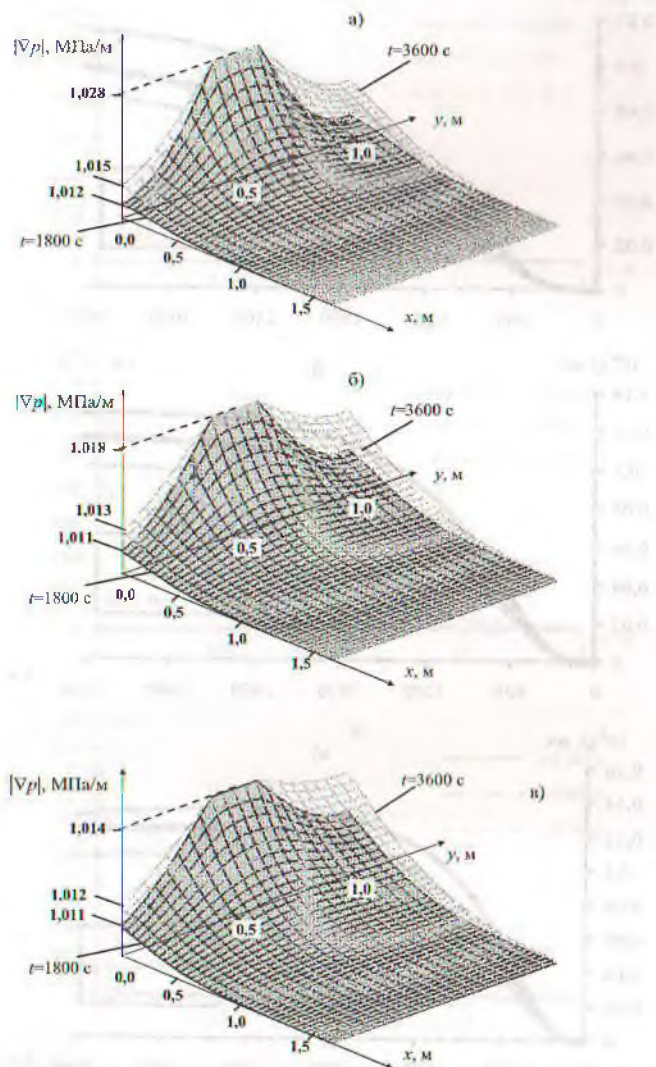


Рис. 3.27. Поверхности $|\nabla p|$ в R^* при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$.

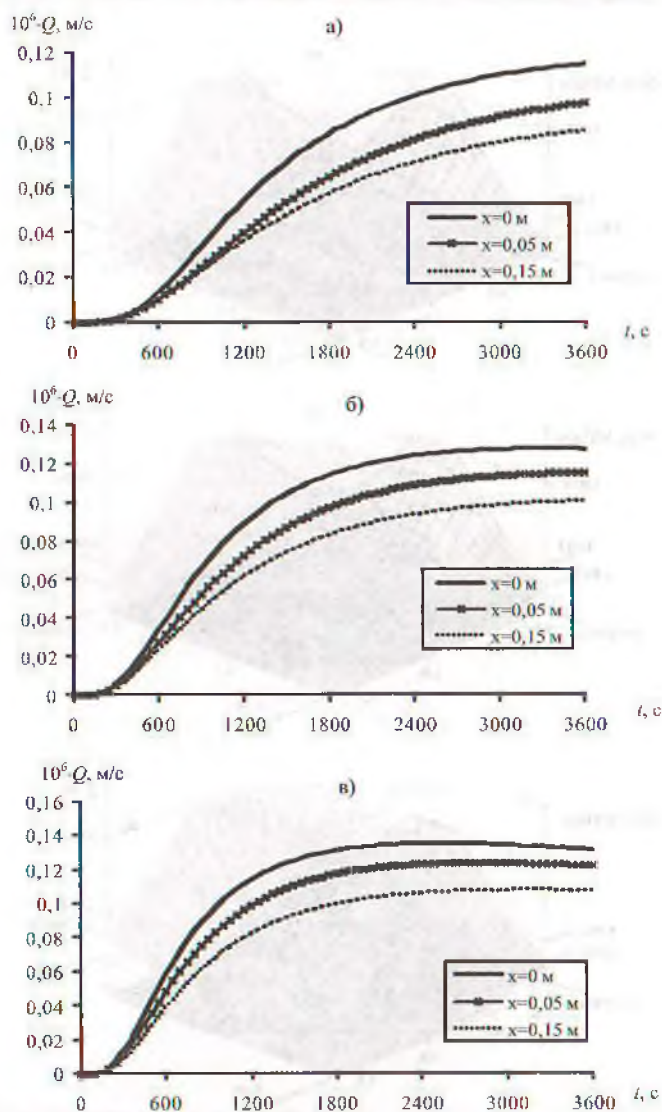


Рис. 3.28. Изменение Q по t в различные x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$.

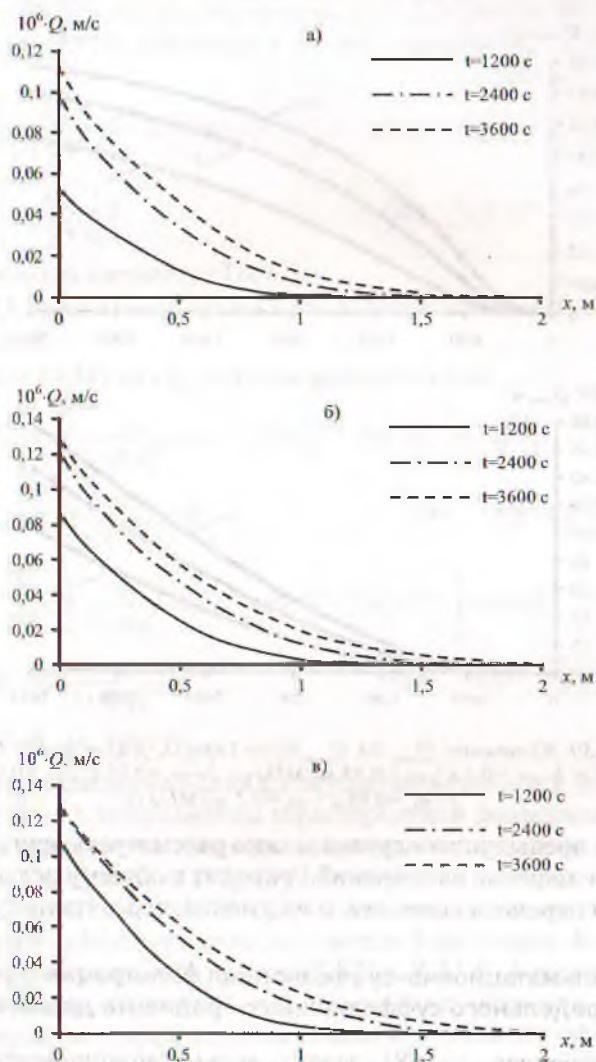


Рис. 3.29. Изменение относительного расхода вещества Q на границе областей R^1 и R^2 в различные моменты времени при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $D_3=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; а) $\omega_0=0,1$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); б) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,05$ м/(МПа·с); в) $\omega_0=0,05$ с⁻¹; $\omega_1=0,1$ м/(МПа·с).

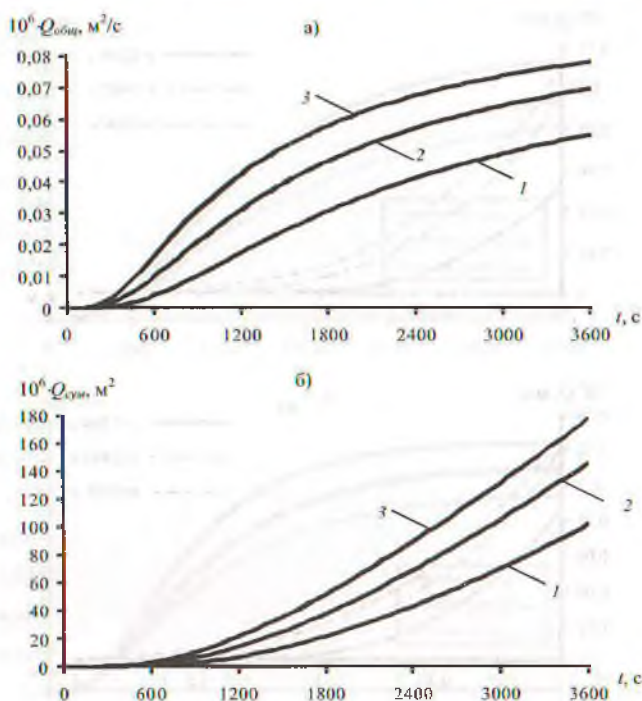


Рис. 3.30. Изменение $Q_{\text{общ}}$ (а), $Q_{\text{сум}}$ (б) по t при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; 1— $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; 2— $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; 3— $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$.

Как и в предыдущих случаях можно рассмотреть другие значения D_2, D_3 . Уменьшение их значений приводит к общему ослаблению поперечного переноса вещества, в частности, через границу $y=0$.

3.4. Кольматационно-суффозионная фильтрация с учетом предельного суффозионного градиента давления

Рассмотренная в [48] задача кольматационно-суффозионной фильтрации в пористой среде, состоящей из двух зон, в одной из которых жидкость подвижна, а в другой — неподвижна, обобщается на случай наличия ПСГД.

Исследуется задача, рассмотренная в §3.1, с учетом ПСТД. Здесь в задаче (3.2) – (3.13) изменяется только уравнение (3.3) в виде [20, 61, 74, 76]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta - \omega_1 (|\nabla p| - |\nabla p_c|) \zeta & \text{если } |\nabla p| > |\nabla p_c| \\ \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|} \delta & \text{если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c| \end{cases} \quad (3.38)$$

где $|\nabla p_c|$ – модуль параметра ПСТД.

Задачу (3.2), (3.4) – (3.13) и (3.38) решаем также методом конечных разностей.

Уравнение (3.38) на $\omega_{i,j}^k$ аппроксимируется как:

$$\zeta_{i,j}^{k+1/2} = \begin{cases} \zeta_{i,j}^k + 0.5\tau \left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{i,j}^{k+1/2}} \delta_{i,j}^k - \omega_1 (|\nabla p|_{i,j}^{k+1/2} - |\nabla p_c|) \zeta_{i,j}^k \right) & \text{если } |\nabla p|_{i,j}^{k+1/2} > |\nabla p_c| \\ \zeta_{i,j}^k + 0.5\tau \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{i,j}^{k+1/2}} \delta_{i,j}^k & \text{если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c| \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\zeta_{i,j}^{k+1} = \begin{cases} \zeta_{i,j}^{k+1/2} + 0.5\tau \left(\frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{i,j}^{k+1}} \delta_{i,j}^{k+1/2} - \omega_1 (|\nabla p|_{i,j}^{k+1} - |\nabla p_c|) \zeta_{i,j}^{k+1/2} \right) & \text{если } |\nabla p|_{i,j}^{k+1/2} > |\nabla p_c| \\ \zeta_{i,j}^{k+1/2} + 0.5\tau \frac{\omega_0}{1 + \gamma |\nabla p|_{i,j}^{k+1}} \delta_{i,j}^{k+1/2} & \text{если } |\nabla p| \leq |\nabla p_c| \end{cases} \quad (3.40)$$

$i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J^+}, k = \overline{0, K-1}$.

Алгоритм численного решения осуществляется как в §3.1.

На рис.3.31 – 3.36 приведены характеристики фильтрации и переноса частиц в пористой среде для определенного набора исходных параметров. Поверхности δ/δ_0 , ζ , $|\nabla p|$ настроены для трех пар значений ω_φ , ω_i , сопоставление которых позволяет установить влияние кольтатации и суффозии пор на показатели фильтрации. Как и в рассмотренных ранее задач без учета ПСТД в $R^+ \cup R^-$ формируется область увеличения δ/δ_0 , а в R^+ , где происходит движение жидкости и кольтатационно-суффозионные явления, – область увеличения ζ и $|\nabla p|$. Поскольку здесь в качестве нового параметра используется $|\nabla p_c|$, основное внимание уделим на его влияние. Из рис.3.31 видно, что на поле δ/δ_0 влияние $|\nabla p_c|$ не очень заметно. Это подтверждает ранее обнаруженный эффект [61, 74, 76], где слабое влияние $|\nabla p_c|$ на δ/δ_0 было объяснено диффузионным размытием поля концентрации.

Как в случае $|\nabla p_c|=0$ (§3.1), увеличение эффектов суффозии и уменьшения кольматации зона продвижения профилей δ/δ_0 заметно расширяется в направлении движения жидкости и переноса вещества в среде. Механизм такого явления объяснен в §3.1. Градиенты концентрации, возникающие на $y=0$ приводят к образованию потока частиц из R^+ в R^- . На рис.3.31 видна область повышения концентрации в R^- за счет переноса частиц из R^+ в R^- . Учет $|\nabla p_c|$ приводит к задержке продвижения поверхностей как в R^+ , так в R^- .

На рис.3.32 показаны поверхности насыщенности осевшей массой ζ , для различных пар значений ω_0, ω_1 . За счет кольматации поле насыщенности увеличивается. Как и в предыдущих случаях уменьшение коэффициента кольматации, увеличение коэффициента суффозии приводит к уменьшению области распространения ζ . С физической точки зрения это вполне объяснимо, т.к. поле образуется за счет кольматации, а суффозия наоборот препятствует осаждению частиц в порах. За счет переноса частиц через $y=0$ вблизи этой границы можно заметить уменьшение значений ζ по сравнению с областями с относительно большим y . В отличие от результатов $|\nabla p_c|=0$ (§3.1), можно заметить существенного увеличение значений ζ . Так, если при $|\nabla p_c|=0$ максимальное значение ζ в случае а) было равно $\sim 0,0176$ (рис.3.2), то в данном случае имеем $\sim 0,1513$. Аналогично, в случае б) имеем $\sim 0,1216$ вместо $0,0089$ и в случае в) — $\sim 0,1009$ вместо $0,0045$. В настоящем случае действие $|\nabla p_c|$ проявляется еще и в виде резкого уменьшения ζ на фронте возникновения суффозии (Рис.3.32). Поверхности текущих $|\nabla p|$ показаны на рис.3.33. Динамика $|\nabla p|$ в целом похожа на динамику ζ . Действие $|\nabla p_c|$ отражается на резком изменении $|\nabla p|$ при переходе суффозионного фронта. Сами значения $|\nabla p|$ также значительно увеличивается. Сравнительный анализ показывает, что при учете $|\nabla p_c|$ максимальные значения $|\nabla p|$, которые достигаются на линии $x=0, 0 \leq y \leq h$, в рассмотренных случаях равны а) $\sim 1,48$; б) $\sim 1,43$; в) $\sim 1,39$. Соответствующие значения при $|\nabla p_c|=0$ равны а) $\sim 1,03$; б) $\sim 1,02$; в) $\sim 1,014$. Значительное увеличение $|\nabla p|$ при $|\nabla p_c| \neq 0$ и тех же остальных параметрах, что при $|\nabla p_c|=0$, показывает на рост фильтрационного сопротивления среды при учете ПСГД. Задержка появления суффозии в кинетическом уравнении, таким образом, приводит к существенному росту фильтрационного сопротивления среды.

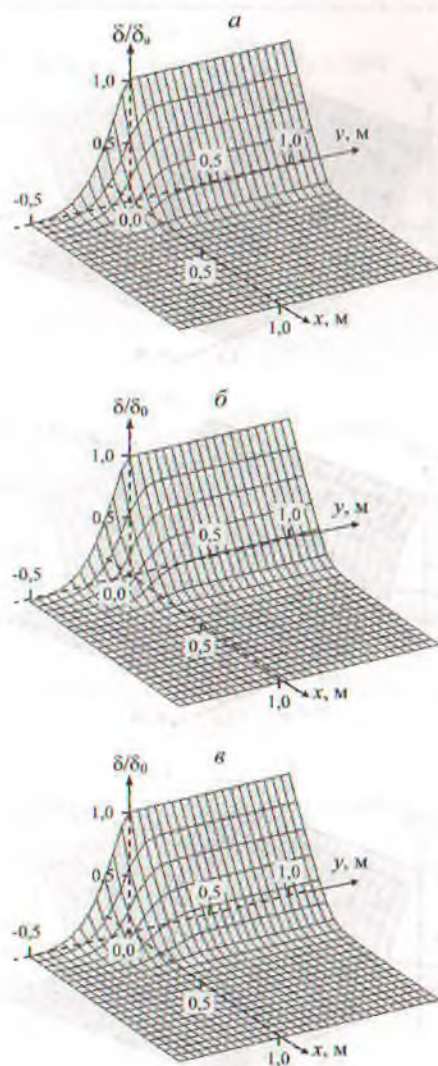


Рис. 3.31. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с}$. а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$.

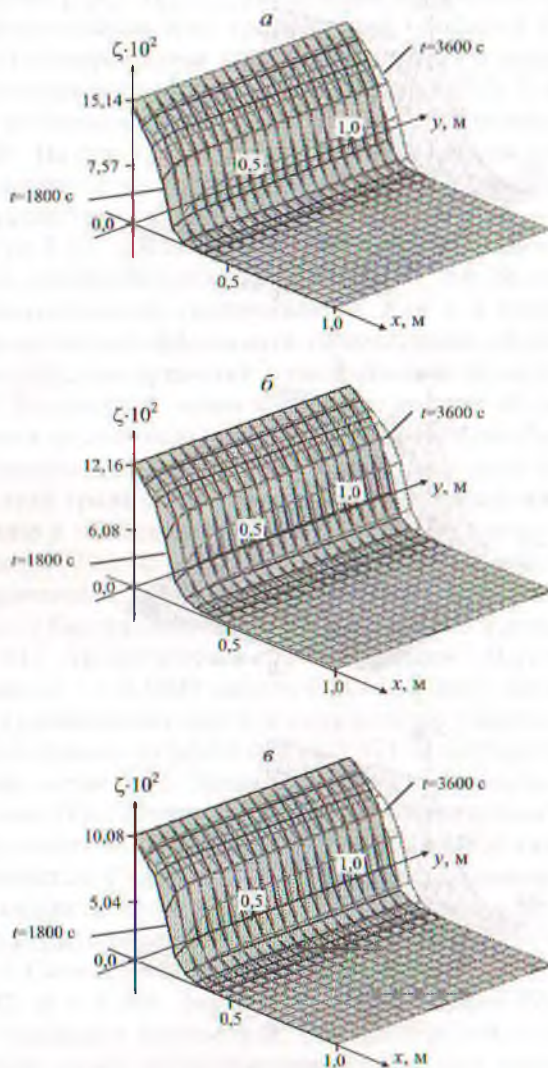


Рис. 3.32. Поверхности ζ в R при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,01$; $|\nabla p_0|=1,35 \text{ МПа}/\text{м}$.

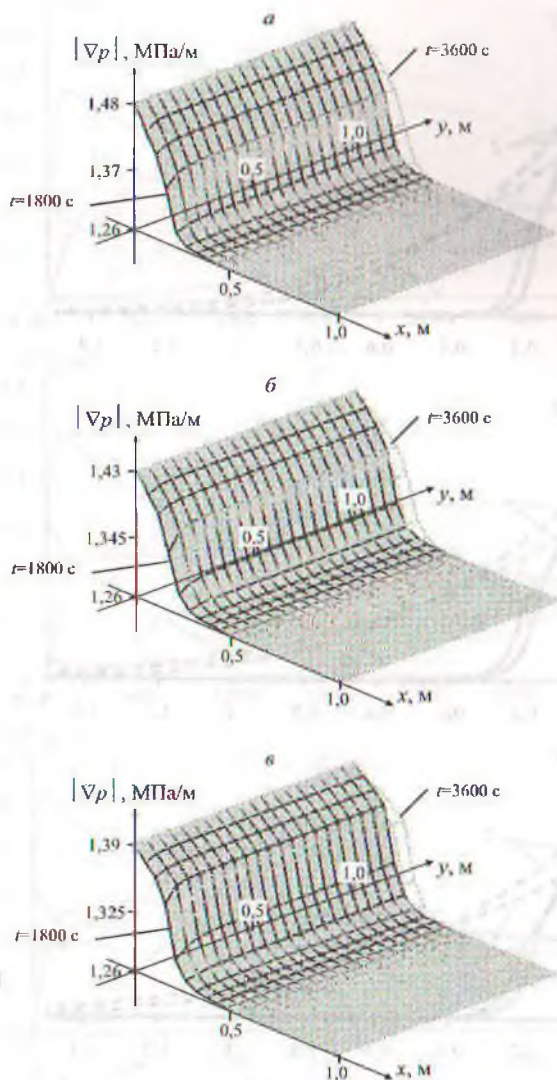


Рис. 3.33. Поверхности $|\nabla p|$ в R^+ при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,01$; $|\nabla p_c|=1,35 \text{ МПа}/\text{м}$.

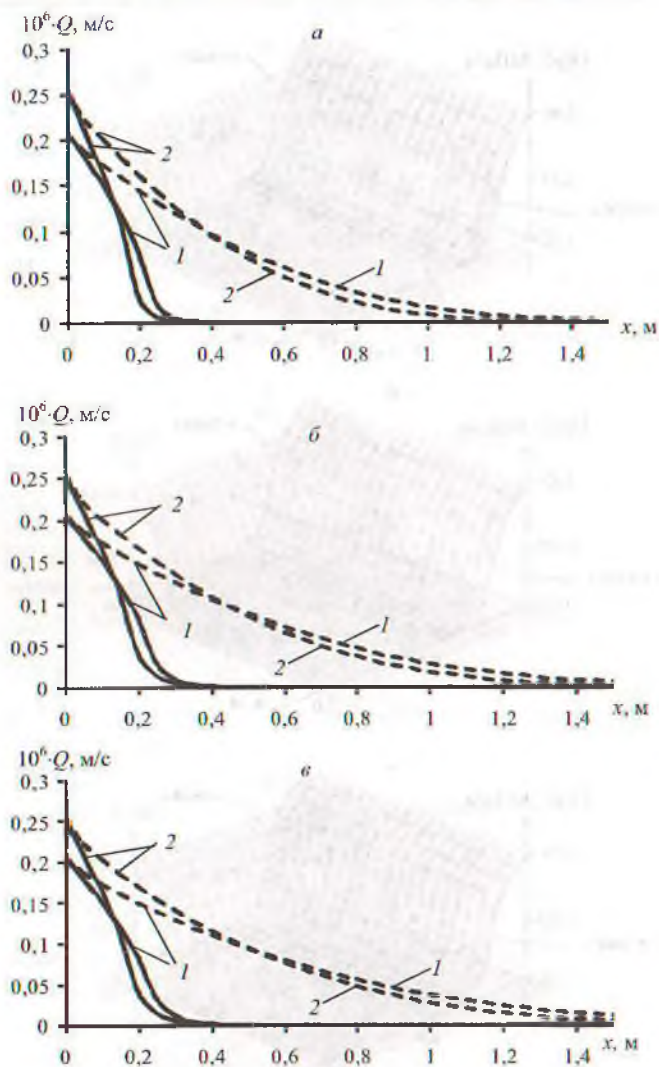


Рис. 3.34. Изменение Q по x в различные t при $D_0 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0 = 0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; б) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; в) $\omega_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1 = 0,1 \text{ м/(МПа·с)}$; $t = 2400$ (1), 3600 (2) с;
— $|\nabla p_c| = 1,35 \text{ МПа/м}$, --- $|\nabla p_c| = 0$.

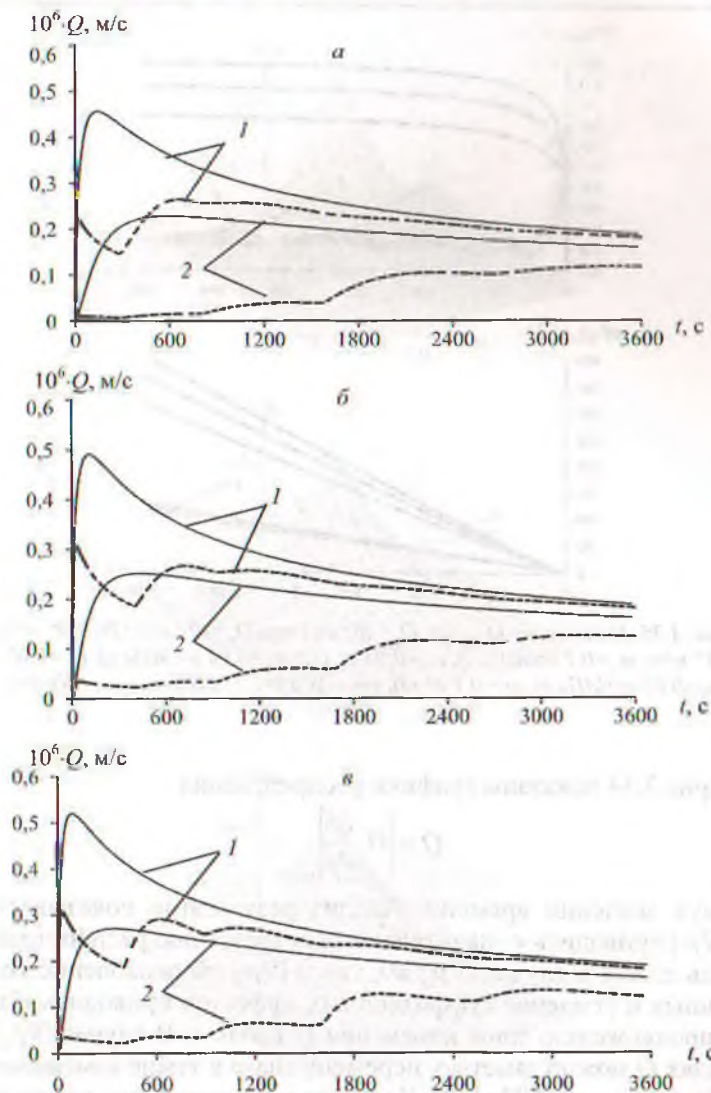


Рис. 3.35. Изменение Q в различных точках x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м/(МПа·с)}$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м/(МПа·с)}$; $t=2400$ (1), 3600 (2) с;
 ---- $|\nabla p_c|=1,35 \text{ МПа/м}$, — $|\nabla p_c|=0$

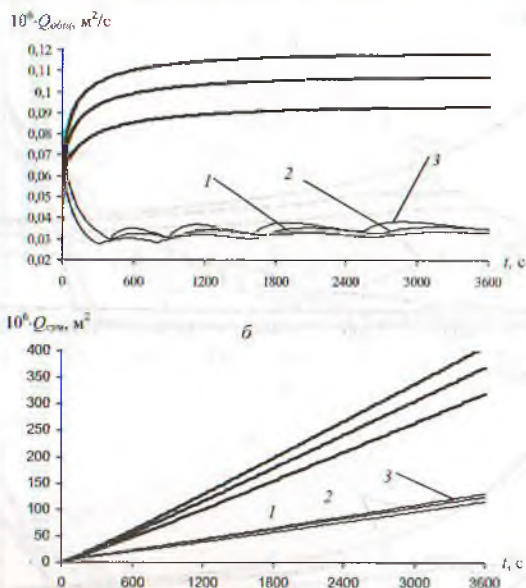


Рис. 3.36. Изменение $Q_{\text{общ}}$ (а), $Q_{\text{сп}}$ (б) по t при $D_0=10^{-6}$ м²/с; $D_2=10^{-5}$ м²/с; $D_3=5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\omega_0=0,1$ м/(МПа·с), $\omega_1=0,05$ с⁻¹ (1); $\omega_0=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_1=0,05$ с⁻¹ (2); $\omega_0=0,05$ м/(МПа·с), $\omega_1=0,1$ с⁻¹ (3); — $|\nabla p_c|=1,35$ МПа/м, — $|\nabla p_c|=0$.

На рис.3.34 показаны графики распределения

$$Q = \left| D_3 \frac{\partial \delta}{\partial y} \right|_{y=0}$$

для двух значений времени. Анализ результатов показывает, что учет $|\nabla p_c|$ приводит к значительному сокращению распространения Q вдоль x . Как в случае $|\nabla p_c| \neq 0$, так и $|\nabla p_c| = 0$ ослабление кольтационных и усиление суффозионных эффектов приводят к заметному продвижению зоны изменения Q вдоль x . В случае $|\nabla p_c| \neq 0$ в профилях Q можно заметить перемену знака в темпе изменения, что не наблюдается при $|\nabla p_c| = 0$. Характер немонотонного изменения Q в фиксированной точке сохраняется как при $|\nabla p_c| \neq 0$, так и в $|\nabla p_c| = 0$. Такая немонотонность обнаружена и объяснена ранее (§1.4, гл.2 и §3.1–3.3) [46, 47, 48]. Немонотонность четко видно на рис.3.35, где показана динамика Q в фиксированных точках.

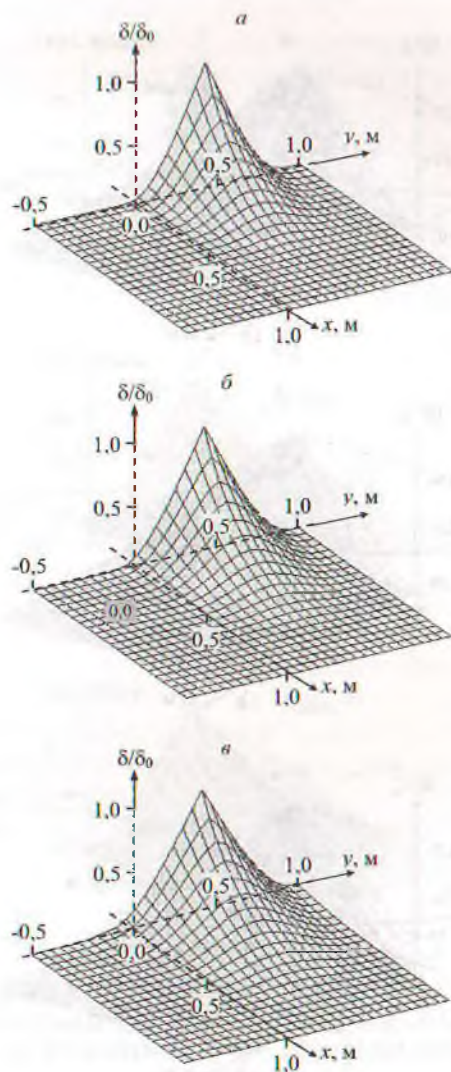


Рис. 3.37. Поверхности δ/δ_0 при $D_e=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_z=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_s=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с}$. а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$; $\delta_0=0,01$; $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

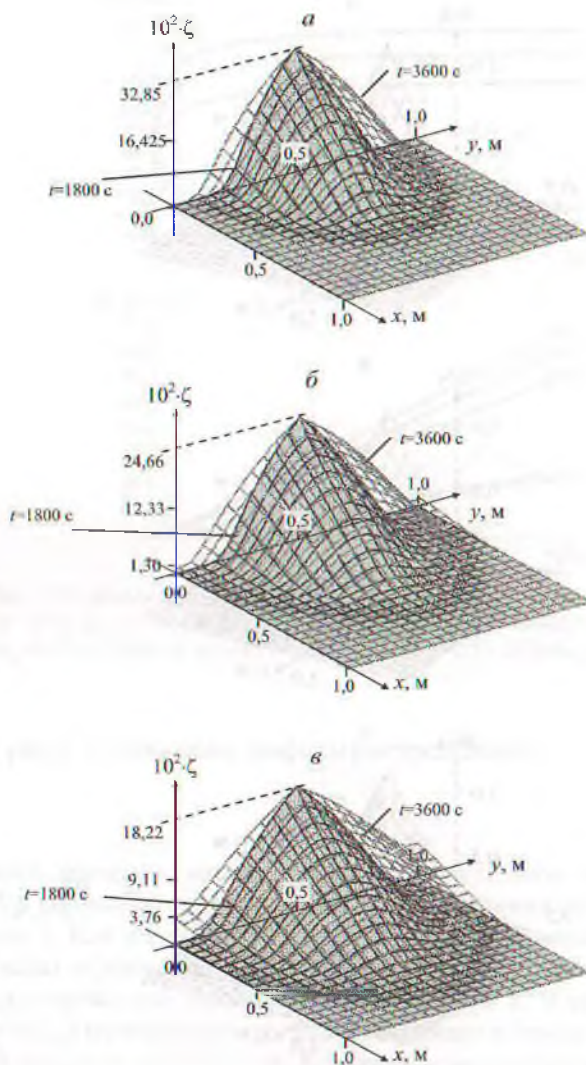


Рис. 3.38. Поверхности ζ при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,01$; $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

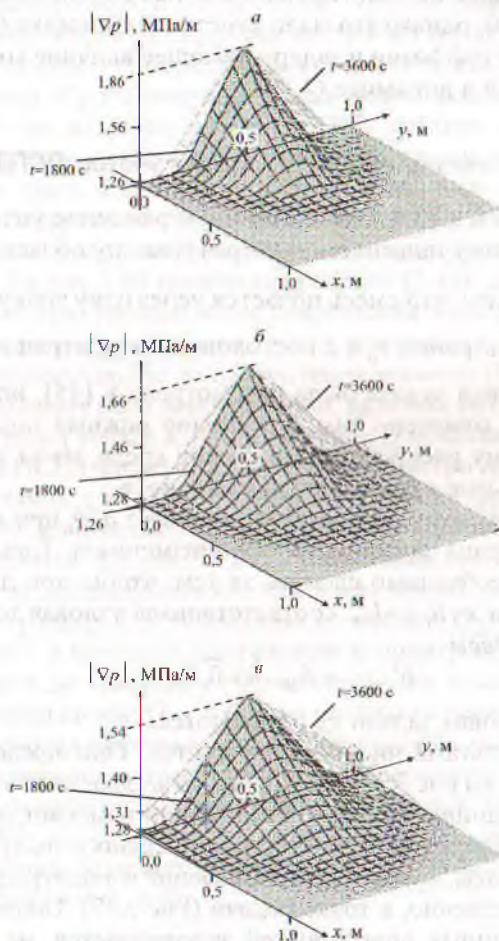


Рис. 3.39. Поверхности $|\nabla p|$ в K^+ при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,01$; $|\nabla p_0|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

На рис.3.36 показана динамика общего и суммарного относительного расходов

$$Q_{\text{общ}} = \int_0^{\infty} Q dx, \quad Q_{\text{сум}} = \int_0^t Q_{\text{общ}} dt = \int_0^t \int_0^{\infty} Q dx dt.$$

Отмеченные выше немонотонные явления сохраняются и в динамике $Q_{\text{общ}}$ с $|\nabla p_c| \neq 0$, однако это мало заметно в динамике $Q_{\text{сум}}$. Благоприятное влияние суффозии и задерживающее влияние кольматации на Q проявляется и в динамике $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$.

3.5. Задача с точечной подачей смеси с учетом ПСГД

В рассмотренной в §3.4 задаче изменим граничное условие, соответствующие режиму подачи смеси через границу области фильтрации $x=0$. Предположим, что смесь подается через одну точку $x=0, y=\frac{h}{2}$ со скоростью фильтрации v_0 и с постоянной концентрацией твердой фазы $\delta=\delta_0$. Подобная задача была рассмотрена в [48], но без учета ПСГД. Как было отмечено там, изменение режима подачи смеси приводит к другому распределению частиц среде, из-за этого изменяются все остальные характеристики переноса.

К новому граничному режиму соответствует $\delta=\delta_0$ при $x=0, y=h/2$.

Алгоритм решения задачи остается неизменным. Только при построении сетки необходимо следить за тем, чтобы при дискретизации области точки $x=0, y=h/2$ соответствовала узловая точка сетки. Следовательно имеем

$$\delta_{0,j^*/2}^* = \delta_0, \quad k=0, \bar{K}.$$

Остальные условия задачи не изменяются.

Приведем результаты численных расчетов. Они представлены в графическом виде на рис.3.37 – 3.42. Подача жидкости и вещества через одну точку границы области существенно изменяет распределение концентрации и других характеристик переноса по сравнению с предыдущим случаем. Максимальное значение концентрации $\bar{O}$ устанавливается, естественно, в точке подачи (Рис.3.37). Подход к линии $y=0$ концентрационных поверхностей задерживается, на прохождении пути от точки подачи до $y=0$ затрачивается определенное время. Распространение поверхностей δ/δ_0 с течением времени как по x , так и по y приводит к тому, что на $y=0$ образуется ненулевой градиент δ , т.е. $\partial\delta/\partial y$, за счет чего образуется поток частиц через эту линию. Кольматация и суффозия действует таким же образом, как в предыдущих случаях. Точно так же слабо влияние ПСГД на δ/δ_0 . Сравнивая результаты со случаем $|\nabla p_c|=0$ обнаруживаем ограниченное распро-

странение поверхностей δ/δ_0 в случае $|\nabla p_c| \neq 0$. Задержка происходит из-за того, что эффекты суффозии наступают не с самого начала процесса, а по истечении определенного времени, когда $|\nabla p|$ становится большим, чем $|\nabla p_c|$. Поверхности ζ , в целом аналогичны δ/δ_0 . Сравнивая их с предыдущим случаем (§3.4) заметим прогрессирование распространения поверхностей ζ в направлении x . Это происходит потому, что здесь значение $|\nabla p_c|$ меньше, чем в сравниваемом случае (Рис.3.38). Поверхности $|\nabla p|$ также, в принципе, повторяют вид δ/δ_0 и ζ . Роль кольтматации и суффозии аналогична предыдущим результатам (Рис.3.39). На рис.3.40 показаны профили Q для двух значений времени. Кроме отмеченного выше сокращения зоны появления Q можно заметить только уменьшение самих значений Q . Кольтматационные эффекты, происходящие до наступления момента $|\nabla p| > |\nabla p_c|$ существенно уменьшают поле концентрации, включая ее градиент на $y=0$. В отдельно взятых точках x , $y=0$ изменение Q показано на рис.3.41. При отсутствии ПСГД фронт Q относительно быстро достигает фиксированную точку x , $y=0$. При $|\nabla p_c| \neq 0$ достижение фронта до заданной точки x , $y=0$ значительно задерживается и сами значения существенно уменьшаются. На рис.3.42 показаны зависимости $Q_{\text{общ}}$, $Q_{\text{сум}}$ от i . В отличие от предыдущего случая, когда жидкость подавалась через всю левую границу R^+ , ступенчатые изменения $Q_{\text{общ}}$ здесь не заметны. По-видимому в процессе достижения концентрационного фронта из точки подачи до границы $y=0$ эти ступеньки сглаживаются. Можно заметить уменьшение $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$ на несколько порядков при $|\nabla p_c| \neq 0$.

Подытоживая отмеченные выше результаты, можно отметить, что когда жидкость подается из одной точки границы области, по сравнению со случаем сплошной подачи через левую границу области R^+ профили δ/δ_0 , ζ , $|\nabla p_c|$, а также зависимости $Q_{\text{общ}}$ и $Q_{\text{сум}}$, значительно деформируются, отмечается задержка в переносе массы через общую границу областей R^+ и R^- .

3.6. Подача жидкости через отрезок границы области с учетом ПСГД

Рассмотренные выше задачи теперь исследуем для случая, когда жидкость подается через определенный отрезок границы R , а не через всю границу или через фиксированные точки границы. В постановке задачи изменяется только условие на границе

$$\delta = \delta_0 \text{ при } x = 0, \quad h_1 \leq y \leq h_2, \quad 0 \leq h_1, \quad h_2 \leq h.$$

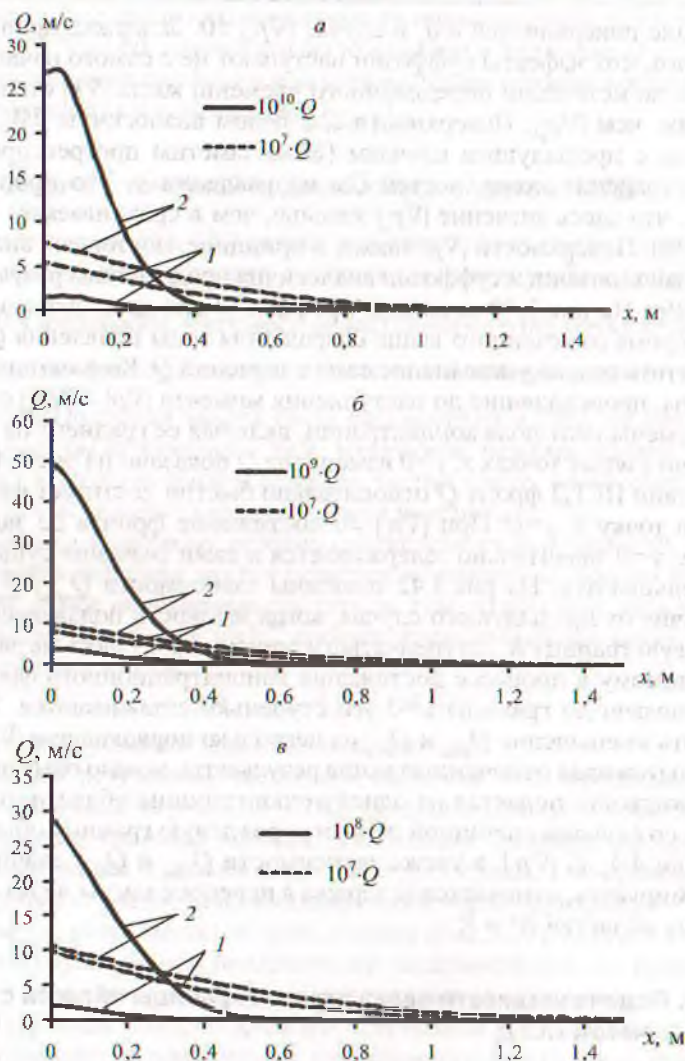


Рис. 3.40. Изменение Q по x в различные t при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=2400$ (1), 3600 (2) с; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; — $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$, ---- $|\nabla p_c|=0$.

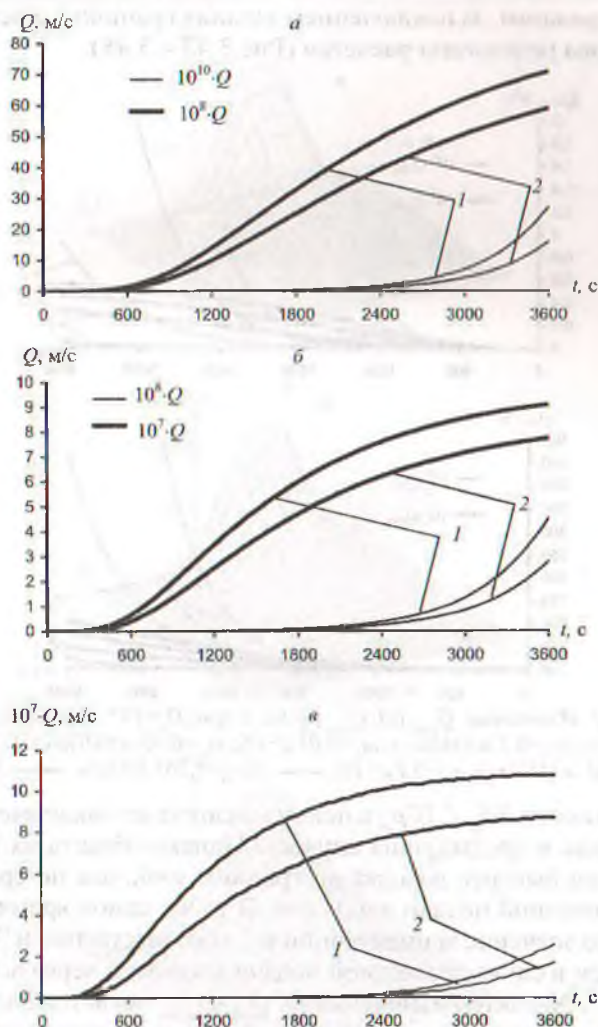


Рис.3.41. Изменение Q в различных точках x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; — $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$, — $|\nabla p_c|=0$.

При дискретизации области удобно ввести сетку таким образом, чтобы то же $(0, h_1)$, $(0, h_2)$ оказались условными. Алгоритм расчета

остается прежним, за исключением задания граничного режима. Ниже приводим результаты расчетов (Рис.3.43 – 3.48).

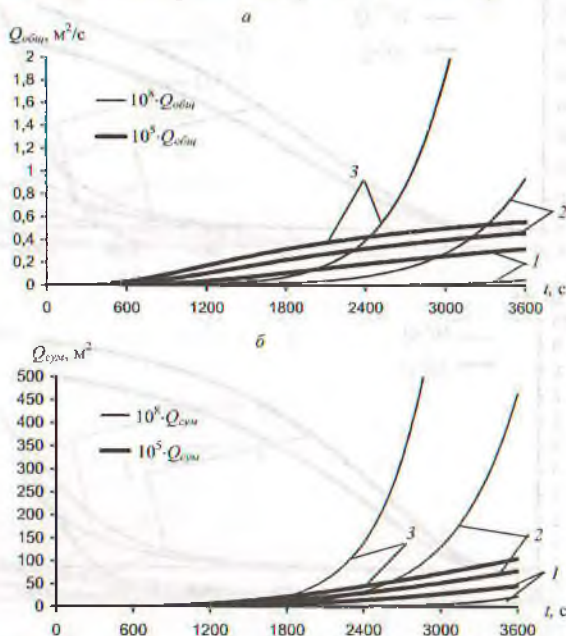


Рис.3.42. Изменение $Q_{общ}$ (а), $Q_{сум}$ (б) по t при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_3=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_0=0,1 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$, $\omega_1=0,05 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_0=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$, $\omega_1=0,05 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_0=0,05 \text{ м}/(\text{МПа}\cdot\text{с})$, $\omega_1=0,1 \text{ с}^{-1}$ (3); — $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$, — $|\nabla p_c|=0$.

Поверхности δ/δ_0 , ζ , $|\nabla p_c|$ в целом имеют те же закономерности изменения, как в предыдущих случаях. Однако область их изменения значительно быстрее доходят до границы $y=0$, чем по сравнению с случаем точечной подачи жидкости. В то же самое время можно заметить, что значение концентрации и ζ , соответственно и $|\nabla p_c|$ на $y=0$ меньше чем в случае сплошной подачи жидкости через всю границу области R^+ . Характер изменения Q , $Q_{общ}$, $Q_{сум}$ остается аналогичным как в случае точечной подачи жидкости через границу области R^+ . Однако можно заметить увеличение их значений, а также более быстрый подход фронтов δ/δ_0 , ζ , $|\nabla p_c|$ к границе $y=0$. Следовательно, за относительно более ранние периоды времени появляется поток массы через $y=0$. Роль ПСГД аналогична предыдущему случаю, когда жидкость подавалась через фиксированную точку границы R^+ .

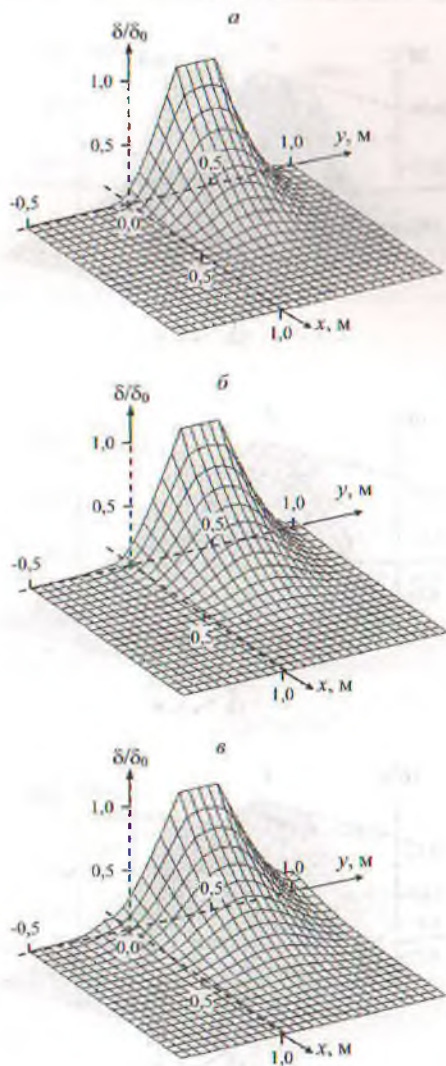


Рис. 3.43. Поверхности δ/δ_0 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=3600 \text{ с.}$,
 а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,05$; $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

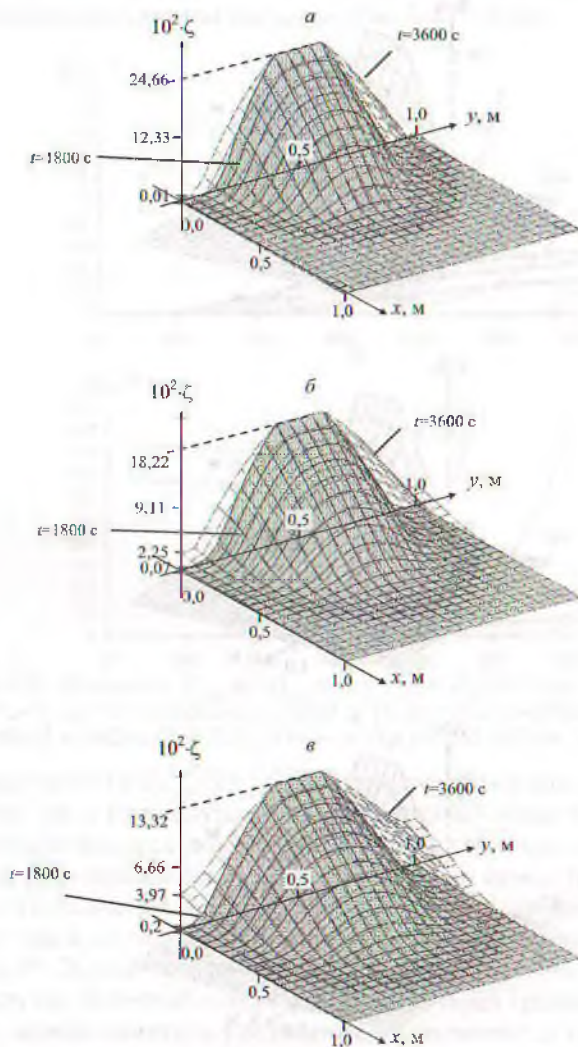


Рис. 3.44. Поверхности ζ в R^1 при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
 а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\delta_0=0,05$; $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

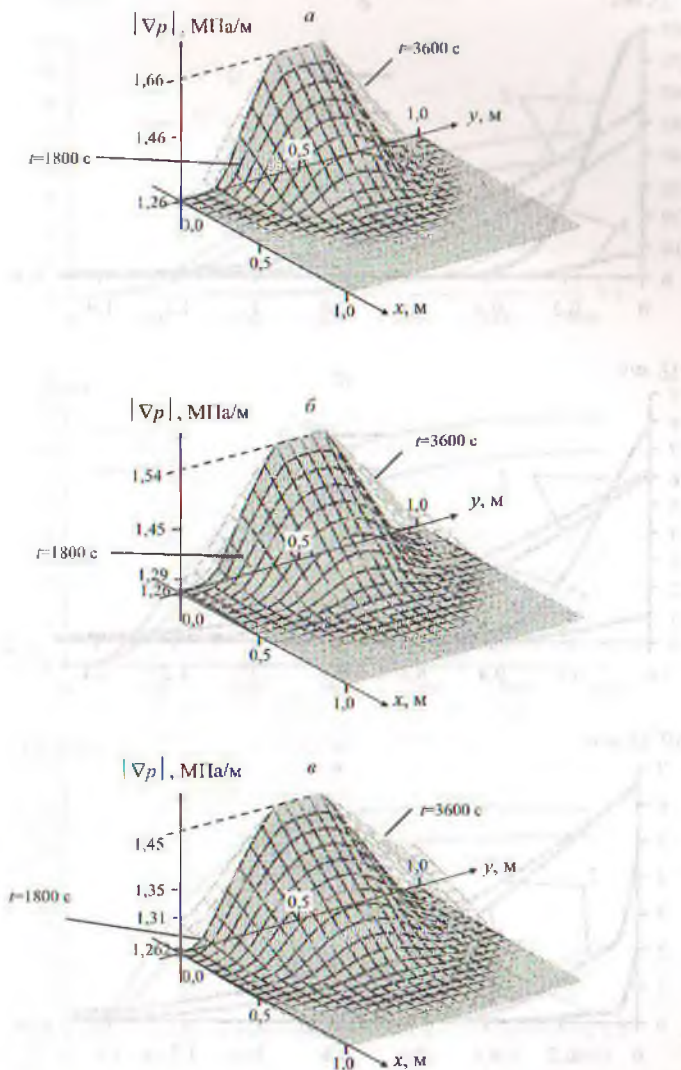


Рис. 3.45. Поверхности $|\nabla p|$ в R^* при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$;
а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$; $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$;
 $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $\omega_2=0,05$; $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$.

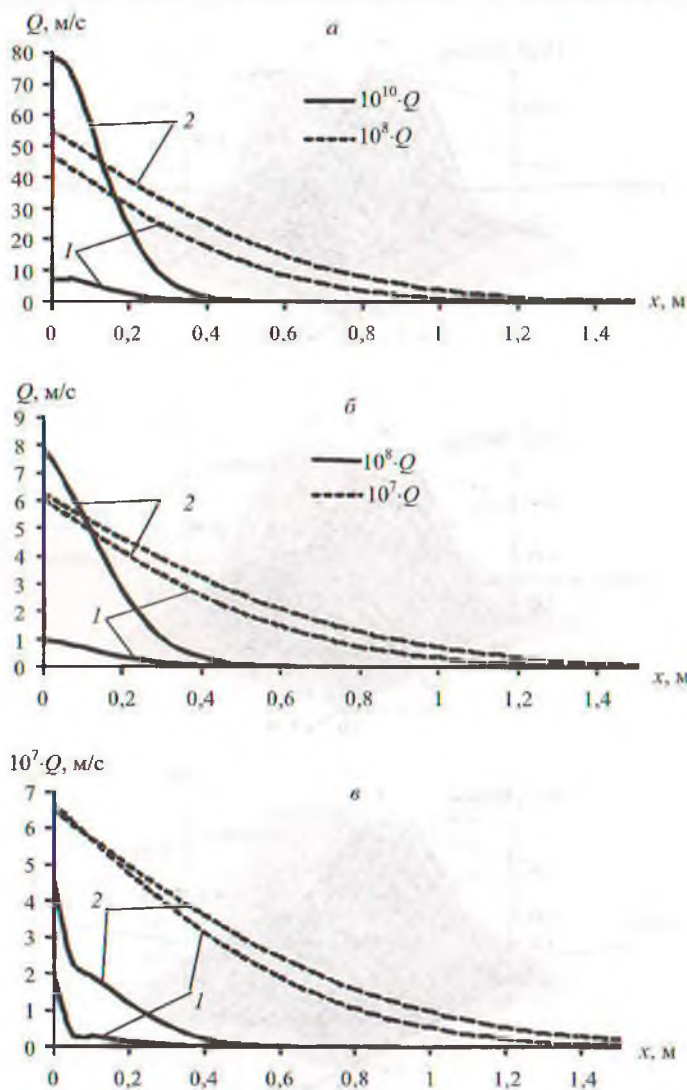


Рис.3.46. Изменение Q по x в различные t при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $t=2400$ (1), 3600 (2) с; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; — $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа}/\text{м}$, --- $|\nabla p_c|=0$.

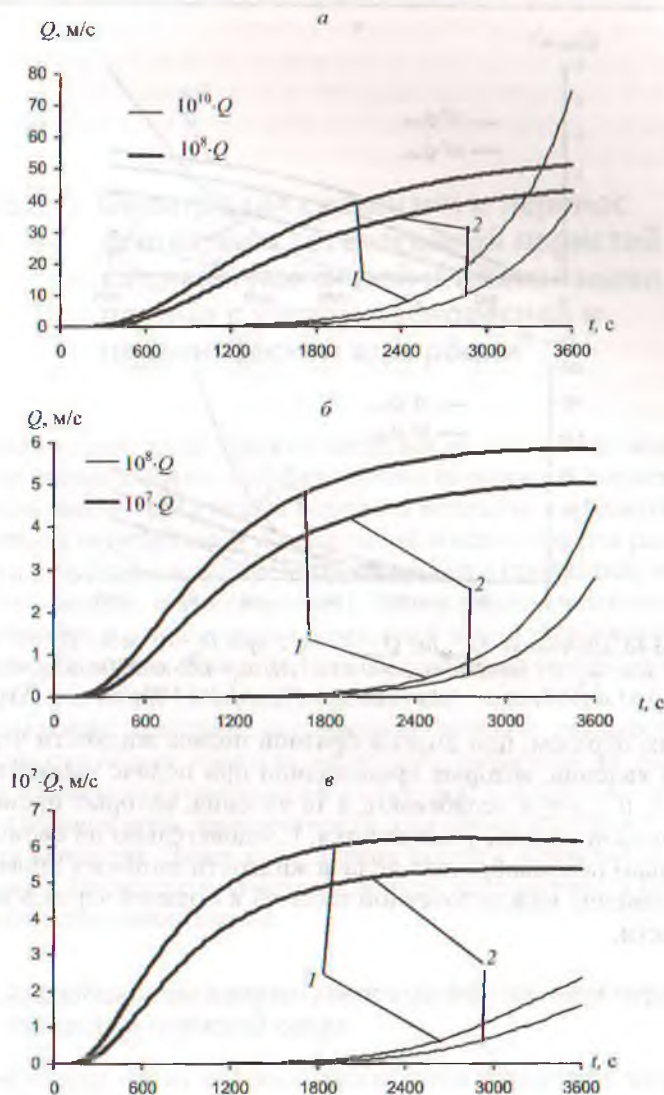


Рис. 3.47. Изменение Q в различных точках x при $D_0=10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2=5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; а) $\omega_0=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; б) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; в) $\omega_0=0,05 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $x=0,05$ (1), $0,15$ (2) м; — $|\nabla p_c|=1,265 \text{ МПа/м}$, — $|\nabla p_c|=0$.

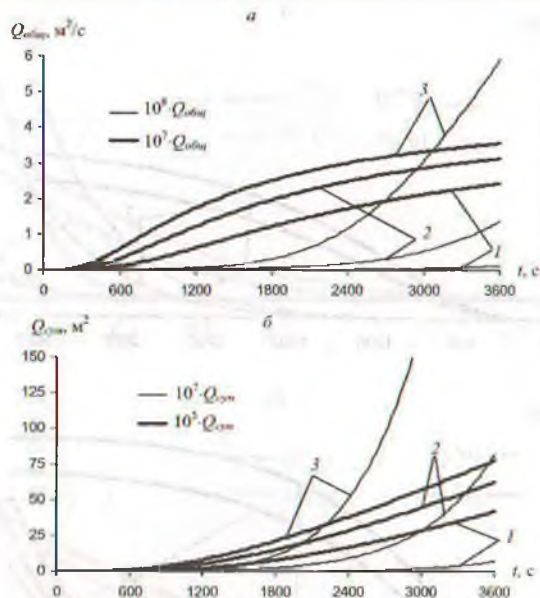


Рис. 3.48. Изменение $Q_{обш}$ (а), $Q_{ср}$ (б) по t при $D_0 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_2 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; $D_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\omega_0 = 0,1 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_1 = 0,05 \text{ с}^{-1}$ (1); $\omega_0 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_1 = 0,05 \text{ с}^{-1}$ (2); $\omega_0 = 0,05 \text{ м}/(\text{МПа} \cdot \text{с})$, $\omega_1 = 0,1 \text{ с}^{-1}$ (3); — $|\nabla p_c| = 1,265 \text{ МПа}/\text{м}$. — $|\nabla p_c| = 0$.

Таким образом, при полосаобразной подаче жидкости через границу те явления, которые происходили при подаче жидкости через всю $x=0$, $0 \leq y \leq h$ ослабевают, а те явления, которые происходили при точечной подаче, усиливаются. Следовательно по своим характеристикам полосаобразная подача жидкости занимает промежуточное положение между точечной подачей и подачей через всю границу области.

Глава 4. Фильтрация суспензии и перенос вещества в гетерогенной пористой среде со связанной водой и транзитными порами с учетом равновесной и неравновесной адсорбции

В начале главы даны краткие сведения об адсорбции вещества в процессе конвективного–диффузионного переноса в пористых средах. Затем рассмотрена задача переноса вещества в пористой среде, насыщенной неподвижной и подвижной жидкостью для различных законов адсорбции и внутреннего массообмена (линейный, нелинейный, равновесный, неравновесный). Задача решена численно. Определены профили концентрации вещества в зоне с подвижной жидкостью, адсорбированного вещества и массообмена между зонами для различных значений исходных параметров.

В отдельном параграфе исследована задача с двухместной адсорбцией, где общая площадь адсорбции разделена на две части, в одной происходит равновесная адсорбция, а в другой – неравновесная. Оценена роль двухместности адсорбции на характеристики переноса вещества. Далее исследована задача с данными на фронте смачивания. Определены различия данной постановки от постановки в полубесконечном пласте.

4.1. Адсорбция при конвективного–диффузионном переносе веществ в пористой среде

В последнее время вопросы утилизации различных загрязняющих веществ (примесей) путем закачки их в подземные резервуары (проницаемые пласты) вместе с водой приобретают все большее значение. Техническая реализация метода тесно связана с разработкой методов оценки и расчёта показателей процесса, что в свою очередь,

позволяет оценить риск в смысле экологической безопасности. Изучение переноса вещества в пористой среде важно и с точки зрения анализа и проектирования вторичных и третичных методов добычи нефти, определения характеристик подземных водоносных пластов путем закачки различных трайсеров, подземном выщелачивании пластов и др. [32, 103, 116, 130, 171]. Для качественной и количественной оценки характеристик переноса веществ в пористых средах важное значение имеет адекватное математическое моделирование, учитывающее основные характерные особенности процесса. Вопросам математического моделирования переноса веществ в пористых средах посвящен ряд работ [26, 91, 92, 105].

Как показывает практика эксплуатации нефтяных месторождений с неоднородными коллекторами, отбор воды из неоднородных пластов, в определенных зонах с плохими фильтрационно-емкостными свойствами флюиды могут оставаться неподвижными или малоподвижными даже при значительных градиентах давления. Такие зоны обычно считаются застойными, а поры в таких зонах считаются «мертвыми». Математическое моделирование процессов переноса вещества в таких средах впервые осуществлено в [107, 187]. Массообмен между зонами с подвижной и неподвижной жидкостью в этих моделях описывается с помощью кинетического уравнения первого порядка. Дальнейший анализ с помощью альтернативных подходов, использующих определенную геометрию зон с неподвижной жидкостью и диффузионное уравнение в них [163, 171], а также экспериментальные работы [118, 120] показали, что в ряде случаев модельный подход [107, 187] дает хорошие результаты. Применительно к задачам миграции солей при промывке почв данный подход применен в [8, 27]. В этих работах в зоне с подвижной жидкостью поры считаются транзитными, а зона с неподвижной жидкостью трактуется как зона, насыщенная неподвижной, связанной водой.

В работе [10] рассмотрена роль сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде. Водные растворы полимеров привлекают внимание как эффективный агент для вытеснения нефти из пористой среды, однако принципы выбора технологической схемы процесса не вполне ясны, поскольку для описания движения полимеров используются с незначительными изменениями обычные теории движения вязких жидкостей. В то же время анализ имеющихся экспериментальных данных показывает, что при

движении полимерных растворов весьма существенно взаимодействие растворенного полимера со стенками пор. Полимерное вещество способно накапливаться в пористой среде, изменяя ее фильтрационные характеристики, при этом полимерный раствор также меняет свои свойства. Вне зависимости от его детальной природы этот обмен полимерным веществом далее называется сорбцией.

Сорбционные явления приводят к ряду интересных особенностей движения полимерных растворов в пористых средах, в частности, к изменению расхода при постоянном перепаде давления и изменению гидравлической проводимости, заполненной полимерным раствором пористой среды после «отдыха» [5, 17, 25, 114, 121].

Эти явления могут быть объяснены тем, что часть полимера практически необратимо адсорбируется скелетом пористой среды (и именно эта часть определяет повышенное сопротивление последующему движению воды), а часть полимера удерживается обратимо, причем распределение этой «рыхло-удержанной» части полимера внутри порового пространства определяется не только термодинамическим состоянием (температурой и средним количеством полимера в единице объема среды), но и интенсивностью фильтрационного движения.

Адсорбцию подразделяют на два вида [9]: физическую и химическую. Физическая адсорбция в основном обусловлена поверхностными вандерваальсовыми силами, которые проявляются на расстояниях, значительно превышающих размеры адсорбируемых молекул, поэтому на поверхности адсорбента обычно удерживаются несколько слоев молекул адсорбата. При химической адсорбции поглощаемое вещество вступает в химическое взаимодействие с адсорбентом и образованием на его поверхности обычных химических соединений.

Определенные химические вещества могут различным образом реагировать составляющими грунта и вступать в различные реакции. В [98] предложена комбинация равновесной и кинетической моделей адсорбции чтобы описывать общую реакцию. Дано аналитическое решение одномерного КДУ с комбинацией линейной изотермы Френдлиха и обратимой кинетической адсорбции первого порядка. Анализировано отдельное или комбинированное влияние модельных параметров на КВ и на профили задерживания. Показана применимость комбинированной равновесно-кинетической модели

к описанию переноса пестицидов, нитратов и тяжелых металлов в почвах. Этот подход позже был назван двухместной моделью равновесной и кинетической адсорбции (сорбции) (МРКА). Аналогичный подход можно найти в [158, 162, 173]. Как обобщение МРКА предложена модель двухместной кинетической адсорбции (сорбции) (МДКА) [97]. Эта модель относится к классу многопроцессных неравновесных моделей. МДКА предполагает, что возможные места адсорбции можно подразделить на две группы, каждая группа вступает в реакцию в соответствии с кинетическим процессом первого порядка, но с разной интенсивностью кинетики сорбции.

Адсорбция вещества при переносе веществ в пористой среде значительно влияет на характеристики переноса. При переносе веществ в пористой среде обычно учитываются явления конвекции, конвективной диффузии и др. Однако явление адсорбции вещества в пористой среде при этом изучено слабо. Предложен ряд математических моделей для описания адсорбции химических веществ на стенках породы [109, 124, 145, 146, 150, 154]. Для равновесной адсорбции одно из первых решений задачи было представлено в работе [144]. Далее аналогичные задачи были решены в [110, 124, 131, 146]. Общее заключение отмеченных работ сводится к наличию так называемого ретардационного фактора, замедляющего процесс переноса вещества за счет адсорбционных явлений. Однако, предположение о равновесности адсорбции в ряде случаев может быть не совсем корректным. В [110, 131] показано, что теоретические результаты, основанные на равновесную адсорбцию [124], значительно могут отличаться от соответствующих экспериментальных, особенно при относительно больших скоростях переноса. Показано, что при больших скоростях переноса для описания адсорбционных явлений необходимо использовать неравновесную (кинетическую) адсорбцию. По сравнению с обратимой, необратимая адсорбция изучена слабо. В [180] изучен перенос атразина через различные образцы почв и получена неоднозначная зависимость «адсорбция – десорбция». Изотермы адсорбции и десорбции подчинялись закону Френдлиха, но с разными коэффициентами. В [184] для описания экспериментальных данных использован ряд моделей адсорбции, проведены теоретические расчеты для трех моделей адсорбции – из [145, 154] и равновесной адсорбции по изотерме Френдлиха. Теоретические результаты сравнены с экспериментальными, полученными при пе-

реносе пиклорама через насыщенные водой глинисты породы площади Норж.

Адсорбционный перенос веществ через пористые среды в одномерном случае обычно описывается следующим дифференциальным уравнением [91]

$$\frac{\rho}{\theta} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (4.1)$$

где c – концентрация растворенного вещества, кг/м^3 , S – количество адсорбированного вещества в одном килограмме породы, кг/кг , D – коэффициент дисперсии, $\text{м}^2/\text{с}$, v – осредненная поровая скорость движения раствора, м/с , ρ – общая плотность породы, кг/м^3 , θ – пористость (активная, насыщенная водой), x – расстояние (координата), м , t – время, с .

Точные решения уравнения (4.1) возможно получить при некоторых предположениях, касающихся механизма адсорбции и дисперсии [124, 144, 146, 154]. В общем случае для решения (4.1) необходимо задать зависимость адсорбции от концентрации в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = f(c, S), \quad (4.2)$$

где f – заданная, в общем случае нелинейная функция.

В [184] использованы следующие модели адсорбции.

Модель I. Интенсивность адсорбции, учитывающая как благоприятствующую, так и неблагоприятствующую кинетику, а также вероятность прилипания веществ на поверхность породы рассмотрена в [145]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = [k_2 \exp(bS)] \left[\frac{k_1}{k_2} \exp(-2bS) \frac{\theta c}{\rho} - S \right], \quad (4.3)$$

где k_1 и k_2 – благоприятствующий и неблагоприятствующий коэффициенты кинетики, не зависящие от концентрации c , c^{-1} , b – коэффициент, аналогичный коэффициенту поверхностной активности кг/кг .

При равновесной адсорбции из (4.3) получаем

$$S = \frac{\theta k_1 c}{\rho k_2} \exp(-2bS). \quad (4.4)$$

Параметры b и $\frac{\theta k_1}{\rho k_2}$ в (4.4) могут быть определены из зависимости $\ln(S/c) - S$ на основе углового коэффициента и отрезка, отсекаемого на оси $\ln(S/c)$ для различных равновесных концентраций c .

Коэффициенты k_1 , k_2 и b могут иметь разные значения в процессе адсорбции и десорбции, т.е. их значения не однозначны. В зависимости от знака $\frac{\partial S}{\partial t}$ можем иметь два значения коэффициента b

$$b = \begin{cases} b_{ads}, & \text{если } \frac{\partial S}{\partial t} > 0, \\ b_{des}, & \text{если } \frac{\partial S}{\partial t} < 0, \end{cases}$$

где b_{ads} и b_{des} представляют значения b в процессе адсорбции и десорбции, соответственно.

Модель II. Кинетика адсорбции в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_2 \left(\frac{k_1 \theta}{k_2 \rho} c^n - S \right), \quad (4.5)$$

где k_1 , k_2 — благоприятствующие и неблагоприятствующие адсорбции коэффициенты, n — показатель степени.

Уравнение (4.5) иногда называется уравнением кинетики первой степени. При равновесной адсорбции из (4.5) получаем

$$S = Kc^n, \quad K = \frac{k_1 \theta}{k_2 \rho}. \quad (4.6)$$

В (4.6) K называется коэффициентом распределения.

Модель III. Эта модель соответствует равновесному случаю (4.5), т.е. (4.6). В [111, 131] показано, что изотерма Френдлиха (4.6) хорошо описывает перенос некоторых органических пестицидов. Дифференцируя (4.6) относительно t получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = Knc^{n-1} \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Подстановка (4.7) в (4.1) приводит к уравнению относительно одной неизвестной — c .

В [98] предложено комбинированное использование равновесной и кинетической адсорбции для описания общего процесса переноса веществ. При использовании линейной изотермы Френдлиха и кинетического уравнения первой степени получено точное решение уравнения одномерного конвективного — дисперсионного переноса в пористой среде. Показано, что комбинированная модель адсорбции, в последующем получившая название двухместной адсорбции, может быть применена для описания переноса пестицидов, нутриентов и металлов в почвах.

Использованы два типа адсорбции:

1) Линейная изотерма Френдлиха (закон Генри)

$$S = k_1 \frac{\theta}{\beta} c; \quad (4.8)$$

2) Кинетическое уравнение обратимой адсорбции первой степени

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{\theta}{\beta} c - k_2 S. \quad (4.9)$$

Когда член $k_2 S$ в (4.9) намного меньше чем $k_1 \frac{\theta}{\beta} c$ получаем необратимую кинетическую модель первой степени, где интенсивность изменения адсорбированной массы зависит только от константы k_1 и c , а не от количества адсорбированной массы.

Стенки порового пространства могут состоять из различных химических веществ, минералов. Например, поверхность породы может состоять из органических материалов, глин, алюминия, железа, кварца и др. в различных сочетаниях. Химическое вещество при движении в порах с различными компонентами среды может взаимодействовать различным образом, т.е. с различной интенсивностью. Вещество может быстро адсорбироваться органическими компонентами поверхности пор (мгновенная, равновесная адсорбция), а различными минеральными компонентами среды – медленно (кинетическая адсорбция), или наоборот.

Еще одним предположением работы [98] является то, что равновесная и неравновесная адсорбции считаются взаимно независимыми. Общая адсорбция получается суммированием неравновесной адсорбции S_1 и равновесной – S_2 , а производная по времени общей адсорбции определяется как

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial t}. \quad (4.10)$$

С использованием (4.8), (4.9) из (4.10) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{\theta}{\beta} c - k_2 S_1 + k_3 \frac{\theta}{\beta} \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Общая равновесная адсорбция при больших временах, т.е. после завершения кинетических процессов имеет вид

$$S_{eq} = \frac{\theta}{\beta} \left(\frac{k_1}{k_2} + k_3 \right) c. \quad (4.12)$$

В соответствии с (4.1) и (4.11) имеем

$$\frac{\beta}{\theta} \frac{\partial S_1}{\partial t} + (1 + k_3) \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial c}{\partial t} - k_2 S_1. \quad (4.14)$$

В [98] получено общее аналитическое решение (4.13), (4.14) для некоторых начальных и граничных условий, установлено влияние k_1 , k_2 , k_3 на процесс адсорбированного транспорта, показаны возможности применения комбинированной модели для описания некоторых известных экспериментальных результатов.

В [186] представлены решения двух уравнений конвективной диффузии, используемых для изучения переноса пестицидов с учетом сорбции и десорбции. Первое уравнение соответствует двухместной модели адсорбции [184], где, как уже говорилось выше, в одной части поверхности породы происходит неравновесная, а в другой — равновесная адсорбция. Другое уравнение — известное двухзонное (двухрегионное) уравнение переноса [107], где в одной части среды жидкость подвижна, а в другой — неподвижна, часто используемое для описания переноса в агрегированных или трещиновато-пористых средах. Уравнения учитывают деградацию в обеих фазах — мобильной и сорбированной. Показано, что с математической точки зрения обе модели (двухместные и двухзонные) эквивалентны — они описываются безразмерными уравнениями одного вида. Помимо других параметров рассмотрена деградация вещества как в подвижной части, так и в сорбированной.

Когда процесс адсорбции линейный, равновесный с $S = kc$, то уравнение переноса вещества принимает вид

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \mu c, \quad (4.15)$$

где $R = 1 + \frac{\rho k}{\theta}$, $\mu = \mu_e + \frac{\rho \mu_s k}{\theta}$, μ_e , μ_s — коэффициенты деградации вещества в подвижной и сорбированной части.

Если процесс происходит по одностепенной кинетической адсорбции, то уравнение переноса имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\rho}{\theta} \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \mu_e c - \frac{\rho \mu_s}{\theta} S, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha(kc - S) - \mu_s c, \quad (4.17)$$

где α – коэффициент кинетической интенсивности.

В случае двухместной адсорбции мы имеем часть поверхности f с равновесной адсорбцией S_1 (тип 1), а другая часть $1 - f$ с неравновесной (тип 2) – S_2 . (В [98] обозначения S_1 и S_2 – наоборот). В равновесном состоянии, т.е. после завершения кинетических процессов имеем

$$S_1 = fkc, \quad (4.18)$$

$$S_2 = (1 - f)kc. \quad (4.19)$$

Общая адсорбция представится в виде суммы (4.18) и (4.19), т.е. $S = kc$.

Поток вещества из мобильной части в адсорбирующие поверхности типа 1 и 2 обозначены через J_{a1} и J_{a2} . Тогда кинетика адсорбции описывается уравнениями

$$\rho \frac{\partial S_1}{\partial t} = J_{a1} - \rho \mu_{s1} S_1, \quad (4.20)$$

$$\rho \frac{\partial S_2}{\partial t} = J_{a2} - \rho \mu_{s2} S_2, \quad (4.21)$$

где μ_{s1} , μ_{s2} – коэффициенты дегградации вещества для мест 1 и 2.

Общее уравнение переноса с учетом (4.1), (4.20), (4.21) при равновесной адсорбции $S_1 = fkc$ принимает вид

$$\frac{\partial(\theta + f\rho k)c}{\partial t} + \rho \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta D \frac{\partial c}{\partial x} - vc \right) - \theta \mu_c c - f\rho k \mu_{s1} c, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = \alpha[(1 - f)kc - S_2] - \mu_{s2} S_2. \quad (4.23)$$

В [96] предложена модель, которая в явном виде учитывает множество неравновесных источников. Мультипроцессная неравновесная модель (МНМ) сформулирована для случаев, когда неравновесность вызвана комбинацией процессов переноса и сорбции. Проводился анализ чувствительности, определялись условия, когда МНМ приводится к биконтинуальной и локально равновесным моделям. Эти условия строго определяются значениями безразмерных параметров интенсивности. МНМ оценена с помощью опубликованных экспериментальных данных. Для определения параметра интенсивности сорбции в МНМ модели успешно использовано регрессионное уравнение.

В работе [118] двухместная/двухзонная модель переноса использована для равновесной сорбции и десорбции пестицида. Лабораторные эксперименты проводились с H_2O , Cl и атразином при двух значениях скорости течения жидкости и концентрации. Получена хорошая корреляция между расчетными и лабораторными данными. Обсуждены преимущества и недостатки модели.

Серьезной проблемой моделирования подвижности веществ в почвах является учет временно-зависимую задержку реактивных веществ в моделях переноса что может быть оценено на основе независимых экспериментов [172]. В [172] исследована кинетика задержки и перенос кадмия (Cd) в двух образцах почвы. Предложен многокомпонентный подход, учитывающий обратимую и необратимую задержку Cd в процессе транспорта в почвах. Механизм задержки включает равновесный ионообмен и специфичный сорбционный процесс, основанный на кинетическую реакцию второго порядка (Ленгмюр). Многокомпонентная модель хорошо описывает полученные кривые вытеснения. Использование кинетику ионообмена и специфическую сорбцию в целом лучше описывает результаты.

Из представленного краткого образа становится очевидным, что для описания адсорбционного переноса веществ могут быть использованы различные подходы, основанные на равновесные – неравновесные, линейные – нелинейные, одноместные – двухместные, однозонные – двухзонные представления пористой среды и адсорбционного процесса. Математические модели реализованы для наиболее простых случаев, как правило, решены только одномерные задачи с рядом упрощающих предположений. При определении направлений новых исследований и постановки задач это обстоятельство должно быть учтено.

4.2. Перенос вещества в пористой среде, насыщенной неподвижной и подвижной жидкостью

В данном параграфе рассмотрим задачи переноса вещества в двухзонном пласте с учетом адсорбции вещества в зоне с подвижной жидкостью. Адсорбцию считаем неравновесной, описываемой кинетическим уравнением первого порядка [109, 150, 33].

Рассмотрим пористую среду, состоящую из двух зон: 1) зона с пористостью m_1 , где поры являются транзитными для жидкости –

зона с подвижной жидкостью; 2) зона с неподвижной жидкостью (с неподвижной, связанной водой), пористостью m_2 (Рис.4.1) [54, 55, 56, 140]

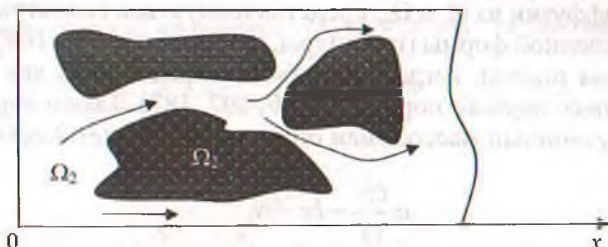


Рис.4.1. Пористая среда с двумя зонами: с транзитными порами (Ω_1) и связанной, неподвижной жидкостью (Ω_2).

Пористую среду считаем полубесконечной, одномерной, зону Ω_2 равномерно распределенной в Ω_1 . Последнее предположение позволяет не делать никаких допущений относительно геометрической формы агрегатов зоны Ω_2 . Элементы зоны Ω_2 с определенной геометрической формой и вопросы переноса веществ, как указывалось выше, исследовались в [163, 164]. Считаем также, что адсорбция вещества происходит только в зоне Ω_1 , хотя в более общем случае необходимо учитывать адсорбционные явления в обеих зонах, где кинетика адсорбции может значительно отличаться [164]. В зоне Ω_1 за счет неоднородности распределения скоростей движения жидкости в порах обычно происходит гидродинамическая дисперсия вещества, что приводит к линейной зависимости коэффициента дисперсии от скорости движения жидкости в порах [91, 92]. Здесь для простоты принимается постоянный коэффициент дисперсии D , что, очевидно, следует понимать как некоторый эффективный коэффициент.

4.2.1. Линейная кинетика адсорбции и внутреннего массообмена

В рамках сделанных допущений уравнение переноса вещества в Ω_1 можно записать в виде

$$m_1 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + m_2 \frac{\partial N}{\partial t} + \beta \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (4.24)$$

где c – концентрация вещества, $\text{м}^3/\text{м}^3$, v – скорость фильтрации, $\text{м}/\text{с}$, D – коэффициент дисперсии, $\text{м}^2/\text{с}$, N – концентрация вещества в зоне Ω_2 , $\text{м}^3/\text{м}^3$, S – концентрация адсорбированного вещества, $\text{м}^3/\text{кг}$, β – общая плотность пористой среды, $\text{кг}/\text{м}^3$.

В (4.24) член с $\frac{\partial N}{\partial t}$ характеризует внутридиффузионный массообмен из зоны Ω_1 в Ω_2 . Для его оценки можно использовать решение задачи диффузии из Ω_1 в Ω_2 , представленную как геометрические тела определенной формы (цилиндры, шары и др.) [163, 164]. Здесь мы используем подход, когда массообмен определяется как кинетический процесс первого порядка [8, 89, 107, 187]. Таким образом, внутридиффузионный массообмен определяется кинетическим уравнением

$$\alpha \frac{\partial N}{\partial t} = kc - N, \quad (4.25)$$

где $k, \alpha - \text{const}$.

В зоне Ω_1 происходит неравновесная адсорбция вещества, кинетика которой определяется, как и внутридиффузионный массообмен, уравнением первого порядка [109, 150]

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{m_1}{\beta} c - k_2 S, \quad (4.26)$$

$k_1, k_2 - \text{const}$.

Пусть в первоначально насыщенную чистой (без вещества) жидкостью среду с начального момента времени закачивается жидкость с постоянной концентрацией вещества c_0 . Рассмотрим такие периоды времени, где концентрационное поле не достигает правой границы среды, $x = \infty$. При отмеченных допущениях начальные и граничные условия для задачи имеют вид

$$c(0, x) = 0, \quad N(0, x) = 0, \quad S(0, x) = 0, \quad c(t, 0) = c_0, \quad c(t, \infty) = 0. \quad (4.27)$$

Необходимо определить поля концентрации, адсорбированного вещества, диффундированного вещества из Ω_1 в Ω_2 .

Задача (4.24) – (4.27) хотя и является линейной, получение аналитического решения является сложным, т.к. необходимо найти одновременно три поля. Поэтому для решения задачи применяем метод конечных разностей [29]. В рассматриваемой области

$$\Omega = \{(t, x), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \infty\}$$

введена равномерная по направлениям сетка

$$\bar{\omega}_{th} = \left\{ (t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J} \right\},$$

где I – достаточно большое целое число, выбираемое так, чтобы отрезок $[0, x_i]$, $x_i = ih$, перекрывал область расчетного изменения полей c, S и N , h – шаг сетки по направлению x .

В открытой сеточной области

$$\omega_{ih} = \left\{ (t_j, x_i); t_j = \tau j, x_i = ih, \tau = \frac{T}{J}, j = \overline{1, J}, i = \overline{1, I-1} \right\}$$

аппроксимировались уравнения (4.24), (4.25), (4.26) следующим образом:

$$m_1 \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + \nu \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{2h} + m_2 \frac{N_i^{j+1} - N_i^j}{\tau} + \beta \frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\tau} = D \frac{c_{i-1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \quad (4.28)$$

$$\alpha \frac{N_i^{j+1} - N_i^j}{\tau} = kc_i^j - N_i^{j+1}, \quad (4.29)$$

$$\frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{\tau} = k_1 \frac{m_1}{\beta} c_i^j - k_2 S_i^{j+1}, \quad (4.30)$$

где c_i^j, N_i^j, S_i^j — сеточные значения функций $c(t, x), N(t, x), S(t, x)$ в точке (t_j, x_i) .

Из явных сеточных уравнений (4.29), (4.30) определяем N_i^{j+1}, S_i^{j+1}

$$N_i^{j+1} = p_1 N_i^j + p_2, \quad (4.31)$$

$$S_i^{j+1} = q_1 S_i^j + q_2, \quad (4.32)$$

где $p_1 = \alpha(\alpha + \tau)^{-1}$, $p_2 = \tau kc_i^j(\alpha + \tau)^{-1}$,

$$q_1 = (1 + k_2 \tau)^{-1}, \quad q_2 = \frac{\tau k_1 m_1}{\beta(1 + \tau k_2)} c_i^j.$$

Сеточные уравнения (4.5) приводятся к виду

$$\gamma_1 c_{i-1}^{j+1} - \gamma_2 c_i^{j+1} + \gamma_3 c_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad (4.33)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{D\tau}{h^2} + \frac{\tau\nu}{2h}, \quad \gamma_2 = \frac{2D\tau}{h^2} + m_1, \quad \gamma_3 = \frac{D\tau}{h^2} - \frac{\tau\nu}{2h},$$

$$F_i^j = m_1 c_i^j - m_2 (N_i^{j+1} - N_i^j) - \beta (S_i^{j+1} - S_i^j).$$

Устанавливается следующий порядок расчета решений. По (4.31), (4.32) определяются N_i^{j+1}, S_i^{j+1} , затем решая систему линейных уравнений (4.33) методом прогонки — c_i^{j+1} . Поскольку $p_1, q_1 < 1$, схемы (4.31), (4.32) устойчивы, а для (4.33) условия устойчивости метода прогонки выполняются.

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$ м/с, $D = 3 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $c_0 = 0,01$, $m_1 = 0,3$, $m_2 = 0,2$, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 2000$ кг/м³ и различные значения k_1, k_2, α .

Некоторые результаты расчетов для определенного набора значений исходных параметров приведены на рис.4.2 – 4.9. Анализ графиков показывает, что за счет поступления вещества в среде формируются три поля c , S , N , которые продвигаются по пласту с течением времени. Можно наблюдать увеличение концентрации адсорбированного вещества и внутреннего массообмена в каждой точке пласта, включая точку $x=0$. Вещество попадая в среду вместе с несущей жидкостью может находиться во взвешенном состоянии (поле $c(t, x)$), адсорбироваться (поле $S(t, x)$) или диффундировать в зону с неподвижной жидкостью (поле $N(t, x)$). Взаимораспределение этих полей отражены на графиках (Рис.4.2 – 4.9). Сравнивая графики рис.4.2–4.4, построенные для различных значений параметра α (при неизменных других параметрах) можно заметить запаздывающую динамику развития профилей N . С увеличением значения α переходной процесс затягивается. На рис.4.5, 4.6 отражены результаты при увеличении значений параметра k_1 .

Сравнивая рис.4.3, 4.5, 4.6 заметим увеличение значений концентрации адсорбированного вещества. Аккумуляция вещества в пласте за счет адсорбции приводит к уменьшению $c(t, x)$ и следовательно $N(t, x)$. Вследствие этого продвижение фронтов c , S , N в направлении движения жидкости замедляется (рис.4.3, 4.5, 4.6). На рис.4.7, 4.8 отражены результаты при увеличении значений k_2 . Сравнивая графики рис.4.3, 4.7, 4.8 можно обнаружить уменьшение значений адсорбции с увеличением k_2 . Одновременно при этом продвижение профилей в направлении движения жидкости ускоряется. Обобщая сказанное, можно заключить, что влияние k_1 и k_2 на процесс адсорбции, и вообще на перенос вещества, взаимнообратно.

При $t \rightarrow \infty$ из (4.26) получаем

$$S = k_3 \frac{m_1}{\beta} c, \quad k_3 = \frac{k_1}{k_2}, \quad (4.34)$$

– равновесной закон адсорбции Генри. Характерным временем перехода от (4.26) к (4.34) является k_2^{-1} .

Для больших t из (4.27) получаем

$$N = kc \quad (4.35)$$

– линейный равновесный закон внутреннего массообмена. Характерное время перехода от (4.25) к (4.35) – α .

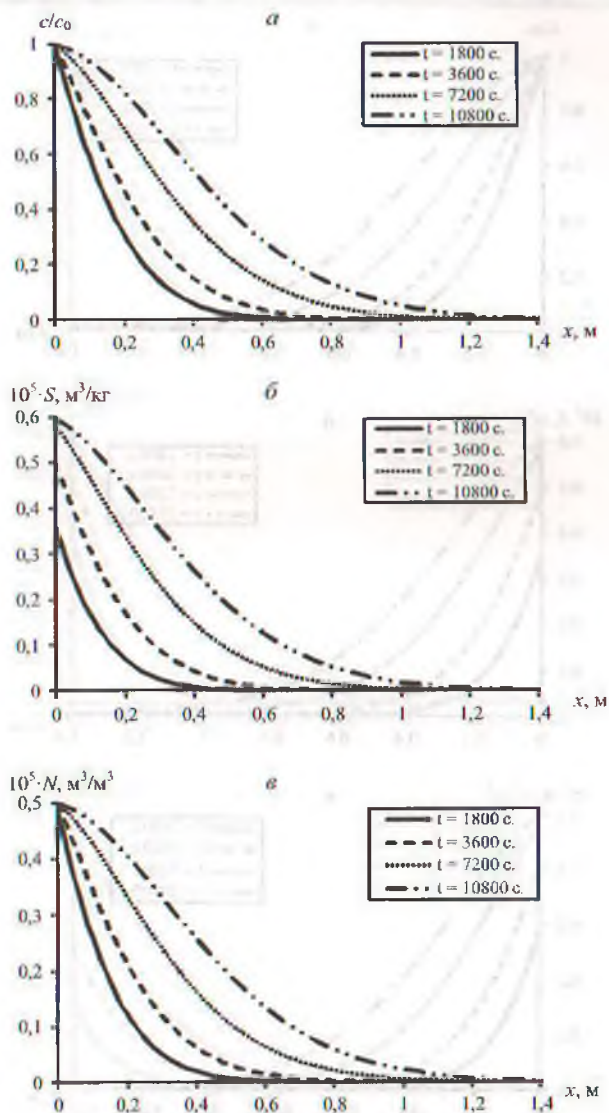


Рис.4.2. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $k_1=2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_2=5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 500 \text{ с}$ в различные моменты времени.

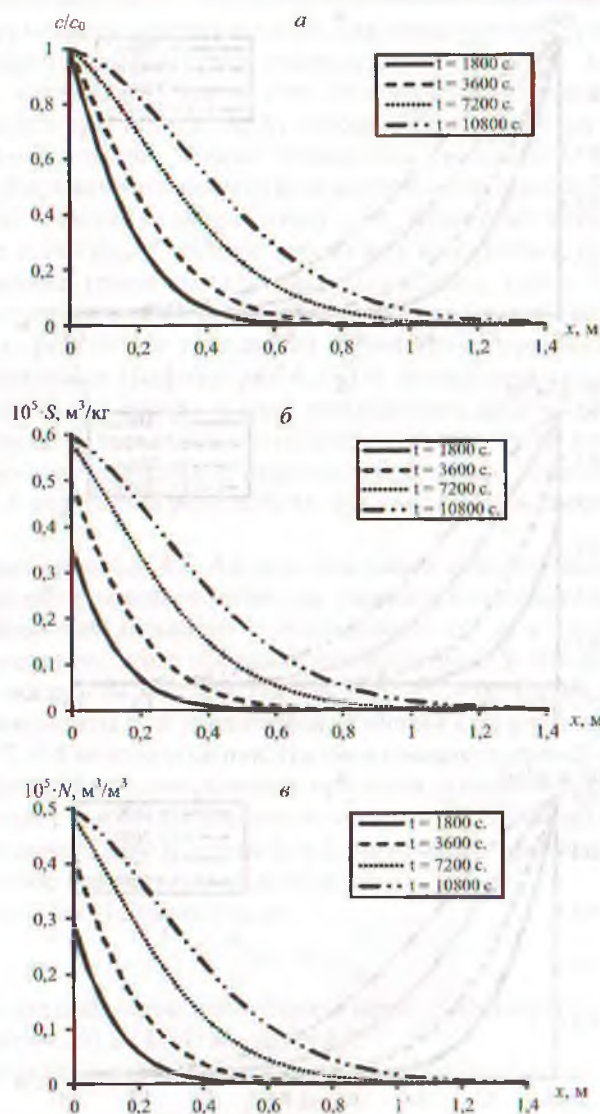


Рис.4.3. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $k_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ с}$ в различные моменты времени.

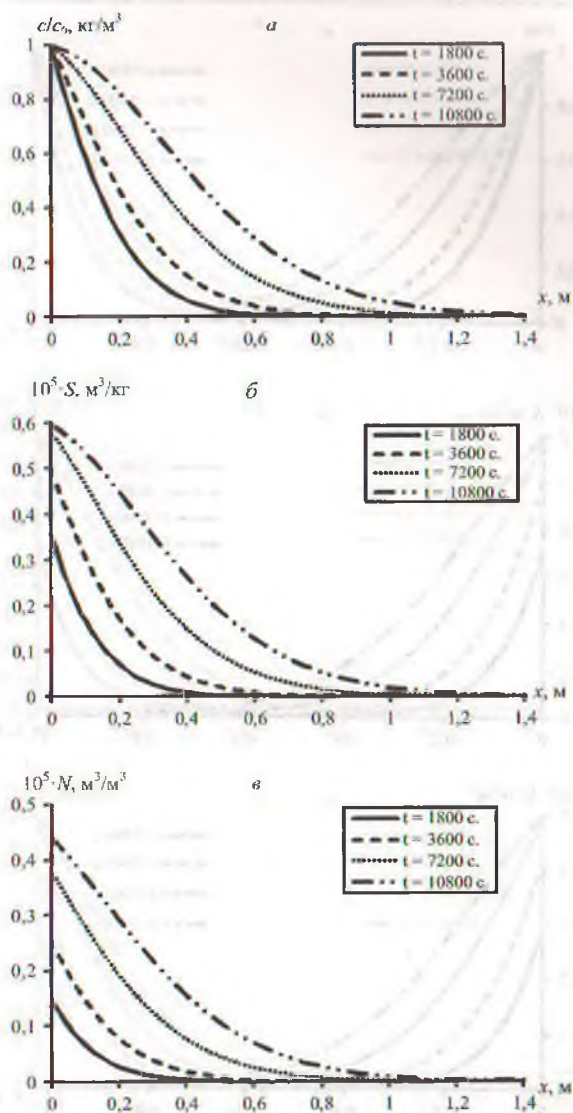


Рис.4.4. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $k_1=2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k_2=5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 5000 \text{ с}$ в различные моменты времени.

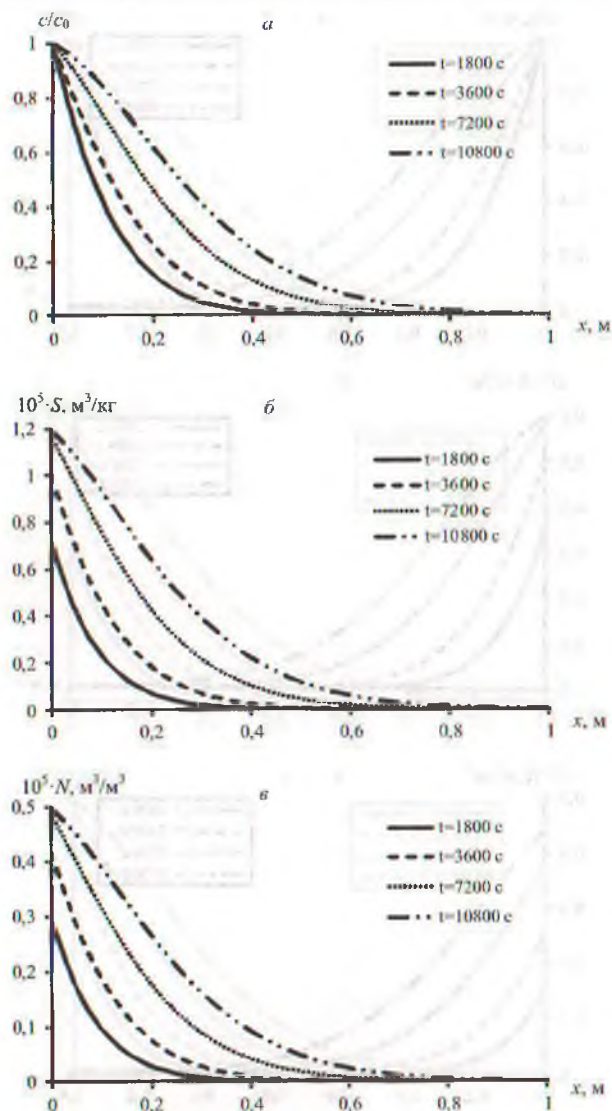


Рис.4.5. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $k_1=4 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $k_2=5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ c}$ в различные моменты времени.

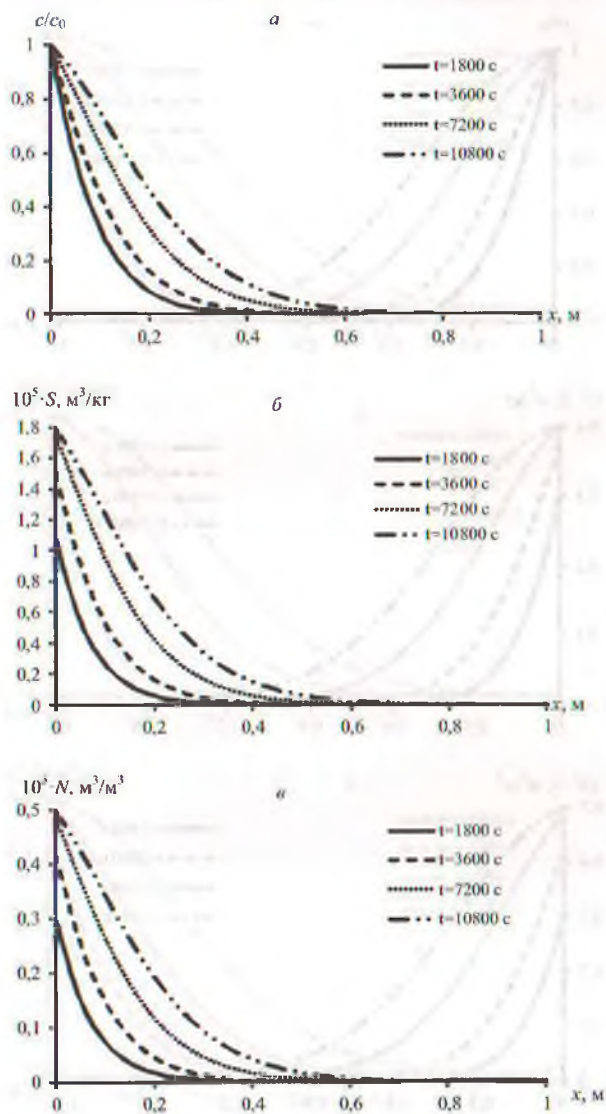


Рис. 4.6. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $k_1=6 \cdot 10^{-3} c^{-1}$, $k_2=5 \cdot 10^{-4} c^{-1}$, $\alpha = 2000$ c в различные моменты времени.

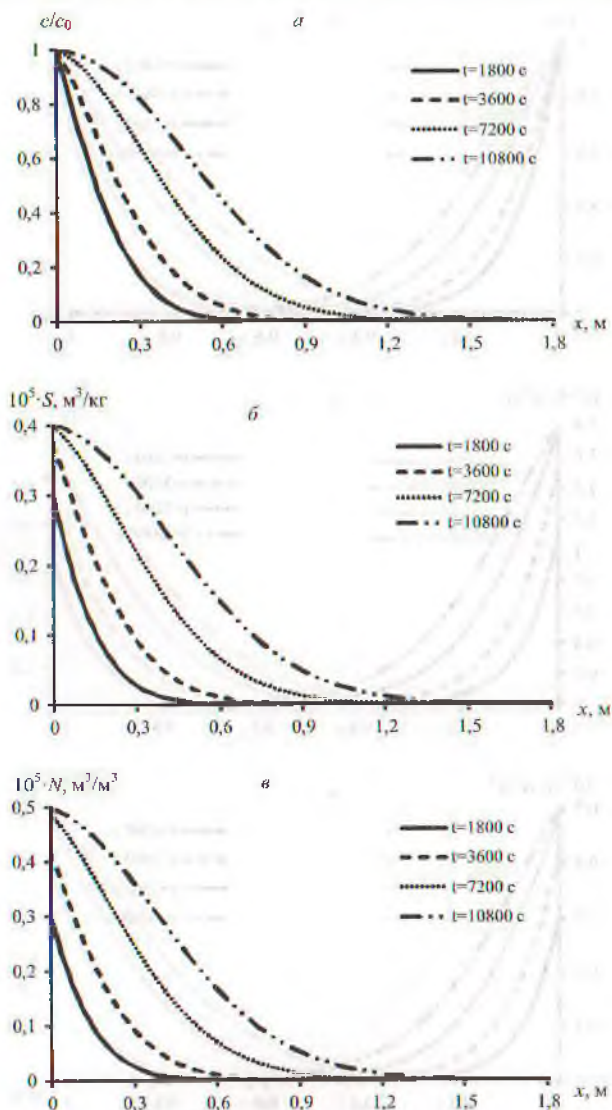


Рис. 4.7. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $k_1=2 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $k_2=7,5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ c}$ в различные моменты времени.

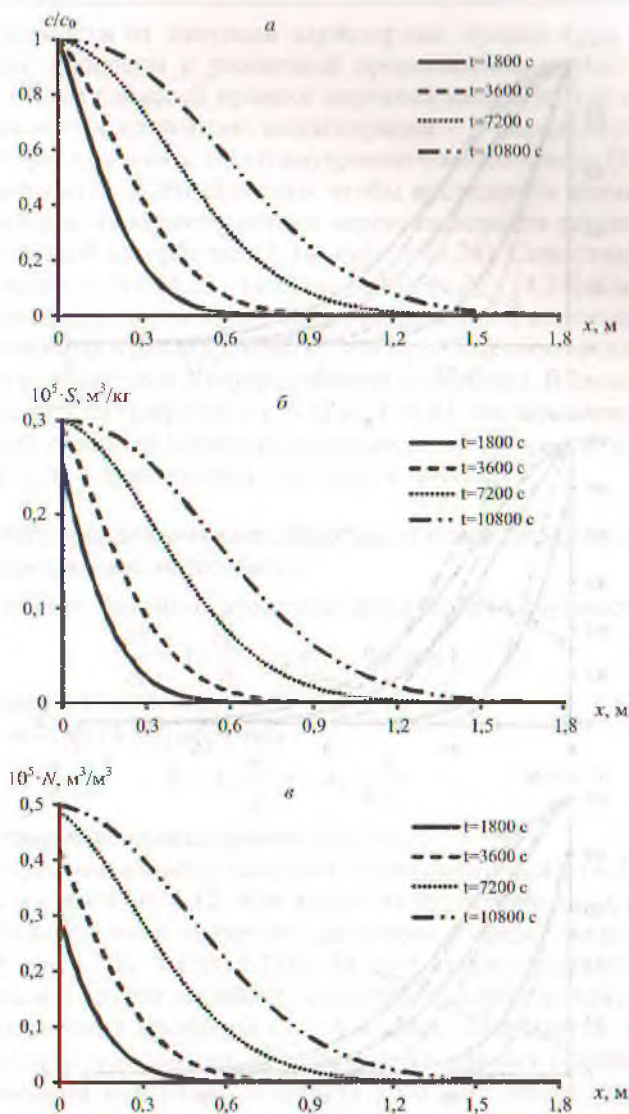


Рис.4.8. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $k_1=2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_2=10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ с}$ в различные моменты времени.

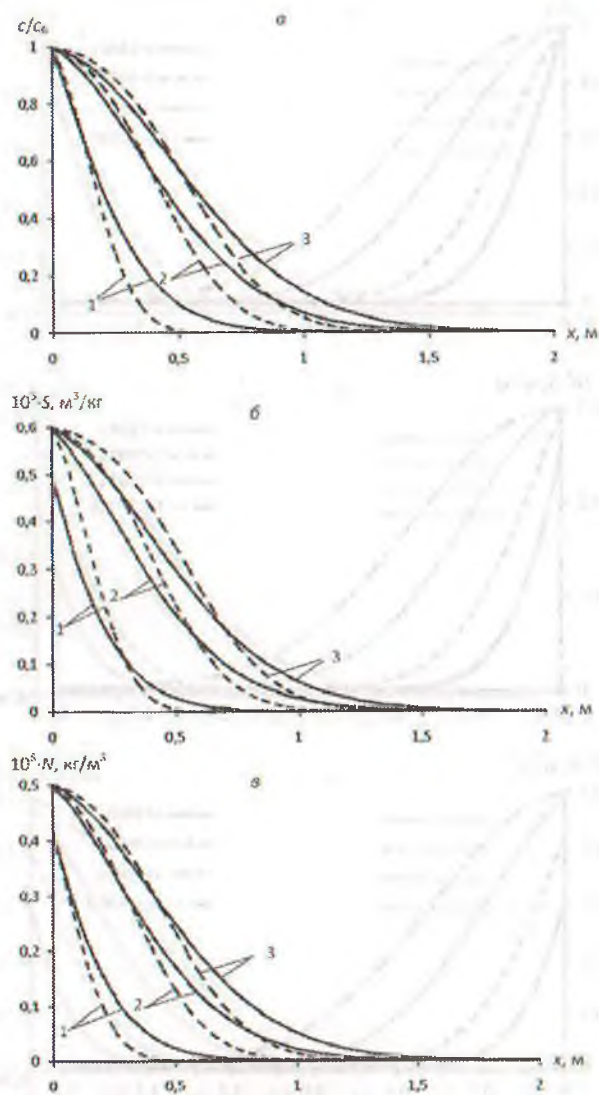


Рис.4.9. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) для равновесной адсорбции (штриховые кривые) и неравновесной адсорбции (сплошные кривые) при $t = 3600$ с (1), 10800 с (2), 14400 с (3). k_p , k_r , α – см. рис.4.3.

В зависимости от значений характерных времен k_2^{-1} и α имеем переходные процессы с различной продолжительностью. Однако, здесь мы имеем сложный процесс переноса вещества, где переход к установившемуся состоянию концентрации — c определяется помимо прочих факторов кинетикой внутреннего массообмена (4.25) и адсорбции вещества (4.26). Для того, чтобы исследовать влияние кинетики адсорбции на характеристики переноса веществ решалась задача с равновесной адсорбцией (4.34) вместо (4.26). Сопоставительные графики задач (4.24), (4.25), (4.26) и (4.24), (4.25), (4.34) показаны на рис.4.9. Как видно и рис.4.9б даже при временах t , значительно превышающих характерные времена k_2^{-1} и α есть заметное расхождение в значениях равновесной и неравновесной адсорбции. В свою очередь, это отражается на графиках c и N (Рис.4.9а,б), что показывает вышеотмеченный сложный характер переходного процесса, где установление полей c , S , N взаимодействуют друг с другом.

4.2.2. Нелинейная кинетика адсорбции и линейная кинетика внутреннего массообмена

Здесь вместо линейной кинетики адсорбции (4.26) рассмотрим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{m_1}{\beta} c^n - k_2 S, \quad 0 < n < 1, \quad (4.36)$$

— нелинейную кинетику.

При $t \rightarrow \infty$ из (4.36) получим

$$S = k_3 \frac{m_1}{\beta} c^n, \quad k_3 = \frac{k_1}{k_2}. \quad (4.37)$$

— изотерму Френдлиха (равновесную).

Результаты численного решения уравнений (4.24), (4.25), (4.36) показаны на рис.4.10–4.12. Как видно из представленных результатов, с уменьшением n значения адсорбции в среде увеличиваются (сравните рис.4.10б, 4.11б, 4.12б). За счет аккумуляции вещества в пласте, как и в случае линейной кинетики адсорбции, продвижение концентрационных профилей c , S , N в среде замедляется. Полученные результаты показывают, что при прочих равных условиях в случае нелинейной кинетики адсорбция протекает более интенсивно, чем в случае линейной. На рис.4.13 сравнены численные решения задач (4.24), (4.25), (4.36) и (4.24), (4.25), (4.37). Те сложности переходного процесса, отмеченные для линейной кинетики адсорбции, полностью сохраняются и в случае нелинейной кинетики.

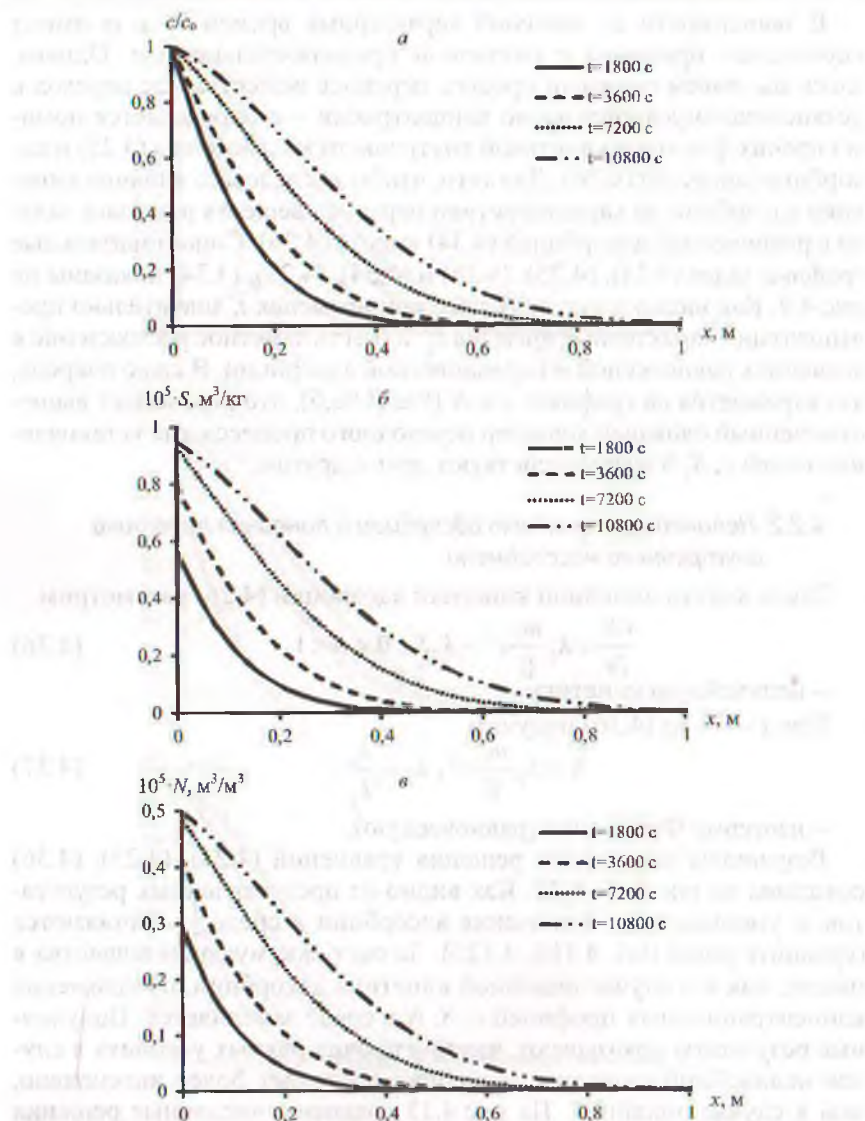


Рис.4.10. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $n = 0,9$ в различные моменты времени. k_r, k_z, α – см. рис.4.3.

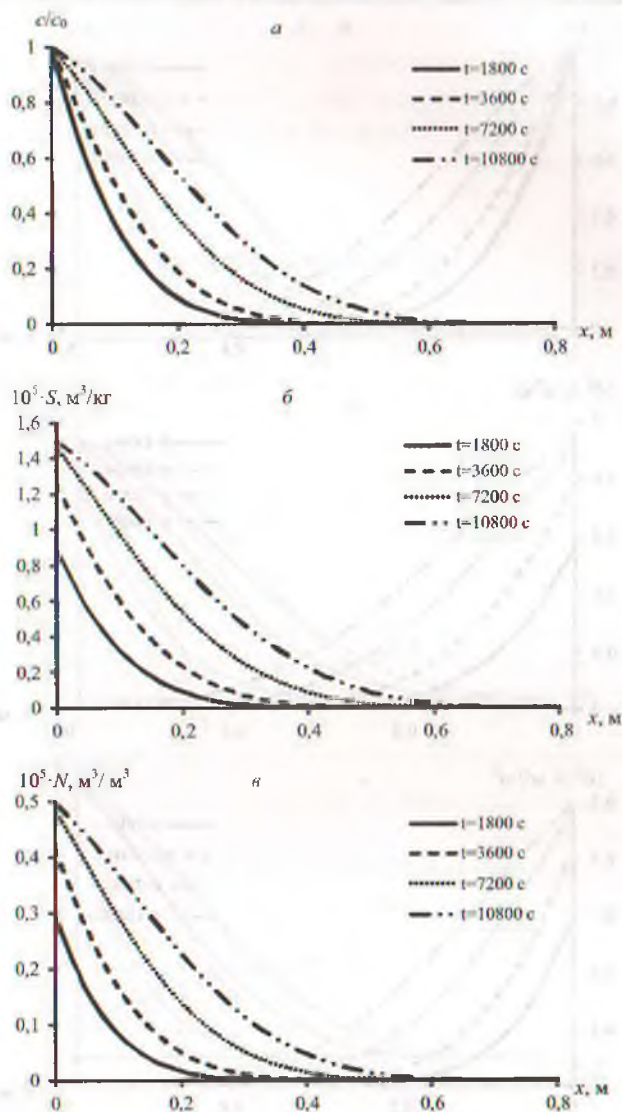


Рис.4.11. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $n = 0,8$ в различные моменты времени. k_p, k_w а – см. рис.4.3.

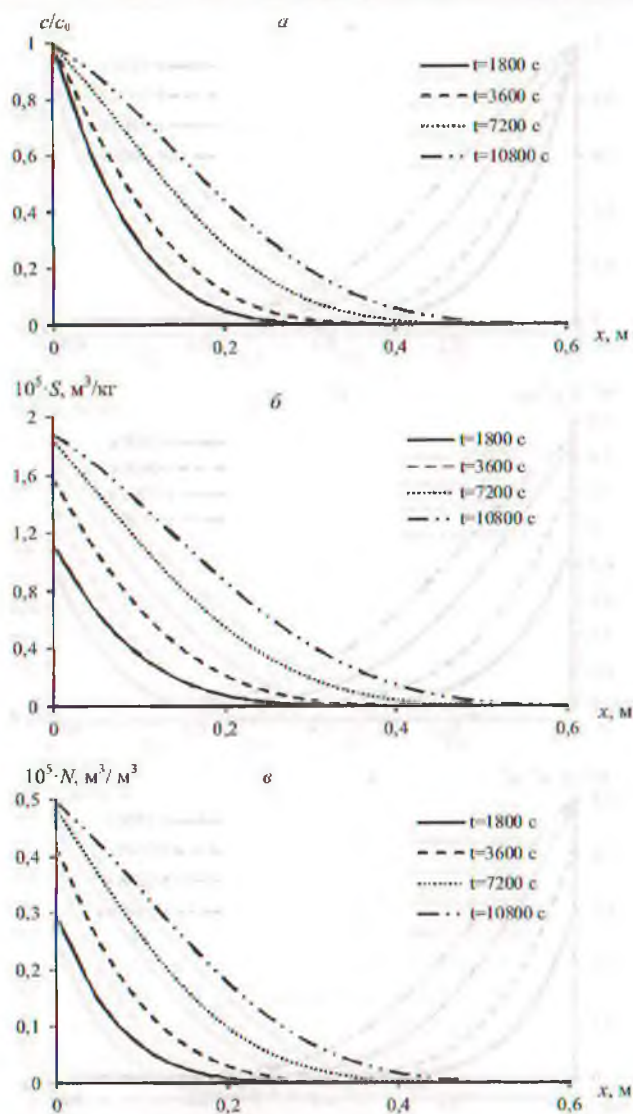


Рис. 4.12. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $\eta = 0,75$ в различные моменты времени. k_p, k_z, α — см. рис. 4.3.

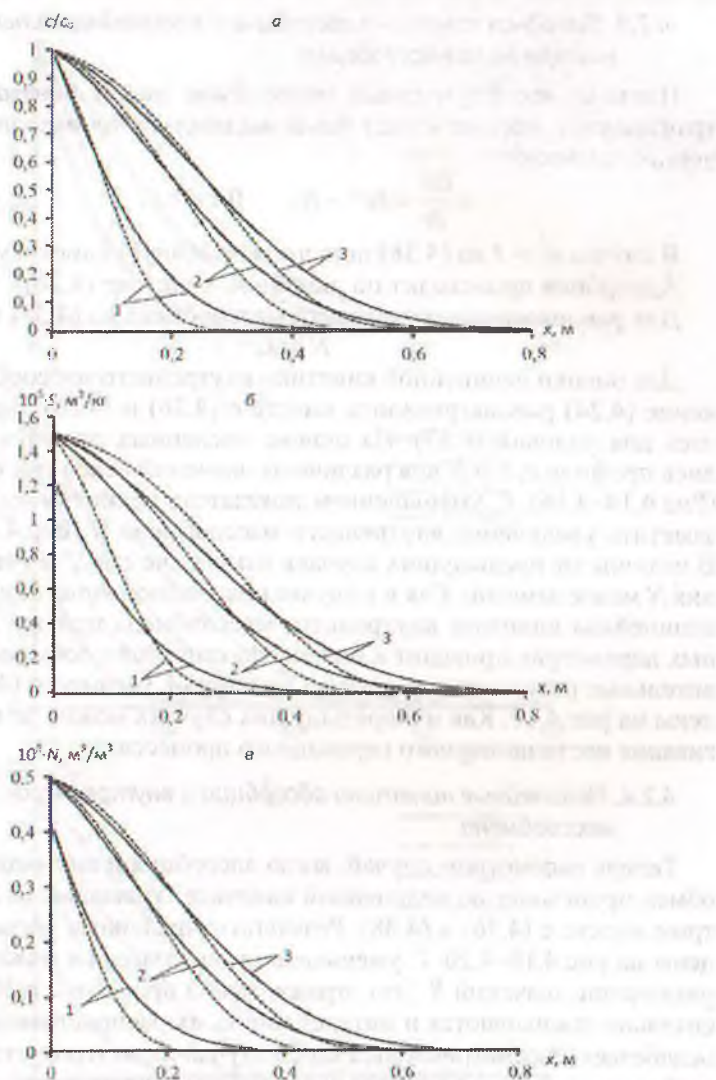


Рис.4.13. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) для равновесной адсорбции (штриховые кривые) и неравновесной адсорбции (сплошные кривые) при $n = 0.8$ в различные моменты времени $t = 3600$ с (1), 10800 с (2), 14400 с (3). k_p , k_s , α — см. рис.4.3.

4.2.3. Линейная кинетика адсорбции и нелинейная кинетика внутреннего массообмена

Примем, что внутренний массообмен между зонами пласта с транзитными порами и застойной жидкостью происходит по нелинейной кинетике

$$\alpha \frac{\partial N}{\partial t} = kc^m - N, \quad 0 < m < 1. \quad (4.38)$$

В случае $m = 1$ из (4.38) получаем линейную кинетику (4.25).

Адсорбция происходит по линейной кинетике (4.26).

Для равновесного внутреннего массообмена из (4.38) получаем

$$N = kc^m. \quad (4.39)$$

Для оценки нелинейной кинетики внутреннего массообмена уравнение (4.24) рассматривалось вместе с (4.38) и (4.26). Задача решалась для условий (4.27). На основе численных расчетов определялись профили c , S и N для различных значений исходных параметров (Рис.4.14–4.16). С уменьшением показателя нелинейности m можно заметить увеличение внутреннего массообмена N (Рис.4.14а–4.16а). В отличие от предыдущих случаев изменение c и S за счет увеличения N менее заметно. Как и в случае нелинейной кинетики адсорбции нелинейная кинетика внутреннего массообмена при тех же остальных параметрах приводит к интенсификации массообмена. Сопоставительные результаты при использовании (4.39) вместо (4.38) приведены на рис.4.17. Как и в предыдущих случаях можно заметить затягивание нестационарного переходного процесса.

4.2.4. Нелинейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена

Теперь рассмотрим случай, когда адсорбция и внутренний массообмен происходят по нелинейной кинетике. Уравнение (4.24) рассмотрим вместе с (4.36) и (4.38). Результаты численных расчетов приведены на рис.4.18–4.20. С уменьшением показателя n можно заметить увеличение значений S . Это отражается на профили c и N ; они относительно уменьшаются и интенсивность их распространения в среде ослабевает. Рассматриваемый здесь случай характеризуется наибольшей интенсивностью процессов адсорбции и внутреннего массообмена по сравнению с предыдущими случаями (4.24)–(4.26). Использование нелинейной кинетики адсорбции по сравнению с §4.2.3 привело к интенсификацию процесса адсорбции. Сравнительные результаты при использовании (4.36), (4.37) приведены на рис.4.21.

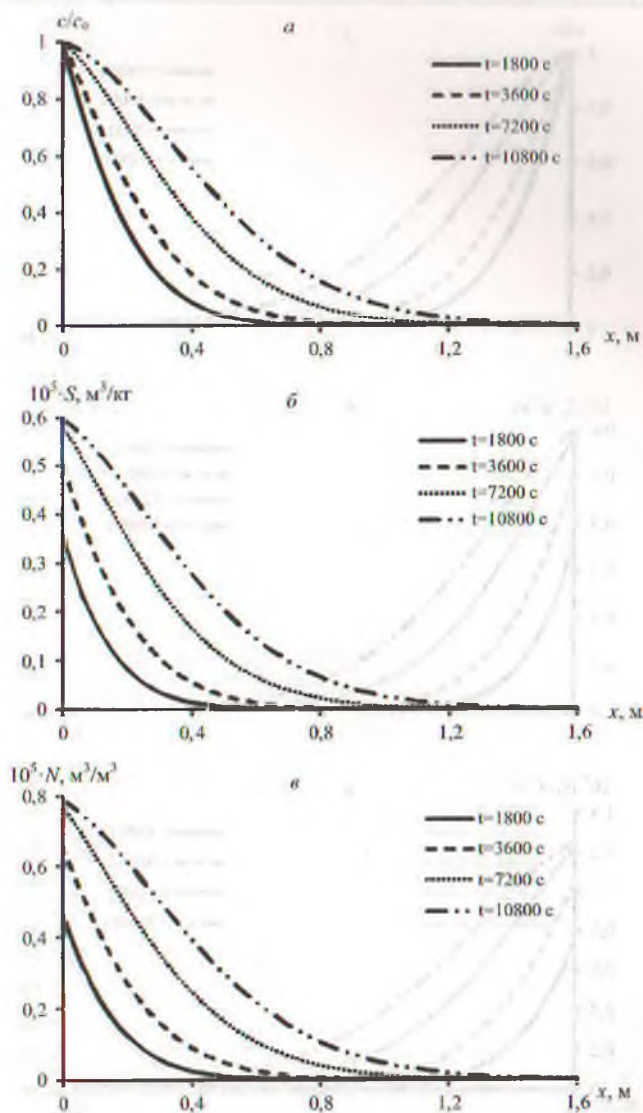


Рис. 4.14. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m = 0,9$ в различные моменты времени. k_p, k_2, α — см. рис. 4.3.

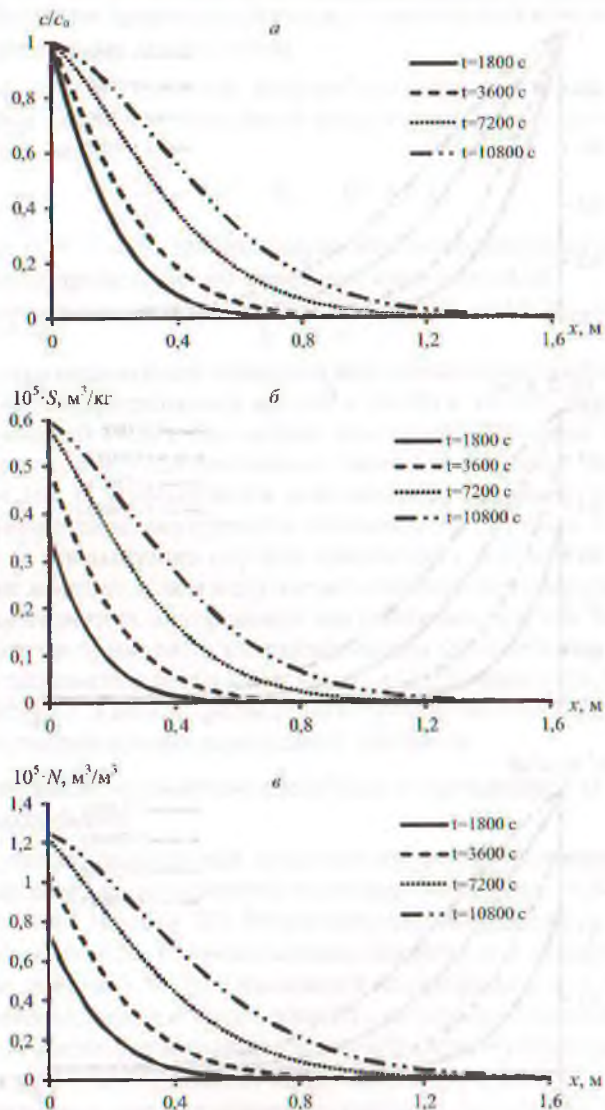


Рис.4.15. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m = 0,8$ в различные моменты времени. $k_p, k_{\text{ж}}$ а – см. рис.4.3.

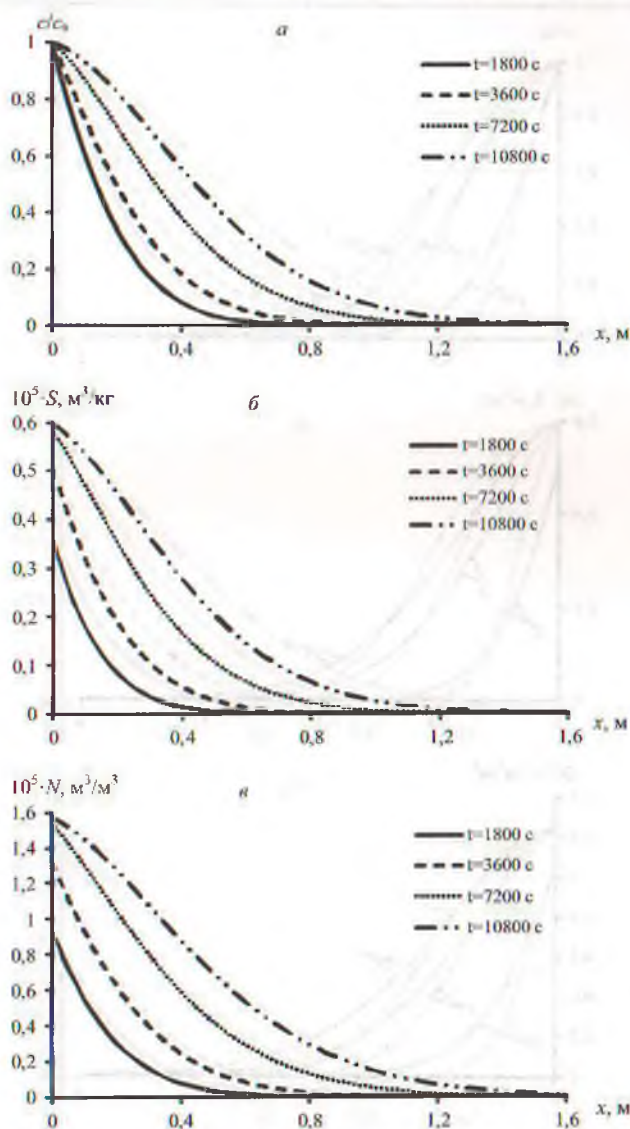


Рис.4.16. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m = 0,75$ в различные моменты времени. k_p, k_s, α – см. рис.4.3.

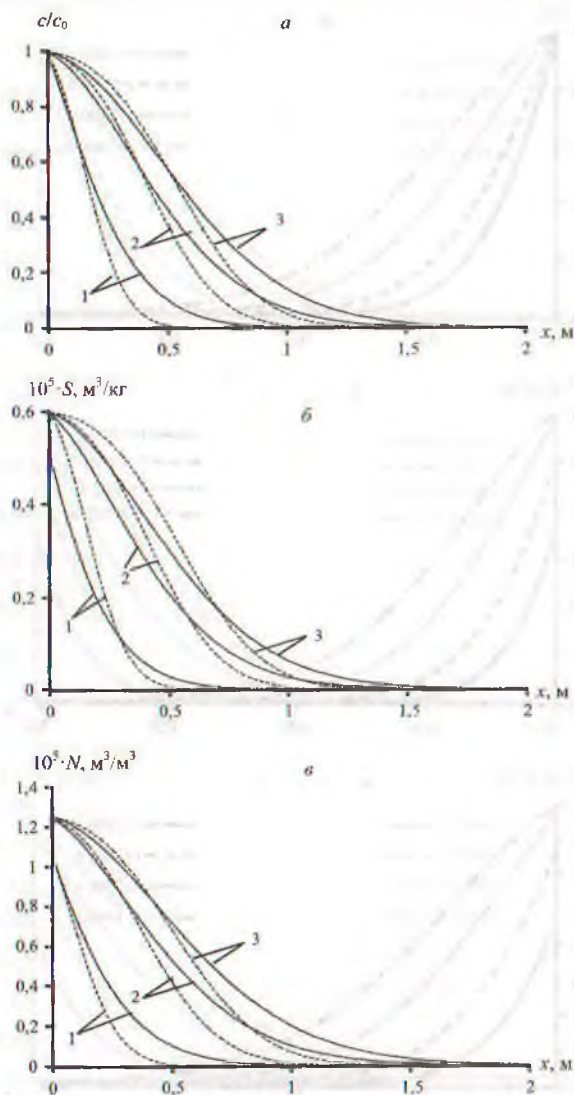


Рис.4.17. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) для равновесной адсорбции (штриховые кривые) и неравновесной адсорбции (сплошные кривые) при $m = 0,8$ в различные моменты времени $t = 3600 \text{ с}$ (1), 10800 с (2), 14400 с (3). k_p, k_y, α — см. рис.4.3.

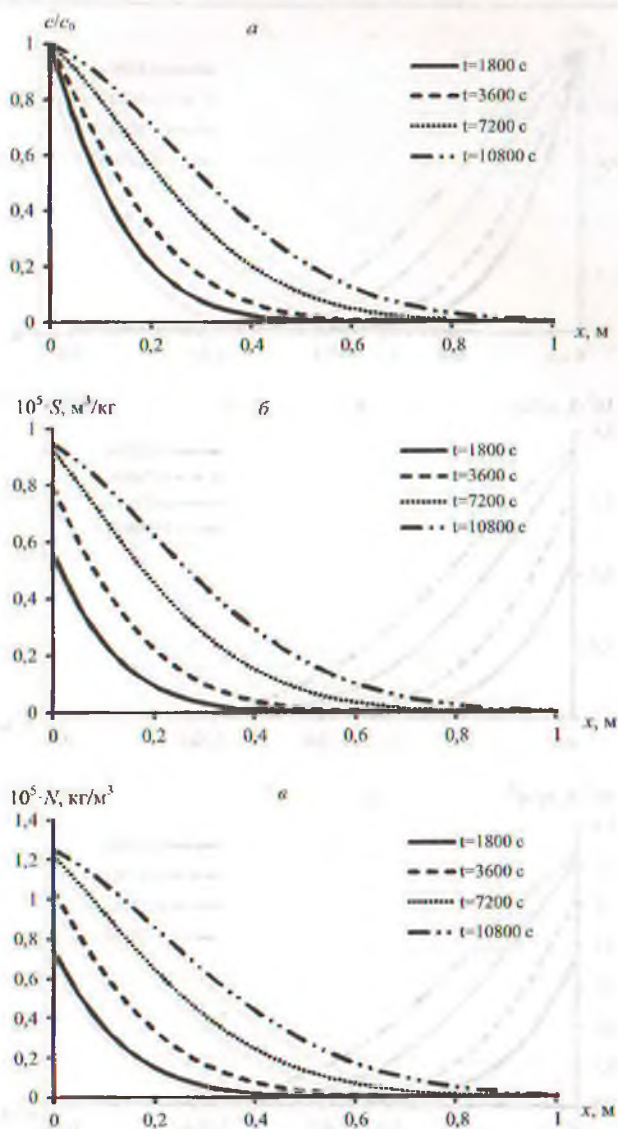


Рис.4.18. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m = 0,8$, $n = 0,9$ в различные моменты времени. k_r, k_p — см. рис.4.3.

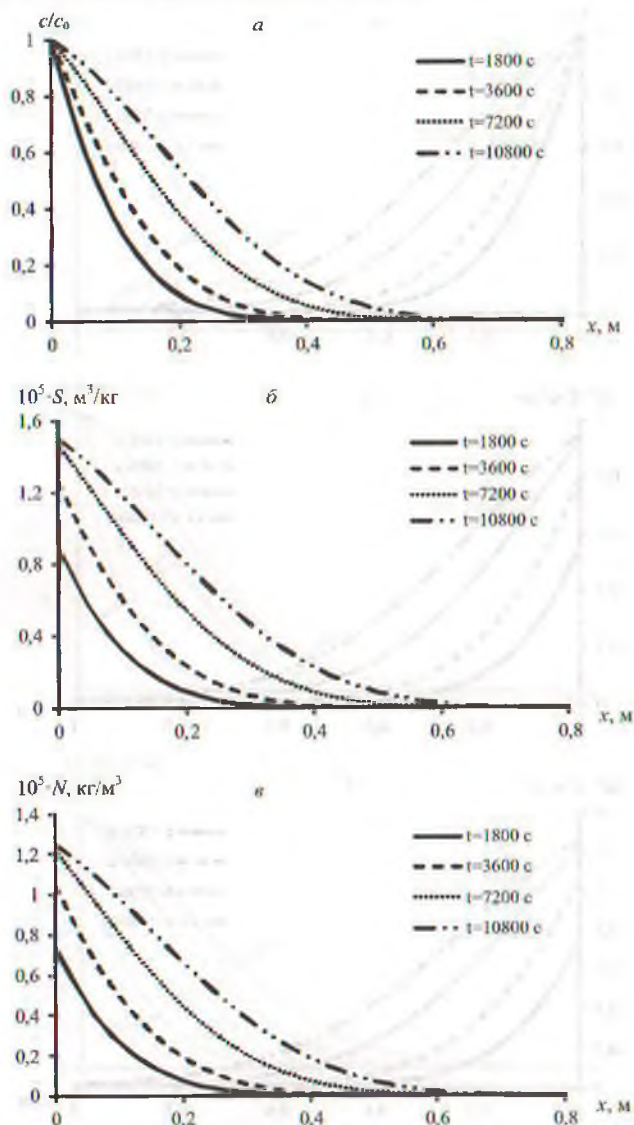


Рис. 4.19. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $t = 0,8$, $n = 0,8$ в различные моменты времени. k_r, k_y, α — см. рис. 4.3.

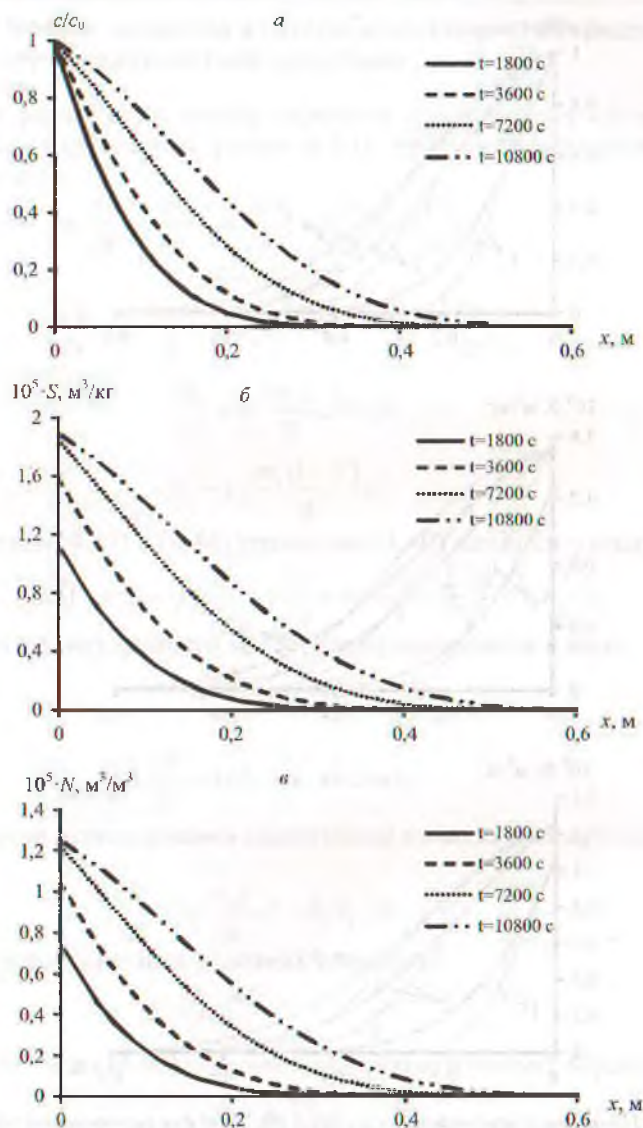


Рис. 4.20. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m = 0,8$, $n = 0,75$ в различные моменты времени. k_p, k_z – см. рис. 4.3.

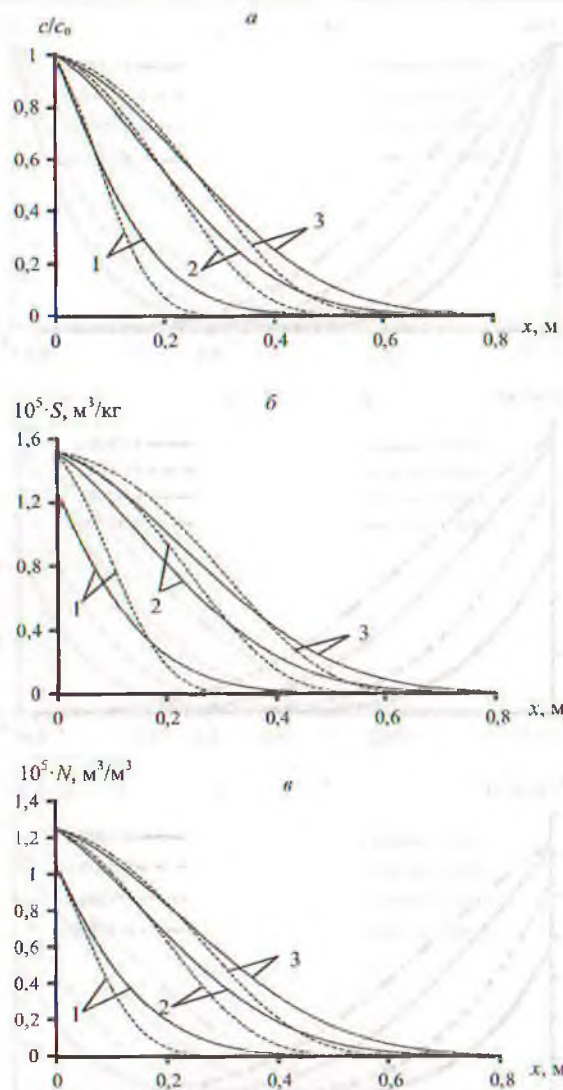


Рис.4.21. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) для равновесной адсорбции (штриховые кривые) и неравновесной адсорбции (сплошные кривые) при $m = 0,8$, $n = 0,8$ в различные моменты времени $t = 3600$ с (1), 10800 с (2), 14400 с (3). k_p , k_d , α – см. рис.4.3.

4.3. Перенос вещества в гетерогенной пористой среде в случае двухместной адсорбции

Здесь рассмотрим задачу переноса вещества для случая двухместной адсорбции (см. раздел 4.2.1). Уравнение переноса записывается в виде

$$m_1 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + m_2 \frac{\partial N}{\partial t} + \beta \frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (4.40)$$

$$S = S_1 + S_2, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_1 \frac{m_1 f}{\beta} c - k_2 S_1 + k_4 \frac{m_1 (1-f)}{\beta} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = k_1 \frac{m_1 f}{\beta} c - k_2 S_1, \quad (4.43)$$

$$S_2 = k_4 \frac{m_1 (1-f)}{\beta} c. \quad (4.44)$$

С учетом (4.41) – (4.44) уравнение (4.40) запишем в виде [57, 58]

$$m_1 [1 + k_4 (1-f)] \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + m_2 \frac{\partial N}{\partial t} + \beta \frac{\partial S_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (4.45)$$

Кинетику внутреннего массообмена принимаем в виде

$$\alpha \frac{\partial N}{\partial t} = kc - N \quad (4.46a)$$

или

$$\alpha \frac{\partial N}{\partial t} = kc^m - N, \quad 0 < m \leq 1. \quad (4.46b)$$

В случае использования нелинейной кинетики адсорбции принимается

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = k_1 \frac{m_1 f}{\beta} c^n - k_2 S_1, \quad 0 < n \leq 1, \quad (4.47)$$

которое в равновесных условиях имеет вид

$$S_1 = k_3 \frac{mf}{\beta} c^n, \quad k_3 = \frac{k_1}{k_2}. \quad (4.48)$$

При $m = 1$ из (4.48) получаем линейную изотерму Френдлиха

$$S_1 = k_3 \frac{mf}{\beta} c, \quad (4.49)$$

что соответствует равновесной линейной изотерме, получаемой из (4.43) при $t \rightarrow \infty$.

Начальные и граничные условия примем в виде

$$c(0, x) = 0, N(0, x) = 0, S_1(0, x) = 0, c(t, 0) = c_0, c(t, \infty) = 0. \quad (4.50)$$

Для решения (4.45) с (4.43), (4.46), (4.47) при условиях (4.50) используем метод конечных разностей. Сетку введем таким же образом, как в разделе 4.2.1

Уравнение (4.43) аппроксимируем так

$$\frac{S_1^{j+1} - S_1^j}{\tau} = k_1 \frac{m_1 f}{\beta} c_i^j - k_2 S_1^{j+1},$$

откуда получаем

$$S_1^{j+1} = \left(\tau k_1 \frac{m_1 f}{\beta} c_i^j + S_1^j \right) / (1 + \tau k_2). \quad (4.51)$$

Уравнения (4.46) аппроксимируем как

$$\alpha \frac{N_i^{j+1} - N_i^j}{\tau} = k c_i^j - N_i^{j+1}$$

или

$$\alpha \frac{N_i^{j+1} - N_i^j}{\tau} = k (c_i^j)^n - N_i^{j+1},$$

откуда получаем

$$N_i^{j+1} = \left(\frac{\tau k}{\alpha} c_i^j + N_i^j \right) / \left(1 + \frac{\tau}{\alpha} \right) \quad (4.52a)$$

или

$$N_i^{j+1} = \left(\frac{\tau k}{\alpha} (c_i^j)^n + N_i^j \right) / \left(1 + \frac{\tau}{\alpha} \right). \quad (4.52b)$$

Уравнение баланса (4.45) аппроксимируется следующим образом

$$\begin{aligned} m_1 [1 + k_4 (1 - f)] \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + v \frac{c_{i+1}^{j+1} - c_{i-1}^{j+1}}{2h} + m_2 \frac{N_i^{j+1} - N_i^j}{\tau} + \beta \frac{S_1^{j+1} - S_1^j}{\tau} = \\ = D \frac{c_{i-1}^{j+1} - 2c_i^{j+1} + c_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \end{aligned}$$

что приводится к виду

$$Ac_{i-1}^{j+1} - Bc_i^{j+1} + Cc_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad (4.53)$$

где

$$A = \frac{D\tau}{h^2} + \frac{\tau v}{2h},$$

$$B = m_1 [1 + k_4 (1 - f)] + \frac{2D\tau}{h^2},$$

$$C = \frac{D\tau}{h^2} - \frac{\tau\nu}{2h},$$

$$F_i^j = m_1[1 + k_4(1 - f)]c_i^j - m_2(N_i^{j+1} - N_i^j) - \beta(S_i^{j+1} - S_i^j).$$

Схема расчета сеточного решения следующая. По (4.51), (4.52) определяются S_i^{j+1} и N_i^{j+1} , затем используя метод прогонки из (4.53) определяется C_i^{j+1} . Условия устойчивости метода прогонки для (4.53) выполняется, если локальное число Пекле $Pe = \frac{vh}{D}$ удовлетворяет условию $Pe \leq 2$.

При использовании нелинейной кинетики сорбции (4.47) расчет сеточного решения S_i^{j+1} осуществляется по

$$S_i^{j+1} = \left(\tau k_1 \frac{m_1}{\beta} (c_i^j)^n + S_i^{j+1} \right) / (1 + \tau k_2). \quad (4.54)$$

Рассмотрим несколько случаев, определяемых видом кинетики адсорбции и внутреннего массообмена.

4.3.1. Линейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена

В этом случае используем линейную кинетику адсорбции (4.43) и линейную кинетику внутреннего массообмена (4.46а). Результаты расчетов решения представлены на рис.4.22–4.25. Поскольку f означает долю поверхности пористого пространства, где происходит неравновесная адсорбция, рост его значений означает рост доли неравновесной адсорбции. Сравнивая графики заметим, что для выбранного набора значений исходных параметров увеличение доли неравновесной адсорбции уменьшает общую адсорбцию. Однако, профили концентраций c , S , N становятся более продвинутыми в глубь пласта. Значения c и N претерпевают некоторые изменения, связанные с опережающим продвижением профилей в сторону больших x .

4.3.2. Линейная кинетическая адсорбция, нелинейный кинетический внутренний массообмен

В данном случае используем уравнения (4.40), (4.43), (4.46б). Результаты численных расчетов показаны на рис.4.26 – 4.29. С ростом f отмеченные в разделе 4.3.1 явления здесь тоже повторяются. В отличие от разд.4.3.1 можно отметить увеличение значений N . Нелинейная кинетика, при всех равных других параметрах, приводит к интенсификацию внутреннего массообмена, что согласуется с выводами раздела 4.3.1.

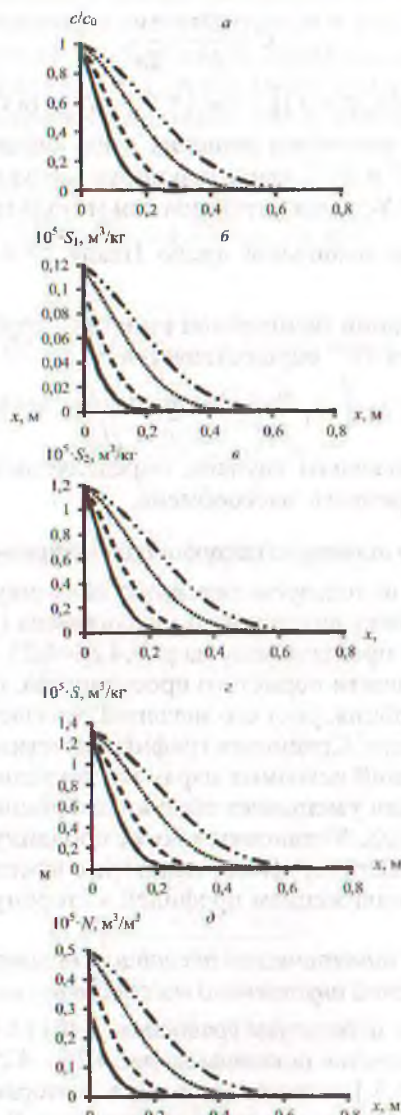


Рис. 4.22. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), N (г) при $f=0.2$, $k=2 \cdot 10^{-3}$ c' , $k=5 \cdot 10^{-4}$ c' , $k_f=10$, $\alpha=2000$ с в различные моменты времени.
 — $t=1800$ с; ---- $t=3600$ с; —·— $t=7200$ с; --- $t=10800$

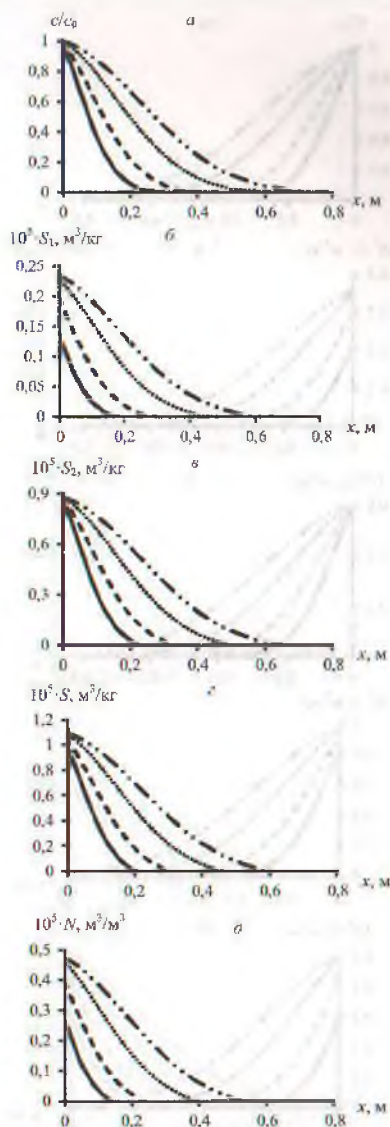


Рис. 4.23. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,4$ в различные моменты времени. k_p, k_2, k_d, α – см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; $t=3600$ с; —·— $t=7200$ с; $t=10800$

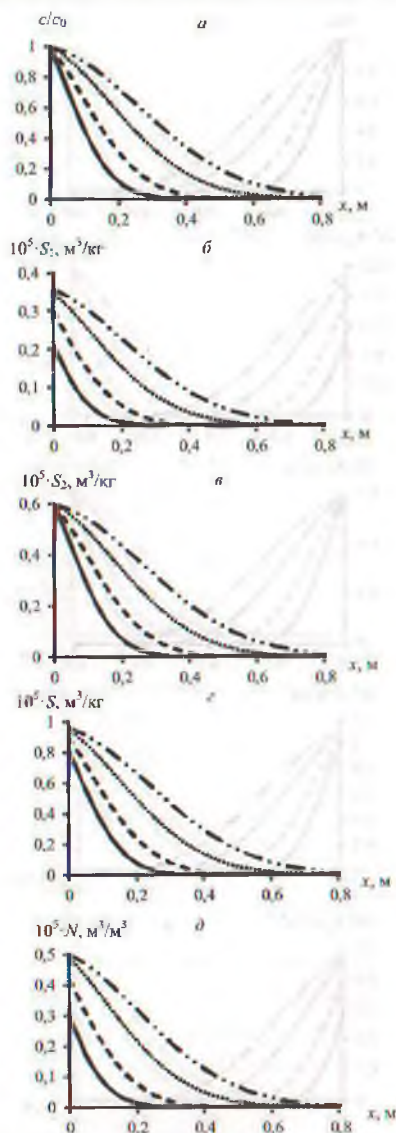


Рис. 4.24. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,6$ в различные моменты времени. k_p, k_y, k_r, α — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; $t=3600$ с; $t=7200$ с; -.- $t=10800$

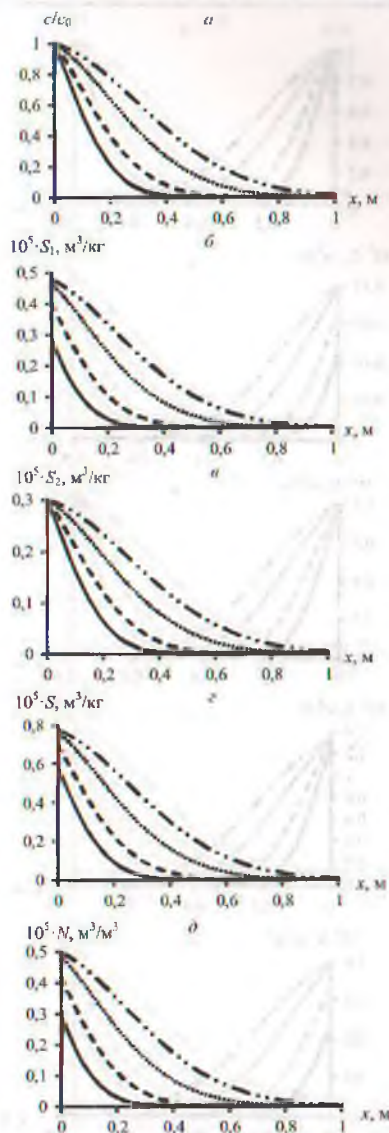


Рис. 4.25. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,8$ в различные моменты времени. k_p, k_p, k_p — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — · — $t=7200$ с; · · · $t=10800$

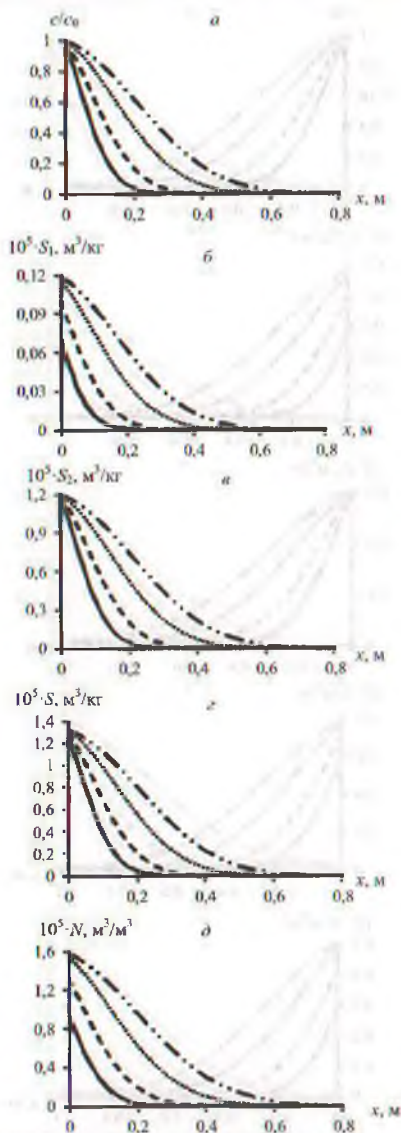


Рис. 4.26. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,2$, $m=0,75$ в различные моменты времени. k_r, k_s, k_p — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — · — $t=7200$ с; · · · $t=10800$

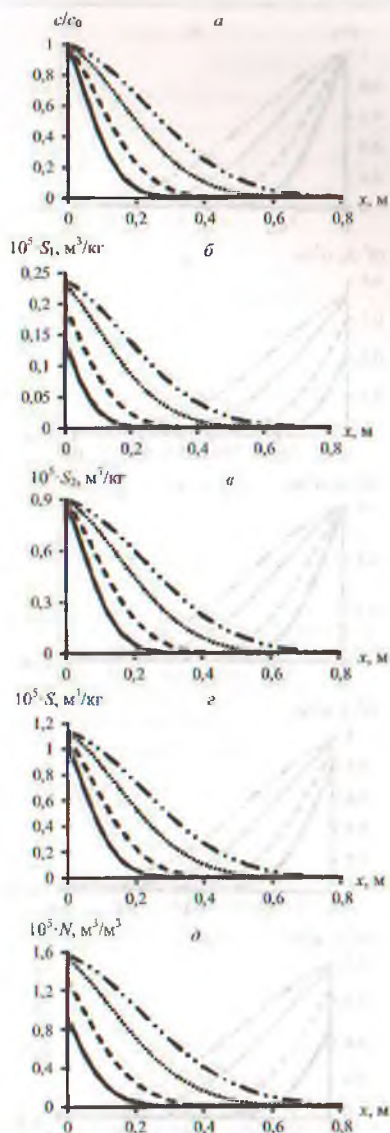


Рис. 4.27. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S_3 (г), N (д) при $f=0,4$, $m=0,75$ в различные моменты времени. k_p , k_p , k_p , α – см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; $t=3600$ с; —·— $t=7200$ с; --- $t=10800$

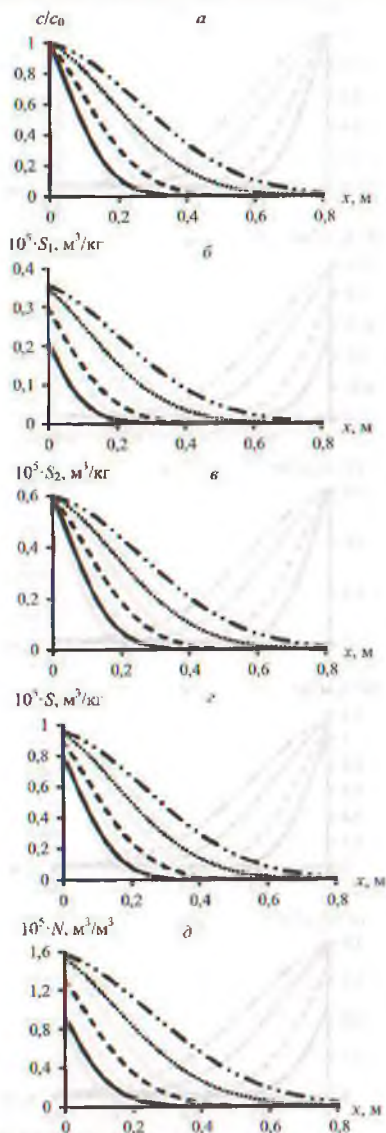


Рис. 4.28. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,6$, $m=0,75$ в различные моменты времени. k_p, k_r, k_a — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — · — $t=7200$ с; - - - $t=10800$

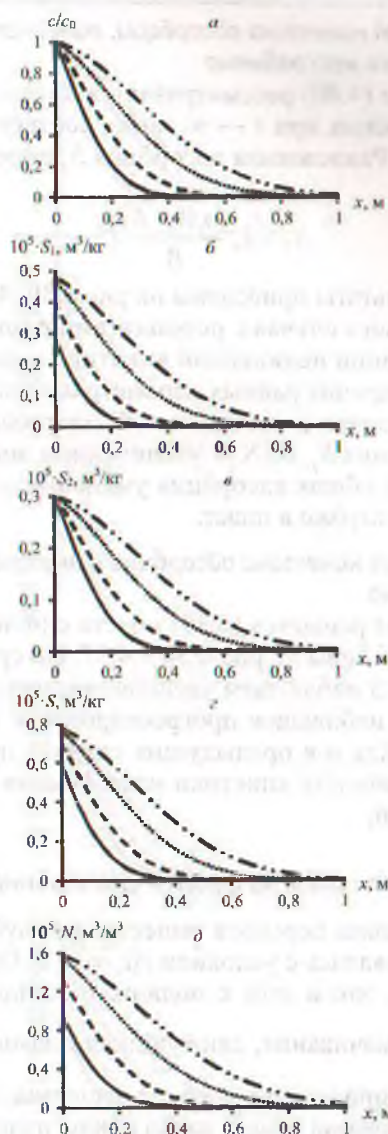


Рис. 4.29. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,8$, $m=0,75$ в различные моменты времени. k_r, k_p, k_e — см. рис. 4.22.
 — $t=1800 c$; $t=3600 c$; — — — $t=7200 c$; - · - · $t=10800 c$

4.3.3. Нелинейная кинетика адсорбции, линейная кинетика внутреннего массообмена

Здесь уравнение (4.40) рассматривается вместе с (4.46а) и (4.47). Равновесная адсорбция при $t \rightarrow \infty$ также соответственно принимается в виде (4.48). Равновесная адсорбция S_2 определяется по нелинейной изотерме

$$S_2 = k_4 \frac{m_1(1-f)}{\beta} c^n.$$

Основные результаты приведены на рис.4.30–4.33.

Сравнение данного случая с результатами разд. 4.3.1 показывает, что при использовании нелинейной кинетики и линейной равновесной изотермы при прочих равных параметрах адсорбция интенсифицируется. Это приводит к значительной задержке распространения профилей c , N и самих S_1 , S_2 , S . С увеличением доли мест с неравновесной адсорбцией общая адсорбция уменьшается, профили c , N , S распространяются глубже в пласт.

4.3.4. Нелинейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена

В данном случае решается (4.40) вместе с (4.46б), (4.47). Результаты расчетов приведены на рис.4.34 – 4.37. По сравнению с результатами раздела 4.3.3 наблюдаем увеличение значений N . С увеличением f отмечается небольшое прогрессирование продвижения профилей по пласту. Как и в предыдущих случаях при прочих равных параметрах нелинейность кинетики массообмена приводит к увеличению его значений.

4.4. Задача с условием на фронте смачивания

В разделе 4.2 задача переноса вещества в полубесконечной пористой среде исследовалась с условием $c(t, \infty) = 0$. Однако в некоторых случаях считается, что в зоне с подвижной жидкостью образуется условный фронт смачивания, движущийся с законом $x_0(t) = \frac{vt}{m_1}$. Позади этого фронта происходит перенос вещества, а при $x \geq x_0(t)$ концентрационные профили всюду точно равны нулю. Расчетная схема практически остается такой же, как в разделе 4.2, только для заданного времени t определяется $x_0(t)$, где ставится условие нулевой концентрации [21].

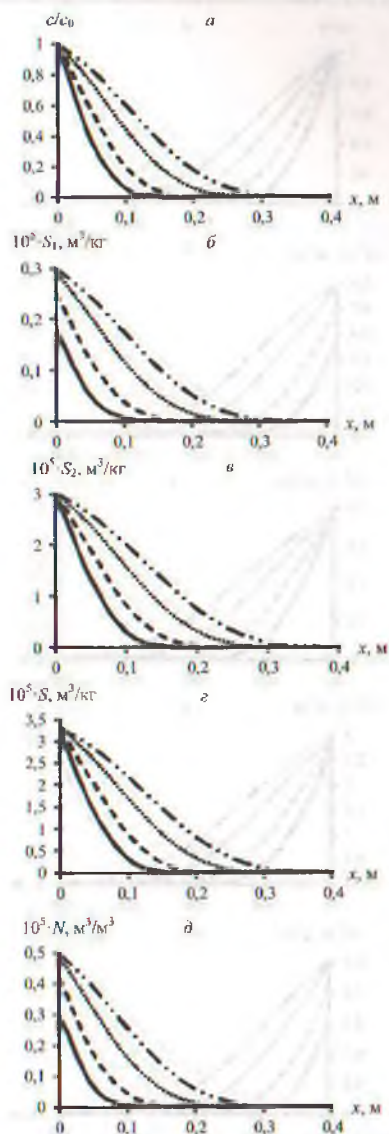


Рис. 4.30. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,2$, $n=0,8$ и различные моменты времени. k_p , k_s , k_a — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — · — $t=7200$ с; · · · $t=10800$ с

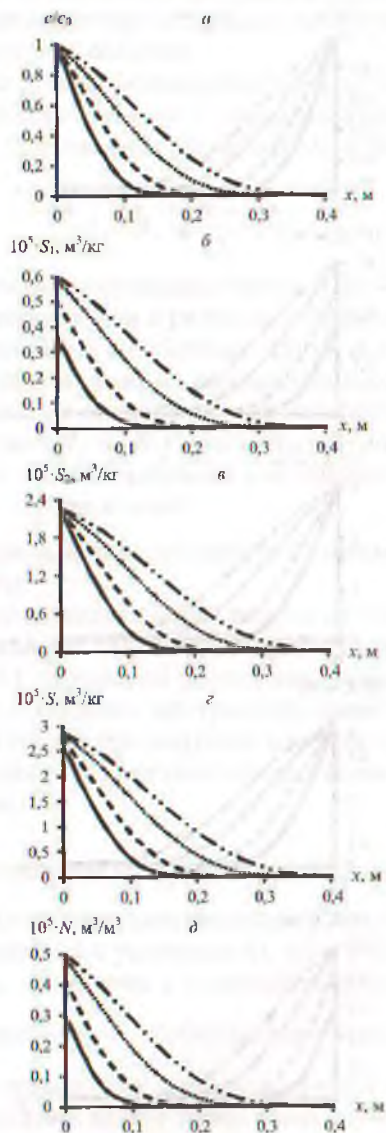


Рис.4.31. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,4$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_{α} , k_{β} , α — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; $t=7200$ с; - · - $t=10800$

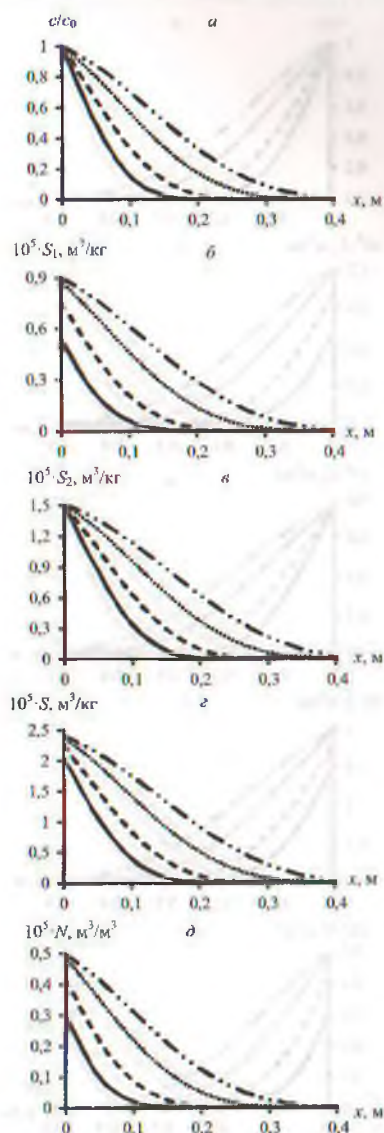


Рис.4.32. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,6$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_r , k_s , k_a – см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; ---- $t=3600$ с; —·— $t=7200$ с; ··· $t=10800$

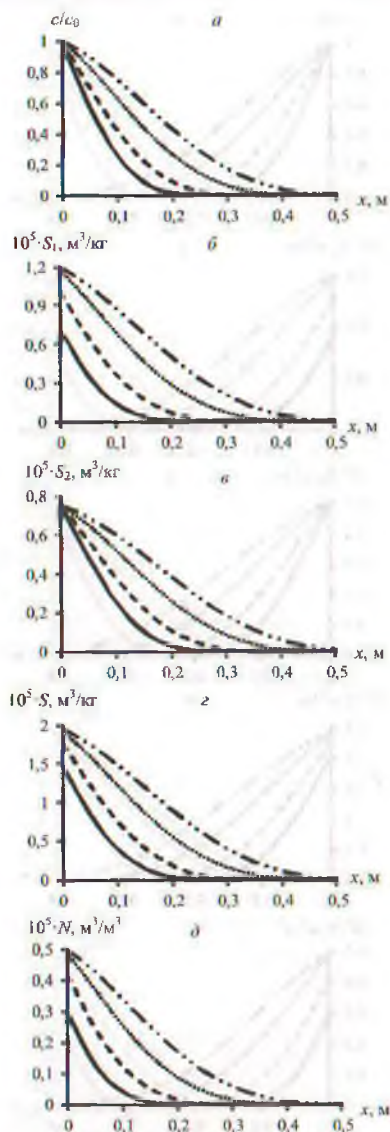


Рис. 4.33. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,8$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_2 , k_ρ α — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; $t=3600$ с; — $t=7200$ с; --- $t=10800$

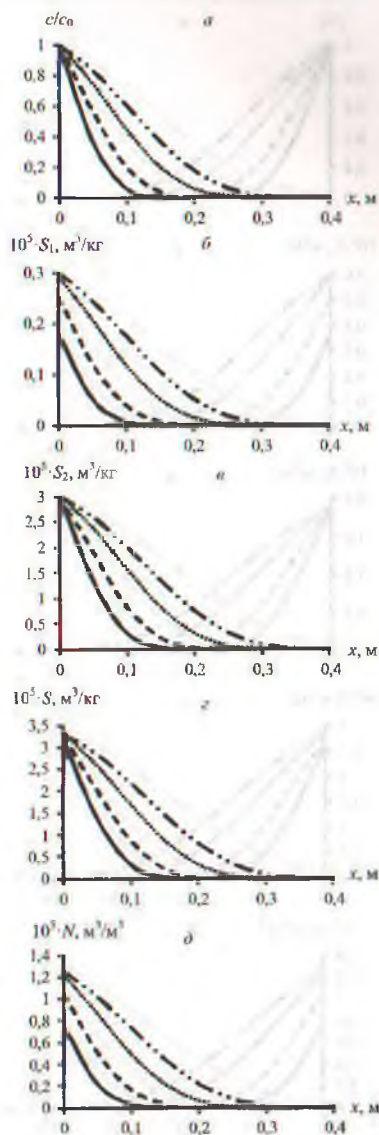


Рис. 4.34. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,2$, $m=0,8$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_s , k_d , α — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; $t=3600$ с; ——— $t=7200$ с; --- $t=10800$

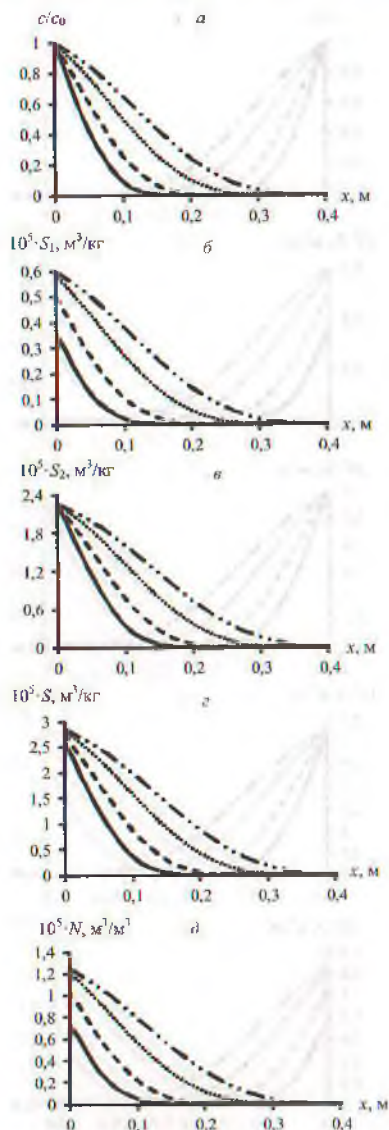


Рис. 4.35. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,4$, $m=0,8$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_n , k_g — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — — — $t=7200$ с; - · - · - $t=10800$

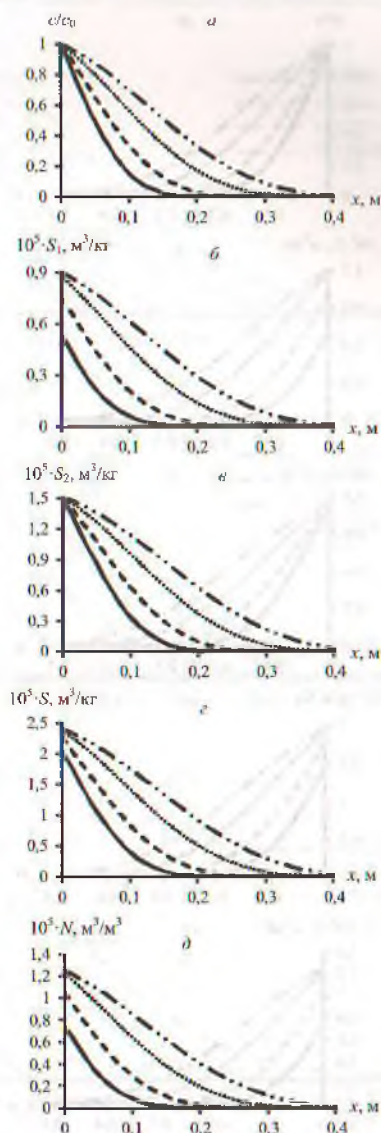


Рис. 4.36. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,6$, $m=0,8$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_2 , k_d , α – см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; — · — $t=7200$ с; · · · $t=10800$

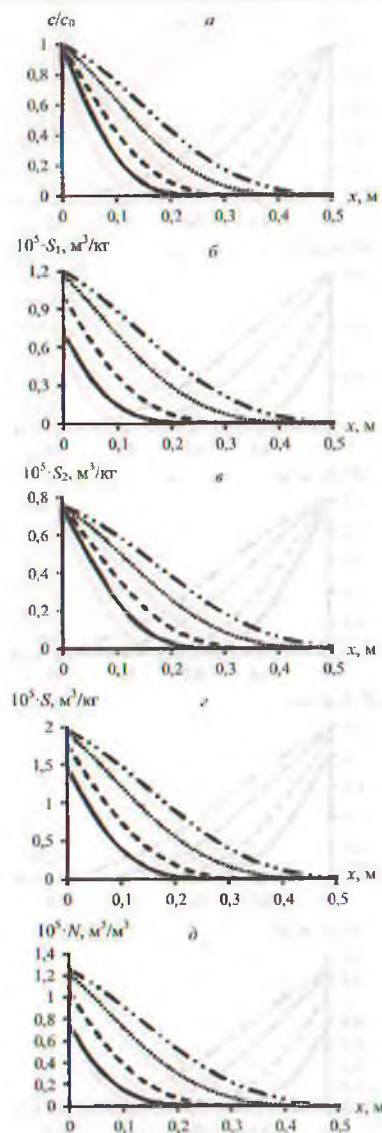


Рис. 4.37. Профили концентраций c/c_0 (а), S_1 (б), S_2 (в), S (г), N (д) при $f=0,8$, $m=0,8$, $n=0,8$ в различные моменты времени. k_p , k_a , k_d — см. рис. 4.22.
 — $t=1800$ с; - - - $t=3600$ с; $t=7200$ с; - · - $t=10800$

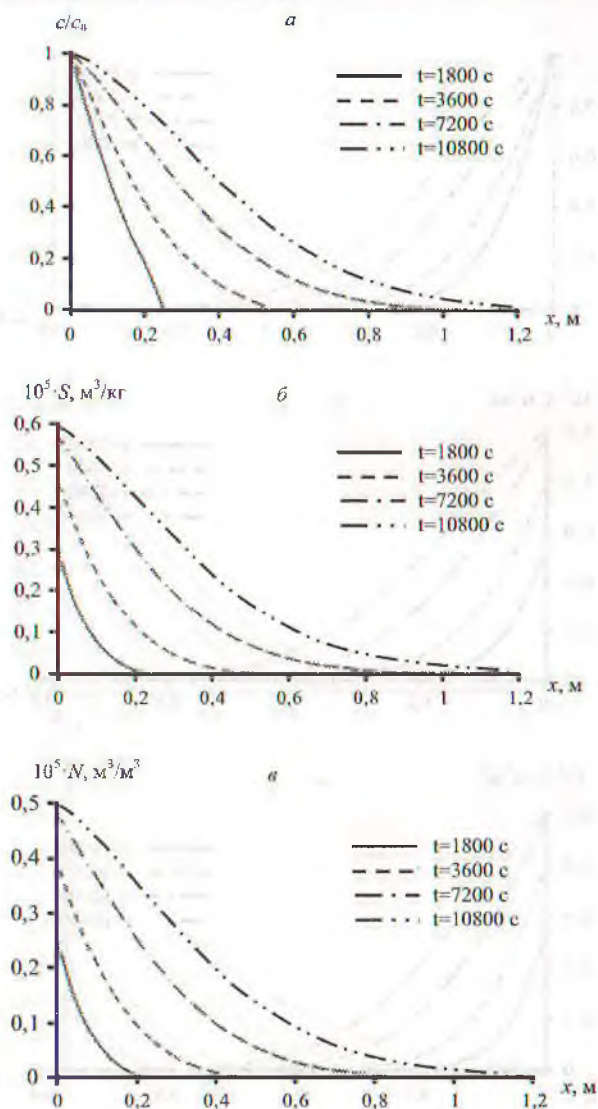


Рис.4.38. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $k_f = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $k_i = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 2000 \text{ с}$ в различные моменты времени.

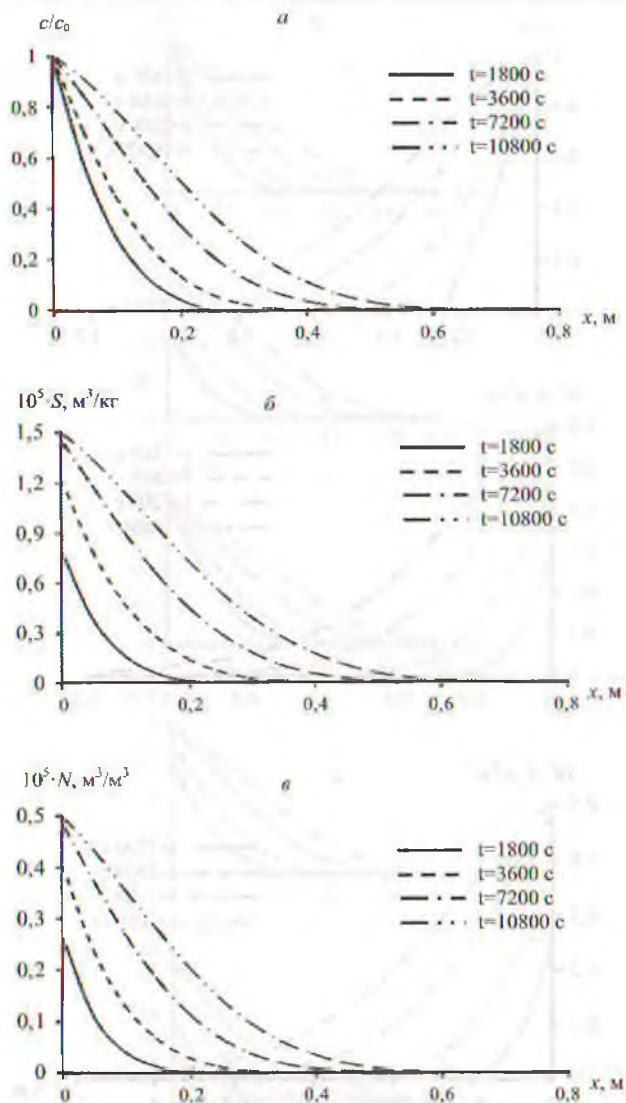


Рис. 4.39. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $\eta=0,8$ в различные моменты времени. k_p, k_2, a — см. рис. 4.38.

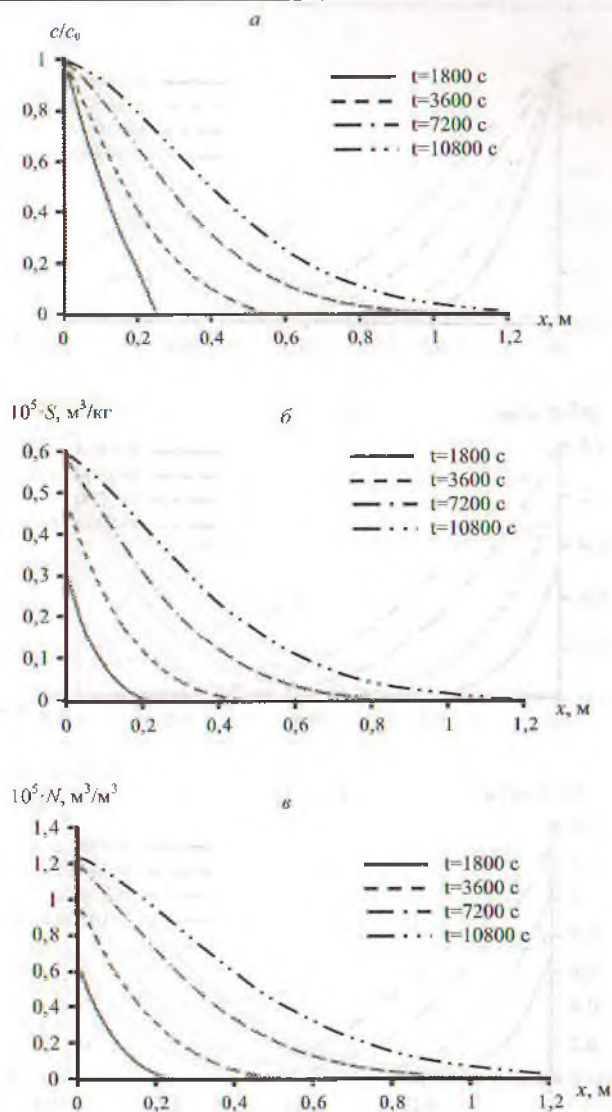


Рис.4.40. Профили концентраций c/c_0 (*a*), S (*б*), N (*в*) при $t=0,8$ с в различные моменты времени. k_p, k_2, α – см. рис.4.38.

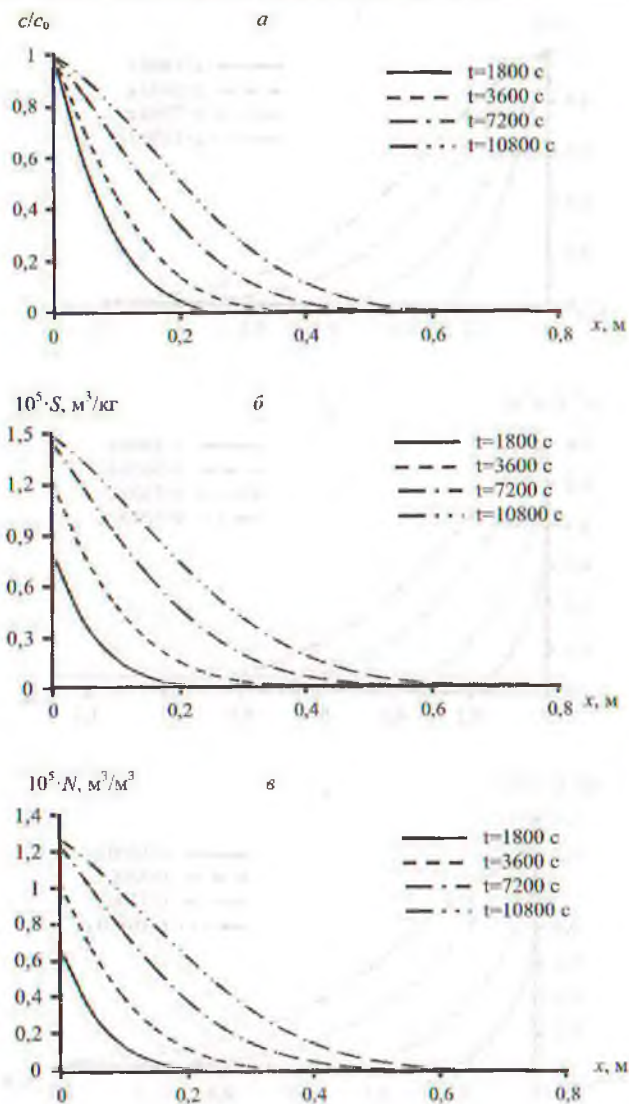


Рис.4.41. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $m=0,8$, $n=0,8$ с в различные моменты времени. k_p, k_2, α — см. рис.4.38.

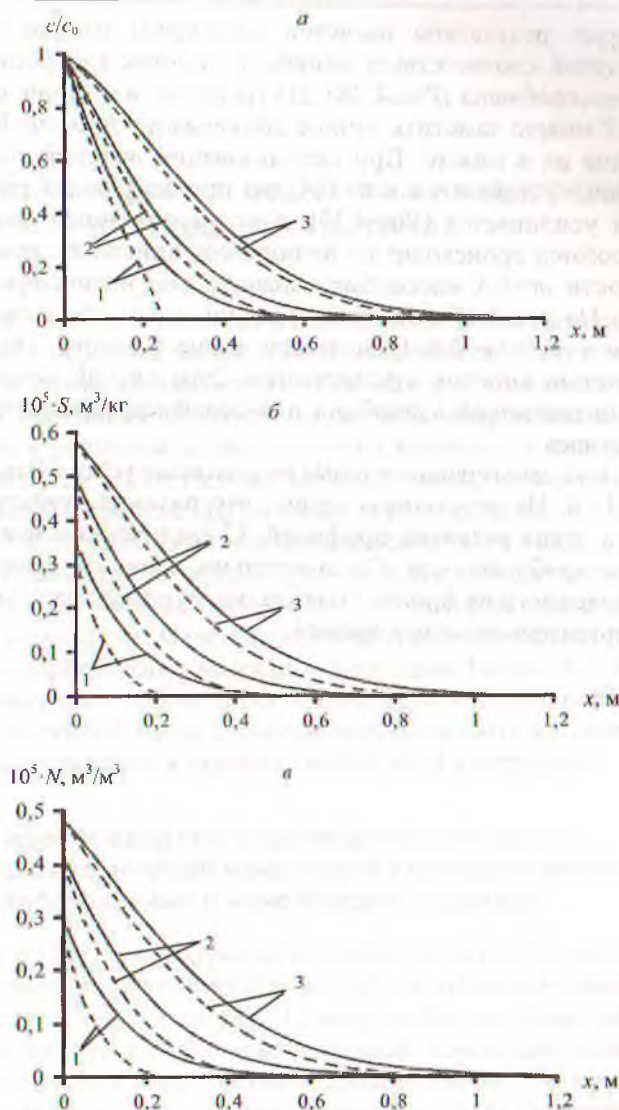


Рис.4.42. Профили концентраций c/c_0 (а), S (б), N (в) при $t=1800$ (1), $t=3600$ (2), 7200 (3) с. (----) с условием $c(t, x_0(t))=0$, (—) с условием $c(t, \infty)=0$.

Некоторые результаты расчетов приведены на рис.4.38–4.42. Первый случай соответствует линейной кинетик адсорбции и внутреннего массообмена (Рис.4.38). На графиках в отличие от случая раздела 4.2 можно заметить точное обнуливание профилей по мере простираия их в пласте. При использовании нелинейной кинетики адсорбции с показателем $n=0,8$ при прочих равных параметрах адсорбция усиливается (Рис.4.39). Когда внутренний диффузионный массообмен происходит по нелинейной кинетике с показателем нелинейности $m=0,8$ массообмен значительно интенсифицируется (Рис.4.40). На рис.4.41 показаны графики, когда обе кинетики нелинейны с $n=0,8$, $m=0,8$. Отмеченное выше факторы, связанные с нелинейностью кинетик суммируются. Этот случай соответствует наиболее интенсивной адсорбции и массообмену среди рассматриваемых случаев.

На рис.4.42 даны сравнительные результаты с условиями $c(t, \infty) = 0$ и $c(t, x_0(t)) = 0$. Из результатов видно, что разница чувствуется для начального этапа развития профилей. С увеличением времени обе результаты приближаются. Следовательно, сравнительное влияние условия, заданного на фронте смачивания, чувствуется только в диапазоне относительно малых времен.



ГЛАВА 5. Перенос вещества в неоднородной цилиндрической среде

В этой главе поставлены и численно решены задачи движения жидкости и переноса вещества в цилиндрической двухслойной среде, где внутренняя цилиндрическая область принимается как макропоры, а внешняя цилиндрическая — как микропоры. В параграфе 5.1 сначала решается задача переноса вещества в цилиндрической пористой среде с центральной цилиндрической макропорой в диффузионной постановке. Затем та же задача анализируется на основе кинетического уравнения массопереноса из макропоры в цилиндрическую окружающую среду. Определяются такие значения коэффициента кинетики массопереноса, для которых оба подхода дают близкие результаты. В отдельном параграфе эти задачи решаются с учетом адсорбционных явлений по изотерме Генри. В 5.3 решаются и анализируются задачи переноса веществ в цилиндрической двухслойной пористой среде с учетом неравновесных адсорбций. Далее в 5.4 рассматриваются задачи с нелинейной адсорбцией.

5.1. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с использованием диффузионных и кинетических подходов

Как и в [187] рассматривается цилиндрическая пористая среда с цилиндрической макропорой в центре, т.е. область исследования задачи состоит из двух частей: 1) макропористая среда (макропора), имеющая радиус a , с большими порами, характеризующаяся относительно высокой пористостью и средней скоростью в ней; 2) окружающая цилиндрическая микропористая среда (микропора), имеющая низкую или нулевую пористость и, соответственно, скорость потока (Рис.5.1) [30, 60, 138].

Используем следующие соотношения [185]

$$V_f = \frac{a^2}{b^2}, \quad V_a = 1 - V_f, \quad \theta_m = V_f \theta_f, \quad \theta_{im} = V_a \theta_a,$$

где V_f, V_a – объемные доли макропоры и микропоры в единице объема среды; θ_f, θ_a – локальные коэффициенты пористости макропористой и микропористой сред; θ_m, θ_{im} – относительные коэффициенты пористости макропористой и микропористой сред.

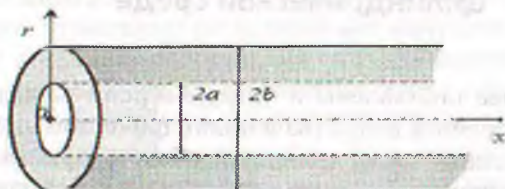


Рис. 5.1. Цилиндрическая среда с цилиндрической макропорой

Перенос вещества в макропоре считается одномерным, что позволяет ввести понятие осредненной по поперечному сечению внутреннего цилиндра концентрации – c_m .

В макропоре перенос вещества описывается уравнением

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \theta_m D_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - \theta_m v_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (5.1)$$

где c_{im} – средняя концентрация вещества в окружающей цилиндрической среде

$$c_{im} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r c_a(t, x, r) dr, \quad (5.2)$$

D_m – коэффициент гидродинамической дисперсии, v_m – средняя скорость вещества в макропоре, c_a – локальная концентрация вещества в окружающей цилиндрической среде, t – время, x – расстояние.

Средняя концентрация c_{im} представляет собой осреднение локальной концентрации в окружающей цилиндрической среде. Распространение вещества в этой части среды описано уравнением обычной диффузии

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} = \frac{D_a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_a}{\partial r} \right), \quad a < r < b, \quad (5.3)$$

где D_a является коэффициентом эффективной диффузии. Уравнение (5.3) дополняется условием непрерывности концентрации на общей границе микро- и макропористой сред

$$c_a(t, x, a) = c_m(t, x). \quad (5.4)$$

В цилиндрической окружающей среде продольное распространение вещества не учитывается и внешняя граница ($r=b$) является непроницаемой для вещества

$$\frac{\partial c_a(t, x, b)}{\partial r} = 0. \quad (5.5)$$

В точке $x=0$ по всей площади поперечного сечения $0 \leq r \leq a$ начиная с $t > 0$ в среду поступает неоднородная жидкость с постоянной концентрацией вещества c_0 и со средней постоянной скоростью v_m . Начальные и граничные условия принимаются в виде [59]

$$c_m(0, x) = 0, \quad (5.6)$$

$$c_{im}(0, x) = 0, \quad (5.7)$$

$$c_a(0, x, r) = 0, \quad (5.8)$$

$$c_m(t, 0) = c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial x}(t, \infty) = 0. \quad (5.10)$$

Для решения задачи применяем метод конечных разностей. В области $\Omega_1 = \{(t, x, r), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty, 0 \leq r \leq a\}$ и $\Omega_2 = \{(t, x, r), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty, a \leq r \leq b\}$ введена равномерная по направлениям сетка

$$\Omega_{\tau h_1} = \left\{ (t_k, x_i); t_k = \tau k, x_i = i h_1, \tau = \frac{T}{K}, i = \overline{0, I} \right\},$$

$$\Omega_{\tau h_1 h_2} = \left\{ (t_k, x_i, r_j); t_k = \tau k, x_i = i h_1, r_j = j h_2, \tau = \frac{T}{K}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J} \right\}.$$

Уравнение (5.1) аппроксимируется на сетке $\Omega_{\tau h_1}$, а уравнение (5.3) – на $\Omega_{\tau h_1 h_2}$ следующим образом [15]:

$$\frac{(c_m)_i^{k+1} - (c_m)_i^k}{\tau} + \theta \frac{(c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k}{\tau} = D_m \frac{(c_m)_{i-1}^{k+1} - 2(c_m)_i^{k+1} + (c_m)_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} - v_m \frac{(c_m)_i^{k+1} - (c_m)_{i-1}^{k+1}}{h_1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (5.11)$$

$$\frac{(c_a)_{i,j}^{k+1} - (c_a)_{i,j}^k}{\tau} = D_a \frac{1}{V_j} \left\{ r_{j-1/2} \frac{(c_a)_{i,j-1}^{k+1} - (c_a)_{i,j}^{k+1}}{h_2} - r_{j+1/2} \frac{(c_a)_{i,j}^{k+1} - (c_a)_{i,j+1}^{k+1}}{h_2} \right\}, \quad (5.12)$$

$$i = \overline{0, I}, j = \overline{1, J-1},$$

где $(c_m)_i^k, (c_{im})_i^k, (c_a)_{i,j}^k$ – сеточные значения функций $c_m(t, x), c_{im}(t, x), c_a(t, x, r)$ в точке (t_k, x_i, r_j) ,

$$\theta = \frac{\theta_m}{\theta_m}, \quad V_j = \frac{1}{2}(r_{j+1/2}^2 - r_{j-1/2}^2), \quad r_{j+1/2} = jh_2 + \frac{h_2}{2}.$$

Начальные и граничные условия (5.4) – (5.10) аппроксимируются в виде

$$(c_a)_{i,j}^k = (c_m)_i^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = 0, \quad k = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{(c_a)_{i,j}^k - (c_a)_{i,j-1}^k}{h_2} = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = J, \quad k = \overline{0, K}, \quad (5.14)$$

$$(c_m)_i^k = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = 0, \quad (5.15)$$

$$(c_{im})_i^k = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = 0, \quad (5.16)$$

$$(c_a)_{i,j}^k = 0, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = 0, \quad (5.17)$$

$$(c_m)_i^k = c_0 = \text{const}, \quad i = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5.18)$$

$$\frac{(c_m)_i^k - (c_m)_{i-1}^k}{h_1} = 0, \quad i = I, \quad k = \overline{0, K}. \quad (5.19)$$

Уравнения (5.11), (5.12) приводятся к следующему виду

$$A_1(c_m)_{i-1}^{k+1} - B_1(c_m)_i^{k+1} + E_1(c_m)_{i+1}^{k+1} = -(F_1)_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (5.20)$$

$$A_2(c_a)_{i,j-1}^{k+1} - B_2(c_a)_{i,j}^{k+1} + E_2(c_a)_{i,j+1}^{k+1} = -(F_2)_{i,j}^{k+1}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (5.21)$$

где

$$A_1 = \frac{D_m}{h_1^2} + \frac{v_m}{h_1}, \quad B_1 = 2\frac{D_m}{h_1^2} + \frac{v_m}{h_1} + \frac{1}{\tau}, \quad E_1 = \frac{D_m}{h_1^2},$$

$$(F_1)_i^k = \frac{(c_m)_i^k}{\tau} - \frac{\theta}{\tau}((c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k),$$

$$A_2 = D(2j-1), \quad B_2 = 4jD+1, \quad E_2 = D(2j+1), \quad D = \frac{\tau D_a}{2jh_2^2},$$

$$(F_2)_{i,j}^k = (c_a)_{i,j}^k.$$

Для решения уравнения (5.20) и (5.21) используем метод прогонки

$$(c_m)_i^{k+1} = \alpha_{i+1}(c_m)_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{0, I-1}, \quad (5.22)$$

$$(c_{im})_{i,j}^{k+1} = \alpha_{i,j+1}^*(c_{im})_{i,j+1}^{k+1} + \beta_{i,j+1}^*, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{0, J}, \quad (5.23)$$

где $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\alpha_{i,j}^*$, $\beta_{i,j}^*$ – прогоночные коэффициенты.

Для определения прогоночных коэффициентов в (5.22), (5.23) получаем следующие рекуррентные формулы

$$\alpha_{i+1} = \frac{E_1}{B_1 - A_1 \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{(F_1)_i^k + A_1 \beta_i}{B_1 - A_1 \alpha_i}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad (5.24)$$

$$\alpha_{i,j+1}^* = \frac{A_2}{B_2 - E_2 \alpha_{i,j}^*}, \quad \beta_{i,j+1}^* = \frac{(F_2)_{i,j}^k + A_2 \beta_{i,j}^*}{B_2 - E_2 \alpha_{i,j}^*}, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{1, J}. \quad (5.25)$$

Стартовые значения прогоночных коэффициентов $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\alpha_{i,j}^*$, $\beta_{i,j}^*$ определяются из граничных условий (5.18), (5.13), т.е.

$$\begin{cases} \alpha_i = 0, \quad \beta_i = c_0 & \text{при } i=1, \\ \alpha_{i,j}^* = 0, \quad \beta_{i,j}^* = (c_m)_i^k & \text{при } i=\overline{0, I}, \quad j=1, \quad k=\overline{1, K}. \end{cases}$$

Сначала решаем уравнение (5.20) и определяем $(c_a)_{i,j}^k$. После этого определяем c_{im} из (5.2) путем численного интегрирования. Затем решается уравнение (5.19), определяется c_m .

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$, $c_0 = 0,01$, $\theta_f = 1,0$, $\theta_a = 0,6$, $a = 0,05 \text{ м}$, $b = 0,25 \text{ м}$.

На основе результатов численных расчетов определены поля местной концентрации c_a в зоне с неподвижной жидкостью (Рис.5.2 – 5.5, в), а также концентрации c_{im} и c_m (Рис.5.2 – 5.5, а, б). С возрастанием времени t , концентрация вещества линейно распространяется по цилиндрической макропоре и в цилиндрической окружающей среде происходит радиальный перенос, соответствующий изменению c_m . С увеличением коэффициента эффективной диффузии D_a (Рис.5.3) в окружающей среде поверхность c_a распространяется более широким фронтом по направлению r и это приводит к увеличению значения концентрации вещества в окружающей цилиндрической среде. Профили относительной концентрации c_m/c_0 и c_{im} становятся более размытыми при увеличении значения коэффициенты гидродинамической дисперсии D_m (Рис.5.4), а также при увеличении скорости фильтрации v (Рис.5.5) замечается ускоренное продвижение фронта по направлению x .

Теперь проанализируем задачу на основе кинетического уравнения массопереноса из макропоры в цилиндрическую окружающую среду

$$\theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \alpha (c_m - c_{im}), \quad \alpha = \text{const}, \quad (5.26)$$

т.е. вместо (5.2), (5.3) используется кинетическое уравнение массопереноса.

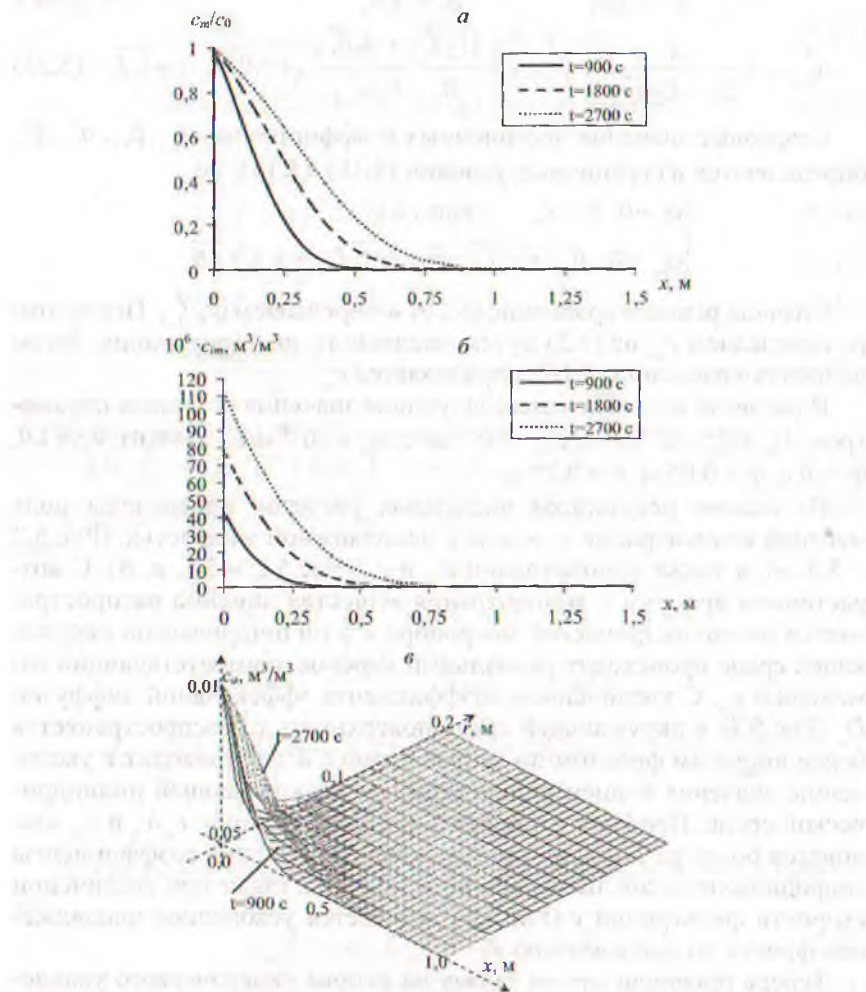


Рис. 5.2. Профили концентраций c_m (а), c_{im} (б) и поверхности c_m (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с.

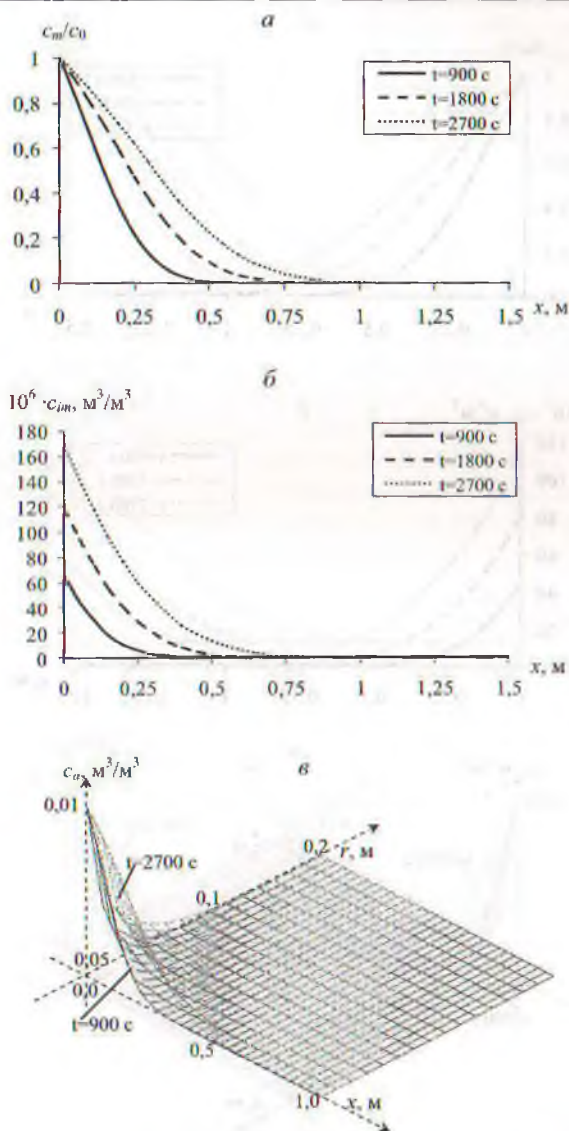


Рис. 5.3. Профили концентраций c (а), c_{im} (б) и поверхности c_a (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с.

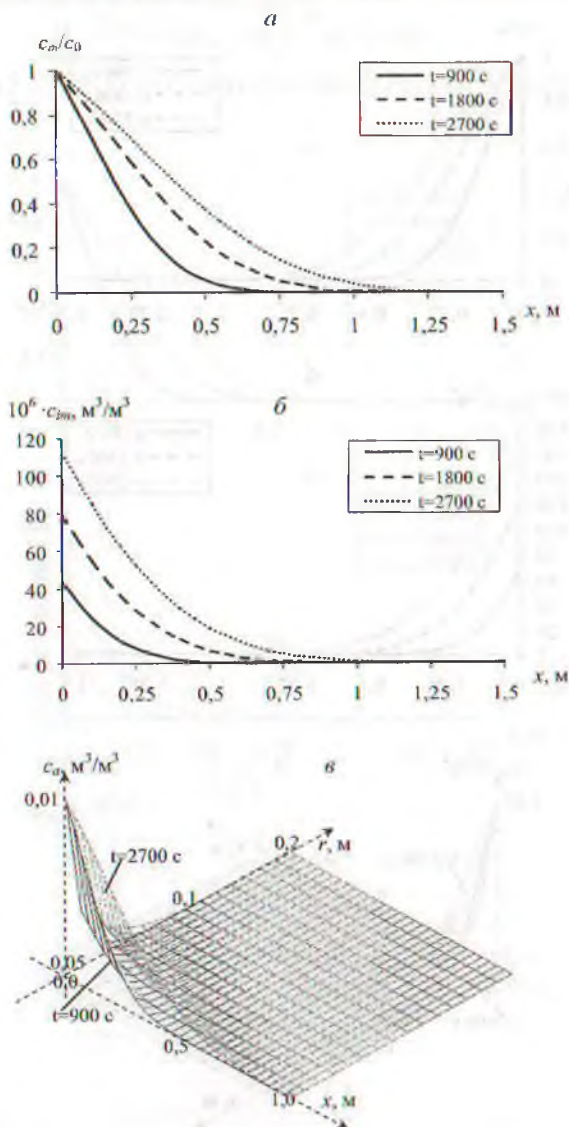


Рис. 5.4. Профили концентраций c_m (а), c_{im} (б) и поверхности c_a (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м²/с.

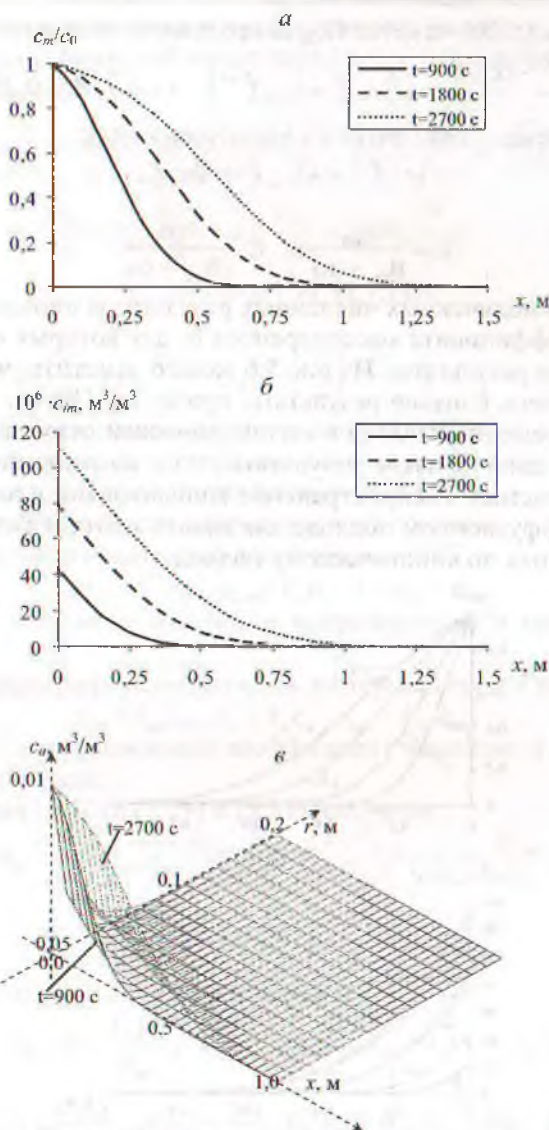


Рис. 5.5. Профили концентраций c_m (а), c_{im} (б) и поверхности c_0 (в) в различные моменты времени при $v_m = 2 \cdot 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-3}$ м²/с.

Уравнение (5.26) на сетке $\Omega_{\tau h_1}$ аппроксимируется в виде:

$$\theta_{im} \frac{(c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k}{\tau} = \alpha \left((c_m)_i^k - (c_{im})_i^{k+1} \right), \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (5.27)$$

Это уравнение приводится к следующему виду

$$(c_{im})_i^{k+1} = \lambda (c_{im})_i^k + \eta (c_m)_i^k, \quad (5.28)$$

где

$$\lambda = \frac{\theta_{im}}{\theta_{im} + \tau \alpha}, \quad \eta = \frac{\tau \alpha}{\theta_{im} + \tau \alpha}.$$

На основе полученных численных результатов определены такие значения коэффициента массопереноса α , для которых оба подхода дают близкие результаты. Из рис.5.6 можно заметить, что оба подхода дают очень близкие результаты при $\alpha = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. При малых значениях времени ($t \leq 900 \text{ с}$) в цилиндрической окружающей среде оба подхода дают близкие результаты, но с возрастанием времени отличие возрастает. Распространение концентрации в неподвижной зоне при диффузионном подходе для малых x отстает от соответствующих данных по кинетическому подходу.

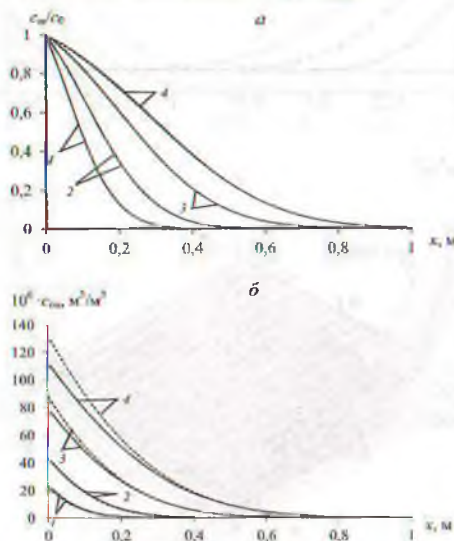


Рис. 5.6. Профили относительной концентраций c_m (а) и c_m (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D_m = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ для диффузионного подхода (сплошные линии) и кинетического подхода (штриховые линии),
1 - $t = 450 \text{ с}$, 2 - $t = 900 \text{ с}$, 3 - $t = 1800 \text{ с}$, 4 - $t = 2700 \text{ с}$.

5.2. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом равновесной адсорбции

Здесь рассматривается задача §5.1 с учетом адсорбции [30, 60]. Для этого случая уравнения переноса имеют вид [185]

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \rho_m \frac{\partial s_m}{\partial t} + \theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} + \rho_{im} \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = \theta_m D_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - \theta_m v_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (5.29)$$

$$s_{im} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r s_a(x, r, t) dr, \quad (5.30)$$

$$\theta_a \frac{\partial c_a}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial s_a}{\partial t} = \theta_a D_a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_a}{\partial r} \right), \quad a < r < b, \quad (5.31)$$

где s_m, s_{im} — концентрации адсорбированного вещества в макропоре и окружающей среде, s_a — локальная концентрация адсорбированного вещества в окружающей цилиндрической среде, ρ_m, ρ_{im} — относительные объемные плотности макропоры и микропоры.

Используются следующие соотношения [185]

$$\rho_m = V_f \rho_f, \quad \rho_{im} = V_a \rho_a, \quad \rho = \rho_m + \rho_{im},$$

где ρ_f, ρ_a — локальные плотности макропористой и микропористой сред.

В этом параграфе используются изотермы Генри в виде

$$s_m = k_m c_m, \quad s_a = k_a c_a, \quad s_{im} = k_{im} c_{im}, \quad (5.32)$$

где k_m, k_{im} — адсорбционный коэффициент вещества в макропоре и окружающей среде.

Поставляя (5.32) в (5.29) и (5.31) получаем

$$\theta_m R_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \theta_{im} R_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \theta_m D_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - \theta_m v_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (5.33)$$

$$R_{im} \frac{\partial c_a}{\partial t} = D_a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_a}{\partial r} \right), \quad (5.34)$$

где R_m, R_{im} — коэффициенты ретардации

$$R_m = 1 + \frac{f_m \rho k}{\theta_m}, \quad k = k_m = k_{im}, \quad R_{im} = 1 + (1 - f_m) \frac{\rho k}{\theta_{im}},$$

$$R_a = 1 + \frac{\rho_a k_a}{\theta_a}, \quad R = 1 + \frac{\rho k}{\theta}, \quad \theta_m R_m + \theta_{im} R_{im} = \theta R, \quad R_{im} = R_a,$$

f_m — доля адсорбционной поверхности, находящейся в прямом контакте с подвижной частью жидкости (среды).

Для решения (5.33), (5.34) используем начальные и граничные условия из предыдущего параграфа ((5.4) – (5.10)).

Уравнения (5.33), (5.34) решаются численно методом конечных разностей [15] в сочетании с методом прогонки.

Введем сетку в области $\omega = \{(t, x, r), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty, a \leq r \leq b\}$ в виде

$$\omega_{th_2} = \left\{ (t_k, x_i, r_j), t_k = k\tau, x_i = ih_1, r_j = jh_2, \tau = \frac{T}{K}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J} \right\}.$$

Соответствующая разностная схема для уравнения (5.33) имеет вид

$$\frac{(c_m)_i^{k+1} - (c_m)_i^k}{\tau} + R\theta \frac{(c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k}{\tau} = \frac{D_m}{R_m} \frac{(c_m)_{i-1}^{k+1} - 2(c_m)_i^{k+1} + (c_m)_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} - \frac{v_m}{R_m} \frac{(c_m)_i^{k+1} - (c_m)_{i-1}^{k+1}}{h_1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (5.35)$$

где

$$\theta = \frac{\theta_{im}}{\theta_m}, \quad R = \frac{R_{im}}{R_m}.$$

Уравнение (5.35) приводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_1 (c_m)_{i-1}^{k+1} - B_1 (c_m)_i^{k+1} + E_1 (c_m)_{i+1}^{k+1} = -(F_1)_i^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad (5.36)$$

где

$$A_1 = \frac{D_m}{R_m h_1^2} + \frac{v_m}{R_m h_1}, \quad B_1 = \frac{2D_m}{R_m h_1^2} + \frac{v_m}{R_m h_1} + \frac{1}{\tau}, \quad E_1 = \frac{D_m}{R_m h_1^2},$$

$$(F_1)_i^k = \frac{1}{\tau} \left[(c_m)_i^k - \theta R \left((c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k \right) \right].$$

Система (5.36) решается методом прогонки с условиями (5.15), (5.18), (5.19). Таким образом, определяем распространение c_m .

Уравнение (5.34) аппроксимируется в виде

$$\frac{R_{im}}{\tau} \left((c_a)_{i,j}^{k+1} - (c_a)_{i,j}^k \right) = \frac{D_a}{V_j} \left[r_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{(c_a)_{i,j-1}^{k+1} - (c_a)_{i,j}^{k+1}}{h_2} \right) - \right. \\ \left. - r_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{(c_a)_{i,j}^{k+1} - (c_a)_{i,j+1}^{k+1}}{h_2} \right) \right], \quad (5.37)$$

где

$$V_j = \frac{1}{2} \left(r_{j+\frac{1}{2}}^2 - r_{j-\frac{1}{2}}^2 \right), \quad r_{j\pm\frac{1}{2}} = jh_2 \pm \frac{h_2}{2}, \quad j = \overline{1, J}.$$

После простых преобразований (5.37) приводится к СЛАУ

$$A_2(c_a)_{i,j-1}^{k+1} - B_2(c_a)_{i,j}^{k+1} + E_2(c_a)_{i,j+1}^{k+1} = -(F_2)_{i,j}^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (5.38)$$

где

$$A_2 = D(2j-1), \quad B_2 = 4jD+1, \quad E_2 = D(2j+1), \quad (F_2)_{i,j}^k = (c_a)_{i,j}^k,$$

$$D = \frac{\tau D_a}{2R_{im}jh_2^2}.$$

Система уравнений (5.38) решается методом прогонки.

В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-5}$ м²/с, $v_m = 10^{-4}$ м/с, $c_0 = 0,01$, $\theta_f = 1,0$, $\theta_a = 0,6$, $\rho_f = 2000$ кг/м³, $\rho_a = 2500$ кг/м³, $a = 0,05$, $b = 0,25$.

На основе результатов некоторых численных расчетов определены поле местной концентрации c_a (Рис.5.7в, 5.9в), местная концентрация адсорбированного вещества s_a (Рис.5.8в) в зоне с неподвижной жидкостью, а также профили изменения концентраций c_m , c_{im} (Рис.5.7 а-б, 5.9 а-б) и концентрации адсорбированного вещества s_m , s_{im} (Рис.5.8 а-б). Можно заметить ограниченное распространение фронтов концентраций c_m и c_{im} , а также поверхности местной концентрации c_a по сравнению с результатами предыдущей задачи, решенной в параграфе 5.1. Так, если значение концентрации вещества в окружающей цилиндрической среде c_m в точке $x=0$ было приблизительно равным $110 \cdot 10^{-6}$ м³/м³ (Рис.5.2б), то для этой задачи значение c_m в точке $x=0$ приблизительно равно $40 \cdot 10^{-6}$ м³/м³. Сравнивая Рис.5.7а с Рис.5.2а наблюдаем, что фронт распространения концентрации c_m также отстает по направлению x . Увеличение адсорбционного коэффициента k приводит к уменьшению значения c_{im} (Рис.5.9б) и увеличению значения концентраций адсорбированного вещества s_m , s_{im} . Область распространения местной концентрации адсорбированного вещества s_m при $k = 7,5 \cdot 10^{-4}$ больше чем при $k = 5 \cdot 10^{-4}$.

Теперь уравнение (5.33) решаем совместно с кинетическим уравнением

$$\theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} + \rho_{im} \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = \alpha(c_m - c_{im}). \quad (5.39)$$

В случае линейной изотермы Генри из (5.32) получаем

$$\theta_{im} R_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \alpha (c_m - c_{im}). \quad (5.40)$$

Это уравнение решается с (5.33) при начальных и граничных условиях (5.4) – (5.10).

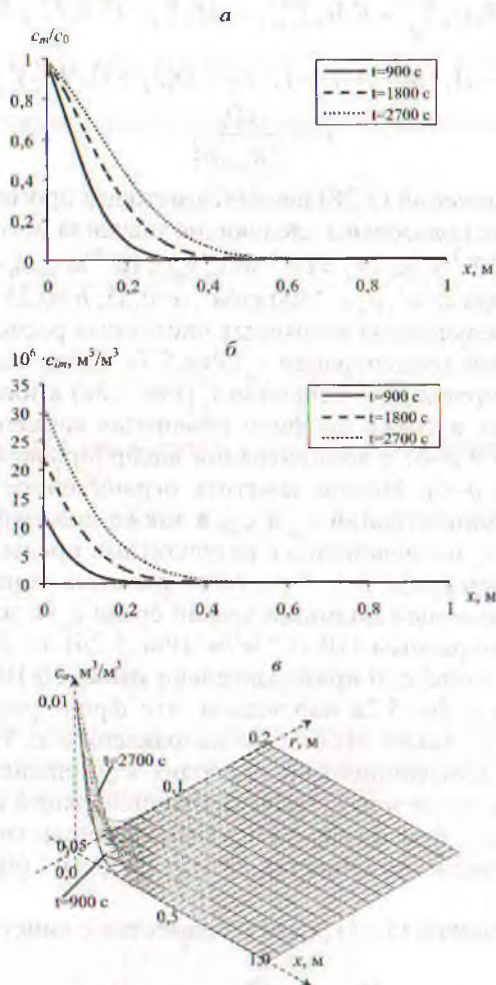


Рис. 5.7. Профили концентраций c_m (а), c_{im} (б) и поверхности c_a (в) в различные моменты времени при $v = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-5}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$ м³/кг.

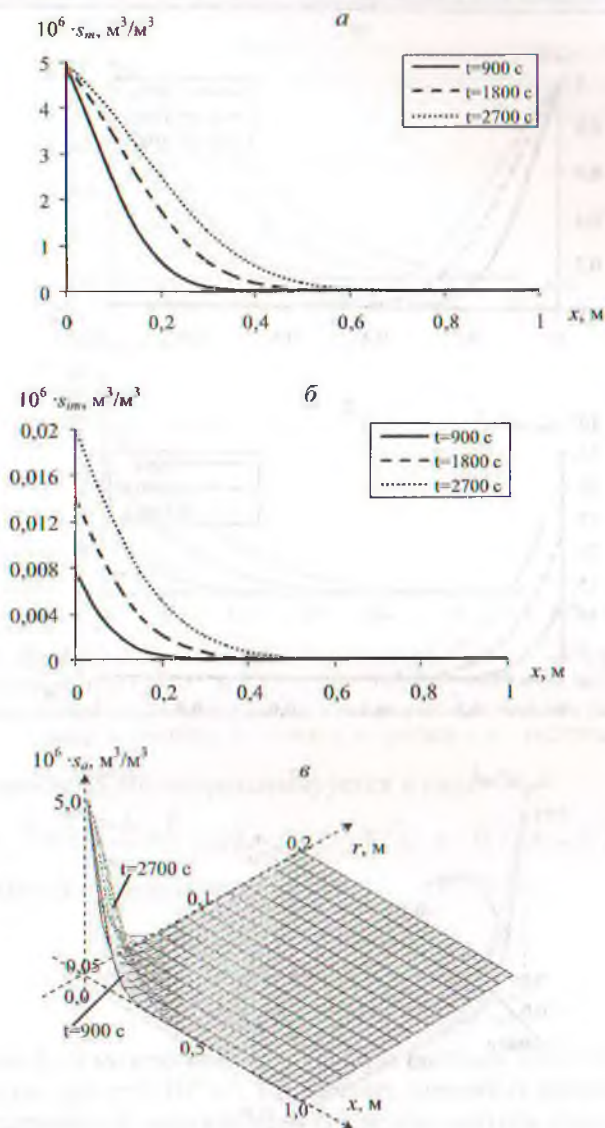


Рис. 5.8. Профили концентраций s_m (а), s_{sm} (б) и поверхности s_a (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D_m = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_{sm} = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$.

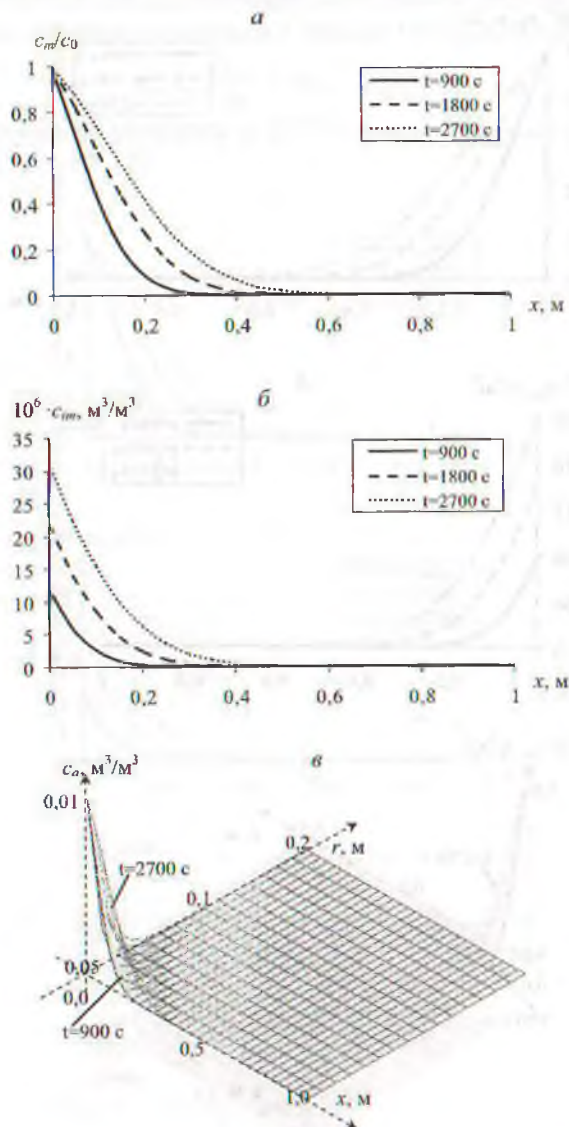


Рис. 5.9. Профили концентраций c_m (а), c_m (б) и поверхности c_m (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с, $k=7,5 \cdot 10^{-4}$ м³/кг.

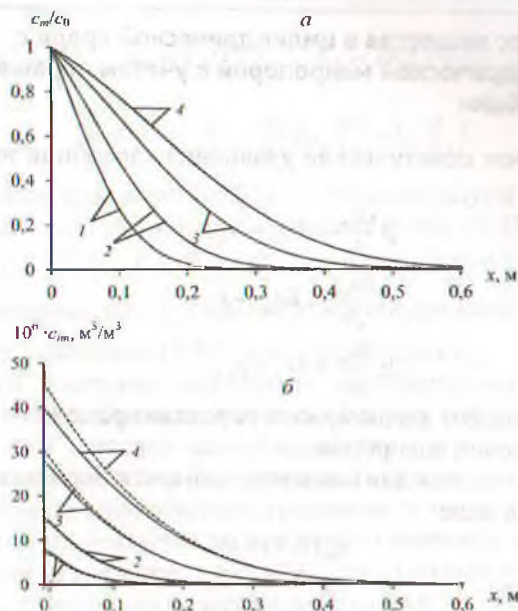


Рис. 5.10. Профили относительной концентраций c_m (а) и c_m (б) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с, $k=5 \cdot 10^{-4}$ для диффузионного подхода (сплошные линии) и кинетического подхода (штриховые линии), 1 – $t=450$ с, 2 – $t=900$ с, 3 – $t=1800$ с, 4 – $t=2700$ с.

Уравнение (5.40) аппроксимируется в виде

$$\theta_{im} R_{im} \frac{(c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k}{\tau} = \alpha \left((c_m)_i^k - (c_{im})_i^{k+1} \right), \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (5.41)$$

и приводится к следующему виду

$$(c_{im})_i^{k+1} = \lambda (c_{im})_i^k + \eta (c_m)_i^k, \quad (5.42)$$

где

$$\lambda = \frac{\theta_{im} R_{im}}{\theta_{im} R_{im} + \tau \alpha}, \quad \eta = \frac{\tau \alpha}{\theta_{im} R_{im} + \tau \alpha}.$$

Из рис.5.10 можно заметить, что оба подхода дают очень близкие результаты при $\alpha=3 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹. При малых значениях времени ($t \leq 900$ с) в цилиндрической окружающей среде оба подхода дают близкие результаты, но с возрастанием времени отличие возрастает. В этой задаче значение α больше, чем в предыдущей задаче, когда адсорбционные явления не учитываются.

5.3. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом неравновесной адсорбции

В этом случае кинетические уравнения адсорбции используются в виде

$$\beta \frac{\partial s_m}{\partial t} = k c_m - s_m, \quad (5.43)$$

$$\beta \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = k c_{im} - s_{im}, \quad (5.44)$$

$$\beta \frac{\partial s_a}{\partial t} = k c_a - s_a, \quad (5.45)$$

где β – коэффициент характерного перехода времени от неравновесной к равновесной адсорбции.

Начальные условия для концентраций адсорбированных веществ, принимаются в виде

$$s_m(0, x) = 0, \quad (5.46)$$

$$s_{im}(0, x) = 0, \quad (5.47)$$

$$s_a(0, x, r) = 0. \quad (5.48)$$

Уравнения (5.43) – (5.45) после аппроксимации принимают вид

$$(s_m)_i^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_m)_i^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_m)_i^k, \quad (5.49)$$

$$(s_{im})_i^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_{im})_i^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_{im})_i^k, \quad (5.50)$$

$$(s_a)_{i,j}^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_a)_{i,j}^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_a)_{i,j}^k. \quad (5.51)$$

Уравнение (5.29) после аппроксимации приводится к СЛАУ

$$A_1 (c_m)_{i-1}^{k+1} - B_1 (c_m)_i^{k+1} + E_1 (c_m)_{i+1}^{k+1} = -(F_1)_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (5.52)$$

где

$$A_1 = \frac{D_m}{h_1^2} + \frac{v_m}{h_1}, \quad B_1 = 2 \frac{D_m}{h_1^2} + \frac{v_m}{h_1} + \frac{1}{\tau}, \quad E_1 = \frac{D_m}{h_1^2},$$

$$(F_1)_i^k = \frac{(c_m)_i^k}{\tau} - \frac{\theta}{\tau} ((c_{im})_i^{k+1} - (c_m)_i^k) - \frac{p_m}{\theta_m \tau} ((s_m)_i^{k+1} - (s_m)_i^k) - \frac{p_{im}}{\theta_{im} \tau} ((s_{im})_i^{k+1} - (s_{im})_i^k).$$

Уравнение (5.31) также после аппроксимация преобразуется к СЛАУ

$$A_2 (c_a)_{i,j-1}^{k+1} - B_2 (c_a)_{i,j}^{k+1} + E_2 (c_a)_{i,j+1}^{k+1} = -(F_2)_{i,j}^k, \quad i = \overline{0, I}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (5.53)$$

где

$$A_2 = D(2j-1), \quad B_2 = 4jD+1, \quad E_2 = D(2j+1), \quad D = \frac{\tau D_a}{2jh_2^2},$$

$$(F_2)_{i,j}^k = (c_a)_{i,j}^k - \frac{\rho_a}{\theta_a} \left((s_a)_{i,j}^{k+1} - (s_a)_{i,j}^k \right).$$

Для решения уравнений (5.52), (5.53) используем метод прогонки. Схема расчета следующая. Сначала из (5.49)–(5.51) определяются значения $(s_m)_i^{k+1}$, $(s_{im})_i^{k+1}$, $(s_a)_{i,j}^{k+1}$. Решаем СЛАУ (5.53) методом прогонки и определяется $(c_a)_{i,j}^{k+1}$. После этого определяем c_m из (5.2). Затем решается уравнение (5.52) для определения c_m .

Результаты некоторых численных экспериментов представлены на рис. 5.11 – 5.16. Сравнивая рис. 5.14 и рис. 5.8 можно отметить, что в точке $x=0$ значение адсорбированного вещества в равновесном режиме не изменяется по времени. В случае, когда использовано неравновесное кинстическое уравнение в точке $x=0$ количество адсорбированного вещества до некоторого значения времени увеличивается. Если коэффициент $\beta=1000$ с, тогда значение s в точке $x=0$ через 2700 с. будет равным приблизительно $4,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{м}^3$ (Рис.5.14а). При $\beta=600$ с (Рис.5.16а) значение s_m приблизительно доходило до $5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{м}^3$ при $t=2700$ с. Таким образом, уменьшение значения β приводит к ускорению процесса формирования равновесного режима адсорбции.

Теперь уравнение (5.29) решается совместно с уравнением (5.39). Уравнение (5.39) после аппроксимации примет вид

$$(c_{im})_i^{k+1} = \lambda (c_{im})_i^k + \eta (c_m)_i^k - \xi \left((s_{im})_i^{k+1} - (s_{im})_i^k \right), \quad (5.54)$$

где

$$\lambda = \frac{\theta_{im}}{\theta_{im} + \tau\alpha}, \quad \eta = \frac{\tau\alpha}{\theta_{im} + \tau\alpha}, \quad \xi = \frac{\rho_{im}}{\theta_{im} + \tau\alpha}.$$

Сначала из (5.49), (5.50) определяются значения $(s_m)_i^{k+1}$, $(s_{im})_i^{k+1}$. После этого из (5.54) вычисляются значения $(c_{im})_i^{k+1}$. Решая систему (5.52) методом прогонки определяются сеточные значения c_m .

На рис.5.17 представлены результаты обоих подходов. Здесь как и для равновесной адсорбции значение α равно $3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. При больших значениях времени ($t > 900$ с) эти результаты отличаются.

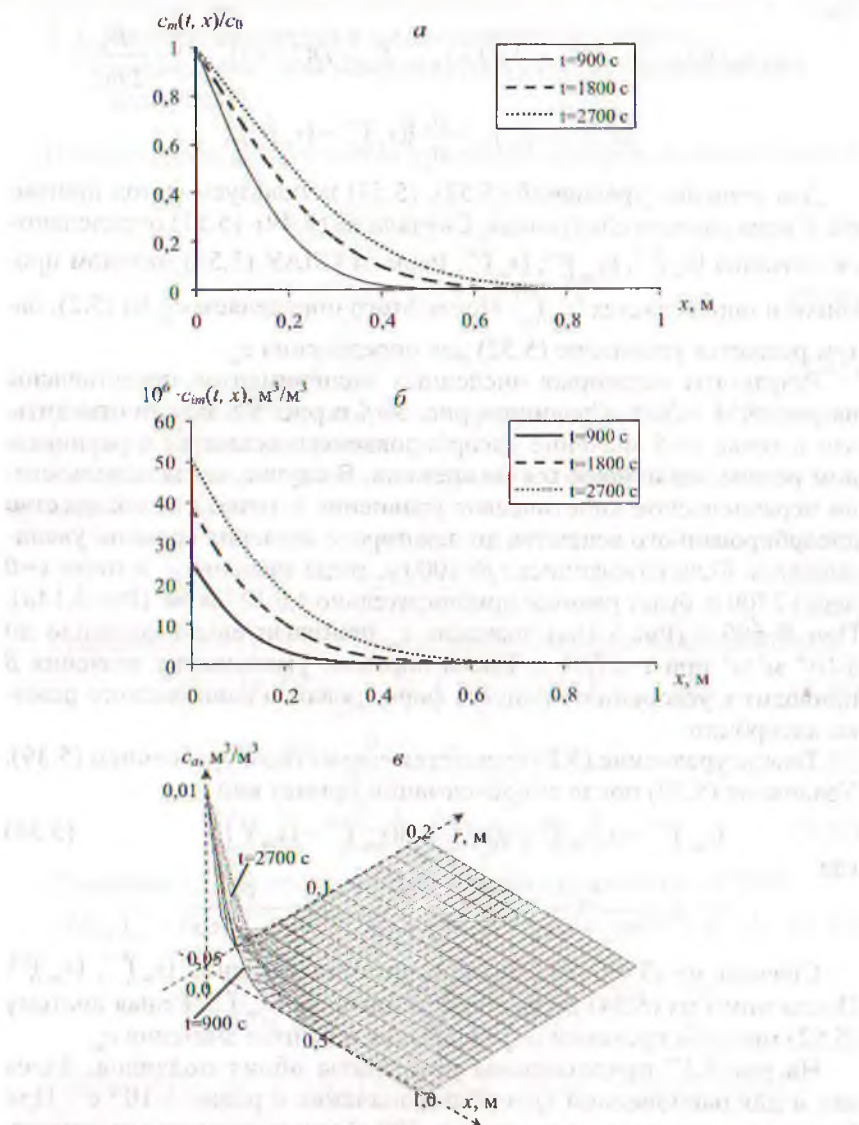


Рис. 5.11. Профили концентраций c_m (а), c_m (б) и поверхности c_m (в) в различные моменты времени при $v = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 1000$.

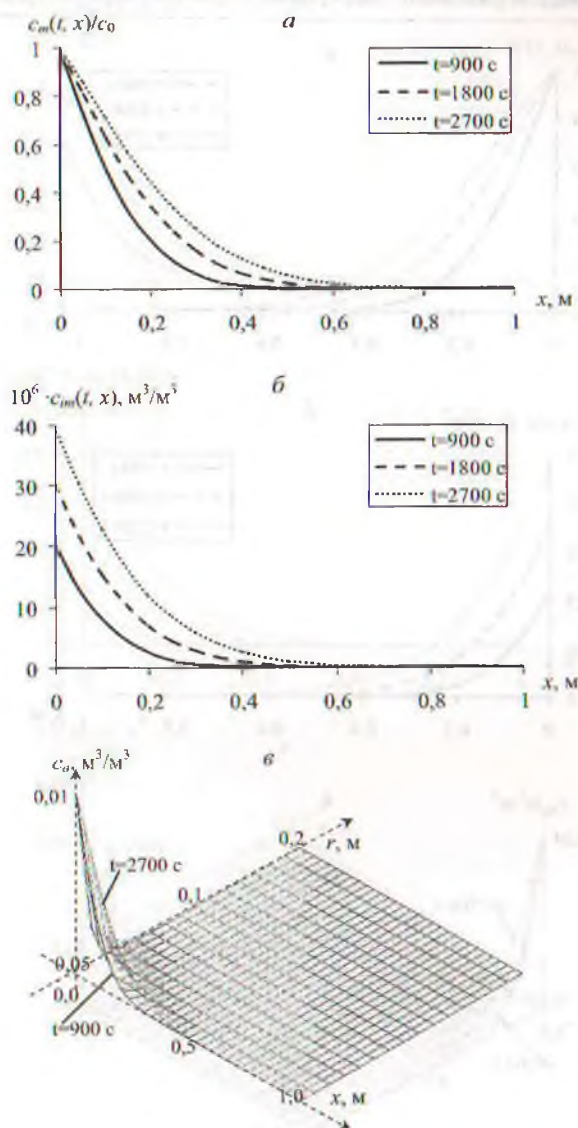


Рис. 5.12. Профили концентраций c (а), c_m (б) и поверхности c_a (в) в различные моменты времени при $v=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-3}$ м²/с, $k=7,5 \cdot 10^{-4}$, $\beta=1000$ с.

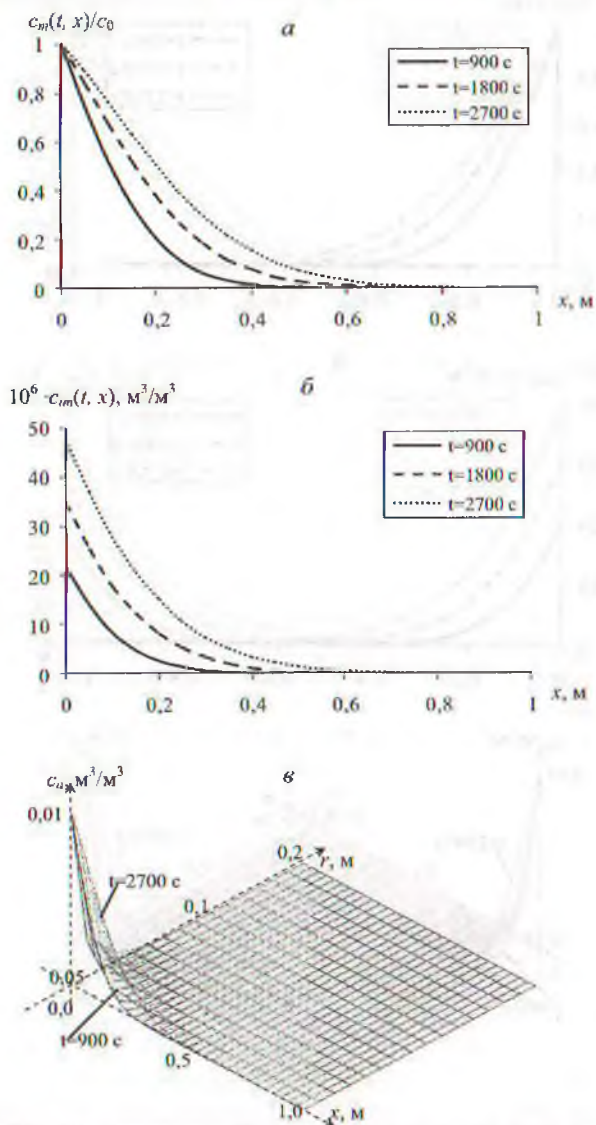


Рис. 5.13. Профили концентраций c_m (а), c_{sm} (б) и поверхности c_m (в) в различные моменты времени при $v = 10^{-4} \text{ м/с}$, $D = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\beta = 600 \text{ с}$.

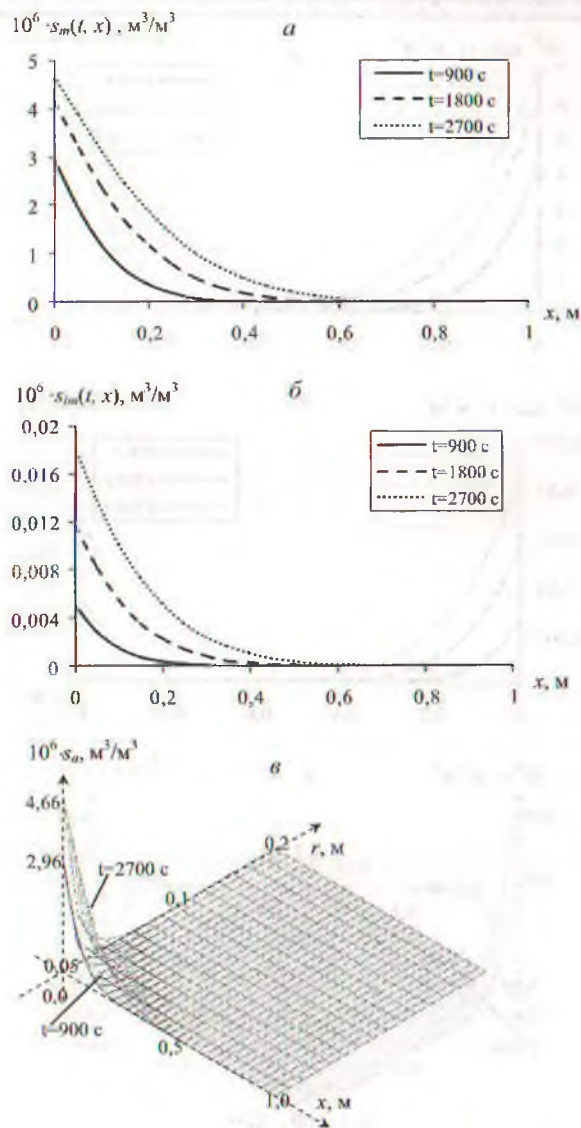


Рис. 5.14. Профили концентраций s_m (а), $s_{m\beta}$ (б) и поверхности s_m (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_\beta = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-5}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 1000$ с.

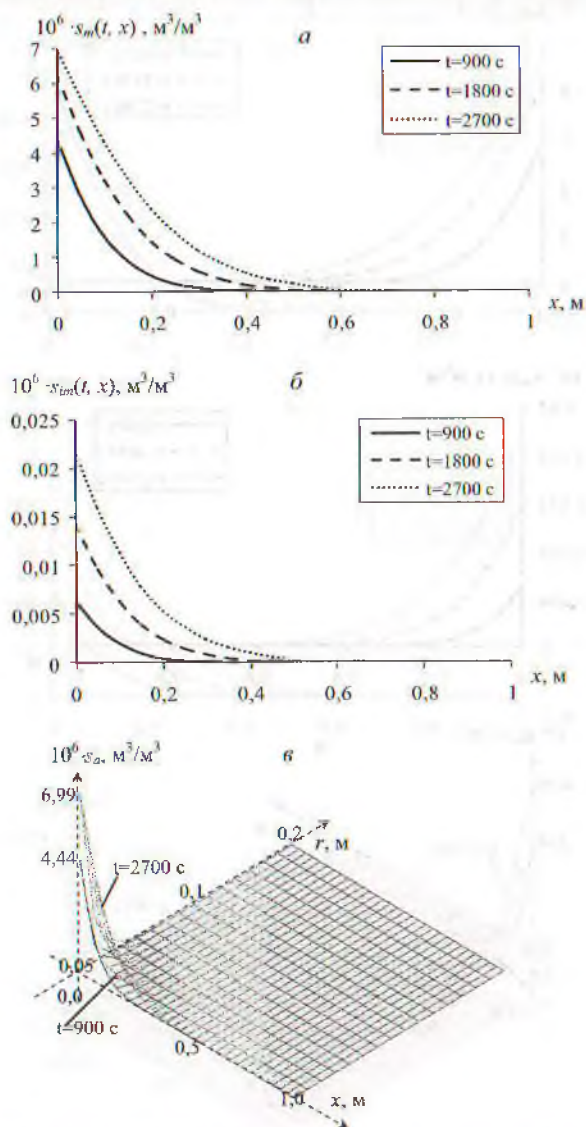


Рис. 5.15. Профили концентраций s_m (а), s_{im} (б) и поверхности s_a (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с, $k=7,5 \cdot 10^{-4}$, $\beta=1000$ с.

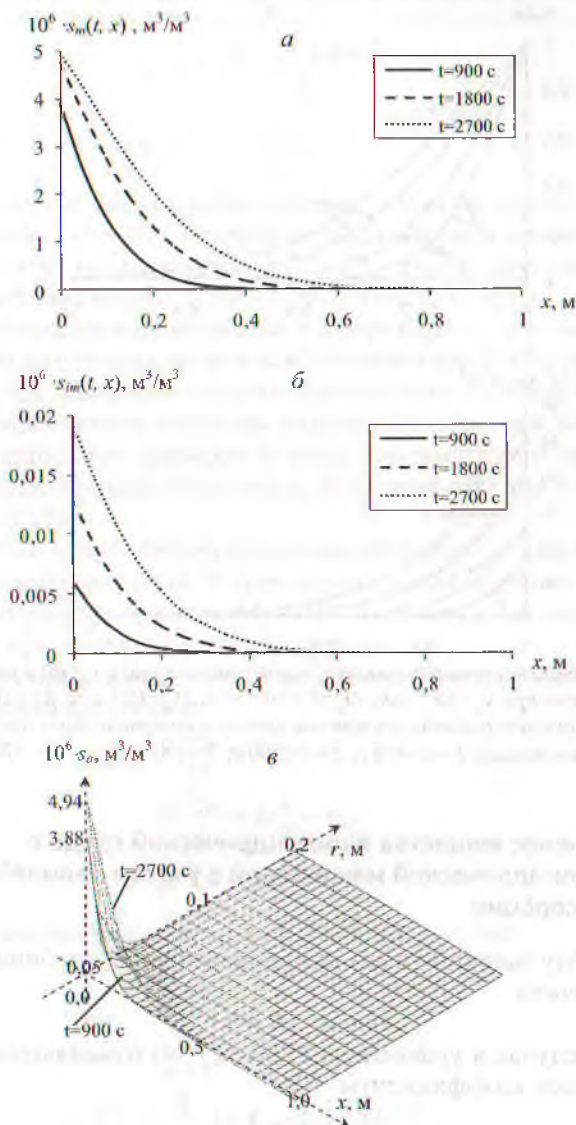


Рис. 5.16. Профили концентраций s_m (а), s_{im} (б) и поверхности s (в) в различные моменты времени при $v_m = 2 \cdot 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-9}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 600$ с.

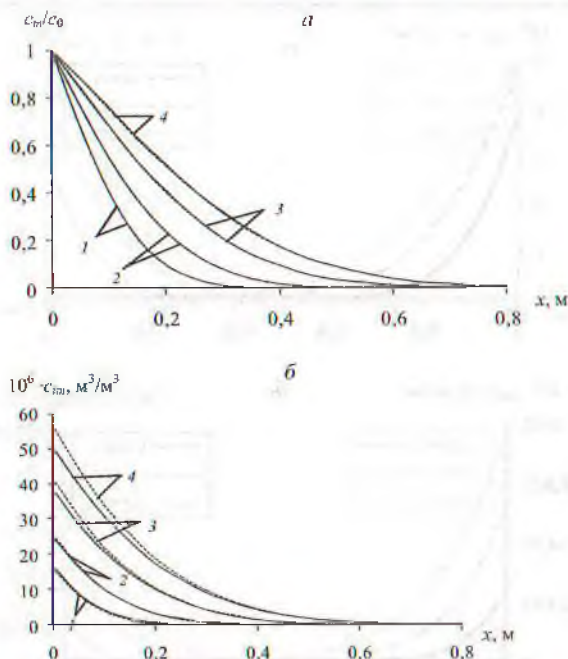


Рис. 5.17. Профили относительной концентраций c_m (а) и c_m (б) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с, $k=5 \cdot 10^{-4}$, $\beta=1000$ с. для диффузионного подхода (сплошные линии) и кинетического подхода (штриховые линии), 1 – $t=450$ с, 2 – $t=900$ с, 3 – $t=1800$ с, 4 – $t=2700$ с.

5.4. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом нелинейной адсорбции

Теперь эту задачу решаем для равновесной адсорбции по изотерме Фрейндлиха

$$s = kc^n, \quad 0 < n < 1. \quad (5.55)$$

В этом случае в уравнениях (5.33), (5.34) изменяются только ретардационные коэффициенты

$$R_m = 1 + \frac{f_m \rho k n c_m^{n-1}}{\theta_m}, \quad (5.56)$$

$$R_{im} = 1 + \frac{(1 - f_m) \rho k n c_{im}^{n-1}}{\theta_{im}}, \quad (5.57)$$

$$R_a = 1 + \frac{f_a \rho k n c_a^{n-1}}{\theta_a}. \quad (5.58)$$

В этом случае также анализируется задача на основе кинетического уравнения (5.40), в которой ретардационный коэффициент R_{im} определяется из соотношения (5.57). Результаты численных расчетов представлены на рис. 5.18 – 5.20. На рис. 5.19 приведены результаты адсорбированного вещества в макропоре s_m и в окружающей среде s_{im} при различных временах. Сравнивая рис. 5.19 с рис. 5.8 можно сказать, что в случае изотермы Фрейндлиха значение концентрации адсорбированного вещества намного больше, чем по линейной изотерме Генри. Это приводит к тому, что значения и профили изменения концентраций вещества c_m и c_{im} меньше, чем по изотермы Генри (Рис. 5.18).

На рис. 5.20 представлено сравнение результатов диффузионного и кинетического подходов. В этом случае, когда значение коэффициента массопереноса α равно $3,64 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ оба подхода дают близкие результаты при малых значениях времени.

Теперь решаем задачу с использованием нелинейных кинетических уравнений адсорбции

$$\beta \frac{\partial s_m}{\partial t} = k c_m^n - s_m, \quad (5.59)$$

$$\beta \frac{\partial s_{im}}{\partial t} = k c_{im}^n - s_{im}, \quad (5.60)$$

$$\beta \frac{\partial s_a}{\partial t} = k c_a^n - s_a. \quad (5.61)$$

Эти уравнения после аппроксимации примут вид

$$(s_m)_{i,j}^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_m)_{i,j}^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_m^n)_{i,j}^k, \quad (5.62)$$

$$(s_{im})_{i,j}^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_{im})_{i,j}^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_{im}^n)_{i,j}^k, \quad (5.63)$$

$$(s_a)_{i,j}^{k+1} = \frac{\beta}{\beta + \tau} (s_a)_{i,j}^k + \frac{\tau}{\beta + \tau} k (c_a^n)_{i,j}^k. \quad (5.64)$$

Схема расчета аналогична второму случаю, только для вычисления значений $(s_m)_{i,j}^{k+1}$, $(s_{im})_{i,j}^{k+1}$, $(s_a)_{i,j}^{k+1}$ используются соотношения (5.62) – (5.64).

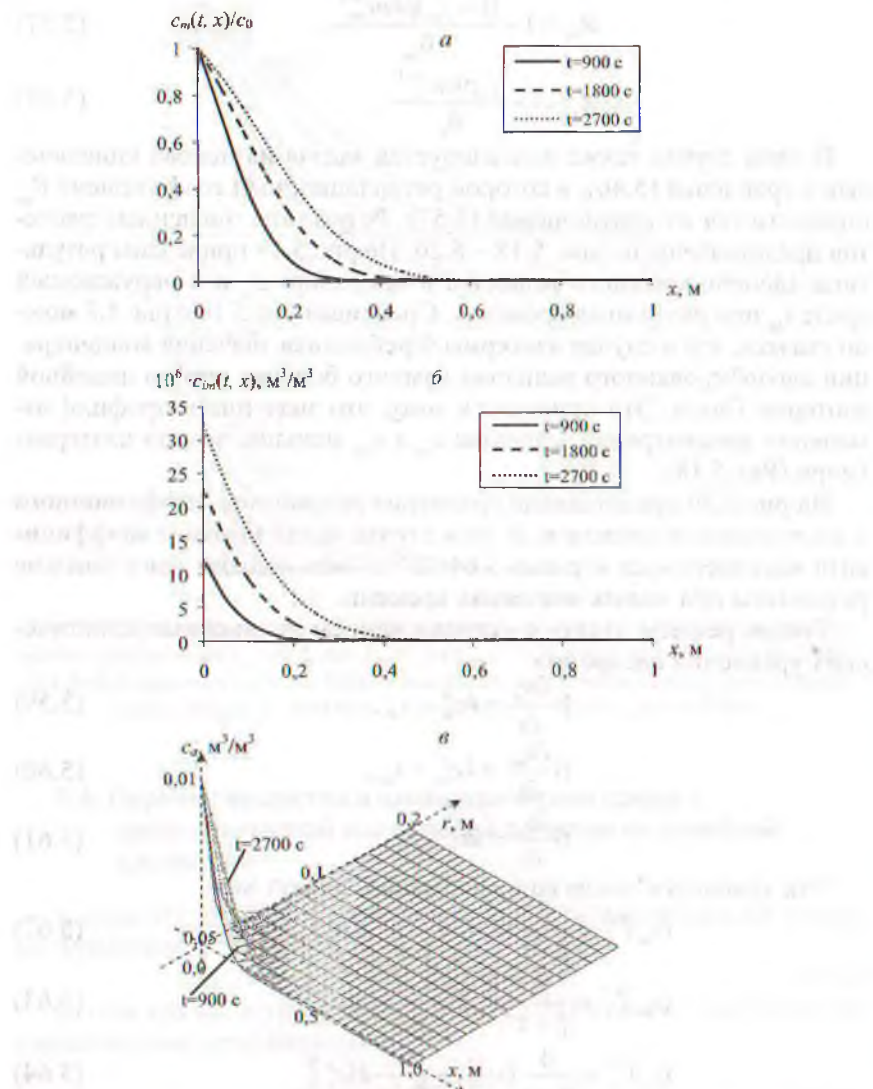


Рис. 5.18. Профили концентраций c_n (а), c_{in} (б) и поверхности c_a (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-5}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $n = 0,95$.

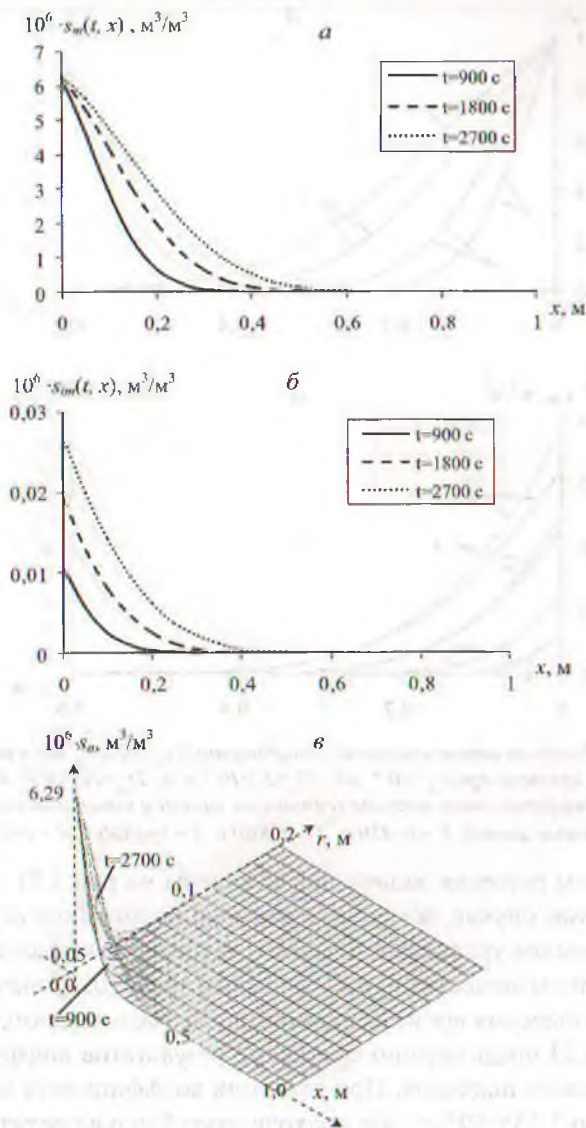


Рис. 5.19. Профили концентраций s_m (а), s_m (б) и поверхности s_o (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4} \text{ м/с}$, $D_o=2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m=10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $k=5 \cdot 10^{-4}$, $n=0,95$.

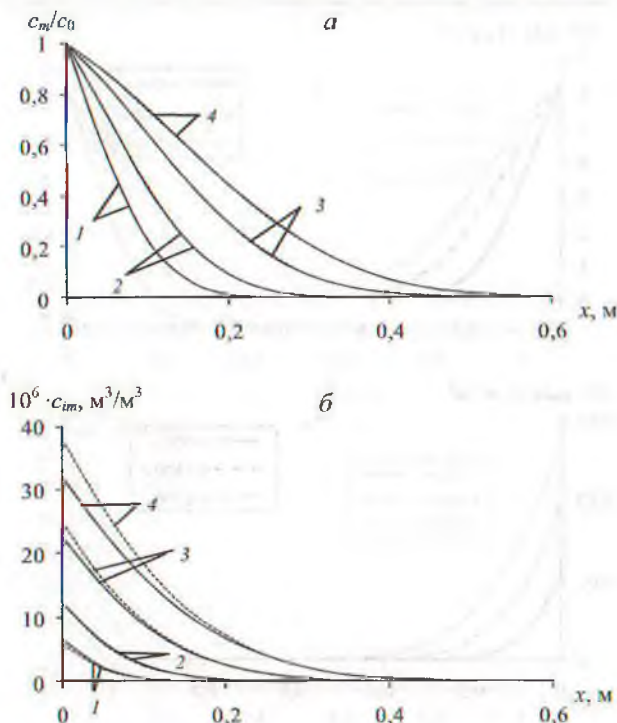


Рис. 5.20. Профили относительной концентраций c_m (а) и c_{im} (б) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-8}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $n = 0,95$ для диффузионного подхода (сплошные линии) и кинетического подхода (штриховые линии), 1 – $t = 450$ с, 2 – $t = 900$ с, 3 – $t = 1800$ с, 4 – $t = 2700$ с.

Результаты решения задачи представлены на рис.5.21 – 5.22 при $n = 0,95$. В этом случае, когда использовано нелинейное неравновесное кинетическое уравнение, в точке $x = 0$ значение концентрации адсорбированного вещества s_m и s_{im} , а также в точке $(0, a)$ значение s_a до некоторого значения времени относительно увеличиваются.

На рис.5.23 представлено сравнение результатов диффузионного и кинетического подходов. При значении коэффициента массопереноса α равно $3,335 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹ оба подхода дают близкие результаты при малых значениях времени.

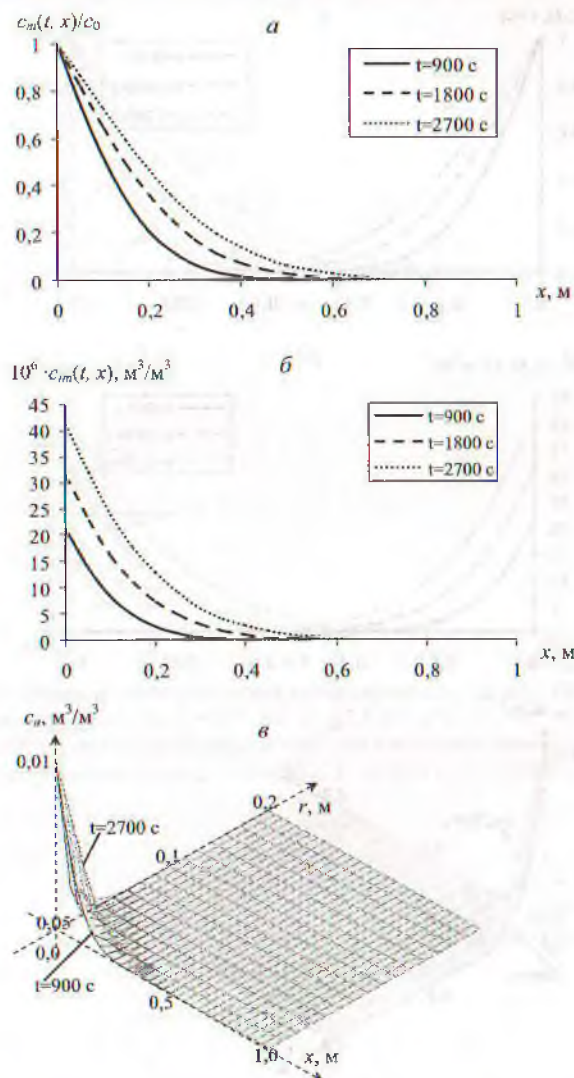


Рис. 5.21. Профили концентраций c_m (а), c_m (б) и поверхности c_m (в) в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m = 10^{-5}$ м²/с, $k = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 1000$ с, $n = 0,95$.

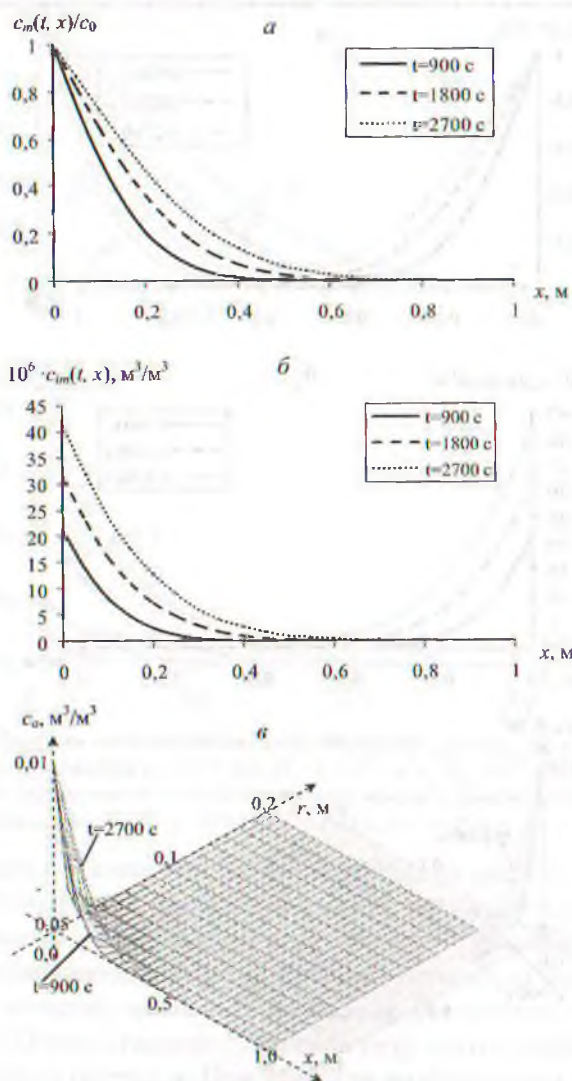


Рис. 5.22. Профили концентраций s_m (а), s_{im} (б) и поверхности s_a (в) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4} \text{ м/с}$, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_m=10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $k=5 \cdot 10^{-4}$, $\beta=1000 \text{ с}$, $n=0,95$.

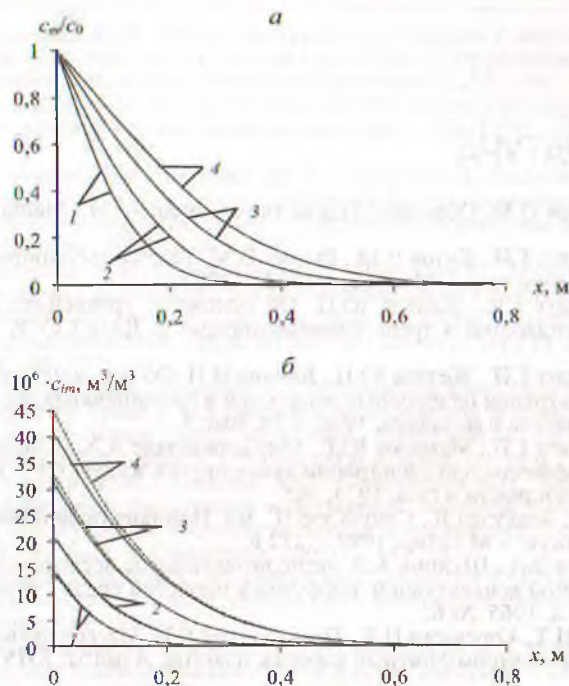


Рис. 5.23. Профили относительной концентраций c_m (а) и c_m (б) в различные моменты времени при $v_m=10^{-4}$ м/с, $D_a=2,5 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $D_m=10^{-5}$ м²/с, $k=5 \cdot 10^{-4}$, $n=0,95$, $\beta=1000$ с. для диффузионного подхода (сплошные линии) и кинетического подхода (штриховые линии), 1 – $t=450$ с, 2 – $t=900$ с, 3 – $t=1800$ с, 4 – $t=2700$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
3. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ДАН СССР, 1960. Т.132, Вып.3.
4. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика, 1960. Т.24. Вып.5.
5. Баренблатт Г.И., Мамедов Ю.Г., Мирзаджанзаде А.Х., Швецов И.А., Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1973, №5.
6. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Нкорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
7. Бондарев Э.А., Шкирич А.Р. Экспериментальное исследование продольной и поперечной конвективной диффузии в пористой среде // Изв. АН СССР, ОТН, Механика, 1965. № 6.
8. Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И. Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. Алматы: КНУ, 2005. – 208 с.
9. Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии // М.Ж: Химия, 1995.
10. Ентов В.М., Полищук А.М. О роли сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1975. №3. С.68–76.
11. Жаманкулова Ф.Э. Модифицированная гидродинамическая модель выноса песка из пласта // ДАН РУз, 2004. №5. С.38–41.
12. Жаманкулова Ф.Э., Махмудов Ж.М. Математическое моделирование процессов выноса песка из пласта // Труды КНИИРП Сам.отд. АН РУз. Самарканд, 2003. Вып.2. С.87–93.
13. Зубарев А.Ю., Хужаёров Б.Х. К теории релаксационной фильтрации // Инженерно-физический журнал, 1988. Т.55, №3. С.442–447.
14. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
16. Котяхов Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов. – М.: Недра, 1977. – 288 с.
17. Кукин В.В., Горбатова А.Н., Швецов И.А., Меркулов В.Н., Псырышкина Т.Н. Фильтрационные характеристики растворов полиакриламида (ПАА) // В кн.: «Добыча нефти и газа», Куйбышев, 1968, (Тр. КуйбышевНИИ НП. №38).
18. Лейбензон Л.С. Собрание трудов. II том. – М.: Изд-во АН СССР. 1953. – 544 с.

19. Махмудов Ж.М. Задача фильтрации суспензии и переноса вещества в двухфазной пористой среде с учетом предельного суффозионного градиента давления // *Узбекский журнал "Проблемы механики"*, 2013. №2. С.23–27.
20. Махмудов Ж.М. Кольматационно-суффозионная фильтрация с учетом предельного суффозионного градиента давления // *ДАН РУз*, 2002. №6. С.18–21.
21. Махмудов Ж.М., Зикийев Ш.Х., Каршиева Д. Решение задачи переноса веществ в пористой среде с условием на фронте смачивания // *Материалы Международной науч.-тех. Конф. "Современные проблемы механики"*, 23–24.10.2009. Ташкент, 2009. С. 103–107.
22. Махмудов Ж.М., Сайфуллаев Б.Н., Шоянов М., Тошов Н.Т. Численное решение задачи фильтрации дисперсной жидкости в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью // *Актуальные вопросы математики, нефтегазопромышленной механики. Труды КНИИРП Сам. отд. АН РУз. Вып. 4. Самарканд*, 2008. С. 98–104.
23. Махмудов Ж.М., Усманов Р.У. Кольматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью // *Хоразм Маъмур академиясининг 1000 йиллигига бағишланган ёш олимларнинг халқаро илмий конференцияси. 1–3 июн 2006 й. Хива. 16–18 б.*
24. Махмудов Ж.М., Холиков А.С., Сайфуллаев Б.Н. Задача кольматационно-суффозионной фильтрации в двумерной пористой среде с точечным источником // *Актуальные вопросы механики и математики. Труды КНИИРП Сам.отд. АН РУз. Вып. 3. Самарканд*, 2007. С. 142–147.
25. Мирзаджанзаде А.Х., Мишечин В.Н., Мамедов Ю.Г. Применение высокомолекулярных полимерных добавок для изоляции поглощающих пластов // *Нефтяное хозяйство*, 1970, №1.
26. Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И., Степанова Г.С., Терзи В.П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. – М.: Недра, 1968.
27. Пешковский В.И. Миграция солей при промывке почв с кусочно-однородным засолением // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1977, №3. С.76–81.
28. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 232 с.
29. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
30. Сулаймонов Ф.У., Махмудов Ж.М. Решение задачи переноса веществ в среде, состоящей из макропористой и микропористой цилиндрических зон с учетом адсорбции // *Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики грунтов и сложных реологических систем»*, Самарканд, 19–20.04.2013. Книга 2. С. 186–188.
31. Сулаймонов Ф.У., Холияров Э.Ч. Коэффициентная обратная задача переноса вещества в среде, состоящей из макропористой и микропористой цилиндрических зон // *Узбекский журнал «Проблемы механики»*, 2013. №2. С. 75–78.
32. Сургучев М.Л. Методы контроля и регулирования процесса разработки нефтяных месторождений. – М.: Недра, 1986.
33. Тимофеев Д.П. Кинетика адсорбции. – М.: Изд. АН СССР. 1962. – 252 с.
34. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
35. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 232 с.
36. Файзиев Б.М., Холияров Э.Ч., Жураев О.Ж., Сагдуллаев О.К. Обратная

коэффициентная задача фильтрации суспензии с учетом эффекта старения // Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики грунтов и сложных реологических систем», Самарканд, 19–20.04.2013, Книга 2, С. 234–237.

37. Хужаёров Б.Х., Бобокулов Ё.О., Худоёров Ш.Ж. Релаксационная фильтрация однородных жидкостей в трещиновато-пористых средах // Инженерно-физический журнал, 2001. Т.74, №5. С.17–23.

38. Хужаёров Б.Х. Влияние кольтматации и суффозии на фильтрацию суспензий // Инженерно-физический журнал, 1990. Т.58, №2. С.244–250.

39. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. Кольтматационно-суффозионная фильтрация с учетом диффузионного переноса // Суюкликлар, куп фазали аралашмалар ва туташ мухитларда тўлкинлар тарқалишининг долзарб муаммолари: Акад. Рахматуллиннинг 90-йиллигига бағишланган Республика конф. матбузатлар тўплами. Тошкент, 21–23.04.99. II-қисм. 372–375 бб.

40. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О моделях переноса твердых частиц в пористой среде // Актуальные проблемы механики контактного взаимодействия: Тез. докл. Респ. науч. конф. – Самарканд, 1997. С.167–169.

41. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А. О модификации модели кольтматационно-суффозионной фильтрации // ДАН РУз, 1997. №5. С.25–28.

42. Хужаёров Б.Х., Давиденко М.А., Шодмонов И.Э. Фильтрация однородной жидкости в упруго-пластическом режиме с учётом разрушения пород // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1997. №3. С.40–43.

43. Хужаёров Б.Х., Жаманкулова Ф.Э. Гидравлическое обоснование выноса песка из нефтедобывающих скважин // Узбекский журнал «Нефть и газ», 2000. №4. С.20–23.

44. Хужаёров Б.Х., Жаманкулова Ф.Э., Махмудов Ж.М. Моделирование выноса песка из нефтяных пластов // Тезисы докл. респуб. науч.-тех. конф. «Пути повышения эффективности разработки и эксплуатации нефтегазовых месторождений Узбекистана». 17–18.08.2003. –Ташкент, 2003. С.40–41.

45. Хужаёров Б.Х. Захват и вымывание частиц в пористых фильтрах // Материалы II Международного форума MIF-92, Minsk International Forum «Heat/Mass Transfer». Т.5. Тепло-массообмен в дисперсных средах. Минск, 1992. С.156–158.

46. Хужаёров Б.Х. и др. Отчет о НИР по контракту № Ф.1.2.9 «Разработка и исследование моделей движения неньютоновских жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах» на период с 01.01.03 по 30.06.04 (Промежуточный). Фонды КНИИРП инв. № 1.04. Самарканд, 2004. – 60 с.

47. Хужаёров Б.Х. и др. Отчет о НИР по контракту № Ф.1.2.9 «Разработка и исследование моделей движения неньютоновских жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах» на период с 01.07.04 по 30.06.05 (Промежуточный). Фонды КНИИРП инв. № 2.05. Самарканд, 2005. – 67 с.

48. Хужаёров Б.Х. и др. Отчет о НИР по контракту № Ф.1.2.9 «Разработка и исследование моделей движения неньютоновских жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах» на период с 01.07.2005 по 30.06.2006 (Промежуточный). Фонды КНИИРП инв. №4.06. Самарканд, 2006. – 67 с.

49. Хужаёров Б.Х. Макроскопическое моделирование релаксационного переноса вещества в пористой среде // Изв. РАН, Механика жидкости и газа, 2004. №5, С.21–30.

50. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Кольтматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостями // Инженерно-физический журнал, 2007. Т.80, №1. С.46–53.

51. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М. Решение двумерной задачи кольтматационно-суффозионной фильтрации в двухзонной пористой среде // Материалы международной науч.-тех. конф. «Современные проблемы механики», 23–24.10.2009. Ташкент, 2009. Ст. 207–211.
52. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Жаманкулова Ф.Э. Фильтрация суспензии в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2013. №2. С.44–47.
53. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Жаманкулова Ф.Э., Эшмуродов М.Х. Задача кольтматационно-суффозионного переноса веществ в двухзонной пористой среде с учетом предельного суффозионного градиента давления // Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики грунтов и сложных реологических систем», Самарканд, 19–20.04.2013. Книга 2. С. 258–262.
54. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х. Задачи переноса загрязняющих веществ в неоднородной пористой среде с учетом адсорбции и внутреннего массопереноса // Труды международной конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми 2009», 18–21.09.2009. Ташкент, 2009. Ст. 303–306.
55. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х. Перенос вещества в пористой среде с гетерогенной структурой с учетом явлений адсорбции // ДАН РУз, 2009. №3–4. С.66–69.
56. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х. Перенос вещества в пористой среде, насыщенной подвижной и неподвижной жидкостью // Инженерно-физический журнал, 2010. Т.83, №2. С.248–254.
57. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х. Перенос вещества с двухместной адсорбцией в неоднородной пористой среде // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2009. №1. С.48–52.
58. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х. Перенос загрязняющих веществ в водоносных пластах с учетом двухместной адсорбции // Сибирский журнал промышленной математики, 2011. Т.14, №1(45). С.127–139.
59. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Сулаймонов Ф.У. Задача переноса вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой // ДАН РУз, 2010. №6. С.30–33.
60. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Сулаймонов Ф.У. Перенос вещества в среде, состоящей из макропористой и микропористой цилиндрических зон // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2011. №3–4. С.37–40.
61. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Хамзина Б.С. Кольтматационно-суффозионная фильтрация дисперсных систем с учетом диффузионных эффектов // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2003. №1. С.51–54.
62. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Холиков А.С. Задача кольтматационно-суффозионной фильтрации в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостями // Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы и перспективы механики». Ташкент, 2006. С.164–166.
63. Хужаёров Б.Х. Моделирование релаксационных явлений при движении неньютоновских жидкостей // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1994. №3–4. С.55–56.
64. Хужаёров Б.Х. Модель многокомпонентной кольтматационно-суффозионной фильтрации // Инженерно-физический журнал, 1994. Т.66, №4. С.427–433.
65. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации дисперсных систем с учетом кольтматации и суффозии // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1995. №3–4. С.62–65.

66. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации суспензий с учётом коагуляции и суффозии // Инженерно-физический журнал, 1992. Т.63, №1. С.72–79.
67. Хужаёров Б.Х. Модель фильтрации суспензий, учитывающая суффозию и коагуляцию // Тр. СамГУ «Математические модели и численные методы нелинейных колебаний». Самарканд, 1990. С. 78–81.
68. Хужаёров Б.Х. Об уравнении фильтрации в упруго-пластическом режиме с выносом песка // ДАН РУз, 1997. №4. С.22–24.
69. Хужаёров Б.Х. О влиянии капиллярных эффектов на реологические свойства эмульсии // Инженерно-физический журнал, 1990. Т.59, №6. С.968–974.
70. Хужаёров Б.Х. О модели коагуляционно-суффозионной фильтрации дисперсных систем в пористой среде // Инженерно-физический журнал, 2000. Т.73, №4. С.680–685.
71. Хужаёров Б.Х. О моделировании релаксационных явлений при фильтрации // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук., 1989. №4. С.43–46.
72. Хужаёров Б.Х. Реологические свойства смесей. – Самарканд: Согдиана, 2000.
73. Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. – Ташкент: Фан, 2012. – 280 с.
74. Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Модель фильтрации суспензии с учетом предельных градиентов давлений по потоку и суффозии // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1995. №1. С.34–37.
75. Хужаёров Б.Х., Сафаров М.К. Релаксационная фильтрация в полубесконечной двухслойной среде // ДАН РУз, 1997. №12. С.18–21.
76. Хужаёров Б.Х., Хамзина Б.С., Махмудов Ж.М. Коагуляционно-суффозионная фильтрация в конечном пласте с учетом предельного суффозионного градиента давления // ДАН РУз, 2001. №10–11. С.38–40.
77. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э. Упруго-пластическая фильтрация с учётом разрушения пласта // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1998. №3. С.24–29.
78. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э. Фильтрация дисперсных систем с учётом коагуляции и суффозии // Узбекский журнал «Проблемы механики», 1993. № 6.
79. Хужаёров Б.Х., Шодмонов И.Э., Холияров Э.Ч., Закиров А.А. Упруго-пластическая фильтрация жидкости в неустойчивых пластах // Инженерно-физический журнал, 2003. Т.76, №6. С.123–128.
80. Шехтман Ю.М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. – М.: Изд-во АН СССР. 1961. – 212 с.
81. Alvarez A.C., Bedrikovetsky P.G., Hime G., Marchesin A.D., The inverse problem of determining the permeability reduction in flow of water with particles in porous media, CILAMCE 2005 – ABMEC & AMC, Guarapari, Espirito Santo, Brazil, 19th – 21st October 2007.
82. Alvarez A.C., Bedrikovetsky P.G., Hime G., Marchesin A.O., Marchesin D., Rodriguez J.R., A fast inverse solver for the filtration function for flow of water with particles in porous media, *Inverse Problems*, 2006. Vol.22. P.69–88.
83. Alvarez A.C., Hime G., Marchesin D., Bedrikovetsky P., The inverse problem of determining the filtration function and permeability reduction in flow of water with particles in porous media, *Transport in Porous Media*, 2007. Vol.70. P.43–62.
84. Alvarez A.C., Inverse problems for deep bed filtration in porous media, *Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada*. Rio de Janeiro, Brasil. February, 2005.

85. Auriault J.-L., Adler P.M., Taylor dispersion in porous media: Analyses by multiple scale expansions, *Advances in Water Resources*, 1995. Vol.18, N.4. P.217–226.
86. Auriault J.-L., Lewandowska J., Diffusion/adsorption/advection macrotransport in soils, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1996. Vol.15, N.4. P.681–204.
87. Auriault J.-L., Lewandowska J., Homogenization analyses of and adsorption macrotransport in porous media: macrotransport in the absence of advection, *Géotechnique*, 1993a. Vol.43, N.3. P.457–469.
88. Auriault J.-L., Boutin C., Geindreau C., *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogeneous Media*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc. 2009.
89. Baker L.E., Effects of dispersion and dead-end pore volume in miscible flooding, *Soc. Petr. Eng. J.*, 1977, №17, Pp. 219–227.
90. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M., *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*, Kluwer Academic Publishers. 1990.
91. Bear J., *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Publishing Co., New York. 1972. – 764 p.
92. Bear J., Verruijt A., *Modelling Groundwater Flow and Pollution*. Reidel. Dordrecht. 1987.
93. Bedrikovetsky P., Santos A., A Stochastic Model for Particulate Suspension Flow in Porous Media, *Transport in Porous Media*, 2006. Vol.62. P.23–53.
94. Biggar J.W., Nielsen D.R., Miscible displacement and leaching. Edited by Hagen R.M., *American Society of Agronomy, Madison, Wis.*, 1967. P. 254–274.
95. Bond W.J., Wierenga P.J., Immobile water during solute transport in unsaturated sand columns, *Water resources research*, 1990. Vol.26, N.10. P.2475–2481.
96. Brusseau M.L., Jessup R.E., Rao P.S.C., Modeling the transport of solutes influenced by multiprocess nonequilibrium, *Water resources research*, 1989. Vol.25, N.9. P.1971–1988.
97. Brusseau M.L., Rao P.S., Modeling solute transport influenced by multiprocess nonequilibrium and transformation reactions, *Water resources research*, 1992, Vol.28, N.1. P.175–182.
98. Cameron D.R., Klute A., Convective-Dispersive Solute Transport With a Combined Equilibrium and Kinetic Adsorption Model, *Water resources research*, 1977. Vol. 13, N.1. P.183–188.
99. Chen W., Wagenet R.J., Description of atrazine transport in soil with heterogeneous nonequilibrium sorption, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1997. Vol.61, N.2. P.360–371.
100. Civan F., Nguyen V., Modeling Particle Migration and Deposition in Porous Media by Parallel Pathways with Exchange, *Handbook of Porous Media*. Second Edition. Editor: Kambiz Vafai, Taylor & Francis Group, LLC. 2005. P.457–484.
101. Civan F., Rasmussen M.L., Analytical Models for Porous Media Impairment by Particles in Rectilinear and Radial Flows, *Handbook of Porous Media*. Second Edition. Editor: Kambiz Vafai, Taylor & Francis Group, LLC. 2005. P.485–542.
102. Civan F., *Reservoir Formation Damage — Fundamentals, Modeling, Assessment, and Mitigation*. Gulf Publ. Co., Houston, TX, and Butterworth-Heinemann, Woburn, MA, 2000. 742 p.
103. Clark I., Fritz P., *Environmental Isotopes in Hydrogeology*, CRC Press, Taylor & Francis Group. 1997.
104. Clark M.M., *Transport Modeling for Environmental Engineers and Scientists*, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. 2009.
105. Clark M.M., *Transport Modelling for Environmental Engineers and Scientists*, John Wiley, New York, 1996.
106. Claudio G., Claudio P., Giuseppe G., Comparison of solution approaches

for the two-domain model of nonequilibrium transport in porous media, *Advances in water resources*, 1996. Vol.19, N.4. P. 241–253.

107. Coats K.H., Smith B.D., Dead-end volume and dispersion in porous media, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1964. Vol.4, N.1. P.73–84.

108. Corapcioglu M.Y., Deposition of solids in drilling fluids on borehole walls, *Water resources research*, 1988. Vol.24, N.11. P.1893–1900.

109. Cussler E.L., *Diffusion mass transfer in fluid systems*. Cambridge University Press, 1997.

110. Davidson J.M., Chang R.K., Transport of picloram in relation to soil-physical conditions and porewater velocity, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 1972. Vol.36. P.257–261.

111. Davidson J.M., McDougal J.R., Experimental and predicted movement of three herbicides in a watersaturated soil, *J. Environ. Quality*, 1973. Vol.2. P.428–433.

112. De Marsily Ch., *Quantitative Hydrogeology. Groundwater Hydrogeology for Engineers*. Academic Press, Inc. 1986.

113. De Smedt F., Wierenga P.J., A general solution for solute flow in soils with mobile and immobile water, *Water resources research*, 1979a. Vol.15, N.5. P.1137–1141.

114. Desreumaux L., Chauveteau G., Martin M., Comportement des solutions de polymeres en milieu poreux, *Rev. Inst. Franc. Petrole*, 1971. Vol.26, N.6.

115. Elimelech M., Gregory J., Jia X., Williams R.A., *Particle Deposition and Aggregation. Measurement, Modelling and Simulation*. Butterworths – Heinemann, 1995.

116. Fetter C.W., *Contaminant Hydrogeology*. Second Edition. Waveland Press, Inc. 2008.

117. *Flow and Transport in Fractured Porous Media*. Dietrich, P.; Helmig, R.; Sauter, M.; Hötzl, H.; Köngeter, J.; Teutsch, G. (Eds.). Springer, 2005, 447 p.

118. Gärnerdinger A.P., Wagenet R.J., Van Genuchten M.Th., Application of two-site/two-region models for studying simultaneous nonequilibrium transport and degradation of pesticides, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1990. Vol.54, N.4. P.957–963.

119. Gaston L.A., Selim H.M., Transport of exchangeable cations in an aggregated clay soil, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1990. Vol.54. P.31–38.

120. Gaudet J.P., Jégat H., Vachaud G., Wierenga P.J., Solute transfer, with exchange between mobile and stagnant water, through unsaturated sand, *Soil Sci. Soc. Amer. J.*, 1977. Vol.41, N.4. P. 665–671.

121. Gogarty W.B., Mobility control with polymer solutions, *Soc. Petrol. Engrs J.*, 1967, vol. 7, №2.

122. Griffioen J.W., Barry D.A., Parlange J.-Y., Interpretation of two-region model parameters, *Water resources research*, 1998. Vol.34, N.3. P.373–378.

123. Gruesbeck C., Collins R.E., Entrainment and deposition of fine particles in porous media, *Society of Petroleum Engineers Journal*, December, 1982. P. 847–856.

124. Hashimoto I., Deshpande K.B., Thomas H.C., Peclet numbers and retardation factors for ion exchange columns, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, 1964. Vol.3. P.213–218.

125. Herzog J.P., Leclerc D.M., Le Goff P., Flow of suspensions through porous media: application to deep filtration, *Ind. Eng. Chem.*, 1970. Vol.62, N.5.

126. Ives K.J., Rapid Filtration, *J. Water Res.*, 1970. Vol.4, N.3.

127. Iwasaki T., Some notes on sand filtration, *J. Am. Water Works Assoc.*, 1937. Vol.29.

128. Jensenand R.P., Precece D.S., *Modeling of Sand Production with Darcy's Flow Coupled with Discrete Elements*, OSTI, 2000.

129. Johnson P.R., Elimelech M., Dynamics of colloid deposition in porous media: blocking based on random sequential adsorption. *Langmuir* 11, 1995.

130. Käss W., *Tracing Technique in Geohydrology*, A.A.Balkema Publishers. Rotterdam, Netherlands, 1998.
131. Kay B.D., Ehrick D.E., Adsorption and movement of lindane in soils, *Soil Sci.*, 1967. Vol.104. P.314–322.
132. Khuzhayorov B.Kh., A model of colmatation-suffosion filtration, *Journal of Porous Media*, 1999. Vol.2, N.2. P.163–172.
133. Khuzhayorov B.Kh., Auriault J.-L., Royer P. Derivation of macroscopic filtration law for transient linear visco-elastic fluid flow in porous media, *International Journal of Engineering Science*, 2000. Vol.38. P.487–504.
134. Khuzhayorov B.Kh., Auriault J.-L., Royer P. Macroscopic modelling of solute transport in porous media saturated by two immiscible liquids, "Poromechanics II", *Proceedings of the second international Biot conference on poromechanics*. A.A.Balkema publishers. 26–28.08.02. Grenoble. – France, 2002. P.473–479.
135. Khuzhayorov B.Kh., Elastico-plastical filtration with taking into consideration the destruction of the bed, 3-rd *European Fluid Mechanics Conference*. 1997. *Book of abstracts*. Göttingen. Germany. 15–18 Sept. 1997. P.181.
136. Khuzhayorov B.Kh., Filling and releasing kinetics of pores by particles, *Int. conf. "Porous media and its applications in science, engineering and industry"*. June 16–21. 1996. Hawaii. USA. 3 p.
137. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M., Flow of suspensions in 2D porous media with mobile and immobile liquid zones, *Journal of porous media*, 2010. Vol.13, N.5. P.423–437.
138. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M., Sulaymonov F.U., Mathematical Modelling of Solute Transport in a Medium, Consisting of Micro-porous and Macro-porous Zones, *Abstract Proceedings "International seminar on mathematics and natural sciences"* Samarkand, ISMNS 2013. P. 43–44.
139. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M., Turdiev M.F., Khamzina B.S., Colmatation-suffosion filtration of non-homogeneous liquids in porous media, *Association of universities of pre-Caspian States. "Science and Technology"*. *International Journal of Scientific Articles*. Atyrau, 2002. Part I. P.29–30.
140. Khuzhayorov B.Kh., Makhmudov J.M., Zikiryayev Sh.Kh., Modelling of solute transport processes in porous media with stagnant liquid zones, *Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries*, Almaty, June 30 – July 4, 2009. Vol.2. P.159.
141. Khuzhayorov B.Kh., Model of colmatage-suffosion filtration of disperse systems in a porous medium, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2000. V.73, N4. P.668–673.
142. Khuzhayorov B.Kh., Phenomenological model of suspension filtration, *International conference on flow through porous media: Fundamentals and reservoir engineering applications*. September 21–26. 1992. Moscow, 1992. P.81–84.
143. Khuzhayorov B.Kh., Rheologic properties of suspension with viscoelastic particles, *International Conference «Fluid Particle Interaction IV»*. 12–17.05.1996. Davos, Switzerland. 6 p.
144. Lapidus L., Amundson N.R., Mathematics of adsorption in beds. VI. The effect of longitudinal diffusion in ion exchange and chromatographic columns, *J. Phys. Chem.*, 1952. Vol.56. P.984–988.
145. Lindstrom F.T., Boersma L., Stockard D., A theory on the mass transport of previously distributed chemicals in a water saturated sorbing porous medium: Isothermal cases, *Soil Sci.*, 1971. Vol.112. P.291–300.
146. Lindstrom F.T., Haque R., Freed V.H., Boersma L., Theory on the movement of some herbicides in soils, *Environ. Sci. Tech.*, 1967. Vol.1. P.561–565.

147. Liu D., Johnson R.J., Elimelech M., Colloid deposition dynamics in-flow-through porous media: role of electrolyte concentration, *Environ. Sci. Technol.*, 1995. Vol.29. 2963.
148. Ma L., Selim H.M., Predicting atrazine adsorption-desorption in soils: A modified second order kinetic model, *Water resources research*, 1994a. Vol.30. P.447-456.
149. Maraga M.A., Prediction of mass-transfer coefficient for solute transport in porous media, *Journal of Contaminant Hydrology*, 2001. Vol.53, N.1-2. P.153-171.
150. Massel R., *Principles of Adsorption and Reaction on Solid Surfaces*. John Wiley and Sons, Inc., NY, 1996. - 804 pp.
151. Mazurek K.A., Chalaturnyk R.J., Rajaratnam N., Scott J.D., Transport of Fine Sand from a Wellbore, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 2002. Vol. 41, N.4. P.53-61.
152. McDowell-Boyer L.M., Hunt J.R., Sitar N., Particle transport through porous media, *Water resources research*, 1986. Vol.22, N.13. P.1901-1921.
153. Nkedi-Kizza P., Biggar J.W., Selim H.M., Van Genuchten M.Th., Wierenga P.J., Davidson J.M., Nielsen D.R., On the equivalence of two conceptual models for describing ion exchange during transport through an aggregated oxisol, *Water resources research*, 1984. Vol.20, N.8. P.1123-1130.
154. Oddson J.K., Letey J., Weeks L.V., Predicted distribution of organic chemicals in solution and adsorbed as a function of position and time for various chemical and soil properties, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 1970. Vol.34. P.412-417.
155. Otis Corporation. *Sand Control Handbook*, Dallas, 1990.
156. Padilla I.J., Jim Yeh T.-C., Conklin M.H., The effect of water content on solute transport in unsaturated porous media, *Water resources research*, 1999. Vol.35, N.11. P.3303-3313.
157. Papamichos E., Vardoulakis I., Sand erosion with a porosity diffusion law, *Computers and Geotechnics*, 2005. Vol.32, N.1. P.47-58.
158. Parker J.C., Van Genuchten M.Th., Determining transport parameters from laboratory and field tracer experiments, *Virginia Agricultural Experiment Station, Virginia Polytechnic Institute and State University, Bulletin 84-3*, 1984, p. 97.
159. Penberthy W.L., Shaughnessy C.M., Sand Control, *SPE Series on Special Topics*, 1992. Vol.1.
160. Piquemal J., On the modelling of miscible displacement in porous media with stagnant fluid, *Transport in Porous Media*, 1992. Vol.8, N.3. P.243-262.
161. Rajagopalan R., Chu R.Q., Dynamics of adsorption of colloidal particles in packed beds, *J. Colloid Interface Sci.*, 1982. Vol.86. 292.
162. Rao P.S.C., Davidson J.M., Jessup R.E., Selim H.M., Evaluation of conceptual models for describing nonequilibrium adsorption-desorption of pesticides during steady-flow in soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1979. Vol.43, N.1. P.22-28.
163. Rao P.S.C., Jessup R.E., Addiscott T.M., Experimental and theoretical aspects of solute diffusion in spherical and nonspherical aggregates, *Soil Science*, 1982. Vol.133, N.6. P.342-349.
164. Rao P.S.C., Jessup R.E., Rolston D.E., Davidson J.M., Kilcrease D.P., Experimental and mathematical description of nonadsorbed solute transfer by diffusion in spherical aggregates, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980a. Vol.44, N.4. P.684-688.
165. Rao P.S.C., Rolston D.E., Jessup R.E., Davidson J.M., Solute transport in aggregated porous media: Theoretical and experimental evaluation, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1980. Vol.44, N.6. P.1139-1146.
166. Rasmuson A., Diffusion and sorption in particles and two-dimensional dispersion in a porous medium, *Water resources research*, 1981. V.17, N.2. P. 321-328.

167. Rasmuson A., Neretnieks I., Exact solution of a model for diffusion in particles and longitudinal dispersion in packed beds, *AIChE Journal*, 1980. Vol. 26. N.686.
168. Saniini M., *Applications of Percolation Theory*, Taylor&Francis. 1993.
169. Sahimi M., *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock. From Classical Methods to Modern Approaches*. Second, Revised and Enlarged Edition. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. 2011.
170. Selim H.M., Amacher M.C., A second-order kinetic approach for modeling solute retention and transport in soils, *Water resources research*, 1988. Vol.24. P.2061–2075.
171. Selim H.M., Amacher M.C., *Reactivity and Transport of Heavy Metals in Soils*. Lewis Publishers, Boca Raton, FL. 1996.
172. Selim H.M., Buchter B., Hinz C., Ma L., Modeling the transport and retention of cadmium in soils: Multireaction and multicomponent approaches, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1992. Vol.56, N.4. P.1004–1015.
173. Selim H.M., Davidson J.M., Mansell R.S., Evaluation of a two-site adsorption-desorption model for describing solute transport in soils, *Paper presented at Summer Computer Simulation Conference, Am. Inst. of Chem. Engng.*, Washington DC. 1976.
174. Selim H.M., Ma L., Transport of reactive solutes in soils: A modified two-region approach, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1995. Vol.59, N.1. P. 75–82.
175. Selim H.M., Schulin R., Fluhler H., Transport and ion exchange of calcium and magnesium in an aggregated soil, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1987. Vol.51. P.876–884.
176. Shapiro A.A., Bedrikovetsky P.G., A stochastic theory for deep bed filtration accounting for dispersion and size distributions. *Physica A*, 2010. Vol.389. P.2473–2494.
177. Shapiro A.A., Bedrikovetsky P.G., Santos A., Medvedev O.O., A stochastic model for filtration of particulate suspensions with incomplete pore plugging, *Transport in Porous Media*, 2007. Vol.67. P.135–164. DOI 10.1007/s11242-006-0029-5.
178. Shapiro A.A., Yuan H., Application of stochastic approaches to modeling suspension flow in porous media, *Statistical mechanics and random walks*, Editors: A. Skogseit, V. Fasano, Nova Science Publisher, Inc. 2012. P.1–37.
179. Sumai G.O.Jr., Ellis R.C., Snyder R.E., *Sand Control Handbook, Second Edition*, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 1991.
180. Swanson R.A., Dutt G.R., Chemical and physical processes that affect atrazine movement and distribution in soil systems, *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 1973. Vol.37. P.872–876.
181. Tien C., *Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols*, Butterworth Publishing Co., Boston. 1989.
182. Tien C., Ramarao B.V., *Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols, Second edition*. Elsevier Sciences & Technology Books. 2007.
183. Vaidyanathan R., Tien C., Hydrosol deposition in granular media under unfavorable surface conditions, *Chem. Eng. Sci.*, 1991. Vol.46. 967.
184. Van Genuchten M.Th., Davidson J.M., Wierenga P.J., An evaluation of kinetic and equilibrium equations for the prediction of pesticide moment through porous media, *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 1974. Vol.38. N.1. P.29–35.
185. Van Genuchten M.Th., Tang D.H., Guennelon R., Some Exact Solutions for Solute Transport Through Soils Containing Large Cylindrical Macropores, *Water resources research*, 1984. Vol.20, N.3. P.335–346.
186. Van Genuchten M.Th., Wagenet R.J., Two-site/two-region models for pesticide transport and degradation: Theoretical development and analytical solutions, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 1989. Vol.53, N.5. P.1303–1310.

187. Van Genuchten M.Th., Wierenga P.J., Mass Transfer Studies in Sorbing Porous Media I. Analytical Solution, *Soil Science Society of America Journal*, 1976. Vol. 40, N.4. P.473–480.
188. Van Golf-Racht T.D., *Fundamental of fractured reservoir engineering*, Amsterdam, Elsevier, 1982.
189. Vardoulakis I., Stavropoulou M., Papanastasiou P., Hydromechanical aspects of the sand production problem, *Transport in Porous Media*, 1996. Vol.22, N.2. P.225–244.
190. Veeken C.A.M. et al., Sand Production Prediction Review: Developing an Integrated Approach, *SPE Paper*, 1991. N.22792.
191. Wennberg K.E., Batrouni G.G., Hansen A., Horsrud P., Band formation in deposition if fines in porous media, *Transport in Porous Media*, 1996. Vol. 25, N.3. P. 247–273.
192. Yarloug W., Carl C.C., Enhanced Oil Production Owing to Sand Flow in Conventional and Heavy-Oil Reservoirs, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering (SPE)*, October 2001: 366–374.
193. Zamani A., Maini B., Flow of dispersed particles through porous media – Deep bed filtration, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2009. Vol.69. P.71–88.

B. Kh. Khuzhayorov, J. M. Makhmudov. Mathematical models of non-homogeneous liquids filtration in porous media (Summary)

The book is devoted to the mathematical modeling of filtration of non-homogeneous liquids in porous media. In the consecutive order several filtration problems of non-homogeneous liquids in porous media are considered. At the beginning of the Chapter 1 a brief review of the approaches used at modeling of non-homogeneous liquids filtration in porous media is given. It is established that phenomenological approaches of modeling are based on the use of balance equations, kinetics of particles deposition processes, as well as generalized Darcy's law. The similar approaches are used here at the modeling of colmatation-suffosion filtration of disperse systems in porous media. In the second paragraph some descriptions of works devoted to models of two-zone filtration and solute transport are given. To estimate the role of transversal diffusion on the basis of existing experimental data characteristic values of the ratio of longitudinal diffusion to transversal one are given. A problem of filtration of non-homogeneous liquids in porous media consisting of two zones, in one of which liquid is mobile, and in another one — is immobile, is numerically solved.

In the Chapter 2 two-dimensional problems of non-homogeneous liquids (suspensions) filtration in two-zone porous media with different filtration-capacity properties of zones and saturated with initially pure mobile and immobile liquid, respectively, are investigated at different liquid inlet conditions on the boundary of the considering area, in particular, point-like and strip-like inlet sources. As a consequence, in the zones of the media both fluid flow and solid particles transport occurs with different intensity. Between the zones particles exchange, but not fluid exchange, can occur and it usually leads to the considerably change of filtration and particles transport characteristics. Several cases of the non-homogeneous liquid inlet through boundary of the filtration domain are considered. For the point-like and strip-like liquid injection regimes two-dimensional colmatation-suffosion filtration problems are numerically solved. Problems with the new parameter — limiting suffosion pressure gradient (LSPG) are also numerically solved.

In the Chapter 3 suspension filtration problems in two-zone porous media are analyzed on the basis of generalized balance equations offered earlier by Y.M. Shekhtman that use more general schematization of porous volume saturation. In distinguish of previous works here various deposited mass volumes and correspondent concentration fields are introduced. Mass balance equation with respect suspended solid particles concentration in the moving liquid is written with taking into consideration kinetics of deposited mass in the friable body. Various regimes of fluid inlet through boundary of the medium are considered: point-like, strip-like injection, inlet through all width of the boundary etc. In several paragraphs some colmatation-suffosion problems are considered with LSPG.

In the beginning of Chapter 4 a brief review on adsorption phenomena at the convective-diffusive solute transport is presented. Then solute transport problems in porous media saturated with mobile and immobile liquid are numerically solved for various laws of adsorption and intrinsic mass-exchange (linear, nonlinear, equilibrium, non-equilibrium). Solute concentration profiles in the moving liquid, adsorbed mass concentration, solute mass-exchange between two zones and other filtration and transport characteristics are determined. In the separate paragraph a solute transport problem with two-site adsorption is investigated, where the total area of adsorption is divided into two parts, in one of which the adsorption is equilibrium and in another one – non-equilibrium. The influence of two-site adsorption on solute transport characteristics is estimated. In the end of Chapter a problem with a given condition on the wetting front is investigated. Distinctions of this problem from conventional statements are discussed.

In Chapter 5 non-homogeneous fluid flow and solute transport in non-homogeneous cylindrical medium with a cylindrical macropore are investigated. The medium consists of two concentric cylinders in which the interior cylinder has relatively high filtration and transport properties (macropore), and the external one, in contrary, – relatively low properties (micropore). Solute transport problems are considered by using two approaches – diffusional and kinetic. Such values of the rate coefficient in the kinetic equation for which both approaches yield close results are determined. In the following paragraphs these problems are solved for different adsorption laws, linear and non-linear equilibrium, linear and non-linear non-equilibrium.

To solve problems numerical methods, namely the finite differences

method, are used. Numerical solutions and corresponding algorithms are constructed with controlling their stability, for two-dimensional problems economic finite difference schemes are composed. To make easy understanding of received results a large number of figures for the wide range of initial parameters are placed.

This book is intended for scientists and researchers in fluid and gas mechanics, applied mathematics, petroleum, chemical, and environmental engineers, physicists involved in mathematical modeling of filtration processes, and for the undergraduate senior and graduate applied mathematics, mechanics students. The book can be used in special training courses for B.S. and M.S. students, and at the preparation of graduate qualification works and Masters degree theses in "Numerical mathematics" and «Applied mathematics», "Mathematical modeling", "Mechanics" etc.

CONTENTS

INTRODUCTION	3
CHAPTER 1. Colmatation-suffosion filtration in porous media with mobile and immobile liquid	7
1.1. Filtration of non-homogeneous liquids in porous media	8
1.2. Two-zones approach for solute transport processes in porous media ..	13
1.3. Transversal convective diffusion	23
1.4. A colmatation-suffosion filtration problem in porous media with mobile and immobile liquid	26
CHAPTER 2. Two-dimensional problems of filtration and solute transport in porous media with mobile and immobile liquid and point-like, strip-like sources	54
2.1. Colmatation-suffosion filtration in two-dimensional area with point-like source	54
2.2. Two-dimensional problem with strip-like source	72
2.3. Solute transport in two-dimensional area with limiting suffosion pressure gradient (LSPG)	82
2.4. Two-dimensional filtration with LSPG and strip-like source	93
CHAPTER 3. Suspension filtration problems in porous media with mobile and immobile liquid on the basis of generalized equation.....	105
3.1. Colmatation-suffosion filtration in porous media with mobile and immobile liquid	105
3.2. Filtration at point-like injection of liquid	119
3.3. Filtration at strip-like injection of liquid	132
3.4. Colmatation-suffosion filtration with LSPG	144
3.5. Colmatation-suffosion filtration with LSPG at point-like inlet of liquid	156
3.6. Inlet of liquid through strip-like part of boundary with LSPG	157

CHAPTER 4. Suspension filtration and solute transport in heterogeneous porous media with relict water and transit pores at equilibrium and non-equilibrium adsorption 167

4.1. Adsorption at convective-diffusive solute transport in porous media ...	167
4.2. Solute transport in porous media saturated with mobile and immobile liquid	176
4.2.1. <i>Linear kineticss of adsorption and intrinsic mass exchange</i>	177
4.2.2. <i>Non-linear kinetics of adsorption and linear kinetics of intrinsic mass exchange</i>	189
4.2.3. <i>Linear kinetics of adsorption and non-linear kinetics of intrinsic mass exchange</i>	194
4.2.4. <i>Non-linear kineticss of adsorption and intrinsic mass exchange</i> ..	194
4.3. Solute transport in heterogeneous porous media with two-site adsorption.....	203
4.3.1. <i>Linear kineticss of adsorption and intrinsic mass exchange</i>	205
4.3.2. <i>Linear kinetics of adsorption and non-linear kinetics of intrinsic mass exchange</i>	205
4.3.3. <i>Non-linear kinetics of adsorption and linear kinetics of intrinsic mass exchange</i>	214
4.3.4. <i>Non-linear kineticss of adsorption and intrinsic mass exchange</i> ..	214
4.4. A problem with condition on the wetting front	214

CHAPTER 5. Solute transport in non-homogeneous cylindrical media .. 229

5.1. Solute transport in cylindrical media with cylindrical macropore by using diffusional and kinetic approaches	229
5.2. Solute transport in cylindrical media with cylindrical macropore with linear adsorption	239
5.3. Solute transport in cylindrical media with cylindrical macropore with non-equilibrium adsorption	246
5.1. Solute transport in cylindrical media with cylindrical macropore with non-linear adsorption	254

REFERENCES 262

B. Kh. Khuzhayorov, J. M. Makhmudov. Mathematical models of non-homogeneous liquids filtration in porous media (Summary).....	275
---	-----

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
ГЛАВА 1. Колматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью	7
1.1. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористой среде	8
1.2. Двухзонный подход в процессах переноса веществ в пористой среде	13
1.3. Поперечная конвективная диффузия	23
1.4. Колматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью	26
ГЛАВА 2. Решение двумерных задач фильтрации суспензии и переноса вещества в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью с точечным и полосообразным источниками	54
2.1. Колматационно-суффозионная фильтрация в двумерной области с точечным источником	54
2.2. Двумерная задача с полосообразным источником	72
2.3. Перенос вещества в двумерной области с учетом предельного суффозионного градиента давления (ПСГД)	82
2.4. Двумерная фильтрация с ПСГД в случае полосообразного источника	93
ГЛАВА 3. Решение задач фильтрации суспензии в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью на основе обобщенного уравнения	105
3.1. Колматационно-суффозионная фильтрация в пористой среде с подвижной и неподвижной жидкостью	105
3.2. Фильтрация в случае точечного режима подачи смеси	119
3.3. Фильтрация при подаче неоднородной жидкости через полосу	132
3.4. Колматационно-суффозионная фильтрация с учетом предельного суффозионного градиента давления	144
3.5. Задача с точечной подачей смеси с учетом ПСГД	156
3.6. Подача жидкости через отрезок границы области с учетом ПСГД	157

Глава 4. Фильтрация суспензии и перенос вещества в гетерогенной пористой среде со связанной водой и транзитными порами с учетом равновесной и неравновесной адсорбции..... 167

4.1. Адсорбция при конвективно-диффузионном переносе веществ в пористой среде	167
4.2. Перенос вещества в пористой среде, насыщенной неподвижной и подвижной жидкостью	176
4.2.1. <i>Линейная кинетика адсорбции и внутреннего массообмена</i>	177
4.2.2. <i>Нелинейная кинетика адсорбции и линейная кинетика внутреннего массообмена</i>	189
4.2.3. <i>Линейная кинетика адсорбции и нелинейная кинетика внутреннего массообмена</i>	194
4.2.4. <i>Нелинейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена</i>	194
4.3. Перенос вещества в гетерогенной пористой среде в случае двухместной адсорбции	203
4.3.1. <i>Линейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена</i> ...	205
4.3.2. <i>Линейная кинетическая адсорбция, нелинейный кинетический внутренний массообмен</i>	205
4.3.3. <i>Нелинейная кинетика адсорбции, линейная кинетика внутреннего массообмена</i>	214
4.3.4. <i>Нелинейные кинетики адсорбции и внутреннего массообмена</i>	214
4.4. Задача с условием на фронте смачивания	214

ГЛАВА 5. Перенос вещества в неоднородной цилиндрической среде 229

5.1. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с использованием диффузионных и кинетических подходов	229
5.2. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом равновесной адсорбции	239
5.3. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом неравновесной адсорбции	246
5.4. Перенос вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой с учетом нелинейной адсорбции	254

ЛИТЕРАТУРА..... 262

B. Kh. Khuzhayorov, J. M. Makhmudov. Mathematical models of non-homogeneous liquids filtration in porous media (Summary).....	275
---	-----

35.113

X-98

Хужаёров Б. Х.

Математические модели фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах / Б. Х. Хужаёров, Ж. М. Махмудов; отв. ред. Ж. А. Акилов. МВССО РУз, Самаркандский гос. университет. – Ташкент: Фан, 2014. – 280 с.

ISBN 978-9943-19-289-8

УДК 532.546

ББК 35.113

Утверждено к печати Ученым советом Самаркандского государственного университета Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан

Редактор: Н.Н.Рамазанов

Корректор: М.Кадырова

Технический редактор, верстка: Д.Абдуллаев

Издательство «Фан» АН РУз. 100170, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81.

Тел.: (+99890) 944-81-17, 955-11-86.

E-mail: fannashriyot@yandex.com

Лицензия издательства АИ №138, 27.04.2009 г.

Изд. № 3-7. Сдано на верстку 28.11.2013. Оригинал-макет подписан в печать 21.04.2014. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Формат 60x84^{1/16}. Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 16,0. Усл.-печ. л. 16,27.

Тираж 100 экз. Цена договорная.

Отпечатано в типографском отделе Издательства «Фан» АН РУз.

Заказ № 10.

100170, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81

Переплетено в типографии ООО «KO'NI-NUR».

100097, Ташкент, пр. Бунёдкор, 44.

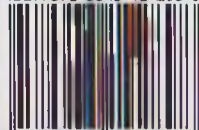


Бахтиёр Хужаёрович Хужаёров – доктор физико–математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» СамГУ им. Алишера Навои. Специалист по механике жидкости и газа. Область научных интересов: механика неньютоновских систем, математическое моделирование процессов движения жидкости и переноса веществ, релаксационная фильтрация в пористых и трещиновато-пористых средах, фильтрация и фильтрование неоднородных жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах, обратные некорректные задачи механики жидкости, нефтегазовая гидромеханика, проектирование разработки нефтяных и нефтегазовых месторождений. Автор более 270 научных работ, в т.ч. 4 монографий и одного учебного пособия, а также более 15 успешно реализованных проектов разработки нефтяных и нефтегазовых месторождений Узбекистана.



Жамол Махмудович Махмудов – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» СамГУ им. Алишера Навои. Специалист по механике жидкости и газа. Область научных интересов: математическое моделирование процессов движения жидкости и переноса веществ, релаксационная фильтрация в пористых и трещиновато-пористых средах, фильтрация и фильтрование неоднородных жидкостей в пористых и трещиновато-пористых средах, нефтегазовая гидромеханика. Автор более 40 научных работ.

ISBN 978-9943-19-289-8



9 789943 192898