

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРАВЛИКА



ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРАВЛИКА

Допущено

*Министерством высшего и среднего
специального образования СССР*

в качестве учебника

для студентов вузов, обучающихся по специальности

«Технология и комплексная механизация

разработки нефтяных и газовых месторождений»

Библиотека кафедры
гидромеханики МГУ



МОСКВА "НЕДРА" 1986

Подземная гидравлика: Учебник для вузов/К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. — М.: Недра, 1986, 303 с.

Приведена гидродинамическая теория однофазной и многофазной фильтрации жидкостей и газов в однородных и неоднородных пористых и трещиноватых средах. Рассмотрены стационарная и нестационарная фильтрация и методы расчета интерференции совершенных и несовершенных скважин. Впервые изложены теория фильтрации неньютоновских жидкостей, термодинамика фильтрационного потока, теория «укрупненной» газовой скважины. Даны методы моделирования технологических процессов, связанных с повышением нефте- и газоотдачи пластов, и примеры решения задач фильтрации с использованием электронно-вычислительных машин.

Для студентов нефтяных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Технология и комплексная механизация разработки нефтяных и газовых месторождений».

Табл. 6, ил. 126, список лит.— 23 назв.

Авторы: К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина, В. М. Максимов

Рецензенты: кафедра гидравлики Ухтинского индустриального института, В. М. Енгов, д-р техн. наук (Институт проблем механики АН СССР)

Подземная гидравлика — наука о движении жидкостей, газов и их смесей в пористых и трещиноватых горных породах. Она является той областью гидромеханики, в которой рассматривается не движение жидкостей и газов вообще, а особый вид их движения — фильтрация, которая имеет свои специфические особенности. Она является теоретической основой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

Начало развитию подземной гидравлики было положено французским инженером А. Дарси, который в 1856 г. сформулировал и опубликовал обнаруженный им экспериментально закон, в соответствии с которым скорость фильтрации прямо пропорциональна градиенту давления.

Значительный вклад в развитие подземной гидравлики сделан Ч. Слехтером, рассмотревшим модели идеального и фиктивного грунта и показавшим, что пористость и просветность фиктивного грунта зависят не от диаметра частиц, а лишь от плотности их укладки.

В конце XIX в. Н. Е. Жуковский опубликовал работу «Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод». Им впервые выведены дифференциальные уравнения фильтрации, показано, что напор как функция координат удовлетворяет уравнению Лапласа, указано на математическую аналогию теплопроводности и фильтрации.

Н. Н. Павловскому принадлежит определяющая роль в развитии теории фильтрации в гидротехническом направлении, введении критерия Рейнольдса в подземную гидродинамику.

Существенный вклад в развитие теории фильтрации грунтовых вод внесла академик П. Я. Полубаринова-Кочина.

В начале 20-х годов XX в. начала развиваться нефтегазовая подземная гидромеханика. Основателем этого направления в теории фильтрации в СССР стал академик Л. С. Лейбензон. Ему принадлежит приоритет в постановке и решении ряда задач подземной гидрогазомеханики. Им проведены первые исследования по проблеме вытеснения газированной жидкости, созданы основы теории фильтрации природных газов. В 1934 г. он опубликовал первую в мировой литературе обширную монографию «Нефтепромысловая механика», в которой систематически изложены основы подземной гидравлики.

Дальнейшее развитие нефтегазовой подземной гидромеханики в СССР связано с именами многочисленных учеников академика Л. С. Лейбензона. Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли академик С. А. Христианович, профессора Б. Б. Лапук, И. А. Чарный, В. Н. Щел-

качев. Написанные ими монографии и учебники стали классическими, основополагающими. Они имеют большое научно-методическое значение. Следует отметить также учебные пособия по нефтяной подземной гидравлике А. М. Пирвердяна и Г. Б. Пыхачева.

В послевоенный период теория фильтрации нефти, газа и воды развивается трудами советских ученых, среди которых следует отметить работы М. Т. Абасова, И. М. Аметова, Г. И. Баренблатта, Ю. П. Борисова, С. Н. Бузинова, Г. Г. Вахитова, М. М. Глоговского, Г. Л. Говоровой, А. Т. Горбунова, М. А. Гусейн-Заде, В. Л. Данилова, Ю. В. Желтова, Ю. П. Желтова, С. Н. Закирова, Г. А. Зотова, В. М. Ентова, Р. Г. Исаева, Ю. П. Коротаева, Е. М. Минского, А. К. Курбанова, Ю. М. Молоковича, А. Х. Мирзаджанзаде, Н. Н. Непримерова, В. Н. Николаевского, А. М. Пирвердяна, Г. Б. Пыхачева, Г. В. Рассохина, М. Д. Розенберга, Э. В. Соколовского, М. Л. Сургучева, М. М. Саттарова, Ф. А. Требина, Э. Б. Чекалюка, М. В. Филинова, М. И. Швидлера, И. Д. Умрихина, А. Л. Хейна. Работы этих ученых и их учеников обеспечили успешное развитие подземной гидрогазомеханики, явившейся теоретической основой теории и практики разработки нефтяных и газовых месторождений, что обеспечило ускоренное развитие нефтегазодобывающей промышленности нашей страны.

За рубежом также ведутся широкие исследования в области нефтегазовой подземной гидрогазомеханики. Стали классическими экспериментальные исследования, проведенные в США еще в 30-е годы Р. Виковым и Г. Ботсетом по изучению фазовых проницаемостей. Существенное значение имеют основы теории двухфазной фильтрации, предложенные С. Баклеем и М. Левереттом. В области теории упругого режима и фильтрации неоднородных жидкостей известны труды М. Маскета. Значительное влияние на развитие теории фильтрации оказала работа А. Ван Эвердингена и У. Херста о притоке упругой жидкости к скважине. Большое значение имеет фундаментальная работа Р. Коллинза, посвященная течению жидкостей через пористые материалы. Монографии по подземной гидрогазомеханике изданы во Франции А. Упёром, в Канаде — А. Э. Шейдеггером, Х. Азизом и Э. Сеттари, в СРР — Н. Кристеа.

В последнее десятилетие нефтегазовая подземная гидрогазомеханика получает дальнейшее развитие под влиянием новых актуальных задач, выдвигаемых практикой разработки нефтяных и газовых месторождений, усложнением горно-геологических и термобарических условий их залегания и эксплуатации.

В связи с этим интенсивно развиваются:

теория многофазной многокомпонентной фильтрации флюидов в деформируемых неоднородных пластах;

физико-химическая гидродинамика и гидродинамика новых методов извлечения нефти и газа из недр;

подземная гидродинамика неньютоновских жидкостей;

подземная гидротермодинамика и некоторые другие специальные разделы теории фильтрации нефти и газа.

Для гидродинамического исследования этих вопросов приме-

няют широко развитый аппарат математической физики, а также вероятностно-статистические и другие методы.

Огромное значение для развития этих исследований имеет широкое использование возможностей современной вычислительной техники. В настоящее время получает интенсивное развитие новый раздел нефтегазовой подземной гидромеханики — вычислительная подземная гидрогазомеханика. Некоторые из этих новых вопросов нашли отражение в предлагаемом вниманию учебнике, написанном преподавателями кафедры нефтегазовой и подземной гидромеханики МИНГ им. И. М. Губкина.

При написании книги авторы исходили из следующих трех основных концепций.

1. Современное состояние и перспективы дальнейшего развития нефтяной и газовой промышленности характеризуются переходом на интенсивные методы разработки месторождений, усложнением горно-геологических условий их эксплуатации и в связи с этим многообразием гидродинамических, термических и физико-химических методов воздействия на природные резервуары и насыщающие их флюиды в целях повышения степени извлечения углеводородов из недр. Все это требует от инженера-разработчика глубоких знаний в области подземной гидравлики.

2. В свете сказанного в студенческом курсе подземной гидравлики должны быть представлены не только фундаментальные основы дисциплины, но и современные научные разработки. Поэтому в учебник включены разделы, которые до настоящего времени в курсе не читались и в учебных пособиях не излагались (физико-химическая подземная гидравлика, фильтрация неньютоновских жидкостей и т. д.).

3. Практика показывает, что проектирование разработки нефтяных и газовых месторождений в настоящее время не может обойтись без существенного использования электронно-вычислительной техники. Видно, что применение ЭВМ будет в дальнейшем расширяться. Поэтому в курсе показано, как доводятся до расчетов на ЭВМ решения основных задач нефтегазовой подземной гидромеханики.

В заключение авторы выражают благодарность тем, кто помог им в создании этого учебника. Большую помощь при написании гл. 10 оказал канд. техн. наук П. Г. Бедриковецкий, а гл. 13 — канд. физ.-мат. наук Г. П. Цыбульский. Авторы выражают искреннюю благодарность проф. Г. И. Баренблатту и проф. А. К. Курбанову, просмотревшим некоторые разделы учебника и сделавшим ценные замечания по улучшению их содержания. Авторы благодарны Н. А. Поповой, З. А. Сухотиной, Н. А. Таировой, А. Я. Требиной за большую помощь, оказанную при подготовке рукописи книги.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФЛЮИДОВ В ПРИРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Нефть и природные газы заключены в недрах Земли. Скопления их теснейшим образом связаны с вмещающими горными породами, а также со структурными и другими особенностями пластов. Горные породы, которые могут служитьместилищем нефти и газа и в то же время отдавать их при разработке, называются породами-коллекторами.

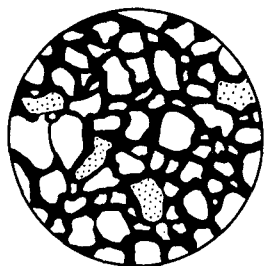


Рис. 1.1. Шлиф нефтенасыщенного песчаника

Природные жидкости (нефть, газ, подземные воды) находятся в основном в пустотах — порах и трещинах осадочных горных пород. Их движение происходит либо вследствие естественных процессов (миграция углеводородов), либо в результате деятельности человека, связанной с извлечением полезных ископаемых и эксплуатацией гидротехнических сооружений. Движение жидкостей, газов и их смесей через твердые тела (вообще говоря, деформируемые) по связанным между собой порам или трещинам называется фильтрацией. Теория фильтрации, являющаяся разделом механики сплошных сред, получила большое развитие в связи с потребностями гидротехники, гидромелиорации, гидрогеологии, горного дела, нефтегазодобычи, химической технологии и т. д. Теоретической основой разработки нефтегазоводоносных пластов является нефтегазовая подземная гидромеханика, изучающая фильтрацию нефти, газа и воды в пористых и (или) трещиноватых горных породах.

Движение флюидов в проницаемых толщах осадочных горных пород обуславливает особенности, существенно отличающие методы изучения нефтегазовой подземной гидромеханики не только от обычной гидродинамики (движение жидкостей в открытом пространстве), но и от способов исследования других процессов фильтрации (например, в химической технологии или гидротехнике).

Поровое пространство осадочных горных пород — сложная нерегулярная система сообщающихся межзеренных пустот, в которой трудно выделить отдельные поровые каналы (рис. 1.1). Размеры пор в песчаных породах составляют обычно единицы или десятки микрометров (мкм). Еще сложнее поровое пространство карбонатных пород (известняков, доломитов), которое характеризуется

более неоднородной системой первичных пор, а также наличием трещин, каналов и каверн, возникших после образования самой породы.

Строение нефтяных и газовых залежей осложняется значительной неоднородностью пород, слоистостью их строения, наличием тектонических нарушений (разрывов сплошности породы). Разведка месторождений, исследование пластов, извлечение нефти и газа осуществляются через отдельные скважины диаметром 100—200 мм, отстоящие друг от друга на сотни метров.

Теорию фильтрации нефти и газа в природных пластах характеризуют следующие особенности.

1. Невозможность изучать движение флюидов в пластах прямыми обычными методами гидродинамики, т. е. путем решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представленной совокупностью всех пор.

2. Сочетание разных масштабов, определяемых различными характерными размерами, отличающимися на многие порядки: размером пор (единицы и десятки микрометров), диаметром скважин (десятки сантиметров), расстоянием между скважинами (сотни метров), протяженностью месторождений (десятки километров). Масштаб неоднородности пластов вдоль и поперек их простираения может иметь практически любые значения.

3. Ограниченность и неточность сведений о строении и свойствах пластов и пластовых флюидов, не позволяющие построить однозначную модель пластовой залежи.

Эти особенности приводят к формулировке основных модельных представлений и разработке методов подземной гидравлики, направленных прежде всего на установление качественных закономерностей процессов и на создание расчетных схем, мало чувствительных к точности исходных данных. При этом познавательная и практическая ценность получаемых результатов в значительной степени определяется четкостью постановки расчетной задачи и глубиной предварительного анализа имеющихся данных.

§ 2. ПОРИСТАЯ СРЕДА И ЕЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Под пористой средой подразумевается множество твердых частиц, тесно прилегающих друг к другу, сцементированных или несцементированных, пространство между которыми (поры, трещины) может быть заполнено жидкостью или газом.

Поровое пространство природного пласта ввиду сложности и нерегулярности его структуры можно рассматривать как систему с большим числом однородных элементов, слабо связанных между собой. Из статистической физики известно, что такие системы могут быть описаны как некоторые сплошные среды, свойства которых не выражаются через свойства составляющих элементов, а являются усредненными характеристиками достаточно больших объемов среды. Таким образом, в теории фильтрации, как и в гид-

родинамике, принимается, что пористая среда и насыщающие ее флюиды образуют сплошную среду, т. е. заполняют любой выделенный элементарный объем непрерывно. Это накладывает определенные ограничения на понятие элементарного объема порового пространства. Под элементарным объемом понимают объем, в котором заключено большое число пор и зерен, так что он достаточно велик по сравнению с размерами пор и зерен породы. Для него вводятся локальные усредненные характеристики системы флюид—пористая среда. В применении к меньшим объемам выводы теории фильтрации становятся несправедливыми.

Если объем пор при изменении давления жидкости в них не изменяется, то такая пористая среда считается недеформируемой. Если же изменением объема порового пространства пренебречь нельзя, то такую пористую среду следует рассматривать как упругую. Плотные песчаники или известняки, перебитые мелкими трещинами, образуют трещиновато-пористую среду.

Одна из важнейших характеристик пористой среды — пористость, измеряемая коэффициентом пористости.

Коэффициент пористости m есть отношение объема пор V_p в некотором элементе пористой среды ко всему объему V данного элемента:

$$m = V_p/V. \quad (1.1)$$

Наряду с пористостью иногда вводится понятие просветности (площадной пористости), под которой понимается отношение площади просветов ω_p в некотором сечении пористой среды ко всей площади этого сечения ω .

Просветность измеряется коэффициентом просветности

$$n = \omega_p/\omega. \quad (1.2)$$

Можно доказать, что в данной точке пласта просветность не зависит от выбора направления сечения и равна пористости ($n = m$).

Коэффициент пористости одинаков для геометрически подобных сред; он не характеризует размеры пор и структуру порового пространства. Поэтому для описания пористой среды необходимо ввести также некоторый характерный размер порового пространства. Существуют различные равноценные способы определения этого размера. Естественно, например, за характерный размер принять некоторый средний размер порового канала d или отдельного зерна пористого скелета.

Первые теоретические исследования порового пространства проводились с помощью идеализированных моделей грунта, называемых идеальным и фиктивным грунтами. Под идеальным грунтом понимается модель пористой среды, поровые каналы которой представляют собой пучок тонких цилиндрических трубок (капилляров) с параллельными осями. Фиктивным грунтом называется модель пористой среды, состоящая из шариков одинакового диаметра. В конце прошлого столетия американский гидрогеолог

Ч. Сликтер развил упрощенную теорию фильтрации, позволяющую сравнивать движение жидкости по поровым каналам с течением жидкости по цилиндрическим трубкам. Основываясь на модели фиктивного грунта, он рассмотрел также геометрическую задачу, позволяющую связать пористость с углами, образованными радиусами соприкасающихся шаров, моделирующих пористую среду, при их различной упаковке.

Простейшим геометрическим параметром, характеризующим размер порового пространства, является эффективный диаметр $d_{\text{эф}}$ частиц грунта. Его можно определить в результате механического анализа грунта. Эффективным диаметром частиц, слагающих реальную пористую среду, называется такой диаметр шаров, образующих фиктивный грунт, при котором гидравлическое сопротивление, оказываемое фильтрующейся жидкостью в реальном и эквивалентном фиктивном грунте, одинаково. Однако на практике эффективный диаметр зерен $d_{\text{эф}}$ определить трудно (особенно для сцементированных песчаников). Поэтому теория Ч. Сликтера не нашла широкого практического применения.

Для определения геометрической структуры пористой среды, существенно влияющей на фильтрационные параметры, кроме пористости и эффективного диаметра, нужны дополнительные объективные характеристики. Определенную информацию о микроструктуре порового пространства дают кривые распределения размеров пор и зерен. Поэтому предпринимались многочисленные попытки определения геометрических и гидродинамических характеристик пористой среды на основе кривых распределения. Однако зависимости характеристик пористой среды от параметров кривых распределения не могут быть универсальными.

§ 3. СКОРОСТЬ ФИЛЬТРАЦИИ. ЗАКОН ДАРСИ — ЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ

Основной характеристикой фильтрационного движения является вектор скорости фильтрации $\vec{w}$, который определяется следующим образом. Выберем произвольную точку M пористого пласта, через который фильтруется жидкость, и проведем через нее элементарную площадку $\Delta\omega$ (рис. 1.2). Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ_m (элементарный массовый расход). Тогда проекция вектора $\vec{w}$ на нормаль $\vec{n}$ к выделенной площадке

$$w_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta\omega}, \quad (1.3)$$

где ρ — плотность жидкости.

Подчеркнем, что массовый расход в (1.3) делится на полную площадь $\Delta\omega$, а не на ее часть, занятую порами. Поэтому очевидно, что скорость фильтрации не является действительной средней скоростью движения в живом сечении фильтрационного потока. Сог-

ласно (1.3), скорость фильтрации w имеет размерность скорости (м/с в СИ) и обладает свойствами вектора.

Установим связь между скоростью фильтрации w и действительной средней скоростью v движения. Действительное (физическое) течение флюида в каждом живом сечении пласта Δw осуществляется через суммарную площадь активных пор $\Delta \omega_n$. Поэтому имеем

$$v_n = \lim_{\Delta \omega_n \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta \omega_n}.$$

Сравнивая последнее равенство с (1.3), используя (1.2), а также условие равенства пористости m и просветности n , находим

$$w_n = mv_n. \quad (1.4)$$

Поскольку $0 < m < 1$, из (1.4) следует, что скорость фильтрации w меньше действительной средней скорости v течения флюида.

Таким образом, при введении скорости фильтрации рассматривается некоторый фиктивный фильтрационный поток, в котором расходы через

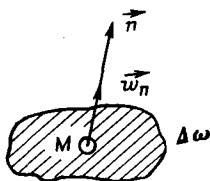


Рис. 1.2. Элементарная площадка пористого пласта

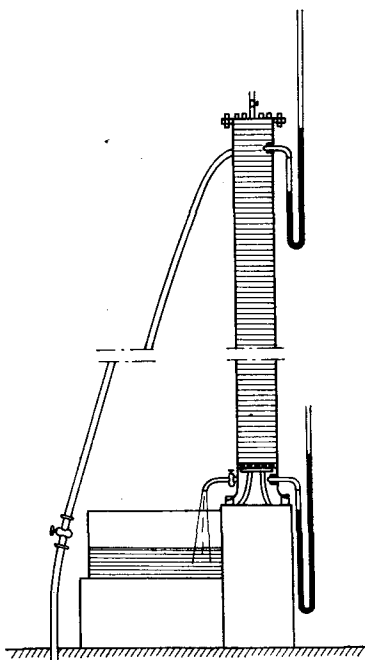


Рис. 1.3. Установка А. Дарси для исследования течения воды через вертикальные песчаные фильтры

любое сечение равны реальному расходу флюида, поля давлений фиктивного и реального потока идентичны, а сила сопротивления фиктивного потока равна реальной силе сопротивления. При этом принимается, что скорость фильтрации непрерывно распределена по объему и связана со средней скоростью действительного движения равенством (1.4).

Основное соотношение теории фильтрации — закон фильтрации — устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное течение. Первые экспериментальные наблюдения за движением воды в тру-

бах, заполненных песком, провели французские инженеры Дарси (1856 г.) и Дюпюи (1848—1863 гг.). Этими работами было положено начало теории фильтрации. Именем Дарси назван линейный закон фильтрации, который он установил, создавая первую совершенную систему водоснабжения в Европе. Анри Дарси исследовал течение воды через вертикальные песчаные фильтры (рис. 1.3), что требовалось для нужд водоснабжения г. Дижона. В результате тщательно проведенных экспериментов он установил свою, получившую широкую известность, экспериментальную формулу:

$$Q = k_{\Phi} \frac{H_1 - H_2}{L} \Omega = k_{\Phi} \frac{\Delta H}{L} \Omega, \quad (1.5)$$

где Q — объемный расход жидкости через песчаный фильтр, длина которого L , а площадь поперечного сечения Ω ; $\Delta H = H_1 - H_2$ — разность напоров воды над фильтром и у его основания; k_{Φ} — коэффициент пропорциональности в формуле (1.5), названный коэффициентом фильтрации, который зависит как от структуры пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости. Этот коэффициент k_{Φ} , как следует из (1.5), имеет размерность скорости и характеризует расход потока через единицу площади сечения, перпендикулярного к потоку, под действием единичного градиента напора.

Коэффициент фильтрации k_{Φ} используется обычно в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело с одной жидкостью — водой. При исследовании фильтрации нефти, газа и их смесей необходимо разделить влияние свойств пористой среды и жидкости. В этом случае формула Дарси (1.5) записывается обычно в несколько ином виде, а именно

$$Q = \frac{k}{\mu} \rho g \frac{\Delta H}{L} \Omega, \quad (1.6)$$

или

$$\omega = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^*}{L}, \quad (1.7)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости; $p^* = \rho g H = p + \rho g z$ — приведенное давление (очевидно, приведенное давление p^* совпадает с истинным средним давлением p при $z = 0$); k — коэффициент проницаемости, который не зависит от свойств жидкости и является динамической характеристикой только пористой среды. Из (1.6) следует, что коэффициент проницаемости имеет размерность площади, так что в СИ $[k] = \text{м}^2$. При этом проницаемость большинства горных пород выражается весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет 10^{-12} — 10^{-13} м^2 (1—0,1 мкм²), проницаемость плотных песчаников — около 10^{-14} — 10^{-15} м^2 (0,01—0,001 мкм²).

Из сравнения (1.6) и (1.5) находим связь между коэффициентами фильтрации k_{Φ} и проницаемости k :

$$k_{\Phi} = \frac{k}{\mu} \rho g. \quad (1.8)$$

Большинство фильтрационных течений, встречающихся на практике, имеет скорости порядка 10^{-4} — 10^{-5} м/с и менее. Поэтому, пренебрегая скоростным напором $v^2/2g$, под напором можно понимать величину $H = z + p/\rho g$. Тогда закон Дарси в формуле (1.5) или (1.6) можно истолковать как выражение закона сопротивления при фильтрации, который показывает, что между потерей напора ΔH и расходом Q существует линейная зависимость. При этом, поскольку скорость фильтрационного потока мала, силы инерции незначительны.

Коэффициент фильтрации k_ϕ или коэффициент проницаемости k определяют экспериментально при помощи специального прибора — пермеаметра, содержащего образец исследуемого грунта

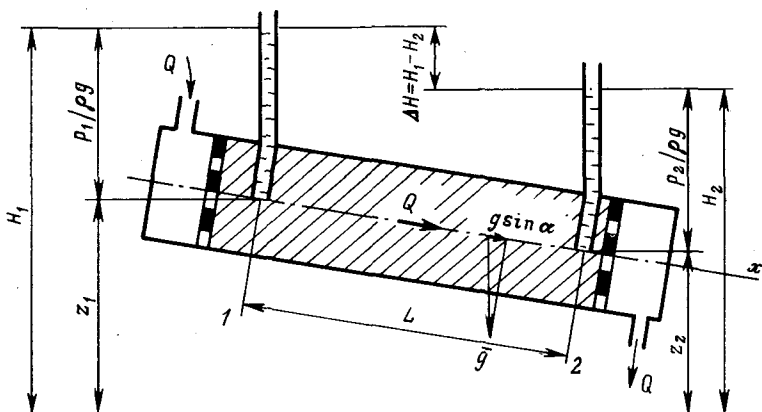


Рис. 1. 4. Схема пермеаметра

(рис. 1.4). Общий расход Q фильтрационного потока при этом поддерживается постоянным. Напоры H_1 и H_2 измеряются двумя пьезометрами, соединенными с пористой средой в сечениях 1 и 2. Превышения центров сечений над плоскостью сравнения равны z_1 и z_2 , а давления — p_1 и p_2 соответственно; расстояние между этими сечениями по оси цилиндра составляет L . В соответствии с формулой (1.5) или (1.6) имеем

$$k_\phi = \frac{Q}{\Omega (\Delta H/L)} \quad \text{или} \quad k = \frac{Q\mu}{\Omega \rho g (\Delta H/L)},$$

где градиент напора можно представить в виде

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g L}.$$

В природных условиях коэффициент проницаемости определяется в результате специального исследования скважин, в котором также используется устанавливаемая в опыте связь между изменением давления в скважинах и их дебитом.

§ 4. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ДАРСИ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Проверке и исследованию пределов применимости закона Дарси посвящено значительное число работ. В процессе этих исследований показано, что существуют две основные группы причин отклонения от закона Дарси:

1) отклонения, связанные с проявлением инерционных сил при высоких скоростях фильтрации (верхняя граница применимости закона Дарси);

2) отклонения при достаточно малых скоростях фильтрации, вызванные проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с твердым скелетом пористой среды (нижняя граница применимости закона Дарси).

Рассмотрим каждый из этих предельных случаев, которые приводят к нелинейным законам фильтрации.

Верхняя граница применимости закона Дарси

Наиболее полно изучены отклонения от закона Дарси, вызванные проявлением инерционных сил при увеличении скорости фильтрации. Верхнюю границу применимости закона Дарси связывают обычно с некоторым критическим (предельным) значением $Re_{кр}$ числа Рейнольдса:

$$Re = \omega d / \nu,$$

где d — некоторый характерный линейный размер пористой среды, ν — кинематический коэффициент вязкости флюида ($\nu = \mu / \rho$).

Многочисленные экспериментальные исследования были направлены на вывод универсальной зависимости (по аналогии с трубной гидравликой) коэффициента гидравлического сопротивления λ от числа Рейнольдса. Однако вследствие различной структуры и состава пористых сред получить такую универсальную зависимость не удается.

Первая количественная оценка верхней границы применимости закона Дарси была дана более 60 лет назад Н. Н. Павловским, который, опираясь на результаты Ч. Сликтера, полученные для модели идеального грунта, и полагая характерный размер d равным эффективному диаметру $d_{эф}$, вывел следующую формулу для числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\omega d_{эф}}{(0,75m + 0,23) \nu} \quad (1.9)$$

Используя эту формулу и данные экспериментов, Н. Н. Павловский установил, что критическое значение числа Рейнольдса находится в пределах

$$7,5 < Re_{кр} < 9.$$

Достаточно узкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ объясняется тем, что в опытах использовали не слишком разнообразные образцы пористых сред.

Наиболее полные опыты по определению верхней границы применимости закона Дарси были выполнены А. И. Абдулвагабовым.

Для удобства обработки этих и других опытов В. Н. Щелкачев предложил использовать безразмерный параметр, названный им параметром Дарси и определяемый равенством

$$Da = \frac{w\mu/k}{\Delta p/L} = \frac{w\mu L}{k\Delta p}. \quad (1.10)$$

Отсюда видно, что параметр Дарси представляет собой отношение силы вязкого трения к силе давления. Сравнивая равенство (1.10) и закон Дарси (1.6) (для случая горизонтального пласта, когда $p^* = p$), можно утверждать, что если справедлив закон Дарси, то

$$Da = 1. \quad (1.11)$$

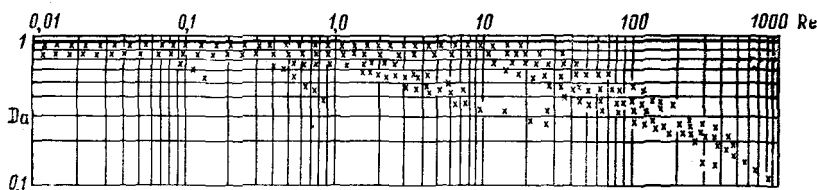


Рис. 1.5. Зависимость параметра Дарси от числа Рейнольдса

Таким образом, равенство (1.11) должно выполняться при $Re < Re_{кр}$.

Введение параметра Da упрощает исследование границы применимости линейного закона фильтрации. Действительно, если по оси абсцисс откладывать $\lg Re$, а по оси ординат $\lg Da$, то, поскольку $\lg Da = 0$ при $Re < Re_{кр}$, графиком зависимости $\lg Da$ от $\lg Re$ будет прямая, совпадающая с осью абсцисс до тех пор, пока $Re < Re_{кр}$. Как только на этом графике линия начнет отклоняться от оси абсцисс, сразу же обнаружится нарушение закона Дарси (это соответствует значениям $Da < 1$, $\lg Da < 0$). Значение Re , при котором станет заметно отклонение упомянутой линии от оси абсцисс, и будет критическим.

Для иллюстрации сказанного на рис. 1.5 приведен на логарифмической сетке график зависимости $\lg Da$ от $\lg Re$, представляющий собой результат обработки опытов А. И. Абдулвагабова по формулам В. Н. Щелкачева (табл. 1.1). Различные кривые на этом графике, отходящие от оси абсцисс ($\lg Re$), соответствуют области нелинейной фильтрации ($\lg Da < 0$) для различных образцов пористых сред.

Основываясь на этих соображениях, В. Н. Щелкачев провел критический анализ и сравнение формул, полученных разными исследователями, для определения Re в подземной гидравлике и оценил возможные критические значения числа Рейнольдса $Re_{кр}$.

Т а б л и ц а 1.1 Определение верхней границы применимости закона Дарси по данным различных исследователей

Параметр	Н. Н. Павловский	Фэнчер, Льюис, Бернс	В. Н. Щелкачев	М. Д. Миллионщиков	Ф. И. Котяхов, Г. Ф. Требин	Е. М. Минский	А. И. Абдулвагабов
1	2	3	4	5	6	7	8
Re	$\frac{wd_{\text{эф}}}{(0,75m + 0,23) \nu}$	$\frac{wd_{\text{эф}}}{\nu}$	$\frac{10 w \sqrt{k}}{m^{2,3} \nu}$	$\frac{w \sqrt{k}}{m^{1,5} \nu}$	$\frac{4 \sqrt{2} w \sqrt{k}}{m^{1,5} \nu}$	$\frac{w \sqrt{k}}{\nu}$	$\frac{12 (1-m) w \sqrt{k}}{m^2 \nu}$
λ	—	$\frac{d_{\text{эф}} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{2m^{2,3} \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$	$\frac{m^{1,5} \sqrt{k} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{2m^{1,5} \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$	$\frac{\sqrt{k} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{4,6 (1-m) m^2 \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$
Re λ	—	$\frac{0,5}{f(m) Da}$	$\frac{20}{Da}$	$\frac{0,5}{Da}$	$\frac{8 \sqrt{2}}{Da}$	$\frac{0,5}{Da}$	$\frac{55,2 (1-m)^2}{Da}$
Re $_{\text{кр}}$	7,5—9	1—4	0,032—14	0,0015—0,60	0,0085—3,4	—	0,019—8,1

соответствующие верхней границе применимости закона Дарси. Результаты такого сопоставления приведены в табл. 1.1.

В формулы табл. 1.1. (графы 4—8) в качестве характерного размера входят величины, пропорциональные $\sqrt{k}$. Эти формулы не имеют принципиальных преимуществ друг перед другом и одинаково удобны для практического использования. Характерным для этих формул является то, что все они приводят к очень широким диапазонам изменения $Re_{кр}$ для различных пористых сред. Это представляется вполне естественным ввиду разнообразия свойств испытанных пористых сред. С другой стороны, это свидетельствует о том, что ни в одну из предложенных формул для определения Re не входит полный набор параметров, позволяющий характеризовать сложную структуру пористых сред; использование для этой цели коэффициентов пористости и проницаемости оказывается явно недостаточным.

Вместе с тем широкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ можно разбить на сравнительно узкие интервалы, соответствующие различным группам образцов пористых сред. Это облегчает указание возможной верхней границы применимости закона Дарси при движении флюида в какой-либо пористой среде.

Итак, при значениях числа Рейнольдса $Re > Re_{кр}$ линейный закон Дарси перестает быть справедливым. Первое обобщение закона Дарси на случай больших Re , основанное на опытных данных, было выполнено Дюпюи, который сформулировал двучленный закон фильтрации, носящий имя австрийского исследователя Ф. Форхгеймера, независимо установившего его несколько позднее.

В принятых сейчас обозначениях это соотношение можно представить в виде (для простейшего случая прямолинейно-параллельного течения)

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{k} \omega + \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} \omega^2, \quad (1.12)$$

где β — дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально.

Первое слагаемое в правой части (1.12) учитывает потери давления вследствие вязкости жидкости, второе — инерционную составляющую сопротивления движению жидкости, связанную с криволинейностью поровых каналов. Из (1.12) следует, что при малых скоростях фильтрации квадратом скорости ω^2 можно пренебречь и градиент давления будет зависеть только от первого слагаемого т. е. движение будет безынерционным (по закону Дарси). При больших скоростях фильтрации силы инерции становятся существенными и будут сопоставимы или даже преобладать над силами вязкости.

Хорошая согласованность соотношения (1.12) с данными промысловых и экспериментальных наблюдений была установлена в многочисленных работах советских и зарубежных исследователей. Это свидетельствует о том, что это соотношение представляет

нечто большее, чем простую эмпирическую формулу, поскольку оно хорошо выполняется даже для очень больших скоростей фильтрации. Физический смысл этого заключается в том, что при больших скоростях быстропеременное движение в порах вследствие «извилистости» поровых каналов сопряжено с появлением значительных инерционных составляющих гидравлического сопротивления. С увеличением числа Рейнольдса квадратичный член в выражении (1.12) оказывается преобладающим, силы вязкости — пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции, и (1.12) сводится тогда к квадратичному закону фильтрации, предложенному А. А. Краснопольским, который имеет место лишь в средах, состоящих из частиц достаточно крупных размеров.

Работами Е. М. Минского и других исследователей показано, что двучленный закон фильтрации (1.12) является физически наиболее обоснованным и осуществляется при всех числах Рейнольдса, встречающихся в практике разработки нефтегазовых месторождений.

Следует указать, что при исследованиях фильтрационных потоков в условиях нарушения закона Дарси используются нелинейные законы и в виде одночленной, степенной формулы

$$w = C \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^{1/n}, \quad (1.13)$$

где C и n — некоторые постоянные, определяемые опытным путем причем $1 < n \leq 2$.

При $n = 2$ формула (1.13) превращается в формулу, выражающую квадратичную зависимость между скоростью фильтрации w и градиентом давления $\Delta p/L$, т. е. в формулу Краснопольского.

Отклонения от закона Дарси при малых скоростях фильтрации

В опытах, проведенных в конце прошлого века с тонкозернистыми грунтами при малых скоростях, было обнаружено увеличение скорости фильтрации с ростом градиента давления более быстрое, что это дает линейный закон Дарси. Однако объяснение этого факта не приводилось.

Начиная с 50-х годов XX в. появилось большое число теоретических и экспериментальных работ, подтвердивших нарушения закона Дарси в области малых скоростей. Это явление заметнее всего при движении воды в глинах, но наблюдается также и при фильтрации в песках и песчаниках не только воды, но и нефтей. При этом во всех экспериментах обнаруживалась существенная нелинейность закона фильтрации при малых скоростях.

Объяснение этого явления заключается в том, что при малых скоростях фильтрации становится существенным силовое взаимодействие между твердым скелетом породы и фильтрующимся флюидом, которое может дать преобладающий вклад в фильтрационное сопротивление. При весьма малых скоростях потока сила вязкого трения пренебрежимо мала, тогда как сила межфазового взаимо-

действия остается при этом конечной величиной, поскольку она не зависит от скорости и определяется только свойствами контактирующих фаз. В результате такого взаимодействия нефть, содержащая поверхностно-активные компоненты, в присутствии пористого тела с развитой поверхностью образует устойчивые коллоидные растворы (студнеобразные пленки), частично или полностью перекрывающие поры. Чтобы началось движение, нужно разрушить эту структуру, приложив некоторый перепад давления. В случае фильтрации воды в глинизированных породах аналогичные соображения относятся к образованию коллоидных глинистых растворов; при этом структурообразующий компонент—глинистые частицы — можно заимствовать из самого материала твердого скелета.

Приведенные факты показывают, что многие жидкости (нефть, пластовая вода), не проявляющие аномальных свойств вне контакта с пористой средой, при малых скоростях фильтрации могут образовывать неньютоновские системы, взаимодействуя с пористой породой. Наличие начального градиента давления γ , при достижении которого начинается фильтрация, было обнаружено и при движении флюидов в газонасыщенных пористых средах. При этом было установлено, что γ изменяется в широких пределах и в большинстве случаев тем выше, чем больше глинистого материала содержится в пористой среде и чем выше остаточная водонасыщенность газовой смеси.

Наряду с этим неньютоновские свойства пластовых нефтей с повышенным содержанием высокомолекулярных компонентов (смолов, асфальтенов, парафина и т. д.) могут проявляться в широком диапазоне изменения скоростей.

Таким образом, при малых скоростях течения природа нелинейности закона фильтрации иная, чем в области больших скоростей фильтрации (больших Re). Она связана с проявлением неньютоновских свойств фильтрующихся флюидов, а также других физико-химических эффектов.

Сведения о реологических кривых пластовых флюидов и простейших расчетных моделях фильтрации неньютоновских систем приведены в гл. 11, поэтому ограничимся формулировкой наиболее простого нелинейного закона фильтрации неньютоновских жидкостей, в основе которого лежит модель фильтрации с предельным градиентом. Для простейшего случая одномерного линейного потока его можно представить в виде

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{k} \omega + \gamma, \quad \omega > 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\Delta p}{L} \leq \gamma, \quad \omega = 0,$$

где γ — предельный (начальный) градиент давления, по достижении которого начинается движение жидкости; при меньших значениях градиента движение отсутствует.

§ 5. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ДАРСИ

Закон Дарси для течения в пористой среде однородной жидкости можно распространить на случай совместного течения двух несмешивающихся жидкостей, обобщив понятие проницаемости.

Прежде всего введем понятие скорости фильтрации данной фазы $\vec{w}_i$. Аналогично скорости фильтрации однородной жидкости $\vec{w}_i$ определяется как вектор, проекция которого на некоторое направление l равна отношению объемного расхода данной фазы к площадке Ω_l , перпендикулярной к указанному направлению:

$$(\vec{w}_i)_l = Q_i / \Omega_l. \quad (1.15)$$

Площадка Ω_l пересекает твердую и обе подвижные фазы.

При фильтрации двух несмешивающихся жидкостей вводят понятие насыщенности порового пространства фазой. Насыщенность элемента пористой среды данной фазой σ_i определяется как относительная часть объема активных пор среды, занятая этой фазой:

$$\sigma_i = \Delta V_i / \Delta V_{\text{п}}, \quad (1.16)$$

где i принимает значения 1 и 2 (σ_1 , σ_2 — насыщенность соответственно смачивающей и несмачивающей фазами).

Здесь ΔV_i — объем среды, занятой жидкостью i ; $\Delta V_{\text{п}}$ — общий объем активных пор в данном элементе. Очевидно, справедливо равенство

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1, \quad (1.17)$$

поэтому из двух насыщенностей только одна независима и обычно характеристики движения в потоке двухфазной жидкости представляются в функции от насыщенности первой (смачивающей) фазой и вводится обозначение $\sigma = \sigma_1$.

Экспериментально установлено, что расход каждой фазы растет с увеличением перепада давления и насыщенности данной фазой, а закон фильтрации каждой из фаз по аналогии с законом Дарси можно записать в виде

$$w_1 = \frac{k_1^* \Delta p_1}{\mu_1 L}, \quad w_2 = \frac{k_2^* \Delta p_2}{\mu_2 L}, \quad (1.18)$$

где w_1 и w_2 — скорости фильтрации фаз; μ_1 и μ_2 — динамические коэффициенты вязкости жидкостей; Δp_1 и Δp_2 — разности давлений в соответствующих фазах; k_1^* и k_2^* — фазовые проницаемости. Величины k_i^* ($i = 1, 2$) являются для i -й жидкости проницаемостями в обычном смысле в условиях совместной фильтрации. Эти величины зависят от природы пористой среды (и, прежде всего, от ее абсолютной проницаемости k , определяемой по данным о фильтрации однородной жидкости), а также от насыщенности пористой среды каждой фазой. При описании двухфазных течений обычно вместо фазовых проницаемостей k_i^* вводят так называемые

«относительные проницаемости» k_i фаз, определяемые из отношений

$$k_1 = k_1^*/k, \quad k_2 = k_2^*/k. \quad (1.19)$$

В большинстве опытов показано, что для данной структуры пористой среды относительные проницаемости k_i являются в основном функциями насыщенности, а если и наблюдается влияние иных параметров (например, отношения коэффициентов вязкости μ_0 фаз), то им обычно пренебрегают. Тогда с учетом (1.19) закон Дарси (1.18) для каждой из фаз записывается в виде

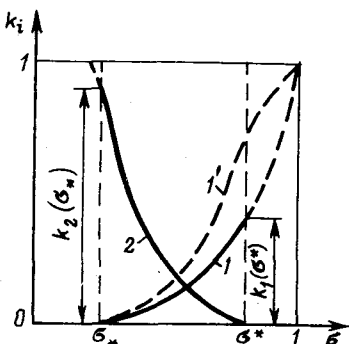
$$w_i = k \frac{k_i(\sigma) \Delta p_i}{\mu_i L}, \quad i = 1, 2. \quad (1.20)$$

В общем случае давления p_1 и p_2 в фазах не будут совпадать из-за действия поверхностного натяжения и связаны равенством

$$p_2 - p_1 = p_k, \quad (1.21)$$

где p_k — капиллярное давление.

Рис. 1.6. Кривые зависимости относительных проницаемостей от насыщенности



Типичный вид экспериментальных кривых фазовых проницаемостей $k_i(\sigma)$ приведен на рис. 1.6 (кривая 1 относится к более смачивающей жидкости — воде, кривая 2 — к менее смачивающей — нефти; кривая 1' относится к случаю, когда первая фаза является газом и σ — газонасыщенность). Отметим некоторые характерные особенности этих кривых. Для каждой фазы существует предельная насыщенность (σ_* и $1 - \sigma^*$) такая, что при меньших значениях насыщенности эта фаза неподвижна. Движение первой фазы может происходить только в том случае, если $\sigma > \sigma_*$ (для водонефтяной системы σ_* называют насыщенностью связанной водой). Для второй фазы связанная насыщенность равна $1 - \sigma^*$ и называется остаточной нефтенасыщенностью. Таким образом, совместное течение двух фаз имеет место лишь в следующем интервале изменения насыщенности жидкостью 1:

$$\sigma_* \leq \sigma \leq \sigma^*.$$

Сумма относительных проницаемостей для каждого фиксированного значения σ меньше 1:

$$k_1(\sigma) + k_2(\sigma) < 1, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Графики $k_i(\sigma)$ представляют собой асимметричные кривые (см. рис. 1.6). Относительная проницаемость $k_1(\sigma)$ смачивающей фазы при $\sigma = \sigma^*$ имеет значение, меньшее 1, тогда как величина $k_2(\sigma)$ при $\sigma = \sigma_*$ близка к единице. Это означает, что присутствие связанной смачивающей фазы мало влияет на течение несмачивающей

жидкости, тогда как присутствие остаточной несмачивающей фазы значительно «стесняет» движение смачивающей фазы.

Заметим, что, как показывают опыты и анализ размерностей, относительные проницаемости $k_i(\sigma)$ не зависят от размеров пор, но могут зависеть от их формы и распределения. Поэтому кривые одинаковы для определенных групп, сходных по структуре пористых сред.

Приведем здесь приближенные эмпирические формулы, которыми можно пользоваться при оценочных расчетах.

1. Для воды и нефти (σ — водонасыщенность)

$$k_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 0,2, \\ [(\sigma - 0,2)/0,8]^{3,5} & \text{при } 0,2 \leq \sigma \leq 1; \end{cases}$$

$$k_2(\sigma) = \begin{cases} [(0,85 - \sigma)/0,85]^{2,8} (1 + 2,4\sigma) & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 0,85, \\ 0 & \text{при } 0,85 \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

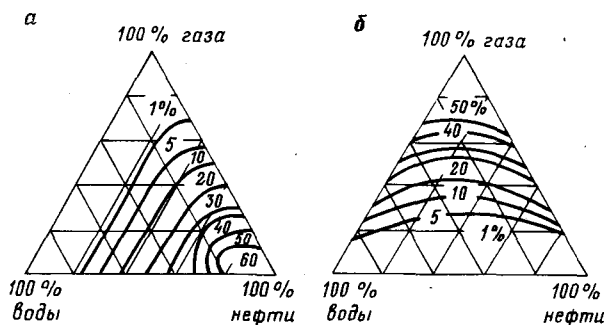


Рис. 1.7. Диаграммы фазовых проницаемостей для трехфазной смеси (вода—нефть—газ):

а — для нефти; б — для газа

2. Для газа и воды (σ — газонасыщенность)

$$k_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 0,1, \\ [(\sigma - 0,1)/0,9]^{3,5} (4 - 3\sigma) & \text{при } 0,1 \leq \sigma \leq 1; \end{cases}$$

$$k_2(\sigma) = \begin{cases} [(0,8 - \sigma)/0,8]^{3,5} & \text{при } 0 \leq \sigma \leq 0,8, \\ 0 & \text{при } 0,8 \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Введенные выше понятия можно обобщить на случай совместного движения трех несмешивающихся флюидов: нефти, газа и воды. Если обозначить эти жидкости соответственно индексами «н», «г» и «в», то можно ввести относительные проницаемости k_n , k_g и k_v точно так же, как это было сделано для двух жидкостей. При этом фазовые проницаемости являются уже функциями двух независимых насыщенностей σ_n и σ_v (газонасыщенность $\sigma_g = 1 - \sigma_n - \sigma_v$):

$$k_n = k_n(\sigma_n, \sigma_v), \quad k_v = k_v(\sigma_n, \sigma_v), \quad k_g = k_g(\sigma_n, \sigma_v) \quad (1.22)$$

и определяются с помощью треугольных диаграмм (рис. 1.7, а —

для нефти k_n и рис. 1.7, б — для газа k_r). Принцип построения этих диаграмм следующий. Параллельно каждой стороне треугольника проводятся прямые, вдоль которых насыщенность одной из фаз постоянна. Каждая насыщенность изменяется от нуля вдоль стороны треугольника до 100 % на противоположащей вершине. Каждая точка внутри треугольника, находящаяся на пересечении двух прямых, параллельных двум сторонам, соответствует определенным значениям σ_n , σ_v и $\sigma_r = 1 - \sigma_n - \sigma_v$. На треугольники наносятся линии одинаковых относительных проницаемостей фаз. На рис. 1.7, а проведены линии равных значений относительной проницаемости для нефти k_n , на рис. 1.7, б — для газа k_r .

Характер зависимостей (1.22) определяется различной степенью смачивания твердых зерен породы фазами, причем оказывается, что относительная проницаемость наиболее смачивающей фазы — воды практически зависит только от водонасыщенности σ_v и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности σ_n и σ_r .

§ 6. ПОНЯТИЕ О РЕЖИМАХ НЕФТЕГАЗОВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Постановка и решение газогидродинамических задач разработки месторождений в значительной степени определяются природой движущих сил, обеспечивающих фильтрацию нефти или газа в пласте. В связи с этим важное значение имеет знание режимов нефтегазоносных пластов.

Режим продуктивных пластов в процессе их разработки зависит как от многих естественных факторов, так и от системы разработки.

К естественным факторам, влияющим на режим разрабатываемого пласта, относятся геологические особенности строения пласта, фильтрационные характеристики пород пласта и насыщающих его жидкостей и газов, физические условия в пласте — давление, температура и т. д.

Системой разработки пласта определяются число и способ расположения добывающих и нагнетательных скважин, последовательность их ввода в эксплуатацию, темпы отбора и закачки жидкости или газа в них, способы вскрытия продуктивного пласта, размеры и оборудование забоев скважин, методы воздействия на призабойную зону и т. д.

Движение жидкости и газа в пласте в процессе его разработки происходит как за счет использования потенциальной энергии пласта и насыщающих его жидкостей, так и за счет дополнительных внешних источников энергии.

Потенциальная энергия пласта выражается в следующих формах: энергии напора краевых вод; потенциальной энергии упругой деформации жидкости и породы пласта; потенциальной энергии сжатия свободного и выделяющегося из жидкости при снижении давления газа; энергии, обусловленной силой тяжести пластовых жидкостей.

Дополнительные внешние источники энергии связаны с закачкой в пласт жидкости или газа для поддержания пластового давления.

При разработке конкретного нефтяного или газового месторождения могут проявляться различные энергии пласта и насыщающих его жидкостей и в разных соотношениях.

Режимом нефтегазоводоносного пласта называется проявление доминирующей формы пластовой энергии в процессе разработки залежи нефти или газа.

В зависимости от формы пластовой энергии, за счет которой в основном происходит движение жидкости или газа в пласте, различают следующие режимы нефтегазоводоносных пластов:

1) водонапорный режим, когда нефть вытесняется в добывающие скважины под действием напора краевой или подошвенной воды;

2) газонапорный режим, если нефть или вода вытесняется в скважины в основном под действием напора сжатого газа, находящегося в виде газовой шапки над нефтью или водой. Иногда этот режим называют режимом газовой шапки;

3) режим растворенного газа, когда давление в нефтяной залежи ниже давления насыщения нефти газом и пузырьки окклюдированного газа, расширяясь, вытесняют нефть к забоям скважин; такой режим правильней было бы называть «режимом газированной жидкости» или «режимом окклюдированного газа» (ведь растворенный в нефти газ существует в условиях и водонапорного, и газонапорного режимов);

4) упругий режим, при котором нефть поступает в скважины за счет упругих свойств жидкости и породы пласта (подробнее об этом режиме см. в гл. 6);

5) гравитационный режим, когда нефть или вода добываются из пласта только за счет использования силы тяжести самой нефти или воды.

Следует отметить, что в промысловой практике нефтяная залежь редко эксплуатируется на каком-либо режиме весь период ее разработки. Так, месторождения с водонапорным режимом в начале разработки могут вследствие высоких отборов нефти перейти на режим растворенного газа. Иногда различные участки одного и того же нефтяного месторождения могут эксплуатироваться при различных режимах: в приконтурные добывающие скважины нефть поступает за счет напора краевых вод, а в скважины, расположенные ближе к своду, — за счет энергии газовой шапки или, возможно, за счет расширения выделившегося из нефти газа.

В практике разработки газовых и газоконденсатных месторождений характерными являются два режима: газовый и водонапорный. При газовом режиме приток газа к добывающим скважинам происходит за счет потенциальной энергии расширения газа при снижении давления в залежи по мере его отбора. При этом контурные или подошвенные воды практически не вторгаются в газовую залежь и, следовательно, объем порового пространства газовой залежи практически не изменяется во времени.

При водонапорном режиме в процессе разработки в газовую залежь поступает контурная или подошвенная вода, что приводит к уменьшению объема порового пространства газовой залежи. При этом приток газа к забоям добывающих скважин осуществляется за счет использования как энергии давления сжатого газа, так и за счет напора поступающей в газовую залежь воды.

Более подробные сведения о режимах пластов можно получить в специальной литературе по разработке нефтяных и газовых месторождений.

Глава 2

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ

§ 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящее время слово «модель» получило широкое распространение. Употребляя слова «модельное описание», «моделирование», будем иметь в виду изучение физического процесса при помощи модели. При моделировании можно изучить соответствующий процесс (задачу) с различной степенью детализации с целью получения необходимых ответов или подтверждения гипотез.

Будем использовать классический подход (инженера или математика) к решению проблемы моделирования, который заключается в том, чтобы сформулировать исходную задачу, описывающую физический процесс, и затем постараться ввести необходимое количество упрощающих предположений для формулировки новой задачи, которая поддается решению теми или иными средствами.

Совершенствование вычислительных средств и систем — необходимая предпосылка для дальнейшего развития моделирования. По мере развития вычислительной техники будут расширяться пределы использования моделирования при решении задач возрастающей сложности.

Сформулируем некоторые общие вопросы, очень важные для специалиста, ответы на которые можно получить с помощью моделирования пластовых систем.

Как нужно разрабатывать и эксплуатировать месторождение, чтобы обеспечить оптимальную добычу пластовых флюидов (углеводородных и неуглеводородных)?

Какой наилучший проект увеличения нефтегазоотдачи для данного пласта? Как он должен быть осуществлен?

Какова экономически целесообразная конечная нефтегазоотдача для данного месторождения?

Какие лабораторные и промышленные данные требуются для получения надежных прогнозных результатов? Как пересчитать результаты лабораторного эксперимента на пластовые условия?

Каков наилучший способ вскрытия пласта скважиной?

Из какой части пласта следует отбирать нефть или газ?

Определение цели проводимого исследования и точная постановка более узких (специальных) вопросов — важный этап при выполнении любого исследования на модели.

Рассмотрим теперь основные типы моделей физических процессов, происходящих при фильтрации пластовых флюидов в процессе разработки и эксплуатации природных залежей:

- 1) физические модели;
- 2) математические модели;
- 3) численные и машинные модели;
- 4) аналоговые модели.

§ 2. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

Физическое моделирование — это замена изучения интересующего нас явления в природе изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба, обычно в специальных лабораторных условиях. Основным смысл такого моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было получить различные характеристики явления в природных условиях. При этом должны выполняться определенные условия (критерии) подобия (геометрического и физического) модельных и натурных процессов. Для этого размеры модели, свойства пласта и флюидов выбирают в лабораторных условиях таким образом, чтобы были выполнены условия геометрического подобия и чтобы соотношения различных сил в пласте и в физической модели были одинаковыми. Большое значение при физическом моделировании фильтрационных процессов имеет теория размерностей и подобия (см. § 6, 7 данной главы).

Результаты моделирования, выполненного на правильно сконструированной модели, в точности повторяют — но только в измененном (обычно уменьшенном) пространственном и временном масштабе — процессы, протекающие в натурных пластах. Кроме того, модель позволяет исследовать относительную роль какого-либо параметра изменением его значения в последовательной серии экспериментов, при фиксированных значениях остальных параметров.

Ввиду чрезвычайной сложности реальных процессов фильтрации пластовых флюидов полностью подобные физические модели построить очень трудно или невозможно. Поэтому в большинстве случаев ограничиваются приближенным моделированием фильтрационных процессов.

Физические модели играют ключевую роль для понимания процессов, происходящих в пласте. Исследования с помощью физиче-

ских моделей — единственный возможный способ решения практических задач разработки нефтегазовых месторождений в тех случаях, когда математическое описание процессов невозможно, затруднительно или нецелесообразно. Результаты физического моделирования часто используют для проверки и корректировки математических моделей, основанных на различных упрощениях или же гипотезах, справедливость которых требует подтверждения. Кроме того, математические модели становятся «рабочим» инструментом и могут давать полезные для практики результаты только после их «насыщения» конкретными значениями различных констант и параметров, полученными в лабораторных и промысловых экспериментах, т. е. на основе результатов физического моделирования.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

Математические модели представляют собой системы математических уравнений, описывающих изучаемый физический процесс на основе некоторых абстракций и допущений, опирающихся на эксперимент и необходимых с практической точки зрения для того, чтобы сделать задачу разрешимой. При моделировании процессов разработки нефтегазовых месторождений эти уравнения в общем виде представляют собой сложные (обычно нелинейные) дифференциальные уравнения в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями.

Любая математическая модель основана на упрощении (идеализации) реального процесса, что позволяет создать расчетные схемы, учитывающие только основные эффекты. В подземной гидравлике моделируют: 1) флюиды (жидкости и газы); 2) породы-коллекторы; 3) геометрическую форму движения; 4) вид процессов, в том числе физико-химических.

Долгое время в подземной гидравлике основными «рабочими» математическими моделями были модели, описывающие установившуюся и неустановившуюся фильтрацию однофазного флюида (несжимаемого и сжимаемого) в однородной пористой среде (см. гл. 4—7). Эти модели являются классическими и не утратили своего практического значения и по сей день.

Однако необходимость более полного извлечения нефти, газа и конденсата из пласта, а также проектирование разработки месторождений в осложненных условиях залегания потребовали создания новых, более совершенных математических моделей. В последние годы математическим моделированием стали пользоваться как важнейшим инструментом при проектировании и контроле за разработкой нефтегазовых месторождений. Применение современных ЭВМ позволяет решать гидродинамические задачи, связанные с разработкой, в очень широкой и полной постановке.

Дальнейшее развитие теории и практики разработки месторождений нефти и газа приведет к созданию более совершенных мате-

математических моделей, основанных на лучшем знании и понимании гидродинамических и физико-химических процессов, происходящих в залежи при ее разработке, а также связанных с более полным учетом влияния неоднородности коллектора.

§ 4. ЧИСЛЕННАЯ И МАШИННАЯ МОДЕЛИ ПЛАСТОВЫХ СИСТЕМ

Уравнения, описывающие математическую модель, обычно настолько сложны, что в большинстве случаев их нельзя решить аналитическими методами и необходимо использовать ЭВМ. Чтобы представить дифференциальные уравнения в форме, пригодной для решения на цифровых вычислительных машинах, следует их аппроксимировать и заменить конечно-разностными алгебраическими уравнениями. Численная модель состоит из полученной системы уравнений и построения численного алгоритма их решения. Эти вопросы обсуждаются в гл. 13.

Машинная модель пластовой системы — это программа или система программ для ЭВМ, составленная с целью решения уравнений численной модели. При разработке программы, особенно в случаях, когда она предназначается для массового использования, программист должен учитывать следующие требования:

- скорость вычислений (эффективность программы);
- оптимальное использование имеющейся памяти ЭВМ;
- удобную для пользователя организацию ввода-вывода данных;
- универсальность программ (их независимость от транслятора);
- возможность повторного пуска программы;
- диагностические сообщения.

Численную и машинную модели можно проверить и даже скорректировать по результатам физического моделирования и данным эксплуатации месторождения, а затем использовать для прогноза показателей разработки месторождения. Таким образом, для понимания сложных пластовых процессов может потребоваться разумное сочетание физического, математического и машинного моделирования.

Численные и машинные модели фильтрации двух- и трехфазной жидкостей в настоящее время широко используются в практике проектирования разработки месторождений.

§ 5. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Аналоговое моделирование основано на аналогиях между описанием некоторых фильтрационных процессов с другими физическими явлениями (диффузией, процессом переноса теплоты, электрического тока и т. д.). Основная причина существования аналогий — это сходство уравнений, описывающих различные физические процессы. Аналогия устанавливается на основании того факта, что характеристические уравнения (например, закон Дарси и закон Ома) выражают одни и те же принципы сохранения (массы,

импульса, энергии, электричества и т. п.), лежащие в основе многих физических явлений. Существующие аналогии позволяют разрабатывать аналоговые модели.

По отношению к пространственным переменным аналоговые модели могут быть либо дискретными, либо непрерывными. В дискретных аналоговых моделях (они эквивалентны конечно-разностным уравнениям численной модели) параметры исследуемой области определяются только в выделенных узловых точках. В непрерывной аналоговой модели (эквивалент дифференциального уравнения математической модели) находит отражение каждая точка прототипа. В обоих типах аналогов время — непрерывная переменная.

Отметим некоторые употребляемые аналоговые модели.

1. Электрическая модель (см. гл. 4) основана на сходстве между уравнениями, описывающими стационарное течение жидкости в пористой среде и электрического тока в проводнике. Разработаны достаточно сложные сеточные электрические модели, используемые для инженерных расчетов нестационарного течения пластового флюида и для решения задач неизотермической фильтрации.

2. Электролитические модели основаны на том, что скорость перемещения ионов в электролите под действием градиента напряжения аналогична скорости фильтрации частиц жидкости под действием градиента давления в пористой среде. Эта модель используется главным образом при изучении плоских напорных фильтрационных потоков.

3. Потенциометрическая модель — это модель стационарного течения флюида, представляющая собой сосуд, повторяющий форму границ пласта. Скважины моделируются медными электродами, расположенными в пространстве, заполненном электролитом. Дебиты скважин моделируются заданными значениями переменных токов. Модели предназначены для определения стационарного распределения потенциалов.

Заметим, что в настоящее время в связи с развитием вычислительной техники и численных методов исследования аналоговые модели постепенно вытесняются численными и машинными моделями.

§ 6. ОСНОВЫ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Гидродинамические процессы, характерные для всего комплекса нефтедобычи — от движения нефти в пласте до ее течения по трубопроводам к потребителю, крайне сложны. В некоторых случаях мы не только не можем решить соответствующие уравнения даже на лучших из имеющихся ЭВМ, но, что еще хуже, современное знание этих процессов недостаточно даже для постановки математических задач. В этих условиях очень важную роль играет применение анализа размерностей и теории подобия, основанного на фундаментальном положении: физические законы не должны зависеть от имеющегося произвола в выборе единиц измерения физических величин. Отсюда выводится, что функции, выражающие

физические законы, обладают важным свойством, которое называется обобщенной однородностью. Это свойство позволяет упростить определение (расчет, нахождение из опыта) зависимостей, выражающих соответствующие закономерности, иногда очень существенно.

Размерность

Все физические величины мы выражаем числами, которые получаются в результате измерения. Измерение представляет собой прямое или косвенное сравнение данной величины с соответствующими эталонами — единицами измерения. Так, мы говорим, что длина линейки составляет 0,25 м, сравнивая ее со специальным эталоном, единицей длины — метром. Мы говорим, что скорость автомобиля составляет 60 км/ч, сравнивая ее с единицей измерения скорости, скоростью равномерного движения, в котором путь в один километр проходится за время, равное одному часу.

Единицы измерения физических величин подразделяются на основные и производные. Это означает следующее. Сперва указываются величины, те или иные эталоны которых — природные или искусственные — принимаются за основные единицы измерения. После установления основных единиц измерения производные единицы измерения получаются из основных в силу определения физической величины. Определение всегда является указанием способа измерения данной физической величины, по крайней мере мысленного.

Например, для описания гидродинамических процессов за основные единицы измерения можно принять некоторые эталоны длины, массы и времени или силы, массы и времени. Для описания теплообмена или электромагнитных явлений этих эталонов уже недостаточно. Далее, скорость представляет собой в силу ее определения отношение расстояния, проходимого за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка времени. Поэтому за единицу скорости можно принять скорость равномерного движения, в котором единица длины (один километр) проходится за единицу времени (один час). Обозначение км/ч представляет собой некоторую условность: это отношение нельзя рассматривать как частное от деления эталона длины (километра) на эталон времени (час). Такое деление вообще бессмысленно: можно разделить число на число, но нельзя делить отрезок пути на промежуток времени.

Системой единиц измерения называется совокупность основных единиц измерения, достаточная для измерений явлений рассматриваемого класса. Так, в СИ за основные единицы измерения приняты единицы измерения длины, массы и времени, причем за единицу длины принят один метр, за единицу массы — один килограмм, за единицу времени — одна секунда.

Классом систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной (но не природой) основных единиц измерения. Для класса

систем единиц измерения, к которому относятся системы единиц СИ, за основные единицы измерения приняты эталоны длины, массы и времени. Для произвольной системы этого класса соответствующие единицы составляют:

$$\begin{aligned} \text{единица длины} &= m/L; \\ \text{единица массы} &= \text{кг}/M; \\ \text{единица времени} &= c/T. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь L , M , T — отвлеченные положительные числа, которые показывают, во сколько раз уменьшаются основные единицы длины, массы и времени при переходе от исходной системы, в данном случае СИ, к другой системе рассматриваемого класса. Этот класс обозначается LMT . Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательным выписыванием символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно этими символами обозначают число раз, во сколько уменьшается соответствующая основная единица измерения при переходе от исходной системы, в данном случае СИ, к другой системе данного класса.

Если уменьшить единицу длины в L раз, а единицу времени в T раз, то, очевидно, новая единица скорости уменьшится по сравнению с исходной в LT^{-1} раз. Следовательно, численное значение всех скоростей возрастет в LT^{-1} раз. Аналогично и для других величин. Изменение численных значений физических величин при переходе от одной системы единиц измерения к другой в данном классе систем единиц измерения определяется их размерностью. Размерностью физической величины называется функция, определяющая во сколько раз изменяется численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к произвольной системе внутри данного класса. Размерность величины φ принято по предложению Максвелла обозначать $[\varphi]$. Специально подчеркнем, что размерность определяется для данного класса систем единиц измерения и в разных классах систем единиц измерения размерность одной и той же величины различна. Например, размерность плотности в классе LMT составляет $[\rho] = ML^{-3}$. Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения внутри данного класса, называются безразмерными. Ясно, что размерность безразмерной величины равна единице. Все остальные величины называются размерными.

Размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной одночлен, так что, например, в классе LMT размерность величины a представляется в виде $[a] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$, где α , β , γ — постоянные. Это следует из просто формулируемого, но на самом деле глубокого физического принципа: все системы внутри данного класса равноправны, т. е. среди них нет избранных, чем-то выделенных систем.

Говорят, что величины $a_1, \dots, a_k$ имеют независимые размерности, если размерность ни одной из этих величин нельзя предста-

вить в виде произведения степеней размерностей остальных. Например, размерности плотности $[\rho] = ML^{-3}$, скорости $[v] = LT^{-1}$ и силы $[F] = LMT^{-2}$ независимы. Напротив, размерности плотности, скорости и давления зависимы: размерность давления $ML^{-1}T^{-2}$ равна произведению размерности плотности на квадрат размерности скорости. Ни одна из величин с независимыми размерностями $a_1, \dots, a_k$ не может быть безразмерной: размерность безразмерной величины, равная единице, равна произведению размерностей остальных величин, какими бы они ни были, в нулевой степени.

Для дальнейшего существенен следующий факт: всегда можно перейти от исходной системы к некоторой системе данного класса так, чтобы любая величина из набора величин с независимыми размерностями $a_1, \dots, a_k$, скажем a_1 , изменила численное значение в произвольное число A раз, а все прочие величины остались неизменными.

Действительно, в выбранном классе систем единиц измерения $P, Q, \dots$ (через $P, Q, \dots$ обозначены символы L, M, T и другие, им подобные) размерности величин $a_1, \dots, a_k$ имеют вид:

$$[a_1] = P^{\alpha_1} Q^{\beta_1} \dots, [a_2] = P^{\alpha_2} Q^{\beta_2} \dots, [a_k] = P^{\alpha_k} Q^{\beta_k} \dots, \quad (2.2)$$

причем для каждого m хотя бы одна из величин $\alpha_m, \beta_m, \dots$ не равна нулю. Следовательно, по определению размерности при переходе от исходной системы единиц к той системе единиц, которую мы ищем, числа $P, Q, \dots$ должны удовлетворять соотношениям

$$P^{\alpha_1}Q^{\beta_1} \dots = A, P^{\alpha_2}Q^{\beta_2} \dots = 1, P^{\alpha_k}Q^{\beta_k} \dots = 1. \quad (2.3)$$

Логарифмируя соотношения (2.3), получаем для логарифмов неизвестных переходных множителей $\ln P, \ln Q, \dots$ систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ln P + \beta_1 \ln Q + . . . &= \ln A; \\ \alpha_2 \ln P + \beta_2 \ln Q + . . . &= 0; \\ \\ \alpha_k \ln P + \beta_k \ln Q + . . . &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

которая, как нетрудно видеть, всегда разрешима. Это свойство используется при построении анализа размерностей.

Анализ размерностей

Во всяком физическом исследовании, теоретическом или экспериментальном, находятся зависимости одних величин, характеризующих явление, от других. Дело всегда сводится, таким образом, к отысканию одного или нескольких соотношений вида

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (2.5)$$

Здесь a — определяемый параметр; $a_1, \dots, a_n$ — величины, которые считаются заданными, они называются определяющими

параметрами. Разбиение определяющих параметров в соотношении (2.5) сделано так: параметры $a_1, \dots, a_k$ имеют независимые размерности, а размерности параметров $a_{k+1}, \dots, a_n$ выражаются в виде произведения степеней размерностей параметров $a_1, \dots, a_k$:

[illegible]

Такое разбиение можно сделать всегда. В частных случаях может быть $k = n$, если размерности всех определяющих параметров независимы, или $k = 0$, если все определяющие параметры безразмерны. В общем случае $0 < k < n$.

Размерность определяемой величины a должна выражаться в виде произведения степеней размерностей величин $a_1, \dots, a_k$. Следовательно, должны существовать числа $p, \dots, r$, такие, что

$$[a] = [a_1]^p \cdot \cdot \cdot [a_k]^r. \quad (2.7)$$

Если бы это было не так, размерности величин $a, a_1, \dots, a_n$ были бы независимыми. Тогда, согласно свойству, доказанному в предыдущем разделе, можно было бы, изменяя систему единиц измерения внутри данного класса, менять величину a во сколько угодно раз, оставляя неизменными все величины $a_1, \dots, a_k$. При этом оставались бы неизменными и все остальные определяющие параметры $a_{k+1}, \dots, a_n$, потому что их размерности выражаются через размерности величин $a_1, \dots, a_k$ формулами (2.6). Таким образом, определяемая величина a могла бы меняться как угодно при неизменных значениях всех определяющих параметров, чего не может быть, если список определяющих параметров полон.

Введем теперь параметры

[illegible]

Здесь показатели степеней определяющих параметров с независимыми размерностями выбраны так, чтобы все параметры Π , $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ были безразмерными. Перепишем теперь основную зависимость (2.5), заменяя все параметры $a, a_{k+1}, \dots, a_n$ с зависимыми размерностями через безразмерные величины $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, определенные соотношением (2.8), и параметры $a_1, \dots, a_k$. Получаем

$$\Pi = \frac{f(a_1, \dots, a_n)}{a_1^p \dots a_k^r} = \frac{1}{a_1^p \dots a_k^r} \times \\ \times f(a_1, \dots, a_k, \Pi_1 a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}, \dots, \Pi_{n-k} a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}), \quad (2.9)$$

так что

$$\Pi = F(a_1, \dots, a_k, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (2.10)$$

где F — некоторая функция.

Теперь — самое главное. Как было показано, всегда можно перейти к такой системе в рассматриваемом классе систем единиц измерения, что любой из параметров $a_1, \dots, a_k$, например a_1 , изменится во сколько угодно раз, а остальные размерные параметры останутся неизменными. Ясно, что неизменными при таком переходе останутся также и безразмерные аргументы функции F и ее значение Π . Но отсюда следует, что на самом деле функция F от аргумента a_1 не зависит. Точно так же доказывается, что она не зависит и от аргументов $a_2, \dots, a_k$. Следовательно, зависимость (2.10) на самом деле выражается через функцию не n аргументов, а $n-k$ аргументов, т. е. на k меньше:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (2.11)$$

Вспомним теперь, что $\Pi = f/(a_1^p \dots a_k^r)$. Тогда из (2.11) следует, что всякая функция f , определяющая ту или иную физическую закономерность, обладает свойством обобщенной однородности, т. е. представляется через функцию меньшего числа переменных:

$$f = a_1^p \dots a_k^r \Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \dots a_k^{r_{k+1}}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{p_n} \dots a_k^{r_n}}\right). \quad (2.12)$$

Эти факты составляют содержание основного утверждения анализа размерностей, так называемой π -теоремы.

Важность этой теоремы связана со следующим. Для определения зависимости той или иной величины a от каждого определяющего параметра надо измерить или вычислить функцию f , скажем при 10 значениях соответствующего аргумента. Конечно, число 10 условно, например, для гладких функций может хватить и меньшего числа измерений или вычислений, для других не хватит и ста. Тем не менее остановимся на числе 10. Тогда для определения функции f надо провести всего 10^n измерений или вычислений.

После применения анализа размерностей дело сводится к определению функции Φ от $n-k$ безразмерных аргументов $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$. Для нахождения этой функции уже достаточно 10^{n-k} опытов или вычислений, т. е. в 10^k раз меньше. Мы приходим к важному выводу: трудоемкость определения искомой зависимости благодаря применению анализа размерностей сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров величин с независимыми размерностями.

Теория подобия

В подземной гидравлике очень часто прибегают к моделированию явлений, в том числе к физическому моделированию процесса фильтрации пластовых флюидов, о чем подробно рассказано в предыдущих параграфах. Ясно, что надо знать, как пересчитывать результаты опыта на натуру; если этого не знать, моделирование бесполезно. Для правильного моделирования основным является понятие физического подобия явлений.

Понятие физического подобия, естественно, обобщает понятие подобия геометрического. Например, два треугольника подобны, если они отличаются только численными значениями параметров — длин сторон, а углы при вершинах для обоих треугольников одинаковы. Аналогично физические явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями размерных определяющих параметров и притом так, что для них величины соответствующих безразмерных параметров совпадают.

В связи с принятым определением подобных явлений величины $\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ называются параметрами подобия.

Рассмотрим теперь некоторое явление, которое предполагается моделировать, будем называть его натурным. Потребуем, чтобы модельное явление, которым мы хотим воспользоваться для определения нужных характеристик натурального, было подобным натурному. Следовательно, для обоих явлений имеет место зависимость определяемой характеристики a от определяющих параметров $a_1, \dots, a_n$:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \quad (2.13)$$

При этом функция f для обоих явлений одна и та же, поскольку они подобны, хотя численные значения определяющих параметров $a_1, \dots, a_n$ и определяемого параметра a могут различаться. Таким образом, соотношение (2.13) соответственно для натурального и модельного явлений имеет вид

$$a^{(p)} = f(a_1^{(p)}, \dots, a_k^{(p)}, a_{k+1}^{(p)}, \dots, a_n^{(p)}); \quad (2.14)$$

$$a^{(m)} = f(a_1^{(m)}, \dots, a_k^{(m)}, a_{k+1}^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}).$$

Здесь и дальше верхним индексом (p) обозначены величины, соответствующие натурному явлению, а индексом (m) — вели-

чины, относящиеся к модельному явлению. Используя анализ размерностей, находим для обоих явлений

$$P^{(p)} = \Phi(P_1^{(p)}, \dots, P_{n-k}^{(p)}); \quad (2.15)$$

$$P^{(m)} = \Phi(P_1^{(m)}, \dots, P_{n-k}^{(m)}).$$

Здесь функция Φ в обоих случаях одна и та же, так как она одинаково выражается через одну и ту же функцию f . Далее, поскольку модельное и натурное явления подобны, согласно определению подобных явлений должны выполняться условия

$$P_1^{(m)} = P_1^{(p)}, \dots, P_{n-k}^{(m)} = P_{n-k}^{(p)}. \quad (2.16)$$

Условия (2.16) называются критериями подобия. Следовательно,

$$\Phi(P_1^{(m)}, \dots, P_{n-k}^{(m)}) = \Phi(P_1^{(p)}, \dots, P_{n-k}^{(p)}),$$

и, согласно (2.15), имеет место равенство безразмерных определяемых параметров для натурального и модельного явлений

$$P^{(p)} = P^{(m)}. \quad (2.17)$$

Возвращаясь в соответствии с (2.8) к размерным переменным $a, a_1, \dots, a_k$, получаем простое правило пересчета результатов измерений с подобной модели на натурное явление:

$$a^{(p)} = a^{(m)} \left(\frac{a_1^{(p)}}{a_1^{(m)}} \right)^p \dots \left(\frac{a_k^{(p)}}{a_k^{(m)}} \right)^r. \quad (2.18)$$

Именно для того, чтобы можно было пользоваться этим правилом, нужно было потребовать, чтобы модель была подобна натуре.

Заметим теперь, что параметры модели $a_1^m, \dots, a_k^m$ можно выбирать произвольно, имея в виду максимальную простоту и удобство моделирования.

Условия подобия модели натурному явлению (2.16) — равенство параметров подобия для модельного и натурального явлений — указывают, как надо выбирать остальные определяющие параметры $a_{k+1}^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$, чтобы обеспечить подобие модели натуре. Раскрывая эти условия, находим

$$P_1^{(m)} = P_1^{(p)}; \quad a_{k+1}^{(m)} = a_{k+1}^{(p)} \left(\frac{a_1^{(m)}}{a_1^{(p)}} \right)^{p_{k+1}} \dots \left(\frac{a_k^{(m)}}{a_k^{(p)}} \right)^{r_{k+1}};$$

.....

$$P_{n-k}^{(m)} = P_{n-k}^{(p)}; \quad a_n^{(m)} = a_n^{(p)} \left(\frac{a_1^{(m)}}{a_1^{(p)}} \right)^{p_n} \dots \left(\frac{a_k^{(m)}}{a_k^{(p)}} \right)^{r_n}.$$

Приведенные простые определения и утверждения исчерпывают содержание анализа размерностей и теории подобия. Подчеркнем специально, что больше в этой теории ничего нет. И тем не менее исследователям удавалось, используя ее, получать важные результаты.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРАВЛИКЕ

1. Методы теории размерностей часто применяются в подземной гидравлике. Они оказываются полезными уже при выводе основного закона фильтрации — закона Дарси.

Основное предположение при выводе этого закона заключается в том, что вектор скорости фильтрации в данной точке пористой среды $\vec{w}$ определяется вектором градиента давления $\text{grad } p$ и характеристиками пористой среды и жидкости.

Пористая среда считается однородной и изотропной и характеризуется следующими параметрами: средним размером пор d , безразмерным коэффициентом пористости m и некоторыми другими характеристиками, которые также можно считать безразмерными, например кривой распределения пор по размерам.

Фильтрующаяся жидкость, которую мы сперва считаем однокомпонентной и ньютоновской, характеризуется только вязкостью μ и плотностью ρ .

Таким образом, мы принимаем, что скорость фильтрации $\vec{w}$ зависит от параметров $\text{grad } p$, d , m , ρ , μ , а также от других безразмерных характеристик пористой среды, влияние которых мы здесь обсуждать не будем.

Среди перечисленных параметров только одна величина ($\text{grad } p$) является вектором. Отсюда следует, что направления векторов скорости фильтрации и градиента давления должны совпадать. Если бы вектор скорости фильтрации составлял конечный угол с вектором градиента давления, то при повороте малого элемента пористой среды вокруг направления вектора градиента давления он тоже должен был бы повернуться вместе с элементом. Но поскольку при таком повороте свойства течения не должны меняться, так как среда изотропна, вектор скорости фильтрации должен оставаться неизменным. Это может быть только в том случае, если вектор скорости направлен вдоль вектора градиента давления. Таким образом, получаем

$$\text{grad } p = -c\vec{w}, \quad (2.19)$$

где c — скаляр, зависящий только от модуля вектора скорости, а также от величин d , m , ρ , μ .

Закон Дарси справедлив для медленных фильтрационных процессов, для которых силы инерции несущественны. Поэтому для таких процессов несущественна плотность жидкости ρ , определяющая свойство ее инерции.

Таким образом, для медленных безынерционных течений ньютоновской жидкости в изотропной пористой среде справедлив закон фильтрации (2.19), причем коэффициент пропорциональности $c = a$ может зависеть только от определяющих параметров $\omega = a_1$, $d = a_2$, $\mu = a_3$, $m = a_4$. Размерности определяемого и определяю-

щих параметров, как нетрудно видеть, записываются в виде

$$[c] = \frac{M}{L^3 T}, \quad [\omega] = \frac{L}{T}, \quad [d] = L, \quad [\mu] = \frac{M}{LT}, \quad [m] = 1. \quad (2.20)$$

Первое из этих соотношений следует из того, что размерности обеих частей уравнения (2.19) должны быть одинаковыми. Как видно, в данном случае $n = 4$, $k = 3$, так что $n - k = 1$. Размерности параметров ω , d и μ , как читатель легко проверит сам, независимы; безразмерным параметром подобия здесь оказывается четвертый определяющий параметр — коэффициент пористости m .

Имеем, очевидно,

$$[c] = [\omega]^0 [d]^{-2} [\mu], \quad (2.21)$$

так что

$$P = c/(\mu d^{-2}), \quad P_1 = m \quad (2.22)$$

и анализ размерности дает окончательно

$$c = \mu \Phi(m)/d^2. \quad (2.23)$$

Заметим, что в данном случае независимость c от скорости получилась из одного анализа размерностей.

Обозначим величину $d^2/\Phi(m)$ через k . Данная величина называется коэффициентом проницаемости. Закон фильтрации (2.19) приводится при этом к виду

$$\vec{\omega} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p. \quad (2.24)$$

2. Если инерция жидкости существенна, что обязательно будет при больших скоростях фильтрации, например в призабойной зоне скважины, то к числу определяющих параметров добавится плотность жидкости ρ , а к числу безразмерных параметров подобия — параметр

$$P_2 = \omega d \rho / \mu, \quad (2.25)$$

называемый числом Рейнольдса фильтрационного движения в порах.

Соотношение (2.19) согласно анализу размерностей переписывается в более сложном виде

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{\omega} \Phi_1\left(\frac{\omega d \rho}{\mu}, m\right). \quad (2.26)$$

При малых значениях параметра P_2 функцию Φ_1 согласно формуле конечных приращений Лагранжа можно представить в виде

$$\Phi_1\left(\frac{\omega d \rho}{\mu}, m\right) = \Phi_1(0, m) + \frac{\omega d \rho}{\mu} \theta(m). \quad (2.27)$$

Согласно сказанному в п. 1 величина $\Phi_1(0, m)$ должна быть равной единице. Подставляя (2.27) в (2.26) и вспоминая, что $k =$

$= d^2/\Phi(m)$, находим

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{\omega} - \beta \frac{\rho \omega}{\sqrt{k}} \vec{\omega}, \quad (2.28)$$

где β — также некоторая функция пористости.

Выражение (2.28) представляет собой двучленный закон фильтрации.

3. Вернемся снова к безынерционным течениям, однако теперь будем рассматривать фильтрацию неньютоновской жидкости, характеризующейся предельным напряжением сдвига τ_0 , до достижения которого жидкость ведет себя как твердое тело, а после — как вязкая жидкость под действием избыточного напряжения сдвига $\tau - \tau_0$. Таково поведение многих нефтей, в частности нефтей на месторождениях Прикаспия. Тогда к определяющим параметрам п. 1 добавляется параметр τ_0 и появляется новый определяющий параметр

$$P_2 = \tau_0 d / (\mu \omega), \quad (2.29)$$

так что соотношение (2.29) записывается для таких жидкостей в виде

$$\text{grad } p = -\frac{\mu \omega}{k} \Phi_2 \left(\frac{\tau_0 d}{\mu \omega}, m \right). \quad (2.30)$$

Переходя в соотношении (2.30) к абсолютным величинам, находим

$$|\text{grad } p| = \frac{\mu \omega}{k} \Phi_2 \left(\frac{\tau_0 d}{\mu \omega}, m \right). \quad (2.31)$$

Заметим теперь, что если мы будем устремлять скорость фильтрации к нулю, то в пределе должна получиться величина градиента давления, не равная нулю, как в случае ньютоновской жидкости, а конечная. Эта величина называется предельным градиентом давления γ . Поскольку предельный градиент давления от скорости ω не зависит, ясно, что при $\vec{\omega} \rightarrow 0$, т. е. при больших значениях параметра $\tau_0 d / \mu \omega$, функция Φ_2 должна быть пропорциональна этому параметру:

$$\Phi_2 \approx \delta(m) \frac{\tau_0 d}{\mu \omega}. \quad (2.32)$$

Отсюда предельный градиент давления представляется в виде

$$\gamma = \frac{\tau_0}{\sqrt{k}} \Phi_3(m), \quad (2.33)$$

а закон фильтрации рассматриваемой неньютоновской жидкости (такие жидкости называются вязкопластичными) принимает вид

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{\omega} - \gamma \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \omega > 0; \quad (2.34)$$

$$|\text{grad } p| \leq \gamma, \quad \omega = 0.$$

В нефтяной подземной гидравлике этот закон был применен А. Х. Мирзаджанзаде.

В последующих главах (см. гл. 6, 7) теория размерностей используется при выводе законов распределения давления для не-установившейся фильтрации упругой жидкости и газа.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В НЕФТЕГАЗОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для процессов, происходящих в нефтяных и газовых пластах, зависимость от времени существенна. Такие процессы называются неустановившимися (нестационарными). Характеристики движения — давление, скорость фильтрации и т. д. — изменяются в пласте от точки к точке; говорят поэтому, что они образуют поле. Для неустановившихся процессов элементы поля изменяются с течением времени. Задачи неустановившегося движения жидкости и газа в пласте решаются методами математической физики. Для этого составляются и интегрируются дифференциальные уравнения.

Чтобы вывести дифференциальные уравнения, в пористой среде, заключающей в себе движущийся флюид (жидкость, газ), выделяется бесконечно малый элемент и затем рассматриваются изменения массы, энергии и т. д., происходящие в нем за бесконечно малый промежуток времени. При этом используются законы сохранения массы, энергии и т. д., а также дополнительные результаты экспериментального изучения свойств и поведения флюидов в пористой среде и свойств пористой среды.

Число уравнений в системе (дифференциальных и конечных) должно равняться числу неизвестных функций, характеризующих рассматриваемый фильтрационный процесс и подлежащих определению. Такая система называется замкнутой.

В этой главе ограничимся рассмотрением процессов, для которых температура флюида равна температуре среды и неизменна: $T = \text{const}$. Действительно, вследствие того что фильтрация представляет собой очень медленный процесс, изменение температуры, возникающее в ходе движения вследствие наличия сопротивления и расширения вещества, успевает компенсироваться теплообменом с окружающими горными породами. Для таких изотермических процессов уравнения энергии рассматривать уже не нужно. Однако в некоторых случаях при разработке нефтяных и газовых месторождений неізотермичность фильтрации проявляется локально в призабойной зоне скважин вследствие значительных перепадов

давления. Изучение неизотермических процессов имеет особо важное значение в связи с повышением нефтеотдачи при закачке в пласт теплоносителя (горячей воды, пара). Особенности этих процессов будут рассмотрены в гл. 10.

В число дифференциальных уравнений фильтрации обязательно входят уравнение баланса массы в элементе пористой среды — уравнение неразрывности, а также дифференциальные уравнения движения. Для замыкания системы дополнительно вводятся уравнения состояния рассматриваемого флюида и пористой среды. Для получения решения системы уравнений надо еще задать условия на границах пласта и в начальный момент времени.

В результате интегрирования прежде всего определяется распределение давления и скорости фильтрации по всему пласту в любой момент времени, т. е.

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, t), & w_x &= w_x(x, y, z, t), \\ w_y &= w_y(x, y, z, t), & w_z &= w_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Если рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$) в деформируемой пористой среде ($m = \text{const}$, $k = \text{const}$), то число искомых функций ограничивается этими четырьмя функциями (p , w_x , w_y , w_z). Для фильтрации сжимаемого флюида в сжимаемой пористой среде, кроме упомянутых функций, нужно определить плотность ρ , вязкость μ , пористость m , проницаемость k как функции координат и времени. В этом случае нужно иметь восемь уравнений — дифференциальных и конечных — для определения восьми характеристик фильтрационного потока, жидкости и пористой среды.

Аналитическое (в виде формул) решение системы дифференциальных уравнений удастся получить лишь в ограниченном числе простейших очень сильно идеализированных случаев, например в задаче о притоке упругой жидкости к скважине в пласте бесконечной протяженности с постоянным дебитом.

В более сложных случаях система уравнений решается численными методами с применением ЭВМ. В настоящее время хорошо разработаны численные методы решения самых разнообразных и очень сложных задач подземной гидравлики. При этом упомянутые аналитические решения играют очень важную роль: на них априорируются численные методы.

Систему дифференциальных уравнений можно использовать также для качественного исследования процесса. Если полученные уравнения привести к безразмерному виду, то в качестве коэффициентов будут фигурировать безразмерные параметры подобия. Анализируя их строение и численные значения, можно судить, какие силы играют решающую роль в процессе, какие члены уравнения можно отбросить и т. д.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Выведем уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока для однородного сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде. Оно представляет собой уравнение баланса массы

в элементарном объеме пористой среды. Выделим мысленно в пористой среде, в которой происходит движение флюида, элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz (рис. 3.1). Пусть точка M , совпадающая с центром левой грани ab , имеет координаты x , y , z . Тогда точка M' в центре грани $a'b'$ имеет координаты $x + dx$, y , z . Масса флюида, вытекающего в объем через грань ab за малый промежуток времени dt , записывается в виде

$$(\rho w_x)_{ab} dy dz dt.$$

Отметим, что в силу малости выделенного объема и его граней можно считать, что плотность и скорость фильтрации распределены на гранях ab и $a'b'$ равномерно и равны значениям их в точках M и M' соответственно.

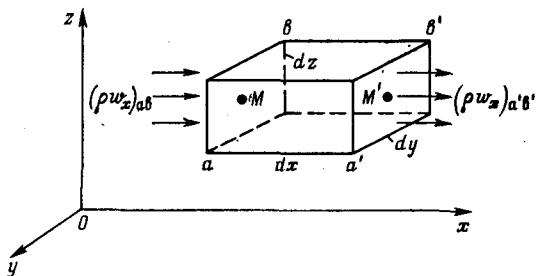


Рис. 3.1. Схема элемента пласта для вывода уравнения неразрывности

Масса флюида, вытекающая из объема через грань $a'b'$, равна

$$(\rho w_x)_{a'b'} dy dz dt.$$

Но так как при переходе от точки M грани ab к точке M' грани $a'b'$ координата x изменилась на малую величину dx , то можно записать

$$(\rho w_x)_{a'b'} = (\rho w_x)_{ab} + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} dx.$$

Тогда изменение массы флюида в объеме $abb'a'$ за промежуток времени dt за счет потока вдоль оси x :

$$[(\rho w_x)_{ab} - (\rho w_x)_{a'b'}] dy dz dt = - \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Рассматривая фильтрацию флюида в направлениях вдоль осей y и z , получим аналогичные выражения для изменения массы в элементарном объеме за счет потока вдоль этих осей в виде

$$- \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} dx dy dz dt \quad \text{и} \quad - \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Таким образом, общее изменение (накопление) массы в объеме $dxdydz$ за время dt будет

$$-\left[\frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} \right] dxdydzdt. \quad (3.1)$$

С другой стороны, масса флюида, находящегося в рассматриваемом элементарном поровом объеме,

$$M = \rho m dxdydz,$$

где m — коэффициент пористости пласта.

Изменение массы флюида за промежуток времени dt записывается в следующем виде (объем элемента $dxdydz$ фиксирован):

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial (\rho m)}{\partial t} dxdydzdt. \quad (3.2)$$

Приравнявая выражения (3.1) и (3.2) и сокращая их на $dxdydzdt$, получим уравнение неразрывности:

$$-\left[\frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial (\rho m)}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Отметим, что уравнение (3.3) справедливо только в том случае, если внутри выделенного элемента породы нет источников или стоков, выделяющих или поглощающих флюид (химических реакций, фазовых превращений и т. д.).

Выражение в левой части уравнения (3.3) представляет собой дивергенцию вектора массовой скорости фильтрации $\rho \vec{w}$ и кратко записывается так:

$$\frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = \text{div} (\rho \vec{w}). \quad (3.4)$$

Поэтому уравнение (3.3) имеет также следующую запись:

$$\text{div} (\rho \vec{w}) + \frac{\partial (\rho m)}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим фильтрацию флюидов в пористых средах, принимая в качестве закона движения линейный закон фильтрации Дарси (1.7). Можно получить дифференциальные уравнения движения, используя другие законы фильтрации, например закон Форхгеймера (1.12).

Закон Дарси в виде (1.6) или (1.7) записан в конечном виде, т. е. для пласта или образца с постоянной площадью сечения, где Δp^* — разность приведенных давлений на конечной длине L . Для трубки тока с переменной площадью сечения по длине трубки закон Дарси записывается в дифференциальной форме.

Выделим два сечения: первое — на расстоянии s от начала отсчета, второе — на расстоянии ds от первого (рис. 3.2). Пусть движение флюида происходит в направлении возрастания координаты s . В сечении с координатой s обозначим приведенное давление $p^*(s, t)$,

в сечении с координатой $s + ds$ давление

$$p^*(s + ds, t) = p^*(s, t) + \frac{\partial p^*}{\partial s} ds.$$

Используя формулу (1.7), получим

$$\begin{aligned} w = \frac{k}{\mu} \frac{p^*(s, t) - p^*(s + ds, t)}{ds} = \frac{k}{\mu} \times \\ \times \frac{p^*(s, t) - \left[p^*(s, t) + \frac{\partial p^*}{\partial s} ds \right]}{ds}, \end{aligned}$$

или

$$w = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial s}. \quad (3.6)$$

Знак минус появился в правой части формулы (3.6) потому, что приведенное давление уменьшается в направлении движения жидкости, т. е. градиент приведенного давления отрицателен $\partial p^* / \partial s < 0$.

Формула (3.6) справедлива только для изотропной среды, для которой характерно постоянство проницаемости k по всем направлениям в окрестности рассматриваемой точки. Однако с переходом от точки к точке пласта проницаемость, вообще говоря, может изменяться, т. е. $k = k(x, y, z)$ (модель изотропного неоднородного пласта).

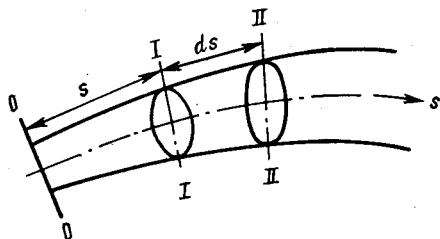


Рис. 3.2. Трубка тока

Запишем уравнение (3.6) в проекциях на оси координат x, y, z . Если обозначить через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единичные векторы вдоль осей координат, то вектор скорости фильтрации можно записать так:

$$\vec{w} = \vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z.$$

В правой части (3.6) $\partial p^* / \partial s$ представляет собой градиент приведенного давления, т. е. вектор с составляющими $\partial p^* / \partial x, \partial p^* / \partial y, \partial p^* / \partial z$:

$$\text{grad } p^* = \vec{i} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p^*}{\partial z}.$$

Тогда

$$\vec{w} = - \frac{k}{\mu} \text{grad } p^*, \quad (3.7)$$

или в проекциях на оси координат

$$\omega_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \omega_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \omega_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial z}. \quad (3.8)$$

Если ось z направлена вертикально вверх, то дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\omega_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \omega_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \omega_z = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \quad (3.9)$$

или в векторной форме

$$\vec{\omega} = -\frac{k}{\mu} (\text{grad } p - \rho \vec{g}). \quad (3.10)$$

При изучении движения жидкости во многих пористых материалах обнаруживается, что существуют некоторые преимущественные направления, при течении по которым наблюдаются более интенсивные фильтрационные потоки, т. е. фильтрационные характеристики изменяются в зависимости от направления потока. Пористые среды, в которых коэффициент проницаемости зависит от направления потока, называются анизотропными. Анизотропия фильтрационных течений однородных ньютоновских жидкостей обуславливается только геометрическими характеристиками породы. В этом случае закон линейной фильтрации имеет более сложный вид, чем закон Дарси (3.10), так как оказывается, что векторы скорости фильтрации и градиента давления не совпадают по направлению.

На практике часто встречается анизотропия естественных пористых сред специального вида. Так как большинство пород-коллекторов образованы осадконакоплением, пористые среды в этом случае имеют отчетливую слоистую структуру. Фильтрационные свойства такой среды одинаковы для любого направления, лежащего в плоскости слоя, и изменяются для направлений, не лежащих в этой плоскости. Если систему координат xuz выбрать специальным образом, а именно плоскость xu совместить с плоскостью слоя, а координатную ось z направить перпендикулярно, то закон Дарси можно записать в виде

$$\omega_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \omega_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \omega_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Выбранные таким образом оси координат называются главными осями породы.

При изучении фильтрации в такой слоистой пористой среде для упрощения часто рассматривают две предельные схемы: $k_z = 0$ и $k_z = \infty$. В случае $k_z = 0$ скорости, перпендикулярные к напластованию, отсутствуют и движение происходит вдоль тонких параллельных прослоев. В случае $k_z = \infty$ из условия конечности ω_z следует $\partial p / \partial z = 0$, т. е. давление в каждом поперечном сечении распределено гидростатически, а компоненты скорости, параллельные плоскости xu , распределены равномерно по поперечному сечению потока.

§ 4. ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРОВ ФЛЮИДОВ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ОТ ДАВЛЕНИЯ

Выведенные дифференциальные уравнения (3.3) и (3.9) содержат плотность флюида ρ , а также коэффициенты пористости m , проницаемости k и вязкости флюида μ . Для дальнейших расчетов надо знать зависимость этих коэффициентов от давления.

При изотермическом процессе зависимость плотности однородного флюида от давления представляет собой уравнение состояния.

При установившейся фильтрации капельной жидкости можно считать ее плотность не зависящей от давления, т. е. рассматривать жидкость как несжимаемую, тогда

$$\rho = \text{const.} \quad (3.11)$$

В неустановившихся процессах часто большое количество нефти можно отобрать за счет расширения ее объема при снижении давления. В этих процессах необходим учет сжимаемости жидкости. Считая капельную жидкость упругой, можно записать закон сжимаемости ее в виде

$$\beta_{\text{ж}} = - \frac{1}{V_{\text{ж}}} \frac{dV_{\text{ж}}}{dp}, \quad (3.12)$$

где $V_{\text{ж}}$ — начальный объем жидкости; $dV_{\text{ж}}$ — изменение объема при изменении давления на dp ; $\beta_{\text{ж}}$ — коэффициент объемного сжатия жидкости, который обычно считают постоянным для данной жидкости (не зависящим от давления и температуры). Для различных нефтей отечественных месторождений коэффициент объемного сжатия составляет $\beta_{\text{н}} = (7-30) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, для пластовых вод $\beta_{\text{в}} = (2,7-5) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

В формуле (3.12) перейдем от объемов к плотности. Подставляя $V_{\text{ж}} = M/\rho$ и $dV_{\text{ж}} = -M d\rho/\rho^2$, будем иметь

$$\beta_{\text{ж}} = \frac{M d\rho/\rho^2}{(M/\rho) dp} = \frac{d\rho}{\rho dp},$$

откуда $d\rho/\rho = \beta_{\text{ж}} dp$.

Проинтегрируем последнее равенство от фиксированных значений p_0 и ρ_0 до текущих значений p и ρ , соответственно

$$\int_{\rho_0}^{\rho} d\rho/\rho = \beta_{\text{ж}} \int_{p_0}^p dp,$$

отсюда

$$\ln(\rho/\rho_0) = \beta_{\text{ж}}(p - p_0)$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p - p_0)}. \quad 3.13$$

Показатель степени $\beta_{\text{ж}}(p - p_0)$ обычно много меньше единицы. Действительно, если $\beta_{\text{ж}} = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, а $p - p_0 = 10 \text{ МПа}$, $\beta_{\text{ж}}(p -$

$-p_0) = 0,01$. В этом случае можно, разложив функцию $e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)}$ в ряд Тейлора, ограничиться двумя первыми членами ряда

$$e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} \approx 1 + \beta_{\text{ж}}(p-p_0).$$

При этом получаем линейную зависимость плотности от давления

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}}(p-p_0)]. \quad (3.14)$$

Для больших перепадов давления $p-p_0$ надо использовать уравнение состояния (3.13).

Иногда вместо коэффициента объемного сжатия вводят модуль упругости жидкости $K_{\text{ж}} = 1/\beta_{\text{ж}}$. Формулы (3.13) и (3.14), выраженные через модуль упругости $K_{\text{ж}}$, примут вид

$$\rho = \rho_0 e^{(p-p_0)/K_{\text{ж}}}, \quad (3.15)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + (p-p_0)/K_{\text{ж}}]. \quad (3.16)$$

Природные газы можно считать идеальными (совершенными), если пластовые давления газовых месторождений невелики (до 6—9 МПа) и газ отбирается при депрессии до 1 МПа. Уравнением состояния идеального газа является уравнение Клапейрона—Менделеева

$$p/\rho = RT, \quad (3.17)$$

где R — газовая постоянная для газа с молекулярной массой $\bar{\mu}$, связанная с универсальной газовой постоянной $\bar{R}$ зависимостью $R = \bar{R}/\bar{\mu}$.

Если $T = T_{\text{пл}} = \text{const}$, а $\rho_{\text{ат}}$ — плотность газа при атмосферном давлении $p_{\text{ат}}$ и пластовой температуре $T_{\text{пл}}$, то

$$p_{\text{ат}}/\rho_{\text{ат}} = RT. \quad (3.18)$$

Приравнивая левые части соотношений (3.17) и (3.18), получим уравнение состояния идеального газа, которым будем пользоваться в дальнейшем:

$$\rho = \rho_{\text{ат}} p/p_{\text{ат}}. \quad (3.19)$$

В настоящее время в практике все чаще встречаются газовые месторождения с высокими пластовыми давлениями (до 40—60 МПа), которые иногда эксплуатируются с большими депрессиями (порядка 15—30 МПа). В этих условиях следует использовать уравнение состояния реального газа, которое в отличие от уравнения (3.17) записывается в виде

$$p/\rho = zRT, \quad (3.20)$$

где z — коэффициент, характеризующий степень отклонения состояния реального газа от закона идеальных газов (коэффициент сверхсжимаемости) и зависящий для данного газа от давления и температуры $z = z(p, T)$. Значения коэффициента сверхсжимаемости z определяются по графикам Д. Брауна в зависимости от

приведенных величин абсолютного давления $p_{\text{пр}} = p/p_{\text{кр. см}}$ и температуры $T_{\text{пр}} = T/T_{\text{кр. см}}$, где $p_{\text{кр. см}}$ и $T_{\text{кр. см}}$ — критические давление и температура для природного газа, представляющего собой смесь различных компонентов. Графики зависимости $z = z(p_{\text{пр}}, T_{\text{пр}})$ приведены в работах [4, 6].

Для изотермической фильтрации реального газа зависимость плотности от давления принимает вид

$$\rho = \rho_{\text{ат}} z(p_{\text{ат}}) p / p_{\text{ат}} z(p). \quad (3.21)$$

Зависимость $z(p)$ при постоянной температуре можно считать линейной при малых изменениях давления

$$z = z_0 [1 - a_z (p_0 - p)], \quad (3.22)$$

где z_0 — коэффициент сверхсжимаемости при $p = p_0$, и экспоненциальной при больших изменениях давления

$$z = z_0 e^{-a_z (p_0 - p)}, \quad (3.23)$$

причем константа a_z должна быть подобрана так, чтобы кривая (3.22) или (3.23) как можно ближе подходила к соответствующей эмпирической кривой на графиках Д. Брауна.

Эксперименты показывают, что коэффициенты вязкости нефти (при давлениях выше давления насыщения) и газа увеличиваются с повышением давления. При значительных изменениях давления (до 100 МПа) зависимость вязкости пластовых нефтей и природных газов от давления можно принять экспоненциальной

$$\mu = \mu_0 e^{-a_\mu (p_0 - p)}. \quad (3.24)$$

При малых изменениях давления эта зависимость имеет линейный характер:

$$\mu = \mu_0 [1 - a_\mu (p_0 - p)]. \quad (3.25)$$

Здесь μ_0 — вязкость при фиксированном давлении p_0 ; a_μ — коэффициент, определяемый экспериментально и зависящий от состава нефти или газа.

Чтобы выяснить, как зависит от давления коэффициент пористости, рассмотрим вопрос о напряжениях, действующих в пористой среде, заполненной жидкостью.

Масса горных пород, расположенных над кровлей продуктивного пласта, создает так называемое горное давление $p_{\text{горн}}$, которое обычно можно считать неизменным в процессе разработки.

Горное давление определяется по формуле $p_{\text{горн}} = \rho_{\text{горн}} gH$, где $\rho_{\text{горн}}$ — средняя плотность горных пород, слагающих вышележащие пласты; H — глубина залегания пласта.

Если предположить, что кровля и подошва пласта абсолютно непроницаемы и полностью воспринимают нагрузку вышележащих пород, то горное давление уравнивается напряжением в скелете пласта σ и давлением p в жидкости:

$$p_{\text{горн}} = (1 - m) \sigma + mp. \quad (3.26)$$

Здесь σ — истинное напряжение в скелете пористой среды, рассчитанное на единицу горизонтальной площади, мысленно выделенной в любой точке пласта; оно действует на части поверхности $(1-m)$; поровое давление p действует на остальной части поверхности m . Удобнее ввести так называемое эффективное напряжение $\sigma_{\text{эф}}$, определяемое как разность напряжений в твердом скелете и в жидкой фазе и связанное с истинным напряжением соотношением

$$\sigma_{\text{эф}} = (1-m)(\sigma - p). \quad (3.27)$$

Тогда из (3.26) следует, что

$$p_{\text{горн}} = \sigma_{\text{эф}} + p = \text{const.} \quad (3.28)$$

Эффективное напряжение физически интерпретируется как та часть истинного напряжения σ в твердой фазе, которая передается по контакту между зернами скелета. Понятие эффективного напряжения удобно еще и потому, что его можно определить из опыта: можно измерить нагрузку Γ , моделирующую горное давление $p_{\text{горн}}$ и поровое давление p , и найти $\sigma_{\text{эф}} = \Gamma - p$.

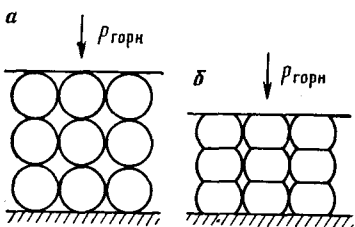


Рис. 3.3. Упрощенная схема строения пористой среды:

a — до деформации; *б* — после деформации

$\sigma_{\text{эф}} : m = m(p, \sigma_{\text{эф}})$. При падении давления уменьшаются усилия, сжимающие каждое из зерен породы, поэтому увеличивается объем зерен и уменьшается объем пор. Увеличение напряжения $\sigma_{\text{эф}}$ приводит к тому, что зерна породы испытывают дополнительную деформацию — поверхность контактов между зернами увеличивается, происходит уплотнение упаковки зерен (схематично этот процесс показан на рис. 3.3), возможна также перегруппировка зерен, разрушение цементирующего вещества и самих зерен, дробление зерен и т. д.

В тех случаях, когда $p_{\text{горн}} = \text{const}$, обычно принимают, что пористость зависит только от давления $m = m(p)$.

Вследствие малой деформации твердой фазы считают обычно, что изменение пористости зависит от изменения давления линейно. Закон сжимаемости породы записывают следующим образом, вводя коэффициент объемной упругости пласта β_c :

$$\beta_c = dV_n / V dp, \quad (3.29)$$

где dV_n — изменение объема пор в элементе пласта, имеющем

объем V , при изменении давления на dp . Закон сжимаемости (3.29) можно записать в виде

$$dm = \beta_c dp \quad (3.30)$$

или в конечной форме

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0), \quad (3.31)$$

где m_0 — коэффициент пористости при $p = p_0$.

Лабораторные эксперименты для разных зернистых пород и промысловые исследования показывают, что коэффициент объемной упругости пласта составляет: $\beta_c = (0,3-2) 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

При значительных изменениях давления изменение пористости описывается уравнением

$$m = m_0 e^{-\alpha_m (p_0 - p)}. \quad (3.32)$$

Экспериментально показано, что не только пористость, но и проницаемость существенно изменяются с изменением пластового давления, причем часто проницаемость значительно больше, чем пористость. При малых изменениях давления эту зависимость можно принять линейной

$$k = k_0 [1 - a_k (p_0 - p)], \quad (3.33)$$

а при больших — экспоненциальной

$$k = k_0 e^{-a_k (p_0 - p)}. \quad (3.34)$$

В трещиноватых пластах проницаемость изменяется в зависимости от давления более интенсивно, чем в пористых. Поэтому в трещиноватых пластах учет зависимости $k(p)$ более необходим, чем в гранулярных (подробнее см. гл. 12).

Уравнения состояния флюидов, насыщающих пласт, и пористой среды замыкают систему дифференциальных уравнений.

Таким образом, в наиболее общем случае, когда плотность, вязкость флюида, пористость и проницаемость среды зависят от давления, задача заключается в определении восьми неизвестных функций от координат и времени: давления p , скорости фильтрации $\vec{w}$ (w_x, w_y, w_z), плотности ρ , вязкости μ , пористости m и проницаемости k . Для этого нужно решить систему из восьми уравнений, включающих в себя уравнение неразрывности (3.3), три уравнения движения (3.9), уравнение состояния флюида — одно из соотношений (3.13), (3.14), (3.19) или (3.20); одно из соотношений для вязкости — (3.24) или (3.25); для пористости — (3.31) или (3.32); для проницаемости — (3.33) или (3.34).

§ 5. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Продуктивный пласт или выделенную из него часть можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную поверхностями — границами. Границы могут быть непроницаемыми

для флюидов, например кровля и подошва пласта, сбросы и поверхности выклинивания. Граничной поверхностью является также поверхность, по которой пласт сообщается с областью питания (с дневной поверхностью, с естественным водоемом), это так называемый контур питания; стенка скважины является внутренней границей пласта.

Чтобы получить решение системы уравнений, к ней необходимо добавить начальные и граничные (краевые) условия.

Начальное условие заключается в задании искомой функции во всей области в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Например, если искомой функцией является пластовое давление, то начальное условие может иметь вид

$$p = p_0(x, y, z) \quad \text{при } t = 0, \quad (3.35)$$

т. е. в начальный момент задается распределение давления во всем пласте.

Если в начальный момент пласт невозмущен, то начальное условие примет вид

$$p = p_n = \text{const} \quad \text{при } t = 0. \quad (3.36)$$

Граничные (краевые) условия задаются на границах пласта. Число граничных условий должно быть равно порядку дифференциального уравнения по координатам.

Возможны следующие граничные условия.

I. На внешней границе Γ :

1) постоянное давление

$$p(\Gamma, t) = p_k = \text{const}, \quad (3.37)$$

т. е. граница является контуром питания;

2) постоянный переток через границу

$$\partial p / \partial n = \text{const}, \quad (3.38)$$

где n — нормаль к границе Γ ;

3) переменный переток через границу

$$\partial p / \partial n = f_1(t), \quad (3.39)$$

4) замкнутая внешняя граница

$$\partial p / \partial n = 0; \quad (3.40)$$

5) бесконечный по простиранию пласт

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} p(x, y, t) = p_k = \text{const}; \quad (3.41)$$

II. На внутренней границе:

6) постоянное давление на забое скважины (радиус скважины r_c)

$$p(r_c, t) = p_c = \text{const}; \quad (3.42)$$

7) постоянный дебит. Это условие при выполнении закона Дарси можно представить следующим образом:

$$Q = \omega, \omega = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r_c h = \text{const},$$

или

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \quad \text{при } r=r_c, \quad (3.43)$$

где $2\pi r_c h$ — площадь боковой поверхности скважины; h — толщина пласта;

8) переменное давление на забое скважины

$$p(r_c, t) = f_2(t) \quad \text{при } r=r_c; \quad (3.44)$$

9) переменный дебит

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = f_3(t) \quad \text{при } r=r_c; \quad (3.45)$$

10) отключение скважины

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=r_c. \quad (3.46)$$

В последующих главах будут рассмотрены задачи, которые решаются с использованием граничных условий 1—10, причем основными условиями, которые встретятся в курсе, будут условия постоянства давления на конечном и бесконечно удаленном контуре питания (1 и 5), а также постоянства давления и дебита на стенке скважины (6 и 7).

Глава 4

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЗАКОНУ ДАРСИ

Выведем дифференциальное уравнение установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси на основе уравнения неразрывности, уравнений движения и уравнений состояния жидкости и пористой среды.

В рассматриваемом случае без учета деформации пористой среды ($\rho = \text{const}$, $m = \text{const}$) уравнение неразрывности (3.3) принимает вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнения установившегося движения жидкости по закону Дарси в поле силы тяжести, как установлено в гл. 3, имеют вид

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right). \quad (4.2)$$

Определяя из уравнений (4.2) производные $\partial w_x / \partial x$, $\partial w_y / \partial y$, $\partial w_z / \partial z$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

и подставляя их величины в уравнение неразрывности (4.1), получаем

$$-\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (4.4)$$

$$\nabla^2 p = 0, \text{ или } \operatorname{div} \operatorname{grad} p = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) является дифференциальным уравнением установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси в недеформируемой пористой среде и носит название уравнения Лапласа.

В теории фильтрации оказывается удобным ввести функцию $\Phi(x, y, z)$, называемую потенциалом скорости фильтрации и определяемую как

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p + \rho g z). \quad (4.6)$$

Если подставить функцию Φ (4.6) в уравнения движения (4.2), то их можно записать в виде

$$w_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Таким образом, потенциалом скорости фильтрации называется функция $\Phi(x, y, z)$, производная которой с обратным знаком вдоль линии тока равна скорости фильтрации $w(x, y, z)$.

Продифференцировав уравнения (4.7) по координатам и подставив значения производных скорости фильтрации в уравнение неразрывности (4.1), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.8)$$

т. е. потенциал скорости фильтрации Φ так же, как и давление p , удовлетворяет уравнению Лапласа. Функции $p(x, y, z)$ и $\Phi(x,$

y, z), удовлетворяющие уравнению Лапласа, являются непрерывными, имеющими непрерывные частные производные первого и второго порядка, и называются гармоническими.

Решения уравнения Лапласа как решения линейного однородного дифференциального уравнения, имеют следующие свойства:

- 1) сумма частных решений есть также решение этого уравнения;
- 2) произведение частного решения на произвольную постоянную есть также решение этого уравнения.

Пусть, например, $p_1, p_2, \dots, p_n$ являются решениями уравнения (4.4). Тогда функция

$$p = \sum_{i=1}^n C_i p_i,$$

где C_i — константы, также удовлетворяет уравнению (4.4).

Указанные свойства приводят к принципу суперпозиции, широко используемому при решении разнообразных задач подземной гидродинамики, сводящихся к уравнению Лапласа ¹.

§ 2. ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Одномерным называется фильтрационный поток жидкости, в котором скорость фильтрации и напор являются функциями только одной координаты, отсчитываемой вдоль линии тока.

К одномерным относятся следующие потоки.

1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток.
2. Плоскорадиальный фильтрационный поток.
3. Радиально-сферический фильтрационный поток.

Приведем краткое описание этих потоков.

1. Предположим, что при фильтрации жидкости траектории ² всех частиц жидкости являются параллельными прямыми, а скорости фильтрации во всех точках любого поперечного (перпендикулярного к линиям тока) сечения потока равны друг другу. Законы движения вдоль всех траекторий такого фильтрационного потока совершенно одинаковы, а потому достаточно изучить движение вдоль одной из траекторий, которую можно принять за ось координат — ось x (рис. 4.1).

Прямолинейно-параллельный поток имеет место:

а) в лабораторных условиях при движении жидкости или газа через цилиндрический керн или через прямую трубу постоянного диаметра, заполненную пористой средой;

б) на отдельных участках продуктивного пласта при притоке жидкости к батарее скважин, если пласт постоянной толщины имеет в плане форму прямоугольника (рис. 4.2). При эксплуатации прямолинейной батареи равнодебитных скважин AA' в пласте по-

¹ Заметим, что принцип суперпозиции применим в соответствующей форме и к другим классам линейных дифференциальных уравнений.

² Напомним, что при установившемся движении жидкости траектории совпадают с линиями тока.

стоянной толщины h и постоянной ширины B , изображенном схематично на рис. 4.2, при постоянных давлениях на забоях скважин p_r и на контуре питания p_k приток жидкости к скважинам будет прямолинейно-параллельным (за исключением ближайшей к скважинам зоны, где линии тока будут искривляться).

Если уплотнить сетку скважин в батарее (заменить батарею сплошной прямолинейной выработкой — галереей), то движение жидкости к галерее будет строго прямолинейно-параллельным.

2. Предположим, имеется горизонтальный пласт постоянной толщины и неограниченной протяженности. В нем пробурена одна скважина, вскрывшая пласт на всю толщину и имеющая открытый забой¹.

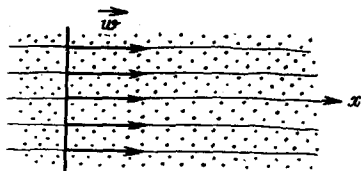


Рис. 4.1. Схема прямолинейно-параллельного фильтрационного потока

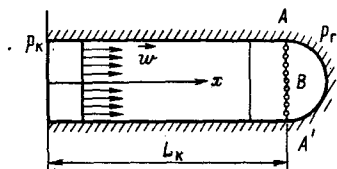


Рис. 4.2. Схема прямолинейно-параллельного потока жидкости к батарее скважин

При отборе жидкости из скважины частицы жидкости в пласте будут двигаться по горизонтальным прямолинейным траекториям, радиально сходящимся к центру скважины. Такой фильтрационный поток называется плоскорадиальным. Схемы линий тока в любой горизонтальной плоскости потока будут идентичными и для полной характеристики потока достаточно изучить движение жидкости в одной горизонтальной плоскости.

На рис. 4.3 показано горизонтальное сечение плоскорадиального фильтрационного потока, а на рис. 4.4 — вертикальное сечение такого потока.

В установившемся плоскорадиальном потоке давление и скорость фильтрации в любой точке M зависят только от расстояния r данной точки от оси скважины. Таким образом, этот поток является другим видом одномерного фильтрационного потока.

Если скважина не добывающая, а нагнетательная, то направление линий тока на рис. 4.3 и 4.4 нужно заменить на противоположное.

3. Рассмотрим пласт неограниченной толщины с плоской горизонтальной непроницаемой кровлей, через которую скважина сообщается с пластом полусферическим забоем (рис. 4.5). При эксплуатации такой скважины траектории движения всех частиц жидкости или газа в пласте будут прямолинейными и радиально сходящимися в центре полусферического забоя, в точке O .

¹ Такая скважина называется гидродинамически совершенной скважиной (подробнее о совершенстве скважин см. в § 6 данной главы).

В случае, если через скважину в пласт нагнетается жидкость или газ, их траектории будут радиально расходящимися от центра забоя скважины O .

В таком установившемся потоке напор и скорость фильтрации в любой его точке будут функцией только расстояния этой точки от центра забоя скважины. Следовательно, этот вид фильтрационного потока также является одномерным и называется радиально-

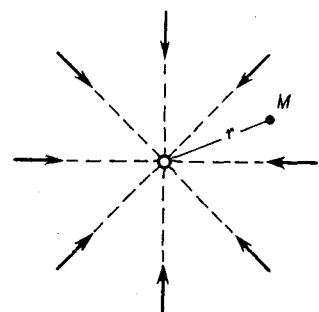


Рис. 4.3. Горизонтальное сечение плоскорадиального потока

Рис. 4.4. Вертикальное сечение плоскорадиального потока

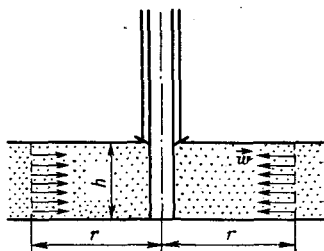
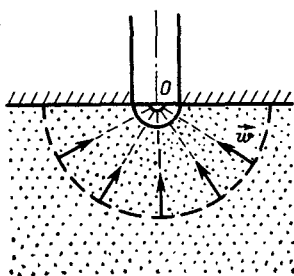


Рис. 4.5. Вертикальное сечение радиально-сферического фильтрационного потока

сферическим. Такой поток может реализовываться, когда скважина вскрывает только кровлю пласта или глубина вскрытия значительно меньше толщины пласта.

Описанные три вида одномерных фильтрационных потоков являются простейшими моделями реальных течений, возникающих при разработке нефтегазовых месторождений, но играют важную роль при решении некоторых практических задач.

Задача исследования установившегося фильтрационного потока заключается в определении дебита (или расхода), давления, градиента давления и скорости фильтрации в любой точке потока, а также в установлении закона движения частиц жидкости (или газа) вдоль их траекторий и в определении средневзвешенного по объему порового пространства пластового давления.

Перейдем теперь к изучению характеристик простейших установившихся фильтрационных потоков несжимаемой жидкости в однородных пластах.

Прямолинейно-параллельный поток

Пусть в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B в сечении I—I, совпадающем с контуром питания, поддерживается постоянное давление p_k , а в сечении II—II, отстоящем на расстоянии L_k от контура питания, поддерживается постоянное давление p_r (здесь расположена добывающая галерея)¹ (рис. 4.6). Направим ось координат Ox вдоль линии тока, ось Oy — вдоль контура питания. Для полного исследования такого потока, как было выяс-

нено ранее, достаточно изучить движение жидкости вдоль оси Ox .

Дифференциальное уравнение Лапласа (4.4) при этом примет вид

$$d^2 p / dx^2 = 0. \quad (4.9)$$

Для определения давления в любой точке потока проинтегрируем дважды уравнение (4.9) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} p &= p_k & \text{при } x &= 0; \\ p &= p_r & \text{при } x &= L_k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Рис. 4.6. Вертикальное и горизонтальное сечение прямолинейно-параллельного фильтрационного потока

Тогда в результате двукратного интегрирования (4.9) находим последовательно

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= C_1 \quad \text{или} \quad dp = C_1 dx, \\ p &= C_1 x + C_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Подставляя в (4.11) граничные условия (4.10), получаем

$$\begin{aligned} C_2 &= p_k; \\ C_1 &= - \frac{p_k - p_r}{L_k}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Закон распределения давления в пласте найдем, подставив значения постоянных C_1 и C_2 из (4.12) в (4.11):

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x. \quad (4.13)$$

Из (4.13) получаем выражение для градиента давления

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_k - p_r}{L_k}. \quad (4.14)$$

¹ Сечения I—I и II—II перпендикулярны ко всем границам пласта: кровле, подошве и боковым границам).

Уравнение движения для рассматриваемого случая, как следует из уравнений (4.12), будет иметь вид

$$\omega = - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (4.15)$$

Тогда, подставив выражение (4.14) для градиента давления, в (4.15) найдем скорость фильтрации

$$\omega = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k}. \quad (4.16)$$

Объемный расход жидкости в потоке определяется произведением скорости фильтрации ω на площадь поперечного сечения потока $\omega = Bh$, т. е.

$$Q = \omega \omega = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k} Bh. \quad (4.17)$$

Закон движения частиц жидкости $t = f(x)$ найдем, используя соотношение между скоростью фильтрации ω и средней скоростью движения частиц жидкости v . Имеем

$$\omega = mv = m \frac{dx}{dt},$$

откуда

$$dt = \frac{m}{\omega} dx. \quad (4.18)$$

Подставив выражение (4.16) для скорости фильтрации в (4.18) и интегрируя в пределах от 0 до t и от 0 до x , получим закон движения жидких частиц:

$$t = \frac{m}{\frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k}} x = \frac{m\mu L_k}{k(p_k - p_r)} x, \quad (4.19)$$

который, используя (4.17), можно представить в виде

$$t = \frac{m}{\omega} x = \frac{mBh}{Q} x. \quad (4.20)$$

Средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление найдем из выражения

$$\tilde{p} = \frac{1}{V_{\text{пор}}} \int_{V_{\text{пор}}} p dV_{\text{пор}}. \quad (4.21)$$

В нашем случае

$$V_{\text{пор}} = mBhL_k, \quad dV_{\text{пор}} = mBhdx. \quad (4.22)$$

Подставив в (4.21) значения $V_{\text{пор}}$, $dV_{\text{пор}}$ из (4.22), p из (4.13) и проинтегрировав, найдем

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{1}{mBhL_k} \int_0^{L_k} \left(p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x \right) mBh dx = \\ &= \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} \left(p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x \right) dx = \frac{1}{L_k} \left(p_k L_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{L_k^2}{2} \right) = \frac{p_k + p_r}{2}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

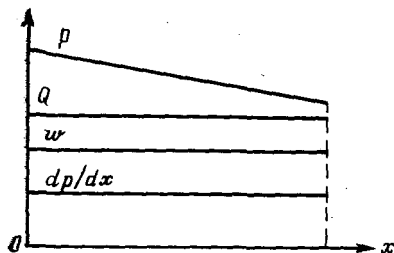


Рис. 4.7. Изменение характеристик прямолинейно-параллельного фильтрационного потока вдоль линии тока

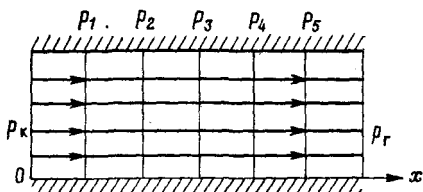


Рис. 4.8. Гидродинамическое поле прямолинейно-параллельного фильтрационного потока

Таким образом, характеристики установившегося прямолинейно-параллельного потока несжимаемой жидкости в однородном пласте определяются соотношениями (4.13), (4.14), (4.16), (4.17), (4.19) и (4.23). Анализ этих формул приводит к следующим выводам.

Пластовое давление (4.13) распределяется вдоль линии тока (оси Ox) по линейному закону (рис. 4.7). В любой плоскости yOz давление одинаково во всех точках, для которых постоянна абсцисса x , т. е. уравнение

$$x = \text{const} \quad (4.24)$$

представляет собой уравнение семейства изобар (линий равного давления) — семейства горизонтальных прямых, перпендикулярных к линии тока Ox .

Поверхностями равного давления в таком потоке будут являться вертикальные плоскости, перпендикулярные к линиям тока Ox .

Изобары и линии тока (в данном случае и траектории частиц жидкости) образуют два семейства взаимно перпендикулярных прямых линий.

В установившемся прямолинейно-параллельном потоке семейством изобар будут равноотстоящие друг от друга прямые, перпен-

дикулярные к оси Ox , а семейство траекторий будет представлено прямыми, равноотстоящими друг от друга и параллельными оси Ox (рис. 4.8).

Совокупность изображенных на чертеже изобар и траекторий частиц жидкости называют гидродинамическим полем данного потока. Градиент давления dp/dx (4.14), скорость фильтрации w (4.16) и расход (дебит) жидкости Q (4.17) постоянны вдоль потока (не зависят от x) (см. рис. 4.7).

Тот факт, что на рис. 4.8 изобары и траектории представлены равноотстоящими параллельными прямыми, подтверждает постоянство градиента давления и скорости фильтрации в любой точке потока. Как и следовало ожидать, зависимость между временем t и координатой x (4.19) получилась линейная, ибо в рассматриваемых условиях фильтрационный поток движется с постоянной скоростью.

Средневзвешенное пластовое давление p (4.23) равно полусумме значений давлений p_k и p_r на границах потока, что также находится в полном соответствии с линейным распределением (4.13) давления в пласте.

Плоскорадиальный фильтрационный поток

Будем считать, что несжимаемая жидкость притекает к гидродинамически совершенной скважине радиусом r_c , расположенной в центре однородного горизонтального кругового пласта постоянной толщины h . На внешней круговой границе пласта радиусом R_k , служащей контуром питания, поддерживается постоянное давление p_k , на забое скважины давление p_c тоже постоянно. Движение жидкости установившееся.

Дифференциальное уравнение (4.4) для случая плоского фильтрационного потока имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (4.25)$$

Можно упростить исследование плоскорадиального потока, если уравнение Лапласа (4.25) представить в цилиндрических координатах r и φ . В данном случае вследствие осевой симметрии характеристики потока не зависят от угла φ и являются функциями только координаты r . Здесь мы дадим более наглядное решение этой задачи, минуя формальное преобразование координат. Используем для этого схему течения в трубке тока переменного сечения.

Пусть ось цилиндра радиуса $r > r_c$ (где r_c — радиус скважины) совпадает с осью z . Тогда для плоскорадиального потока произвольная трубка тока с центральным углом φ и площадью фильтрационной поверхности $\omega(r) = \varphi r h$ имеет вид, представленный на рис. 4.9.

Так как $r = R_k - s$, а $ds = -dr$, в соответствии с законом Дарси можно записать:

$$Q = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{ds} \omega(s) = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \varphi r h.$$

Поскольку при установившемся движении несжимаемой жидкости расход Q сохраняется вдоль оси r струйки, имеем

$$\frac{dQ}{dr} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \varphi r h \right) = 0.$$

Отсюда, сокращая на постоянные величины k , μ , h и φ , получаем

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad (4.26)$$

Уравнение (4.26) в развернутом виде запишется так:

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = 0. \quad (4.27)$$

Рис. 4.9. Трубка тока в плоскорадиальном потоке

Это и есть дифференциальное уравнение Лапласа в полярных координатах для установившегося плоскорадиального фильтрационного потока несжимаемой жидкости по закону Дарси.

Дважды проинтегрировав уравнение (4.26), получим его общее решение. Находим последовательно

$$r \frac{dp}{dr} = C_1, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dr} = C_1 \frac{1}{r}, \quad (4.28)$$

$$dp = C_1 \frac{dr}{r}, \quad \text{откуда} \quad p = C_1 \ln r + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из граничных условий, которые в данном случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} p &= p_c \quad \text{при} \quad r = r_c; \\ p &= p_k \quad \text{при} \quad r = R_k. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставляя граничные условия (4.29) в общее решение (4.28), находим

$$\begin{aligned} p_c &= C_1 \ln r_c + C_2; \\ p_k &= C_1 \ln R_k + C_2, \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}; \quad (4.30)$$

$$C_2 = p_c - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln r_c = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln R_k. \quad (4.31)$$

Подставляя (4.30) и (4.31) в общее решение (4.28), получим закон распределения давления в плоскорадиальном потоке:

$$p = p_c + \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c} = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}. \quad (4.32)$$

Градиент давления dp/dr определим из (4.28), подставив в него значение C_1 из (4.30):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (4.33)$$

Тогда скорость фильтрации и дебит скважины соответственно

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}; \quad (4.34)$$

$$Q = w \omega(r) = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} 2\pi r h,$$

откуда

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (4.35)$$

Формулу (4.35) называют формулой Дюпюи по фамилии ее автора.

Закон движения частиц жидкости вдоль их траекторий найдем из соотношения скорости фильтрации и средней скорости движения жидкости

$$w = mv = m \frac{ds}{dt} = -m \frac{dr}{dt},$$

откуда

$$dt = -\frac{m}{w} dr.$$

Подставляя сюда значение скорости фильтрации w из (4.34) и интегрируя в пределах от 0 до t и от R_0 до r , получим закон движения жидких частиц:

$$t = \frac{m\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}{k(p_k - p_c)} \frac{R_0^2 - r^2}{2} = \frac{\pi m h (R_0^2 - r^2)}{Q}, \quad (4.36)$$

где R_0 — начальное положение частицы жидкости в момент времени $t = 0$; r — текущее положение частицы жидкости в момент времени t .

Время T отбора всей жидкости из кругового пласта радиусом R_k получим, если в (4.36) подставим вместо R_0 радиус контура питания R_k , а вместо r — радиус скважины r_c . Тогда

$$T = \pi m h (R_k^2 - r_c^2) / Q. \quad (4.37)$$

Вычислим средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление

$$\bar{p} = \frac{1}{V_{\text{пор}}} \int_{V_{\text{пор}}} p dV'_{\text{пор}}.$$

Здесь $V_{\text{пор}} = \pi (R_k^2 - r_c^2) h m$ — полный поровый объем в пласте радиусом R_k ; $V'_{\text{пор}} = \pi (r^2 - r_c^2) h m$ — объем пор в части пласта радиусом r .

Используя эти величины и формулу (4.32) для давления p , находим

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi m h (R_k^2 - r_c^2)} \int_{r_c}^{R_k} \left(p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} \right) 2\pi m h r dr,$$

откуда после интегрирования получим

$$\bar{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (4.38)$$

При вычислении интеграла предполагали, что $r_c \ll R_k$.

Таким образом, характеристики установившегося плоскорадиального потока несжимаемой жидкости в однородном пласте определяются по формулам (4.32) — (4.38). Проанализируем эти соотношения. Прежде всего отметим, что во все выведенные формулы входят разности давлений, поэтому под величинами p_k и p_c можно подразумевать как абсолютное, так и избыточное давление.

Дебит скважины, как следует из формулы Дюпюи (4.35), прямо пропорционален перепаду давления $\Delta p = p_k - p_c$ и одинаков через любую цилиндрическую поверхность, соосную скважине, т. е. от r не зависит.

График зависимости дебита от перепада давления называется индикаторной диаграммой. Следовательно, в рассматриваемом потоке индикаторной линией является прямая (рис. 4.10).

Отношение дебита скважины Q к перепаду давления Δp называется коэффициентом продуктивности скважины K . Из формулы (4.35) находим

$$K = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{2\pi k h}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (4.39)$$

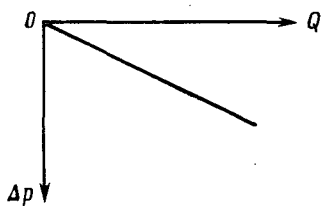


Рис. 4.10. Индикаторная диаграмма плоскорадиального потока несжимаемой жидкости по закону Дарси

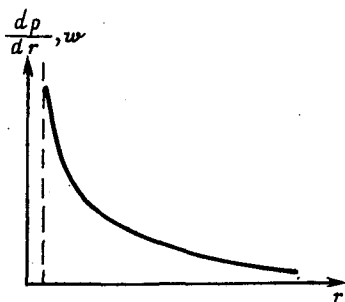


Рис. 4.11. График зависимости градиента давления и скорости фильтрации от расстояния до центра скважины

Размерность коэффициента продуктивности K , как это следует из формулы (4.39), будет

$$[K] = (\text{м}^3/\text{с})/\text{Па} = (\text{м}^4 \cdot \text{с})/\text{кг}.$$

Если при исследовании скважины измерены ее дебит и перепад давления, известны толщина пласта, вязкость нефти в пластовых условиях, радиус скважины и радиус контура питания, то из формулы Дюпюи можно определить проницаемость пласта

$$k = \frac{Q_{\mu} \ln \frac{R_k}{r_c}}{2\pi h (p_k - p_c)}.$$

Как видно из формул (4.33) и (4.34), градиент давления dp/dr и скорость фильтрации w в любой точке пласта обратно пропорциональны расстоянию r от этой точки до оси скважины. График зависимости градиента давления и скорости фильтрации от координаты r , изображенный на рис. 4.11, представляет собой равнобочную гиперболу. Из графика видно, что при приближении к скважине и градиент давления, и скорость фильтрации резко возрастают, достигая максимального значения на стенке скважины. Этот вывод совершенно очевиден и из самого определения скорости фильтрации как отношения объемного расхода жидкости к площади фильтрационной поверхности:

$$w = Q/\omega = Q/(2\pi rh).$$

Из формулы (4.32) следует, что давление в пласте распределено по логарифмическому закону. Графиком зависимости $p = p(r)$ является логарифмическая кривая, изображенная на рис. 4.12, вращение которой вокруг оси скважины образует поверхность, называемую воронкой депрессии.

Необходимо отметить, что в точках $r = R_k$ кривая распределения давления не касается горизонтальной линии, а подходит к ней под некоторым углом.

Воронка депрессии вследствие логарифмического закона распределения давления имеет большую крутизну вблизи скважины.

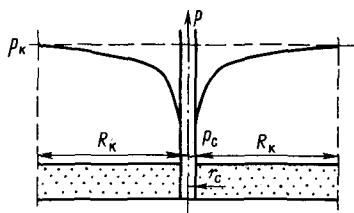
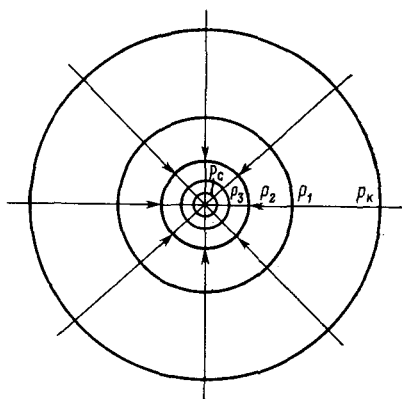


Рис. 4.12. График распределения давления в плоскорадиальном фильтрационном потоке

Рис. 4.13. Гидродинамическое поле плоскорадиального фильтрационного потока



Следовательно, основная часть депрессии на пласт сосредоточена в призабойной зоне скважины, параметры которой сильно влияют на дебит скважины.

Уравнения семейства изобар в рассматриваемом плоскорадиальном фильтрационном потоке можно установить по формуле (4.32), откуда следует, что давление будет одинаковым в тех точках плоскости движения, в которых $r = \text{const}$, или в декартовых координатах $x^2 + y^2 = r^2$. Следовательно, изобарами являются окружности, concentricные оси скважины. Очевидно, что и здесь изобары ортогональны траекториям, совпадающим с радиусами указанных окружностей (рис. 4.13).

Заметим, что все выведенные в данном разделе формулы остаются справедливыми и для нагнетания жидкости в пласт. В этом случае $p_c > p_k$, и в формулы (4.32) — (4.35) вместо $p_k - p_c$ необходимо подставить разность $p_c - p_k$, а график распределения давления в пласте (см. рис. 4.12) следует зеркально отобразить в горизонтальной плоскости $p_k = \text{const}$.

Важной характерной особенностью формулы Дюпюи (4.35) является слабая зависимость дебита Q от радиуса R_k контура питания для достаточно больших значений R_k/r_c , так как радиусы r_c и R_k входят в нее под знаком логарифма.

Радиально-сферический установившийся фильтрационный поток

Схема такого потока изображена на рис. 4.14. Будем считать, что несжимаемая жидкость притекает к скважине, вскрывшей однородный пласт весьма большой (теоретически бесконечной) толщины, через полусферический забой, радиус которого равен радиусу скважины r_c .

Допустим, что начальное приведенное давление во всем пласте и на забое скважины равно p_k . Затем приведенное давление на забое скважины снизили до p_c и поддерживали его постоянным. Приведенное давление на достаточно удаленной от забоя полусфериче-

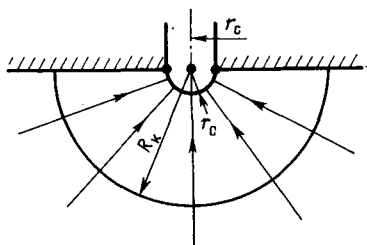


Рис. 4.14. Схема радиально-сферического фильтрационного потока

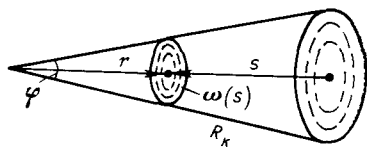


Рис. 4.15. Трубка тока в радиально-сферическом потоке

ской границе радиуса R_k сохраняется постоянным и равным p_k^* . В пласте будет иметь место установившийся радиально-сферический поток несжимаемой жидкости, описываемый дифференциальным уравнением (4.4).

Для упрощения исследования уравнение Лапласа (4.4) удобно представить в сферических координатах, имея в виду, что $p = p(r)$. Для наглядности поступим аналогично предыдущему случаю, исходя непосредственно из схемы течения в трубке тока переменного сечения.

В радиально-сферическом потоке трубка тока с телесным углом φ и площадью фильтрационной поверхности $\omega(s) = \varphi r^2$ (где r — радиус-вектор этой поверхности) имеет вид, изображенный на рис. 4.15.

Используя равенства $s = R_k - r$, $ds = -dr$ и закон Дарси, аналогично случаю плоскорадиального потока находим

$$Q = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial s} \omega(s) = -\frac{k}{\mu} \frac{dp^*}{dr} \varphi r^2 = \text{const};$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{k}{\mu} \frac{dp^*}{dr} \varphi r^2 \right) = 0.$$

Отсюда, сокращая на постоянные величины φ , k и μ , имеем

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp^*}{dr} \right) = 0. \quad (4.40)$$

Уравнение (4.40) можно записать в развернутом виде

$$r^2 \frac{d^2 p^*}{dr^2} + 2r \frac{dp^*}{dr} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2 p^*}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp^*}{dr} = 0. \quad (4.41)$$

Уравнение (4.41) и есть дифференциальное уравнение Лапласа в сферических координатах для установившегося радиально-сферического фильтрационного потока несжимаемой жидкости по закону Дарси.

Общее решение уравнения (4.40) найдем, как и ранее, посредством его двукратного интегрирования. Имеем:

$$r^2 \frac{dp^*}{dr} = C_1; \quad dp^* = C_1 \frac{dr}{r^2}; \quad (4.42)$$

$$p^* = -\frac{C_1}{r} + C_2. \quad (4.43)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} p^* &= p_c^* & \text{при } r &= r_c; \\ p^* &= p_K^* & \text{при } r &= R_K. \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Подставив граничные условия (4.44) в решение (4.43), найдем

$$p_c^* = -\frac{C_1}{r_c} + C_2;$$

$$p_K^* = -\frac{C_1}{R_K} + C_2,$$

откуда

$$C_1 = \frac{p_K^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}}; \quad (4.45)$$

$$C_2 = p_K^* + \frac{p_K^* - p_c^*}{R_K \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K} \right)} = p_c^* + \frac{p_K^* - p_c^*}{r_c \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K} \right)}. \quad (4.46)$$

Распределение приведенного давления в радиально-сферическом фильтрационном потоке несжимаемой жидкости найдем, подставив значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из (4.45) и (4.46) в общее решение уравнения Лапласа (4.43):

$$\begin{aligned} p^* &= p_K^* - \frac{p_K^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_K} \right) = p_c^* + \\ &+ \frac{p_K^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Градиент приведенного давления определим из (4.42), подставив значение C_1 из (4.45):

$$\frac{dp^*}{dr} = \frac{p_K^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \frac{1}{r^2}. \quad (4.48)$$

Тогда, используя (4.48), определяем дебит добывающей скважины радиусом r_c

$$Q = -\frac{k}{\mu} \frac{dp^*}{ds} \omega(s) = \frac{k}{\mu} \frac{dp^*}{dr} 2\pi r^2 = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}} \frac{1}{r^2} 2\pi r^2 =$$

$$= \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}}. \quad (4.49)$$

Здесь было использовано равенство $\varphi = 2\pi$. Скорость фильтрации на расстоянии r от центра забоя скважины найдем из ее определения, используя (4.49):

$$w = \frac{Q}{\omega(r)} = \frac{Q}{2\pi r^2} = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}} \frac{1}{r^2}. \quad (4.50)$$

Закон движения частиц жидкости вдоль их траекторий r определяется из соотношения

$$dt = -\frac{m}{w} dr,$$

интегрируя которое в пределах от 0 до t и от R_0 до r и используя (4.50), находим закон движения в следующем виде:

$$t = \frac{m\mu \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k} \right)}{k(p_k^* - p_c^*)} \frac{R_0^3 - r^3}{3} = \frac{2\pi m}{Q} \frac{R_0^3 - r^3}{3}. \quad (4.51)$$

Для того чтобы найти время T продвижения частицы жидкости от начального положения R_0 до скважины, нужно в последней формуле положить $r = r_c$. Если при этом пренебречь величиной r_c^3 вследствие ее малости, то получим

$$T = \frac{2\pi m}{3Q} R_0^3. \quad (4.52)$$

Средневзвешенное по объему порового пространства приведенное пластовое давление найдем из его определения:

$$\tilde{p} = \frac{1}{V_{\text{пор}}} \int_{V_{\text{пор}}} p^* dV'_{\text{пор}}. \quad (4.53)$$

В нашем случае

$$V_{\text{пор}} = \frac{2}{3} \pi R_k^3 m,$$

$$dV'_{\text{пор}} = 2\pi r^2 dr m,$$

p^* определяется по формуле (4.47).

Тогда выражение (4.53) можно записать так:

$$\tilde{p}^* = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R_K^3 m} \int_{r_c}^{R_K} \left[p_K^* - \frac{p_K^* - p_c^*}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_K}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_K} \right) \right] 2\pi m r^2 dr,$$

откуда после интегрирования, пренебрегая значениями r_c^2 и r_c^3 , по сравнению с R_K^2 , найдем

$$\tilde{p}^* = p_K^* - \frac{p_K^* - p_c^*}{2 \frac{R_K}{r_c}}. \quad (4.54)$$

Таким образом, характеристики установившегося радиально-сферического потока несжимаемой жидкости в однородном пласте определяются формулами (4.47) — (4.52) и (4.54).

Проанализируем эти формулы. Как следует из формулы (4.49), зависимость дебита от перепада приведенного давления в радиально-сферическом потоке такая же, как и в плоскорадиальном потоке, следовательно, и форма индикаторной линии здесь будет тоже прямой (см. рис. 4.10).

Формулы (4.48) и (4.50) свидетельствуют о том, что градиент приведенного давления и скорость фильтрации в любой точке пласта обратно пропорциональны квадрату расстояния этой точки от забоя скважины. Следовательно, если построить для радиально-сферического потока график, аналогичный графику на рис. 4.11, то крутизна соответствующей кривой у стенки скважины (при малых значениях r) в радиально-сферическом потоке будет еще больше, чем в плоскорадиальном.

Из формулы (4.47) следует, что приведенное давление в любой точке пласта обратно пропорционально координате r этой точки. Значит, зависимость приведенного пластового давления от r гиперболическая. Уравнением семейства поверхностей равного приведенного давления (равного напора) являются, как следует из той же формулы (4.47), концентричные полусферы. Понятно, что в разных точках одной и той же поверхности равного напора истинные давления будут различны. Но, зная высотную отметку точки пласта, плотность пластовой жидкости, распределение приведенных пластовых давлений, легко найти истинное давление в любой точке пласта.

Отметим в заключение, что все формулы и выводы данного параграфа останутся справедливыми, если считать скважину нагнетательной. При этом надо учитывать, что приведенное давление на забое скважины p_c^* будет больше пластового p_K^* .

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

В природных условиях продуктивные нефтегазосодержащие пласты редко бывают однородными. Пористая среда называется неоднородной, если ее фильтрационные характеристики — проницаемость и пористость — различны в разных областях.

Однако часто изменение проницаемости по пласту носит столь хаотичный характер, что значительные области пласта можно считать в среднем однородно проницаемыми. Характеристики фильтрационных потоков в таких пластах с большой точностью отвечают характеристикам потоков, установленных в предыдущем параграфе для строго однородных пластов.

Но нередко встречаются такие пласты, значительные области которых сильно отличаются друг от друга по фильтрационным характеристикам. Это так называемые макронеоднородные пласты, параметры которых существенно влияют на характеристики фильтрационных потоков.

В пластах — коллекторах нефти и газа выделяют следующие основные виды макронеоднородности.

1. Слоистая неоднородность, когда пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых проницаемость в среднем постоянна, но отлична от проницаемости соседних слоев. Такие пласты называют также неоднородными по толщине. Вследствие малости кривизны границы раздела между слоями с различными проницаемостями считают обычно плоскими. Таким образом, в модели слоистой пористой среды предполагается, что проницаемость изменяется только по толщине пласта и является кусочно-постоянной функцией вертикальной координаты. При этом можно считать, что пропластки разделены непроницаемыми границами (случай гидравлически изолированных слоев), либо учитывать перетоки между слоями с различными проницаемостями (случай гидродинамически сообщающихся пропластков).

В первом случае возможен расчет фильтрационных характеристик по одномерным моделям течения. Во втором случае точный учет перетоков флюида между пропластками требует решения двумерных задач фильтрации.

2. Зональная неоднородность, при которой пласт по площади состоит из нескольких зон (областей пласта) различной проницаемости. В пределах одной и той же зоны проницаемость в среднем одинакова, но на границе двух зон скачкообразно изменяется. Здесь, таким образом, имеет место неоднородность по площади пласта.

3. Неоднородные пласты, в которых проницаемость является известной непрерывной функцией $k(x, y, z)$ координат точек области фильтрации.

Рассмотрим одномерные потоки несжимаемой жидкости в таких неоднородных пластах по закону Дарси.

Прямолинейно-параллельный поток несжимаемой жидкости в неоднородных пластах

Слоисто-неоднородный пласт

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщиной h и шириной B состоит из n пропластков толщиной $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n$, проницаемостью $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_n$ и пористостью $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ (рис. 4.16). Пласт насыщен несжимаемой жидкостью.

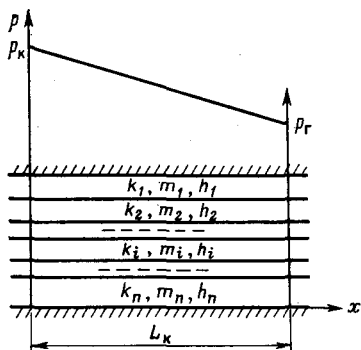


Рис. 4.16. Кривая распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке несжимаемой жидкости в слоисто-неоднородном пласте

Если на контуре питания пласта поддерживать постоянное давление p_k , а на другой его границе — галерее, отстоящей от контура питания на расстоянии L_k , поддерживать также постоянное давление p_r (при этом $p_r < p_k$), то в каждом пропластке при отсутствии перетоков между ними будет иметь место установившийся прямолинейно-параллельный поток жидкости. Тогда для расчета характеристик течения можно использовать формулы, полученные в § 2.

Распределение давления в каждом пропластке будет линейным

вдоль линии тока и описывается уравнением (4.13). Так как значения граничных давлений p_k и p_r во всех пропластках одинаковы и распределение давления в них не зависит от проницаемости пропластка, очевидно, что при одном и том же значении координаты x давления в каждом пропластке должны быть одинаковыми (речь, конечно, идет о приведенных к одной плоскости отсчета давлений), т. е.

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x.$$

Градиент давления в каждом пропластке также будет одинаков:

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_k - p_r}{L_k}.$$

Скорость фильтрации жидкости в i -м пропластке будет своя, пропорциональная соответствующей проницаемости пропластка k_i . В соответствии с формулой (4.16) имеем

$$\omega_i = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дебит потока Q можно вычислить как сумму дебитов в отдельных пропластах Q_i :

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k} B h_i = \frac{B (p_k - p_r)}{\mu L_k} \sum_{i=1}^n k_i h_i.$$

Движение частиц жидкости в каждом пропластке будет определяться по своему закону в соответствии с формулой (4.20):

$$t_i = \frac{m_i}{\omega_i} x = \frac{m_i B h_i}{Q_i} x = \frac{[m_i \mu L_k]}{k_i (p_k - p_r)} x, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для гидродинамических расчетов иногда бывает удобным заменить поток жидкости в неоднородном пласте потоком в однородном пласте такой же толщины h , ширины B и длины L_k со средней проницаемостью k_{cp} , величину которой можно определить из равенства дебитов этих двух потоков, т. е.

$$Q = \frac{B (p_k - p_r)}{\mu L_k} \sum_{i=1}^n k_i h_i = \frac{k_{cp}}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k} B h,$$

откуда

$$k_{cp} = \sum_{i=1}^n k_i h_i / h.$$

Зонально-неоднородный пласт

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщиной h и шириной B состоит из n зон с различными проницаемостью $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_n$, пористостью $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ и длиной $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$. На границах пласта поддерживаются постоянные давления p_k и $p_r/p_k > p_r$ (рис. 4.17). Границы каждой зоны пласта перпендикулярны к направлению фильтрационного потока Ox . В пласте происходит установившееся прямолинейно-параллельное движение несжимаемой жидкости.

Характеристики такого потока в пределах каждой однородной зоны будут рассчитываться по соответствующим формулам § 2.

Распределение давления в каждой зоне линейное и определяется выражением

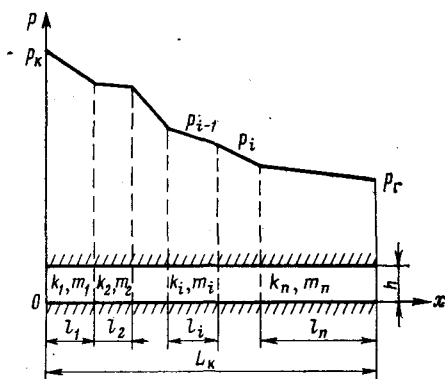


Рис. 4.17. Кривая распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте

$$p_i(x) = p_{i-1} - \frac{p_{i-1} - p_i}{l_i} x, \quad 0 \leq x \leq l_i, \quad (4.55)$$

где p_{i-1}, p_i — давление соответственно в начале и конце i -й зоны, координата x берется только в пределах этой зоны.

Градиент давления в пределах каждой зоны постоянный, но разный в различных зонах:

$$dp_i/dx = -(p_{i-1} - p_i)/l_i.$$

Дебит потока вследствие уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости будет постоянным в любом поперечном сечении потока:

$$Q = \frac{k_1}{\mu} \frac{p_K - p_1}{l_1} Bh = \dots = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_{i-1} - p_i}{l_i} Bh = \dots = \\ = \frac{k_n}{\mu} \frac{p_{n-1} - p_r}{l_n} Bh.$$

Применяя к последним равенствам правило производных пропорций, получим

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_{i-1} - p_i}{\frac{l_i}{k_i}} = \frac{Bh \sum_{i=1}^n (p_{i-1} - p_i)}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}} = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_K - p_r}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}.$$

Скорость фильтрации, как и дебит, будет постоянной в любом сечении потока:

$$\omega = \frac{Q}{\omega} = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_K - p_r}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}} / (Bh) = \frac{p_K - p_r}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}}.$$

При этом важно иметь в виду, что истинные средние скорости движения частиц жидкости в различных зонах пласта будут разными, обратно пропорциональными значениям пористости пласта в этих зонах, т. е. в зонах с большим значением пористости средняя скорость движения жидкости будет меньше, чем в зонах с меньшим значением пористости. Среднее значение проницаемости k_{cp} такого неоднородного пласта можно определить из равенства дебитов в неоднородном и эквивалентном однородном пластах:

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_K - p_r}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i}} = \frac{k_{cp}}{\mu} \frac{p_K - p_r}{L_K} Bh,$$

откуда

$$k_{cp} = L_K / \left(\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{k_i} \right).$$

Давления p_i на границе раздела зон с различной проницаемостью, входящие в формулу (4.55), можно определить из условия равенства скоростей фильтрации в этих зонах:

$$\omega = \frac{k_1}{\mu} \frac{p_K - p_1}{l_1} = \frac{k_2}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{l_2} = \dots = \frac{k_n}{\mu} \times \\ \times \frac{p_{n-1} - p_n}{l_n}, \quad p_n = p_\Gamma.$$

Например, если неоднородный пласт состоит из двух зон ($n = 2$), что часто бывает в практике разработки нефтяных и газовых месторождений, то давление p_1 на границе этих зон находим из равенства

$$\omega = \frac{k_1}{\mu} \frac{p_K - p_1}{l_1} = \frac{k_2}{\mu} \frac{p_1 - p_\Gamma}{l_2},$$

откуда

$$p_1 = \frac{p_K \frac{l_2}{k_2} + p_\Gamma \frac{l_1}{k_1}}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2}}.$$

Подставив это значение давления на границе зон в выражение (4.55), записанное соответственно для первой и второй зон, получим в явном виде распределение давления в этих зонах:

$$p_1(x) = p_K - \frac{(p_K - p_\Gamma) k_2}{l_1 k_2 + l_2 k_1} x, \quad 0 \leq x \leq l_1;$$

$$p_2(x) = p_\Gamma + \frac{(p_K - p_\Gamma) k_1}{l_1 k_2 + l_2 k_1} (L_K - x), \quad l_1 \leq x \leq L_K.$$

Если установившееся прямолинейное движение несжимаемой жидкости происходит в пласте, проницаемость которого вдоль линии тока изменяется непрерывно, т. е. $k = f(x)$, то дебит такого фильтрационного потока

$$Q = - \frac{k(x)}{\mu} \frac{dP}{dx} B h.$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получим

$$p_K - p_\Gamma = \frac{Q \mu}{B h} \int_{L_K}^{L_K} \frac{dx}{k(x)}.$$

Таким образом, и в этом случае все характеристики течения можно определить, если известна функциональная зависимость проницаемости k от координаты x .

Плоскорадиальный поток несжимаемой жидкости

Слоисто-неоднородный пласт

Установившийся плоскорадиальный приток несжимаемой жидкости по закону Дарси направлен к гидродинамически совершенной скважине радиуса r_c в слоисто-неоднородном пласте, состоящем из n пропластков с разными коллекторскими свойствами (рис. 4.18).

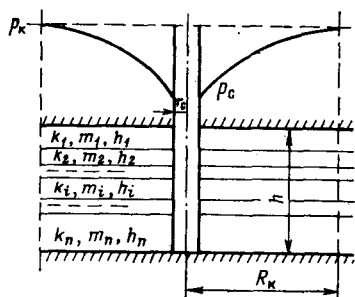


Рис. 4.18. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в слоисто-неоднородном пласте

общая для всех пропластков. Градиент давления будет также одинаков во всех пропластках и равен

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}.$$

Скорость фильтрации, пропорциональная проницаемости, будет в каждом пропластке иметь свое значение:

$$w_i = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Дебит потока Q можно определить как сумму дебитов в отдельных пропластках Q_i :

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \frac{2\pi k_i h_i}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{2\pi}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i.$$

Среднее значение проницаемости пласта $k_{ср}$ можно определить из равенства дебитов в реальном неоднородном и эквивалентном однородном пластах:

$$Q = \frac{2\pi}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \sum_{i=1}^n k_i h_i = \frac{2\pi k_{ср} h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}},$$

откуда

$$k_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^n k_i h_i / h,$$

что полностью совпадает с соответствующей формулой для прямолинейно-параллельного течения.

Зонально-неоднородный пласт

Пусть имеется горизонтальный пласт постоянной толщиной h , состоящий из n кольцеобразных зон с различной проницаемостью k_i и пористостью m_i , при этом граница каждой зоны имеет форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине (рис. 4.19). На внешней границе n -й зоны, являющейся контуром питания пласта R_k , поддерживается постоянное давление p_k , на внутренней границе пласта r_c (забое совершенной скважины) поддерживается постоянное давление p_c . В пласте имеет место установившийся плоскорадиальный приток несжимаемой жидкости по закону Дарси.

Распределение давления в каждой i -й зоне подчиняется логарифмическому закону (4.32):

$$p_i(r) = p_i -$$

$$- \frac{p_i - p_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \ln \frac{r_i}{r}, \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.56)$$

где $p_i(r)$ — давление в любой точке i -й зоны с координатой r ; r_i, r_{i-1} — внешний и внутренний радиусы i -й зоны ($r_0 = r_c, r_n = R_k$); p_i, p_{i-1} — давления соответственно на внешней и внутренней границах i -й зоны.

Градиент давления в i -й зоне изменяется с координатой r по гиперболическому закону:

$$\frac{dp_i}{dr} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \frac{1}{r}, \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

На рис. 4.20 схематично показано распределение давления вдоль линии тока в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте.

Дебит потока в силу установившегося движения несжимаемой жидкости будет постоянен через любую цилиндрическую поверх-

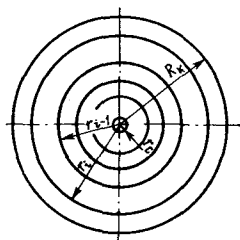


Рис. 4.19. Горизонтальный разрез зонально-неоднородного пласта

ность, соосную скважине:

$$Q = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \frac{p_{1-2} - p_c}{\ln \frac{r_{1-2}}{r_c}} = \dots = \frac{2\pi k_i h}{\mu} \frac{p_i - p_{i-1}}{\ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} = \dots =$$

$$= \frac{2\pi k_n h}{\mu} \frac{p_K - p_{n-1}}{\ln \frac{R_K}{r_{n-1}}}.$$

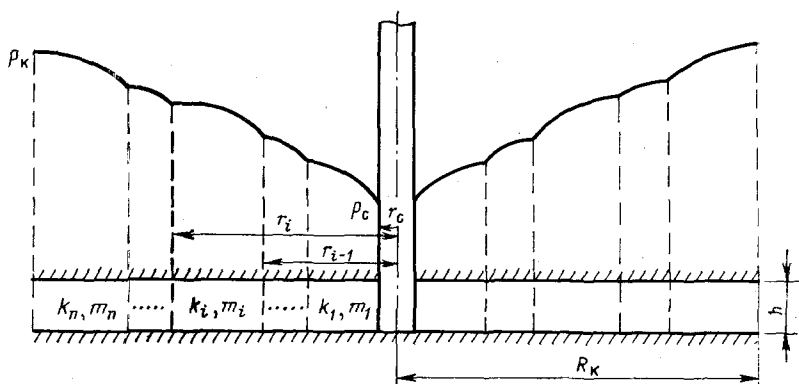


Рис. 4.20. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте

Используя свойство производных пропорций, находим из последних равенств:

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - p_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}. \quad (4.57)$$

Скорость фильтрации в любой точке потока определяется отношением дебита к соответствующей фильтрационной поверхности:

$$\omega = \frac{Q}{\omega(r)} = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_K - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} / (2\pi r h) =$$

$$= \frac{p_K - p_c}{\mu \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \frac{1}{r}.$$

Среднее значение проницаемости зонально-неоднородного пласта можно определить из равенства дебитов аналогичных потоков в неоднородном и однородном пластах:

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} = \frac{2\pi k_{cp} h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}},$$

откуда

$$k_{cp} = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}.$$

В практике разработки нефтяных месторождений значительный интерес представляет задача о притоке жидкости к скважине при наличии вокруг забоя скважины кольцевой зоны с проницаемостью, отличной от проницаемости остальной части пласта, т. е. пласт состоит из двух зон различной проницаемости. Такая задача возникает, например, в следующих случаях: при торпедировании или кислотной обработке призабойной зоны, установке гравийного фильтра, глинизации или парафинизации призабойной зоны, выносе мелких фракций породы из этой зоны и т. д.

Очень важной при этом бывает необходимость установления влияния различия проницаемостей кольцевой призабойной зоны и остальной части пласта на продуктивность скважины.

При наличии в пласте двух кольцевых зон ($n = 2$) с различной проницаемостью распределение давления в этих зонах $p_1(r)$ и $p_2(r)$ можно найти из (4.56), предварительно определив давление p_1 на границе этих зон из равенства скоростей фильтрации на этой границе:

$$w_1 = \frac{k_1}{\mu} \frac{p_1 - p_c}{\ln \frac{r_1}{r_c}} \frac{1}{r_1} = \frac{k_2}{\mu} \frac{p_k - p_1}{\ln \frac{R_k}{r_1}} \frac{1}{r_1},$$

откуда

$$p_1 = \frac{p_k \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c} + p_c \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_k}{r_1}}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_k}{r_1}}.$$

Подставив найденное значение давления p_1 на границе зон в уравнение (4.56), записанное соответственно для первой и второй

зоны, находим

$$p_1(r) = p_c + \frac{p_k - p_c}{k_1 \left(\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_k}{r_1} \right)} \ln \frac{r}{r_c}, \quad r_c \leq r \leq r_1;$$

$$p_2(r) = p_k - \frac{p_k - p_c}{k_2 \left(\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_k}{r_1} \right)} \ln \frac{R_k}{r}, \quad r_1 \leq r \leq R_k.$$

Дебит скважины в таком двухзональном пласте определится из (4.57):

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_k}{r_1}} = \\ &= \frac{2\pi k_2 h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_1} + \frac{k_2}{k_1} \ln \frac{r_1}{r_c}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Формула (4.58) совместно с формулой Дюпюи (4.35) позволяет выяснить важный вопрос: как влияет изменение проницаемости призабойной зоны пласта на дебит скважины?

Рекомендуем проделать такие расчеты самостоятельно в качестве упражнения.

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНАХ ФИЛЬТРАЦИИ

Обобщим результаты § 2 для случая фильтрации несжимаемой жидкости при больших скоростях, когда становятся значительными инерционные составляющие гидравлического сопротивления и линейный закон Дарси не выполняется. Для учета инерционных эффектов будем пользоваться степенной (1.13) и двучленной (1.12) зависимостями.

Прямолинейно-параллельный установившийся фильтрационный поток

Схема фильтрации изображена на рис. 4.6, но вместо закона Дарси используем нелинейный степенной закон фильтрации (1.13), который в данном случае принимает вид

$$w = C \left(-\frac{dp}{dx} \right)^{1/n} = \frac{Q}{Bh}, \quad 1 \leq n \leq 2, \quad (4.59)$$

где C и n — известные константы.

Для определения постоянного дебита Q разделим переменные в уравнении (4.59) и проинтегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_{p_k}^{p_r} dp = - \left(\frac{Q}{CBh} \right)^n \int_0^{L_k} dx,$$

откуда

$$Q = C \left(\frac{p_k - p_r}{L_k} \right)^{1/n} B h. \quad (4.60)$$

Интегрируя (4.59) в других пределах, найдем распределение давления:

$$\int_{p_k}^p dp = - \left(\frac{Q}{C B h} \right)^n \int_0^x dx, \\ p = p_k - \left(\frac{Q}{C B h} \right)^n x. \quad (4.61)$$

Подставив в (4.61) выражение для дебита Q (4.60), получим

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x, \quad (4.62)$$

откуда следует, что распределение давления при нелинейном законе фильтрации (4.59) в точности совпадает с формулой распределения давления в аналогичном потоке при фильтрации по закону Дарси (4.13).

Скорость фильтрации определяется по формуле

$$\omega = -C \left(\frac{dp}{dx} \right)^{1/n} = C \left(\frac{p_k - p_r}{L_k} \right)^{1/n}. \quad (4.63)$$

Из формулы (4.63) видно, что скорость фильтрации постоянна во всем фильтрационном потоке, т. е. частицы жидкости будут двигаться равномерно вдоль траектории.

Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости

Степенной закон фильтрации в условиях плоскорадиального движения (см. рис. 4.3, 4.4) имеет вид

$$\omega = \frac{Q}{\omega} = C \left(\frac{dP}{dr} \right)^{1/n}, \quad \omega = 2\pi r h. \quad (4.64)$$

Для определения дебита скважины разделим переменные в (4.64) и проинтегрируем:

$$Q = \omega C \left(\frac{dP}{dr} \right)^{1/n} = 2\pi r h C \left(\frac{dP}{dr} \right)^{1/n}; \\ \int_{p_c}^{p_k} dp = \left(\frac{Q}{2\pi h C} \right)^n \int_{r_c}^{R_k} \frac{dr}{r^n}; \\ p_k - p_c = \left(\frac{Q}{2\pi h C} \right)^n \frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{R_k^{n-1}} - \frac{1}{r_c^{n-1}} \right),$$

откуда

$$Q = 2\pi h C \left[\frac{(n-1)(p_k - p_c)}{\left(\frac{1}{r_c}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{R_k}\right)^{n-1}} \right]^{1/n}. \quad (4.65)$$

В предельном случае при $n = 2$ (закон Краснопольского) из (4.65) находим

$$Q = 2\pi h C \sqrt{\frac{p_k - p_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}}}.$$

Пренебрегая в последнем равенстве величиной $1/R_k$ по сравнению с $1/r_c$ (что в большинстве практических случаев вполне допустимо), получим

$$Q = 2\pi h C \sqrt{r_c(p_k - p_c)}. \quad (4.66)$$

Распределение давления в потоке также определим из уравнения (4.64), проинтегрировав его в других пределах:

$$\begin{aligned} \int_{p_k}^p dp &= \left(\frac{Q}{2\pi h C} \right)^n \int_{R_k}^r \frac{dr}{r^n}; \\ p &= p_k - \left(\frac{Q}{2\pi h C} \right)^n \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) = \\ &= p_k - \frac{p_k - p_c}{\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}}} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

В случае закона Краснопольского ($n = 2$) из (4.67) находим

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (4.68)$$

Интересно отметить, что распределение давления в рассматриваемом плоскорадиальном потоке при законе Краснопольского имеет тот же вид, что и при радиально-сферическом притоке, происходящем по линейному закону фильтрации, — сравните формулы (4.68) и (4.47).

Градиент давления найдем по формулам (4.64) и (4.65):

$$\frac{dp}{dr} = \left(\frac{Q}{2\pi h C} \right)^n = \frac{(n-1)(p_k - p_c)}{\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}}} \frac{1}{r^n}, \quad (4.69)$$

откуда для закона фильтрации Краснопольского ($n = 2$) находим

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_k - p_c}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k}} \frac{1}{r^2}.$$

Как и следовало ожидать, эта формула в точности совпадает с соответствующей формулой (4.48) для радиально-сферического потока по закону Дарси.

Скорость фильтрации w определяется из (4.64) с учетом (4.69)

$$w = C \left[\frac{(n-1)(p_k - p_c)}{\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}}} \right]^{1/n} \frac{1}{r}.$$

Можно показать, что движение жидкости в плоскорадиальном потоке при нелинейном законе фильтрации будет иметь такой же характер, как и в аналогичном потоке при линейном законе фильтрации — см. (4.36).

Проанализируем выведенные формулы. Как видно из формулы для дебита скважины (4.65), индикаторная линия при $1 < n < 2$ будет иметь вид выпуклой (к оси дебитов) степенной кривой с дробным показателем степени, меньшим 2. В случае закона Краснопольского, как показывает формула (4.66), индикаторная линия является параболой второго порядка. На рис. 4.21 приведены индикаторные линии плоскорадиальных потоков несжимаемой жидкости при линейном законе фильтрации ($n = 1$) и при нелинейных законах ($1 < n < 2$ и $n = 2$).

Кривая распределения давления в плоскорадиальном потоке при нелинейном законе фильтрации, как это видно из формулы (4.67), имеет форму гиперболы, следовательно, воронка депрессии будет гиперболоидом вращения. Крутизна воронки депрессии у стенки скважины будет больше, чем у логарифмической кривой, изображенной на рис. 4.12.

Изменение скорости фильтрации w вдоль линии тока в условиях плоскорадиального потока подчиняется гиперболическому закону, как при нелинейной фильтрации (4.64), так и при линейной (4.34).

Следует подчеркнуть, что в реальных условиях нельзя считать, что во всем пласте — от стенки скважины до контура питания — справедлив единый нелинейный закон фильтрации с постоянным значением показателя степени n . Фильтрация может происходить по линейному закону при небольших дебитах скважины, но с увеличением дебита нарушение линейного закона фильтрации начнется прежде всего вблизи забоя скважины, в то время как в остальной части фильтрационного потока по-прежнему соблюдается закон Дарси. В дальнейшем по мере увеличения дебита скважины область потока, в которой нарушен линейный закон фильтрации, будет расширяться. В этих случаях необходимо использовать двучленный закон фильтрации (1.12).

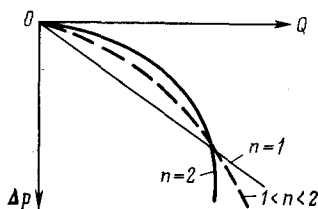


Рис. 4.21. Индикаторные линии, соответствующие различным законам фильтрации

Двучленная формула для рассматриваемого плоскорадиального течения имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} w + bw^2, \quad (4.70)$$

где

$$b = \beta \rho / \sqrt{k}.$$

Выражая скорость фильтрации w через дебит Q

$$w = Q / (2\pi rh),$$

перепишем (4.70) в виде

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{2\pi rh} + b \frac{Q^2}{(2\pi rh)^2},$$

откуда, разделяя переменные, получим

$$dp = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \frac{dr}{r} + \frac{bQ^2}{(2\pi h)^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от r до R_k , от p до p_k и от r_c до R_k , от p_c до p_k , найдем соответственно:

а) распределение давления в пласте

$$p = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{bQ^2}{(2\pi h)^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right);$$

б) дебит скважины

$$p_k - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{bQ^2}{(2\pi h)^2} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (4.71)$$

Дебит Q находится как положительный корень полученного квадратного уравнения (4.71), из которого видно, что индикаторная линия $Q = f(\Delta p)$ в этом случае является параболой.

§ 5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СКВАЖИН

Явление интерференции (взаимодействия) скважин заключается в том, что под влиянием пуска, остановки или изменения режима работы одной группы скважин изменяются дебиты и забойные давления другой группы скважин, эксплуатирующих тот же пласт.

Суммарная добыча нефти из месторождения по мере ввода в эксплуатацию новых скважин, находящихся в одинаковых условиях, растет медленнее, чем число скважин (рис. 4.22). Вновь вводимые скважины взаимодействуют с существующими. Это явление взаимодействия и взаимовлияния скважин называется интерференцией. Прежде чем перейти к исследованию задач интерференции скважин, введем некоторые необходимые понятия.

Назовем точечным стоком на плоскости точку, поглощающую жидкость. Сток можно рассматривать как гидродинамически совершенную скважину бесконечно малого радиуса в пласте единичной толщины. На плоскости вокруг точечного стока будет радиальное

движение. Точечный источник — это точка, выделяющая жидкость (модель нагнетательной скважины).

Найдем потенциал Φ точечного стока на плоскости. Так как точечный сток является моделью добывающей скважины и течение вокруг него плоскорадиальное, то можно воспользоваться формулой скорости фильтрации для потока этого типа (4.34):

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r} = \frac{q}{2\pi r}, \quad (4.72)$$

где $q = Q/h$ — дебит скважины-стока, приходящийся на единицу толщины пласта.



Рис. 4.22. Зависимость суммарного дебита нефтяного месторождения от числа скважин

Но для плоскорадиального потока

$$w = - \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{dr},$$

откуда

$$d\Phi = w dr = \frac{q}{2\pi} \frac{dr}{r},$$

и после интегрирования получим выражение потенциала для точечного стока на плоскости

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + C, \quad (7.73)$$

где C — постоянная интегрирования.

Таким образом, потенциал в окрестности скважины-стока пропорционален логарифму расстояния r от стока (центра скважины). При $r = 0$ и $r = \infty$ функция $\ln r$ обращается в бесконечность, поэтому потенциал в этих точках теряет смысл.

Для точечного источника справедливы все написанные формулы, но дебит q считается отрицательным ($q < 0$).

Из формулы (4.73) следует, что линиями равного потенциала (эквипотенциалами) являются окружности $r = \text{const}$.

Найдем теперь потенциал точечного стока в пространстве. Движение вблизи такого стока будет радиально-сферическим. Поэтому скорость фильтрации

$$w = Q/(4\pi r^2) = d\Phi/dr,$$

откуда

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi} \frac{dr}{r^2},$$

и потенциал точечного стока в пространстве

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} + C. \quad (4.74)$$

Для потенциала точечного источника знак дебита в формуле (4.74) заменяется на противоположный.

Как следует из формулы (4.74), потенциал точечного стока в пространстве обращается в бесконечность при $r = 0$, а при $r = \infty$ остается конечным (равным C).

Модель точечного стока в пространстве будет использована в дальнейшем для решения задач о притоке жидкости к гидродинамически несовершенным скважинам.

Отметим, что метод источников и стоков очень удобен, он широко используется при решении не только задач фильтрации, но и задач, связанных с обтеканием различных тел в потоке жидкости. Применяется этот метод и в задачах теории теплопроводности, электричества и магнетизма.

На основе свойств уравнения Лапласа, которым описывается распределение давления и потенциала в установившихся потоках жидкости в пласте (см. § 1), в подземной гидравлике разработан метод решения сложных гидродинамических задач, названный методом суперпозиции (методом наложения).

Математический смысл метода суперпозиции заключается в том, что если имеется несколько фильтрационных потоков с потенциалами $\Phi_1(x, y, z)$, $\Phi_2(x, y, z)$, ..., $\Phi_n(x, y, z)$, каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то и сумма $\Phi = \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i$ (где C_i — произвольные постоянные) также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Следует при этом подчеркнуть, что вариацией произвольных постоянных C_i в суммарном значении потенциала можно удовлетворить всем граничным условиям.

Гидродинамический смысл метода суперпозиции состоит в том, что изменения давления и потенциала в любой точке пласта, вызванные работой каждой скважины (добывающей или нагнетательной), алгебраически суммируются в каждой точке пласта. При этом суммарная скорость фильтрации находится как сумма векторов скоростей фильтрации, вызванных работой каждой скважины.

Пусть на неограниченной плоскости расположено n источников и стоков (рис. 4.23). Потенциал каждого из них в точке M определяется по формуле (4.73):

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{2\pi} \ln r_1 + c_1, \quad \Phi_2 = \frac{q_2}{2\pi} \ln r_2 + C_2, \quad \dots,$$

$$\Phi_n = \frac{q_n}{2\pi} \ln r_n + C_n,$$

где $r_1, r_2, \dots, r_n$ — расстояния от первого, второго, $\dots$, n -го стоков до точки M ; $C_1, C_2, \dots, C_n$ — постоянные.

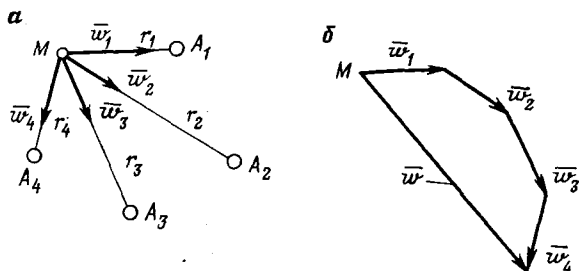


Рис. 4.23. Схема скоростей фильтрации в точке M при работе источников и стоков на неограниченной плоскости (а) и результирующий вектор скорости фильтрации в точке M (б)

Каждая из функций $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Тогда сумма потенциалов

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n q_i \ln r_i + C, \quad (4.75)$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

также удовлетворяют уравнению Лапласа. Физически это означает, что фильтрационные потоки от работы каждого источника или стока накладываются друг на друга. В этом и заключается принцип суперпозиции, или сложения течений

Вектор скорости фильтрации $\vec{w}$ в точке M (рис. 4.23, б)

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n, \quad (4.76)$$

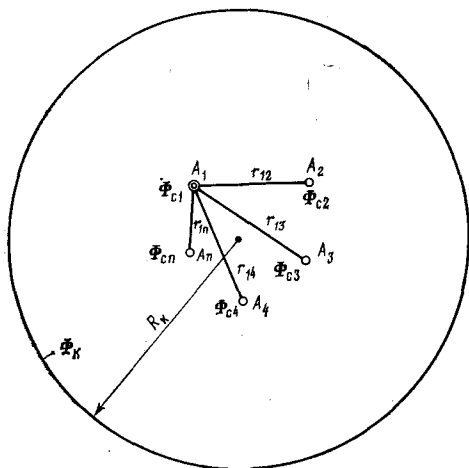
где

$$w_1 = q_1/(2\pi r_1), \quad w_2 = q_2/(2\pi r_2), \quad \dots, \quad w_n = q_n/(2\pi r_n).$$

Метод суперпозиции можно использовать не только в бесконечных пластах, но и в пластах, имеющих контур питания или непроницаемую границу той или иной формы. В этом случае для выполнения тех или иных условий на границах приходится вводить фиктивные скважины-стоки или скважины-источники за пределами

пласта. Фиктивные скважины в совокупности с реальными обеспечивают необходимые условия на границах. При этом задача сводится к рассмотрению одновременной работы реальных и фиктивных скважин в неограниченном пласте. Этот метод называется методом отображения источников и стоков.

Рассмотрим здесь использование методов суперпозиции и отображения источников и стоков на некоторых задачах, имеющих практическое применение в теории разработки нефтяных и газовых месторождений.



Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания

Пусть в горизонтальном пласте толщиной h расположена группа скважин $A_1, A_2, \dots, A_n$ радиусами r_{ci} , работающих с различными забойными потенциалами Φ_{ci} , где $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 4.24).

Расстояния между центрами i -й и j -й скважин из-

Рис. 4.24. Схема группы скважин в пласте с удаленным контуром питания

вестны ($r_{ij} = r_{ji}$). Так как контур питания находится далеко от всех скважин, то можно приближенно считать, что расстояние от всех скважин до всех точек контура питания одно и то же и равно R_K . Потенциал Φ_K на контуре питания считается заданным. Требуется определить дебит каждой скважины и скорость фильтрации в любой точке пласта.

Потенциал в любой точке пласта M определяется по формуле (4.75). Поместив мысленно точку M последовательно на забой каждой скважины, получим выражения для забойного потенциала на них

$$\Phi_{c1} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{c1} + q_2 \ln r_{12} + q_3 \ln r_{13} + \dots + q_n \ln r_{1n}) + C;$$

$$\Phi_{c2} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{21} + q_2 \ln r_{c2} + q_3 \ln r_{23} + \dots + q_n \ln r_{2n}) + C;$$

(4.77)

$$\Phi_{cn} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{n1} + q_2 \ln r_{n2} + q_3 \ln r_{n3} + \dots + q_n \ln r_{cn}) + C.$$

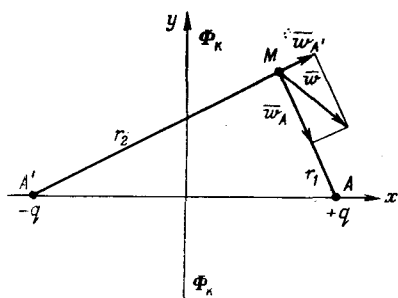
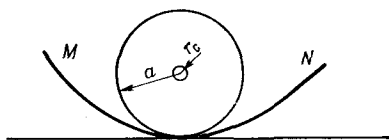


Рис. 4.25. Схема притока жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания

Рис. 4.26. Схема пласта с различными контурами питания



Если бы пласт был неограниченным или контур питания был бы кругом, в центре которого расположена скважина, то потенциал в любой точке пласта находился бы по формуле (4.73). При этом условие постоянства потенциала на прямолинейном контуре питания не выполняется, так как расстояние r разных точек контура питания от скважины A неодинаково.

Для решения задачи используем метод отображения источников и стоков. Зеркально отобразим скважину-сток A относительно контура питания и дебиту скважины-изображения A' припишем противоположный знак, т. е. будем считать ее скважиной источником. Теперь рассмотрим в бесконечном пласте совместную работу двух скважин: скважины-стока A с дебитом $+q$ и скважины-источника A' с дебитом $-q$. Потенциал в любой точке M , находящейся на расстоянии r_1 от скважины A и на расстоянии r_2 от скважины A' :

$$\Phi_M = \frac{+q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{-q}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C. \quad (4.80)$$

Потенциал на контуре питания можно выразить, подставив в (4.80) $r_1 = r_2$. В результате получим

$$\Phi = C = \Phi_k, \quad (4.81)$$

т. е. потенциал на контуре питания действительно постоянен. Тогда из (4.80) с учетом (4.81) потенциал на забое скважины A ($r_1 = r_c$, $r_2 = 2a$) можно выразить так:

$$\Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_c}{2a} + \Phi_k = \Phi_k - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{2a}{r_c}. \quad (4.82)$$

Из (4.82) выражение для дебита скважины A , приходящегося на единицу толщины пласта, получим в следующем виде

$$q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}}. \quad (4.83)$$

Если бы контур питания был окружностью радиуса a , то дебит скважины был бы равен (по формуле Дюпюи)

$$q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{a}{r_c}}.$$

В реальных условиях форма контура питания MN (рис. 4.26) часто бывает неизвестна, но она заключена между окружностью и прямой линией. Следовательно, дебит скважины в этих условиях будет находиться в пределах

$$\frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{a}{r_c}} \geq q \geq \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}}.$$

Для определения потенциала в любой точке M (см. рис. 4.25) воспользуемся формулой (4.80) с учетом (4.81):

$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \Phi_k. \quad (4.84)$$

Скорость фильтрации равна геометрической сумме скоростей фильтрации, вызванных работой реальной скважины-стока A и фиктивной скважины-источника A' (см. рис. 4.25), т. е.

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{w}_{A'},$$

где $w_A = q/(2\pi r_1)$ и направлена к скважине A ; $w_{A'} = q/(2\pi r_2)$ и направлена от скважины A' .

На контуре питания, где $r_1 = r_2$, скорость фильтрации перпендикулярна контуру питания.

Из формулы (4.84) следует, что уравнение эквипотенциалей имеет вид

$$r_1/r_2 = \text{const} \quad \text{или} \quad r_1^2/r_2^2 = C^2. \quad (4.85)$$

Если выразить r_1^2 и r_2^2 через координаты точки $M(x, y)$ и координаты центров скважин $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$, то будем иметь $r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$ и $r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$. Следовательно, уравнение (4.85) представляет собой уравнение окружности с центром на оси x . Меняя значение константы C^2 , получим семейство эквипотенциалей — окружностей с разными радиусами и с центрами, расположенными в разных точках оси x . Контур питания является эквипотенциалю, т. е. окружностью с бесконечно большим радиусом.

Семейство линий тока будет представлять собой окружности, проходящие через центры обеих скважин, которые лежат на прямолинейном контуре питания (рис. 4.27). При этом эквипотенциали (изобары) всегда ортогональны линиям тока. Подробнее об этом изложено в § 8 данной главы.

На рис. 4.27 показаны семейства линий тока и изобар при притоке жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания.

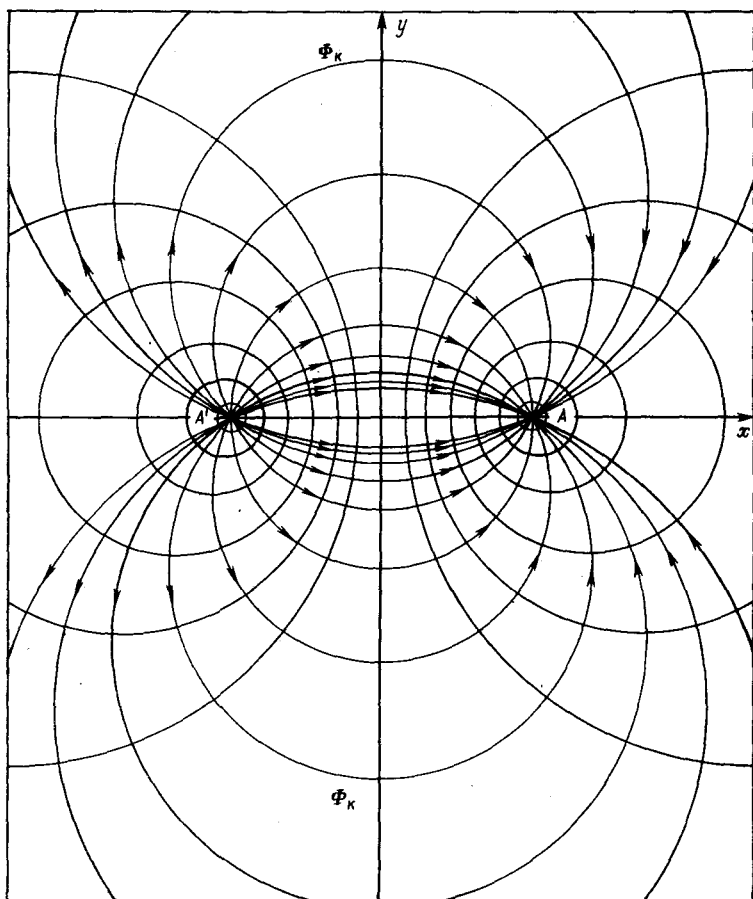


Рис. 4.27. Семейства линий тока и изобар в потоке жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания

Приток жидкости к скважине, расположенной вблизи непроницаемой прямолинейной границы

Такая задача может возникнуть при расположении добывающей скважины возле сброса или около границы выклинивания продуктивного пласта. В этом случае реальную скважину-сток зеркально отображают относительно непроницаемой границы, и дебиту скважины-изображения приписывают тот же знак, что и дебиту реальной скважины. Рассматривая приток жидкости к двум равнодебитным скважинам, нетрудно установить, что скорость фильтрации на непроницаемой границе будет направлена вдоль границы, т. е. граница является линией тока и фильтрация через нее отсутствует. Дебит скважины в этом случае определяется из уравнений

(4.77) и (4.78) для $n = 2$ в пласте с удаленным контуром питания:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{R_k^2}{r_c 2a}},$$

где $2a$ — расстояние между реальной и воображаемой скважинами.

Приток жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте

Пусть в плоском пласте постоянной толщиной h с круговым контуром питания радиуса R_k , на котором поддерживается постоянный потенциал Φ_k , на расстоянии δ от центра круга расположена скважина-сток A , на которой поддерживается постоянный потенциал Φ_c (рис. 4.28). Требуется определить дебит скважины q и потенциал в любой точке пласта.

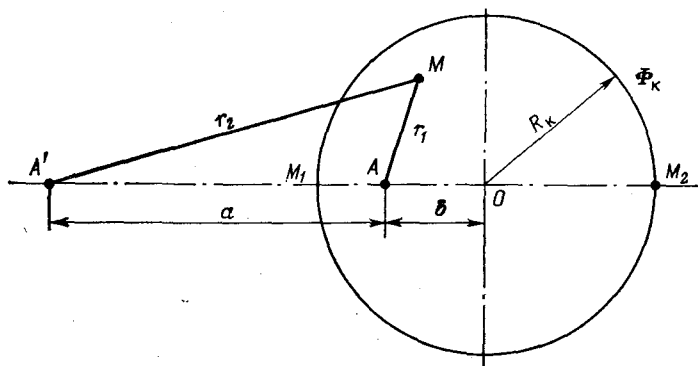


Рис. 4.28. Схема притока жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте

Отобразим скважину-сток A фиктивной скважиной-источником A' , расположенной от скважины A на расстоянии a и лежащей на продолжении OA . Это расстояние a определим из условия постоянства потенциала на окружности радиуса R_k , для чего выразим потенциал в двух точках M_1 и M_2 контура питания, взятых на пересечении прямой AA' с контуром питания.

По методу суперпозиции потенциалы в этих точках будут иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_{M_1} = \Phi_k &= \frac{q}{2\pi} \ln(R_k - \delta) - \frac{q}{2\pi} \ln[a - (R_k - \delta)] + C = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} + C; \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{M_2} = \Phi_k &= \frac{q}{2\pi} \ln(R_k + \delta) - \frac{q}{2\pi} \ln(R_k + a + \delta) + C = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k + \delta}{R_k + a + \delta} + C. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Из равенства правых частей формул (4.86) и (4.87) найдем расстояние между скважинами A и A' :

$$\frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} = \frac{R_k + \delta}{R_k + a + \delta},$$

откуда

$$a = (R_k^2 - \delta^2) / \delta. \quad (4.88)$$

Для того чтобы определить дебит скважины A , запишем выражение потенциала на ее забое:

$$\Phi_A = \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln r_c - \frac{q}{2\pi} \ln a + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_c}{a} + C. \quad (4.89)$$

Вычитая (4.89) из (4.86), получим

$$\Phi_k - \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_k - \delta) a}{[a - (R_k - \delta)] r_c}. \quad (4.90)$$

Подставляя теперь выражение (4.88) в (4.90), находим

$$\begin{aligned} \Phi_k - \Phi_c &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_k - \delta) \left(\frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta} \right)}{\left[\frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta} (R_k - \delta) \right] r_c} = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k^2 - \delta^2}{R_k r_c} = \frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{R_k}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Из формулы (4.91) получаем дебит скважины A , эксцентрично расположенной в круговом пласте:

$$q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \left[\frac{R_k}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right) \right]}. \quad (4.92)$$

При эксцентриситете $\delta = 0$ формула (4.92) обращается в формулу Дююи.

Потенциал в любой точке пласта M , находящейся на расстоянии r_1 от скважины A и на расстоянии r_2 от скважины A' , можно выразить так:

$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 - \frac{q}{2\pi} \ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C. \quad (4.93)$$

Вычитая из (4.93) выражение (4.89) и учитывая (4.88), получим

$$\Phi_M = \Phi_c + \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{R_k^2 - \delta^2}{r_c^2 \delta} \right). \quad (4.94)$$

Выражение для потенциала в точке M можно получить также и вычитанием из уравнения (4.86) или (4.87) уравнения (4.93):

$$\Phi_M = \Phi_K - \frac{q}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \frac{\delta}{R_K} \right). \quad (4.95)$$

Формулы (4.94) и (4.95), очевидно, идентичны.

Приток жидкости к бесконечным цепочкам и кольцевым батареям скважин

На примере притока жидкости к нескольким рядам или кольцевым батареям скважин ознакомимся с широко применяемым при проектировании разработки нефтяных месторождений методом эквивалентных фильтрационных сопротивлений, предложенным Ю. П. Борисовым и основанным на аналогии движения жидкости в пористой среде с течением электрического тока в проводниках.

Рассмотрим без вывода задачу о притоке жидкости к одной цепочке скважин, расположенных на расстояниях 2σ друг от друга и на расстоянии L от прямолинейного контура питания. Пусть на контуре питания задан постоянный потенциал Φ_K , на забоях скважин — потенциал Φ_C (рис. 4.29). Требуется определить дебит каждой скважины и суммарный дебит n скважин в цепочке.

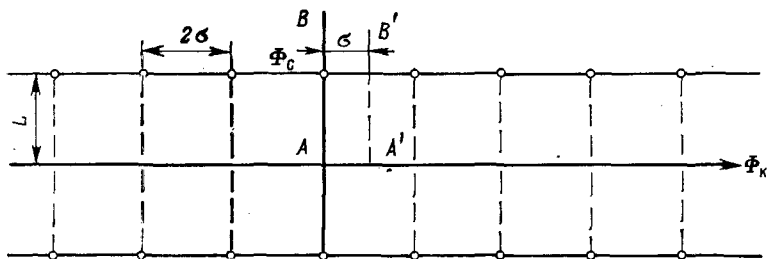


Рис. 4.29. Схема притока жидкости к цепочке скважин

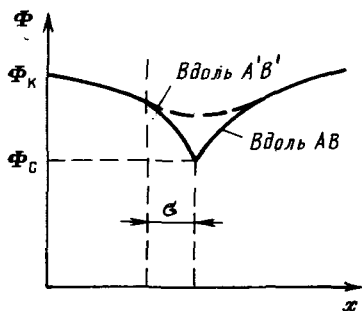


Рис. 4.30. Кривая распределения потенциалов вдоль линий тока

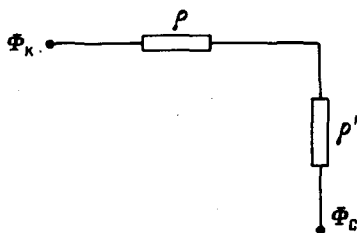


Рис. 4.31. Схема эквивалентных фильтрационных сопротивлений при притоке к цепочке скважин

Решение задачи заключается в следующем. Цепочка скважин-стоков отображается зеркально относительно контура питания в скважины-источники, и рассматривается интерференция двух цепочек скважин в неограниченном пласте.

Вдоль прямой AB , проходящей через скважины (как говорят, вдоль главной линии тока), частицы жидкости будут двигаться наиболее быстро. Прямую $A'B'$ и ей подобные, делящие расстояние между скважинами пополам, в силу симметрии потока можно рассматривать как непроницаемые границы, вдоль которых движение будет наиболее медленным. Они называются нейтральными линиями тока. Характер распределения потенциалов вдоль этих прямых AB и $A'B'$ показан на рис. 4.30. Задача решается методом суперпозиции. Результаты решения показывают, что на расстоянии от контура питания до половины расстояния между скважинами движение жидкости практически прямолинейное и падение потенциала на этом участке происходит по закону прямолинейной фильтрации. Основное падение потенциала происходит вблизи скважины, где характер движения близок к радиальному. При этом дебит каждой скважины цепочки выражается следующей формулой:

$$q = \frac{Q}{h} = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}},$$

где $\operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi L}{\sigma}} - e^{-\frac{\pi L}{\sigma}} \right)$ — гиперболический синус.

В случае, когда $L > \sigma$, величина $e^{-\pi L/\sigma}$ очень мала и тогда

$$\ln 2 \operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sigma} \simeq \ln e^{\frac{\pi L}{\sigma}} = \frac{\pi L}{\sigma}.$$

Отсюда следует, что при $L > \sigma$ дебит скважины

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{\pi L}{\sigma} + \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}} = \frac{\Phi_k - \Phi_c}{\frac{L}{2\sigma} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}}. \quad (4.96)$$

Вводя обозначения

$$\frac{L}{2\sigma} = \rho; \quad \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c} = \rho',$$

формулу (4.96) представим в виде

$$q = (\Phi_k - \Phi_c)/(\rho + \rho'), \quad (4.97)$$

аналогичном закону Ома.

Величина ρ , по терминологии Ю. П. Борисова, называется внешним фильтрационным сопротивлением батареи, ρ' — внутренним. Таким образом, приток жидкости к цепочке скважин можно представить схемой эквивалентных фильтрационных сопротивлений, показанной на рис. 4.31.

Аналогом объемного расхода q служит сила тока, а аналогом разности фильтрационных потенциалов — разность электрических потенциалов. Суммарный дебит всей прямолинейной цепочки из n скважин

$$Q' = Qn = qhn = \frac{\Phi_k - \Phi_c}{\frac{1}{2\sigma nh} + \frac{1}{2\pi nh} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}} =$$

$$= \frac{\rho_k - \rho_c}{\frac{\mu L}{kh2\sigma n} + \frac{\mu}{2\pi khn} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}}. \quad (4.98)$$

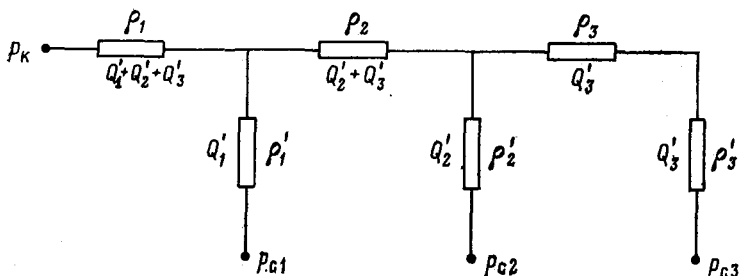


Рис. 4.32. Схема эквивалентных фильтрационных сопротивлений при притоке к трем цепочкам скважин

Из формулы (4.98) получили выражение для внешнего фильтрационного сопротивления цепочки

$$\rho = \mu L / (kh2\sigma n) = \mu L / (khB),$$

которое представляет собой сопротивление потоку жидкости от контура питания до галереи длиной $B = 2\sigma n$, расположенной на расстоянии L от контура питания, а внутреннее сопротивление

$$\rho' = \frac{\mu}{2\pi khn} \ln \frac{\sigma}{\pi r_c}$$

выражает сопротивление, возникающее при подходе жидкости к скважинам в зоне радиусом $r = \sigma/\pi$, где фильтрация практически плоскорадиальная.

Пусть теперь полубесконечный пласт с прямолинейным контуром питания разрабатывается тремя параллельными цепочками скважин с числом скважин в каждой n_1, n_2, n_3 . Пусть скважины в каждой цепочке имеют одинаковые радиусы r_{c1}, r_{c2}, r_{c3} и забойные давления $\rho_{c1}, \rho_{c2}, \rho_{c3}$, суммарные дебиты цепочек составляют Q'_1, Q'_2, Q'_3 .

Схема соответствующих эквивалентных фильтрационных сопротивлений будет теперь разветвленной (4.32).

Расчет схемы проводится аналогично расчету электрических разветвленных цепей по законам Ома и Кирхгофа. Составляются

алгебраические линейные уравнения по числу неизвестных (либо дебитов Q_1, Q_2, Q_3 , либо забойных давлений p_{c1}, p_{c2}, p_{c3}). При этом, очевидно, внешние сопротивления будут равны:

$$\rho_1 = \mu L_1 / (khB), \quad \rho_2 = \mu L_2 / (khB), \quad \rho_3 = \mu L_3 / (khB),$$

где L_1, L_2, L_3 — расстояния соответственно от контура питания до первой цепочки, между первой и второй цепочками, между второй и третьей цепочками.

Внутренние сопротивления определяются по формулам

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \frac{\mu}{2\pi k h n_1} \ln \frac{\sigma_1}{\pi r_{c1}}, \quad \rho'_2 = \frac{\mu}{2\pi k h n_2} \ln \frac{\sigma_2}{\pi r_{c2}}, \\ \rho'_3 &= \frac{\mu}{2\pi k h n_3} \ln \frac{\sigma_3}{\pi r_{c3}}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Отметим, что приток жидкости к трем кольцевым батареям скважин, соосным круговому контуру питания, рассчитывается по той же схеме эквивалентных фильтрационных сопротивлений (см. рис. 4.32), что и для цепочек скважин. При этом внешние фильтрационные сопротивления будут выражаться так:

$$\rho_1 = \frac{\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_k}{R_1}, \quad \rho_2 = \frac{\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_1}{R_2}, \quad \rho_3 = \frac{\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_2}{R_3},$$

где R_1, R_2, R_3 — радиусы батарей.

Внутренние фильтрационные сопротивления определяются по формулам (4.99).

§ 6. ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

Скважина называется гидродинамически совершенной, если она вскрывает продуктивный пласт на всю толщину и забой скважины открытый, т. е. вся вскрытая поверхность забоя является фильтрующей.

Если скважина с открытым забоем вскрывает пласт не на всю толщину h , а только на некоторую глубину b , то ее называют гидродинамически несовершенной по степени вскрытия пласта. При этом $\bar{h} = b/h$ называется относительным вскрытием пласта.

Если скважина вскрывает пласт до подошвы, но сообщение с пластом происходит только через специальные отверстия в обсадной колонне и цементном камне или через специальные фильтры, то такую скважину называют гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия пласта.

Нередко встречаются скважины и с двойным видом несовершенства — как по степени, так и по характеру вскрытия пласта.

Приток жидкости к несовершенным скважинам даже в горизонтальном однородном пласте постоянной толщины перестает быть плоскорадиальным. Строгое математическое решение задачи о притоке жидкости к несовершенной скважине в пластах конечной толщины представляет большие (а в некоторых случаях непреодолимые) трудности. Однако задачи притока жидкости к гидродинами-

чески несовершенным скважинам представляют большой интерес для практики.

Приведем здесь без выводов и доказательств наиболее распространенные окончательные расчетные формулы притока жидкости к различного типа несовершенным скважинам.

Прежде всего допустим, что скважина вскрыла кровлю пласта неограниченной толщины ($h \rightarrow \infty$) и при этом ее забой имеет форму полусферы. В этом случае можно считать, что поток — радиально-сферический при условии $R_k \rightarrow \infty$, и тогда дебит определяется по формуле (4.49).

Если скважина вскрыла пласт неограниченной толщины на глубину b , то ее дебит можно найти по формуле Н. К. Гиринского

$$Q = \frac{2\pi k b}{\mu} \frac{p_k^* - p_c^*}{\ln \frac{1,6b}{r_c}}.$$

Задача о притоке жидкости к несовершенной по степени вскрытия пласта скважине в пласте конечной толщиной h исследовалась М. Маскетом. Вдоль оси скважины на вскрытой части длиной b он располагал воображаемую линию, поглощающую жидкость, каждый элемент которой $d\xi$ является стоком. Интенсивность расходов q , т. е. дебитов, приходящихся на единицу длины поглощающей линии, подбиралась различной в разных ее точках для выполнения нужных граничных условий.

Необходимо получить решение, удовлетворяющее следующим граничным условиям: кровля и подошва пласта непроницаемы, цилиндрическая поверхность радиусом $r = R_k$ является эквипотенциалью с $\Phi = \Phi_k$, поверхность забоя скважины также является эквипотенциалью с $\Phi = \Phi_c$.

Выполнение указанных граничных условий потребовало отображения элементарных стоков $q d\xi$ относительно кровли и подошвы пласта бесчисленное множество раз.

Подбирая интенсивность расходов q и используя метод суперпозиции действительных и отображенных стоков, М. Маскет получил следующую формулу для дебита гидродинамически несовершенной по степени вскрытия пласта скважины:

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\xi}, \quad (4.100)$$

где

$$\xi = \frac{1}{2\bar{h}} \left[2 \ln \frac{4h}{r_c} - \varphi(\bar{h}) \right] - \ln \frac{4h}{R_k},$$

а функция $\varphi(\bar{h})$ имеет следующее аналитическое выражение:

$$\varphi(\bar{h}) = \ln \frac{\Gamma(0,875\bar{h}) \Gamma(0,125\bar{h})}{\Gamma(1-0,875\bar{h}) \Gamma(1-0,125\bar{h})}. \quad (4.101)$$

Здесь $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ — интеграл Эйлера второго рода, называемый гамма-функцией, для которой имеются таблицы в математических справочниках.

График функции $\varphi(\bar{h})$ имеет вид, изображенный на рис. 4.33.

Нетрудно заметить, что если $\bar{h} = 1$, т. е. пласт вскрыт на всю толщину, формула (4.100) переходит в формулу Дюпюи для плоско-радиального потока.

Иногда для расчета дебита несовершенной по степени вскрытия пласта скважины используется более простая формула, чем формула М. Маскета (4.100), предложенная И. Козени:

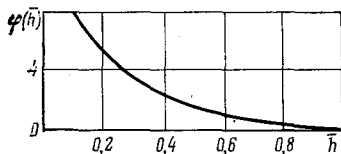


Рис. 4.33. График функции $\varphi(\bar{h})$

$$Q = \frac{2\pi k h \bar{h} (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \left(1 + 7 \sqrt{\frac{r_c}{2h\bar{h}}} \cos \frac{\pi \bar{h}}{2} \right).$$

Дебит несовершенной скважины удобно изучать, сравнивая ее дебит Q с дебитом совершенной скважины $Q_{\text{сов}}$, находящейся в тех же условиях, что и данная несовершенная скважина. Гидродинамическое несовершенство скважины характеризуется коэффициентом совершенства скважины $\delta = Q/Q_{\text{сов}}$.

Широкое распространение получил метод расчета дебитов несовершенных скважин, основанный на электрогидродинамической аналогии фильтрационных процессов.

Электрическое моделирование осуществляется следующим образом. Ванна заполняется электролитом. В электролит погружается один кольцевой электрод, моделирующий контур питания. В центре ванны погружается электрод на заданную глубину, соответствующую степени вскрытия пласта скважиной. К обоим электродам подводится разность потенциалов, являющаяся аналогом перепада давления, сила тока является аналогом дебита скважины.

Дебит гидродинамически несовершенной скважины подсчитывается по формуле

$$Q = \frac{2\pi k h (p_k - p_c)}{\mu \left(\ln \frac{R_k}{r_c} + C \right)}, \quad (4.102)$$

где $C = C_1 + C_2$ — дополнительное фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины по степени вскрытия пласта (C_1) и характеру вскрытия (C_2).

Измеряя разность потенциалов и силу тока, по закону Ома можно подсчитать сопротивление, сделать пересчет на фильтрационное сопротивление и определить дополнительное фильтрационное сопротивление.

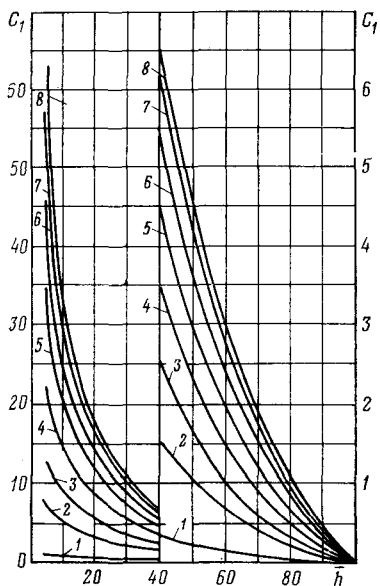


Рис. 4.34. Графики В. И. Щурова для определения коэффициента C_1 :

a : 1 — 1; 2 — 5; 3 — 10; 4 — 20; 5 — 40; 6 — 80; 7 — 160; 8 — 300

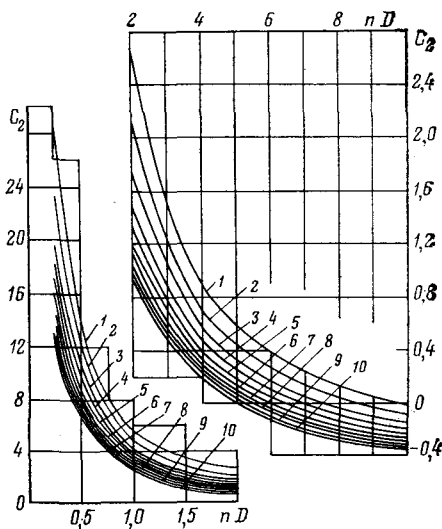


Рис. 4.35. Графики В. И. Щурова для определения коэффициента C_2 при $l = 0,5$:

α : 1 — 0,02; 2 — 0,04; 3 — 0,06; 4 — 0,08; 5 — 0,1; 6 — 0,12; 7 — 0,14; 8 — 0,16; 9 — 0,18; 10 — 0,2

Такие экспериментальные исследования были проведены В. И. Щуровым. Им определены дополнительные фильтрационные сопротивления C_1 и C_2 для различных видов несовершенства скважин и построены графики зависимости величины C_1 от параметров $a = h/D_c$ и $\bar{h} = b/h$ (рис. 4.34) и величины C_2 от трех параметров: nD_c , $l = l'/D_c$ и $\alpha = d_0/D_c$ (рис. 4.35), где n — число перфорационных отверстий на один метр вскрытой толщины пласта, D_c — диаметр скважины, l' — глубина проникновения пуль в породу, d_0 — диаметр отверстий.

И. А. Чарным получено выражение дополнительного фильтрационного сопротивления с использованием формулы Маскета (4.100) в виде

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \ln \frac{4h}{r_c} - \frac{1}{2\bar{h}} \varphi(\bar{h}),$$

где $\varphi(\bar{h})$ определяется по формуле (4.101) или по графику (рис. 4.33).

А. М. Пирвердян получил для коэффициента C_1 следующее выражение:

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{r_c}{b}} \ln \frac{b}{r_c} - 1 \right).$$

Сравнивая дебиты совершенной скважины (формула Дюпюи) и не совершенной скважины (4.102), получим выражение коэффициента совершенства скважины в следующем виде:

$$\delta = \frac{\ln \frac{R_k}{r_c}}{\ln \frac{R_k}{r_c} + C}.$$

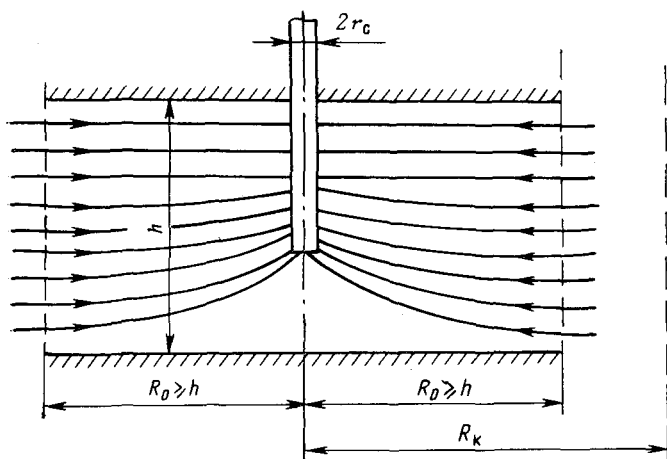


Рис. 4.36. Линии тока к не совершенной скважине

Иногда бывает удобно ввести понятие о приведенном радиусе скважины $\bar{r}_c$, т. е. радиусе такой совершенной скважины, дебит которой равен дебиту данной не совершенной скважины:

$$\bar{r}_c = r_c e^{-C}.$$

Тогда формулу (4.102) можно заменить следующей формулой:

$$Q = \frac{2\pi k h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{\bar{r}_c}}.$$

И. А. Чарный предложил следующий способ определения дебита скважины не совершенной по степени вскрытия, если величина вскрытия пласта b мала ($b \ll h$). Область движения условно разбивается на две зоны (рис. 4.36). Первая находится между контуром питания и радиусом R_0 , равным или большим толщины пласта $R_0 \geq h$, в этой зоне движение можно считать плоскорадиальным. Вторая расположена между стенкой скважины и цилиндрической поверхностью R_0 , где движение будет пространственным. Обозна-

чим потенциал при $r = R_0$ через Φ_0 . Тогда для зоны $R_0 \leq r \leq R_k$ можно записать формулу Дюпюи

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_k - \Phi_0)}{\ln \frac{R_k}{R_0}}. \quad (4.103)$$

Для зоны $r_c \leq r \leq R_0$, считая здесь приближенно движение радиально-сферическим между полусферами радиусами r_c и R_0 , имеем

$$Q = \frac{2\pi (\Phi_0 - \Phi_c)}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_0}} \approx 2\pi r_c (\Phi_0 - \Phi_c). \quad (4.104)$$

Из формул (4.103) и (4.104) по правилу производных пропорций получается формула для дебита скважины

$$Q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{r_c}}.$$

Принимая $R_0 = 1,5 h$, имеем окончательную формулу для дебита несовершенной скважины, вскрывшей пласт на малую глубину:

$$Q = \frac{2\pi (\Phi_k - \Phi_c)}{\frac{1}{h} \ln \frac{R_k}{1,5h} + \frac{1}{r_c}}.$$

Задачи притока жидкости к скважинам, гидродинамически несовершенным по характеру вскрытия пласта, и к скважинам с двойным видом несовершенства еще сложнее для исследования, чем приток к несовершенным по степени вскрытия пласта скважинам.

§ 7. УСТАНОВИВШИЕСЯ БЕЗНАПОРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ ЖИДКОСТИ

Безнапорное движение жидкости — это такое движение, при котором пьезометрическая поверхность совпадает со свободной поверхностью фильтрующейся жидкости, над которой давление постоянно.

При неподвижном состоянии жидкости ее свободная поверхность горизонтальна, в процессе движения она искривляется, понижаясь по направлению потока.

Безнапорное движение в добыче нефти встречается при шахтной и карьерной разработке нефтяных месторождений. Задачи безнапорного движения интересуют в большей степени гидротехников, например при фильтрации воды через земляные плотины, притоке грунтовой воды к скважинам и колодцам и др. Кроме того, задачи безнапорной фильтрации представляют большой теоретический интерес. Они значительно труднее, чем аналогичные задачи напорного движения. Главная трудность точного решения задач без-

напорной фильтрации заключается в том, что неизвестна форма области, занятая грунтовым потоком.

В напорной фильтрации форма области потока известна, так как непроницаемые кровля и подошва пласта фиксированы.

В работе П. Я. Полубариновой-Кочиной [16] приведены некоторые точные решения задачи о движении через прямоугольную перемычку и дается подробная библиография по этому вопросу.

Рассмотрим приближенную теорию безнапорного установившегося движения жидкости по закону Дарси, которая известна под названием гидравлической теории Дюпюи — Форхгеймера. Возьмем прямоугольную перемычку (плотину), через которую происходит фильтрация жидкости (рис. 4.37).

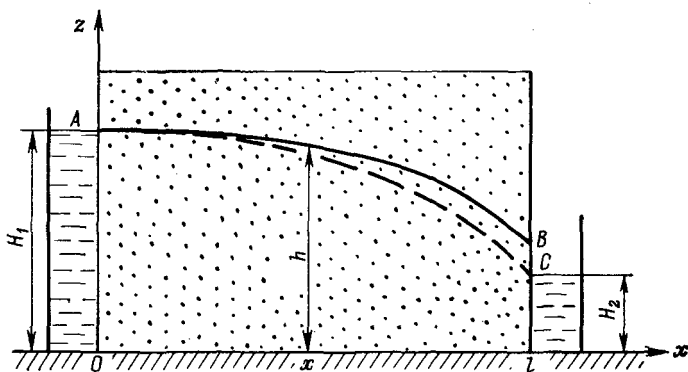


Рис. 4.37. Схема безнапорного течения через прямоугольную перемычку

Уровень жидкости H_1 называется верхним бьефом, уровень H_2 — нижним бьефом. Свободная поверхность жидкости, фильтрующейся через тело плотины, называется депрессионной (пьезометрической) поверхностью (кривая ABC). Свободная поверхность выходит на правую грань всегда выше нижнего бьефа. Величина BC называется промежутком высачивания.

Гидравлическая теория безнапорного движения основывается на следующих допущениях:

горизонтальные компоненты скорости фильтрации распределены равномерно в любом поперечном сечении потока;

давление вдоль вертикали распределено по гидростатическому закону, т. е. напор определяется по формуле

$$H = z + \frac{p}{\rho g} = H(x, y). \quad (4.105)$$

Таким образом, напор вдоль каждой вертикали предполагается постоянным.

Считая давление на свободной поверхности атмосферным, т. е. избыточное давление равно нулю, из (4.105) получаем, что напор

равен глубине потока

$$H = h.$$

Горизонтальная компонента скорости фильтрации постоянна вдоль вертикали

$$u = -c \frac{dh}{dx},$$

где $c = k\rho g/\mu$ — коэффициент фильтрации.

Вертикальная компонента скорости фильтрации равна нулю.

Расход жидкости на единицу ширины потока q , т. е. через прямоугольник высотой h и единичной шириной, будет равен:

$$q = uh1 = -ch \frac{dh}{dx}. \quad (4.106)$$

Из формулы (4.106) найдем уравнение свободной поверхности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$qx = -\frac{ch^2}{2} + \text{const.}$$

Здесь постоянная интегрирования const находится из граничного условия $h = H_1$ при $x = 0$ и равна $\frac{1}{2}cH_1^2$.

Тогда уравнение свободной поверхности принимает вид

$$qx = c(H_1^2 - h^2)/2. \quad (4.107)$$

Отсюда легко найти глубину потока h в любом сечении x . Предварительно найдем расход жидкости q . Подставляя в (4.107) второе граничное условие $h = H_2$ при $x = l$, получим

$$q = \frac{c}{2l} (H_1^2 - H_2^2), \quad (4.108)$$

и расход жидкости Q через плотину шириной B будет

$$Q = \frac{Bc}{2l} (H_1^2 - H_2^2) = \frac{Bk\rho g (H_1^2 - H_2^2)}{2\mu l}. \quad (4.109)$$

Форму депрессионной поверхности (пьезометрической линии АС) найдем по формуле (4.107); подставив в нее выражение (4.108) для расхода q , получим

$$h = \sqrt{H_1^2 - \frac{H_1^2 - H_2^2}{l} x}. \quad (4.110)$$

Таким образом, согласно гидравлической теории безнапорного движения, пьезометрическая линия АС является параболой, что, строго говоря, не отражает реальную картину течения. Это ясно из следующих соображений. Из формулы (4.110) при $H_2 = 0$ у выхода в нижний бьеф (при $x = l$) получаем $h = 0$ и, следовательно, бесконечную скорость фильтрации $u = q/h$, что физически не-

возможно. Следовательно, в действительности должно быть $h_{x=l} > H_2$, т. е. должен существовать промежуток высачивания BC , и пьезометрическая кривая будет иметь вид ABC , а не AC .

Рассмотрим теперь схему установившегося безнапорного притока жидкости к совершенной скважине (или колодцу) (рис. 4.38). Пусть на расстоянии R_k уровень грунтовых вод постоянен и равен H_k , в скважине установлен постоянный уровень H_c . Скорость фильтрации на расстоянии r от оси скважины будет

$$w_r = -c \frac{dh}{dr},$$

а расход жидкости через боковую поверхность цилиндра

$$Q = |w_r| 2\pi r h = c \frac{dh}{dr} 2\pi r h. \quad (4.111)$$

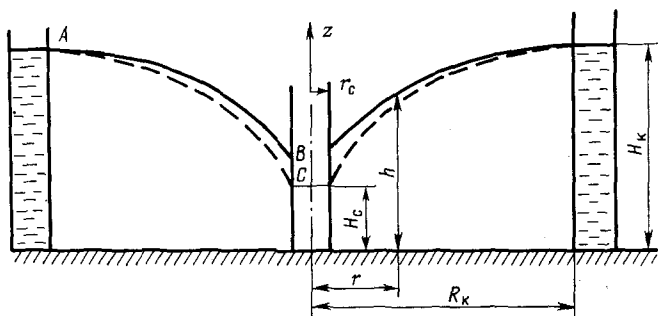


Рис. 4.38. Схема безнапорного притока к совершенной скважине

Разделяя в (4.111) переменные и интегрируя, получаем

$$Q \ln r = \pi c h^2 + \text{const},$$

где постоянная интегрирования (const) находится из граничного условия на контуре питания $h = H_k$ при $r = R_k$.

Тогда имеем

$$Q \ln \frac{R_k}{r} = \pi c (H_k^2 - h^2), \quad (4.112)$$

откуда найдем дебит жидкости, подставив второе граничное условие (на забое скважины) $h = H_c$ при $r = r_c$.

В результате

$$Q = \frac{\pi c (H_k^2 - H_c^2)}{\ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{\pi k r g (H_k^2 - H_c^2)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (4.113)$$

Разрешив уравнение (4.112) относительно h , найдем уравнение депрессионной кривой АС

$$h = \sqrt{H_k^2 - \frac{Q \ln \frac{R_k}{r}}{\pi c}} = \sqrt{H_k^2 - \frac{H_k^2 - H_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}}. \quad (4.114)$$

Формулы (4.109) и (4.113) называются формулами Дюпюи.

В дальнейшем (в гл. 5) увидим, что теория безнапорного движения грунтовых вод имеет аналогию с совершенно другой задачей подземной гидромеханики — задачей фильтрации газов в пористой среде.

Если движение жидкости в пласте подчиняется нелинейному закону фильтрации

$$w = C \left(-\frac{dh}{dx} \right)^{1/n}, \quad 1 \leq n \leq 2,$$

то формулы для дебитов будут иметь следующий вид:

1) при фильтрации через перемычку

$$Q = B \left[\frac{H_2^{n+1} - H_1^{n+1}}{(n+1)l} \right] C;$$

2) при притоке к совершенной скважине

$$Q = 2\pi C \left(\frac{n-1}{n+1} \frac{H_k^{n+1} - H_c^{n+1}}{\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}}} \right).$$

§ 8. РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Задачи установившейся фильтрации несжимаемой жидкости на плоскости можно решить при помощи методов теории функций комплексного переменного. Следует отметить, что этими методами некоторые классы задач можно решить проще и полнее, чем другими методами.

Напомним основные понятия теории функций комплексного переменного. Функция $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ описывается выражением

$$F(z) = M + iN, \quad (4.115)$$

где M и N — функции двух действительных переменных x и y ; $M = M(x, y)$, $N = N(x, y)$; i — мнимая единица.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $F = M + iN$ была функцией комплексного переменного z , является выполнение соотношений Коши—Римана (в некоторых руководствах эти соотношения называются условиями Д'Аламбера—Эйлера)

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4.116)$$

При выполнении условий (4.116) функция $F(z)$ имеет производную по z , т. е. производная dF/dz имеет одно и то же значение независимо от того, по какому направлению выбирается бесконечно малый отрезок dz . Кроме того, функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. являются гармоническими функциями

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0. \quad (4.117)$$

Рассмотрим плоский установившийся поток несжимаемой жидкости. Компоненты скорости фильтрации запишем через потенциал скорости фильтрации $\Phi(x, y)$ (см. § 1):

$$w_x = -\partial\Phi/\partial x, \quad w_y = -\partial\Phi/\partial y. \quad (4.118)$$

Из уравнения неразрывности, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0, \quad (4.119)$$

следует, во-первых, что потенциал Φ удовлетворяет уравнению Лапласа (это уже было показано в § 1)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.120)$$

и, во-вторых, что существует функция $\Psi(x, y)$, называемая функцией тока, такая, что

$$w_x = -\partial\Psi/\partial y; \quad w_y = \partial\Psi/\partial x. \quad (4.121)$$

Сравнивая соотношения (4.118) и (4.121), видим, что функции Φ и Ψ удовлетворяют условиям Коши—Римана (4.116):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (4.122)$$

Это означает, что функция $F = \Phi + i\Psi$ — характеристическая функция течения, или комплексный потенциал, — является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$.

Покажем, что функция тока Ψ сохраняет постоянное значение вдоль линии тока. На плоскости течения z возьмем линию тока и направленный вдоль нее элементарный вектор $\vec{ds} = dx + i dy$ с компонентами dx и dy . Так как скорость фильтрации w направлена по касательной к линии тока, то $dx/w_x = dy/w_y$, или

$$w_y dx - w_x dy = 0. \quad (4.123)$$

Уравнение (4.123) представляет собой дифференциальное уравнение линии тока. Подставляя в него выражения для компонент скорости фильтрации (4.121), получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = d\Psi = 0, \quad (4.124)$$

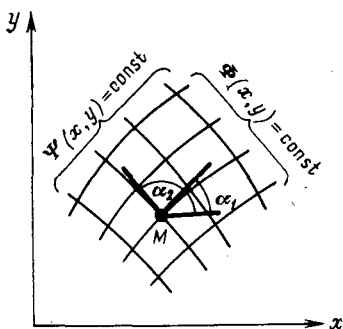


Рис. 4.39. Взаимное расположение эквипотенциалей и линий тока в плоском фильтрационном потоке

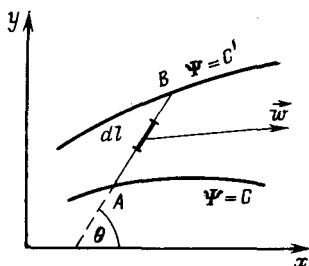


Рис. 4.40. Схема фильтрационного потока на плоскости к выводу формулы $Q = \Psi_A - \Psi_B = C - C'$

г. е. вдоль линии тока $\Psi = \text{const}$. Изменяя значение константы, будем иметь семейство линий тока; точно также полагая $\Phi(x, y) = \text{const}$ с разными значениями констант, получим семейство эквипотенциалей (рис. 4.39).

Покажем, что эквипотенциали и линии тока взаимно ортогональны. Пусть касательная к эквипотенциали $\Phi = C_1$ в точке M образует угол α_1 с осью x, а касательная к пересекающей ее линии тока — угол α_2 , тогда $\text{tg } \alpha_1 = (dy/dx)_{\Phi=C_1}$, но так как вдоль эквипотенциали

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0, \quad \text{то} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y} = \text{tg } \alpha_1,$$

а вдоль линии тока $\Psi = C_2$ (в силу (4.124)), поэтому

$$\text{tg } \alpha_2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\Psi=C_2} = - \frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y}.$$

Рассмотрим произведение

$$\text{tg } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2 = \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y} \frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y}. \quad (4.125)$$

Из условий Коши—Римана (4.122) следует, что правая часть равенства (4.125) равна -1 , т. е. $\text{tg } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2 = -1$, а это имеет место, если $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, т. е. для прямых, пересекающихся под прямым углом. Таким образом, действительно, линии тока и эквипотенциали взаимно перпендикулярны.

Определим теперь физический смысл функции тока. Возьмем две линии тока, на которых функция тока принимает значения $\Psi(x, y) = C$ и $\Psi(x, y) = C'$ (рис. 4.40), и соединим их линией AB.

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к элементу этой линии dl , который составляет угол θ с осью x; тогда проекции вектора $\vec{n}$ на оси координат равны $\cos(n, x) = \sin \theta$, $\cos(n, y) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$.

Найдем расход через сечение AB (считая, что толщина пласта равна единице)

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_A^B w_n dl = \int_A^B (\vec{w} \vec{n}) dl = \\
 &= \int_A^B [w_x \cos(n, x) + w_y \cos(n, y)] dl = \\
 &= \int_A^B (w_x \sin \theta - w_y \cos \theta) dl = \\
 &= \int_A^B (w_x dy - w_y dx) = \int_A^B \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \\
 &= - \int_A^B d\Psi = \Psi_A - \Psi_B = C - C'. \quad (4.126)
 \end{aligned}$$

Таким образом, расход между двумя линиями тока равен разности значений функций тока на этих линиях.

Найдем производную dF/dz . Так как значение производной по z одинаково по любому направлению, то возьмем производную от F вдоль оси: $\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x}$, но так как

$$\begin{aligned}
 \partial \Phi / \partial x &= -w_x, \quad \partial \Psi / \partial x = w_y, \text{ то} \\
 \frac{\partial F}{\partial z} &= -w_x + iw_y = -(w_x - iw_y) = -\bar{w}, \quad (4.127)
 \end{aligned}$$

где $\bar{w} = w_x - iw_y$ — комплексно-сопряженное значение скорости фильтрации. Поэтому производная dF/dz называется комплексной скоростью.

Вычислим модуль комплексной скорости

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = |w|, \quad (4.128)$$

т. е. модуль комплексной скорости равен модулю скорости фильтрации.

Найдем закон движения частицы вдоль линии тока s . Пусть dx и dy — проекции элементарного вектора $\vec{ds}$, направленного вдоль линии тока. Можно написать

$$dx/dt = v_x = w_x/m, \quad dy/dt = v_y = w_y/m,$$

или

$$(dx - idy)/dt = (w_x - iw_y)/m, \text{ но } dx - idy = \bar{dz},$$

$$w_x - iw_y = \bar{w} = -dF/dz, \text{ значит } \frac{\bar{dz}}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dF}{dz},$$

или

$$dt = -m \frac{d\bar{z}}{dF/dz},$$

откуда

$$t = -m \int_s \frac{d\bar{z}}{dF/dz}. \quad (4.129)$$

Заметим, что комплексные потенциалы потоков можно суммировать по принципу суперпозиции, так как функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа (см. § 1).

Рассмотрим комплексные потенциалы простейших потоков на плоскости.

Для прямолинейно-параллельного потока комплексным потенциалом является функция

$$F(z) = az + b, \quad (4.130)$$

где a и b — комплексные постоянные: $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$.

Отделим в $F(z)$ действительную часть от мнимой:

$$\begin{aligned} F(z) &= (a_1 + ia_2)(x + iy) + b_1 + ib_2 = \\ &= a_1x - a_2y + b_1 + i(a_2x + a_1y + b_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Phi = a_1x - a_2y + b_1, \quad \Psi = a_2x + a_1y + b_2. \quad (4.131)$$

Полагая $a_1x - a_2y + b_1 = C$ и $a_2x + a_1y + b_2 = C'$, видим, что эквипотенциали представляют собой прямые линии с угловым коэффициентом a_1/a_2 , а линии тока — с угловым коэффициентом $-a_2/a_1$. Компоненты скорости фильтрации равны $w_x = -\partial\Phi/\partial x = -a_1$, $w_y = -\partial\Phi/\partial y = a_2$, т. е. движение — прямолинейное с постоянной скоростью фильтрации $|\omega| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$ (рис. 4.41).

Рассмотрим комплексный потенциал точечного стока, расположенного в начале координат:

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z + b, \quad (4.132)$$

где q , как и в § 5, — расход на единицу толщины пласта (при $q < 0$ — источник, при $q > 0$ — сток).

Отделим действительную часть от мнимой, представив комплексное переменное z в полярных координатах:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \quad (4.133)$$

где r — расстояние точки от начала координат; φ — полярный угол.

Тогда

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(re^{i\varphi}) + b = \frac{q}{2\pi} \ln r + b + i \frac{q}{2\pi} \varphi, \quad (4.134)$$

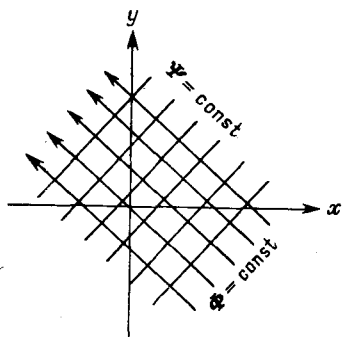


Рис. 4.41. Фильтрационное поле для прямолинейно-параллельного потока

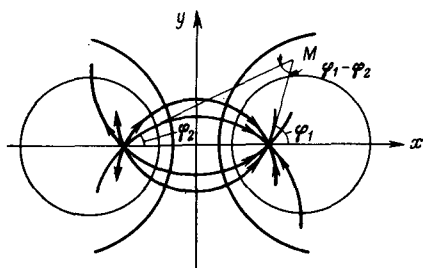


Рис. 4.42. Эквипотенциалы и линии тока для источника и стока на плоскости

откуда следует, что

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + b, \quad \Psi = \frac{q}{2\pi} \varphi. \quad (4.135)$$

Естественно, что мы получили то же выражение для потенциала скорости фильтрации Φ , что и ранее (см. § 5). Из формул (4.135) следует, что эквипотенциалы представляют собой концентрические окружности с $r = \text{const}$, а линии тока — радиальные прямые с $\varphi = \text{const}$. Модуль скорости фильтрации

$$|w| = \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{|z|} = \frac{q}{2\pi r}.$$

Из последней формулы следует, что в начале координат ($r = 0$) функция (4.132) не будет аналитической, поскольку эта точка является особой точкой плоскости.

Если сток расположен в точке с комплексной координатой $z_0 = x_0 + iy_0$, то комплексный потенциал примет вид

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0) + b, \quad (4.136)$$

т. е. особой точкой будет точка z_0 , и перейдя к полярным координатам $r - \varphi$, получим

$$z - z_0 = re^{i\varphi}.$$

Рассмотрим одновременную работу в пласте равнодебитных стока и источника, помещенных в точках с координатами $x = a$, $x = -a$, $y = 0$ (рис. 4.42).

Комплексный потенциал стока по формуле (4.136) равен $\frac{q}{2\pi} \ln(z - a)$, а источника — соответственно $-\frac{q}{2\pi} \ln(z + a)$. Складывая эти потенциалы по принципу суперпозиции, получим

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z + a) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - a}{z + a}. \quad (4.137)$$

В (4.137) отброшено постоянное слагаемое.

Выведем уравнения для эквипотенциалей и линий тока этого течения. Возьмем произвольную точку $z = x + iy$ на плоскости течения, обозначим $z - a = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z + a = r_2 e^{i\varphi_2}$ и подставим в формулу (4.137):

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} + \ln e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{q}{2\pi} i (\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}; \quad \Psi = \frac{q}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (4.138)$$

а уравнения эквипотенциалей и линий тока запишутся соответственно в виде

$$r_1/r_2 = C_1 \quad \text{или} \quad r_1^2/r_2^2 = C_1^2 = C, \quad (4.139)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = C_2. \quad (4.140)$$

В соотношении (4.139) перейдем к декартовым координатам

$$r_1^2 = (x - a)^2 + y^2; \quad r_2^2 = (x + a)^2 + y^2.$$

Тогда

$$\frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2} = C,$$

или

$$(x - a)^2 + y^2 = C [(x + a)^2 + y^2].$$

Раскрывая скобки и перенося все члены уравнения в левую часть, будем иметь

$$(1 - C)x^2 - 2a(1 + C)x + (1 - C)y^2 + (1 - C)a^2 = 0,$$

или, деля на $1 - C$,

$$x^2 - 2a \frac{1 + C}{1 - C} x + y^2 + a^2 = 0, \quad C \neq 1.$$

Прибавим и вычтем выражение $\left(a \frac{1 + C}{1 - C}\right)^2$, чтобы получить квадрат разности

$$\left(x - a \frac{1 + C}{1 - C}\right)^2 + y^2 - \left(a \frac{1 + C}{1 - C}\right)^2 + a^2 = 0.$$

Окончательно получаем

$$\left(x - a \frac{1 + C}{1 - C}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2 C}{(1 - C)^2}.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение окружности с центром в точке $x_0 = a \frac{1+C}{1-C}$, $y_0 = 0$ и радиусом $\frac{2a\sqrt{C}}{|1-C|}$. Изменяя значения константы C от нуля до единицы, получим семейство окружностей в правой полуплоскости, не концентричных со скважиной-стоком, с увеличивающимися радиусами. Значение $C = 1$ соответствует окружности с бесконечным радиусом, т. е. оси y . В левой полуплоскости $x < 0$ получим симметричную картину, полагая $1 < C < \infty$ (см. рис. 4.42).

Как следует из рис. 4.42,

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.140):

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} = C_2,$$

и используем формулу для тангенса разности двух углов

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} = \\ & = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{(x-a)(x+a)}} = C_2, \end{aligned}$$

из которой следует

$$\left(\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a} \right) / \left(1 + \frac{y^2}{(x-a)(x+a)} \right) = C_2',$$

что можно привести к виду

$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{C_2'} y = a^2,$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{C_2'} \right)^2 = \frac{a^2 (C_2'^2 + 1)}{C_2'^2}.$$

Таким образом, линии тока представляют собой окружности с центрами, лежащими на оси y ($x_0 = 0$, $y_0 = a/C_2'$), и радиусами, равными $a\sqrt{C_2'^2 + 1}/|C_2'|$, проходящие через точки $x = a$, $x = -a$ (сток и источник).

Эквипотенциали и линии тока показаны на рис. 4.27.

В заключение найдем модуль скорости фильтрации, используя формулу (4.128):

$$|w| = \left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{q}{2\pi} \left| \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right| = \\ = \frac{q}{2\pi} \left| \frac{-2a}{(z-a)(z+a)} \right| = \frac{2aq}{2\pi r_1 r_2} = \frac{aq}{\pi r_1 r_2}.$$

Если рассматривать только правую половину плоскости течения $x \geq 0$, то комплексный потенциал (4.137) описывает приток к одному стоку, расположенному в точке $x = a, y = 0$ вблизи прямолинейного контура питания, которым является ось y .

При помощи принципа суперпозиции можно решать различные задачи фильтрации в пластах с системой скважин. Например, можно показать, что комплексный потенциал скважины, эксцентрично расположенной в круговом пласте радиусом R_k с эксцентриситетом δ , определяется по формуле $F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z-\delta}{z-R_k^2/\delta}$, а ком-

плексный потенциал кольцевой батареи m скважин радиуса R_1 в круговом пласте радиуса R_k — из выражения

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z^m - R_1^m}{z^m - \frac{R_k^{2m}}{R_1^m}}.$$

Глава 5

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ПО ЗАКОНУ ДАРСИ

Запишем дифференциальные уравнения фильтрации однофазного сжимаемого флюида в однородной пористой среде, выведенные в гл. 3, пренебрегая силами тяжести и инерции:

уравнение неразрывности потока

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}; \quad (5.1)$$

уравнения движения

$$w_x = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_z = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (5.2)$$

Введем функцию $\mathcal{P}$ следующим образом. Примем, что ее дифференциал

$$d\mathcal{P} = \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} dp, \quad (5.3)$$

тогда

$$\mathcal{P} = \int \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} dp + C. \quad (5.4)$$

Функция названа функцией Л. С. Лейбензона. Так как функция Лейбензона $\mathcal{P}$ и давление p зависят от координат и времени, то равенство (5.3) можно записать в следующем развернутом виде, используя понятие полного дифференциала функции от многих переменных:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} dt = \\ & = \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \right). \end{aligned}$$

Из сравнения коэффициентов при dx, dy, dz, dt получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} &= \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial x}; & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} &= \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} &= \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial z}; & \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= \frac{k(p) \rho(p)}{\mu(p)} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Запишем выражения для массовых скоростей фильтрации, умножив уравнения движения (5.2) на плотность флюида $\rho(p)$ и используя формулы (5.2):

$$\rho w_x = -\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}; \quad \rho w_y = -\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}; \quad (5.6)$$

$$\rho w_z = -\rho \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z}.$$

Подставив выражения (5.6) в уравнение неразрывности (5.1), получим

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}, \quad (5.7)$$

или

$$\nabla^2 \mathcal{P} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Дифференциальное уравнение (5.7) или (5.8) справедливо для неустановившегося движения однородного флюида в однородной пористой среде по закону Дарси.

В случае установившейся фильтрации $\partial(\rho m)/\partial t = 0$ и уравнение (5.7) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2} = 0, \quad (5.9)$$

или

$$\nabla^2 \mathcal{P} = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, при установившейся фильтрации функция Лейбензона $\mathcal{P}$, определенная по формуле (5.4), удовлетворяет уравнению Лапласа.

§ 2. АНАЛОГИЯ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОГО ФЛЮИДА С ФИЛЬТРАЦИЕЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Введение функции Лейбензона в уравнения позволяет установить аналогию между установившейся фильтрацией сжимаемого флюида и установившейся фильтрацией несжимаемой жидкости, для которой законы фильтрации были детально разобраны в гл. 4.

В дальнейшем изложении примем, что проницаемость среды и динамический коэффициент вязкости флюида постоянны: $k = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, плотность $\rho = \rho(p)$. Тогда можно ввести функцию Лейбензона как

$$\mathcal{P} = \int \rho(p) dp + C, \quad (5.11)$$

при этом

$$d\mathcal{P} = \rho(p) dp. \quad (5.12)$$

Запишем закон Дарси для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости в дифференциальной форме (3.6) через расход

$$Q = - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{ds} \omega(s), \quad (5.13)$$

где $Q = \text{const}$; $\omega(s)$ — площадь поперечного сечения струйки.

При установившейся фильтрации сжимаемого флюида по всей длине струйки массовый расход сохраняется постоянным:

$$Q_m = \rho Q = \text{const}.$$

Умножив правую и левую части уравнения (5.13) на плотность флюида $\rho(p)$ и использовав соотношение (5.12), имеем

$$Q_m = - \frac{k}{\mu} \rho(p) \frac{dp}{ds} \omega(s) = - \frac{k}{\mu} \frac{d\mathcal{P}}{ds} \omega(s), \quad Q_m = \text{const}. \quad (5.14)$$

Нетрудно видеть, что выражения (5.13) и (5.14) являются одноподобными дифференциальными уравнениями, в которых объемному расходу несжимаемой жидкости Q соответствует массовый расход сжимаемого флюида Q_m , а давлению p в уравнении (5.13) соот-

ветствует функция Лейбензона $\mathcal{P}$ в уравнении (5.14). Об этой же аналогии свидетельствует тот факт, что уравнению Лапласа (5.9) при установившейся фильтрации сжимаемого флюида удовлетворяет функция Лейбензона $\mathcal{P}$ (5.11), а при аналогичной фильтрации несжимаемой жидкости этому уравнению удовлетворяет давление p из (4.4).

Уравнения движения (5.2) для несжимаемой жидкости связывают скорость фильтрации w с давлением p , а для сжимаемого флюида — массовую скорость фильтрации ρw с функцией Лейбензона $\mathcal{P}$ из (5.6).

Отсюда следует вывод, что все формулы, полученные для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси, можно использовать и для установившейся фильтрации сжимаемого флюида в пластах той же геометрии и при тех же граничных условиях, заменив переменные по аналогии между установившейся фильтрацией сжимаемого флюида и несжимаемой жидкостью.

Несжимаемая жидкость	Сжимаемый флюид
Объемный расход	Массовый расход
Давление	Функция Лейбензона
Объемная скорость фильтрации	Массовая скорость фильтрации

Подчеркнем, что при фильтрации сжимаемого флюида под давлением p понимается абсолютное давление.

§ 3. УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Найдем выражение функции Лейбензона для упругой (слабосжимаемой) жидкости, описываемой уравнением состояния (3.13):

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int \rho dp + C = \int \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} dp + C = \\ &= \frac{\rho_0}{\beta_{\text{ж}}} e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} + C = \frac{\rho}{\beta_{\text{ж}}} + C.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Если $\beta_{\text{ж}}(p-p_0) \ll 1$, то можно взять уравнение состояния упругой жидкости в виде (3.14). Тогда из (5.15) получим следующее выражение для функции Лейбензона

$$\mathcal{P} = \frac{\rho_0}{\beta_{\text{ж}}} [1 + \beta_{\text{ж}}(p-p_0)] + C = \rho_0 p + C_1. \quad (5.16)$$

Подставив (5.16) в дифференциальное уравнение (5.9), получим

$$\nabla^2 \mathcal{P} = \nabla^2 (\rho_0 p + C_1) = \rho_0 \nabla^2 p = 0. \quad (5.17)$$

Из соотношений (5.16) и (5.17) следует, как отмечалось ранее (§ 4, гл. 3), что при установившейся фильтрации упругой жидкости плотность можно считать постоянной. Следовательно, при решении практических задач, связанных с установившейся фильтрацией упругой жидкости, можно пользоваться формулами, выведенными для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости.

Заметим, однако, что этот вывод может оказаться неверным, если рассматривается фильтрация упругой жидкости в пласте с

очень высоким пластовым давлением и при большой депрессии. В этом случае соотношение (5.16), вообще говоря, дает большую погрешность, при расчетах следует использовать функцию Лейбензона в виде (5.15).

§ 4. ПРЯМОЛИНЕЙНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Исследуем установившийся прямолинейно-параллельный фильтрационный поток идеального газа.

Предварительно найдем функцию Лейбензона для идеального газа, используя уравнение состояния

$$\mathcal{P} = \int p dp + C = \int \frac{p_{ат}}{p_{ат}} p dp + C = \frac{p_{ат}}{2p_{ат}} p^2 + C. \quad (5.18)$$

Газовый пласт показан на рис. 4.6. Используя аналогию между течением несжимаемой жидкости и течением газа (см. стр. 116), найдем характеристики фильтрационного потока газа по аналогии с соответствующими характеристиками потока несжимаемой жидкости, описанными в § 2, гл. 4.

1. Распределение давления в прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке несжимаемой жидкости

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x. \quad (5.19)$$

При фильтрации газа аналогичное соотношение справедливо для функции Лейбензона:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_k - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_r}{L_k} x. \quad (5.20)$$

Подставив в (5.20) выражение (5.18) функции Лейбензона и имея в виду, что

$$\mathcal{P}_k = \frac{p_{ат}}{2p_{ат}} p_k^2 + C; \quad \mathcal{P}_r = \frac{p_{ат}}{2p_{ат}} p_r^2 + C, \quad (5.21)$$

найдем распределение давления в прямолинейно-параллельном потоке идеального газа

$$p = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_r^2}{L_k} x}. \quad (5.22)$$

Следовательно, давление по длине пласта изменяется по параболическому закону (рис. 5.1, кривая 1). Зависимость $p^2 = f(x)$ — прямолинейная.

2. Градиент давления в потоке несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_k - p_r}{L_k}. \quad (5.23)$$

Аналогично (5.23) градиент функции Лейбензона для потока газа можно записать в виде

$$\frac{d\mathcal{P}}{dx} = - \frac{\mathcal{P}_\kappa - \mathcal{P}_\Gamma}{L_\kappa}. \quad (5.24)$$

Дифференцируя по x выражение (5.18), подставляя в (5.24) и используя (5.21), получим распределение градиента давления в фильтрационном потоке газа

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} \frac{2p}{2} \frac{dp}{dx} = - \\ - \frac{\frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} \frac{p_\kappa^2}{2} - \frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} \frac{p_\Gamma^2}{2}}{L_\kappa}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

откуда

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_\kappa^2 - p_\Gamma^2}{2L_\kappa} \frac{1}{p}, \quad (5.26)$$

где давление p определяется по формуле (5.22).

График распределения градиента давления в фильтрационном потоке газа изображен на рис. 5.1, кривая 2. Градиент давления

Рис. 5.1. Кривые распределения давления (1) и градиента давления (2) в прямолинейно-параллельном потоке газа

не остается постоянным, как в случае несжимаемой жидкости, а возрастает при приближении к галерее.

3. Объемный расход несжимаемой жидкости в рассматриваемом одномерном потоке

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_\kappa - p_\Gamma}{L_\kappa} Bh, \quad (5.27)$$

где B — ширина потока; h — толщина пласта.

Подставив в (5.27) вместо объемного расхода Q массовый расход газа Q_m и вместо давления функцию Лейбензона, получим

$$Q_m = \frac{k}{\mu} \frac{\mathcal{P}_\kappa - \mathcal{P}_\Gamma}{L_\kappa} Bh = \frac{k}{\mu} \frac{\frac{\rho_{\text{ат}}}{2\rho_{\text{ат}}} (p_\kappa^2 - p_\Gamma^2)}{L_\kappa} Bh. \quad (5.28)$$

Объемный расход газа, приведенный к атмосферному давлению, выражается формулой

$$Q_{\text{ат}} = \frac{Q_m}{\rho_{\text{ат}}} = \frac{k}{\mu \rho_{\text{ат}}} \frac{p_\kappa^2 - p_\Gamma^2}{2L_\kappa} Bh. \quad (5.29)$$

4. Вместо скорости фильтрации для несжимаемой жидкости

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{p_\kappa - p_\Gamma}{L_\kappa}, \quad (5.30)$$

при фильтрации газа аналогично определяется массовая скорость фильтрации, т. е.

$$\rho\omega = \frac{k}{\mu} \frac{P_K - P_\Gamma}{L_K} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} \rho\omega = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} \frac{p_K^2 - p_\Gamma^2}{2L_K}, \quad (5.31)$$

откуда

$$\omega = \frac{k}{2\mu} \frac{p_K^2 - p_\Gamma^2}{L_K} \frac{1}{p}. \quad (5.32)$$

Так как скорость фильтрации пропорциональна градиенту давления (5.26), то ее график аналогичен графику градиента давления (см. рис. 5.1, кривая 2). Физически возрастание скорости фильтрации вдоль газового пласта происходит за счет расширения газа при снижении давления.

5. Определим средневзвешенное по объему порового пространства, занятого газом, пластовое давление.

По определению

$$\tilde{p} = \frac{1}{V_\Pi} \int p dV_\Pi, \quad (5.33)$$

в нашем случае

$$V_\Pi = BhL_K m; \quad dV_\Pi = Bhmdx.$$

Тогда

$$\tilde{p} = \frac{1}{BhL_K m} \int_0^{L_K} \sqrt{p_K^2 - \frac{p_K^2 - p_\Gamma^2}{L_K} x} Bhmdx. \quad (5.34)$$

После интегрирования (5.34) получим

$$\tilde{p} = \frac{2}{3} \frac{p_K^3 - p_\Gamma^3}{p_K^2 - p_\Gamma^2}. \quad (5.35)$$

§ 5. ПЛОСКОРАДИАЛЬНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ЗАКОНУ ДАРСИ

Плоскорадиальный фильтрационный поток имеет место в круговом пласте радиусом R_K , в центре которого имеется совершенная скважина радиусом r_c (рис. 4.4). Характеристики такого потока найдем, зная характеристики подобного потока несжимаемой жидкости (см. § 2, гл. 4), заменив искомые функции в соответствии с аналогией на стр. 116.

1. Распределение пластового давления в потоке несжимаемой жидкости определяется по формуле (4.31):

$$p = p_K - \frac{p_K - p_c}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}. \quad (5.36)$$

По такому же закону будет распределяться в фильтрационном потоке газа функция Лейбенсона

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_k - \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}. \quad (5.37)$$

Подставив в (5.37) выражение функции Лейбенсона из (5.18), получим закон распределения пластового давления в плоскорадиальном фильтрационном потоке идеального газа

$$p = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}}. \quad (5.38)$$

Сравнение кривых распределения давления в пласте в случаях установившейся плоскорадиальной фильтрации газа и несжимаемой жидкости при одинаковых граничных условиях показывает, что в газовом потоке имеет место резкое падение давления вблизи скважины и весьма малое вдали от нее (рис. 5.2).

2. Изменение градиента давления в зависимости от координаты r при плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости описывается формулой (4.32):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (5.39)$$

В случае установившейся плоскорадиальной фильтрации газа по такому же закону будет изменяться градиент функции Лейбенсона:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dr} = \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (5.40)$$

Переходя от функции Лейбенсона к давлению, получим

$$\frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p \frac{dp}{dr} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p_k^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r},$$

откуда

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_k^2 - p_c^2}{2 \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r} \frac{1}{p}. \quad (5.41)$$

Из последней формулы следует, что градиент давления вблизи забоя резко возрастает как за счет уменьшения r , так и за счет падения давления p .

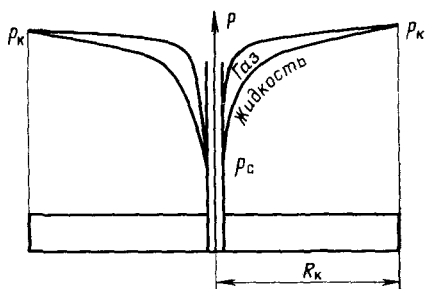


Рис. 5.2. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости и газа

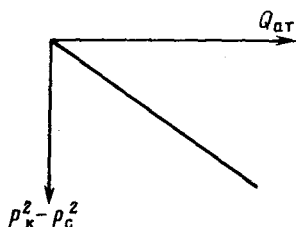


Рис. 5.3. Индикаторная линия при фильтрации газа по закону Дарси

3. Дебит газовой скважины получим, подставив в формулу Дюпюи (4.34) вместо объемного расхода несжимаемой жидкости Q массовый расход газа Q_m и вместо давления p функцию Лейбензон $\mathcal{P}$:

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}, \quad (5.42)$$

или

$$Q_{ат} = \frac{Q_m}{\rho_{ат}} = \frac{\pi kh}{\mu \rho_{ат}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (5.43)$$

Индикаторная линия при фильтрации газа строится в координатах $Q_{ат} - (p_k^2 - p_c^2)$ и, очевидно, в установившемся плоскорадиальном потоке имеет прямолинейный характер (рис. 5.3).

4. Скорость фильтрации несжимаемой жидкости определяется по формуле (4.33):

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (5.44)$$

В плоскорадиальном потоке газа также будет изменяться массовая скорость фильтрации

$$\rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}, \quad (5.45)$$

или

$$\frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} \rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\frac{1}{2} \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p_k^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r},$$

откуда

$$\omega = \frac{k}{\mu} \frac{p_K^2 - p_c^2}{2 \ln \frac{R_K}{r_c}} \frac{1}{r} \frac{1}{p}. \quad (5.46)$$

5. Определим средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление в плоскорадиальном потоке газа. Оно определяется по формуле (5.33), в нашем случае

$$V_{\text{пор}} = \pi m h (R_K^2 - r_c^2); \quad dV_{\text{пор}} = 2\pi r h m dr, \quad (5.47)$$

а давление определяется по формуле (5.38). Подставив эти выражения в (5.33), получим

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{1}{\pi m h (R_K^2 - r_c^2)} \int_{r_c}^{R_K} \sqrt{p_K^2 - \frac{p_K^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}} 2\pi r h m dr = \\ &= \frac{2p_K}{R_K^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_K} \sqrt{1 - \frac{1 - (p_c/p_K)^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}} r dr. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Полученный интеграл не берется в конечном виде. Поэтому расчет ведется приближенно. Обозначим

$$x = \frac{1 - (p_c/p_K)^2}{\ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}, \quad (0 \leq x < 1 \quad \text{при} \quad r_c \leq r \leq R_K),$$

тогда подынтегральное выражение в (5.48) равно $\sqrt{1-x}$ и при $x < 1$ его можно разложить в ряд:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots$$

Удержав два первых члена ряда, будем иметь

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1 - (p_c/p_K)^2}{2 \ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r}.$$

Тогда

$$\tilde{p} = \frac{2p_K}{R_K^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_K} \left[1 - \frac{1 - (p_c/p_K)^2}{2 \ln \frac{R_K}{r_c}} \ln \frac{R_K}{r} \right] r dr. \quad (5.49)$$

Интегрируя по частям, подставляя пределы и пренебрегая членами, содержащими r_c^2 , получим

$$\tilde{p} = p_K \left[1 - \frac{1 - (p_c/p_K)^2}{4 \ln \frac{R_K}{r_c}} \right]. \quad (5.50)$$

Если по формуле (5.50) провести расчеты для различных значений ρ_k , ρ_c , R_k , r_c , то можно убедиться, что средневзвешенное пластовое давление газа в круговом пласте $\bar{p}$ близко к контурному, $\bar{p} \approx \rho_k$. Физически это объясняется значительной крутизной воронки депрессии при притоке газа к скважине. Средневзвешенное давление используется при определении запасов газа в пласте, а также для приближенного расчета гидродинамических характеристик; замена его контурным давлением значительно упрощает расчеты.

§ 6. ПЛОСКОРАДИАЛЬНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ДВУЧЛЕННОМУ ЗАКОНУ ФИЛЬТРАЦИИ

Вблизи высокодебитных газовых скважин происходит нарушение закона Дарси, поэтому расчеты, связанные с разработкой газовых месторождений, а также с исследованием скважин, проводят обычно по двучленному закону фильтрации (1.11). При этом нельзя использовать дифференциальное уравнение (5.9), так как оно выведено с учетом уравнений движения по закону Дарси (5.2). Будем интегрировать непосредственно уравнение (1.11), считая фильтрацию плоскорадиальной:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} w + \rho \frac{\beta}{\sqrt{k}} w^2. \quad (5.51)$$

Найдем распределение давления в круговом пласте и выведем формулу притока газа к скважине.

Выразим скорость фильтрации через приведенный объемный дебит $Q_{ат}$, используя формулу для плотности (3.19) и соотношение $Q_m = \rho_{ат} Q_{ат}$:

$$w = \frac{Q_m}{\rho \omega} = \frac{\rho_{ат} Q_{ат}}{\rho_{ат} \frac{r}{\rho_{ат}} 2\pi r h} = \frac{Q_{ат} \rho_{ат}}{2\pi r h \rho}. \quad (5.52)$$

Подставим выражение (5.52) в (5.51), заменив плотность во втором члене по формуле (3.19):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} \frac{Q_{ат} \rho_{ат}}{2\pi r h \rho} + \rho_{ат} \frac{r}{\rho_{ат}} \frac{\beta}{\sqrt{k}} \frac{Q_{ат}^2 \rho_{ат}^2}{4\pi^2 r^2 h^2 \rho^2}.$$

Затем разделим переменные

$$\rho d\rho = \frac{\mu \rho_{ат} Q_{ат}}{2\pi k h} \frac{dr}{r} + \frac{\rho_{ат} \rho_{ат} \beta Q_{ат}^2}{4\pi^2 h^2 \sqrt{k}} \frac{dr}{r^2} \quad (5.53)$$

и проинтегрируем от забоя ($\rho = \rho_c$, $r = r_c$) до произвольной точки пласта (ρ , r):

$$\int_{\rho_c}^{\rho} \rho d\rho = \frac{\mu \rho_{ат} Q_{ат}}{2\pi k h} \int_{r_c}^r \frac{dr}{r} + \frac{\rho_{ат} \rho_{ат} \beta Q_{ат}^2}{4\pi^2 h^2 \sqrt{k}} \int_{r_c}^r \frac{dr}{r^2}. \quad (5.54)$$

В результате будем иметь

$$p^2 - p_c^2 = \frac{\mu p_{ат} Q_{ат}}{\pi k h} \ln \frac{r}{r_c} + \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k}} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right), \quad (5.55)$$

или

$$p = \sqrt{p_c^2 + \frac{\mu p_{ат} Q_{ат}}{\pi k h} \ln \frac{r}{r_c} + \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k}} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (5.56)$$

Распределение давления по формуле (5.56) отличается от распределения давления по формуле (5.38) (при соблюдении закона Дарси) наличием последнего слагаемого.

Интегрируя дифференциальное уравнение (5.53) от забоя ($p = p_c$, $r = r_c$) до контура питания ($p = p_k$, $r = R_k$) и пренебрегая $1/R_k$ по сравнению с $1/r_c$, получим уравнение притока газа к скважине

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\mu p_{ат} Q_{ат}}{\pi k h} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{k}}. \quad (5.57)$$

Обычно вводят обозначения

$$A = \frac{\mu p_{ат}}{\pi k h} \ln \frac{R_k}{r_c}; \quad B = \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{k}}. \quad (5.58)$$

Тогда уравнение (5.57) примет вид

$$p_k^2 - p_c^2 = A Q_{ат} + B Q_{ат}^2. \quad (5.59)$$

Коэффициенты фильтрационных сопротивлений A и B определяются опытным путем по данным исследования скважины при установившихся режимах. Газовая скважина исследуется на пяти-шести режимах, на каждом режиме измеряется дебит и определяется забойное давление (по устьевому давлению). Затем скважину закрывают и давление в остановленной скважине принимают за контурное давление p_k . После этого можно найти значения A и B . Строят индикаторную линию по уравнению (5.59). Она представляет собой параболу с выпуклостью к оси дебитов (рис. 5.4). Однако удобнее записать уравнение (5.59) в виде

$$\frac{p_k^2 - p_c^2}{Q_{ат}} = A + B Q_{ат}. \quad (5.60)$$

График этого уравнения, построенный в координатах $Q_{ат}$, $(p_k^2 - p_c^2)/Q_{ат}$, представляет собой прямую, для которой A — отрезок, отсекаемый на оси ординат, B — тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс, $B = \tan \alpha$ (рис. 5.5).

Уравнение притока газа к скважине (5.59) широко используется в расчетах при проектировании разработки газовых месторождений. Кроме того, по известному значению A , найденному в результате

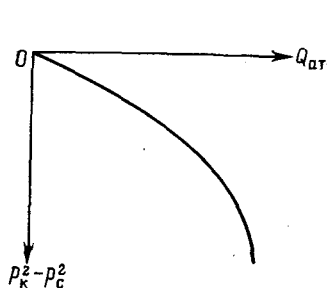


Рис. 5.4. Индикаторная линия при фильтрации газа по двучленному закону

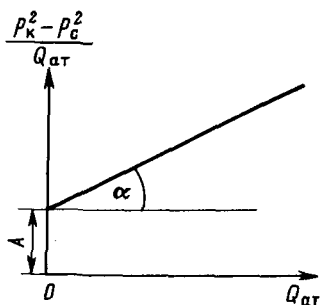


Рис. 5.5. График зависимости $(p_k^2 - p_c^2)/Q_{ат}$ от $Q_{ат}$ при фильтрации газа по двучленному закону

исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта, например коэффициент гидропроводности

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{p_{ат}}{\pi A} \ln \frac{R_k}{r_c}.$$

§ 7. ПЛОСКОРАДИАЛЬНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК РЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ЗАКОНУ ДАРСИ

Если пластовое давление выше 10 МПа и депрессия не слишком мала ($p_c/p_k \leq 0,9$), то уравнение состояния газа значительно отклоняется от уравнения состояния идеального газа и плотность определяется по формуле (3.21). Кроме того, для высоких пластовых давлений нужно учитывать зависимость вязкости от давления. Эта зависимость определяется по формулам (3.24), (3.25) или по графикам, приведенным в [4, 6]. Проницаемость будем считать постоянной.

Если выполняется закон Дарси и фильтрация установившаяся, то справедливо уравнение (3.9), в котором под функцией Лейбензона надо понимать выражение (5.4):

$$\mathcal{P} = \int \frac{k\rho}{\mu} dp = \frac{k\rho_{ат}}{p_{ат}} \int \frac{p dp}{\mu(p) z(p)} + C. \quad (5.61)$$

Найдем дебит скважины при плоскорадиальном движении. Используя аналогию между установившейся фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, изложенную в § 2, напомним выражение для дебита, заменяя в формуле Дюпюи объемный дебит массовым, а $k\rho/\mu$ — значениями функции Лейбензона (5.61):

$$Q_m = \frac{2\pi kh (\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_c)}{\ln \frac{R_k}{r_c}} = \frac{2\pi kh \rho_{ат}}{p_{ат} \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{p_c}^{p_k} \frac{p}{\mu(p) z(p)} dp. \quad (5.62)$$

Затем перейдем к дебиту, приведенному к атмосферному давлению

$$Q_{ат} = \frac{Q_m}{\rho_{ат}} = \frac{2\pi kh}{\rho_{ат} \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{p_c}^{p_k} \frac{p}{\mu(p) z(p)} dp. \quad (5.63)$$

Можно предложить несколько способов вычисления интеграла в формуле (5.63), наиболее употребляем из которых следующий: по графикам зависимости $z(p)$ и $\mu(p)$ определяются значения $z(p_c) = z_c$, $z(p_k) = z_k$, $\mu(p_c) = \mu_c$, $\mu(p_k) = \mu_k$, переменные μ и z под знаком интеграла заменяются постоянными, равными

$$\tilde{z} = (z_c + z_k)/2; \quad \tilde{\mu} = (\mu_c + \mu_k)/2.$$

Тогда интеграл в формуле (5.63) вычисляется и формула (5.63) принимает следующий вид:

$$Q_{ат} = \frac{2\pi kh}{\rho_{ат} \ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{\tilde{z} \tilde{\mu}} \int_{p_c}^{p_k} p dp = \frac{\pi kh (p_k^2 - p_c^2)}{\rho_{ат} \tilde{z} \tilde{\mu} \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (5.64)$$

Выражение (5.64), определяющее дебит реального газа, отличается от выражения (5.43) для идеального газа множителем $\tilde{z}$ в знаменателе и среднепластовым значением вязкости $\tilde{\mu}$.

Можно вычислить функцию P и приведенный дебит по формуле (5.63), подставляя под интеграл (5.61) выражения (3.23) и (3.24) для коэффициентов вязкости и сверхсжимаемости и проводя интегрирование.

§ 8. ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК РЕАЛЬНОГО ГАЗА ПО ДВУЧЛЕННОМУ ЗАКОНУ ФИЛЬТРАЦИИ К НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ

Уравнение притока реального газа по двучленному закону фильтрации к совершенной скважине записывается в виде

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\tilde{\mu} \tilde{z} \rho_{ат}}{\pi kh} \ln \frac{R_k}{r_c} Q_{ат} + \frac{\rho_{ат} \tilde{z} p_{ат} \beta}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{k}} Q_{ат}^2. \quad (5.65)$$

Несовершенство газовых скважин при соблюдении закона Дарси учитывается так же, как и несовершенство нефтяных скважин, т. е. радиус скважины в формуле дебита заменяется приведенным радиусом, равным (см. § 6 гл. 4)

$$\bar{r}_c = r_c e^{-(C_1 + C_2)}.$$

Для расчета дебитов газовых скважин, несовершенных по степени и характеру вскрытия, при нарушении закона Дарси можно предложить следующую схему. Круговой пласт, в центре которого находится скважина, делится на три области (рис. 5.6). Первая область имеет радиус $R_1 \approx (2-3) r_c$. Здесь из-за больших скоростей вблизи перфорационных отверстий происходит нарушение

закона Дарси, т. е. в основном проявляется несовершенство по характеру вскрытия. Вторая область представляет собой кольцевое пространство ($R_1 < r \leq R_2$), где $R_2 \approx h$. Здесь линии тока искривляются из-за несовершенства скважины по степени вскрытия, справедлив двучленный закон фильтрации.

В третьей области ($R_2 < r \leq R_K$) действует закон Дарси, течение можно считать плоскорадиальным. Обозначая давления на границах областей через p_1 и p_2 , можем написать для третьей области

$$p_K^2 - p_2^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{z}}{\pi k h} \ln \frac{R_K}{r_2}. \quad (5.66)$$

Во второй области примем, что толщина пласта переменна и изменяется по линейному закону от b при $r = R_1$ до h при $r = R_2$, т. е.

$$h(r) = \alpha + \beta r, \quad (5.67)$$

где α и β определяются из условий $h = b$ при $r = R_1$, $h(r) = h$ при $r = R_2$.

Чтобы получить закон движения в этой области, надо проинтегрировать уравнение (5.53), предварительно подставив вместо постоянной толщины h переменную толщину из формулы (5.67). Будем иметь

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{z}}{\pi k h} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \right) + \frac{p_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2 \pi^2 h^2 \sqrt{k}} \times \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + C'_1 \right). \quad (5.68)$$

Здесь C_1 и C'_1 — коэффициенты, характеризующие несовершенство скважины по степени вскрытия.

$$C_1 = \frac{1}{\bar{h}} \ln \bar{h} + \frac{1 - \bar{h}}{\bar{h}} \ln \frac{h}{R_1}, \quad \text{где } \bar{h} = b/h; \quad (5.69)$$

$$C'_1 \approx \left(\frac{1}{h^2} - 1 \right) \frac{1}{h}.$$

Последняя формула — приближенная, она применима при значениях $b \gg R_1$.

В первой области фильтрация происходит по двучленному закону, плоскорадиальное течение нарушается из-за перфорацион-

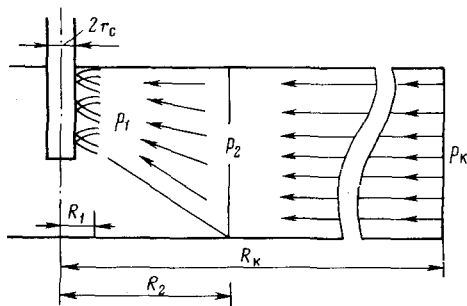


Рис. 5.6. Схема притока газа к несовершенной по степени и характеру вскрытия скважине

ных отверстий; несовершенство по характеру вскрытия учитывается коэффициентами C_2 и C'_2 :

$$p_1^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\mu} \tilde{z}}{\pi k h} \left(\ln \frac{R_1}{r_c} + C_2 \right) + \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k}} \times \\ \times \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_1} + C'_2 \right). \quad (5.70)$$

Коэффициент C_2 определяется по графикам В. И. Щурова, для C'_2 предлагается приближенная формула

$$C'_2 = \frac{h^2}{(3N^2 R_0^3)}, \quad (5.71)$$

где N — суммарное число отверстий; R_0 — глубина проникновения перфорационной пули в пласт.

Складывая почленно уравнения (5.66), (5.68) и (5.70) и пренебрегая величиной $1/R_2$, получим уравнение притока газа к несовершенной скважине в виде

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\mu} \tilde{z}}{\pi k h} \left(\ln \frac{R_k}{r_c} + C_1 + C_2 \right) + \\ + \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{k}} (1 + r_c C'_1 + r_c C'_2). \quad (5.72)$$

Если записать уравнение (5.72) через коэффициенты фильтрационных сопротивлений A и B в виде (5.59), то для несовершенной скважины будем иметь

$$A = \frac{\rho_{ат} \tilde{\mu} \tilde{z}}{\pi k h} \left(\ln \frac{R_k}{r_c} + C_1 + C_2 \right), \quad B = \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z}}{2\pi^2 h^2 r_c \sqrt{k}} \times \\ \times (1 + r_c C'_1 + r_c C'_2),$$

где C_1 и C'_1 определяются по формулам (5.69), C'_2 — по формуле (5.71), а C_2 — по графикам В. И. Щурова (см. рис. 4.35).

Глава 6

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. УПРУГИЙ РЕЖИМ ПЛАСТА И ЕГО ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

В практике разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений в пластах часто возникают неустановившиеся процессы, связанные с пуском или остановкой скважин, с изменением темпов

отбора флюида из скважин. Характер этих процессов проявляется в перераспределении пластового давления, в изменениях во времени скоростей фильтрационных потоков, дебитов скважин и т. д. Особенности этих неустановившихся процессов зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей, т. е. основной формой пластовой энергии в этих процессах является энергия упругой деформации жидкостей (нефти и воды) и материала пласта.

При этом предполагается, что фильтрационный поток однофазный, т. е. давление в любой точке потока выше давления насыщения.

При пуске скважины в эксплуатацию в условиях упругого режима движение жидкости к скважине начинается за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и жидкости сначала в ближайшей окрестности забоя, затем во все более удаленных областях пласта.

При снижении пластового давления объем сжатой жидкости увеличивается, а объем порового пространства сокращается за счет расширения материала пласта. Все это способствует вытеснению жидкости из пласта в скважину. Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и породы пласта очень малы, но зато очень велики бывают объемы пласта и насыщающих его флюидов, поэтому объемы жидкости, извлекаемой из пласта за счет упругости пласта и жидкости, могут быть весьма значительными.

В некоторых случаях приток жидкости к забоям скважин поддерживается и напором воды, поступающей в пласт из области питания. Тогда режим пласта следует называть упруговодонапорным. Различают и вторую разновидность упругого режима — замкнуто-упругий режим. Встречаются залежи нефти в закрытых со всех сторон пластовых «ловушках», когда на небольших расстояниях от нефтяной залежи продуктивный пласт либо выклинивается, либо экранирован сбросом. В начальной стадии разработки такой залежи, до тех пор пока пластовое давление не снизилось ниже давления насыщения, имеет место замкнуто-упругий режим фильтрации.

Характерная особенность проявления упругого режима в процессе разработки нефтяных месторождений — длительность процесса перераспределения пластового давления после начала работы скважины или изменения темпа отбора жидкости из скважины. Это связано с тем, что при фильтрации вязкой жидкости в пласте возникают очень большие силы сопротивления. Неустановившиеся процессы протекают тем быстрее, чем больше коэффициент проницаемости пласта k , и тем медленнее, чем больше вязкость жидкости μ и коэффициенты объемной упругости жидкости $\beta_{ж}$ и пласта $\beta_{с}$.

Первыми исследователями, разрабатывавшими теорию упругого режима в 30-х годах, были Маскет, Шилсуиз, Херст, Тсейс и Джекоб. Однако они не учитывали объемную упругость пласта. В СССР наиболее полно теория упругого режима разработана В. Н. Щелкачевым.

§ 2. ПОДСЧЕТ УПРУГОГО ЗАПАСА ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

Под упругим запасом жидкости в пласте понимается количество жидкости, которое можно извлечь из пласта при снижении давления в нем за счет объемной упругости пласта и насыщающих его жидкостей.

Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и пласта очень малы (см. гл. 3), но очень велики объемы пласта. Поэтому упругий запас жидкости в пласте может быть весьма существенным.

При снижении давления в пласте упругий запас жидкости естественно убывает, а при повышении давления происходит накопление упругого запаса жидкости в нем.

Упругий запас жидкости в пласте можно подсчитать следующим образом.

Выделим мысленно элемент объема пласта V_0 . Пусть $V_{ож}$ есть объем жидкости, насыщающей элемент объема пласта V_0 при начальном давлении p_0 . Упругий запас жидкости будем определять по ее объему, замеряемому при начальном пластовом давлении. Обозначим через ΔV_3 изменение упругого запаса жидкости внутри объема пласта V_0 при изменении давления во всех его точках на величину Δp . Тогда получим в соответствии с формулами (3.12) и (3.29)

$$\Delta V_3 = \beta_{ж} V_{ож} \Delta p + \beta_c V_0 \Delta p. \quad (6.1)$$

Учитывая, что начальный объем жидкости, насыщающей элемент объема пласта V_0 , равен полному объему пор в этом элементе пласта, имеем

$$V_{ож} = m V_0, \quad (6.2)$$

где m — пористость пласта.

Тогда формулу (6.1) с учетом равенства (6.2) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta V_3 = (m\beta_{ж} + \beta_c) V_0 \Delta p, \quad (6.3)$$

или

$$\Delta V_3 = \beta^* V_0 \Delta p, \quad (6.4)$$

где

$$\beta^* = m\beta_{ж} + \beta_c. \quad (6.5)$$

Коэффициент β^* называется коэффициентом упругоэластичности пласта. На основании формулы (6.4) коэффициент упругоэластичности пласта β^* численно равен изменению упругого запаса жидкости в единице объема пласта при изменении пластового давления в нем на единицу.

Если формулу (6.3) или (6.4) относить к разрабатываемому в условиях замкнуто-упругого режима нефтяному месторождению,

то под V_0 следует понимать объем пласта, в котором к данному моменту времени давление изменилось на Δp , при этом

$$\Delta p = p_k - \tilde{p}, \quad (6.6)$$

где p_k — начальное пластовое давление; $\tilde{p}$ — средневзвешенное по объему возмущенной части пласта V_0 давление.

Вычислить средневзвешенное пластовое давление $\tilde{p}$ можно, если известна геометрия возмущенной части пласта и конкретное распределение давления в ней.

Дифференцируя равенство (6.4), получаем

$$d(\Delta V_3) = \beta^* d(V_0 \Delta p).$$

С другой стороны, изменение упругого запаса жидкости в пласте за время dt равно объему отобранной жидкости:

$$d(\Delta V_3) = Q(t) dt,$$

где $Q(t)$ — дебит всех скважин, эксплуатирующих данную нефтяную залежь.

Приравняв два последних равенства, получим дифференциальное уравнение истощения нефтяной залежи в условиях замкнуто-упругого режима

$$Q(t) dt = \beta^* d(V_0 \Delta p). \quad (6.7)$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Обратимся к общему дифференциальному уравнению (5.8) неустановившегося движения сжимаемой жидкости по закону Дарси в деформируемой пористой среде, выведенному в гл. 5 при $k = \text{const}$, $\mu = \text{const}$:

$$\frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 \mathcal{P}. \quad (6.8)$$

Используем уравнения состояния упругой жидкости (3.14) и упругой пористой среды (3.31):

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}} (p - p_0)]; \quad (6.9)$$

$$m = m_0 + \beta_{\text{с}} (p - p_0). \quad (6.10)$$

Произведение $m\rho$ можно получить, умножив (6.10) на (6.9):

$$m\rho = m_0 \rho_0 + (m_0 \rho_0 \beta_{\text{ж}} + \rho_0 \beta_{\text{с}}) (p - p_0) + \rho_0 \beta_{\text{с}} \beta_{\text{ж}} (p - p_0)^2.$$

Последним слагаемым в правой части этого равенства ввиду его малости по сравнению с двумя другими слагаемыми можно пренебречь. Тогда, учитывая (6.5), получаем

$$m\rho = m_0 \rho_0 \left[1 + \frac{\beta^*}{m_0} (p - p_0) \right],$$

откуда после дифференцирования по времени t находим

$$\frac{\partial (mp)}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Выражение функции Лейбензона $\mathcal{P}$ для упругой жидкости имеет вид (5.20)

$$\mathcal{P} = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} + \rho_0 (p - p_0) + C = \rho_0 p + C_1. \quad (6.12)$$

Дифференцируя дважды выражение (6.12) по координатам и складывая, получим

$$\nabla^2 \mathcal{P} = \rho_0 \nabla^2 p. \quad (6.13)$$

Подставляя (6.11) и (6.13) в исходное дифференциальное уравнение (6.8), будем иметь

$$\rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \rho_0 \nabla^2 p,$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (6.14)$$

где введено обозначение

$$\kappa = k/(\mu \beta^*). \quad (6.15)$$

Уравнение (6.14) является основным дифференциальным уравнением упругого режима фильтрации. По предложению В. Н. Щелкачева оно названо уравнением пьезопроводности и относится к уравнениям типа уравнения теплопроводности (уравнения Фурье), которое является одним из основных уравнений математической физики.

Коэффициент κ , характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, В. Н. Щелкачев назвал коэффициентом пьезопроводности пласта по аналогии с коэффициентом температуропроводности в уравнении теплопроводности.

Размерность коэффициента пьезопроводности κ можно установить из (6.15):

$$[\kappa] = \frac{[k]}{[\mu][\beta^*]} = \frac{[L^2]}{[L^{-1}MT^{-1}][LM^{-1}T^2]} = \frac{[L^2]}{[T]},$$

где L , M , T — соответственно размерности длины, массы и времени.

Наиболее часто встречающиеся в нефтепромысловой практике значения коэффициента пьезопроводности заключены в пределах от 0,1 до 5 м²/с.

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Для того чтобы исследовать неустановившиеся процессы фильтрации упругой жидкости в упругом пласте, надо получить закон распределения давления в пласте $p(x, y, z, t)$. Для этого нужно проинтегрировать уравнение (6.14) при соответствующих начальных и граничных условиях (см. гл. 3).

Рассмотрим наиболее простые точные решения уравнения пьезопроводности (6.14) для одномерных потоков.

Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости

С л у ч а й I. Пусть в полубесконечном горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B начальное пластовое давление всюду постоянно и равно p_k . На галерее (при $x = 0$) давление мгновенно снижено до p_r и в дальнейшем поддерживается постоянным (т. е. $p_r = \text{const}$). В удаленных точках ($x \rightarrow \infty$) давление в любой момент времени остается равным p_k .

В пласте образуется неустановившийся прямолинейно-параллельный поток упругой жидкости. Давление в любой точке потока x и в любой момент времени t можно определить, интегрируя уравнение Фурье (6.14), которое для такого потока будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty. \quad (6.16)$$

Начальные и граничные условия при этом будут следующие:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_k \quad \text{при} \quad t = 0; \\ p(x, t) &= p_r \quad \text{при} \quad x = 0, \quad t > 0; \\ p(x, t) &= p_k \quad \text{при} \quad x = \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Задача заключается в определении дебита галереи $Q(t)$ и давления в любой точке потока и в любой момент времени $p(x, t)$.

Используя анализ размерностей, покажем, что поставленная задача автомодельна, т. е. из аргументов, от которых зависит давление, можно составить один (безразмерный) комплекс.

Обозначим через $P = (p - p_r)/(p_k - p_r)$ безразмерное давление, которое, как следует из соотношений (6.16) и (6.17), зависит от времени t , координаты x и коэффициента пьезопроводности κ , т. е.

$$P = f(x, t, \kappa).$$

Размерности этих аргументов таковы: $[x] = L$, $[t] = T$, $[\kappa] = L^2 T^{-1}$, и из них можно составить один безразмерный комплекс $x/\sqrt{\kappa t}$. Приняв за новую переменную величину $u = x/(2\sqrt{\kappa t})$, сведем задачу к нахождению безразмерного давления

P , зависящего только от u : $P = f(u)$. При этом условия (6.17) переходят в следующие:

$$P = 0 \quad \text{при} \quad u = 0; \quad (6.18)$$

$$P = 1 \quad \text{при} \quad u = \infty.$$

В силу линейности дифференциального уравнения (6.16) для функции P имеем такое же уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (6.19)$$

По правилу дифференцирования сложных функций находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}; \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{x}{2\sqrt{\kappa}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}} \right) = \frac{\partial P}{\partial u} \left(-\frac{u}{2t} \right); \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial u} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение (6.19) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 P}{du^2} + 2u \frac{dP}{du} = 0, \quad (6.20)$$

которое должно быть решено при условиях (6.18).

Для решения уравнения (6.20) обозначим

$$dP/du = \xi,$$

тогда уравнение (6.20) принимает вид

$$\frac{d\xi}{du} + 2u\xi = 0. \quad (6.21)$$

Разделяя переменные в (6.21) и интегрируя, получаем

$$\xi = \frac{dP}{du} = C_1 e^{-u^2}, \quad (6.22)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя (6.22), будем иметь

$$P = C_1 \int_0^u e^{-u^2} du. \quad (6.23)$$

Здесь использовано первое из условий (6.18).

Второе условие (6.18) дает

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-u^2} du},$$

но из интегрального исчисления известно, что

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

поэтому

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

и

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du. \quad (6.24)$$

Интеграл в (6.24) называется интегралом вероятности и является табулированной функцией, изменяющейся в пределах от 0 до 1:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right).$$

Таким образом,

$$P = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right).$$

Тогда закон распределения давления в неустановившемся прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости имеет вид

$$p = p_r + (p_k - p_r) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (6.25)$$

Типичные кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости к галерее, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$, показаны на рис. 6.1. Найдем дебит галереи Q . Будем считать положительным дебит, отбираемый из галереи ($x = 0$, см. рис. 6.1), когда поток движется против оси Ox .

Согласно закону Дарси, имеем

$$Q = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} \omega = \frac{k}{\mu} B h \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad (6.26)$$

где B , h — соответственно ширина и толщина пласта.

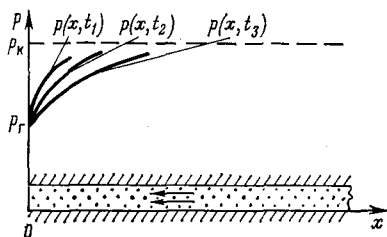


Рис. 6.1. Кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости

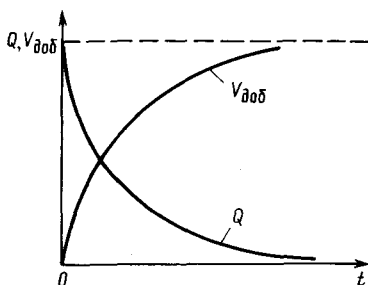


Рис. 6.2. Графики зависимости дебита и добычи жидкости от времени после пуска галереи при условии $p_r = \text{const}$

Дифференцируя выражение (6.25), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} &= (p_k - p_r) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right)_{x=0} = \\ &= (p_k - p_r) \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa t}}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Дебит галереи в любой момент времени найдем, подставив значение градиента давления $\partial p / \partial x$ из (6.27) в выражение (6.26):

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sqrt{\pi \kappa t}} B h. \quad (6.28)$$

Из формулы (6.28) следует, что дебит галереи убывает с течением времени как $1/\sqrt{t}$ и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. В начальный момент времени решение (6.28) равно бесконечности, что является следствием скачка давления на галерее (от p_k до p_r) в этот момент времени.

Накопленная к моменту t добыча $V_{\text{доб}}$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} V_{\text{доб}} &= \int_0^t Q(t) dt = \frac{k(p_k - p_r) B h}{\mu \sqrt{\pi \kappa}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ &= \frac{2k(p_k - p_r) B h}{\mu \sqrt{\pi \kappa}} \sqrt{t}, \end{aligned}$$

т. е. сразу после начала отбора из галереи она быстро возрастает, а в дальнейшем растет очень медленно (рис. 6.2).

С л у ч а й II. В таком же полубесконечном пласте, что и в случае I, в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию галерея с постоянным объемным дебитом Q . Требуется найти давление в любой точке пласта в любой момент времени.

Математически задача заключается в интегрировании уравнения (6.14) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_k \quad \text{при} \quad t=0; \\ \omega(x, t) &= \frac{Q}{\omega} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = w_1 = \text{const} \quad \text{при} \quad x=0; \\ p(x, t) &= p_k \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Умножая обе части уравнения (6.14) на k/μ и дифференцируя по x , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu} \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right),$$

или

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \kappa \frac{\partial^3 p}{\partial x^3},$$

откуда, меняя порядок дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (6.30)$$

Так как в нашем случае

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = w(x, t),$$

то уравнение (6.30) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6.31)$$

Полученное уравнение (6.31) по форме совпадает с уравнением теплопроводности (6.14). Следовательно, решением уравнения (6.31) будет решение, аналогичное (6.25), с заменой давления p на скорость фильтрации w :

$$w = C_1 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} + C_2. \quad (6.32)$$

При этом следует иметь в виду, что начальное и граничное условия для w имеют вид

$$w(x, 0) = 0; \quad w(0, t) = w_1.$$

Отсюда $C_2 = w_1$, $C_1 = -w_1$ и, следовательно,

$$w(x, t) = w_1 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.33)$$

Для того чтобы найти распределение давления в потоке, необходимо проинтегрировать уравнение (6.33) по x , полагая, что время t фиксировано. Имеем

$$\frac{k}{\mu} \int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx = w_1 \int_0^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du \right) dx,$$

откуда

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\mu}{k} w_1 x - \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du \right) dx. \quad (6.34)$$

Последнее слагаемое в (6.34) интегрируется по частям, в результате чего находим

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du \right) dx = \\ &= \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \left[x \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du \Big|_0^x - \int_0^x x e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \frac{dx}{2\sqrt{\kappa t}} \right] = \\ &= \frac{2\mu w_1}{k \sqrt{\pi}} \left[x \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du - \sqrt{\kappa t} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (6.34) можно записать в виде

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\mu}{k} w_1 x \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \frac{1 - e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}}{\frac{\sqrt{\pi} x}{2\sqrt{\kappa t}}} \right]. \quad (6.35)$$

Учитывая, что $p(0, t)$ есть давление на галерее, т. е. $p(0, t) = p_r(t)$, из (6.35) получим выражение для давления в любой точке потока

$$\begin{aligned} p(x, t) = p_r(t) + \frac{\mu w_1}{k} \left[x \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right) \right]. \quad (6.36) \end{aligned}$$

Для того чтобы найти закон изменения давления на галерее $p_r(t)$, подставим в (6.36) граничное условие $p(x, t) = p_k$ при $x \rightarrow \infty$; так как при $x \rightarrow \infty$, $\operatorname{erf}(x/2\sqrt{\kappa t}) \rightarrow 1$, то произведение $x[1 - \operatorname{erf}(x/2\sqrt{\kappa t})]$ дает неопределенность вида $\infty \times 0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталья, можно показать, что это произведение стремится к нулю; учитывая еще, что $e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, получаем

$$p_r(t) = p_k - \frac{2\mu w_1}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{\kappa t},$$

или

$$p_r(t) = p_k - \frac{Q\mu}{Bh} \frac{2\sqrt{\kappa t}}{k\sqrt{\pi}}. \quad (6.37)$$

Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости.

Основная формула теории упругого режима фильтрации

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h имеется добывающая скважина нулевого радиуса (точечный сток). Начальное пластовое давление во всем пласте одинаково и равно p_k . В момент времени $t = 0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом Q_0 . В пласте образуется неустановившийся плоскорадиальный поток упругой жидкости. Распределение давления в пласте (в любой его точке в любой момент времени) $p(r, t)$ определяется интегрированием уравнения (6.14), которое для плоскорадиального движения запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (6.38)$$

Начальные и граничные условия задачи таковы (см. гл. 3, § 4)

$$p(r, t) = p_k \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$p(r, t) = p_k \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty; \quad (6.39)$$

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad r = 0, \quad t > 0.$$

Последнее условие запишем в виде

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh}. \quad (6.40)$$

Так же, как в предыдущем случае, проведем анализ размерностей. Искомое распределение давления в пласте зависит от пяти

определяющих параметров r , t , κ , p_κ , $Q_0\mu/(2\pi kh)$, размерности которых следующие:

$$[r] = L; \quad [t] = T; \quad [\kappa] = L^2 T^{-1}; \\ [p_\kappa] = [L^{-1} M T^{-2}]; \quad [Q_0\mu/(2\pi kh)] = [L^{-1} M T^{-2}].$$

Тогда давление, приведенное к безразмерному виду, $P = p/p_\kappa$ зависит от двух безразмерных параметров (так как из пяти параметров три имеют независимые размерности — r , t , p_κ : $n = 5$, $k = 3$, $n - k = 2$):

$$P = f\left(\eta, \frac{Q_0\mu}{2\pi kh p_\kappa}\right), \quad (6.41)$$

где

$$\eta = r/2\sqrt{\kappa t}.$$

Таким образом, задача автомодельна и уравнение (6.38) можно свести к обыкновенному. Дифференцируя (6.41), найдем аналогично предыдущему

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\eta}{2t}; \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 P}{d\eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.38), получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2 P}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + 2\eta\right) \frac{dP}{d\eta} = 0, \quad (6.42)$$

которое нужно проинтегрировать при условиях, полученных из (6.39) ($P = 1$ при $\eta \rightarrow \infty$):

$$\left(\eta \frac{dP}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{Q_0\mu}{2\pi kh p_\kappa}. \quad (6.43)$$

Воспользуемся подстановкой $dP/d\eta = \xi$, тогда вместо уравнения (6.42) будем иметь

$$\frac{d\xi}{d\eta} + \left(\frac{1}{\eta} + 2\eta\right) \xi = 0,$$

или

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\eta}{\eta} = -2\eta d\eta. \quad (6.44)$$

Интегрируя (6.44), получаем

$$\ln \xi + \ln \eta = -\eta^2 + \ln C_1, \quad (6.45)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Потенцируя (6.45), имеем

$$\xi = \frac{dP}{d\eta} = C_1 \frac{e^{-\eta^2}}{\eta}. \quad (6.46)$$

Интегрируя (6.46) и учитывая первое из условий (6.43), получаем

$$P(\eta) = -C_1 \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} d\eta + 1. \quad (6.47)$$

Умножая равенство (6.46) на η , устремляя $\eta \rightarrow 0$ и используя второе условие (6.43), находим, что

$$C_1 = \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_k},$$

тогда из (6.47) получим

$$P(\eta) = -\frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_k} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} d\eta + 1. \quad (6.48)$$

Интеграл в последней формуле легко свести к табличному следующей подстановкой

$$u = \eta^2 = \frac{r^2}{4\kappa t}.$$

Тогда

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{du}{2u}.$$

Перейдя от безразмерного давления P к размерному $p = P p_k$, получим

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (6.49)$$

Интеграл в формуле (6.49) называется интегральной показательной функцией, которая табулирована и обозначается

$$-\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) = \int_{\frac{r^2}{4\kappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Качественное изменение этой функции представлено на рис. 6.3.

Следовательно, давление в любой точке пласкорадияльного потока в условиях упругого режима фильтрации определяется по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left[-\text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \right]. \quad (6.50)$$

Формула (6.50) получила название основной формулы теории упругого режима фильтрации. Она имеет широкое практическое

применение, и в частности используется при интерпретации результатов исследования скважин.

При малых значениях аргумента — $r^2/(4\kappa t) \ll 1$ — интегральная показательная функция имеет простую асимптотику:

$$-Ei(-x) \simeq \ln \frac{1}{x} - 0,5772.$$

При этом погрешность не превышает

$$0,25 \%, \text{ если } x = r^2/(4\kappa t) \leq 0,01;$$

$$1 \%, \text{ если } x \leq 0,03;$$

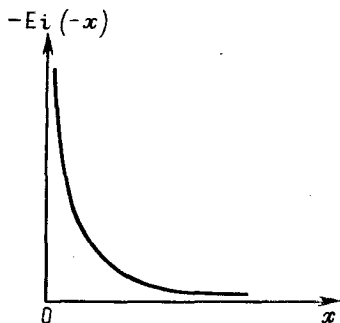
$$5,7 \%, \text{ если } x \leq 0,1;$$

$$9,7 \%, \text{ если } x \leq 0,14.$$

Следовательно, для значений $r^2/(4\kappa t) \ll 1$ давление можно определять по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left(\ln \frac{4\kappa t}{r^2} - 0,5772 \right). \quad (6.51)$$

Рис. 6.3. График интегральной показательной функции



Из (6.50) находим, что расход жидкости через любую цилиндрическую поверхность радиусом r и скорость фильтрации определяются соответственно по формулам

$$Q(r, t) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r h = Q_0 e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}}; \quad (6.52)$$

$$w = \frac{Q_0}{2\pi r h} e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}}. \quad (6.53)$$

Из последней формулы следует, что стационарная скорость $w_{\text{стац}} = Q_0/(2\pi r h)$ достигается очень быстро на небольших расстояниях от скважины, так как значение коэффициента проницаемости обычно велико.

При теоретическом исследовании неустановившихся процессов перераспределения пластового давления удобно пользоваться безразмерными параметрами Фурье fo и Fo , играющими роль «безразмерного времени» и определяемыми из следующих равенств:

$$fo = \kappa t / r_c^2, \quad (6.54)$$

$$Fo = \kappa t / R_k^2,$$

где r_c — радиус скважины; R_k — радиус кругового контура питания, или радиус круговой непроницаемой границы пласта.

В зависимости от специфики решаемой задачи удобно пользоваться тем или другим из указанных параметров Фурье.

Строго говоря, основная формула теории упругого режима (6.50) справедлива лишь для случая точечного стока (при $r_c = 0$) в неограниченном пласте ($R_k = \infty$).

Для оценки влияния конечного радиуса возмущающей скважины r_c на результаты расчетов давления В. Н. Щелкачев использовал параметр Фурье fo . Сравнивая результаты расчетов давления по формуле (6.50) с точными данными Ван-Эвердингена и Херста (см. § 8), учитывающими конечный радиус скважины r_c , В. Н. Щелкачев установил, что погрешность подсчетов по формуле (6.50) составляет

$$0,6 \% \quad \text{при } fo = 100;$$

$$2,3 \% \quad \text{при } fo = 25;$$

$$5 \% \quad \text{при } fo = 10;$$

$$9,4 \% \quad \text{при } fo = 5.$$

Оценим практическое значение этой погрешности. Допустим, что $\kappa = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $r_c = 0,1 \text{ м}$. Тогда, предположив $fo = 100$, найдем

$$t = fo \frac{r_c^2}{\kappa} = 100 \frac{0,1^2}{1} = 1 \text{ с}.$$

Следовательно, уже через 1 с после пуска скважины расчеты забойного давления, выполненные по формуле (6.50), будут иметь погрешность, не превышающую 0,6 %. Отсюда следует, что для скважин обычных размеров формула (6.50) обеспечивает высокую степень точности уже на самой ранней стадии (а тем более для поздней стадии) процесса перераспределения давления.

Непосредственными расчетами В. Н. Щелкачевым было установлено, что в громадном большинстве практически интересных случаев поведение возмущающей скважины в конечном открытом пласте можно в течение достаточно длительного времени изучать при помощи простой формулы (6.50) для бесконечного пласта. При этом погрешность в подсчетах забойного давления не превзойдет

$$0,08 \% \quad \text{при } Fo \leq 0,2;$$

$$1 \% \quad \text{при } Fo \leq 0,35;$$

$$1,9 \% \quad \text{при } Fo \leq 0,5.$$

Для расчетов пластового давления в любой точке открытого кругового пласта (при $r \leq 0,1 R_k$) можно с высокой степенью точности (до 0,2 %) пользоваться формулой (6.50) для бесконечного пласта, если при этом $R_k \geq 10^5 r_c$, $Fo \leq 0,2$. В дополнение к указанным оценкам можно еще отметить, что различие в величинах забойных давлений в условиях конечного (открытого и закрытого) и бесконечного пластов не превзойдет 1 %, если $Fo \leq 0,33$, $R_k \geq 50 r_c$ или если $Fo \leq 0,35$, $R_k \geq 1000 r_c$.

Решения дифференциального уравнения Фурье для различных случаев фильтрации упругой жидкости в ограниченных открытых

и закрытых пластах представляются бесконечными рядами по функциям Бесселя (см. § 8).

В заключение приведем пьезометрические кривые для бесконечного пласта, который эксплуатируется скважиной радиуса r_c с постоянным дебитом Q_0 (рис. 6.4). Для точек вблизи забоя можно пользоваться формулой (6.51): дифференцируя ее по координате r , найдем градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h} \frac{1}{r}.$$

Из этой формулы следует, что градиент давления для значений r , удовлетворяющих неравенству $r^2 \ll 0,03 \cdot 4 \pi k t$, практически не зависит от времени и определяется по той же формуле, что для установившейся плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости (4.32).

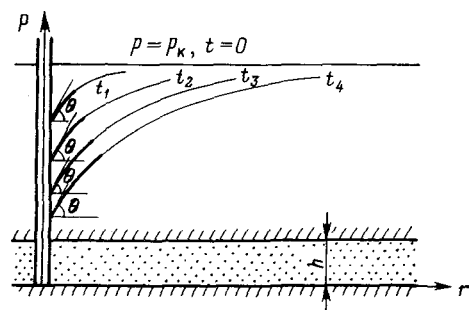


Рис. 6.4. Пьезометрические кривые при пуске скважины с постоянным дебитом Q_0

Для указанных значений r пьезометрические кривые представляют собой логарифмические линии (см. рис. 6.4). Углы наклона касательных на забое скважины одинаковы для всех кривых.

§ 5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СКВАЖИН В УСЛОВИЯХ УПРУГОГО РЕЖИМА

Поскольку дифференциальное уравнение упругого режима (6.14) является линейным, то для его решения используем метод суперпозиции, позволяющий исследовать интерференцию скважин и в условиях упругого режима.

Суть метода суперпозиции (метода наложения) состоит в том, что при совместной работе в пласте нескольких добывающих и нагнетательных скважин изменение пластового давления, вызванное работой каждой из скважин, подсчитывается так, как если бы данная скважина работала одна; затем изменения давления, вызванные работой каждой скважины, алгебраически суммируются по всем скважинам. При этом скорости фильтрации в любой данной точке пласта, вызванные работой каждой скважины, суммируются геометрически.

Наличие прямолинейных границ пласта учитывается методом отображения источников и стоков, как и в случае установившейся фильтрации несжимаемой жидкости (см. гл. 4).

С помощью метода суперпозиции можно исследовать перераспределение пластового давления, вызванное пуском, остановкой или изменением темпов отбора жидкости из скважины.

Для расчета изменения пластового давления используется основная формула упругого режима фильтрации (6.50). Как было

показано, этой формулой, выведенной для точечного стока в бесконечном пласте, можно с высокой степенью точности пользоваться и в расчетах притока упругой жидкости к скважине конечного радиуса в открытом или закрытом конечном пласте. Поэтому результаты расчетов, основанные на методе суперпозиции и использовании формулы (6.50) для бесконечного пласта, оказываются справедливыми с соответствующей степенью точности и в условиях конечного пласта.

Рассмотрим несколько примеров использования метода суперпозиции при интерференции скважин в условиях упругого режима фильтрации.

Пример 1. Пусть в бесконечном пласте одновременно работают n скважин с постоянными дебитами. Начальное пластовое давление в невозмущенном пласте всюду одинаково и равно p_k . Требуется найти снижение давления $\Delta p = p_k - p(r, t)$ в любой точке пласта M в любой момент времени t .

На основе метода суперпозиции снижение пластового давления в точке M будет равно алгебраической сумме снижений давления в этой точке, вызванных независимой работой каждой скважины, т. е.

$$\Delta p = p_k - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_n = \sum_{i=1}^n \Delta p_i.$$

Снижение давления в точке M при работе одной i -й скважины по формуле (6.50) будет

$$\Delta p_i = \frac{Q_i \mu}{4\pi k h} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4\chi t_i} \right) \right].$$

Следовательно, при работе всех n скважин снижение давления в точке M определяется из равенства

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mu}{4\pi k h} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4\chi t_i} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{4\pi k h} \sum_{i=1}^n Q_i \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_i^2}{4\chi t_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.55)$$

где Q_i — дебит i -й скважины (при этом дебит добывающей скважины считается положительным, дебит нагнетательной — отрицательным); r_i — расстояние от центра i -й скважины до точки M , где определяется понижение пластового давления; t_i — время с начала работы i -й скважины до момента времени t , в который определяется понижение давления.

Пример 2. Пусть в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), в невозмущенном пласте с давлением p_k пущена в эксплуатацию скважина с постоянным дебитом Q и через промежуток времени t_1 остановлена. Под остановкой ее подразумевается мгновенное прекращение притока жидкости к забою скважины. Требуется определить давление в любой точке пласта в любой момент времени как при работе скважины, так и после ее остановки.

До момента времени t_1 скважина работала одна, следовательно, пластовое давление в любой точке пласта определяется по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q \mu}{4\pi k h} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right) \right], \quad (6.56)$$

где t изменяется в интервале от 0 до t_1 .

Начиная с момента времени t_1 (скважина уже остановлена), следуя методу суперпозиции, мысленно допустим, что вместе с продолжающей работать добывающей скважиной в той же точке начала работать нагнетательная скважина с таким же расходом Q . Следовательно, с момента t_1 в пласт в одной и той же точке закачивается столько же жидкости, сколько из него и отбирается, значит, суммарный фактический отбор жидкости из пласта оказывается равным нулю, что свидетельствует об остановке добывающей скважины по условию задачи.

К моменту времени t после остановки скважины ($t > t_1$) понижение давления в любой точке пласта определяется по методу суперпозиции:

$$\Delta p \equiv p_k - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \right] - \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa (t - t_1)} \right) \right] = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left\{ \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \right] - \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa (t - t_1)} \right) \right] \right\}.$$

Примерный график понижения забойного давления при работе и остановке добывающей скважины показан на рис. 6.5.

Следует отметить, что подъем давления на забое возмущающей скважины начинается сразу же после ее остановки, с момента t_1 . В любой другой точке пласта после момента времени t_1 будет еще некоторое время продолжаться снижение пластового давления, причем чем дальше находится эта точка пласта от возмущающей скважины, тем дольше в ней будет продолжаться процесс понижения давления после остановки скважины. Затем и в этой точке пласта начнется повышение давления.

Пример 3. Пусть сохраняются условия примера 2, но только в момент времени $t = t_1$ добывающая скважина не останавливается, а ее дебит изменяется от Q до Q_1 .

Требуется исследовать процесс перераспределения пластового давления после пуска скважины и изменения режима ее работы.

После пуска скважины с постоянным дебитом Q и до момента t_1 изменение пластового давления определяется по формуле (6.56). После изменения дебита скважины, т. е. после момента t_1 , будем мысленно считать, что дебит этой скважины Q сохраняется, а на месте этой же скважины включена нагнетательная скважина с расходом $Q - Q_1$. Тогда результирующий дебит этих двух скважин после момента времени t_1 будет равен $Q - (Q - Q_1) = Q_1$, т. е. соответствует условию задачи.

Изменение давления после времени t_1 будет складываться из понижения давления Δp_1 , вызываемого продолжающей работать с тем же дебитом Q добывающей скважиной, и из повышения давления Δp_2 , вызываемого работой воображаемой нагнетательной скважины, т. е.

$$\Delta p \equiv p_k - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \right] + \frac{-(Q - Q_1)\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa (t - t_1)} \right) \right]. \quad (6.57)$$

При этом негласно предполагалось, что дебит возмущающей скважины в момент t_1 снизился с Q до Q_1 . Если бы изменение дебита было связано с увеличением его, то воображаемую скважину следовало бы считать добывающей, а ее дебит $(Q - Q_1)$ — положительным.

Если бы в другой момент времени $t_2 > t_1$ дебит скважины был бы вторично снижен и установлен равным Q_2 , то, основываясь на методе суперпозиции, следовало бы принять, что с момента t_2 продолжают работать реальная скважина с дебитом Q , воображаемая нагнетательная скважина с дебитом $-(Q - Q_1)$ и, кроме того, начала работать в том же месте вторая воображаемая нагнетательная скважина с дебитом $-(Q_1 - Q_2)$.

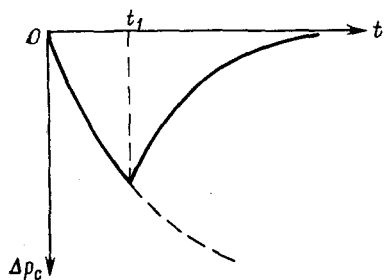


Рис. 6.5. График понижения забойного давления при остановке добывающей скважины

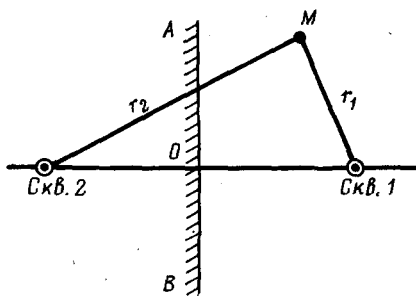


Рис. 6.6. Схема полубесконечного пласта с прямолинейной непроницаемой границей

Результирующее понижение давления Δp в момент $t > t_2$ в любой точке пласта определяется из равенства

$$\Delta p \equiv p_K - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3,$$

где

$$\Delta p_3 = \frac{-(Q_1 - Q_2) \mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa(t - t_2)} \right) \right],$$

а $\Delta p_1, \Delta p_2$ определяют по формуле (6.57).

Аналогично подсчитывается понижение давления в любой точке пласта при многократном изменении дебита добывающей скважины.

Пример 4. Допустим, что однородный пласт имеет бесконечную прямолинейную непроницаемую границу AOB (рис. 6.6). В этом полубесконечном закрытом пласте в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом Q одна скважина, например скв. 1. Требуется изучить процесс перераспределения давления в таком пласте после пуска скважины.

Используя метод отображения источников и стоков (см. гл. 4), зеркально отобразим скв. 1 относительно непроницаемой границы AOB и дебиту отображенной скважины (скв. 2) припишем тот же знак, что и у реальной скв. 1, т. е. будем считать скв. 2 добывающей с дебитом Q . Условия работы скв. 1 в полубесконечном пласте будут точно такими же, как при работе двух скважин (скв. 1, 2) в бесконечном пласте.

Используя метод суперпозиции, понижение пластового давления в точке M найдем как сумму понижений давления, вызванных работой указанных скважин в воображаемом бесконечном пласте, т. е.

$$\Delta p \equiv p_K - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_1^2}{4\kappa t} \right) \right] + \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_2^2}{4\kappa t} \right) \right],$$

где r_1 и r_2 — расстояния до точки M от скв. 1 и скв. 2 соответственно.

При наличии в полубесконечном пласте нескольких скважин каждую из них следует зеркально отобразить относительно прямолинейной непроницаемой границы.

Применение метода отображения источников и стоков совместно с методом суперпозиции позволяет выяснить влияние прямолиней-

ного контура питания на процесс перераспределения пластового давления. В этом случае все реальные скважины отображаются симметрично относительно этого контура и дебитам отображенных скважин приписываются противоположные знаки по отношению к дебитам реальных скважин (т. е. добывающие скважины считаются нагнетательными и, наоборот, отображенные нагнетательные скважины — добывающими). Методом суперпозиции реальных и отображенных скважин исследуется процесс изменения пластового давления в любой точке.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЛЕКТОРСКИХ СВОЙСТВ ПЛАСТА ПО ДАННЫМ ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

Проектирование и контроль за разработкой нефтяных и газовых месторождений, создание и эксплуатация подземных хранилищ газа связаны с определением коллекторских свойств пластов и изучением их фильтрационных характеристик (однородность пласта по толщине и площади, наличие литологических и тектонических экранов и их расположение и т. д.).

В литературе имеется большое количество работ, посвященных этой важной проблеме. Методы определения параметров пласта весьма разнообразны и зависят от тех конкретных задач, которые ставят перед собой исследователи.

Гидродинамические методы исследования пластов и скважин, связанные с замерами пластовых и забойных давлений в возмущающих и реагирующих скважинах, называют пьезометрическими. Различают две группы пьезометрических методов — при установившихся и неуставившихся режимах.

Методы исследования пластов и скважин, основанные на изучении неуставившихся процессов изменения забойного давления в возмущающих и реагирующих скважинах, тесно связаны с теорией упругого режима. После пуска или остановки скважины на ее забое и в окружающих реагирующих скважинах возникают (в условиях упругого режима) длительные процессы перераспределения давления. При помощи самопишущих скважинных манометров можно записать повышение или понижение давления и построить график изменения забойного давления с течением времени — кривую восстановления давления (КВД).

Чаще всего при гидродинамическом исследовании скважины наблюдают (измеряют) восстановление забойного давления после остановки скважины, ранее продолжительное время работавшей с постоянным дебитом Q .

Очевидно, что коллекторские свойства пласта влияют на форму графиков восстановления забойного давления, поэтому по форме КВД стали определять коллекторские свойства пласта — его проницаемость и пьезопроводность. Однако форма графиков восстановления давления достаточно сложна в реальных условиях.

Для упрощения обработки КВД прибегают к преобразованию графиков восстановления давления, изменяя их криволинейную

форму в прямолинейную. Наиболее распространенный метод определения коллекторских свойств пласта по данным о восстановлении забойного давления в остановленных скважинах — метод построения преобразованного графика восстановления забойного давления в полулогарифмических координатах (Δp , $\lg t$), имеющего форму прямой. Прямолинейную зависимость Δp от $\lg t$ установить несложно. На основании основной формулы теории упругого режима (6.50) можно получить следующую функциональную зависимость между изменением забойного давления Δp_c и временем t с момента пуска скважины в эксплуатацию с постоянным дебитом Q :

$$\begin{aligned}\Delta p_c &\equiv p_k - p_c = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_c^2}{4\kappa t} \right) \right] \approx \frac{Q\mu}{4\pi kh} \times \\ &\times \left(\ln \frac{4\kappa t}{r_c^2} - 0,5772 \right) = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{4\kappa t}{r_c^2} - \ln 1,781 \right) = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \times \\ &\times \left(2,3 \lg \frac{4\kappa t}{1,781 r_c^2} \right) = 0,1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg \frac{2,246\kappa t}{r_c^2}.\end{aligned}$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta p_c = 0,1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg \frac{2,246\kappa}{r_c^2} + 0,1832 \frac{Q\mu}{kh} \lg t, \quad (6.58)$$

или

$$\Delta p_c = A + i \lg t, \quad (6.59)$$

где

$$A = i \lg \frac{2,246\kappa}{r_c^2}, \quad i = 0,1832 \frac{Q\mu}{kh}. \quad (6.60)$$

Действительно, из формул (6.58) и (6.59) видно, что изменение (снижение) забойного давления в пущенной с постоянным дебитом Q скважине оказывается линейной функцией логарифма времени. Следовательно, эти формулы можно рассматривать как уравнение графика изменения забойного давления после пуска скважины в эксплуатацию.

Рассмотрим теперь кривую восстановления забойного давления, т. е. рост забойного давления после мгновенной остановки скважины. Будем считать, что до остановки скважина длительное время работала с постоянным дебитом Q и вокруг нее в пласте имело место установившееся распределение пластового давления в соответствии с формулой (4.31), т. е. пьезометрическая линия является кривой логарифмического типа.

Изменение забойного давления после мгновенной остановки скважины можно определить, используя метод суперпозиции:

$$\Delta p_c \equiv p_k - p_c = \Delta p_{c, \text{уст}} - \Delta p_{c, \text{неуст}}, \quad (6.61)$$

где $\Delta p_{c, \text{уст}}$ — депрессия на пласт при установившейся работе до-

бывающей скважины с дебитом Q :

$$\Delta p_{c. \text{ уст}} \equiv p_k - p_{c. \text{ уст}} = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r_c}; \quad (6.62)$$

$\Delta p_{c. \text{ неуст}}$ — изменение давления на забое воображаемой нагнетательной скважины, пущенной в момент $t = 0$ с расходом Q :

$$\Delta p_{c. \text{ неуст}} \equiv p_c - p_{c. \text{ уст}} = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r_c^2}{4\chi t} \right) \right]. \quad (6.63)$$

Так как $\Delta p_{c. \text{ уст}}$ величина постоянная (от времени не зависит), то изменение забойного давления Δp_c будет определяться по формуле (6.63), которая совпадает с формулами (6.58) и (6.59).

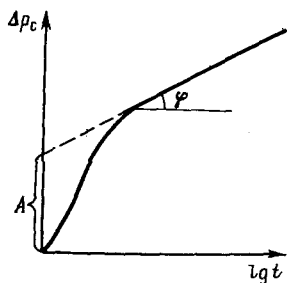


Рис. 6.7. Преобразованный график восстановления забойного давления

Обработка кривых восстановления забойного давления и определение по ним коллекторских свойств пласта проводятся следующим образом. Снятую скважинным манометром кривую восстановления забойного давления после остановки скважины перестраивают в координатах $(\Delta p_c, \lg t)$ (рис. 6.7). По прямому участку этой кривой находится отрезок, отсекаемый ее продолжением на оси Δp_c (отрезок A), и тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс ($i = \text{tg } \varphi$). Затем с помощью второго равенства (6.60) определяется параметр kh/μ , называемый гидропроводностью пласта:

$$kh/\mu = 0,1832Q/\text{tg } \varphi.$$

Если известны вязкость жидкости в пластовых условиях μ и толщина пласта h , то из последней формулы находится коэффициент проницаемости пласта

$$k = 0,1832Q\mu/(h \text{ tg } \varphi).$$

Далее по известному угловому коэффициенту $i = \text{tg } \varphi$ и радиусу r_c скважины из первого равенства (6.60) можно определить коэффициент пьезопроводности пласта

$$\chi = 10^{\frac{A}{\text{tg } \varphi}} r_c^2 / 2,246.$$

Отметим, что область применения указанных простых приемов интерпретации результатов исследования нефтяных скважин ограничивается условиями, при которых справедлива формула (6.50), а именно: скважина рассматривается как источник постоянной интенсивности в бесконечном однородном пласте, и возможна мгновенная остановка притока флюида в скважину.

В случае ограниченного пласта, когда изменение давления, вызванное закрытием скважины, доходит до его границы, КВД в сква-

жине начнет искажаться, а через достаточно большое время выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую стационарному распределению давления. Поэтому длина прямолинейного участка на кривой (см. рис. 6.7) ограничена.

Кроме того, в реальных условиях скважину нельзя остановить мгновенно. После ее закрытия на устье приток флюида из пласта продолжается еще некоторое время из-за упругости жидкостей и газов, заполняющих скважину. Время выхода на асимптоту, должно, очевидно, превышать время дополнительного притока. Поэтому возможны условия, при которых прямолинейный участок на КВД появляется через значительный промежуток времени, либо даже вовсе не существует.

Поскольку длительная остановка скважины нежелательна, были развиты методы определения параметров пласта на неустановившихся режимах, лишенные указанных недостатков и учитывающие, в частности, время работы скважины до ее остановки (метод Хорнера), а также приток флюида в скважину после ее остановки.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Решения различных краевых задач неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде в условиях как бесконечного, так и конечного пластов можно получить при помощи хорошо известных методов интегрирования линейного дифференциального уравнения в частных производных — уравнения теплопроводности (6.14). Однако во многих случаях эти решения представляются громоздкими формулами в виде бесконечного медленно сходящегося ряда или несобственного интеграла, содержащего специальные функции. В связи с этим были предприняты поиски приближенных эффективных решений задач неустановившейся фильтрации.

Рассмотрим здесь некоторые из разработанных приближенных методов, широко применяемых при решении задач теории упругого режима.

Метод последовательной смены стационарных состояний

Одним из наиболее простых по идее приближенных методов решения задач неустановившейся фильтрации является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС), развитый И. А. Чарным и широко применяющийся в практических расчетах. Метод основан на предположении, что давление в пласте изменяется во времени значительно медленнее, чем по координатам. Поэтому производную по времени можно в первом приближении отбросить, в результате чего для давления получается уравнение Лапласа, описывающее стационарный процесс.

В каждый момент времени вся область движения жидкости, в действительности охватывающая весь пласт, условно разделяется

на две области: возмущенную и невозмущенную. При этом предполагается, что в возмущенной области, начинающейся от стенки скважины, давление распределяется так, как будто бы движение жидкости в ней установившееся; внешняя граница этой области служит в данный момент контуром питания. В невозмущенной области пласта давление всюду постоянно и равно начальному статическому. Закон движения подвижной границы раздела возмущенной и невозмущенной областей определяется при помощи уравнения материального баланса и граничных условий.

Разделение фильтрационного потока на возмущенную и невозмущенную области вызывает необходимость рассматривать процесс перераспределения пластового давления протекающим в две фазы. В течение первой фазы радиус возмущенной области непрерывно растет. И в тот момент, когда она достигнет естественной границы пласта, начинается вторая фаза.

При теоретическом исследовании процесса в условиях бесконечного пласта приходится, естественно, иметь дело только с первой фазой, продолжительность которой не ограничивается.

Рассмотрим теперь расчет неустановившихся одномерных потоков упругой жидкости с помощью метода ПССС.

Прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости

С л у ч а й I. В момент времени $t = 0$ в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию прямолинейная галерея с постоянным дебитом Q . До пуска галереи дав-

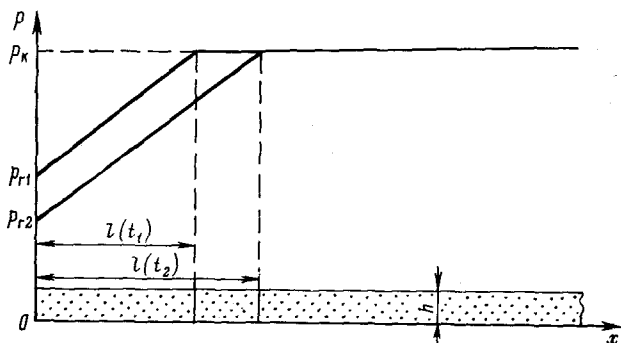


Рис. 6.8. Кривые распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу ПССС

ление во всем пласте было одинаковым и равным p_k . К моменту времени t после пуска галереи граница возмущенной области распространится на длину $l(t)$ (рис. 6.8). Распределение давления в этой области считается установившимся (см. § 2, гл. 4)

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q\mu}{kBh} [l(t) - x], \quad 0 \leq x \leq l(t). \quad (6.64)$$

Требуется найти закон перемещения во времени внешней границы возмущенной области $l(t)$.

Воспользуемся соотношением (6.7), которое состоит в том, что количество продукции Q , добытой за время dt , равно изменению упругого запаса жидкости в возмущенной зоне пласта за тот же промежуток времени:

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt} [V(t) \Delta \bar{p}], \quad (6.65)$$

где объем возмущенной зоны пласта

$$V(t) = Bh l(t); \quad (6.66)$$

$$\Delta \bar{p} = p_k - \tilde{p} = p_k - \frac{p_k + p_r}{2} = \frac{p_k - p_r}{2}. \quad (6.67)$$

Принимая во внимание, что $p(x, t) = p_r(t)$ при $x = 0$, из (6.64) найдем

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l} Bh. \quad (6.68)$$

Подставив равенства (6.66) — (6.68) в соотношение (6.65), получим

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt} \left(Bh l \frac{Q \mu l}{2k Bh} \right),$$

или

$$2\kappa dt = dl^2, \quad \kappa = k/(\mu\beta^*),$$

откуда

$$l(t) = \sqrt{2\kappa t}. \quad (6.69)$$

Тогда распределение давления в пласте (6.64) будет иметь следующий вид:

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q\mu}{k Bh} (\sqrt{2\kappa t} - x), \quad 0 < x \leq \sqrt{2\kappa t},$$

$$p(x, t) = p_k, \quad x > \sqrt{2\kappa t}. \quad (6.70)$$

Значения депрессии $p_k - p_r$ по приближенной формуле (6.70) значительно отличаются от данных расчета по точной формуле (6.37): погрешность составляет 25 %.

С л у ч а й II. В таком же пласте, как и в случае I, в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию галерея с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$. Требуется найти распределение давления, закон перемещения границы возмущенной области $l(t)$ и изменение дебита галереи во времени $Q(t)$.

Дебит галереи в условиях установившегося движения, очевидно, можно выразить так:

$$Q(t) = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh = \frac{k}{\mu} Bh \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Задача решается аналогично предыдущему случаю. В результате находим:

- 1) закон движения границы возмущенной области

$$l(t) = 2\sqrt{\kappa t};$$

- 2) распределение давления в возмущенной зоне пласта

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), \quad 0 < x \leq 2\sqrt{\kappa t};$$

$$p(x, t) = p_k, \quad x > 2\sqrt{\kappa t};$$

- 3) дебит галереи

$$Q(t) = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{2\sqrt{\kappa t}} Bh. \quad (6.71)$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (6.71) по сравнению с расчетами по точной формуле (6.28) не превосходит 11 %.

Следовательно, методом последовательной смены стационарных состояний лучше пользоваться в случае неустановившихся прямолинейно-параллельных потоков при заданной постоянной депрессии.

Плоскорадиальный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости

С л у ч а й 1. Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h в момент времени $t = 0$ пущена добывающая скважина радиуса r_c с постоянным дебитом Q . До пуска скважины давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k .

В соответствии с методом ПССС принимаем, что через время t после пуска скважины вокруг нее образуется возмущенная область радиусом $R(t)$, где давление будет распределяться по стационарному закону

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r}. \quad (6.72)$$

В остальной части пласта сохраняется начальное пластовое давление p_k .

Требуется найти закон движения границы возмущенной области $R(t)$.

Схема распределения давления в таком потоке показана на рис. 6.9. Дебит скважины, очевидно, будет описываться формулой, аналогичной формуле Дюпюи:

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_k - p_c(t)}{\ln \frac{R(t)}{r_c}}. \quad (6.73)$$

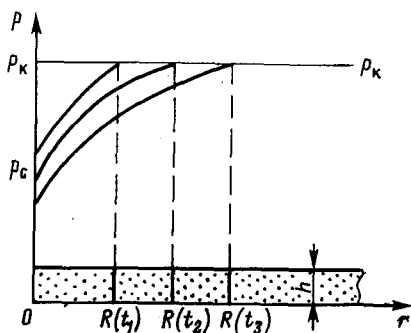
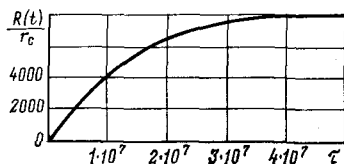


Рис. 6.9. График распределения давления в возмущенной области пласта

Рис. 6.10. Зависимость радиуса возмущенной области $R(t)/r_c$ от безразмерного времени τ в случае эксплуатации скважины с постоянным забойным давлением $p_c = \text{const}$



Размеры возмущенной области найдем из уравнения материального баланса (6.65) при

$$V(t) = \pi (R^2(t) - r_c^2) h, \quad \Delta \bar{p} = p_k - \bar{p}. \quad (6.74)$$

Средневзвешенное пластовое давление в установившемся плоскорадиальном потоке (см. § 2, гл. 4)

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R(t)}{r_c}},$$

откуда, учитывая (6.73), находим

$$\Delta \bar{p} = p_k - \bar{p} = \frac{p_k - p_c}{2 \ln \frac{R(t)}{r_c}} = \frac{Q\mu}{4\pi kh}. \quad (6.75)$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ найдем, подставив выражения (6.74) и (6.75) в уравнение материального баланса (6.65):

$$4\kappa dt = d(R^2(t) - r_c^2), \quad \kappa = k/(\mu\beta^*),$$

откуда после интегрирования в пределах от 0 до t и от r_c до $R(t)$ находим

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}. \quad (6.76)$$

Тогда из равенства (6.72) определится давление в любой точке пласта в момент времени t :

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}}{r}, \quad r_c < r \leq \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t},$$

$$p(r, t) = p_k, \quad r > \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}. \quad (6.77)$$

Депрессия в момент времени t

$$\Delta p_c \equiv p_k - p_c(t) = \frac{Q_{\mu}}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}}{r_c}. \quad (6.78)$$

Сравнивая (6.78) с депрессией, определенной по точной формуле (6.51), можно убедиться, что относительная погрешность уменьшается с течением времени и составляет 10,6 %, если $fo = \kappa t/r_c^2 = 100$; 7,5 %, если $fo = 10^3$; 5,7 %, если $fo = 10^4$.

С л у ч а й II. В случае плоскорадиального потока жидкости к скважине, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_c = \text{const}$, закон движения границы возмущенной области выражается интегралом, представляемым в виде медленно сходящегося ряда, поэтому решение здесь не приводится.

Расчет движения границы возмущенной области в этом случае можно провести по графику (рис. 6.10). Безразмерное время τ на рис. 6.10 выражается следующим соотношением:

$$\tau = \frac{2k}{\mu \beta^* r_c^2} t.$$

Дебит скважины определяется по формуле Дюпюи (6.73) при $p_c = \text{const}$. Погрешность определения дебита по методу ПССС составляет около 5 %.

Заметим, что в случае как линейной, так и радиальной фильтрации в точке перехода от возмущенной к невозмущенной области градиент давления претерпевает разрыв, что служит одной из причин расхождения между результатами расчетов по методу ПССС и точным решением. Однако этот метод является достаточно эффективным расчетным приемом, позволяющим найти решение в простом виде, чем и объясняется его применение в некоторых случаях не только к задачам фильтрации однофазного флюида, но и к задачам о движении газированной жидкости и о перемещении границы раздела жидкостей и газов.

Распределение давления в области фильтрации, получаемое по методу ПССС, является грубым приближением; гораздо точнее этим методом определяется связь между дебитом и депрессией, особенно в случае радиальной фильтрации.

Метод А. М. Пирвердяна

Этот метод аналогичен методу ПССС и уточняет его. В методе А. М. Пирвердяна, как и в методе ПССС неустановившийся фильтрационный поток в каждый момент времени мысленно разбивается на две области — возмущенную и невозмущенную. Граница между этими областями также определяется из уравнения материального баланса.

Но в отличие от метода ПССС распределение давления в возмущенной области по методу А. М. Пирвердяна задается в виде квадратичной параболы так, чтобы пьезометрическая кривая на гра-

нице областей касалась горизонтальной линии, представляющей давление в невозмущенной области. Распределение давления уже не будет стационарным, а градиент давления на границе областей становится равным нулю, что обеспечивает плавное смыкание профиля давлений в возмущенной и невозмущенной областях.

Рассмотрим прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости.

С л у ч а й I. В горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию галерея с постоянным дебитом Q . К моменту времени t после пуска граница возмущенной области продвинется на длину $l(t)$, при этом кривая распределения давления в этой области будет иметь вид параболы. На рис. 6.11 показано распределение давления в пласте ко времени t после пуска галереи.

Уравнение пьезометрической кривой в возмущенной области задается в виде параболы:

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{l(t)} \right)^2, \quad 0 < x \leq l(t). \quad (6.79)$$

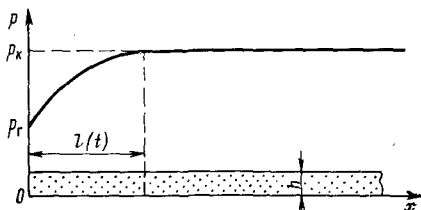


Рис. 6.11. Кривая распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу А. М. Пирвердяна

Дебит галереи определяется по закону Дарси

$$Q = \frac{k}{\mu} B h \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (6.80)$$

Значение градиента давления на галерее $\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}$ найдем по формуле (6.79):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2(p_k - p_r)}{l(t)}. \quad (6.81)$$

Подставив равенство (6.81) в (6.80), находим формулу для дебита галереи

$$Q = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} B h. \quad (6.82)$$

Закон движения внешней границы возмущенной области определяется из уравнения материального баланса (6.65) с учетом (6.66) и (6.67).

Определим значение средневзвешенного пластового давления в возмущенной области к моменту времени t , используя распреде-

ление (6.79):

$$\bar{p} = \frac{1}{V(t)} \int_0^{l(t)} p(x, t) dx = \frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} \left[p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{l(x)} \right)^2 \right] dx = p_k - \frac{p_k - p_r}{3}.$$

Тогда с учетом (6.82) находим

$$\Delta \bar{p} \equiv p_k - \bar{p} = \frac{p_k - p_r}{3} = \frac{Q \mu l(t)}{6k Bh}. \quad (6.83)$$

Подставляя (6.66) и (6.83) в уравнение материального баланса (6.65), получаем

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt} \left[Bh l^2(t) \frac{Q \mu}{6k Bh} \right],$$

откуда

$$6\kappa dt = dl^2(t), \quad \kappa = k/(\mu \beta^*),$$

и после интегрирования в пределах от 0 до t и от 0 до $l^2(t)$ находим

$$l(t) = \sqrt{6\kappa t}. \quad (6.84)$$

Распределение давления (6.79) в возмущенной области пласта теперь принимает вид

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q \mu}{2k Bh} \sqrt{6\kappa t} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{6\kappa t}} \right)^2, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{6\kappa t},$$

$$p(x, t) = p_r, \quad x > \sqrt{6\kappa t}. \quad (6.85)$$

Расчет депрессии $p_k - p_r$ по формуле (6.85) дает погрешность по сравнению с точным решением примерно 9 %, т. е. в 2,5 раза меньше, чем метод ПССС.

С л у ч а й II. В прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости к галерее, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$, используя ту же методику, что и для случая I, закон движения границы возмущенной области найдем в виде

$$l(t) = \sqrt{12\kappa t}.$$

Распределение давления в возмущенной области пласта в этом случае будет описываться следующим соотношением:

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\kappa t}} \right)^2,$$

а дебит галерей определяется по формуле

$$Q = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sqrt{12\kappa t}} Bh. \quad (6.86)$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (6.86) по сравнению с точным решением составляет около 2,5 %, т. е. в этом случае расчет по методу А. М. Пирвердяна более чем в 2 раза точнее, чем по методу ПССС.

Метод интегральных соотношений

Метод интегральных соотношений, предложенный Г. И. Баренблаттом, по аналогии с методом пограничного слоя в потоке вязкой жидкости позволяет получить приближенные решения некоторых задач нестационарной фильтрации упругой жидкости с нужной точностью.

Метод основан на следующих предпосылках: а) в каждый момент времени пласт делится на конечную возмущенную область и невозмущенную область, где движение отсутствует; б) в возмущенной области распределение давления представляется в виде многочлена по степеням координаты x или r (в случае радиального потока добавляется еще логарифмический член) с коэффициентами, зависящими от времени, так что для прямолинейно-параллельного потока

$$p(x, t) = a_0(t) + a_1(t) \frac{x}{l(t)} + \dots + a_n(t) \frac{x^n}{l^n(t)}, \quad 0 \leq x \leq l(t); \quad (6.87)$$

для плоскорадиальной фильтрации

$$p(r, t) = a_0(t) \ln \frac{r}{R(t)} + a_1(t) + a_2(t) \frac{r}{R(t)} + \dots + a_{n+1}(t) \frac{r^n}{R^n(t)}, \quad r_c \leq r \leq R(t), \quad (6.88)$$

где число членов n выбирается в зависимости от желаемой точности решения; в) коэффициент многочлена $a_0, a_1, a_2, \dots$, а также размер области возмущения $l(t)$ (или $R(t)$) находятся из условий на галерее (или на забое скважины), из условий непрерывности давления и гладкости кривой давления на границе области возмущения, а также из особых интегральных соотношений, которые получаются следующим образом.

В случае притока к галерее правая и левая части уравнения пьезопроводности (6.16) умножаются на x^k , где $k = 0, 1, 2, \dots$, и интегрируются по всей возмущенной области:

$$\int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial p}{\partial t} dx = \kappa \int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx. \quad (6.89)$$

Для случая притока к скважине берется дифференциальное уравнение (6.38), его правая и левая части умножаются на r^k , где

$k = 1, 2, \dots$, и проводится интегрирование по всей возмущенной области:

$$\int_{r_c}^{R(t)} r^k \frac{\partial p}{\partial t} dr = \kappa \int_{r_c}^{R(t)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) r^k dr. \quad (6.90)$$

Если в уравнения (6.89) и (6.90) подставить соответственно выражения (6.87) и (6.88) и проинтегрировать, то получатся недостающие соотношения для определения коэффициентов $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\dots$ и $l(t)$ или $R(t)$.

Первое из этих интегральных соотношений (при $k = 0$, если рассматривается приток к галерее, и при $k = 1$ для притока к скважине) представляет собой уравнение материального баланса, и из него находится координата границы возмущенной области $l(t)$ или $R(t)$.

Если принять в формуле (6.87) $n = 1$, а в формуле (6.88) $n = 0$, то получатся решения, соответствующие методу ПССС, (6.69), (6.70), (6.77) — в зависимости от условий на галерею или на забое скважины; если же $n = 2$ в (6.87), то из метода интегральных соотношений вытекает как частный случай метод А. М. Пирвердяна.

В качестве примера решим методом интегральных соотношений задачу о плоскорадиальной неустановившейся фильтрации упругой жидкости к скважине радиуса r_c , пущенной в эксплуатацию в момент $t = 0$ с постоянным дебитом Q . В начальный момент давление во всем пласте постоянно и равно p_k . Распределение давления в возмущенной области пласта $r_c \leq r \leq R(t)$ зададим в виде

$$p(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)}, \quad (6.91)$$

т. е. возьмем многочлен первой степени.

Коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 определяются из условий на забое скважины и на границе возмущенной области. Условие на забое имеет вид (6.39)

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.92)$$

На границе возмущенной области имеем

$$\begin{aligned} p &= p_k & \text{при} & \quad r = R(t), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 & \text{при} & \quad r = R(t), \end{aligned} \quad (6.93)$$

где второе условие представляет собой условие гладкости кривой.

Определенные из этих условий коэффициенты имеют вид (слагаемые, пропорциональные r_c или r_c^2 , отброшены вследствие их малости)

$$a_0 = \frac{Q\mu}{2\pi k h}; \quad a_1 = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi k h}; \quad a_2 = \frac{Q\mu}{2\pi k h}. \quad (6.94)$$

Подставляя выражения (6.94) в правую часть формулы (6.91), будем иметь

$$p(r, t) = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi k h} \left[\ln \frac{r}{R(t)} + 1 - \frac{r}{R(t)} \right]. \quad (6.95)$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ находится из уравнения материального баланса (6.65) с учетом (6.74) (это уравнение можно получить из интегрального соотношения (6.90) при $k = 1$).

Значение средневзвешенного пластового давления p в возмущенной области определяется при использовании распределения (6.91):

$$\bar{p} = \frac{1}{V(t)} \int_{V(t)} p(r, t) dV = \frac{1}{\pi (R^2(t) - r_c^2) h} \int_{r_c}^{R(t)} \left[p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{R(t)}{r} + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left(1 - \frac{r}{R(t)} \right) \right] 2\pi h r dr.$$

Проведя интегрирование и пренебрегая в полученном выражении членами, содержащими r_c^2 (вследствие их малости), получаем

$$\bar{p} = p_k - \frac{Q\mu}{12\pi kh},$$

а тогда согласно (6.74)

$$\Delta \bar{p} = p_k - \bar{p} = \frac{Q\mu}{12\pi kh}. \quad (6.96)$$

Подставляя выражения (6.74) для $V(t)$ и (6.96) в уравнение материального баланса (6.65), после несложных преобразований находим

$$12\kappa dt = d(R^2(t) - r_c^2), \quad \kappa = k/(\mu\beta^*),$$

откуда после интегрирования имеем

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}.$$

Следовательно, распределение давления (6.91) в возмущенной области будет иметь вид

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left[\ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}}{r} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{r}{\sqrt{r_c^2 - 12\kappa t}} \right], \quad r_c < r \leq \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}, \\ p(r, t) = p_k, \quad r > \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}. \quad (6.97)$$

Относительная погрешность δ при расчетах депрессии $p_k - p_c(t)$ по формуле (6.97) для различных значений параметра Фурье $fo = \kappa/r_c^2$ составляет: $\delta = -4,9\%$ при $fo = 100$; $\delta = -4\%$ при $fo = 10^3$; $\delta = -3,2\%$ при $fo = 10^4$. Таким образом, приближенное значение депрессии Δp_c по методу интегральных соотношений занижено по сравнению с точным.

Метод «усреднения» Ю. Д. Соколова—Г. П. Гусейнова

Метод заключается в том, что в дифференциальном уравнении упругого режима (6.38) производная от давления по времени $\partial p/\partial t$

усредняется по всей возмущенной области и заменяется некоторой функцией времени

$$F(t) = \frac{2}{R^2(t) - r_c^2} \int_{r_c}^{R(t)} \frac{\partial p}{\partial t} r dr, \quad (6.98)$$

значение которой определяется из начальных и граничных условий.

Тогда уравнение (6.38) принимает вид

$$F(t) = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (6.99)$$

Эта замена упрощает дифференциальное уравнение и облегчает его интегрирование.

Будем определять распределение давления при неустановившемся притоке упругой жидкости к скважине при постоянном дебите Q . При этом условия на забое и на границе возмущенной области имеют вид (6.92) и (6.93). Интегрируя уравнение (6.99) по r и учитывая условия (6.92) и (6.93), можно получить

$$p = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{F(t)}{2\kappa} \left[\frac{1}{2} (r^2 - R^2(t)) - r_c^2 \ln \frac{r}{R(t)} \right]. \quad (6.100)$$

Из второго условия (6.93) определяется функция в виде

$$F(t) = - \frac{Q\mu\kappa}{\pi kh (R^2(t) - r_c^2)}. \quad (6.101)$$

Подставляя выражение (6.101) в (6.100) и пренебрегая членами с r_c^2 , найдем

$$p = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{Q\mu}{4\pi kh} \left(1 - \frac{r^2}{R^2(t)} \right). \quad (6.102)$$

Для определения координаты возмущенной области $R(t)$ надо продифференцировать по t равенство (6.102), результат подставить в (6.98) и учесть выражение (6.101) для $F(t)$. Тогда будем иметь

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 8\kappa t}. \quad (6.103)$$

Сопоставление формулы (6.102) с учетом (6.103) с точным решением (6.51) показывает, что относительная погрешность в определении депрессии $p_k - p_c$ не превышает 5 %.

В заключение отметим приближенный результат, полученный Э. Б. Чекалюком. Для скважины, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением, он предлагает определять дебит по формуле Дюпюи (6.73), в которой радиус возмущенной области

$$R(t) = r_c + \sqrt{\pi\kappa t}.$$

Эта формула очень важна для практики, поскольку простого точного решения задачи об отборе упругой жидкости при условии

$p_c = \text{const}$ не существует. Расчетами показано, что формула Э. Б. Чекалюка очень точна, относительная погрешность при определении дебита не превышает 1 %.

§ 8. ПРИТОК УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К УКРУПНЕННОЙ СКВАЖИНЕ

Большинство нефтяных и газовых месторождений приурочено к водоносным пластам и разрабатывается в условиях водонапорного режима. В процессе разработки таких месторождений давление в нефтяной или газовой залежи снижается и подошвенная или краевая вода вторгается в залежь. При этом площадь нефтеносной (или газоносной) залежи уменьшается. При проектировании разработки месторождений такого типа важным показателем является количество воды, внедрившейся в залежь, а также давление в залежи в каждый момент времени (обычно считают, что давление в каждый момент одинаково, т. е. расчет ведется по средневзвешенному давлению). Такая задача, учитывающая продвижение водонефтяного (или газоводяного) контакта, очень сложна. Однако в начале разработки месторождения, когда информация о пласте и его особенностях мала, можно провести оценочные расчеты, не учитывая обводнения залежи. Нефтяную или газовую залежь моделируют в виде круговой и рассматривают как укрупненную скважину с постоянным радиусом R_3 . Водоносный пласт, окружающий скважину, рассматривается либо простирающимся до бесконечности, либо имеющим конечный размер R_k .

Поставим задачу следующим образом. Газовая или нефтяная залежь площадью S рассматривается как укрупненная скважина радиусом $R_3 = \sqrt{S/\pi}$. Законтурная вода, окружающая залежь, простирается до бесконечности. До начала отбора давление во всем водоносном пласте равно p_k ; в момент, принимаемый за начальный ($t = 0$), давление на забое снижается до значения p_c и поддерживается постоянным в течение всего периода эксплуатации. Требуется определить объем воды, поступившей в укрупненную скважину за время t . Считая, что водоносный пласт имеет постоянную толщину h , коэффициент проницаемости k , и обозначая через μ_v вязкость воды и через β^* упругоемкость водоносного пласта, можем записать дифференциальное уравнение упругого режима для плоскорадиального течения воды к укрупненной скважине

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (6.104)$$

которое должно быть решено при следующих условиях:

$$p = p_k \quad \text{при} \quad t = 0, \quad R_3 \leq r < \infty; \quad (6.105)$$

$$p = p_c \quad \text{при} \quad r = R_3, \quad t > 0; \quad (6.106)$$

$$p = p_k \quad \text{при} \quad r = \infty. \quad (6.107)$$

В результате интегрирования уравнения (6.104) с условиями (6.105) — (6.107) определяется распределение давления в водоносном пласте $p(r, t)$. Дебит воды находится по формуле

$$Q_v = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_3} 2\pi R_3 h, \quad (6.108)$$

а отобранное количество воды — из выражения

$$\int_0^t Q_v(t) dt = \frac{2\pi kh R_3}{\mu_v} \int_0^t \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_3} dt. \quad (6.109)$$

Решение этой задачи было получено американскими учеными Ван Эвердингенем и Херстом методом преобразования Лапласа. Предварительно выражение для отобранного объема воды было приведено к безразмерному виду

$$\bar{Q}(fo) = \frac{\mu_v \kappa}{2\pi kh R_3^2 (p_K - p_c)} \int_0^t Q_v(t) dt, \quad (6.110)$$

где $fo = \kappa t / R_3^2$ — параметр Фурье, т. е. безразмерное время.

Для $\bar{Q}$ получено выражение

$$\bar{Q}(fo) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 fo}) du}{u^3 [I_0^2(u) + Y_0^2(u)]}, \quad (6.111)$$

здесь $I_0(u)$ и $Y_0(u)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка. Для функции $\bar{Q}(fo)$ составлены таблицы и построен график (рис. 6.12, прил. 1).

Задача усложняется, если заданное давление на забое укрупненной скважины переменное: $p_c(t)$. В этом случае можно использовать принцип суперпозиции (см. § 6). Пусть давление p_c уменьшается с течением времени так, как показано на рис. 6.13. Обозначим рассматриваемый момент времени через t_n и весь интервал $0 \leq t \leq t_n$ разобьем на n участков с шагом, равным Δt : $t_n = \Delta t n$. Кривую заменяем ступенчатой зависимостью и считаем, что в пределах одного шага давление постоянно. По принципу суперпозиции из формулы (6.110) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^t Q_v(t) dt = \frac{2\pi kh R_3^2}{\mu_v \kappa} [\Delta p_0 \bar{Q}(fo) + \Delta p_1 \bar{Q}(fo - fo_1) + \Delta p_2 \bar{Q}(fo - fo_2) + \\ + \dots + \Delta p_{n-1} \bar{Q}(fo - fo_{n-1})], \end{aligned} \quad (6.112)$$

где

$$fo - fo_i = \frac{\kappa t}{R_3^2} - \frac{\kappa t_i}{R_3^2} = \frac{\kappa(t - t_i)}{R_3^2},$$

т. е. снижение давления на забое укрупненной скважины дает такой же эффект, как если бы в момент $t_1 = \Delta t$ в дополнение к ра-

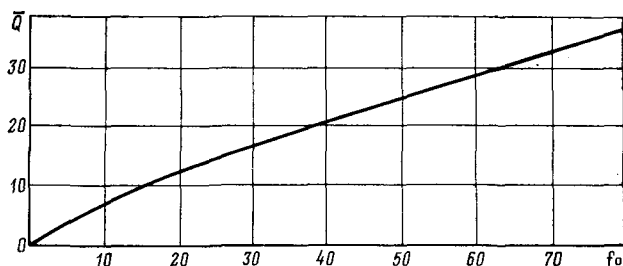
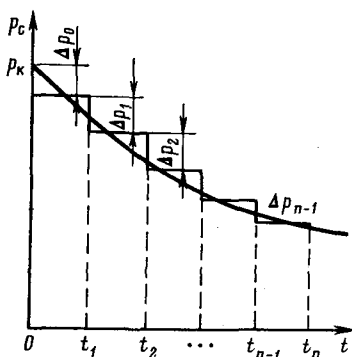


Рис. 6.12. Зависимость безразмерного объема воды $\bar{Q}$, отобранного из укрупненной скважины, от параметра Фурье fo для бесконечного пласта ($p_c = \text{const}$)

Рис. 6.13. Изменение давления на забое укрупненной скважины с течением времени



ботающей с депрессией Δp_0 скважине в этом же месте начала работать вторая скважина с депрессией Δp_1 . Она к моменту t_n проработает в течение промежутка времени $t_n - t_1$, поэтому $fo - fo_1 = \kappa (t_n - t_1) / R_3^2$ и т. д.

Формула (6.112) решает поставленную задачу, если забойное давление постоянно во времени.

Для разработки месторождений интересной представляется задача определения давления на забое укрупненной скважины $p_c(t)$, если задан дебит Q_v . Эта задача решается интегрированием уравнения (6.104) с условиями (6.105) и (6.107), а условие (6.106) должно быть заменено следующим:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_v \mu_v}{2\pi k h} \quad \text{при} \quad r = R_3. \quad (6.113)$$

Обозначим безразмерную депрессию через

$$\bar{p}(fo) = \frac{2\pi k h}{Q_v \mu_v} [p_k - p_c(fo)]. \quad (6.114)$$

Решение Ван Эвердингена и Херста имеет следующий вид:

$$\bar{p}(fo) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 fo}) du}{u^3 [I_1^2(u) + Y_1^2(u)]}, \quad (6.115)$$

где $I_1(u)$ и $Y_1(u)$ — функции Бесселя соответственно первого

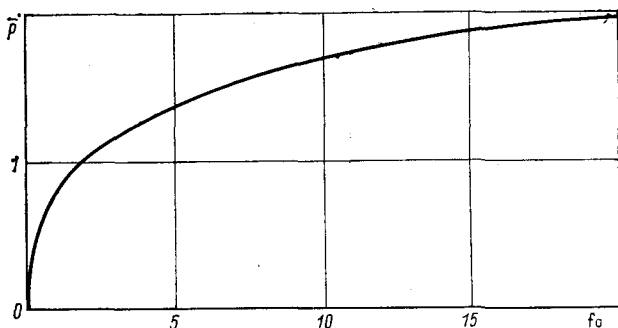


Рис. 6.14. Зависимость $\bar{p}$ от параметра Фурье fo для укрупненной скважины, работающей в бесконечном пласте при условии $Q_b = \text{const}$

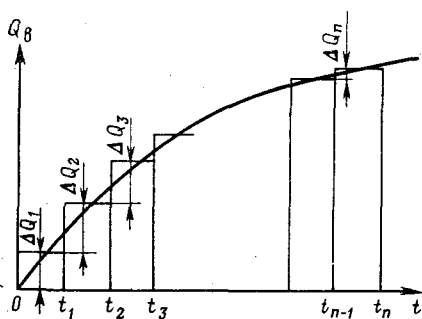
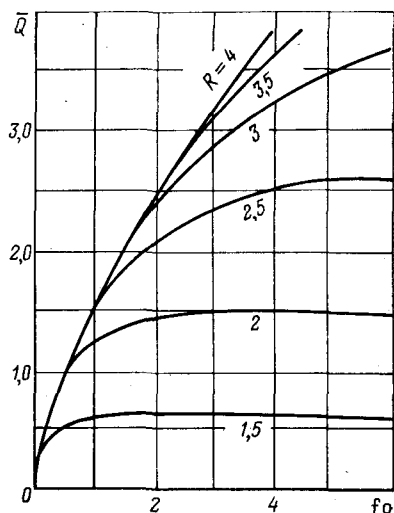


Рис. 6.15. Изменение дебита укрупненной скважины с течением времени

Рис. 6.16. Зависимость безразмерного объема воды $\bar{Q}$, отобранного из укрупненной скважины, от параметра Фурье fo для закрытого пласта конечного размера ($p_c = \text{const}$)



и второго рода первого порядка. График и таблица функции $\bar{p}(fo)$ приведены на рис. 6.14 и в прил. 1.

Если дебит Q_b переменный, то непрерывную зависимость $Q_b(t)$ заменяем ступенчатой функцией, как показано на рис. 6.15, разбивая отрезок времени $t = t_n$ на n шагов: $t_n = n\Delta t$, где $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$ и т. д. Далее, применяем принцип суперпозиции, считая, что в моменты времени t_1 , t_2 и т. д. в работу включаются новые скважины, расположенные в том же месте с дебитами ΔQ_2 , ΔQ_3 и т. д. Тогда имеем

$$p_k - p_c(R_s, t) = -\frac{\mu_b}{2\pi kh} [\Delta Q_1 \bar{p}(fo) + \Delta Q_2 \bar{p}(fo - fo_1) + \dots + \Delta Q_n \bar{p}(fo - fo_{n-1})]. \quad (6.116)$$

Если рассматривается конечный закрытый водоносный пласт радиусом R_k , то на границе выполняется условие

$$\partial p / \partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_k. \quad (6.117)$$

Решение при $p_c = \text{const}$ в безразмерной форме как функция f_0 и $R = R_k/R_s$ записывается в виде бесконечного ряда

$$\bar{Q}(f_0) = \frac{R^2 - 1}{2} - 2 \sum_{a_1, a_2}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 f_0} I_1^2(a_n R)}{a_n^2 [I_0^2(a_n) - I_1^2(a_n R)]}, \quad (6.118)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — корни уравнения.

$$\begin{aligned} I_1(a_n R) Y_0(a_n) - \\ - Y_1(a_n R) I_0(a_n) = 0. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Зависимости $\bar{Q}(f_0)$ для различных значений безразмерного радиуса пласта R приведены на рис. 6.16 и в прил. 2. Чем меньше размеры пласта, тем меньше упругий запас и тем меньшее время нужно для отбора всего объема жидкости, которую можно извлечь из пласта за счет ее упругости при заданной депрессии p_c . Так, для

$R = 1,5$, начиная с $f_0 = 0,8$, $\bar{Q} = 0,625$ и продолжает оставаться постоянным, что говорит об отсутствии отбора; для $R = 2$ отбор заканчивается при значении $f_0 = 3$ и т. д.

Если закрытый конечный пласт эксплуатируется при заданном постоянном дебите Q_b , то безразмерная депрессия представляется в виде следующего выражения:

$$\begin{aligned} \bar{p}(f_0) = \frac{2}{R^2 - 1} \left(\frac{1}{4} + f_0 \right) - \frac{(3R^4 - 4R^4 \ln R - 2R^2 - 1)}{4(R^2 - 1)^2} + \\ + 2 \sum_{\beta_1, \beta_2}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 f_0} I_1^2(\beta_n R)}{\beta_n^2 [I_1^2(\beta_n R) - I_1^2(\beta_n)]}, \end{aligned} \quad (6.120)$$

где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — корни уравнения,

$$I_1(\beta_n R) Y_1(\beta_n) - I_1(\beta_n) Y_1(\beta_n R) = 0. \quad (6.121)$$

Из рис. 6.17 и прил. 3 видно, что чем меньше размер пласта, тем резче возрастает депрессия при отборе воды с постоянным дебитом; при малых значениях времени влияние границы не сказывается

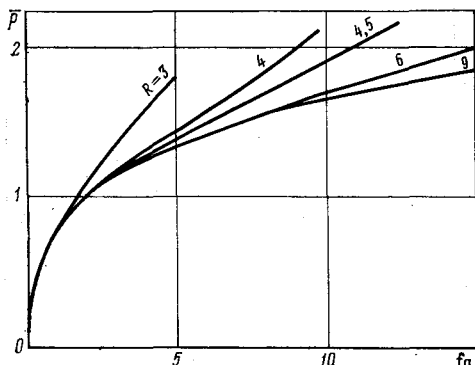


Рис. 6.17. Зависимость $\bar{p}$ от параметра Фурье f_0 для укрупненной скважины, работающей в закрытом пласте конечного размера ($Q_b = \text{const}$)

вается (например, для $R = 6$ до значения $fo = 6$ значения $\bar{p}$ такие же, как для бесконечного пласта). Поэтому таблица для каждого R начинается с того значения fo , для которого $\bar{p}$ отличается от p для бесконечного пласта.

Приведем еще графики и таблицы безразмерной депрессии $\bar{p}$ (fo) для конечного открытого пласта, на границе которого давление постоянно ($p = p_k$ при $r = R_k$), если отбор постоянный $Q_b = \text{const}$ (рис. 6.18, прил. 4).

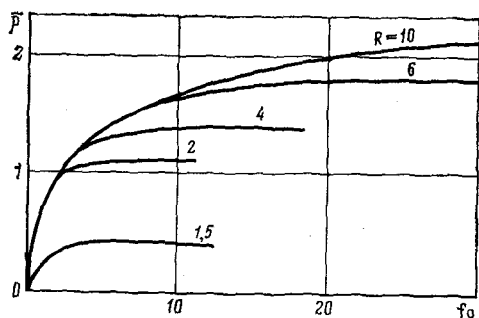


Рис. 6.18. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье fo для укупоренной скважины, расположенной в открытом пласте радиуса R_k и работающей при условии $Q_b = \text{const}$ ($R = R_k/R_s$)

Чем меньше размер пласта, тем быстрее устанавливается постоянная депрессия, т. е. тем быстрее заканчивается первая фаза упругого режима и начинается вторая — стационарная фильтрация.

Задачу о притоке упругой жидкости к укупоренной скважине в бесконечном пласте при отборе ее с дебитом $Q_b(t)$ можно решить также приближенно — методом интегральных соотношений. Постановка задачи описывается соотношениями (6.104), (6.105), (6.107), (6.111). Найдем распределение давления в пласте и давление на забое укупоренной скважины.

В соответствии с методом интегральных соотношений (см. § 7) решение ищется в виде многочлена по степеням r с добавлением логарифмического члена для плоскорадиального течения (см. (6.88)), где $R(t)$ — радиус возмущенной области, $a_0, a_1, a_2, \dots$ — функции времени. Распределение давления (6.88) справедливо для возмущенной области, т. е. для значений $R_s \leq r \leq R(t)$; для значений $R(t) \leq r < \infty$ давление равно начальному p_k . Ограничимся многочленом первой степени

$$p(r, t) = a_1 \ln \frac{r}{R(t)} + a_0 + a_2 \frac{r}{R(t)}. \quad (6.122)$$

Для определения коэффициентов a_1, a_0, a_2 используются условия на забое укупоренной скважины (6.113), а также на внешней границе возмущенной области:

$$p = p_k \quad \text{при} \quad r = R(t); \quad (6.123)$$

$$\partial p / \partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R(t). \quad (6.124)$$

Выражение (6.124) представляет собой условие гладкости кривой $p(r, t)$. Из этих условий получаем

$$a_0 = p_k + \frac{Q_b(t) \mu_b}{2\pi k h} \frac{R(t)}{R(t) - R_s}; \quad a_1 = a_2 = \frac{Q_b(t) \mu_b}{2\pi k h} \frac{R(t)}{R(t) - R_s}. \quad (6.125)$$

Подставляя выражения (6.125) в (6.122), найдем распределение давления

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_b(t) \mu_b}{2\pi kh [R(t) - R_3]} \left[R(t) \ln \frac{R(t)}{r} - R(t) + r \right]. \quad (6.126)$$

Отметим, что в формуле (6.126) и во всех последующих соотношениях нельзя пренебрегать радиусом скважины R_3 по сравнению с радиусом возмущенной области $R(t)$, как это было сделано в § 7, где рассматривался приток к обычной скважине радиусом $r_c \approx 0,1$ м, так как отношение $R(t)/R_3$ в первые годы после начала разработки залежи будет изменяться от единицы до нескольких единиц. Поэтому все соотношения настоящего параграфа значительно сложнее, чем § 7, и вопрос о притоке к укрупненной скважине рассматривается отдельно.

Радиус возмущенной области определяется из уравнения материального баланса (6.65), которое приводится к виду

$$\frac{\int_0^t Q_b(t) dt}{Q_b(t)} = \frac{R_3^2}{\kappa [R(t) - R_3]} \left[\frac{R^3(t)}{12R_3^2} + \frac{R(t)}{4} - \frac{R_3}{3} - \frac{R(t)}{2} \ln \frac{R(t)}{R_3} \right]. \quad (6.127)$$

Если $Q_b = \text{const}$, то $\int_0^t Q_b(t) dt = Q_b t$ и уравнение (6.127) примет вид

$$\frac{\kappa t}{R_3^2} = f_0 = \frac{1}{R(t) - R_3} \left[\frac{R^3(t)}{12R_3^2} + \frac{R(t)}{4} - \frac{R_3}{3} - \frac{R(t)}{2} \ln \frac{R(t)}{R_3} \right]. \quad (6.128)$$

Уравнения (6.127) и (6.128) представляют собой трансцендентные уравнения относительно $R(t)$. Решая их графически или с помощью ЭВМ для разных моментов времени и подставляя полученные значения $R(t)$ в формулу (6.126), найдем распределение давления по пласту в любой момент времени. В частности, при $r = R_3$ из формулы (6.126) получаем давление на забое укрупненной скважины

$$p(R_3, t) = p_c(t) = p_k - \frac{Q_b \mu_b}{2\pi kh [R(t) - R_3]} \left[R(t) \ln \frac{R(t)}{R_3} - R(t) + R_3 \right]. \quad (6.129)$$

При проведении расчетов по приближенным соотношениям (6.126), (6.129), (6.127) или (6.128) нужно прежде всего по заданной зависимости дебита воды от времени $Q_b(t)$ найти отбор

$\int_0^t Q_b(t) dt$ к рассматриваемому моменту времени; затем вычис-

лить отношение $\int_0^t Q_v(t) dt / Q_v(t)$; из формулы (6.127) или (6.128) найти $R(t)$ для этого же момента; подставить найденное значение $R(t)$ в формулы (6.126) и (6.127) и тем самым найти распределение давления $p(r, t)$ и давление на забое $p_c(t)$.

Читателю предоставляется возможность оценить погрешность, которую дает формула (6.129), сравнив ее значения (после приведения ее к безразмерному виду) со значениями, приведенными в прил. 1. Отметим еще, что для больших значений времени, когда $R(t) \gg R_3$, в уравнении (6.127) или (6.128) справа можно оставить только первый член и в знаменателе пренебречь значением R_3 по сравнению с $R(t)$. В этом случае получим

$$\int_0^t Q_v(t) dt / Q_v(t) = R^2(t) / 12\pi t. \quad (6.130)$$

Обозначив

$$\frac{\pi}{R_3^2} \int_0^t Q_v(t) dt / Q_v(t) = fo', \quad (6.131)$$

где fo' — известная безразмерная функция времени, найдем

$$R(t) = \sqrt{12fo'} R_3. \quad (6.132)$$

Если же $Q_v = \text{const}$, то

$$R(t) = \sqrt{12\pi t}. \quad (6.133)$$

С использованием формул (6.132) и (6.133) расчеты давления существенно упрощаются.

Глава 7

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕЙБЕНЗОНА

Теория движения газа в пористой среде была разработана Л. С. Лейбензоном. Он получил дифференциальное уравнение для определения давления в пласте при неустановившемся движении в нем идеального газа.

Б. Б. Лапук в работах, посвященных основам разработки месторождений природных газов, показал, в частности, что неустановившуюся фильтрацию можно рассматривать как изотермическую, так как изменения температуры газа, возникающие при изменении

давления, в значительной мере компенсируются теплообменом со скелетом пористой среды.

Для вывода дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации идеального газа подставим в уравнение неразрывности (3.3) выражения для компонент скорости фильтрации (3.8) и плотности идеального газа (3.19):

$$\rho = \rho_{ат} p / p_{ат}. \quad (7.1)$$

Считая коэффициенты пористости m_0 , проницаемости k и вязкости μ газа постоянными, получим

$$\frac{k}{\mu} \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] = \frac{\rho_{ат} m_0 \partial p}{p_{ат} \partial t}. \quad (7.2)$$

Выражения в скобках в левой части уравнения (7.2) можно представить следующим образом:

$$p \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial x}; \quad p \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial y}; \quad p \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial z},$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{k}{2\mu m_0} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (7.3)$$

Выражение в скобках представляет собой оператор Лапласа относительно p^2 , поэтому уравнение (7.3) можно кратко записать в виде

$$\frac{k}{2\mu m_0} \nabla^2 p^2 = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Полученное дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа (7.3) называется уравнением Лейбензона и представляет собой нелинейное уравнение параболического типа. Подчеркнем, что оно справедливо для идеального газа при выполнении закона Дарси. Изменением коэффициента пористости пренебрегают, потому что он входит в уравнение неразрывности (3.3) в виде произведения ρm , в котором плотность газа изменяется в гораздо большей степени, чем пористость.

Уравнение Лейбензона (7.3) можно записать иначе, умножив правую и левую части на давление p и заменив $p \partial p / \partial t = \partial p^2 / (2 \partial t)$:

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{k p}{\mu m_0} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right). \quad (7.5)$$

В такой записи под знаками производных по координатам и по времени находится одна и та же функция p^2 , но коэффициент в правой части $k p / (\mu m_0)$ — переменный, в него входит искомая функция $p(x, y, z, t)$.

Для решения конкретных задач, связанных с неустановившейся фильтрацией газа, дифференциальное уравнение в форме (7.3) или (7.5) должно быть проинтегрировано по всей газовой залежи при

заданных начальных и граничных условиях. Простейшие виды этих условий были рассмотрены в § 4 гл. 3.

Но так как уравнение (7.3) или (7.5) представляет собой сложное нелинейное уравнение в частных производных, то оно не имеет точных аналитических решений даже в самых простых одномерных случаях. Его можно проинтегрировать численно с помощью ЭВМ или решить приближенными способами. Приближенные способы хорошо разработаны. Некоторые из них уже рассматривались применительно к задачам упругого режима (метод последовательной смены стационарных состояний, метод интегральных соотношений, метод усреднения).

Неустановившаяся фильтрация реального газа с уравнением состояния $\rho = \rho_{ат}/[\rho_{ат} z(p)]$ и с учетом зависимости коэффициента вязкости от давления $\mu = \mu(p)$ в недеформируемой пористой среде ($m_0 = \text{const}$, $k = \text{const}$) описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа:

$$\frac{k}{2m_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\mu(p)z(p)} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu(p)z(p)} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu(p)z(p)} \frac{\partial p^2}{\partial z} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{z(p)} \right]. \quad (7.6)$$

Это уравнение можно проинтегрировать (при заданных начальном и граничных условиях) численно на ЭВМ или решить приближенно при помощи электрических моделей.

§ 2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЕЙБЕНЗОНА И ОСНОВНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

Если заменить нелинейное дифференциальное уравнение (7.5) линейным, т. е. линеаризовать его, то оно упростится — для линейного уравнения существуют точные аналитические решения. Ясно, что эти точные решения линейного уравнения будут приближенными для нелинейного. Оценить погрешность решения, которая возникает при замене точного уравнения линеаризованным, можно, например, сравнивая приближенное решение с решением на ЭВМ точного уравнения.

Были предложены различные способы линеаризации уравнения (7.5). Если рассматривается плоскорадиальный приток к скважине, то, как известно из теории установившейся фильтрации газа (см. гл. 5), воронка депрессии очень крутая и на большей части пласта давление мало отличается от контурного. На этом основании Лейбензон предложил заменить переменное давление p в коэффициенте уравнения (7.5) на постоянное давление p_k (начальное давление в пласте). Тогда, обозначая $\bar{\kappa} = kp_k/(\mu m_0)$, получим вместо уравнения (7.5) уравнение

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \bar{\kappa} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right), \quad (7.7)$$

которое является линейным уравнением пьезопроводности относительно функции p^2 .

И. А. Чарный предложил свести уравнение (7.5) к линейному заменой переменного давления p в коэффициенте κ на

$$p_{cp} = p_{min} + 0,7(p_{max} - p_{min}), \quad (7.8)$$

где p_{max} и p_{min} — максимальное и минимальное давления в газовой залежи за расчетный период соответственно.

Рассмотрим конкретную задачу о притоке газа в скважину бесконечно малого радиуса (точечный сток), расположенную в пласте бесконечной протяженности с постоянной толщиной h . В начальный момент времени пласт невозмущен, т. е. давление во всем пласте постоянно и равно p_k . С этого момента начинается отбор газа с постоянным дебитом $Q_{ат}$. Нужно найти изменение давления в пласте и с течением времени $p(r, t)$.

Для решения этой задачи используем линеаризованное уравнение (7.7). Для плоскорадиальной фильтрации газа оно запишется следующим образом:

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = -\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right). \quad (7.9)$$

Здесь выражение $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)$ представляет собой оператор Лапласа в полярных координатах относительно квадрата давления для плоскорадиального течения.

Уравнение (7.9) надо проинтегрировать при начальном условии

$$p^2 = p_k^2 \quad \text{при} \quad t=0, \quad 0 < r < \infty \quad (7.10)$$

и при граничном условии в удаленных точках

$$p^2 = p_k^2 \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad t > 0 \quad (7.11)$$

Выведем условие для давления на забое скважины. Для этого запишем выражение для массового дебита, исходя из закона Дарси, в дифференциальной форме для плоскорадиальной фильтрации

$$Q_m = \rho \omega \omega = \frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} p \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r h.$$

Используя равенства $Q_m = \rho_{ат} Q_{ат}$, $2p (\partial p / \partial r) = \partial p^2 / \partial r$ и разделив на $\rho_{ат}$, получим

$$Q_{ат} = \frac{\pi k h}{\rho_{ат} \mu} r \frac{\partial p^2}{\partial r}. \quad (7.12)$$

Из этого соотношения выразим условие на стенке газовой скважины бесконечно малого радиуса

$$r \frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{Q_{ат} \rho_{ат} \mu}{\pi k h}. \quad (7.13)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи уравнение (7.9) должно быть проинтегрировано при условиях (7.10), (7.11) и (7.13).

В гл. 6 была рассмотрена аналогичная задача об отборе упругой жидкости с постоянным дебитом Q из бесконечного первоначально невозмущенного пласта. Математическая постановка этой задачи представлена уравнением (6.38) с условиями (6.39) — (6.40).

Приведем здесь еще раз эти соотношения для упругой жидкости и сравним их с соотношениями (7.9) — (7.11), (7.13) для газа.

Упругая жидкость

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

$$p = p_k \quad \text{при} \quad t = 0$$

$$p = p_k \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad t > 0$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \quad \text{при} \quad r = 0$$

Идеальный газ

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \bar{\kappa} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right);$$

$$p^2 = p_k^2 \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$p^2 = p_k^2 \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad t > 0;$$

$$r \frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{[Q_{ат} p_{ат} \mu]}{\pi kh} \quad \text{при} \quad r = 0.$$

Из приведенных данных видно, что во все соотношения для идеального газа давление входит в квадрате, в то время как для упругой жидкости — в первой степени, коэффициент пьезопроводности κ для жидкости заменяется на $\bar{\kappa} = k p_k / (\mu m_0)$ для газа; коэффициент $Q\mu/(2\pi kh)$ — на $Q_{ат} p_{ат} \mu / (\pi kh)$. В остальном все соотношения аналогичны.

Как было показано в предыдущей главе, решением поставленной задачи для упругой жидкости является основная формула упругого режима (6.59):

$$p_k - p(r, t) = \frac{1}{2} \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \right]. \quad (7.14)$$

Аналогия между фильтрацией упругой жидкости и газа свидетельствует о том, что заменяя в формуле (7.14) давление на p^2 , κ — на $\bar{\kappa}$, $Q\mu/(2\pi kh)$ — на $Q_{ат} p_{ат} \mu / (\pi kh)$, получим решение поставленной задачи для газа

$$p_k^2 - p^2(r, t) = \frac{1}{2} \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\bar{\kappa} t} \right) \right], \quad (7.15)$$

или

$$p(r, t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi kh} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\bar{\kappa} t} \right) \right]}. \quad (7.16)$$

Для малых значений аргумента $r^2/(4\bar{\kappa} t)$ в соответствии с формулой (6.59) можно заменить интегральную показательную функцию логарифмической:

$$p_k^2 - p^2(r, t) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi kh} \ln \frac{2,25\bar{\kappa} t}{r^2}, \quad (7.17)$$

или

$$p(r, t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi kh} \ln \frac{2,25\bar{\kappa} t}{r^2}}. \quad (7.18)$$

Подчеркнем, что уравнения (7.15) — (7.18) являются приближенными, так как получены в результате интегрирования линеаризованного уравнения (7.9), а не точного (7.3).

Формулы (7.16) и (7.18) определяют (при фиксированных значениях времени t) распределение давления вокруг газовой скважины, работающей с постоянным дебитом с момента $t = 0$. Эти депрессионные кривые идентичны кривым при установившейся фильтрации — они очень крутые вблизи скважины (рис. 7.1, а). Если задать значение r , то можно найти изменение давления в данной точке с течением времени. В частности, можно найти измене-

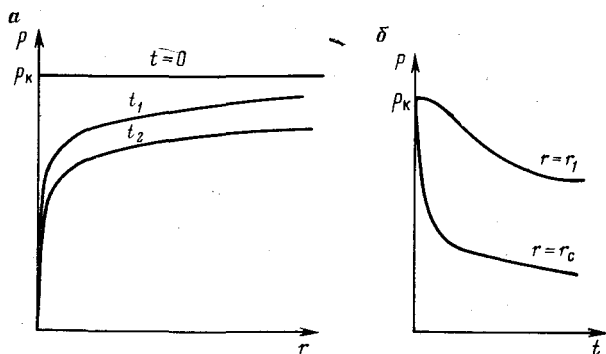


Рис. 7.1. Кривые распределения давления по пласту при неустановившемся притоке газа к скважине в разные моменты времени (а) и изменения давления с течением времени в фиксированных точках пласта (б)

ние давления на забое (при $r = r_c$) после начала работы скважины (рис. 7.1, б).

$$p_c(t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} t}{r_c^2}}. \quad (7.19)$$

§ 3. РЕШЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ПРИТОКЕ ГАЗА К СКВАЖИНЕ С ПОСТОЯННЫМ ДЕБИТОМ В ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В § 2 было приведено решение задачи о нестационарном притоке идеального газа к скважине бесконечно малого радиуса с постоянным дебитом. Задача была рассмотрена в линеаризованной постановке, т. е. решение было получено в результате интегрирования линеаризованного дифференциального уравнения. В этом параграфе будет показано, как можно получить, прибегая к численным методам, решение этой же задачи в точной постановке. Нужно проинтегрировать уравнение Лейбензона для плоскорадиальной фильтрации газа:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2\mu m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) \quad (7.20)$$

при условиях (7.10), (7.11), (7.13).

Покажем, что в такой постановке задача автомодельна: давление зависит от некоторого единого комплекса, включающего в себя обе переменные (r и t), а дифференциальное уравнение в частных производных (7.20) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется. Чтобы установить, от каких аргументов будет зависеть давление, проведем анализ размерностей (см. § 6, гл. 2). Распределение давления в пласте зависит, как следует из постановки задачи, от пяти определяющих параметров ($n = 5$): r , t , p_k , $k/(2\mu m_0)$, $Q_{ат} = p_{ат}\mu/(\pi k h)$.

Если обозначить длину L , время T , давление p , то размерности этих параметров выразятся следующим образом: $[r] = L$; $[t] = T$; $[p_k] = p$; $[k/(2\mu m_0)] = L^2/(PT)$; $[Q_{ат}p_{ат}\mu/(\pi k h)] = P^2$. Среди этих параметров три с независимыми размерностями: r , t , p_k ($k = 3$). Как следует из π -теоремы, искомая функция — давление, приведенное к безразмерному виду $F = p/p_k$, будет зависеть от двух безразмерных комплексов ($n - k = 5 - 3 = 2$). Легко проверить, что такими безразмерными комплексами являются

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{\frac{k}{2\mu m_0} p_k t}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{\lambda t}{2}}} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{\pi k h p_k^2}, \quad (7.21)$$

т. е.

$$F = p/p_k = F(\xi, \lambda). \quad (7.22)$$

Дифференцируя функцию F по t и по r как сложную функцию и подставляя производные в уравнение (7.20), получим, что функция F удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 F^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2} \frac{dF}{d\xi} = 0. \quad (7.23)$$

Условия (7.10), (7.11), (7.13) сводятся к следующим:

$$\xi \frac{dF^2}{d\xi} = \lambda \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad F(\xi, \lambda) = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \infty. \quad (7.24)$$

Уравнение (7.23) при условиях (7.24) было проинтегрировано численно. Результаты расчетов приведены в табл. 7.1 для значений $\lambda = 0,01$ и $\lambda = 0,004\,994$. Через ξ^* в табл. 7.1 обозначено такое значение аргумента ξ , что для $\xi < \xi^*$ значения $\xi dF^2/d\xi$ отличаются от λ меньше, чем на 0,01 %. Значит, для $\xi < \xi^*$ можно считать, что $\xi dF^2/d\xi = \lambda$. Если проинтегрировать это равенство, то получим

$$F^2 = F^2(\xi^*, \lambda) + \lambda \ln(\xi/\xi^*),$$

или

$$F(\xi, \lambda) = \sqrt{F^2(\xi^*, \lambda) - \lambda \ln(\xi^*/\xi)} \quad \text{для} \quad \xi < \xi^*. \quad (7.25)$$

Таблица 7.1. Результаты численного расчета автомодельного решения

$\lambda = 0,01$		$\lambda = 0,004994$	
ξ	$F(\xi, \lambda)$	ξ	$F(\xi, \lambda)$
$\xi^* = 0,005787$	0,9701	$\xi^* = 0,003886$	0,9842
0,01157	0,9737	0,01555	0,9877
0,01923	0,9763	0,03109	0,9894
0,03472	0,9793	0,06218	0,9912
0,06558	0,9825	0,2487	0,9947
0,09645	0,9845	0,4974	0,9964
0,1582	0,9870	0,9949	0,9980
0,2816	0,9899	1,492	0,9988
0,5285	0,9930	2,487	0,9996
0,7754	0,9948	3,482	0,9999
1,269	0,9970		
1,763	0,9982		
2,751	0,9994		
3,738	0,9999		

Поэтому значения $F(\xi, \lambda)$ для $\xi < \xi^*$ в табл. 7.1 не приведены. Сравнивая значения давления $F(\xi, \lambda) = p/p_k$, приведенные в табл. 7.1, со значениями, подсчитанными по формуле (7.16) или (7.18), можно найти погрешность, которую дает линеаризация уравнения Лейбензона, и убедиться в том, что она составляет доли процента.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРИТОКЕ ГАЗА К СКВАЖИНЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СМЕНЫ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как указывалось в предыдущей главе, этот метод основан на следующих предположениях: 1) в каждый момент времени существует конечная возмущенная область, в которой происходит движение газа к скважине; 2) движение внутри возмущенной области стационарно; 3) размер возмущенной области определяется из уравнения материального баланса.

Решим этим методом ту же задачу, которая была рассмотрена в § 2 данной главы, т. е. задачу о неустановившемся притоке газа к скважине с постоянным заданным дебитом $Q_{ат}$, но в отличие от § 2 будем считать радиус скважины конечным и равным r_c .

В любой момент времени возмущенной областью является круговая область радиусом $R(t)$, внутри которой давление распределено по стационарному закону (5.38):

$$p(r, t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R(t)}{r_c}} \ln \frac{R(t)}{r}}, \quad r_c \leq r \leq R(t). \quad (7.26)$$

Вне возмущенной области давление равно начальному (невозмущенное состояние):

$$p = p_k, \quad r > R(t). \quad (7.27)$$

В возмущенной области можно написать также выражение для дебита по формуле (5.93) для стационарной фильтрации:

$$Q_{\text{ат}} = \frac{\pi k h (p_{\text{к}}^2 - p_{\text{с}}^2)}{\mu \rho_{\text{ат}} \ln \frac{R(t)}{r_{\text{с}}}}. \quad (7.28)$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче забойное давление $p_{\text{с}}$ является функцией времени.

Для удобства последующего изложения найдем из (7.28) отношение

$$\frac{p_{\text{к}}^2 - p_{\text{с}}^2}{\ln \frac{R(t)}{r_{\text{с}}}} = \frac{Q_{\text{ат}} \rho_{\text{ат}} \mu}{\pi k h}$$

и подставим в формулу для давления в возмущенной области (7.26). Тогда получим

$$p(r, t) = \sqrt{p_{\text{к}}^2 - \frac{Q_{\text{ат}} \rho_{\text{ат}} \mu}{\pi k h} \ln \frac{R(t)}{r}}, \quad (7.29)$$

т. е. распределение давления, выраженное через заданный дебит и параметры пласта.

Для нахождения $R(t)$ составим уравнение материального баланса.

Начальный запас газа (при $p = p_{\text{к}}$) в зоне пласта радиусом $R(t)$

$$M_0 = \pi [R^2(t) - r_{\text{с}}^2] h m_0 \rho_{\text{к}} = \pi [R^2(t) - r_{\text{с}}^2] h m_0 \frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} p_{\text{к}}. \quad (7.30)$$

Текущий запас газа выразим через средневзвешенное давление $\tilde{p}$:

$$M_t = \pi [R^2(t) - r_{\text{с}}^2] h m_0 \tilde{p} = \pi [R^2(t) - r_{\text{с}}^2] h m_0 \frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} \tilde{p}, \quad (7.31)$$

где $\tilde{p}$ определяется по формуле установившейся фильтрации (5.50):

$$\tilde{p} = p_{\text{к}} - \frac{p_{\text{к}}^2 - p_{\text{с}}^2}{4 p_{\text{к}} \ln \frac{R(t)}{r_{\text{с}}}}. \quad (7.32)$$

Так как отбор газа происходит с постоянным дебитом $Q_{\text{ат}}$, отобранная масса газа к моменту t равна $\rho_{\text{ат}} Q_{\text{ат}} t$. Таким образом,

$$M_0 - M_t = \rho_{\text{ат}} Q_{\text{ат}} t,$$

или с использованием (7.30) — (7.31) находим

$$\pi [R^2(t) - r_{\text{с}}^2] h m_0 \frac{\rho_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} (p_{\text{к}} - \tilde{p}) = \rho_{\text{ат}} Q_{\text{ат}} t. \quad (7.33)$$

Подставив в (7.33) выражения (7.32) для средневзвешенного давления $\bar{p}$ и (7.28) для $Q_{ат}$, получим

$$\pi [R^2(t) - r_c^2] h m_0 \frac{\rho_{ат} (p_k^2 - p_c^2)}{\rho_{ат} 4 \rho_k \ln \frac{R(t)}{r_c}} = \rho_{ат} \frac{\pi k h (p_k^2 - p_c^2)}{\mu \rho_{ат} \ln \frac{R(t)}{r_c}} t,$$

откуда

$$R^2(t) - r_c^2 = \frac{4 k \rho_k}{\mu m_0} t = 4 \bar{\kappa} t,$$

или

$$R(t) = \sqrt{4 \bar{\kappa} t + r_c^2}. \quad (7.34)$$

Для значений времени, для которых $4 \bar{\kappa} t \gg r_c^2$, имеем

$$R(t) = 2 \sqrt{\bar{\kappa} t}. \quad (7.35)$$

Теперь, зная закон движения границы возмущенной области в виде (7.34) или (7.35), можно найти давление в любой точке пласта в любой момент времени по формуле (7.29), а также изменение давления на забое скважины в любой момент времени:

$$p(r, t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} \rho_{ат} \mu}{\pi k h} \ln \frac{\sqrt{4 \bar{\kappa} t + r_c^2}}{r}},$$

$$r_c \leq r \leq \sqrt{4 \bar{\kappa} t + r_c^2},$$

$$p = p_k, \quad r > \sqrt{4 \bar{\kappa} t + r_c^2}, \quad (7.36)$$

$$p_c(t) = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} \rho_{ат} \mu}{\pi k h} \ln \frac{\sqrt{4 \bar{\kappa} t + r_c^2}}{r_c}}. \quad (7.37)$$

Формулы (7.36) пригодны как для бесконечного пласта, так и для конечного открытого и закрытого пластов радиусом R_k . В последнем случае они годятся только для первой фазы движения, пока воронка депрессии не достигнет границы пласта, т. е. для

$$R(t) = 2 \sqrt{\bar{\kappa} t} \leq R_k.$$

Изменение давления во второй фазе зависит от типа газового пласта. Если он закрыт, то давление будет продолжать снижаться во всем пласте, включая границу. Этот случай будет рассмотрен в последующих параграфах. Если пласт открытый ($p = p_k$ при $r = R_k$), т. е. режим водонапорный, то во второй фазе установится стационарный режим с постоянной депрессией $p_k - p_c$, где

$$p_c = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} \rho_{ат} \mu}{\pi k h} \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

§ 5. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим еще один приближенный метод применительно к задачам неустановившейся фильтрации газа — метод усреднения временной производной по пространству.

В качестве примера рассмотрим прямолинейно-параллельную фильтрацию реального газа. Соответствующее этому случаю дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{k}{\mu m_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{z(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{z(p)} \right]. \quad (7.38)$$

Сделаем допущение, что коэффициент сверхсжимаемости $z(p)$ можно заменить на $\tilde{z} = z(p_{\text{ср}})$, где $p_{\text{ср}}$ — некоторое среднее давление в области фильтрации. Введем обозначение $p_1 = p/[z(p)]$. Тогда уравнение (7.38) примет вид

$$\frac{k\tilde{z}}{\mu m_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \text{или} \quad \tilde{z} \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2} = \frac{2m_0\mu}{k} \frac{\partial p_1}{\partial t}. \quad (7.39)$$

Пусть имеется первоначально невозмущенный газонасыщенный пласт шириной B , толщиной h , длиной L . С трех сторон пласт ограничен непроницаемыми поверхностями, а с четвертой стороны ($x = 0$) вскрыт галереей. В момент $t = 0$ через галерею начинает отбираться газ с постоянным массовым дебитом, который в соответствии с законом Дарси можно записать в виде

$$Q_m = \rho |\omega| Bh = \frac{\rho_{\text{ат}} p}{\rho_{\text{ат}} \tilde{z}} \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} Bh = Bh\tilde{z} \frac{\rho_{\text{ат}} k}{2\rho_{\text{ат}} \mu} \frac{\partial p_1^2}{\partial x}.$$

Требуется определить давление в пласте в любой момент времени $t > 0$. Для этого нужно найти решение уравнения (7.38) в области изменения $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, удовлетворяющее начальному и граничным условиям

$$p_1 = p_{10} \quad \text{при} \quad t = 0; \quad (7.40)$$

$$\partial p_1^2 / \partial x = \mu Q / k \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{где} \quad Q = 2Q_m \rho_{\text{ат}} / (Bh\tilde{z}\rho_{\text{ат}}); \quad (7.41)$$

$$\partial p_1^2 / \partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = L. \quad (7.42)$$

Как и в методе последовательной смены стационарных состояний, принимаем, что в каждый момент времени существует конечная возмущенная область $l(t)$, на границе которой выполняются условия

$$p_1^2 = p_{10}^2, \quad \partial p_1^2 / \partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = l(t). \quad (7.43)$$

Центральным моментом в рассматриваемом методе усреднения является принятие условия

$$\partial p_1 / \partial t = F(t), \quad (7.44)$$

равносильного предположению, что во всей части пласта, охвачен-

ной возмущением, давление изменяется с одинаковой скоростью; тогда уравнение (7.39) принимает вид

$$\tilde{z} \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2} = \frac{2m_0\mu}{k} F(t). \quad (7.45)$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по x , получим

$$p_1^2 = \frac{m_0\mu}{k} \frac{F(t)}{\tilde{z}} x^2 + bx + c. \quad (7.46)$$

Используя граничные условия на галерее (7.41) и на границе возмущенной области (7.43), найдем константы интегрирования b и c , а также функцию $F(t)$

$$b = \frac{\mu Q}{k}, \quad c = p_{10}^2 - \frac{Q\mu l(t)}{2k}, \quad F(t) = -\frac{Q\tilde{z}}{2m_0 l(t)}. \quad (7.47)$$

В результате имеем

$$p_1^2 = p_{10}^2 - \frac{Q\mu l(t)}{2k} \left[1 - \frac{x}{l(t)} \right]^2, \quad 0 \leq x \leq l(t). \quad (7.48)$$

В момент t_1 , когда возмущенная зона достигнет непроницаемой границы пласта $x = L$, закончится первая фаза.

Для определения ее продолжительности продelaем следующие преобразования: дважды проинтегрируем исходное уравнение (7.39) по координате и по времени

$$\tilde{z} \int_0^t \int_0^{l(t)} \frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2} dx dt = \frac{2m_0\mu}{k} \int_0^{l(t)} \int_0^t \frac{\partial p_1}{\partial t} dt dx,$$

в результате, используя граничные условия (7.41) и (7.43), получим

$$\tilde{p}_1 = p_{10} - \frac{\tilde{z}Q}{2m_0} \frac{t}{l(t)}, \quad (7.49)$$

где

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l p_1(x, t) dx.$$

Примем гипотезу, что средневзвешенное давление можно определить из соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \sqrt{\frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} p_1^2 dx} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} \left[p_{10}^2 - \frac{Q\mu l}{2k} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] dx} = \sqrt{p_{10}^2 - \frac{Q\mu l(t)}{6k}}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Приравнивая выражения для $\tilde{p}_1$ (7.49) и (7.50), получим

$$p_{10} - \frac{\tilde{z}Qt}{2m_0l(t)} = \sqrt{p_{10}^2 - \frac{Q\mu l(t)}{6k}},$$

откуда следует, что

$$t = \frac{2m_0l(t)}{\tilde{z}Q} \left(p_{10} - \sqrt{p_{10}^2 - \frac{Q\mu l(t)}{6k}} \right). \quad (7.51)$$

Продолжительность первой фазы t_1 получим, полагая $l(t) = L$:

$$t_1 = \frac{2m_0L}{\tilde{z}Q} \left(p_{10} - \sqrt{p_{10}^2 - \frac{Q\mu L}{6k}} \right). \quad (7.52)$$

В течение второй фазы давление на границе $x = L$ падает и выполняется условие (7.42). Соотношения для второй фазы истощения газового пласта строятся аналогичным образом. Пропедев необходимые выкладки, получим закон распределения давления по пласту

$$p_1^2 - p_{1r}^2 = \frac{Q\mu}{k} x \left(1 - \frac{x}{2L} \right) \quad (7.53)$$

и закон изменения давления на галерее

$$p_r = \left(p_{10} - \frac{\tilde{Q}z}{2m_0L} t \right)^2 - \frac{Q\mu L}{3k}. \quad (7.54)$$

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ К ЗАДАЧАМ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

Для решения линеаризованного уравнения неустановившейся фильтрации газа (7.7) используется метод суперпозиции (метод наложения потоков). Это уравнение линейное и однородное относительно p^2 , поэтому если $p_1(x, y, z, t)$, $p_2(x, y, z, t)$, ..., $p_n(x, y, z, t)$ определяют распределения давления, вызванные работой первой, второй, ..., n -й скважины, и являются решениями уравнения (7.7), то линейная комбинация их квадратов $p^2 = c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + \dots + c_n p_n^2$ тоже будет решением уравнения (7.7).

С помощью метода суперпозиции можно решать различные задачи, которые используются при проектировании разработки газовых месторождений.

Используя этот метод, выведем формулу для восстановления забойного давления после остановки газовой скважины и покажем, как по кривой восстановления давления определяются коллекторские свойства пласта.

Газовая скважина в бесконечном пласте эксплуатировалась в течение длительного промежутка времени T с постоянным дебитом $Q_{ат}$ и в момент T внезапно остановлена, т. е. приток газа к забою мгновенно прекратился.

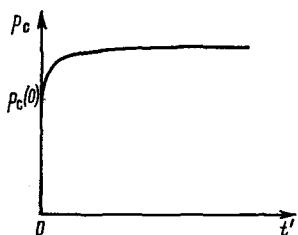


Рис. 7.2. Кривая восстановления забойного давления после остановки скважины

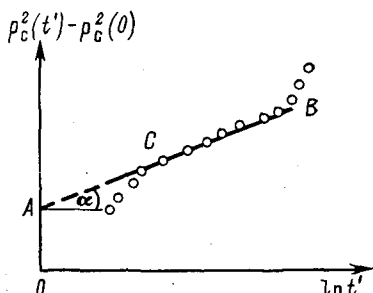


Рис. 7.3. График зависимости $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ от $\ln t'$

Используя принцип суперпозиции, будем считать, что в момент $t = T$ в дополнение к добывающей скважине, работающей с дебитом $Q_{ат}$, начала работать нагнетательная скважина с тем же дебитом.

Тогда

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \left[\ln \frac{2,25 \bar{\kappa} t}{r_c^2} - \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} (t - T)}{r_c^2} \right]. \quad (7.55)$$

Кроме того, в момент остановки скважины T выполняется равенство

$$p_k^2 - p_c^2(T) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} T}{r_c^2}. \quad (7.56)$$

Вычитая почленно (7.55) из (7.56), получим

$$\begin{aligned} p_c^2(t) - p_c^2(T) &= \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \left[\ln \frac{2,25 \bar{\kappa} T}{r_c^2} - \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} t}{r_c^2} + \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} (t - T)}{r_c^2} \right] = \\ &= \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \left[\ln \frac{2,25 \bar{\kappa} (t - T)}{r_c^2} - \ln \frac{t}{T} \right]. \end{aligned}$$

Если скважина работала до остановки в течение длительного времени T и $t - T \ll T$, то

$$\ln \frac{t}{T} \ll \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} (t - T)}{r_c^2}$$

и членом $\ln(t/T)$ можно пренебречь. Тогда имеем

$$p_c^2(t) - p_c^2(T) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} (t - T)}{r_c^2}. \quad (7.57)$$

Примем момент остановки T за новое начало отсчета времени; $t' = t - T$, тогда формула (7.57) запишется в виде

$$p_c^2(t') - p_c^2(0) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa} t'}{r_c^2}. \quad (7.58)$$

График восстановления забойного давления показан на рис. 7.2. Легко видеть из последней формулы, что зависимость $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ от $\ln t'$ — линейная (рис. 7.3). Выделим в правой части формулы (7.58) член, содержащий t'

$$p_c^2(t') - p_c^2(0) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln t' + \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa}}{r_c^2}. \quad (7.59)$$

Очевидно, что $i = Q_{ат} p_{ат} \mu / (2\pi k h)$ представляет собой тангенс угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а OA — отрезок, отсекаемый прямой AB на оси ординат.

$$OA = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{2,25 \bar{\kappa}}{r_c^2} = i \ln \frac{2,25 \bar{\kappa}}{r_c^2}. \quad (7.60)$$

При исследовании газовых скважин на неустановившихся режимах, которые проводятся с целью определения коллекторских свойств пластов, получают значения p_c в разные моменты времени t' после остановки скважины. Эти данные обрабатывают в координатах $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ и $\ln t'$ (или $\lg t'$).

Экспериментальные точки показаны на рис. 7.3. Обычно на опытной кривой можно выделить прямолинейный участок, по которому определяются значения $i = \operatorname{tg} \alpha$ и OA . Зная эти величины, а также дебит скважины до остановки $Q_{ат}$, можно определить коэффициент гидропроводности пласта

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{Q_{ат} p_{ат}}{2\pi \operatorname{tg} \alpha} \quad (7.61)$$

и параметр

$$\frac{\bar{\kappa}}{r_c^2} = \frac{1}{2,25} e^{OA/i}. \quad (7.62)$$

Отметим, что на участке AC опытные точки отклоняются от прямой за счет притока газа в скважину после ее закрытия, который не учитывается в соотношениях (7.55) — (7.57), а также за счет некоторых других факторов.

Зависимость (7.55) можно записать также в виде

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{2\pi k h} \ln \frac{t}{t - T}$$

или

$$p_c^2(t') = p_k^2 - i \ln \frac{t' + T}{t'}. \quad (7.63)$$

Кривые восстановления давления после остановки газовых скважин обрабатывают также по методу Хорнера в координатах $p_c^2(t')$, $\ln [(t' + T)/t']$. Уравнение (7.63) в этих координатах представляет собой прямую, проходящую через начало координат. По углу наклона прямой можно определить коэффициент гидро-

проводности из формулы (7.61). Экстраполируя ее до оси ординат ($\ln [(t' + T)/t'] = 0$), получают величину пластового давления p_k , которое, как правило, неизвестно.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ОТБОРЕ ГАЗА ИЗ ЗАМКНУТОГО ПЛАСТА ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА

Рассмотрим несколько задач об отборе газа из замкнутой круговой газовой залежи радиусом R_k . В центре залежи находится скважина радиусом r_c . До вскрытия пласта скважиной давление во всей залежи постоянно и равно p_n .

Будет рассмотрено два простейших случая: а) отбор производится с постоянным дебитом $Q_{ат}$; б) забойное давление сохраняется постоянным.

В случае а) нас будет интересовать падение давления на границе пласта $p_k(t)$ и на забое скважины $p_c(t)$, в случае б) — падение давления на границе $p_k(t)$ и падение дебита $Q_{ат}(t)$.

Обе задачи решаются методом последовательной смены стационарных состояний, т. е. с использованием законов стационарной фильтрации газа и уравнения истощения газовой залежи. Это последнее уравнение — уравнение материального баланса — заключается в том, что количество газа, извлеченного из пласта за некоторый промежуток времени, равно уменьшению запасов газа в пласте. Так как пласт замкнут, то запасы ограничены и не пополняются извне.

Если $\tilde{\rho}$ — плотность идеального газа, соответствующая средневзвешенному давлению в пласте $\tilde{p}$, а $V_{пор}$ — объем порового пространства пласта, принимаемый постоянным, то уменьшение запасов газа за бесконечно малый промежуток времени запишется в виде

$$-V_{пор}d\tilde{\rho} = -V_{пор}d\left(\frac{\rho_{ат}\tilde{p}}{\rho_{ат}}\right) = -\frac{\rho_{ат}}{\rho_{ат}} V_{пор}d\tilde{p}, \quad (7.64)$$

отобранная масса газа за тот же промежуток времени

$$Q_m(t) dt = \rho_{ат} Q_{ат}(t) dt. \quad (7.65)$$

Приравнявая выражения (7.64) и (7.65), получим дифференциальное уравнение истощения газовой залежи

$$-V_{пор}d\tilde{p} = \rho_{ат} Q_{ат}(t) dt. \quad (7.66)$$

В гл. 5, где рассматривалась установившаяся плоскорадиальная фильтрация газа, было показано, что средневзвешенное давление $\tilde{p}$ очень мало отличается от контурного p_k (в нашем случае p_k — давление на границе замкнутого пласта). Б. Б. Лапуком было установлено, что при одинаковых граничных условиях кривая распределения давления в пласте в случае неустановившейся фильтрации

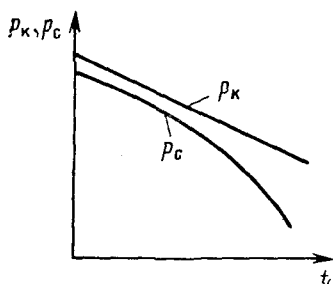


Рис. 7.4. Изменение давления на границе замкнутого газового пласта $p_k(t)$ и забойного давления $p_c(t)$ с течением времени при отборе газа с постоянным дебитом

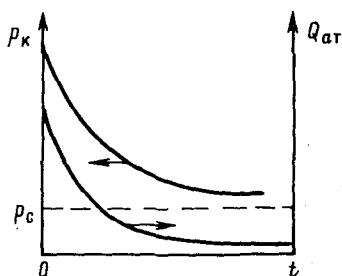


Рис. 7.5. Изменение давления на границе замкнутого газового пласта $p_k(t)$ и дебита $Q_{ат}(t)$ с течением времени при постоянном забойном давлении

располагается несколько выше соответствующей кривой для установившейся фильтрации. Поэтому мы примем условие $\tilde{p} \approx p_k$ и заменим в уравнении (7.66) $\tilde{p}$ на p_k :

$$-V_{пор} dp_k = p_{ат} Q_{ат}(t) dt. \quad (7.67)$$

Рассмотрим случай а), когда $Q_{ат} = \text{const}$. При этом

$$dp_k = - \frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_{пор}} dt. \quad (7.68)$$

Интегрируя это уравнение, учитывая, что $p = p_n$ при $t = 0$, получаем

$$p_k = p_n - \frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_{пор}} t, \quad (7.69)$$

т. е. давление на границе пласта изменяется по линейному закону с течением времени (рис. 7.4). Чтобы найти закон изменения забойного давления с течением времени, запишем формулу для дебита скважины

$$Q_{ат} = \frac{\pi k h (p_k^2 - p_c^2)}{p_{ат} \mu \ln \frac{R_k}{r_c}} \quad (7.70)$$

и выразим из нее забойное давление

$$p_c = \sqrt{p_k^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{\pi k h} \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (7.71)$$

Отсюда с учетом выражения (7.69) для p_k находим

$$p_c = \sqrt{\left(p_n - \frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_{пор}} t\right)^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \mu}{\pi k h} \ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (7.72)$$

График изменения $p_c(t)$ представлен на рис. 7.4.

В случае б) ($p_c = \text{const}$) для определения зависимости p_k от t подставим выражение для дебита (7.70) в уравнение (7.60) и разделим переменные:

$$-V_{\text{пор}} \frac{dp_k}{p_k^2 - p_c^2} = \frac{\pi k h}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} dt. \quad (7.73)$$

Вводя обозначение $A = \pi k h / (\mu \ln(R_k/r_c))$ и интегрируя (7.73) от 0 до t и от p_n до p_k , получим

$$\int_0^t dt = -\frac{V_{\text{пор}}}{A} \int_{p_n}^{p_k} \frac{dp_k}{p_k^2 - p_c^2},$$

откуда

$$t = \frac{V_{\text{пор}}}{2A p_c} \ln \frac{(p_n - p_c)(p_k + p_c)}{(p_n + p_c)(p_k - p_c)}. \quad (7.74)$$

Задавая различные значения давления p_k на границе залежи, начиная от p_n и меньшими, можно найти соответствующие значения времени разработки залежи t . Подставляя заданные значения p_k в формулу (7.70), определяем дебиты в эти же моменты t . Графики $p_k(t)$ и $Q_{\text{ат}}(t)$ для этого случая приведены на рис. 7.5.

Глава 8

ВЗАИМНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ. ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Задачи о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде представляют большой теоретический и практический интерес.

При разработке нефтяных месторождений в условиях водонапорного режима наблюдается стягивание контура нефтеносности под напором контурных вод.

В точной постановке задача о продвижении водонефтяного контакта является одной из наиболее сложных в теории фильтрации. Первые исследования ее были выполнены Л. С. Лейбензоном. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах М. Маскета, В. Н. Щелкачева, П. Я. Полубариновой-Кочиной, И. А. Чарного, А. М. Пирвердяна, Н. Н. Веригина и др.

Аналогичная задача о движении границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами (вязкостью и плотностью) возникает в некоторых случаях и при разработке газовых месторождений с активной краевой или подошвенной водой, а также при создании и эксплуатации подземных хранилищ газа в водоносных пластах и истощенных обводненных месторождениях. Зна-

ние в этом случае темпа продвижения контурных вод очень важно, так как от него зависит темп падения пластового давления в газовой залежи или ПХГ, дебит газовых скважин и их размещение на газоносной площади, продолжительность бескомпрессорной эксплуатации газового месторождения и другие важные показатели.

§ 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРИ ВЗАИМНОМ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

Основная трудность точного решения задачи о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде заключается в том, что линии тока на границе раздела жидкостей преломляются.

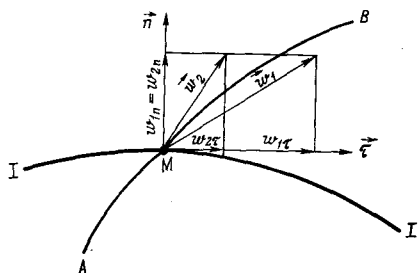


Рис. 8.1. Преломление линий тока на границе раздела жидкостей

Пусть кривая $I-I$ (рис. 8.1) является границей раздела двух жидкостей с вязкостями μ_1 и μ_2 и пусть, например, $\mu_2 > \mu_1$ (нефть вытесняется водой). Рассмотрим произвольную точку M границы $I-I$ и проведем через нее касательную $\vec{\tau}$ и нормаль $\vec{n}$ к границе раздела жидкостей $I-I$. Найдем проекции скоростей фильтрации воды и нефти, находящихся в данный момент в точке M , на касательную $\vec{\tau}$

и нормаль $\vec{n}$, считая проницаемость пористой среды k постоянной по обе стороны границы раздела.

Согласно условию неразрывности потока массы элементарные расходы обеих несжимаемых жидкостей через элемент границы раздела, включающий точку M , должны быть равны между собой. Отсюда следует, что нормальные составляющие скоростей фильтрации обеих жидкостей будут равны, т. е. $w_{1n} = w_{2n}$. Давление в пласте в точке M также должно быть одинаково для обеих жидкостей, так как при малых скоростях (ниже звуковых) разрыва давления в сплошном потоке быть не может. Касательные составляющие скоростей фильтрации обеих жидкостей будут определяться по закону Дарси:

$$w_{1\tau} = - \frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial \tau}; \quad (8.1)$$

$$w_{2\tau} = - \frac{k}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (8.2)$$

Так как $\mu_2 > \mu_1$, то из (8.1) и (8.2) получаем, что $w_{1\tau} > w_{2\tau}$. Отсюда следует, что результирующий вектор скорости фильтрации $\vec{w}_1 (\vec{w}_1 = \vec{w}_{1\tau} + \vec{w}_{1n})$, касательный к линии тока AM , будет больше вектора $\vec{w}_2 (\vec{w}_2 = \vec{w}_{2\tau} + \vec{w}_{2n})$, касательного к линии тока нефти MB . Следовательно, линии тока AM и MB , проходящие

через точку M , будут иметь излом в точке M . Учет этого преломления линий тока на границе раздела жидкостей и составляет главную трудность в точном решении задачи продвижения границы раздела.

Линии тока не будут преломляться только в двух случаях — при прямолинейно-параллельном и плоскорадиальном движениях границы раздела, когда $\omega_{1r} = \omega_{2r} = 0$. Эти задачи прежде всего и будут рассмотрены в данной главе. При этом жидкости (нефть и вода) считаются несжимаемыми, взаимно нерастворимыми и химически не реагирующими одна с другой и с пористой средой. Вытеснение нефти водой предполагается происходящим полностью — так называемое поршневое вытеснение. Задачи, в которых учитывается неполнота вытеснения, рассматриваются в гл. 9.

§ 2. ПРЯМОЛИНЕЙНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ

При поршневом вытеснении нефти водой в пористой среде плотности нефти и воды будем считать одинаковыми. Это позволит рассматривать плоскость контакта нефти и воды вертикальной. А различие в вязкостях нефти μ_n и воды μ_v будем учитывать.

В случае прямолинейно-параллельного движения схема вытеснения представлена на рис. 8.2. На контуре питания и на галерее поддерживаются соответственно постоянные давления p_k и p_r . Начальное положение контура нефтеносности x_0 параллельно галерее и контуру питания.

Обозначим через x_v текущее расстояние до контура нефтеносности в момент времени t после начала вытеснения, через L_k — расстояние от контура питания до галереи, через p_v , p_n — давление в любой точке водоносной и нефтеносной части пласта соответственно, через $p(t)$ — давление на границе раздела вода—нефть, отстоящей от контура питания на расстоянии x_v .

Вспомним, что в случае установившегося прямолинейно-параллельного фильтрационного потока одной жидкости (см. § 2 гл. 4) распределение давления и скорость фильтрации описываются следующими уравнениями:

$$p = p_k - \frac{p_k - p_r}{L_k} x = p_r + \frac{p_k - p_r}{L_k} (L_k - x); \quad (8.3)$$

$$\omega = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L_k}. \quad (8.4)$$

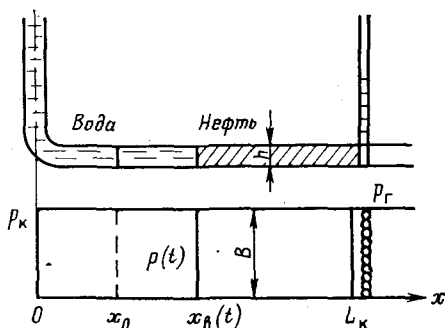


Рис. 8.2. Схема модели пласта при прямолинейно-параллельном движении границы раздела вода—нефть

При этом изобарами являются линии, параллельные галерее, и каждую изобару можно рассматривать как контур питания или как галерею. На основании формул (8.3) и (8.4) распределение давления и скорость фильтрации в водоносной области можно записать в виде

$$p_B = p_K - \frac{p_K - p(t)}{x_B(t)} x, \quad 0 \leq x \leq x_B(t); \quad (8.5)$$

$$\omega_B = \frac{k}{\mu_B} \frac{p_K - p(t)}{x_B(t)}. \quad (8.6)$$

Принимая за контур питания изобару, совпадающую с границей раздела жидкостей, распределение давления и скорость фильтрации в нефтеносной области можно записать следующим образом:

$$p_H = p_\Gamma + \frac{p(t) - p_\Gamma}{L_K - x_B(t)} (L_K - x), \quad x_B(t) \leq x \leq L_K; \quad (8.7)$$

$$\omega_H = \frac{k}{\mu_H} \frac{p(t) - p_\Gamma}{L_K - x_B(t)}. \quad (8.8)$$

Найдем давление $p(t)$ на границе раздела. Вследствие несжимаемости жидкостей и неразрывности потока линии тока будут иметь вид прямых, параллельных оси Ox (на границе раздела преломления не будет), а скорость фильтрации во всех точках пласта будет одинаковой, т. е. $\omega_B = \omega_H$.

Тогда из уравнений (8.6) и (8.8) получим

$$\frac{k(p_K - p(t))}{\mu_B x_B(t)} = \frac{k(p(t) - p_\Gamma)}{\mu_H (L_K - x_B(t))}, \quad (8.9)$$

откуда давление на границе раздела жидкостей будет

$$p(t) = \frac{p_K \mu_H (L_K - x_B(t)) + p_\Gamma \mu_B x_B(t)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L_K - x_B(t))}. \quad (8.10)$$

Определим теперь следующие характеристики фильтрационного потока нефти и воды.

1. Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях. Для этого подставим (8.10) в (8.5) и (8.7):

$$p_B = p_K - \frac{\mu_B (p_K - p_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L_K - x_B(t))} x; \quad (8.11)$$

$$p_H = p_\Gamma + \frac{\mu_H (p_K - p_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L_K - x_B(t))} (L_K - x). \quad (8.12)$$

2. Скорость фильтрации. Подставим (8.10) в (8.6) и (8.8):

$$\omega_B = \omega_H = \frac{k(p_K - p_\Gamma)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H (L_K - x_B(t))}. \quad (8.13)$$

3. Расход жидкости (дебит галереи) Q .

Умножим (8.13) на площадь сечения потока Bh :

$$Q = \frac{k(p_K - p_r)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H(L_K - x_B(t))} Bh. \quad (8.14)$$

1. Градиент давления. Продифференцируем (8.11) и (8.12) по x :

$$\frac{\partial p_{(B)}}{\partial x} = - \frac{\mu_B(p_K - p_r)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H(L_K - x_B(t))}; \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial p_{(H)}}{\partial x} = - \frac{\mu_H(p_K - p_r)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H(L_K - x_B(t))}. \quad (8.16)$$

5. Закон движения границы раздела $x_B = x_B(t)$ находим из соотношения скорости фильтрации и средней скорости движения:

$$\omega = mv = m \frac{dx_B}{dt},$$

откуда

$$dt = \frac{m}{\omega} dx_B = \frac{m}{\frac{k(p_K - p_r)}{\mu_B x_B(t) + \mu_H(L_K - x_B(t))}} dx_B. \quad (8.17)$$

Проинтегрировав (8.17) в пределах от 0 до t и от x_0 до x_B , получим

$$t = \frac{m}{k(p_K - p_r)} \left[\mu_H L_K (x_B - x_0) - \frac{1}{2} (\mu_H - \mu_B) (x_B^2 - x_0^2) \right]. \quad (8.18)$$

Чтобы найти время полного вытеснения нефти, нужно в формуле (8.18) положить $x_B = L_K$. Тогда получим

$$T = \frac{m}{2k(p_K - p_r)} [\mu_B (L_K^2 - x_0^2) + \mu_H (L_K - x_0)^2].$$

Для нахождения зависимости координаты границы раздела x_B от времени t решим квадратное уравнение (8.18) относительно x_B :

$$x_B = \frac{\mu_H}{\mu_H - \mu_B} L_K - \sqrt{\left(\frac{\mu_H}{\mu_H - \mu_B} L_K - x_0 \right)^2 + \frac{2k(p_K - p_r)}{m(\mu_H - \mu_B)} t}. \quad (8.19)$$

Подставив это значение x_B в формулы (8.13) и (8.14), найдем изменение скорости фильтрации и дебита галереи во времени:

$$\omega = \frac{k(p_K - p_r)}{\sqrt{[\mu_H L_K - (\mu_H - \mu_B) x_0]^2 - \frac{2k(p_K - p_r)}{m} (\mu_H - \mu_B) t}}; \quad (8.20)$$

$$Q = \frac{kBh(p_K - p_r)}{\sqrt{[\mu_H L_K - (\mu_H - \mu_B) x_0]^2 - \frac{2k(p_K - p_r)}{m} (\mu_H - \mu_B) t}}. \quad (8.21)$$

Проанализируем полученные характеристики потока.

1. Из уравнений (8.11) и (8.12) видно, что давление в пласте зависит не только от координаты x , но и от положения границы раз-

дела x_b . Но x_b , как это следует из формулы (8.19), со временем увеличивается, следовательно, пластовое давление во времени в водоносной области падает, а в нефтеносной — растет. На рис. 8.3 показано распределение давления в пласте в начальный момент вытеснения, когда граница раздела занимает положение x_0 , и некоторое время t спустя, когда граница раздела продвинулась до положения x_b . Из графика видно, что пьезометрическая линия на границе раздела имеет излом.

2. Скорость фильтрации w (8.20) и расход жидкости Q (8.21) также изменяются во времени. Следовательно, несмотря на посто-

янство депрессии $\Delta p = p_k - p_r$ движение жидкостей в пласте будет неустановившимся.

При $\mu_n > \mu_v$, как видно из указанных формул, скорость фильтрации и дебит галереи увеличиваются с течением времени, т. е. по мере продвижения контура нефтеносности.

Рис. 8.3. Кривые распределения давления в пласте при вытеснении нефти водой

Это легко объяснимо и из физических соображений. Движение жидкостей в пласте происходит под действием постоянного перепада давления Δp . Величина же сопротивления, оказываемого обеими жидкостями, зависит от размеров их областей. С течением

времени увеличивается область водоносности, сопротивление которой по сравнению с областью нефтеносности тех же размеров значительно меньше. Следовательно, общее сопротивление обеих областей во времени уменьшается, что при постоянной депрессии Δp ведет к росту скорости фильтрации и дебита галереи.

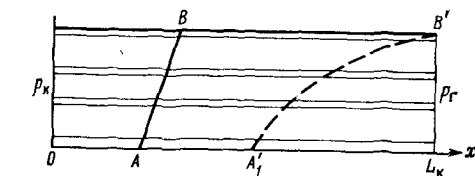


Рис. 8.4. Схема использования метода «полосок»

3. Градиенты давления в водоносной и нефтеносной областях, как это следует из формул (8.15) и (8.16) с учетом (8.19), увеличиваются во времени. Это же видно и из рис. 8.3. В нефтеносной области градиент давления больше, чем в водоносной во столько раз, во сколько вязкость нефти больше вязкости воды.

Если первоначальное положение водонефтяного контакта AB в пласте не параллельно галерее (рис. 8.4), то решить задачу можно только приближенно, например используя метод «полосок», предложенный В. Н. Щелкачевым. В потоке выделяются узкие полоски,

Если первоначальное положение водонефтяного контакта AB в пласте не параллельно галерее (рис. 8.4), то решить задачу можно только приближенно, например используя метод «полосок», предложенный В. Н. Щелкачевым. В потоке выделяются узкие полоски,

в пределах каждой из которых водонефтяной контакт считается параллельным галерее, и движение в каждой полоске описывается выведенными в этом параграфе формулами. При этом, как видно из формулы (8.20), чем больше x_0 , тем больше скорость фильтрации ω . Отсюда вытекает, что граница раздела в точке B будет двигаться гораздо быстрее, чем в точке A , и обводнение галереи начнется именно по линии BB' , в то время как контур нефтеносности по другим линиям будет еще значительно удален от галерей. Из этого примера следует важное заключение о характере продвижения контура нефтеносности. Если на границе раздела вода—нефть при разработке нефтяной залежи образовался «водяной язык», то он в дальнейшем не только не исчезает, а быстро вытягивается, продвигаясь с большей скоростью, чем остальная часть водонефтяного контакта.

§ 3. ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ

Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой в условиях плоскорадиального движения по закону Дарси в пласте, изображенном на рис. 8.5. На контуре питания радиуса R_k поддерживается постоянное давление p_k , на забое скважины радиуса r_c — постоянное давление p_c , толщина пласта h и его проницаемость k также постоянны. Обозначим через R_0 и r_n соответственно начальное и текущее положения контура нефтеносности, концентрические скважине и контуру питания, через p_n и p_r — давление в любой точке водоносной и нефтеносной области соответственно, через p — давление на границе раздела жидкостей.

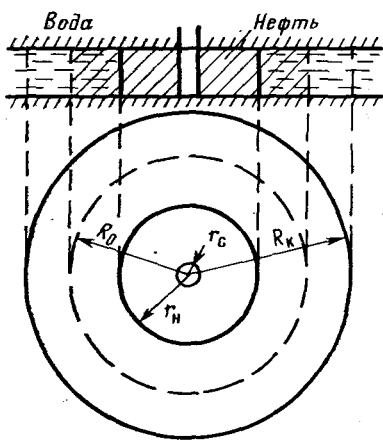


Рис. 8.5. Схема пласта при плоскорадиальном вытеснении нефти водой

В случае установившегося плоскорадиального движения однородной жидкости (§ 2 гл. 4) распределение давления в потоке и скорость фильтрации описываются следующими уравнениями:

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} = p_c + \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c};$$

$$\omega = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \frac{1}{r}.$$

Если изобару, совпадающую в данный момент с контуром нефтеносности, принять за скважину, то распределение давления и ско-

рость фильтрации в водоносной области можно выразить так:

$$p_v = p_k - \frac{p_k - p}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \ln \frac{R_k}{r}; \quad (8.22)$$

$$\omega_v = \frac{k}{\mu_v} \frac{p_k - p}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \frac{1}{r}. \quad (8.23)$$

А если эту же изобару, совпадающую с r_n , принять за контур питания, то распределение давления и скорость фильтрации в нефтеносной области можно записать так:

$$p_n = p_c + \frac{p - p_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}; \quad (8.24)$$

$$\omega_n = \frac{k}{\mu_n} \frac{p - p_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (8.25)$$

Давление на границе раздела жидкостей p найдем из условия равенства скоростей фильтрации нефти и воды на этой границе, для чего приравняем (8.23) и (8.25) при $r = r_n$. В результате получим

$$\frac{k}{\mu_v} \frac{p_k - p}{\ln \frac{R_k}{r_n}} \frac{1}{r_n} = \frac{k}{\mu_n} \frac{p - p_c}{\ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r_n},$$

откуда

$$p = \frac{p_k \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c} + p_c \mu_v \ln \frac{R_k}{r_n}}{\mu_v \ln \frac{R_k}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}}. \quad (8.26)$$

Определим характеристики рассматриваемого плоскорадиального фильтрационного потока нефти и воды.

1. Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях найдем из уравнений (8.22) и (8.24), подставив в них значения давления на границе раздела p из (8.26). В результате получим

$$p_v = p_k - \frac{\mu_v (p_k - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_k}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}; \quad (8.27)$$

$$p_n = p_c + \frac{\mu_n (p_k - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_k}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (8.28)$$

Из этих формул видно, что закон распределения давления вдоль радиуса-вектора в обеих зонах логарифмический.

Если знаменатель в формулах (8.27) и (8.28) представить в виде

$$\mu_v \ln \frac{R_K}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c} = \ln \frac{r_n^{\mu_n} - \mu_v R_K^{\mu_v}}{r_c^{\mu_n}},$$

то нетрудно заметить, что при r_n , уменьшающемся во времени (при стягивании контура нефтеносности), этот знаменатель также уменьшается. А тогда из формул (8.27) и (8.28) следует, что давление в водоносной части пласта со временем уменьшается, а в нефтеносной — растет. Таким образом, здесь наблюдается такая же картина, как и в прямолинейно-параллельном потоке.

2. Градиент давления в обеих областях течения найдем, продифференцировав уравнения (8.27) и (8.28):

$$\frac{\partial p_v}{\partial r} = \frac{\mu_v (p_K - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_K}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r}; \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial r} = \frac{\mu_n (p_K - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_K}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r}. \quad (8.30)$$

Из полученных формул следует, что градиенты давления во времени растут как в водоносной, так и в нефтеносной областях (так как знаменатели в этих формулах уменьшаются во времени).

На границе раздела жидкостей (при $r = r_n$) градиент давления в нефтеносной области больше, чем в водоносной во столько раз, во сколько μ_n больше μ_v . Это говорит о том, что на границе раздела жидкостей пьезометрическая линия имеет излом.

3. Скорости фильтрации жидкостей определим из закона Дарси:

$$w_v = \frac{k}{\mu_v} \frac{\partial p_v}{\partial r}; \quad (8.31)$$

$$w_n = \frac{k}{\mu_n} \frac{\partial p_n}{\partial r}. \quad (8.32)$$

Подставив в (8.31) значение градиента давления из (8.29), а в (8.32) — из (8.30), получим

$$w_v = \frac{k (p_K - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_K}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r}, \quad R_K \geq r \geq r_n; \quad (8.33)$$

$$w_n = \frac{k (p_K - p_c)}{\mu_v \ln \frac{R_K}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}} \frac{1}{r}, \quad r_n \geq r \geq r_c. \quad (8.34)$$

Из формул (8.33) и (8.34) видно, что скорости фильтрации как воды, так и нефти растут во времени (так как знаменатель в указанных формулах уменьшается во времени).

4. Дебит скважины Q найдем, умножив скорость фильтрации w на площадь $\Omega = 2\pi hr$:

$$Q = \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu_n \ln \frac{R_k}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c}}. \quad (8.35)$$

При постоянной депрессии $\Delta p = p_k - p_c$ дебит скважины увеличивается во времени, т. е. с приближением к ней контура нефтеносности. Такое самопроизвольное увеличение дебита нефти перед прорывом воды в скважину подтверждается и промысловыми наблюдениями. При $\mu_n = \mu_v$ формула (8.35) превращается в формулу Дюпюи.

5. Закон движения границы раздела жидкостей определим из соотношения между скоростью фильтрации и средней скоростью движения:

$$w = mv = -m \frac{dr_n}{dt},$$

откуда

$$dt = -\frac{m}{w} dr_n = -\frac{m}{k(p_k - p_c)} \left(\mu_v \ln \frac{R_k}{r_n} + \mu_n \ln \frac{r_n}{r_c} \right) r_n dr_n. \quad (8.36)$$

Интегрируя (8.36) в пределах от 0 до t и от R_0 до r_n , получим

$$\begin{aligned} t &= \frac{m}{k(p_k - p_c)} \int_{r_n}^{R_0} [(\mu_n - \mu_v) r_n \ln r_n - (\mu_n \ln r_c - \mu_v \ln R_k) r_n] dr_n = \\ &= \frac{m}{2k(p_k - p_c)} \left[\mu_n \left(R_0^2 \ln \frac{R_0}{r_c} - r_n^2 \ln \frac{r_n}{r_c} \right) + \mu_v \left(R_0^2 \ln \frac{R_k}{R_0} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_n^2 \ln \frac{R_k}{r_n} \right) - \frac{\mu_n - \mu_v}{2} (R_0^2 - r_n^2) \right]. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Время вытеснения всей нефти водой T найдем, подставив в уравнение (8.37) $r = r_c$. В результате получим (пренебрегая r_c^2 по сравнению с R_0^2)

$$T = \frac{m}{2k(p_k - p_c)} \left[\mu_n R_0^2 \left(\ln \frac{R_0}{r_c} - \frac{1}{2} \right) + \mu_v R_0^2 \left(\ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (8.38)$$

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ

В реальных условиях движение границы раздела жидкостей, естественно, сложнее, чем по рассмотренным выше схемам, так как водонефтяной (газоводяной) контакт совершает сложное пространственное движение. В реальных условиях продуктивные пласты наклонны и граница раздела жидкостей, имеющая горизонтальное начальное положение, в процессе разработки залежи нефти (газа) деформируется.

Пусть нефтяная залежь в наклонном пласте (рис. 8.6) имеет горизонтальное начальное положение водонефтяного контакта A_0B_0 .

При отборе нефти граница раздела вода—нефть будет перемещаться, занимая последовательно положения A_1B_1 , A_2B_2 и т. д. Рассмотрим вопрос об устойчивости движения границы раздела. Скорости фильтрации каждой жидкости согласно закону Дарси определяются при учете силы тяжести по формулам

$$w_{\text{в}} = - \frac{k_1}{\mu_{\text{в}}} \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho_{\text{в}} g \frac{\partial z}{\partial s} \right); \quad w_{\text{н}} = - \frac{k_2}{\mu_{\text{н}}} \left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho_{\text{н}} g \frac{\partial z}{\partial s} \right). \quad (8.39)$$

Вследствие неизбежных возмущений на границе раздела частицы воды попадают в область, занятую нефтью при этом их дальнейшее движение может либо ускоряться, либо замедляться. В первом случае, при ускорении движения частиц воды, движение границы раздела будет неустойчивым; во втором, при замедлении движения частиц воды,— устойчивым.

Условия устойчивости движения границы раздела можно установить из следующих элементарных соображений. Обозначим через $(w_{\text{в}})_{\text{н}}$ скорость фильтрации частиц воды, попавших в поток нефти с градиентом давления $(\partial p / \partial s)_{\text{н}}$; через $(k_1)_2$ — проницаемость пласта для воды в зоне движения нефти.

Тогда из первого соотношения (8.39) имеем

$$(w_{\text{в}})_{\text{н}} = - \frac{(k_1)_2}{\mu_{\text{в}}} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\text{н}} + \rho_{\text{в}} g \frac{\partial z}{\partial s} \right]. \quad (8.40)$$

Скорость фильтрации основных частиц нефти, соприкасающихся с проникшими туда частицами воды, согласно второму уравнению (8.39) будет

$$w_{\text{н}} = - \frac{k_2}{\mu_{\text{н}}} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\text{н}} + \rho_{\text{н}} g \frac{\partial z}{\partial s} \right]. \quad (8.41)$$

Из уравнений (8.40) и (8.41) получаем связь между скоростями фильтрации $(w_{\text{в}})_{\text{н}}$ и $w_{\text{н}}$:

$$\frac{\mu_{\text{в}}}{(k_1)_2} (w_{\text{в}})_{\text{н}} + \rho_{\text{в}} g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\mu_{\text{н}}}{k_2} w_{\text{н}} + \rho_{\text{н}} g \frac{\partial z}{\partial s} = - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\text{н}},$$

откуда

$$(w_{\text{в}})_{\text{н}} = \frac{\mu_{\text{н}}}{\mu_{\text{в}}} \frac{(k_1)_2}{k_2} w_{\text{н}} - \frac{(k_1)_2}{\mu_{\text{в}}} (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{н}}) g \frac{\partial z}{\partial s}.$$

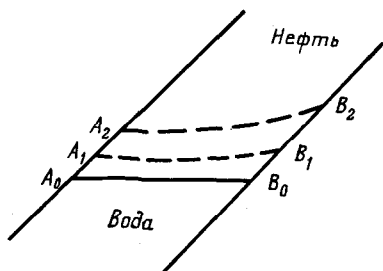


Рис. 8.6. Схема движения водонефтяного контакта в наклонном пласте

Об устойчивости движения границы раздела можно судить по разности скоростей фильтрации:

$$\Delta w = (w_B)_H - w_H = \left[\frac{\mu_H}{\mu_B} \frac{(k_1)_2}{k_2} - 1 \right] w_H - \frac{(k_1)_2}{\mu_B} (\rho_B - \rho_H) g \frac{|\partial z}{\partial s}. \quad (8.42)$$

При $\Delta w \leq 0$ движение границы раздела жидкостей будет устойчивым, при $\Delta w \geq 0$ движение неустойчиво.

Если угол наклона пласта к горизонту обозначить через α , то, очевидно, $\partial z / \partial s = \sin \alpha$.

Тогда условие устойчивости границы раздела (8.42) можно представить в виде

$$\Delta w = \left[\frac{\mu_H}{\mu_B} \frac{(k_1)_2}{k_2} - 1 \right] w_H - \frac{(k_1)_2}{\mu_B} (\rho_B - \rho_H) g \sin \alpha.$$

Обычно $(k_1)_2$ меньше k_2 . Считая в первом приближении, что $(k_1)_2 = k_2$, преобразуем это соотношение к виду

$$\Delta w = \left(\frac{\mu_H}{\mu_B} - 1 \right) w_H - \frac{k_2}{\mu_B} (\rho_B - \rho_H) g \sin \alpha. \quad (8.43)$$

Так как при устойчивом движении границы раздела $\Delta w \leq 0$, то из (8.43) найдем, что при устойчивом движении границы раздела жидкостей скорость фильтрации нефти w_H на границе раздела должна быть

$$w_H \leq \frac{k_2}{\mu_H - \mu_B} (\rho_B - \rho_H) g \sin \alpha.$$

Более строгое исследование рассмотренной задачи проводится методами теории возмущений и гидродинамической устойчивости.

Глава 9

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ

§ 1. СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ НЕФТЕГАЗООТДАЧИ ПЛАСТОВ

Добыча нефти в большинстве случаев происходит при замещении ее в поровом пространстве продуктивного пласта водой или газом как при естественных режимах эксплуатации, так и при искусственных методах поддержания пластового давления заводнением или нагнетанием газа. Разработка газовых месторождений и эксплуатация газовых хранилищ также нередко сопровождается вытеснением газа водой.

Взаимодействие пластовых флюидов между собой и с пористой неоднородной структурой обуславливает капиллярные явления, неполное и неравномерное вытеснение, образование в продуктивном пласте зон совместного течения флюидов, т. е. многофазной фильтрации. Неполнота вытеснения, естественно, снижает коэффициент нефтегазоотдачи пласта.

Жидкости и газы, насыщающие нефтегазоконденсатные пласты, представляют собой смеси углеводородных, а также неуглеводородных компонентов, некоторые из которых способны растворяться в углеводородных смесях. При определенных условиях залегания и режимах разработки нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений в пласте возникает многофазное течение сложной многокомпонентной смеси, при котором между движущимися с различными скоростями фазами осуществляется интенсивный массообмен. Переход отдельных компонентов из одной фазы в другую влечет за собой изменение составов и физических свойств фильтрующихся фаз. Такие процессы происходят, например, при движении газированной нефти и вытеснении ее водой или газом, при разработке месторождений сложного компонентного состава, при вытеснении нефти оторочками активной примеси (полимерными, щелочными и мицеллярными растворами; различными жидкими и газообразными растворителями, применяющимися для увеличения нефтеотдачи). Основой для расчета таких процессов служит теория многофазной многокомпонентной фильтрации, интенсивно развивающаяся в последние годы.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Углеводородные системы могут быть гомо- и гетерогенными. В гомогенной системе все ее части имеют одинаковые физические и химические свойства. Составляющие гомогенной системы (называемые компонентами) «размазаны» по всему пространству и взаимодействуют на молекулярном уровне. Для гетерогенной системы физические и химические свойства в разных точках различны. Гетерогенные системы состоят из фаз. Фаза — это часть системы, которая является гомогенной и отделена от других фаз отчетливыми границами. Смесь воды, нефти и газа в пласте — типичный пример гетерогенной среды.

Главными характеристиками движения многофазной системы являются насыщенность и скорость фильтрации каждой фазы.

Насыщенностью σ_i порового пространства i -й фазой называется доля объема пор ΔV_i , занятая этой фазой в элементарном объеме:

$$\sigma_i = \Delta V_i / \Delta V_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1. \quad (9.2)$$

Таким образом, в n -фазной системе имеется $(n-1)$ независимая насыщенность. В частности, при исследовании фильтрации смеси двух фаз используется лишь одна из насыщенностей, которая обозначается в дальнейшем σ (обычно это насыщенность вытесняющей фазы).

Движение каждой из фаз характеризуется вектором скорости фильтрации $\vec{w}_i$ данной фазы, который (по аналогии со скоростью фильтрации однородной жидкости) определяется как вектор, проекция которого на некоторое направление l равна отношению объемного расхода Q_i данной фазы к площадке Ω_i , перпендикулярной к указанному направлению:

$$(\vec{w}_i)_l = Q_i / \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3)$$

Площадка Ω_i пересекает как твердую, так и подвижные фазы.

При изучении сложных фильтрационных процессов возникает необходимость в построении моделей многофазных (гетерогенных) систем, в которых каждая фаза, в свою очередь, моделируется многокомпонентной гомогенной смесью. При этом между компонентами возможны химические реакции, переход компонентов из одной фазы в другую, процессы адсорбции, диффузии и др. В дальнейшем для простоты и лучшего понимания физической сути происходящих процессов ограничимся рассмотрением двухфазной фильтрации (например, нефти и воды или воды и газа).

При совместном течении двух фаз в пористой среде, по крайней мере, одна из них образует систему, граничащую со скелетом породы и частично с другой жидкостью. Из-за избирательного смачивания твердой породы одной из жидкостей площадь контакта каждой из фаз со скелетом пористой среды значительно превышает площадь контакта фаз между собой. Это позволяет предположить, что каждая фаза движется по занятым ею поровым каналам под действием «своего» давления независимо от других фаз, т. е. так, как если бы она была ограничена только твердыми стенками. При этом, естественно, сопротивление, испытываемое каждой фазой при совместном течении, отлично от того, которое было бы при фильтрации только одной из них. Опыты показывают, что расход каждой фазы растет с увеличением насыщенности и градиента давления. Закон фильтрации каждой из фаз при учете силы тяжести по аналогии с законом Дарси можно записать в следующем виде:

$$\vec{w}_i = - \frac{k}{\mu_i} k_i(\sigma) (\text{grad } p_i - \rho_i \vec{g}). \quad (9.4)$$

Здесь k — абсолютная проницаемость пласта, определяемая по данным о фильтрации однородной жидкости; μ_i — коэффициент динамической вязкости фаз; p_i — давление в фазах; ρ_i — плотность фаз; $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения; $k_i(\sigma)$ — относительные фазовые проницаемости, определяемые экспериментально; σ — насыщенность одной из фаз.

Будем считать для определенности, что $\sigma = \sigma_1$ — насыщенность вытесняющей (или более смачивающей) фазы. Тогда из (9.2) имеем $\sigma_2 = 1 - \sigma$. Понятие относительной фазовой проницаемости $k_i(\sigma)$, введенное в гл. 1, играет важную роль при изучении совместного течения нескольких жидкостей в пористой среде. Мы будем исходить из условия, что относительные проницаемости являются однозначными функциями насыщенностей (см. рис. 1.6).

Характерные особенности многофазной фильтрации связаны также с влиянием поверхностного натяжения. Давления в фазах p_1 и p_2 , вообще говоря, не равны друг другу из-за капиллярных эффектов, приводящих к скачку давления на границе раздела фаз, так что

$$p_2 - p_1 = p_k, \quad (9.5)$$

где p_k — капиллярное давление (или капиллярный скачок).

Большее давление будет на стороне жидкости, не смачивающей твердые зерна породы.

Будем предполагать, как это принято, что капиллярное давление при совместном течении жидкостей совпадает с капиллярным давлением в равновесном состоянии для того же значения насыщенности и при одном и том же направлении ее изменения (увеличении или уменьшении). Поэтому будем считать, что при движении капиллярное давление можно представить в виде известной экспериментальной функции насыщенности (рис. 9.1):

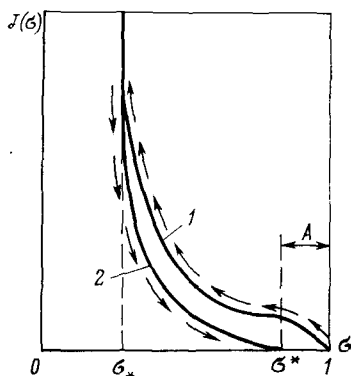


Рис. 9.1. Зависимость капиллярного давления от насыщенности:

1 — кривая вытеснения; 2 — кривая пропитки; A — остаточная насыщенность вытесняемой жидкостью

$$p_k = p_k(\sigma) = \alpha_n \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(\sigma), \quad (9.6)$$

где α_n — коэффициент межфазного поверхностного натяжения; θ — статический краевой угол смачивания между жидкостями и породой; m — пористость; $J(\sigma)$ — безразмерная функция Леверетта.

Процессы многофазной фильтрации идут по-разному в зависимости от характерного времени фильтрационного процесса и от размеров области течения. Капиллярные силы создают в пористой среде перепад давления, величина которого ограничена и не зависит от размеров области фильтрации. Вместе с тем перепад внешнего давления, создающего фильтрационный поток между двумя точками, пропорционален скорости фильтрации и расстоянию между этими точками. Если размеры области малы, то при достаточно малых скоростях фильтрации капиллярные силы могут превзойти внешний перепад давления. Напротив, если рассматривается движение в очень большой области (например, в целой нефтяной или

газовой залежи), то влияние капиллярных сил на распределение давления незначительно и их действие проявляется в локальных процессах перераспределения фаз. Взаимное торможение фаз, благодаря которому относительные фазовые проницаемости не равны соответствующим насыщенностям, обусловлено, прежде всего, капиллярными эффектами. В тех случаях, когда можно пренебречь капиллярным скачком $p_k(\sigma)$, капиллярность косвенно учитывается самим видом опытных кривых относительных проницаемостей $k_i(\sigma)$.

Таким образом, при описании многофазной фильтрации увеличивается число параметров, подлежащих определению. Наряду с неизвестными давлениями p_i в фазах и скоростями фильтрации фаз $\vec{w}_i$ появляются новые неизвестные — насыщенности σ_i и концентрации отдельных компонентов. Это усложняет теоретическое исследование.

§ 3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Будем для простоты рассматривать совместное изотермическое течение двух фаз в однородной пористой среде без фазовых переходов и химических реакций. Система уравнений, описывающая совместную фильтрацию фаз, строится на основе уравнений неразрывности для каждой фазы, уравнений движения (закона фильтрации) и соответствующих замыкающих соотношений.

Уравнения неразрывности

Для вывода уравнения неразрывности рассмотрим баланс вытесняющей однородной жидкости (см. гл. 3). Выделим в фильтрационном потоке элементарный объем ΔV в форме прямоугольного параллелепипеда; $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ (рис. 9.2). Площади его граней, параллельные координатным осям, соответственно равны: $\Delta \omega_x = \Delta y \Delta z$; $\Delta \omega_y = \Delta x \Delta z$; $\Delta \omega_z = \Delta x \Delta y$. Пусть $q_1(x, y, z, t) = \rho_1 w_1$ — вектор массовой скорости фильтрации первой фазы.

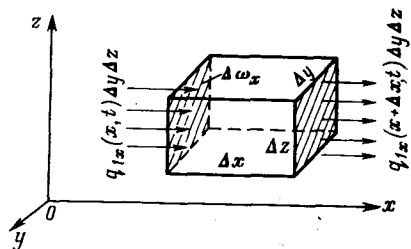


Рис. 9.2. Схема к выводу уравнения неразрывности для i -й фазы

Для сжимаемой фазы ее плотность, масса и насыщенность в рассматриваемом элементарном объеме могут изменяться во време-

мени. Если за некоторый промежуток времени в объем втекает большее количество жидкости, чем вытекает, то ее плотность и насыщенность в этом объеме увеличатся (и наоборот). Исходя из этих соображений, и сформулируем закон сохранения массы. Запишем баланс массы в направлении оси Ox . Через левую грань параллелепипеда (см. рис. 9.2) за промежуток времени Δt втекает масса пер-

$$M_x^+ = q_{1x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t,$$

а через правую грань вытекает масса этой фазы, составляющая

$$M_x^- = q_{1x}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Следовательно, прирост массы фазы в данном элементе объема, вызванный течением через эти две грани, равен $M_x^+ - M_x^-$. Аналогично подсчитывается прирост массы и для других пар граней (соответственно в направлении осей Oy и Oz). Тогда общее изменение массы в рассматриваемом объеме ΔV за время Δt равно:

$$\begin{aligned} M^+ - M^- = & [q_{1x}(x, y, z, t) - q_{1x}(x + \Delta x, y, z, t)] \Delta y \Delta z + \\ & + [q_{1y}(x, y, z, t) - q_{1y}(x, y + \Delta y, z, t)] \Delta z \Delta x + \\ & + [q_{1z}(x, y, z, t) - q_{1z}(x, y, z + \Delta z, t)] \Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned} \quad (9.7)$$

С другой стороны, это изменение массы должно быть сбалансировано за счет изменения насыщенности и плотности массы фазы, находящейся внутри элементарного порового объема

$$\Delta M = (m\sigma\rho_1|_{x, y, z, t+\Delta t} - m\sigma\rho_1|_{x, y, z, t}) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (9.8)$$

где m — пористость среды, которая, вообще говоря, может меняться со временем.

Приравняв выражения (9.7) и (9.8), разделив обе части полученного равенства на $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и Δt , стремящихся к нулю, получаем

$$\frac{\partial q_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{1z}}{\partial z} = - \frac{\partial (m\rho_1\sigma)}{\partial t},$$

откуда, заменяя $\vec{q}_1$ на $\rho_1 \vec{w}_1$, окончательно находим

$$\frac{\partial (\rho_1 w_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 w_{1y})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_1 w_{1z})}{\partial z} = - \frac{\partial (m\rho_1\sigma)}{\partial t},$$

или в векторной форме

$$-\frac{\partial}{\partial t} (m\rho_1\sigma) + \operatorname{div} (\rho_1 \vec{w}_1) = 0. \quad (9.9)$$

Аналогично выводится уравнение сохранения массы для второй фазы:

$$-\frac{\partial}{\partial t} [m\rho_2(1-\sigma)] + \operatorname{div} (\rho_2 \vec{w}_2) = 0. \quad (9.10)$$

Если вытесняемая и вытесняющая фазы — слабосжимаемые упругие жидкости, то влиянием сжимаемости на распределение насыщенности можно пренебречь, так как время перераспределения давления за счет сжимаемости жидкостей, по крайней мере, на два порядка меньше, чем время вытеснения. Отсюда следует, что нестационарные процессы упругого перераспределения давления

заканчиваются в начале процесса вытеснения. В некоторых случаях можно считать несжимаемым и газ в пластовых условиях.

Если жидкости и пористую среду можно предполагать несжимаемыми, то вместо уравнений (9.9) и (9.10) имеем

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0, \quad -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0. \quad (9.11)$$

Уравнения движения для многофазной фильтрации

При записи закона фильтрации будем предполагать, что в любой точке каждая из фаз находится в термодинамически равновесном состоянии. Тогда для течения двухфазной смеси можно ввести в рассмотрение относительные проницаемости $k_i(\sigma)$ и капиллярное давление $p_k(\sigma)$, зависящее только от насыщенности.

Будем рассматривать только однонаправленные процессы фильтрации, не учитывая гистерезисных явлений.

Тогда выполняется закон фильтрации (9.4):

$$\vec{w}_i = - \frac{k}{\mu_i} k_i(\sigma) (\operatorname{grad} p_i - \rho_i \vec{g}), \quad (9.12)$$

а связь между давлениями в фазах определяется равенствами (9.5) и (9.6):

$$p_2 - p_1 = p_k(\sigma) = \alpha_n \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(\sigma). \quad (9.13)$$

Для замыкания полученной системы уравнений необходимо задать связи параметров, характеризующих свойства фаз и пористой среды, с давлением.

Уравнения состояния флюидов

При изотермических условиях фильтрации плотность и вязкость каждой из фаз определяются давлением в данной фазе:

$$\rho_i = \rho_i(p_i), \quad \mu_i = \mu_i(p_i), \quad (i = 1, 2). \quad (9.14)$$

Пласт будем считать недеформируемым.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (9.9), (9.10), (9.12), (9.13) и (9.14) для определения всех неизвестных параметров: насыщенности σ , давления p_i , скорости фильтрации $\vec{w}_i$, плотности ρ_i и вязкости μ_i фаз.

Постановка и решение задач на основе полной системы уравнений фильтрации неоднородных жидкостей затруднительны ввиду сложности самих уравнений, а также формулировки краевых условий, в частности разрыва капиллярных сил на границах пористой среды (так называемых «концевых эффектов»), роль которых недостаточно изучена.

Анализ одномерных двухфазных потоков позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности совместной фильтрации жидкостей.

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Наиболее разработана в настоящее время теория одномерного движения двухфазной жидкости в пористой среде. Основные допущения этой теории состоят в следующем:

жидкости предполагаются несмешивающимися (взаимно нерастворимыми);

жидкости считаются несжимаемыми, а пористая среда — недеформируемой;

фазовые переходы отсутствуют;

коэффициенты вязкости фаз постоянны;

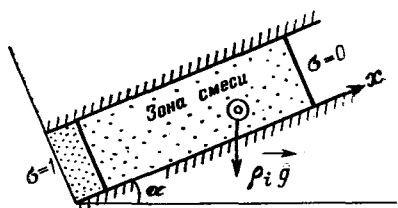
относительные фазовые проницаемости и капиллярное давление являются известными однозначными функциями насыщенности;

гистерезисные явления не учитываются (рассматриваются только однонаправленные процессы).

Полная система уравнений

Основываясь на этих допущениях, выведем полную систему уравнений двухфазной фильтрации в однородной пористой среде с учетом капиллярных и гравитационных сил.

Рис. 9.3. Схема одномерной двухфазной фильтрации с учетом силы тяжести



В случае прямолинейно-параллельного течения вдоль оси x (рис. 9.3) уравнения неразрывности (9.11) для фаз имеют вид

$$-m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial x}. \quad (9.15)$$

Обобщенный закон Дарси (9.12) сводится к уравнениям

$$w_1 = -\frac{k}{\mu_1} k_1(\sigma) \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1 g \sin \alpha \right);$$

$$w_2 = -\frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2 g \sin \alpha \right). \quad (9.16)$$

Здесь α — угол наклона оси x к горизонту (см. рис. 9.3); ρ_1 и ρ_2 — плотности фаз.

Неизвестные характеристики течения σ , w_1 , w_2 , p_1 , p_2 зависят от координаты x и времени t .

При плоскорадиальном (осесимметричном) вытеснении из (9.11) и (9.12) имеем соответственно

$$-m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_1); \quad m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_2), \quad (9.17)$$

$$w_1 = -\frac{k}{\mu_1} k_1(\sigma) \left(\frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_1 g \sin \alpha \right);$$

$$w_2 = -\frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) \left(\frac{\partial p_2}{\partial r} + \rho_2 g \sin \alpha \right), \quad (9.18)$$

где r — текущее расстояние от скважины до произвольной точки пласта. В этом случае искомые функции зависят от r и t .

Уравнения (9.15), (9.16) или (9.17), (9.18) с учетом (9.13) образуют замкнутые системы (соответственно для случаев линейного и радиального течений), являющиеся основой для решения задач вытеснения одной жидкости другой. Характерной особенностью этих систем является то, что их можно свести к одному уравнению для насыщенности. Знание распределения насыщенности в пласте позволяет проанализировать эффективность вытеснения нефти или газа несмешивающейся с ней жидкостью. Остановимся на двух наиболее изученных моделях двухфазной фильтрации.

Модель Рапопорта—Лиса

Приведем вывод уравнения для насыщенности из полной системы уравнений. Рассмотрим сначала случай прямолинейно-параллельного течения.

Сложив уравнения неразрывности (9.15) для обеих фаз, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (w_1 + w_2) = 0,$$

откуда находим

$$w_1 + w_2 = w(t). \quad (9.19)$$

Равенство (9.19) показывает, что суммарная скорость $w(t)$ двухфазного потока (а значит и суммарный расход фаз $Q(t) = w(t) ah$, где a и h — ширина и толщина пласта) не зависит от координаты x , т. е. является либо постоянной, либо известной функцией времени. Это является следствием предположения о несжимаемости фаз. Подставив в (9.19) значения скоростей фаз (w_1 и w_2) из (9.16), находим

$$w(t) = -k \left[\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] -$$

$$-k \left[\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1} \rho_1 + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2} \rho_2 \right] g \sin \alpha.$$

Исключаем отсюда градиент давления $\partial p_2 / \partial x$ с помощью равенства (9.13), продифференцированного по x :

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_K(\sigma)}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + p'_K \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

$$(p'_K = dp_K/d\sigma).$$

После преобразований имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = - \frac{\omega(t) + \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) p'_K \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{k}{\mu_1} k_1(\sigma) \rho_1 + \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) \rho_2 \right) g \sin \alpha}{\frac{k}{\mu_1} k_1(\sigma) + \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma)} \quad (9.20)$$

Подставляя это равенство в первое уравнение (9.16), будем иметь

$$w_1 = \left[\omega(t) + \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) \left(p'_K(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) \right] f(\sigma), \quad (9.21)$$

где $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ и введено обозначение

$$f(\sigma) = \frac{k_1(\sigma)}{k_1(\sigma) + \mu_0 k_2(\sigma)}, \quad \mu_0 = \mu_1 / \mu_2. \quad (9.22)$$

Функция $f(\sigma)$, как мы убедимся в дальнейшем, играет важную роль при гидродинамических расчетах двухфазных фильтрационных потоков.

Используя выражение (9.21) и уравнение неразрывности (9.15) для первой фазы, окончательно получаем уравнение для определения насыщенности:

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \omega(t) \frac{\partial f(\sigma)}{\partial x} + \frac{k}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(\sigma) \left(p'_K \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) f(\sigma) \right] = 0. \quad (9.23)$$

Считая суммарную скорость фильтрации $\omega(t)$ постоянной ($\omega(t) = \omega = \text{const}$), введем для удобства безразмерные независимые переменные

$$\xi = x/L, \quad \tau = \omega t / (mL), \quad (9.24)$$

где L — характерный линейный размер (расстояние до эксплуатационной галереи, так что mL — «поровый объем» пласта). Величину ξ можно рассматривать как объем пласта между начальным сечением и сечением x , выраженный в долях порового объема, а величину τ — как безразмерный объем жидкости, закачанной в пласт к моменту времени t .

Тогда с учетом выражения (9.13) для капиллярного давления, уравнение (9.23) с учетом (9.24) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} + A_g \frac{\partial}{\partial \xi} [k_2(\sigma) f(\sigma)] + \\ + A_k \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (9.25)$$

где A_g и A_k — безразмерные параметры, определяемые из равенств

$$A_g = \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\mu_2 \omega}; \quad A_k = \frac{\alpha_{II} \cos \theta \sqrt{mk}}{\mu_2 \omega L}. \quad (9.26)$$

Аналогично получается уравнение для насыщенности σ при радиальном вытеснении. Исходя из уравнений (9.17) и (9.18), получаем последовательно

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \frac{q(t)}{r}, \quad (9.27)$$

где $q(t) = Q(t)/(2\pi h)$ — «удельный» суммарный расход фаз;

$$\omega_1 = \left[\frac{q(t)}{r} + \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) \left(p'_k \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) \right] f(\sigma) \quad (9.28)$$

и окончательное уравнение для насыщенности

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{q(t)}{r} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \times \\ \times \left[r \frac{k}{\mu_2} k_2(\sigma) f(\sigma) \left(p'_k \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \Delta \rho g \sin \alpha \right) \right] = 0. \quad (9.29)$$

Заметим, что согласно (9.27) суммарная скорость фаз ω в этом случае не сохраняется, но сохраняется суммарный объемный расход $Q(t)$.

Вводя безразмерные переменные при $q(t) = q = \text{const}$

$$\xi = r^2/(2R_k^2), \quad \tau = qt/(mR_k^2) \quad (9.30)$$

(здесь R_k — расстояние от нагнетательной до добывающей скважины), имеющие физический смысл, аналогичный (9.24), приведем уравнение (9.29) к следующему виду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} - \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} + \bar{A}_g \frac{\partial}{\partial \xi} [k_2(\sigma) f(\sigma) \sqrt{\xi}] + \\ + \bar{A}_k \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) \xi \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (9.31)$$

где

$$\bar{A}_g = \frac{\sqrt{2} k \Delta \rho g \sin \alpha R_k}{\mu_2 q}; \\ \bar{A}_k = \frac{2 \alpha_{II} \cos \theta \sqrt{mk}}{\mu_2 q}. \quad (9.32)$$

Безразмерные параметры (9.26) и (9.32) характеризуют соответственно отношение силы тяжести (параметры A_g и $\bar{A}_g$) и капиллярных сил (A_k и $\bar{A}_k$) к силам вязкости. Значимость гравитационных и капиллярных эффектов нетрудно оценить при рассмотрении конкретных фильтрационных процессов.

Если рассматривается вытеснение в пределах всего пласта и темпы вытеснения достаточно велики, то значения параметра $\bar{A}_k$ (или A_k) будут малы, т. е. $\bar{A}_k \ll 1$ и капиллярными силами можно пренебречь.

Силой тяжести можно пренебречь, если $\bar{A}_g \ll 1$, что имеет место при условии

$$\Delta\rho \sin \alpha \ll \mu_2 Q / 2\pi k h R_k.$$

Для прямолинейно-параллельного вытеснения уравнение (9.25) без учета силы тяжести ($A_g = 0$) было впервые получено в 1953 г. американскими исследователями Л. Рапопортом и В. Лисом. Поэтому модели двухфазной фильтрации с учетом капиллярных эффектов называют обычно моделями Рапопорта—Лиса.

Уравнения (9.25) и (9.31) представляют собой сложные нелинейные уравнения параболического типа второго порядка. Точные решения этих уравнений получены лишь для некоторых сравнительно простых частных случаев. Получены инвариантные решения (типа волны, движущейся с постоянной скоростью, и автомодельные), а также некоторые численные решения на ЭВМ.

Начальные и граничные условия

При решении конкретных задач для уравнений (9.25) или (9.31) должны быть сформулированы соответствующие граничные и начальные условия. В качестве начального условия задаются значения неизвестной функции σ в зависимости от пространственных координат (x или r) при $t = 0$. Можно считать, что при $t = 0$ насыщенность всюду постоянна (например, $\sigma = \sigma_*$).

В случае вытеснения нефти водой естественно задать на входе в пласт (нагнетательная скважина или галерея) расход закачиваемой воды и равенство нулю скорости фильтрации нефти; из последнего условия вытекает (см. формулу (9.12)), что $k_2 = 0$, следовательно, на этой поверхности $\sigma = \sigma^*$.

На выходе из пласта ($\xi = 1$) возможен два варианта граничных условий.

1. Можно пренебречь градиентом капиллярного давления по сравнению с градиентом давления в фазах, т. е. считать, что $\partial p_k / \partial \xi = 0$ при $\xi = 1$, откуда следует, что

$$\partial \sigma / \partial \xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (9.33)$$

2. Экспериментально установлено, что вода не вытекает из гидрофильного пласта, а накапливается в выходном сечении, пока

ее насыщенность не достигнет значения σ^* . В момент достижения значения σ^* вода прорывается из пласта с сохранением на выходе этого значения насыщенности. Это явление получило название концевго эффекта. Математически оно приводится к сложному нелинейному граничному условию на выходе.

Модель Баклея—Левверетта

Если капиллярными силами можно пренебречь, то давления в фазах одинаковы: $p_1 = p_2 = p$. Тогда, полагая в (9.25) и (9.31), $A_k = \bar{A}_k = 0$, получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для определения насыщенности:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} + A_n \frac{\partial}{\partial \xi} [k_2(\sigma) f(\sigma) \xi^n] = 0, \quad (9.34)$$

где $n = 0, 1/2$ — соответственно для случаев прямолинейно-параллельного и радиального вытеснения; коэффициенты A_n равны соответственно величинам A_g и $\bar{A}_g$ в соотношениях (9.26) и (9.32). Уравнение (9.34) принадлежит к классу квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка, которые обычно решаются методом характеристик и имеют свои существенные особенности, при решении по сравнению с параболическими уравнениями (9.25), (9.31).

Без учета силы тяжести ($A_n = 0$ в (9.34)) двухфазная фильтрация для случая прямолинейно-параллельного вытеснения рассматривалась С. Баклеем и М. Леввереттом в 1942 г., а позже независимо от них А. М. Пирвердяном, исследовавшим также случай более общего закона фильтрации при двухфазном течении.

Задачи двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил, основанные на решении уравнений типа (9.34) при соответствующих начальном и граничных условиях, известны как задачи (модель) Баклея—Левверетта. Задачи вытеснения такого типа в одномерной постановке изучены достаточно полно.

§ 5. ЗАДАЧА БАКЛЕЯ—ЛЕВВЕРЕТТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

В случае одномерного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей в условиях, когда можно пренебречь капиллярным давлением, а также влиянием силы тяжести, процесс вытеснения допускает простое математическое описание.

Для обоих случаев одномерного потока (прямолинейно-параллельного и плоскорадиального) это приводит к классической в теории вытеснения модели Баклея—Левверетта, описываемой однотипным уравнением для насыщенности σ вытесняющей фазы I, которое получается из (9.34) при гравитационном параметре $A_n = 0$ и имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = 0. \quad (9.35)$$

Здесь использовано преобразование

$$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} = \frac{df}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \xi}.$$

Безразмерные независимые переменные ξ и τ , определяемые из равенств (9.24) и (9.30), можно представить в единой форме для обоих одномерных потоков и обобщить на случай, когда суммарный «удельный» расход q фаз зависит от времени. Имеем

$$\xi = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{L} \right)^v; \quad \tau = \int_0^t \frac{q(t')}{mL^v} dt', \quad (9.36)$$

где L — характерный линейный размер; $v = 1, 2$ — соответственно для линейного и радиального течений, причем в последнем случае пространственная координата $x = r$ (r — расстояние от точки пласта до скважины), а $L = R_k$; $q(t) = \omega(t)$ или $q(t) = Q(t)/(2\pi h)$ соответственно для линейного и радиального вытеснения; $\omega(t)$ — суммарная скорость фильтрации фаз; $Q(t)$ — суммарный объемный расход; m и h — соответственно коэффициент пористости и толщина пласта.

Хотя переменные ξ и τ имеют смысл безразмерных объемов (см. §4), будем для простоты называть их соответственно пространственной и временной переменными. Напомним, что функция $f(\sigma)$, входящая в уравнение (9.35), определяется через относительные фазовые проницаемости $k_i(\sigma)$ из равенства (9.22).

В рассматриваемом случае $f(\sigma)$, называемая функцией Баклея—Левверетта или функцией распределения потоков фаз, имеет простой физический смысл. Действительно, из (9.21) и (9.28) при $\Delta p = 0$ и $p_k'(\sigma) = 0$ находим для скорости фильтрации ω_1 вытесняющей фазы соответственно в случае прямолинейно-параллельного и радиального вытеснения

$$\omega_1 = f(\sigma) \omega(t); \quad \omega_1 = f(\sigma) \frac{q(t)}{r}, \quad (9.37)$$

а тогда в соответствии с (9.19) имеем

$$\omega_2 = [1 - f(\sigma)] \omega.$$

Отсюда следует, что $f(\sigma)$, представляющая в силу (9.37) отношение скорости фильтрации ω_1 вытесняющей фазы к суммарной скорости ω , равна объемной доле потока вытесняющей жидкости (воды) в суммарном потоке двух фаз.

Функция Баклея—Левверетта определяет полноту вытеснения и характер распределения насыщенности по пласту. Задачи повышения нефте- и газоконденсатотдачи в значительной степени сводятся к применению таких воздействий на пласт, которые в конечном счете изменяют вид функции $f(\sigma)$ в направлении увеличения полноты вытеснения.

Типичные графики функции $f(\sigma)$ и ее производной $f'(\sigma)$ изображены на рис. 9.4. С ростом насыщенности $f(\sigma)$ монотонно воз-

Рис. 9.4. Типичные графики функции Баклея—Левверетта и ее производной

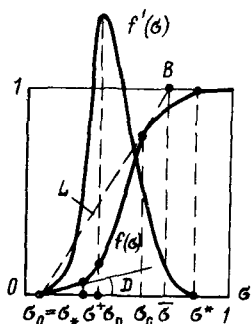
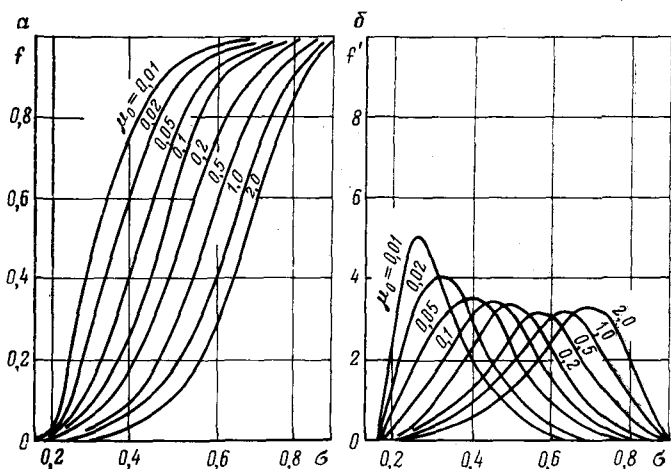


Рис. 9.5. Графики функции Баклея—Левверетта (а) и ее производной (б) для различных отношений вязкостей $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$



растает от 0 до 1. Характерной особенностью графика $f(\sigma)$ является наличие точки перегиба σ_n , участков вогнутости и выпуклости, где вторая производная $f''(\sigma)$ соответственно больше и меньше нуля. Эта особенность в большой степени определяет специфику фильтрационных задач вытеснения в рамках модели Баклея—Левверетта. Зависимость функций $f(\sigma)$ и $f'(\sigma)$ от отношения вязкостей фаз ($\mu_0 = \mu_1/\mu_2$) показана на рис. 9.5.

Для описания и расчета процесса вытеснения к уравнению (9.35) нужно добавить начальное и граничное условия

$$\begin{aligned} \text{при } \tau = 0 \quad \sigma(\xi, 0) &= \varphi(\xi), \quad \xi > 0; \\ \text{при } \xi = 0 \quad \sigma(0, \tau) &= \psi(\tau), \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Первое из условий (9.38) означает, что в момент времени $\tau = 0$ (до начала процесса вытеснения) в пласте имеется некоторое известное распределение насыщенности σ вытесняющей фазы, определяемое функцией $\varphi(\xi)$. Согласно второму условию (9.38), при $\tau > 0$ в пласт через нагнетательную скважину или галерею, расположенную на «линии» $\xi = 0$, закачивается вытесняющая жидкость,

насыщенность которой при $\xi = 0$ меняется со временем по заданному закону $\psi(\tau)$. В ряде случаев можно считать, что

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \sigma_0 = \text{const} & \text{при} & \tau = 0; \\ \psi(\tau) &= \sigma^0 = \text{const} & \text{при} & \xi = 0.\end{aligned}\quad (9.39)$$

Это случай кусочно-постоянных начальных данных, имеющий важное значение для практических приложений. Величина начальной водонасыщенности σ_0 влияет на процесс заводнения и определяет структуру зоны вытеснения.

Построение решения

Для иллюстрации построения решения уравнения (9.35) при произвольном начальном распределении насыщенности (9.38) введем систему координат (ξ, τ, σ) (рис. 9.6). На плоскости (ξ, σ) при $\tau = 0$

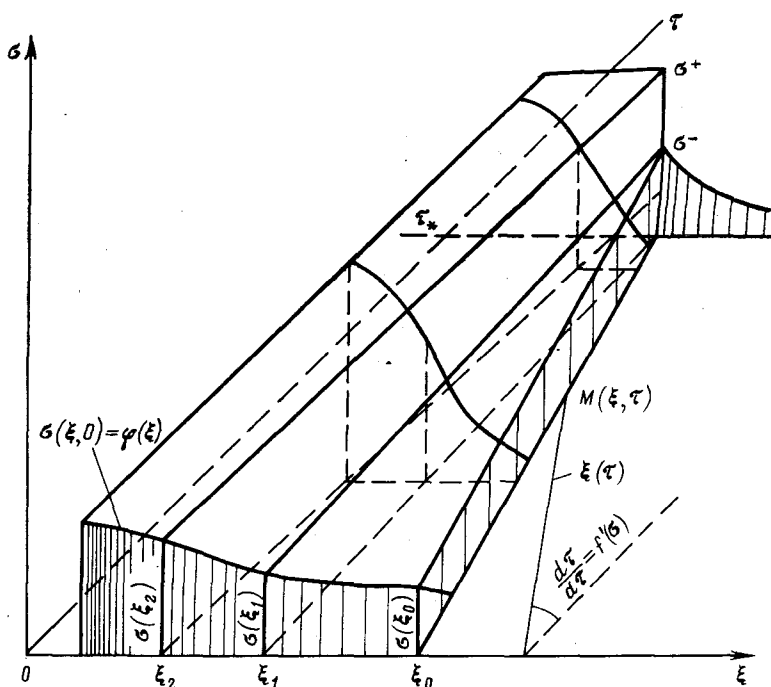


Рис. 9.6. Схема к построению решения задачи двухфазной фильтрации

изобразим начальное распределение насыщенности в пласте $\sigma(\xi, 0) = \varphi(\xi)$. Задача состоит в построении функции $\sigma(\xi, \tau)$ для последующих моментов времени $\tau > 0$, т. е. требуется рассчитать деформацию во времени начального распределения насыщенности в соответствии с уравнением (9.35).

Пусть $\xi = \xi(\tau)$ — некоторая линия на плоскости переменных (ξ, τ) (см. рис. 9.6). Тогда значения насыщенности σ вдоль этой линии можно получить по формуле

$$\sigma = \sigma(\xi(\tau), \tau). \quad (9.40)$$

Производная по «времени» τ от насыщенности вдоль этой линии равна

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} \frac{d\xi}{d\tau}, \quad (9.41)$$

где $d\xi/d\tau$ есть тангенс угла наклона рассматриваемой линии $\xi(\tau)$ к оси τ .

Сравнивая выражение (9.41) с левой частью уравнения (9.35), видим, что вдоль линий $\xi(\tau)$ плоскости (ξ, τ) , для которых выполняется равенство

$$d\xi/d\tau = f'(\sigma), \quad (9.42)$$

производная $d\sigma/d\tau$ равна нулю, т. е.

$$d\sigma/d\tau = 0 \quad (9.43)$$

вдоль линий $\xi = \xi(\tau)$, определяемых из (9.42). Это означает, что насыщенность σ остается постоянной вдоль этих линий. Итак, если кривая $\xi = \xi(\tau)$ удовлетворяет уравнению (9.42), то значения насыщенности σ на этой кривой не меняются. Если рассматриваемая кривая выходит из начальной точки $(\xi_0, 0)$, то значение σ на этой кривой остается равным начальному значению $\sigma(\xi, 0) = \varphi(\xi_0)$ (см. рис. 9.6). Таким образом, кривые $\xi(\tau)$, удовлетворяющие уравнению (9.42), являются траекториями распространения постоянных значений насыщенности. В рассматриваемом случае эти траектории легко определяются. Действительно, поскольку $\sigma = \text{const}$ вдоль каждой кривой $\xi(\tau)$, то остается постоянной вдоль этой кривой и величина $f'(\sigma)$. Тогда в результате интегрирования уравнения (9.42) находим

$$\xi = f'(\sigma)\tau + C$$

(здесь C — константа интегрирования), т. е. линии $\xi(\tau)$ являются прямыми. Если прямые выходят из начальных точек $(\xi_0, 0)$, то $\xi = \xi_0$ при $\tau = 0$, т. е. $C = \xi_0$, и окончательно можно записать

$$\xi = f'(\sigma)\tau + \xi_0. \quad (9.44)$$

Тангенс угла наклона этих прямых к оси τ равен $f'(\sigma)$, т. е. зависит от насыщенности в точке (ξ, τ) .

Прямые линии (9.44), на которых насыщенность сохраняет постоянное значение, называются характеристиками уравнения (9.35), а система обыкновенных дифференциальных уравнений (9.42), (9.43) — характеристической системой для уравнения в частных производных (9.35).

Теперь можно построить решение уравнения (9.35) при начальном условии (9.38). Пусть $M(\xi, \tau)$ — произвольная точка плоскости (ξ, τ) (см. рис. 9.6). Тогда имеем:

$$\sigma_M = \sigma(\xi, \tau) = \sigma(\xi_0, 0) = \varphi(\xi_0),$$

где ξ , ξ_0 и τ связаны уравнением (9.44). Исключая отсюда ξ_0 , находим

$$\sigma(\xi, \tau) = \varphi(\xi - f'(\sigma)\tau). \quad (9.45)$$

Формула (9.45) дает неявное выражение насыщенности σ через переменные ξ и τ .

Это выражение можно представить в другой форме, если считать, что в равенстве (9.44) $\xi_0 = \xi_0(\sigma)$ есть начальное распределение насыщенности в неявной форме, т. е. первое равенство (9.38) разрешенное относительно ξ . Тогда решение (9.45) можно представить в виде

$$\xi = f'(\sigma)\tau + \xi_0(\sigma). \quad (9.46)$$

Физической особенностью модели двухфазного вытеснения Баклея—Леверетта является зависимость скорости $d\xi/d\tau$ распространения того или иного значения насыщенности от величины этой насыщенности. Это явление называется дисперсией волн. Действительно, в формуле (9.42) правая часть $f'(\sigma)$ зависит от σ . Эта зависимость изображена на рис. 9.4, из которого видно, что при $0 \leq \sigma \leq \sigma_n$ большие насыщенности распространяются с большими скоростями ($f'(\sigma)$ возрастает), а при $\sigma_n < \sigma \leq 1$ скорость распространения постоянного значения насыщенности начинает уменьшаться ($f'(\sigma)$ убывает).

Из начального распределения $\sigma(\xi, 0) = \varphi(\xi)$, изображенного на рис. 9.6, видно, что с течением времени τ наклон профиля распределения насыщенности (9.45) становится круче, поскольку большие значения насыщенности «догоняют» меньшие значения. Поэтому характеристики (9.44), несущие различные значения насыщенности, могут в некоторый момент τ_* пересечься, и решение (9.45) становится неоднозначным. Поле характеристик (9.44) для этого случая и деформация профиля насыщенности с течением времени в плоскости (ξ, σ) показаны соответственно на рис. 9.7, 9.8. Произошло «опрокидывание» волны насыщенности и возник разрыв (скачок) непрерывности функции $\sigma(\xi, \tau)$. Начиная с момента τ_* , когда касательная к кривой $\sigma(\xi)$ становится вертикальной (см. рис. 9.8), возникает и распространяется скачок насыщенности (ξ_c — положение скачка для последующего момента времени). С момента τ_* график $\sigma(\xi)$ становится в некоторой своей части неоднозначным, что показано участком кривой 1—2—3—4—5 на рис. 9.8. В зоне этого участка одному и тому же значению ξ соответствуют три значения насыщенности σ : σ_1 , σ_2 и σ_3 , что физически абсурдно, так как в каждом сечении пласта в каждый момент времени может существовать только одна вполне определенная насыщенность. Такая неоднозначность и устраняется введением

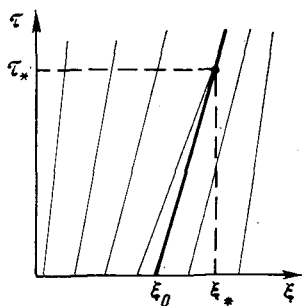


Рис. 9.7. Поле характеристик для уравнения Баклея—Лeverетта

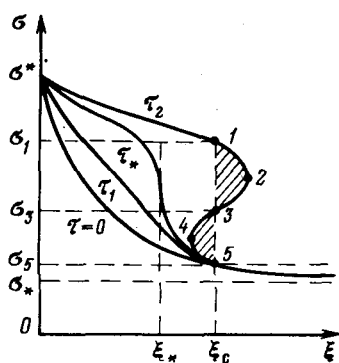


Рис. 9.8. График распределения насыщенности при вытеснении жидкости:

$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_* < \tau_2$; τ_* — момент образования скачка насыщенности

скачка насыщенности (на рис. 9.8 величина скачка определяется отрезком 1—3—5).

Подчеркнем, что условием образования разрыва является пересечение характеристик (9.44). В области, где характеристики не пересекаются, решение непрерывно и определяется формулой (9.45).

Рассмотрим отдельно случай кусочно-постоянных начальных данных, когда справедливо условие (9.39), т. е. начальная насыщенность $\sigma(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sigma_0$ постоянна во всем пласте при $\tau = 0$. Тогда, разрешая это начальное распределение относительно ξ , находим

$$\xi_0(\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma > \sigma_0$$

и $\xi_0(\sigma)$ не определено при $0 < \sigma < \sigma_0$. В этом случае уравнение (9.35) имеет особые решения вида

$$\xi = f'(\sigma)\tau, \quad \sigma > \sigma_0, \quad (9.47)$$

которые получаются из (9.46) при $\xi_0(\sigma) = 0$.

Характеристики (9.44), соответствующие этому случаю, представляют собой пучок прямых, сходящихся в одной точке $(0, 0)$ плоскости (ξ, τ) . По аналогии с газовой динамикой решение (9.47) называют центрированной волной разрежения.

Дальнейшее построение решения уравнения (9.35) требует дополнительного анализа так называемых разрывных (обобщенных) решений.

Условия на скачках насыщенности

Положение скачков (разрывов) насыщенности заранее неизвестно и должно быть найдено в зависимости от времени из решения задачи. Оказывается, что значения насыщенности σ^- и σ^+ до и после разрыва соответственно не могут быть произвольными, а связаны

друг с другом и скоростью разрыва определенными соотношениями. Несмотря на то что дифференциальное уравнение (9.35), выражающее баланс массы каждой фазы, в точках образовавшегося разрыва не имеет смысла, сам баланс, естественно, должен выполняться. Обозначим скорость движения разрыва через D , т. е.

$$D = d\xi_c/d\tau,$$

где $\xi_c(\tau)$ — закон движения скачка насыщенности.

Рассмотрим условия сохранения массы каждой из фаз при прохождении поверхности разрыва через некоторый элемент объема пористой среды (рис. 9.9), вырезанный в направлении движения фаз, т. е. по нормали к поверхности разрыва. Пусть в некоторый

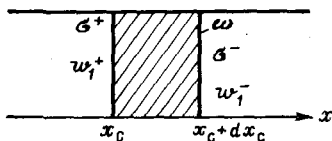


Рис. 9.9. Схема к выводу условий на скачке

момент времени t разрыв имел координату x_c , а через малый промежуток времени dt переместился в положение $x_c + dx_c$. Поток первой фазы через сечение ω , параллельное плоскости разрыва, за время dt равен

$$(w_1^+ - w_1^-) \omega dt.$$

Условие сохранения массы первой фазы в физической системе координат (x, t) примет тогда вид

$$m \frac{dx_c}{dt} (\sigma^+ - \sigma^-) \omega dt = (w_1^+ - w_1^-) \omega dt,$$

откуда

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{w_1^+ - w_1^-}{m(\sigma^+ - \sigma^-)}, \quad (9.48)$$

где dx_c/dt — скорость скачка в системе координат (x, t) . Уравнение сохранения массы второй фазы также сводится к (9.48), поскольку суммарная скорость фильтрации ω сохраняется.

$$w_1^+ + w_2^+ = w_1^- + w_2^-.$$

Учитывая, что в соответствии с (9.37)

$$w_1^{(\pm)} = f(\sigma) \frac{q(t)}{x^{v-1}}$$

(здесь $v = 1, 2$ соответственно для линейного и радиального вытеснения), запишем (9.48) в виде

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{q(t)}{mx^{v-1}} \frac{f(\sigma^+) - f(\sigma^-)}{\sigma^+ - \sigma^-}.$$

Переходя теперь в этом равенстве к переменным по формулам (9.36), получаем условие на скачке

$$D = \frac{d\xi_c}{d\tau} = \frac{f(\sigma^+) - f(\sigma^-)}{\sigma^+ - \sigma^-}. \quad (9.49)$$

Равенство (9.49) имеет простой геометрический смысл: скорость разрыва D равна тангенсу угла наклона к оси σ хорды, соединяющей точки кривой $f(\sigma)$, имеющие абсциссы σ^+ и σ^- (см. рис. 9.4, $\sigma^- = \sigma_0$), в то время как скорость распространения насыщенности на скачке определяется тангенсом угла наклона касательной $C\sigma_0$ к этой же кривой.

Определение положения скачка и насыщенности на скачке

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее изменение насыщенности на скачке в зависимости от «времени» τ . Для насыщенности $\sigma_c = \sigma^+$ на скачке (ее называют фронтовой насыщенностью), как и для любого значения σ , выполняется соотношение (9.46):

$$\xi_c = f'(\sigma_c) \tau + \xi_0(\sigma_c), \quad (9.50)$$

откуда следует, что $\sigma_c = \sigma^+$, вообще говоря, изменяется с изменением времени τ , т. е. $\sigma_c = \sigma_c(\tau)$.

Дифференцируя (9.50) по τ , находим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_c}{d\tau} &= f'(\sigma_c) + \tau f''(\sigma_c) \frac{d\sigma_c}{d\tau} + \xi'_0(\sigma_c) \frac{d\sigma_c}{d\tau} = \\ &= f'(\sigma_c) + [f''(\sigma_c) \tau + \xi'_0(\sigma_c)] \frac{d\sigma_c}{d\tau}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Приравнивая выражения (9.49) и (9.51) для скорости скачка насыщенности D , получаем дифференциальное уравнение для определения σ :

$$\frac{d\sigma_c}{d\tau} = \frac{f(\sigma_c) - f(\sigma^-) - f'(\sigma_c)(\sigma_c - \sigma^-)}{(\sigma_c - \sigma^-)[f''(\sigma_c) \tau + \xi'_0(\sigma_c)]}. \quad (9.52)$$

Здесь осталось еще неизвестным значение насыщенности σ^- перед разрывом. Оно определяется из условия пересечения характеристик (9.44) на разрыве: $\xi(\sigma^-) = \xi(\sigma_c) = \xi_c$, так что в соответствии с равенством (9.46) имеем:

$$f'(\sigma_c) \tau + \xi_0(\sigma_c) = f'(\sigma^-) \tau + \xi_0(\sigma^-). \quad (9.53)$$

Теперь уравнение (9.52) можно проинтегрировать и определить насыщенность на скачке $\sigma_c(\tau)$, если задать ее начальное значение. Начальные значения σ_c и τ_* определяются в той точке ξ_* (см. рис. 9.8), где впервые возникает скачок (вертикальная касательная к кривой $\sigma(\xi)$), т. е. производная $d\xi/d\sigma$, вычисленная по формуле (9.44), впервые обращается в нуль. Определив $\sigma_c = \sigma_c(\tau)$, из равенства (9.50) находим закон движения скачка насыщенности $\xi_c = \xi_c(\tau)$.

Рассмотрим так называемый стационарный скачок, по обе стороны которого значения $\sigma_c = \sigma^+$ и $\sigma^- = \sigma_0$ постоянны. Тогда, $d\sigma_c/d\tau = 0$, и из (9.52) находим

$$\frac{f(\sigma_c) - f(\sigma_0)}{\sigma_c - \sigma_0} = f'(\sigma_c). \quad (9.54)$$

Это условие, полученное впервые в работе Баклея и Леверетта, означает, что скорость распространения скачка D равна скорости распространения насыщенности σ_c на скачке, т. е. $f'(\sigma_c)$. Равенство (9.54) имеет простой геометрический смысл. Оно представляет собой уравнение касательной, проведенной из точки $(\sigma_0, f(\sigma_0))$, к кривой $f(\sigma)$, где σ_c — абсцисса точки касания (см. рис. 9.4). Это дает простой графический способ определения фронтовой насыщенности по известной функции Баклея—Леверетта $f(\sigma)$, который в некоторых случаях может заменить решение трансцендентного уравнения (9.54).

Рассмотрим теперь случай постоянной начальной насыщенности, соответствующий условию (9.39): $\sigma(\xi, 0) = \varphi(\xi) = \sigma_0$ при $\tau = 0$. В этом случае решение задачи имеет вид (9.47).

Пусть σ_0 расположено левее точки σ_n перегиба графика функции $f(\sigma)$ (см. рис. 9.4), тогда возникает скачок насыщенности. При этих условиях переменные в уравнении (9.52) разделяются, и его можно проинтегрировать. Полагая $\sigma^- = \sigma_0$, получим в результате интегрирования условие (9.54). Таким образом, если при постоянной начальной насыщенности возникает разрыв, то на разрыве в любой момент времени τ выполняется условие (9.54), т. е. в этом случае скачок является стационарным.

Обобщая изложенное, сформулируем теперь задачу об отыскании решений квазилинейного дифференциального уравнения (9.35) в общем случае. Требуется найти функцию $\sigma(\xi, \tau)$, удовлетворяющую начальному и граничному условиям (9.38) или (9.39), непрерывную и удовлетворяющую уравнению (9.35) в каждой из областей I и II (рис. 9.10), заполненных непересекающимися характеристиками, и условию (9.49) на разрыве $\xi_c = \xi_c(\tau)$, связывающему предельные значения σ^+ и σ^- насыщенности и скорости D этого разрыва.

Вообще говоря, к перечисленным условиям необходимо добавить еще одно — определяющее так называемую устойчивость разрывного решения. Для устойчивости скачка необходимо, чтобы в любой точке кривой $\xi_c(\tau)$ пересекались две характеристики уравнения (9.35). При этом любая характеристика, скорость которой $f'(\sigma)$ равна скорости скачка D , считается приходящей на скачок. Это условие для класса рассматриваемых задач с кусочно-постоянными данными (9.39) можно сформулировать следующим образом.

Пусть L — прямая на плоскости $(\sigma, f(\sigma))$, соединяющая точки (σ^-, f^-) и (σ^+, f^+) . Здесь, как и ранее, σ^- — значение насыщенности «до» разрыва (правосторонний предел по отношению к изменению ξ), а σ^+ — значение насыщенности «после» разрыва (левосторонний предел); $f^- = f(\sigma^-)$ и $f^+ = f(\sigma^+)$ соответственно (см.

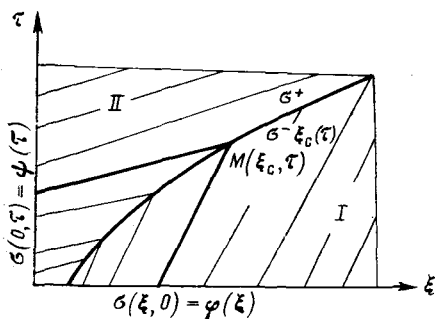


Рис. 9.10. Диаграмма для построения решения обобщенной задачи Баклея—Лeverетта

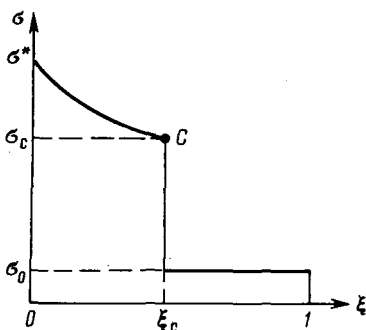


Рис. 9.11. Кривая распределения водонасыщенности в пласте при выполнении условий (9.39) и $\sigma_0 < \sigma_n$

рис. 9.4). Тогда вдоль допустимого разрыва кривая $f(\sigma)$ на интервале (σ^-, σ^+) располагается ниже прямой L , если $\sigma^- < \sigma^+$, и выше прямой L , если $\sigma^- > \sigma^+$.

Основываясь на предыдущих результатах, можно записать решение задачи Баклея—Лeverетта для простых кусочно-постоянных условий вида (9.39).

Пусть σ_0 заключена в интервале $(0, \sigma_n)$, где σ_n — точка перегиба функции Баклея—Лeverетта (см. рис. 9.4). Это означает, что в начальный момент пласт обводнен слабо (либо насыщен только нефтью, если $\sigma_0 = 0$). Будем считать, что в пласт закачивается чистая вода и на входе $\xi = 0$ водонасыщенность $\sigma^0 = \sigma^*$ в любой момент времени:

$$\sigma = \sigma^* \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \tau > 0. \quad (9.55)$$

При этих условиях на участке $0 < \xi \leq \xi_c$ насыщенность непрерывно убывает от σ^* до σ_c в соответствии с выражением (9.47). Чтобы найти значение насыщенности на скачке σ_c , нужно провести касательную к кривой $f(\sigma)$ из точки $(\sigma_0, f(\sigma_0))$ на рис. 9.4. Абсцисса точки касания определит значение насыщенности на скачке σ_c (см. формулу (9.54)). Значение координаты скачка насыщенности в момент времени τ найдется из формулы (9.47):

$$\xi_c = f'(\sigma_c) \tau. \quad (9.56)$$

Для значений $\xi > \xi_c$, т. е. впереди фронта, насыщенность постоянна и равна начальной: $\sigma = \sigma_0$.

Итак, решение задачи о вытеснении нефти водой из слабо обводненного пласта при условиях (9.39) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* & \text{при} & \quad \xi = 0, \quad \tau > 0; \\ f'(\sigma) &= \xi/\tau & \text{при} & \quad 0 < \xi \leq f'(\sigma_c) \tau = \xi_c. \\ \sigma &= \sigma_0 & \text{при} & \quad f'(\sigma_c) \tau < \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Распределение $\sigma(\xi)$ в момент τ , когда фронт не достиг галереи, показано на рис. 9.11.

Отметим, что в соответствии с рис. 9.5 с ростом отношения вязкостей μ_0 кривая $f(\sigma)$ сдвигается вправо и эффективность вытеснения возрастает. Например, применение пен и загустителей, повышающих вязкость нагнетаемой воды, может значительно увеличить значение σ_c и, следовательно, нефтеотдачу.

Важным показателем процесса вытеснения служит средняя водонасыщенность $\bar{\sigma}$ в зоне смеси, определяемая как отношение объема воды в пласте после ее закачки, к объему порового пространства в зоне смеси. Для случая $\sigma_0 = 0$

$$\bar{\sigma} = \frac{m\tau}{m\xi_c} = \frac{m\tau}{mf'(\sigma_c)\tau} = \frac{1}{f'(\sigma_c)}. \quad (9.58)$$

Равенство (9.58) имеет простую геометрическую интерпретацию. Если продолжить касательную к кривой $f(\sigma)$ (см. рис. 9.4), определяющую фронтовую насыщенность σ_c , до пересечения в точке B с прямой $f(\sigma) = 1$, то абсцисса точки B определит значение $\bar{\sigma}$.

Необходимо отметить, что в действительности математический скачок насыщенности не имеет места. Он появляется в решении вследствие пренебрежения капиллярными силами, за счет которых появляется некоторая «переходная зона» вблизи фронта вытеснения, в которой насыщенность изменяется непрерывно от значения σ_c до σ_0 (см. § 6).

При вытеснении нефти водой из сильно обводненного пласта, когда $\sigma_0 > \sigma_n$ (см. рис. 9.4), условие устойчивости скачка не выполняется и уравнение (9.35) имеет непрерывное решение (рис. 9.12) при условиях (9.39):

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \tau > 0; \\ f'(\sigma) &= \xi/\tau \quad \text{при} \quad 0 < \xi \leq f'(\sigma_0)\tau; \\ \sigma &= \sigma_0 \quad \text{при} \quad f'(\sigma_0)\tau < \xi < 1. \end{aligned} \quad (9.59)$$

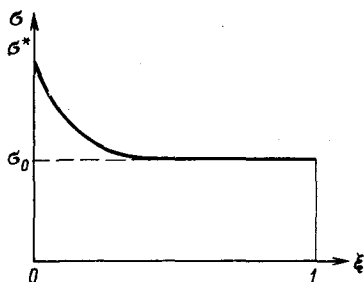


Рис. 9.12. Кривая распределения водонасыщенности в сильно обводненном пласте ($\sigma_0 > \sigma_n$)

Расчет коэффициента нефтеотдачи

Одна из важных технологических характеристик процесса вытеснения — коэффициент безводной газо- или нефтеотдачи η . Он определяется как отношение вытесненного водой объема нефти от нагнетательной галереи (скважины) до фронта к общему объему пор, занятых нефтью до начала вытеснения. Подсчитаем этот коэффи-

коэффициент для случая слабо обводненного пласта, описываемого соотношениями (9.57). Имеем

$$\eta = \frac{m \int_0^{\xi_c} (\sigma - \sigma_0) d\xi}{m (1 - \sigma_0) \xi_c} \quad (9.60)$$

Переходя в интеграле (9.60) от переменной ξ к переменной σ с помощью (9.47), как и ранее при вычислении средней насыщенности $\bar{\sigma}$, и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_c} (\sigma - \sigma_0) d\xi &= \tau \int_{\sigma^*}^{\sigma_c} (\sigma - \sigma_0) f''(\sigma) d\sigma = \tau \left[(\sigma - \sigma_0) f'(\sigma) \Big|_{\sigma^*}^{\sigma_c} - \int_{\sigma^*}^{\sigma_c} f'(\sigma) d\sigma \right] = \\ &= \tau [(\sigma_c - \sigma_0) f'(\sigma_c) + 1 - f(\sigma_c)], \end{aligned}$$

где учтено, что $f'(\sigma^*) = 0$, $f(\sigma^*) = 1$.

Подставляя полученное выражение для безразмерного объема закачанной воды в (9.60) и учитывая (9.54) и (9.56), окончательно получаем после преобразований

$$\eta = \frac{\sigma_c - \sigma_0}{1 - \sigma_0} \frac{1 - f(\sigma_0)}{f(\sigma_c) - f(\sigma_0)} \quad (9.61)$$

Коэффициент безводной нефтеотдачи увеличивается с ростом отношения μ_0 , т. е. при увеличении вязкости вытесняющей фазы или (и) при уменьшении вязкости вытесняемой фазы.

Полученные точные решения (9.57) и (9.59) задачи о вытеснении нефти (или газа) водой применяются при оценочных инженерных расчетах основных технологических параметров разработки нефтяных и газовых месторождений с использованием процесса заводнения. Кроме того, они могут служить тестами при оценке точности численных методов решения более сложных задач двухфазной фильтрации с использованием ЭВМ.

В общем случае неоднородного вытеснения, а также при учете сжимаемости одной из фаз рассмотренная задача уже не сводится к одному уравнению для насыщенности. Необходимо совместно определять давление и насыщенность. Численные решения таких задач могут быть получены лишь на ЭВМ.

Основы построения разностных схем и методов численного решения соответствующих задач подземной гидравлики изложены в гл. 13.

§ 6. ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Учет капиллярного скачка давления p_k , который задается в виде известной эмпирической функции насыщенностей равенством (9.13), приводит к теории следующего приближения — модели Рапопорта—Лиса.

Рассмотрим особенности одномерной двухфазной фильтрации несжимаемых флюидов с учетом капиллярного давления в предположении, что силой тяжести можно пренебречь. Тогда процесс двухфазного течения описывается уравнениями (9.25) и (9.31) при $A_g = \bar{A}_g = 0$, которые приводятся к виду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \xi} + A_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) \xi^n \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (9.62)$$

где $n = 0$ и 1 соответственно для случаев прямолинейно-параллельного и радиального вытеснения; $A_k^{(0)} = A_k$, $A_k^{(1)} = A_k$ находятся из (9.26) и (9.32); безразмерные переменные ξ и τ определяются соответственно равенствами (9.24) и (9.30). Вопрос о формулировке начального и граничных условий для уравнения (9.62) рассматривался в § 4.

Одним из главных путей изучения механизма вытеснения остается метод физического моделирования как в силу трудностей аналитического и численного исследования, так и из-за отсутствия достаточных сведений об эмпирических функциях $k_i(\sigma)$ и $J(\sigma)$, определяющих процесс двухфазной фильтрации. Остановимся на некоторых известных решениях уравнения (9.62), позволяющих оценить влияние капиллярных сил на двухфазное течение флюидов.

Стабилизированная зона

Действие капиллярных сил проявляется в основном вблизи фронта вытеснения, где градиенты насыщенности велики. Эти силы приводят к «размазыванию» фронта, поэтому при учете капиллярных сил скачок насыщенности отсутствует и насыщенность изменяется непрерывно.

Установлено, что распределение насыщенности в переходной области вблизи фронта при постоянной скорости вытеснения $\omega = \text{const}$ не меняется со временем, т. е. образуется так называемая стабилизированная зона, которая перемещается, не изменяя своей формы. Это означает, что в системе координат ζ , связанной с движущимся фронтом, распределение насыщенности не должно зависеть от времени: $\sigma = \sigma(\zeta)$. Течение в стабилизированной зоне соответствует предельному решению уравнения (9.62), получаемому при длительном протекании процесса, когда распределение насыщенности не зависит от граничных условий.

Рассмотрим случай прямолинейно-параллельного вытеснения ($n = 0$ в уравнении (9.62)). Пусть D — скорость движения фронта вытеснения. Сделаем замену переменных

$$\zeta = \xi - D\tau$$

и будем искать решение уравнения (9.62) (при $n = 0$) в виде

$$\sigma = \sigma(\xi - D\tau) = \sigma(\zeta). \quad (9.63)$$

Из (9.63) находим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = -\frac{d\sigma}{d\zeta} D, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{d\sigma}{d\zeta},$$

и уравнение (9.62) принимает вид

$$-D \frac{d\sigma}{d\zeta} + f'(\sigma) \frac{d\sigma}{d\zeta} + A_k \frac{d}{d\zeta} \left[k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) \frac{d\sigma}{d\zeta} \right] = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение по ζ , получаем

$$-D\sigma + f(\sigma) + A_k k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) \frac{d\sigma}{d\zeta} = C, \quad (9.64)$$

где C — постоянная интегрирования.

Требование смыкания искомого решения с решением Баклея—Леверетта, а также стационарность течения в системе координат ζ приводят к следующим граничным условиям:

$$\sigma(-\infty) = \sigma^+ = \sigma_c; \quad \sigma(+\infty) = \sigma^- = \sigma_0, \quad (9.65)$$

где $\sigma^+ = \sigma_c$ и $\sigma^- = \sigma_0$ — насыщенности соответственно за и перед скачком, связанные соотношением (9.54).

Тогда, подставляя первое условие (9.65) в соотношение (9.64) и учитывая, что при этом $d\sigma/d\zeta = 0$, определяем константу интегрирования

$$C = -D\sigma_c + f(\sigma_c). \quad (9.66)$$

При этом второе условие (9.65) выполняется автоматически, поскольку значение скорости D скачка насыщенности определяется равенством (9.49). Подставляя теперь значение константы C из (9.66) в уравнение (9.64) и разрешая полученное соотношение относительно $d\zeta/d\sigma$, находим

$$\frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{A_k k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma)}{D(\sigma - \sigma_c) - [f(\sigma) - f(\sigma_c)]}. \quad (9.67)$$

Если проинтегрировать уравнение (9.67) по σ , принимая начало отсчета так, чтобы $\sigma = \sigma_1$ при $\zeta = \zeta_1$, где $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_c$, то, используя формулы (9.49) и (9.54), находим

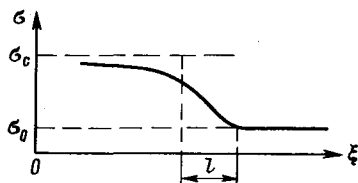
$$\zeta - \zeta_1 = A_k \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{k_2(\sigma) f(\sigma) J'(\sigma) d\sigma}{f'(\sigma_c)(\sigma - \sigma_c) - f(\sigma) + f(\sigma_c)}. \quad (9.68)$$

Формула (9.68) описывает переходную зону бесконечной протяженности, что является следствием принятых допущений. Другими словами, размер стабилизированной зоны бесконечен, и точки смыкания полученного решения с распределением Баклея—Леверетта, нет. Фактически для определения ширины зоны по формуле (9.68) приходится брать расстояние между точками, насыщенности в которых близки к значениям σ_c и σ_0 , но не равны. При этом ширина переходной зоны оказывается пропорциональной величине

$l = p_k L / \Delta p$ или $A_k L / m = \alpha_n \cos \theta \sqrt{k} / (\mu_o \omega \sqrt{m})$, где параметр A_k определяется из второго равенства (9.26). Типичная кривая распределения насыщенности в переходной (стабилизированной) зоне приведена на рис. 9.13.

Существование решений уравнения (9.62) вида (9.68) показывает, что при постоянной скорости вытеснения распределение насыщенности в стабилизированной зоне является стационарным. Существование такой стабилизированной зоны было обнаружено экспериментально. В теории Баклея—Лeverетта (при пренебреже-

Рис. 9.13. Кривая распределения насыщенности в стабилизированной зоне



нии капиллярными силами) стабилизированная зона моделируется скачком насыщенности.

Отметим, что уравнение (9.62) имеет также, кроме решения (9.68), зависящего от $\xi = \xi - D\tau$, точные автомодельные решения, зависящие от $\xi = \xi / (A_k \tau / m)^{1/2}$. Автомодельные решения существуют при специальном выборе суммарной скорости $\omega(t)$ или суммарного расхода $q(t)$ фаз, в частности при $q = C/\sqrt{t}$ для прямолинейно-параллельной фильтрации и при $q = \text{const}$ для радиального вытеснения.

§ 7. ФИЛЬТРАЦИЯ ТРЕХФАЗНОЙ СМЕСИ

Фильтрация смеси трех флюидов исследована (экспериментально и теоретически) в меньшей степени, чем движение двухфазной жидкости. Вместе с тем фильтрация трехфазной смеси имеет большое практическое значение, так как в нефтегазонасыщенных пластах при определенных условиях совместно движутся нефть, вода и свободный газ. Так, в случае, если нефть находится в пласте в смеси со свободной водой при снижении давления ниже давления насыщения начинается выделение газа из раствора и в пласте образуется подвижная трехфазная смесь нефть—вода—газ. Давление насыщения является физической константой нефти того или иного района.

В основу описания фильтрации трехфазной системы положен обобщенный закон Дарси (9.4), который (без учета силы тяжести и капиллярных сил) для одномерного потока принимает вид

$$\omega_i = - \frac{k}{\mu_i} k_i (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.69)$$

где насыщенности σ_i фаз удовлетворяют равенству

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1.$$

Относительные фазовые проницаемости k_i (σ_1 , σ_2 , σ_3) определяются из треугольных диаграмм (см. гл. 1). Проницаемость для воды практически не зависит от соотношения насыщенных двух других фаз.

К уравнениям движения (9.69) добавляются уравнения неразрывности для каждой фазы, а также уравнения состояния и соотношения, определяющие механизм фазовых переходов в процессе совместной фильтрации, а также изменение физических свойств флюидов. Учет всех этих факторов представляет собой весьма сложную задачу.

Большим шагом в упрощенном математическом моделировании совместной фильтрации нефти, газа и воды явилась предложенная М. Маскетом и М. Миресом (1936 г.) модель течения, позволившая достаточно удовлетворительно решать некоторые инженерные задачи разработки месторождений природных флюидов. В основу этой модели положено предположение, что углеводородная система состоит из двух фаз: жидкой нефтяной (тяжелые фракции нефти) и газовой. При этом фаза «нефть», как было принято М. Маскетом, является нелетучей жидкостью и не может растворяться в газовой фазе; газ же может находиться как в свободном состоянии, так и быть растворенным в нефти. Растворимостью углеводородных компонентов в пластовой воде пренебрегают. Движение предполагается изотермическим, капиллярным скачком давления пренебрегают.

Будем считать, что растворение газа в нефти подчиняется линейному закону Генри:

$$V_{\text{гро}} = sV_{\text{но}}. \quad (9.70)$$

Здесь (и далее в этом параграфе) индексом «о» отмечены параметры при нормальных атмосферных условиях; $V_{\text{гро}}$, $V_{\text{но}}$ — соответственно объем растворенного газа и объем нефти при нормальных условиях, индексы «н» («в») и «г» относятся соответственно, к нефти (воде) и газу; s — коэффициент объемной растворимости газа, являющийся экспериментальной функцией давления p .

При описании фильтрации газированной жидкости М. Маскет использовал понятие объемного коэффициента жидкости β , определяемого для нефтяной и водной фазы соответственно из соотношений

$$\beta_n = V_n/V_{\text{но}}; \quad \beta_v = V_v/V_{\text{во}}, \quad (9.71)$$

где V_n и V_v — соответственно объемы нефти с растворенным в ней газом и воды в пластовых условиях¹.

Из (9.71) вытекает следующее соотношение между плотностями нефти (и воды) при нормальных $\rho_{\text{но}}$ ($\rho_{\text{во}}$) и пластовых ρ_n (ρ_v) условиях

$$\rho_{\text{но}} = \beta_n \rho_n, \quad \rho_{\text{во}} = \beta_v \rho_v. \quad (9.72)$$

¹ Можно показать, что β_n и β_v , а также коэффициент растворимости s выражаются через параметры (плотность, насыщенность и концентрацию), общепринятые при описании многокомпонентных смесей (см. § 2).

С учетом принятых допущений о составах газа и жидкой углеводородной фазы и кинетике растворения газа дифференциальные уравнения совместной фильтрации газированной жидкости, соответствующие модели Маскета—Миреса, можно получить из общих уравнений многофазной фильтрации (см. § 3). Для простоты ограничимся случаем прямолинейно-параллельного течения вдоль оси x . Обобщения на случай трехмерного фильтрационного потока можно сделать аналогично § 3.

Будем считать, что фильтрация фаз (нефти, газа и воды) подчиняется обобщенному закону Дарси (9.69).

Уравнение неразрывности (9.9) для каждой из фаз в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \rho_i \sigma_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i w_i) = 0, \quad (9.73)$$

где индекс $i = 1$ соответствует нефти («н»); $i = 2$ — газу («г»), $i = 3$ — воде («в»).

Заменяя плотности нефти ρ_n и воды ρ_v в пластовых условиях их выражениями из (9.72) и используя закон Дарси (9.69), из (9.73) находим для этих фаз соответственно (m и k — постоянны)

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma_n}{\beta_n} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_n}{\mu_n \beta_n} \frac{\partial p}{\partial x} \right); \\ \frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma_v}{\beta_v} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_v}{\mu_v \beta_v} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (9.74)$$

где относительные фазовые проницаемости являются эмпирическими функциями насыщенностей: $k_n = k_n(\sigma_v, \sigma_n)$, $k_v = k_v(\sigma_v, \sigma_n)$, а объемные коэффициенты и коэффициенты вязкости зависят известным образом от давления: $\beta_n(p)$, $\beta_v(p)$ и $\mu_n(p)$, $\mu_v(p)$.

При составлении уравнения неразрывности для газа необходимо учесть, что газ движется как в свободном, так и в растворенном (жидком) состоянии. При этом газ в жидком виде переносится со скоростью фильтрации «нефти» w_n , а плотность растворенного газа $\rho_{гр}$, как следует из (9.70) и (9.71), равна

$$\rho_{гр} = \frac{M_{гр}}{V_n} = \frac{\rho_{го} V_{гро}}{\beta_n V_{но}} = \frac{\rho_{го} s V_{но}}{\beta_n V_{но}} = \frac{\rho_{го} s}{\beta_n}.$$

Тогда суммарная массовая скорость газа $(\rho_g w_g)_c$ определится из соотношения

$$(\rho_g w_g)_c = \rho_g w_g + \rho_{гр} w_n = \rho_g w_g + \frac{\rho_{го} s}{\beta_n} w_n. \quad (9.75)$$

Подсчитаем теперь суммарную массу газа в единице порового объема.

Массовое содержание нефти в единице объема с учетом (9.72)

$$M_n = m \rho_n \sigma_n = m \frac{\rho_{но}}{\beta_n} \sigma_n,$$

откуда находим удельный объем нефти при нормальных условиях

$$V_{\text{но}} = \frac{M_{\text{н}}}{\rho_{\text{но}}} = \frac{m\sigma_{\text{н}}}{\beta_{\text{н}}},$$

а затем с помощью (9.70) — объем растворенного газа

$$V_{\text{гго}} = sm\sigma_{\text{н}}/\beta_{\text{н}}.$$

Тогда масса газа, растворенного в нефти, $M_{\text{гр}}$ и масса свободного газа $M_{\text{гс}}$ в единице объема равны соответственно

$$M_{\text{гр}} = \rho_{\text{го}} V_{\text{гго}} = \frac{ms\sigma_{\text{н}}\rho_{\text{го}}}{\beta_{\text{н}}}; \quad M_{\text{гс}} = m\rho_{\text{г}}\sigma_{\text{г}}.$$

Суммируя эти величины, находим полную массу газообразной фазы в единице порового объема

$$(m\rho_{\text{г}}\sigma_{\text{г}})_{\text{с}} = M_{\text{гс}} + M_{\text{гр}} = m\rho_{\text{г}}\sigma_{\text{г}} + \frac{ms\sigma_{\text{н}}\rho_{\text{го}}}{\beta_{\text{н}}}. \quad (9.76)$$

Подставляя выражения (9.75) и (9.76) в (9.73) ($i = 2$) и учитывая (9.69), получаем дифференциальное уравнение для газовой фазы

$$\frac{m}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{\text{г}}\sigma_{\text{г}} + \frac{s(p)\rho_{\text{го}}\sigma_{\text{н}}}{\beta_{\text{н}}(p)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{k_{\text{г}}\rho_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}(p)} + \frac{k_{\text{н}}s(p)\rho_{\text{го}}}{\mu_{\text{н}}(p)\beta_{\text{н}}(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (9.77)$$

Дифференциальные уравнения (9.74), (9.77) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения насыщенностей $\sigma_{\text{н}}$, $\sigma_{\text{в}}$ ($\sigma_{\text{г}} = 1 - \sigma_{\text{н}}\sigma_{\text{в}}$) и давления p и известны как уравнения Маскета—Миреса. Несмотря на принятые упрощающие допущения, это — сложная система уравнений, нелинейная как по давлению, так и по насыщенностям и требующая для своего решения использования ЭВМ.

Различные преобразования и представления этой системы уравнений, удобные для проведения численных расчетов, приведены в [1, 11]. Использовались различные приближенные методы решения уравнений (9.74), (9.77), дающие связь между давлением и насыщенностью на контуре залежи, а также метод последовательных приближений, МПССС, метод усреднения и др. С приближенными подходами к исследованию нестационарной фильтрации трехфазной смеси можно познакомиться по работам [15, 18, 19].

§ 8. ДВИЖЕНИЕ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Большинство практических методов расчета движения газированной нефти базируется на результатах исследования установившегося течения. Проблема установившейся фильтрации газированной нефти была рассмотрена С. А. Христиановичем. Им была показана возможность сведения нелинейных задач установившейся

фильтрации газожидкостных систем к хорошо изученным задачам движения однородной несжимаемой жидкости в пористой среде. Другими словами, задача привелась к уравнению Лапласа (см. гл. 4), но не для давления (или потенциала), а для некоторой вспомогательной функции H , которая в дальнейшем получила название функции Христиановича.

Рассмотрим прямолинейно-параллельное стационарное течение трехфазной системы с учетом реальных свойств пластовых флюидов. В этом случае система уравнений (9.74), (9.77) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_H(\sigma_H, \sigma_B)}{\mu_H(p) \beta_H(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0; \quad (9.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_B(\sigma_H, \sigma_B)}{\mu_B(p) \beta_B(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0; \quad (9.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{k_H(\sigma_H, \sigma_B)}{\mu_H(p)} \rho_H(p) + \frac{k_B(\sigma_H, \sigma_B) s(p) \rho_{го}}{\mu_H(p) \beta_H(p)} \right] \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = 0. \quad (9.80)$$

Введем понятия газового и водонефтяного факторов. Под газовым фактором Γ_r понимается отношение объемного расхода газа $Q_{го}$, приведенного к атмосферному давлению, к объемному расходу нефти $Q_{но}$ в нормальных условиях; под водонефтяным фактором Γ_B — отношение объемного расхода воды $Q_{во}$ к объемному расходу нефти $Q_{но}$ в нормальных условиях. Итак, по определению имеем

$$\Gamma_r = Q_{го}/Q_{но}; \quad \Gamma_B = Q_{во}/Q_{но}. \quad (9.81)$$

С помощью (9.78) и (9.75) находим

$$Q_{го} = \frac{(\rho_r \omega_r) c}{\rho_{го}} \omega = \left(\frac{\rho_r}{\rho_{го}} \omega_r + \frac{s}{\beta_H} \omega_H \right) \omega;$$

$$Q_{но} = \frac{\rho_H \omega_H}{\rho_{но}} \omega = \frac{\omega_H}{\beta_H} \omega, \quad Q_{во} = \frac{\rho_B \omega_B}{\rho_{во}} \omega = \frac{\omega_B}{\beta_B} \omega,$$

где ω — площадь сечения пласта.

Тогда выражения (9.81) принимают вид

$$\Gamma_r = \frac{\rho_r(p) \omega_r \beta_H(p)}{\rho_{го} \omega_H} + s(p), \quad \Gamma_B = \frac{\omega_B \beta_H(p)}{\omega_H \beta_B(p)},$$

откуда, используя выражения (9.69) для скоростей фильтрации фаз, окончательно находим

$$\Gamma_r = \frac{\rho_r(p) \psi_1(\sigma_H, \sigma_B) \beta_H(p)}{\rho_{го} \mu_{01}(p)} + s(p); \quad (9.82)$$

$$\Gamma_B = \frac{\psi_2(\sigma_H, \sigma_B) \beta_H(p)}{\mu_{02}(p) \beta_B(p)}, \quad (9.83)$$

где введены обозначения

$$\psi_1(\sigma_H, \sigma_B) = \frac{k_H(\sigma_H, \sigma_B)}{k_H(\sigma_H, \sigma_B)}, \quad \mu_{01} = \frac{\mu_H(p)}{\mu_H(p)}; \quad (9.84)$$

$$\psi_2(\sigma_H, \sigma_B) = \frac{k_B(\sigma_H, \sigma_B)}{k_H(\sigma_H, \sigma_B)}, \quad \mu_{02}(p) = \frac{\mu_B(p)}{\mu_H(p)}. \quad (9.85)$$

Следуя С. А. Христиановичу, покажем, что при установившемся течении трехфазной смеси газовый Γ_r и водонефтяной Γ_B факторы остаются постоянными.

Для этого сделаем сначала некоторые вспомогательные преобразования. С учетом (9.82) и (9.84) преобразуем сумму, стоящую в квадратной скобке в левой части уравнения (9.80), к виду

$$\frac{k_r}{\mu_r} \rho_r + \frac{k_H \rho_{r0}}{\mu_H \beta_H} = \frac{k_H \rho_{r0}}{\mu_H \beta_H} \left(\frac{k_r}{k_H} \frac{\mu_H}{\mu_r} \frac{\rho_r}{\rho_{r0}} \beta_H + s \right) = \frac{k_H \rho_{r0}}{\mu_H \beta_H} \Gamma_r.$$

Тогда уравнение (9.80) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_H(p)}{\mu_H(p) \beta_H(p)} \frac{\partial p}{\partial x} \rho_{r0} \Gamma_r \right] = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство как произведение и учитывая уравнение неразрывности (9.78) для нефти, находим ($\rho_{r0} = \text{const}$)

$$\frac{k_H \rho_{r0}}{\mu_H \beta_H} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial x} = 0,$$

откуда, поскольку $\partial p / \partial x \neq 0$, получаем $\partial \Gamma_r / \partial x = 0$, и, следовательно, газовый фактор постоянен вдоль линии тока

$$\Gamma_r = \text{const}. \quad (9.86)$$

Совершенно аналогично преобразуется уравнение (9.79). С учетом (9.83) и (9.85) имеем

$$\frac{k_B}{\mu_B \beta_B} = \frac{k_H}{\mu_H \beta_H} \frac{k_B \mu_H \beta_H}{k_H \mu_B \beta_B} = \frac{k_H}{\mu_H \beta_H} \Gamma_B,$$

и уравнение (9.79) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_H}{\mu_H \beta_H} \frac{\partial p}{\partial x} \Gamma_B \right) = 0,$$

откуда, в силу уравнения (9.78), находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_B}{\partial x} = 0.$$

Следовательно, вдоль линии тока водонефтяной фактор также постоянен:

$$\Gamma_B = \text{const}. \quad (9.87)$$

Константы в соотношениях (9.86) и (9.87) определяются значениями давления и насыщенностей σ_H и σ_B в какой-либо точке ли-

нии тока (например, на контуре пласта или в невозмущенной области движения, где значения насыщенностей и давления постоянны). Обозначим эти константы соответственно через $\Gamma_{го}$ и $\Gamma_{во}$. Тогда соотношения (9.86) и (9.87) с учетом (9.82) и (9.83) принимают вид

$$\frac{\rho_r(p) \psi_1(\sigma_n, \sigma_v) \beta_n(p)}{\rho_{го} \mu_{01}(p)} + s(p) = \Gamma_{го}; \quad (9.88)$$

$$\frac{\psi_2(\sigma_n, \sigma_v) \beta_n(p)}{\mu_{02}(p) \beta_n(p)} = \Gamma_{во}. \quad (9.88)$$

Равенства (9.88) дают два дополнительных соотношения, позволяющие связать между собой насыщенности σ_n и σ_v порового пространства нефтью и водой в какой-либо точке пористой среды и давление p в этой точке. Это дает возможность выразить σ_n и σ_v из уравнений (9.88) как функции давления.

Учитывая это, введем обобщенную функцию Христиановича в виде

$$H(p) = \int k \frac{k_n(\sigma_n, \sigma_v)}{\beta_n(p) \mu_n(p)} dp + \text{const}. \quad (9.89)$$

Тогда $dH = (k k_n / \beta_n \mu_n) dp$, и уравнение (9.78) принимает вид

$$d^2 H / dx^2 = 0, \quad (9.90)$$

т. е. приводится к одномерному уравнению Лапласа для функции H , определяемой равенством (9.89). При этом уравнение для скорости фильтрации нефти, как следует из (9.69), получаем в виде

$$w_n = -\beta_n(p) \frac{dH}{dx},$$

а приведенный объемный расход нефти равен

$$Q_{но} = \frac{w_n}{\beta_n} \omega = -\frac{dH}{dx} \omega. \quad (9.91)$$

Отметим, что аналогичные результаты получаются и для плоского и пространственного стационарного фильтрационного потока.

Система уравнений (9.90) и (9.91) полностью совпадает с обычными уравнениями для движения несжимаемой жидкости по закону Дарси (см. гл. 4). Таким образом, каждому случаю движения однородной жидкости отвечает случай движения газированной жидкости. Разница будет заключаться лишь в том, что одному и тому же полю скоростей однородной и газированной жидкости будут отвечать разные перепады давления. При этом семейство изобар в однородной жидкости будет являться семейством изобар и для газированной жидкости. Абсолютные значения давлений на этих линиях будут различны. Зная распределение давления и скорость фильтрации нефти, из уравнений (9.88) и (9.69) можно найти рас-

пределение свободного газа и воды в области движения и скорости фильтрации этих фаз.

Таким образом, в общем случае изучение установившегося течения трехфазной смеси сводится к интегрированию уравнений Лапласа для обобщенной функции Христиановича $H(p)$. Следовательно, для однотипных постановок задач результаты, известные для фильтрации однородной несжимаемой жидкости (см. гл. 4), можно использовать для расчета фильтрации трехфазной системы при замене давления p на функцию $H(p)$.

При отсутствии воды в пласте, полагая водонасыщенность $\sigma_v = 0$, получаем случай установившегося течения газированной нефти. Основные соотношения, соответствующие этому случаю, приведены в [6, 20]. Там же можно познакомиться с примерами конкретных расчетов стационарной фильтрации газированной нефти и их анализом.

Соотношения, определяющие характеристики установившегося течения реальной газированной нефти, широко используются для построения приближенных методов расчета нестационарной фильтрации газожидкостных смесей и для обработки результатов исследования скважин.

При расчетах притока газированной жидкости к скважинам часто используют метод последовательной смены стационарных состояний (см. гл. 6, 7). В основе этого метода и некоторых других приближенных методов расчета неустановившейся фильтрации газированной нефти лежит допущение о постоянстве в каждый момент времени газового фактора вдоль линии тока. Использование этого условия, справедливого, как мы видели выше, при установившемся движении, для расчета неустановившихся течений газированной нефти является приближенным приемом. Показано, что при нестационарном движении газированной жидкости газовый фактор в каждый момент времени не остается строго постоянным вдоль линии тока.

Глава 10

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ НЕФТЕ- И ГАЗОКОНДЕНСАТООТДАЧИ ПЛАСТОВ

§ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ХИМИЧЕСКИХ РЕАГЕНТОВ ПРИ ЗАВОДНЕНИИ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТОВ

При вытеснении нефти водой значительная часть нефти остается в пласте неизвлеченной. Низкая нефтеотдача при заводнении связана с особенностями гидродинамики водонефтяной системы в пористой среде.

Капиллярные силы, действующие на границе между водой и нефтью, заземляют нефть, препятствуя ее вытеснению. Поскольку вязкость нефти больше вязкости воды, более подвижная вода стремится прорваться через нефть к добывающим скважинам. Неоднородность пласта приводит к тому, что вытеснение происходит в основном из высокопроницаемых зон, в низкопроницаемых зонах остается много нефти. Поэтому в настоящее время разрабатываются и внедряются в практику методы повышения нефтеотдачи пластов. Суть физико-химических методов состоит в добавлении в вытесняющую воду химических реагентов и растворителей, улучшающих гидродинамические условия вытеснения. При заводнении нефтяных пластов используют полимеры, поверхностно-активные вещества (ПАВ), углекислый газ, минеральные соли, спирты, мицеллярные растворы. Близки по механизму процессы вытеснения нефти и выпавшего в пласте газового конденсата углеводородными и углекислотными растворителями.

Однако несмотря на широту спектра применяемых при вытеснении нефти химических реагентов, по своему влиянию на гидродинамику водонефтяной системы в пористой среде они похожи друг на друга. При добавке полимеров в закачиваемую воду происходит увеличение ее вязкости и уменьшение фазовой проницаемости, несколько уменьшается остаточная нефтенасыщенность. При вытеснении нефти карбонизированной водой (водным раствором углекислого газа) в процессе растворения CO_2 в нефти уменьшается поверхностное натяжение на границе раздела фаз, снижается остаточная нефтенасыщенность, увеличивается фазовая проницаемость нефти и снижается ее вязкость, увеличивается вязкость воды. При добавлении ПАВ в нагнетаемую воду происходит уменьшение поверхностного натяжения и снижение остаточной нефтенасыщенности.

Таким образом, механизм эффективного вытеснения нефти различными химическими реагентами в значительной степени состоит в изменении вязкостей фаз, фазовых проницаемостей, капиллярного скачка давления между фазами. Относительные фазовые проницаемости и вязкости фаз зависят от концентрации c химического реагента в водном растворе:

$$k_v = k_v(\sigma, c); \quad k_n = k_n(\sigma, c); \quad \mu_v = \mu_v(c); \quad \mu_n = \mu_n(c).$$

Такая унифицированность действия различных химических реагентов на механизм вытеснения позволяет их объединить под названием активная примесь. Многие процессы заводнения нефтяных пластов с использованием химических реагентов рассматриваются в рамках математической модели вытеснения нефти раствором активной примеси. Процессы вытеснения нефти и выпавшего в пласте газового конденсата различными растворителями с учетом межфазного массообмена также описываются в рамках математической модели, близкой к модели вытеснения нефти раствором активной примеси.

§ 2. ВЫВОД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ

При вытеснении нефти раствором активной примеси происходит процесс двухфазного течения. Примесь может быть растворена в воде и в нефти. Будем считать, что концентрации примеси в воде c и в нефти φ малы и не изменяют удельных объемов фаз. Предположим, что фазы несжимаемы. Тогда уравнения неразрывности для воды и для нефти при плоскопараллельной фильтрации имеют вид

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{в}}}{\partial x} = 0; \quad -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial x} = 0. \quad (10.1)$$

При описании крупномасштабных медленных процессов пренебрегаем капиллярным скачком давления между фазами; предполагается, что давления в фазах равны.

Для каждой из фаз выполнен обобщенный закон Дарси (9.12)

$$w_{\text{в}} = -k \frac{k_{\text{в}}(\sigma, c)}{\mu_{\text{в}}(c)} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad w_{\text{н}} = -k \frac{k_{\text{н}}(\sigma, c)}{\mu_{\text{н}}(c)} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (10.2)$$

В процессе вытеснения примесь, находящаяся в данном элементе пористой среды, вообще говоря, может растворяться в воде, в нефти и сорбироваться пористым скелетом¹. Рассматривая медленные фильтрационные процессы, будем предполагать, что распределение примеси между фазами является термодинамически равновесным.

Для простоты ограничимся случаем, когда концентрации примеси в нефти φ и количество примеси, сорбированное пористой средой a , пропорциональны концентрации c примеси в воде:

$$a = \Gamma c; \quad \varphi = Kc, \quad (10.3)$$

где Γ и K — постоянные коэффициенты.

Уравнение баланса массы примеси в воде, нефти и в сорбированном состоянии получается аналогично выводу уравнений неразрывности (10.1) (см. гл. 9). Количество примеси в единице объема пористой среды равно $m[c\sigma + \varphi(1-\sigma) + a]$, а плотность потока примеси — соответственно $(cw_{\text{в}} + \varphi w_{\text{н}})$. Пренебрегая диффузией примеси в обеих фазах, представим уравнение баланса в виде:

$$m \frac{\partial}{\partial t} [c\sigma + \varphi(1-\sigma) + a] + \frac{\partial}{\partial x} [cw_{\text{в}} + \varphi w_{\text{н}}] = 0. \quad (10.4)$$

Сложив уравнения неразрывности (10.1) для воды и нефти, получаем, как и ранее (см. гл. 9), что суммарная скорость фильтрации w зависит только от времени:

$$w_{\text{в}} + w_{\text{н}} = w(t). \quad (10.5)$$

¹ Адсорбцией называют концентрирование какого-либо вещества на поверхности твердого или жидкого тела в результате самопроизвольного перехода его из объема фазы. С кинетикой процесса адсорбции можно познакомиться в работе [15].

Подставим в полученное выражение скорости фильтрации обеих фаз (10.2):

$$w(t) = -k \left(\frac{k_v}{\mu_v} + \frac{k_n}{\mu_n} \right) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (10.6)$$

Из уравнений (10.2) и (10.6) получим следующие выражения для скоростей фильтрации фаз:

$$w_v = f(\sigma, c) w(t), \quad w_n = (1-f) w(t) \quad (10.7)$$

$$f(\sigma, c) = [1 + \mu_0 k_n / k_v]^{-1}, \quad \mu_0 = \mu_v / \mu_n. \quad (10.8)$$

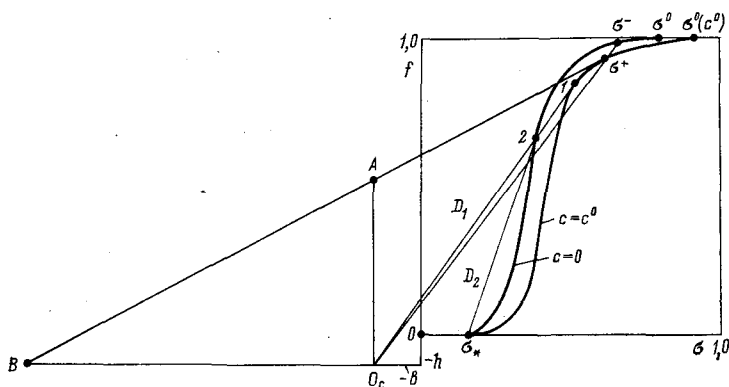


Рис. 10.1. Характеристические функции при вытеснении нефти раствором активной примеси

Как и при вытеснении нефти водой функция Баклея—Левретта f , как видно из (10.7), равна доле воды в потоке. Но при вытеснении нефти раствором активной примеси f зависит не только от насыщенности, но и от концентрации примеси c . Из (10.8) видно, что при увеличении вязкости воды и фазовой проницаемости нефти, уменьшении вязкости нефти и фазовой проницаемости воды с ростом концентрации c функция Баклея—Левретта уменьшается. На рис. 10.1 приведены графики функции f для системы нефть—вода ($c = 0$) и нефть—раствор примеси ($c = c^0$). Предельные водонасыщенности обозначены через σ^* и $\sigma^*(c^0)$.

Подставляя в первое уравнение (10.1) выражение для скорости фильтрации воды (10.7), получаем

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + w(t) \frac{\partial f(\sigma, c)}{\partial x} = 0. \quad (10.9)$$

Подставив в уравнение баланса массы примеси (10.4) выражения для скоростей фаз (10.7) и для концентраций ϕ и a (10.3), преобразуем его к виду

$$m \frac{\partial}{\partial t} [c\sigma + Kc(1-\sigma) + \Gamma c] + w \frac{\partial}{\partial x} [cf + Kc(1-f)] = 0. \quad (10.10)$$

Уравнения (10.6) (10.9) и (10.10) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую процесс двухфазной фильтрации с активной примесью для определения σ , c , p .

Переходя к безразмерным переменным ξ и τ по формулам (9.36) ($v = 1$), перепишем уравнения (10.9), (10.10) в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\sigma, c)}{\partial \xi} = 0; \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [c(\sigma + b)] + \frac{\partial}{\partial \xi} [c(f + h)] = 0, \quad (10.12)$$

где введены обозначения

$$h = K(1 - K)^{-1}; \quad b = (K + \Gamma)(1 - K)^{-1}.$$

Отметим, что в случае радиального вытеснения динамика водонасыщенности и концентрации примеси также описывается системой уравнений (10.11), (10.12). При этом в формулах (9.36) для ξ и τ следует положить $v = 2$.

Уравнения (10.11), (10.12) образуют независимую систему. Решив ее и определив насыщенность σ и концентрацию c из (10.6), найдем давление p .

В силу зависимости $f = f(\sigma, c)$ в качестве неизвестных в системе (10.11), (10.12) можно рассматривать как пару переменных (σ, c) , так и (σ, f) . Решение этих уравнений можно изображать графически: решению в точке (ξ, τ) ставится в соответствие точка на плоскости (σ, f) с координатами $[\sigma(\xi, \tau), f(\xi, \tau)]$ (см. рис. 10.1).

§ 3. ДВИЖЕНИЕ СКАЧКОВ НАСЫЩЕННОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИИ

Уравнения (10.11), (10.12) образуют гиперболическую систему квазилинейных уравнений. Уравнение (10.11) является уравнением баланса массы водной фазы, уравнение (10.12) — уравнением баланса массы активной примеси. Эти уравнения допускают разрывные решения, в распределениях насыщенности $\sigma(\xi, \tau)$ и концентрации $c(\xi, \tau)$ возможны скачки. На скачках должны выполняться условия баланса массы водной фазы и баланса массы примеси, которые выводятся аналогично случаю классической модели Баклея—Леверетта (см. § 5 гл. 9).

Условие баланса массы воды на разрыве приводит к соотношению (9.49) и может быть представлено в рассматриваемом случае в виде

$$D = \frac{d\xi_c}{d\tau} = \frac{m}{w} \frac{dx_c}{dt} = \frac{f(\sigma^+, c^+) - f(\sigma^-, c^-)}{\sigma^+ - \sigma^-}. \quad (10.13)$$

Выведем условия баланса массы активной примеси на разрыве. В единичном объеме пористой среды масса примеси, растворенной в воде, равна $m\sigma c$, растворенной в нефти — $mKc(1 - \sigma)$, сорбированной — $m\Gamma c$. Примесь переносится водной и нефтяной фазами, сорбированная примесь — неподвижна. В подвижной системе отсчета, связанной с разрывом, физическая скорость примеси в воде

равна $[wf(\sigma, c)/(m\sigma)] - D'$, физическая скорость примеси в нефти — $(w(1-f)/m(1-\sigma)) - D'$, сорбированной примеси — D' .

Массовый поток примеси перед разрывом равен массовому потоку примеси за ним:

$$mc^+\sigma^+ \left[\frac{wf(\sigma^+, c^+)}{m\sigma^+} - D' \right] + mKc^+(1-\sigma^+) \left[\frac{w(1-f(\sigma^+, c^+))}{m(1-\sigma^+)} - D' \right] - \sigma^+ m\Gamma c^+ D' = mc^-\sigma^- \left(\frac{wf^-}{m\sigma^-} - D' \right) + \\ + mKc^-(1-\sigma^-) \left[\frac{w(1-f^-)}{m(1-\sigma^-)} - D' \right] - m\Gamma c^- \sigma^- D'.$$

Преобразуя полученное равенство, имеем

$$D' = \frac{w}{m} \frac{c^+(f^+ + h) - c^-(f^- + h)}{c^+(\sigma^+ + b) - c^-(\sigma^- + b)}.$$

Перейдя к безразмерным переменным ξ и τ , получим

$$D = \frac{d\xi_c}{d\tau} = \frac{c^+(f^+ + h) - c^-(f^- + h)}{c^+(\sigma^+ + b) - c^-(\sigma^- + b)}. \quad (10.14)$$

Условия баланса масс (10.13) и (10.14) называют условиями Гюгонио. Они связывают скорость разрыва D , значения неизвестных перед разрывом σ^+ , c^+ и за ним σ^- , c^- .

Перепишем условие (10.14) в следующем виде:

$$(c^+ - c^-)(\sigma^+ + b)D + c^-(\sigma^+ - \sigma^-)D = \\ = (c^+ - c^-)(f^+ + h) + c^-(f^+ - f^-).$$

В силу уравнения (10.13) вторые слагаемые в левой и правой частях сокращаются. Далее возможны два случая. Если $c^+ - c^- \neq 0$, то из полученного выше равенства имеем

$$D = \frac{f^+ + h}{\sigma^+ + b}. \quad (10.15)$$

Используя свойство производных пропорций, из (10.15) и (10.13) получаем

$$D = \frac{f^+ + h}{\sigma^+ + b} = \frac{f^- + h}{\sigma^- + b}. \quad (10.16)$$

Если $c^+ - c^- = 0$, то условие (10.13) переписывается в виде

$$D = \frac{f(\sigma^+, c) - f(\sigma^-, c)}{\sigma^+ - \sigma^-}, \quad c^+ = c^- = c. \quad (10.17)$$

Скачки, на которых $c^+ - c^- \neq 0$, называют c -скачками. Условие (10.16) означает, что на плоскости (σ, f) точки с координатами (σ^-, f^-) , (σ^+, f^+) и $(-b, -h)$ лежат на одной прямой. Тангенс угла наклона этой прямой равен D .

Скачки, на которых $c^+ - c^- = 0$, называют σ -скачками. Условия (10.17) означают, что на плоскости (σ, f) точки за разрывом

и перед ним лежат на одной кривой Баклея—Левверетта $c = \text{const}$. Тангенс угла наклона прямой, соединяющей эти точки, равен D .

При построении разрывных решений системы уравнений (10.11), (10.12), кроме условий Гюгоньо (10.13), (10.14), необходимо еще удовлетворить условию устойчивости (см. § 5, гл. 9). Оно состоит в том, что разрывное решение устойчиво относительно наложения малых возмущений на само решение. Для σ -скачков это условие сводится к выполнению неравенств

$$f'_\sigma(\sigma^+, c) \leq D \leq f'_\sigma(\sigma^-, c). \quad (10.18)$$

Для c -скачков условие устойчивости сводится к выполнению только одного из неравенств (10.18).

Далее при построении разрывных решений задач фронтального вытеснения нефти раствором активной примеси требуется выполнение на скачках условий Гюгоньо и условия устойчивости.

§ 4. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

Рассмотрим задачу о непрерывном нагнетании в полубесконечный пласт водного раствора активной примеси с концентрацией c^0 . В начальный момент водонасыщенность в пласте равна насыщенности связанной воды σ_* . Процесс вытеснения описывается решением системы уравнений (10.11), (10.12) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \sigma = \sigma_*, \quad c = 0; \quad (10.19)$$

$$\text{при } \xi = 0 \quad f = 1, \quad c = c^0. \quad (10.20)$$

Если $[\sigma(\xi, \tau), c(\xi, \tau)]$ — решение рассматриваемой задачи, то при любом $\alpha \neq 0$ $[\sigma(\alpha\xi, \alpha\tau), c(\alpha\xi, \alpha\tau)]$ тоже является решением этой задачи. В этом легко убедиться прямой подстановкой в систему уравнений и в краевые условия. Задача (10.11), (10.12), (10.19), (10.20), описывающая реальный физический процесс, имеет единственное решение. Поэтому для любого $\alpha \neq 0$ выполняются следующие равенства:

$$\sigma(\xi, \tau) = \sigma(\alpha\xi, \alpha\tau); \quad c(\xi, \tau) = c(\alpha\xi, \alpha\tau).$$

Положив $\sigma = 1/\tau$, получим

$$\sigma(\xi, \tau) = \sigma(\xi/\tau, 1); \quad c(\xi, \tau) = c(\xi/\tau, 1).$$

Отсюда видно, что решение задачи автомодельно, оно зависит от одного безразмерного комплекса $\zeta = \xi/\tau$, так, что

$$\sigma = \sigma(\zeta); \quad c = c(\zeta). \quad (10.21)$$

Продифференцируем уравнение (10.12) по частям. После подстановки в полученное равенство уравнения (10.11), получим

$$(\sigma + b) \frac{\partial c}{\partial \tau} + (f + h) \frac{\partial c}{\partial \xi} = 0. \quad (10.22)$$

Подставив автомодельные зависимости (10.21) в систему уравнений (10.11), (10.12), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(f'_\sigma - \zeta) \frac{d\sigma}{d\zeta} + f_c \frac{dc}{d\zeta} = 0; \quad (10.23)$$

$$\left(\frac{f+h}{\sigma+b} - \zeta \right) \frac{dc}{d\zeta} = 0. \quad (10.24)$$

После подстановки автомодельной зависимости (10.21) в начальные и граничные условия (10.19), (10.20) формулируется краевая задача для системы (10.23), (10.24):

$$\text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad \sigma = \sigma_*, \quad c = 0; \quad (10.25)$$

$$\text{при } \zeta = 0 \quad f = 1, \quad c = c^0. \quad (10.26)$$

Систему (10.23), (10.24) можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $d\sigma/d\zeta$ и $dc/d\zeta$. Ее тривиальные решения $\sigma(\zeta) = \text{const}$, $c(\zeta) = \text{const}$ будем называть точками покоя. Нетривиальные решения этой системы соответствуют случаю равенства нулю ее определителя

$$(f'_\sigma - \zeta) \left(\frac{f+h}{\sigma+b} - \zeta \right) = 0.$$

Определитель равен нулю в следующих двух случаях:

$$1) \zeta = f'_\sigma; \quad 2) \zeta = (f+h)/(\sigma+b). \quad (10.27)$$

В первом случае, как следует из уравнения (10.23), имеем $dc/d\zeta = 0$. Решение такого типа будем называть простыми σ -волнами. Они задаются формулами

$$c = \text{const}; \quad \zeta = f'_\sigma(\sigma, c). \quad (10.28)$$

Докажем, что второй случай невозможен. Для этого продифференцируем обе части равенства (10.27) по ζ :

$$1 = \frac{df}{d\zeta} / (\sigma+b) - (f+h) \frac{d\sigma}{d\zeta} / (\sigma+b)^2 = \frac{1}{\sigma+b} \frac{d\sigma}{d\zeta} \left(\zeta - \frac{f+h}{\sigma+b} \right) = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что других нетривиальных решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10.23), (10.24) нет.

Если к кривой $c = \text{const}$ на плоскости (σ, f) провести касательную, то тангенс угла ее наклона, как следует из (10.28), равен ζ . Изменению ζ в простой σ -волне соответствует движение вдоль кривой $c = \text{const}$ на плоскости (σ, f) (см. рис. 10.1).

Если автомодельное решение разрывно при некотором значении автомодельной переменной $\zeta = \xi/\tau$, то величина разрыва равна скорости разрыва.

Таким образом, автомодельное решение задачи вытеснения нефти раствором активной примеси может состоять из простых σ -волн (10.28), точек покоя, устойчивых σ -скачков (10.17), устой-

чивых c -скачков (10.16). Последовательность этих элементов на плоскости (σ, f) называется «путем». Путь начинается в точке $\xi = 0$ (10.26), заканчивается в точке $\xi \rightarrow \infty$ (10.25). Решение задачи вытеснения сводится к построению пути, вдоль которого ξ монотонно возрастает от нуля до бесконечности.

Как видно из рис. 10.1, из точки $\xi = 0$ на плоскости (σ, f) можно выйти только с помощью σ -волны; вдоль кривой $c = c^0$ в точку $\xi \rightarrow \infty$ можно попасть только σ -скачком с кривой $c = 0$. Переход с кривой $c = c^0$ осуществляется с помощью c -скачка. Найдем значения насыщенности перед скачком и за ним. Проведем из точки O_c касательную к кривой $c = c^0$; 1 — точка касания; 2 — точка пересечения касательной с кривой $c = 0$; (σ_1, f_1) , (σ_2, f_2) — соответственно координаты этих точек. Если точка за разрывом σ^+ лежит выше точки 1 ($\sigma^+ > \sigma_1$), то для скорости разрыва D выполняются следующие неравенства:

$$f'_\sigma(\sigma^+, c^0) < D = \frac{f^+ + h}{\sigma^+ + b} < f'_\sigma(\sigma^-, 0).$$

Как следует из (10.18), такой разрыв неустойчив. Если точка за разрывом лежит ниже точки 1 ($\sigma^+ < \sigma_1$), то для скорости разрыва справедливо неравенство

$$D = \frac{f^+ + h}{\sigma^+ + b} < f'_\sigma(\sigma^-, c^0).$$

Оно означает, что значение автомодельной переменной ξ в σ -волне, предшествующей c -скачку, больше скорости скачка, т. е. величина ξ вдоль пути немонотонна. Отсюда следует, что переход с кривой $c = c^0$ на кривую $c = 0$ осуществляется скачком из точки 1 в точку 2.

Рассмотрим случай, когда точка 2 лежит на кривой $c = 0$ ниже, чем точка фронтовой насыщенности при вытеснении нефти водой ($\sigma_2 < \sigma_f$). Как видно из рис. 10.1, это соответствует случаю слабой сорбции, т. е. малых значений константы Γ .

Переход из точки 2 в точку σ^* осуществляется σ -скачком; при $\sigma_2 < \sigma_f$ этот скачок устойчив.

Путь, соответствующий автомодельному решению задачи (10.25) (10.26), состоит из σ -волны, соответствующей движению вдоль кривой $c = c^0$ от точки σ^0 (c^0) до точки 1, c -скачка из точки 1 в точку 2, точки покоя 2 и σ -скачка в точку σ_* . Решение имеет вид

$$\xi = f'_\sigma(\sigma, c^0), \quad c = c^0 \quad 0 < \xi < D_1 = \frac{f_1 + h}{\sigma_1 + b} = f'_\sigma(\sigma_1, c^0); \quad (10.29)$$

$$\sigma = \sigma_2, \quad c = 0, \quad D_1 = \frac{f_2 + h}{\sigma_2 + b} < \xi < D_2 = \frac{f_2}{\sigma_2 - \sigma_*}; \quad (10.30)$$

$$\sigma = \sigma_*, \quad c = 0, \quad D_2 < \xi < \infty. \quad (10.31)$$

Здесь D_1 — скорость c -скачка; D_2 — скорость σ -скачка.

На рис. 10.2 в координатах (ξ, τ) приведена динамика фронтов вытеснения, распределения насыщенности и концентрации активной примеси в процессе вытеснения.

Обычно растворы химических реагентов закачивают в пласты в виде конечных объемов (оторочек), продвигаемых по пласту водой. Безразмерные переменные ξ и τ вводятся таким образом, что

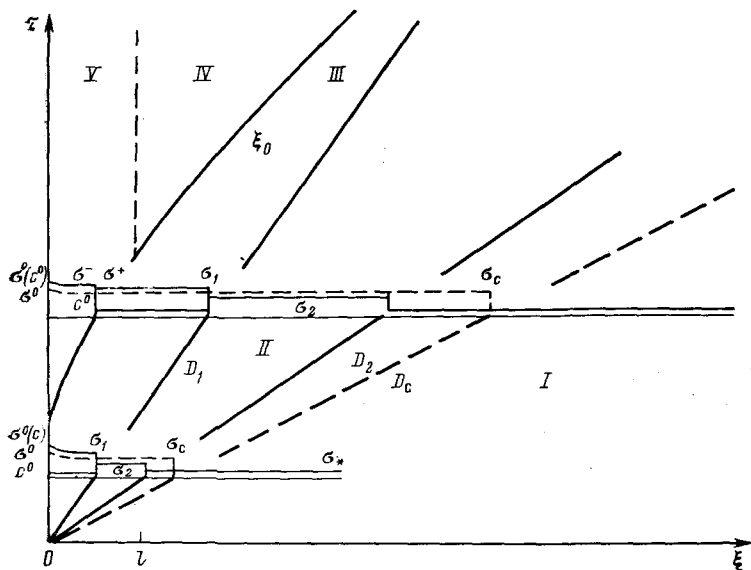


Рис. 10.2. Построение σ -скачков и c -скачков и структура решения

при $\tau < 1$ в пласт закачивают раствор химического реагента, при $\tau > 1$ — воду, проталкивающую оторочку по пласту. При $0 < \tau < 1$ решение задачи о вытеснении нефти оторочкой совпадает с решением задачи о вытеснении нефти раствором активной примеси, (10.29) — (10.31). На рис. 10.2 внизу приведены профили насыщенности при вытеснении нефти раствором активной примеси (сплошная линия) и водой (пунктир). Перед фронтом вытеснения, скорость которого равна D_2 , находится зона I невозмущенного течения, в ней $\sigma = \sigma_*$, $c = 0$. Затем следует водонефтяной вал II, в котором примесь отсутствует, а водонасыщенность постоянна, $c = 0$, $\sigma = \sigma_2$. Далее следует зона III течения водонефтяной смеси в присутствии химического реагента, скорость фронта которого равна D_1 . В этой зоне $c = c^0$, насыщенность монотонно возрастает от σ_1 за фронтом концентрации до σ^0 (c^0) на нагнетательной галерее.

При сильной сорбции точка 2 на кривой $c = 0$ лежит выше точки, соответствующей фронтовой насыщенности σ_c при вытеснении нефти водой. В этом случае переход из точки 2 в точку σ_* осуществляется простой волной до точки σ_c , а затем σ -скачком в точку σ_* .

Особенность течения, описываемого решением (10.29) — (10.31), — отставание фронта химического реагента от фронта вытеснения ($D_1 < D_2$). Это связано с сорбируемостью химического реагента, с растворимостью его в нефти, а также с наличием в пласте остаточной воды до начала вытеснения. Из рис. 10.1 видно, что с увеличением сорбируемости точка O_c смещается влево и наклон касательной D_1 уменьшается, а наклон D_2 возрастает. При увеличении растворимости примеси в нефти точка O_c смещается вниз параллельно биссектрисе третьего координатного угла. С увеличением начальной водонасыщенности наклон отрезка D_2 , соединяющего точки 2 и σ_* , увеличивается. Это приводит к увеличению отставания фронта вытеснения от фронта химического реагента. Фронты совпадают ($D_1 = D_2$) только в случае, когда примесь не сорбируется и не растворяется в нефти, а начальная водонасыщенность равна нулю.

В момент $\tau = 1$ на оси $\xi = 0$ образуется разрыв, распространяющийся вдоль траектории $\xi = x_0(\tau)$. Это связано с окончанием закачки раствора активной примеси и началом нагнетания проталкивающей воды. На разрыве происходит полный скачок концентрации, $c^+(x_0) = c^0$, $c^-(x_0) = 0$. Линия $x_0(\tau)$ является тылом оторочки.

На разрыве выполняются условия (10.16). Поэтому на плоскости (σ, f) точка σ^+ на кривой Баклея—Леверетта $c = c^0$, соответствующая насыщенности перед тылом оторочки, и точка σ^- на кривой $c = 0$, соответствующая насыщенности за тылом оторочки, лежат на одной прямой, проведенной через точку O_c (см. рис. 10.1).

Перед тылом оторочки при $\xi > x_0(\tau)$ решение описывается формулами (10.29) — (10.31). В частности, распределение насыщенности в оторочке описывается формулой (10.29). Это обстоятельство в совокупности с условиями (10.16) на разрыве позволяет определить движение тыла оторочки $x_0(\tau)$:

$$\frac{1+h}{\tau} = \Delta(\sigma^+(x_0), c^0), \quad \frac{1+h}{x_0(\tau)} = \frac{\Delta(\sigma^+(x_0), c^0)}{f'_\sigma(\sigma^+(x_0) c^0)}.$$

Здесь $\Delta(\sigma, c) = f(\sigma, c) + h - (\sigma + b)f'_\sigma(\sigma, c)$.

Приведенные уравнения задают зависимость $x_0(\tau)$ параметрически, параметром является насыщенность перед тылом оторочки $\sigma^+(x_0)$.

С ростом τ по мере движения $x_0(\tau)$ величины σ^+ и σ^- убывают, скорость движения тыла возрастает. При $\tau \rightarrow \infty$ скорость тыла возрастает до скорости фронта оторочки D_1 , при этом $\sigma^+ \rightarrow \sigma_1$, $\sigma^- \rightarrow \sigma_3$.

Формулы движения тыла оторочки имеют простую геометрическую интерпретацию. Проведем касательную к кривой $c = c^0$ в точке σ^+ до пересечения с осью $\sigma = -b$ в точке A и с осью $f = -h$ в точке B (см. рис. 10.1). Тогда, как легко видеть, $AO_c = \Delta(\sigma^+, c^0)$, $BO_c = \Delta(\sigma^+, c^0)/f'_\sigma(\sigma^+, c^0)$. Поэтому, если отложить отрезок $AO_c = (1+h)/\tau$ и из точки A провести касательную к кри-

вой $c = c^0$, то точка касания определит величину $\sigma^+(x_0)$, а точка B пересечения с прямой $f = -h$ определит положение тыла оторочки: $BO_c = (1 + h)/x_0$.

При уменьшении $\sigma^-(x_0)$ от $\sigma^0(c^0)$ при $\tau = 1$ до σ_3 при $\tau \rightarrow \infty$ к оси нагнетательной галереи $x = 0$ примыкает зона V , в которой $\sigma^- \geq \sigma^0$. При этом $f = 1$, нефтяная фаза неподвижна. Размер этой зоны возрастает со временем до такой величины l , при которой насыщенность за тылом оторочки равна $\sigma^0 = \sigma^-(l)$. После этого момента величина зоны V постоянна.

За тылом оторочки следует зона проталкивающей воды IV с подвижной нефтяной фазой. В ней примесь отсутствует, $c = 0$, насыщенность монотонно возрастает от σ^- за тылом оторочки до σ^0 на границе с зоной V . В зоне V насыщенность возрастает от $\sigma^0(c^0)$ на оси нагнетательной галереи.

Из условия сохранения количества примеси в оторочке получаем, что объем оторочки со временем стабилизируется. Его предельная величина равна $(1 + h)/(\sigma_1 + b)$. На плоскости (ξ, τ) линия тыла оторочки $x_0(\tau)$ имеет асимптоту с наклоном D_1 .

На рис. 10.2 при $\tau > 1$ приведены профили распределения насыщенности по пласту при вытеснении нефти оторочкой раствора активной примеси (сплошная линия) и водой (пунктир). Из сравнения этих графиков видно, что применение оторочки раствора химического реагента по сравнению с обычным заводнением приводит к продлению периода безводной эксплуатации, снижению обводненности добываемой продукции на начальной стадии водного периода разработки, увеличению степени вытеснения на заключительной стадии разработки.

Аналогичное гидродинамическое описание применимо к процессам вытеснения нефти и выпавшего в пласте газового конденсата растворителями: двуокисью углерода, мицеллярными растворами, углеводородными газами, спиртами и др. Эти процессы допускают единое описание в рамках модели трехкомпонентной фильтрации. В зависимости от компонентного состава смесь может находиться как в двухфазном, так и в однофазном состоянии. В области двухфазного течения процесс вытеснения описывается гиперболической системой двух квазилинейных уравнений, аналогичной (10.11), (10.12). В однофазной области процесс описывается системой двух линейных уравнений.

Задача вытеснения углеводородных флюидов растворителями допускает автомодельное решение, аналогичное (10.29) — (10.31). Неавтомодельная задача о вытеснении оторочкой растворителя, продвигаемой по пласту газом (водой), допускает точное решение. При этом динамика фронта и тыла оторочки, распределения насыщенностей фаз и концентраций компонентов допускает геометрическую интерпретацию, аналогичную рис. 10.2. Эти решения позволяют проводить качественный гидродинамический анализ процессов вытеснения и их показателей.

§ 5. ОСНОВЫ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

При разработке нефтегазоносных пластов содержащиеся в них флюиды могут приобрести температуру, отличную от естественной температуры пластов. Изменение температуры в продуктивных пластах может происходить вследствие различных причин и условий в зависимости от характера фильтрации природных флюидов и вида искусственного теплового воздействия на продуктивные коллекторы в процессе применения той или иной технологии разработки.

Можно выделить три основные группы причин, приводящих к неизотермическим условиям фильтрации.

1. Действие термодинамических эффектов при движении пластовых флюидов в пористой среде:

а) баротермический эффект (эффекты Джоуля—Томсона и адиабатического расширения);

б) эффект фазовых превращений (при выделении растворенного газа, выпадении парафина и др.).

2. Нагнетание в пласты различных вытеснителей с температурой, отличной от начальной пластовой, с целью поддержания пластового давления и повышения эффективности извлечения нефти:

а) холодной воды с температурой ниже начальной пластовой;

б) горячей воды с температурой выше пластовой;

в) пара или пароводяной смеси, температура которой существенно превышает пластовую.

3. Осуществление различных термохимических окислительных процессов, в результате которых происходит генерация теплоты в коллекторах и призабойных зонах скважин:

а) внутрипластовое горение;

б) различные экзотермические реакции при обработке пластов и др.

При разработке месторождений возникают различные сочетания и комбинации указанных процессов, что приводит к неизотермическому характеру фильтрации. Тепловое воздействие на пласт изменяет основные фильтрационные параметры: вязкость флюидов, капиллярные силы, реологические свойства движущихся агентов и др. При этом изменяются коэффициенты вытеснения, фазовые проницаемости и т. д., вследствие чего температурный фактор существенно влияет как на текущие фильтрационные характеристики, так и на конечную нефтеотдачу.

При математическом описании и моделировании процессов неизотермической фильтрации оказывается недостаточным использование дифференциальных уравнений, полученных в гл. 3 (для однофазного потока) и в гл. 9 (для многофазной фильтрации). В этом случае появляется новая неизвестная переменная — температура. Для исследования температурного поля пласта и насыщающих его флюидов необходимо привлекать термодинамические соотношения и прежде всего первый закон термодинамики (закон сохра-

нения энергии), являющийся основой для получения замыкающего уравнения — уравнения энергии для пластовой системы.

Выведем уравнение сохранения энергии (уравнение притока теплоты), введя несколько упрощающих допущений. Будем считать температуры жидкости и скелета породы одинаковыми: $T_{\text{ж}} = T_{\text{ск}} = T$. Это правомочно потому, что если в некоторый момент существует разность температур между жидкостью и скелетом, она исчезает очень быстро, так как поверхность теплообмена между жидкостью и пористой средой огромна.

Составим уравнение энергетического баланса для элемента системы жидкость — пористая среда. Для простоты ограничимся одномерной задачей, жидкость будем считать несжимаемой; пренебрежем изменением кинетической энергии вследствие ее малости, а также притоком теплоты от вязкой диссипации.

В пористой среде выделим цилиндрический элемент длиной dx и площадью сечения ω . При перечисленных условиях изменение внутренней энергии жидкости и твердого скелета в этом элементе будет определяться количеством теплоты, поступающей в элемент через границы. Если обозначить через u внутреннюю энергию единицы массы жидкости, а через $u_{\text{ск}}$ — внутреннюю энергию единицы массы скелета, то внутренняя энергия системы жидкость—пористая среда в выделенном объеме запишется в виде

$$(\rho u m + \rho_{\text{ск}} u_{\text{ск}} (1 - m)) \omega dx, \quad (10.32)$$

где $\rho_{\text{ск}}$ — плотность вещества скелета; m — коэффициент пористости.

Будем предполагать, что перенос теплоты осуществляется, во-первых, конвективным путем, т. е. вместе с движущимися частицами жидкости и, во-вторых, за счет теплопроводности (т. е. перенос теплоты не связан с перемещением объемов жидкости). Как известно из теории теплопроводности, поток теплоты q_T в результате теплопроводности определяется по закону Фурье

$$q_T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10.33)$$

где λ — коэффициент теплопроводности (в нашем случае для насыщенной пористой среды).

Поскольку перенос теплоты за счет конвекции составляет $\rho u \omega$, то общий поток теплоты (на единицу площади) равен:

$$q = \rho u \omega + q_T = \rho u \omega - \lambda \partial T / \partial x. \quad (10.34)$$

Изменение теплоты в элементе равно:

$$[q(x) - q(x + dx)] \omega = -\frac{\partial q}{\partial x} dx \omega. \quad (10.35)$$

Приравняв это выражение изменению внутренней энергии (10.32) за единицу времени, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho u m + \rho_{\text{ск}} u_{\text{ск}} (1 - m)) \omega dx] = -\frac{\partial q}{\partial x} dx \omega,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u m + \rho_{\text{ск}} u_{\text{ск}} (1 - m)) = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (10.36)$$

Для несжимаемой жидкости и недеформируемой пористой среды внутренняя энергия определяется из соотношений

$$u = c' T; \quad u_{\text{ск}} = c'_{\text{ск}} T, \quad (10.37)$$

где c' и $c'_{\text{ск}}$ — удельные массовые теплоемкости жидкости и скелета. Введя объемные теплоемкости жидкости и скелета $c = \rho c'$, $c_{\text{ск}} = \rho_{\text{ск}} c'_{\text{ск}}$, считая их, а также коэффициент теплопроводности λ постоянными и используя (10.37), приведем уравнение сохранения энергии к виду

$$(mc + (1 - m) c_{\text{ск}}) \frac{\partial T}{\partial t} = - c w \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (10.38)$$

Выведенное уравнение (10.38) можно обобщить на случай трехмерного течения. В векторной форме оно запишется следующим образом:

$$(mc + (1 - m) c_{\text{ск}}) \frac{\partial T}{\partial t} = - c \operatorname{div} (\vec{w} T) + \lambda \nabla^2 T. \quad (10.39)$$

Уравнение теплопереноса (10.39) совместно с уравнением неразрывности для жидкости и законом Дарси или другим законом фильтрации (см. гл. 3) образует замкнутую систему уравнений неизотермической фильтрации однофазной несжимаемой жидкости в недеформируемом пласте для определения переменных p , $\vec{w}$, T .

При решении конкретных задач нужно дополнительно сформулировать граничные условия для уравнения (10.39) и рассмотреть вопросы теплообмена пласта с окружающими породами через кровлю и подошву.

§ 6. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛАСТА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ КРОВЛЮ И ПОДОШВУ

При расчете температурного поля пласта на входе в пласт (или на забое скважины) обычно задают постоянную температуру или полное количество теплоты, вносимой в пласт. Вопрос об условиях на кровле и подошве пласта требует специального рассмотрения.

Наиболее простое условие — теплоизолированность кровли и подошвы: поток теплоты на этих границах пласта равен нулю. Это довольно грубое приближение; его можно принять для пластов большой толщины, когда время закачки горячей жидкости невелико. В большинстве практических случаев потери теплоты через кровлю и подошву пласта могут быть значительными и их следует учитывать.

При определении потока теплоты через кровлю и подошву пласта принимают дополнительные упрощения. Наиболее известное упрощение состоит в том, что поток теплоты через каждый элемент

кровли и подошвы пласта считают происходящим только в направлении, перпендикулярном напластованию. При этом для описания оттока теплоты q_0 через кровлю и подошву используют обычно два подхода. Первый из них основан на предположении о квазистационарности теплового потока, что приводит к следующей формуле:

$$q_0 = a(T - T_0),$$

где T — температура пласта; T_0 — начальная температура окружающих пород; a — коэффициент теплопередачи, зависящий от термических свойств пород.

Второй подход (наиболее распространенный) предложил Ловерье. Схема Ловерье основана на допущении, что теплопроводность продуктивного пласта и окружающих пород в направлении простирания пласта равна нулю, а в вертикальном направлении теплопроводность окружающих пород λ_0 равна среднему значению, а теплопроводность пласта бесконечно велика. Эта схема пригодна в тех случаях, когда прогревание пласта происходит довольно быстро, так что окружающие породы прогреваются в основном от ближайших точек кровли или подошвы пласта за счет вертикальной теплопроводности пород.

В соответствии со схемой Ловерье для температуры окружающей пласт горной породы имеем уравнение, получаемое из (10.39) при $w = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_0 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (10.40)$$

где $\kappa_0 = \lambda_0/c_0$ — коэффициент температуропроводности окружающих пород; c_0 — объемная теплоемкость пород.

Пусть в начальный момент времени температура породы постоянна и равна T_0 , а на границе с пластом при $z = 0$ температура изменяется с течением времени по известному закону, так что

$$T(z, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_n(t). \quad (10.41)$$

Если температура кровли $T_n(t) = T_n = \text{const}$, $T_n > T_0$, то задача (10.40), (10.41) полностью аналогична задаче о прямолинейно-параллельной фильтрации упругой жидкости при постоянном давлении на галерее (см. § 4, гл. 6). Решение этой задачи имеет вид

$$\frac{T - T_0}{T_n - T_0} = \text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa_0 t}}\right). \quad (10.42)$$

Здесь $\text{erfc } x$ — табулированная функция:

$$\text{erfc } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Дифференцируя (10.42), получаем в соответствии с (10.33) выражение для потока теплоты q_0 на единицу площади кровли при $z = 0$:

$$q_0 = -\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\lambda_0 (T_n - T_0)}{\sqrt{\pi \kappa_0 t}}, \quad (10.43)$$

т. е. отток теплоты в окружающие породы убывает во времени обратно пропорционально $\sqrt{t}$.

Если $T_n \neq \text{const}$, то решение уравнения (10.40) при условиях (10.41) можно получить с помощью преобразования Лапласа. В этом случае вместо (10.43) для оттока теплоты по схеме Лавереье имеем:

$$q_0 = \lambda_0 \int_0^t \frac{dT_n(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \kappa_0 (t - \tau)}}. \quad (10.44)$$

Здесь приняли, что температура на кровле в начальный момент совпадает с температурой горных пород, так что $T_n(0) = T_0$.

Существуют и другие приближенные приемы определения q_0 .

Рассмотрим теперь постановку задачи об определении температурного поля пласта при осесимметричной фильтрации несжимаемой жидкости (в случае единичной скважины) с заданным расходом.

Будем считать, что коэффициенты теплопроводности в горизонтальном и вертикальном направлениях различны; обозначим их, соответственно, λ_r, λ_z — для пласта и $\lambda_{or}, \lambda_{oz}$ — для окружающих пород. Предполагаем, что течение жидкости — плоскорадиальное и объемный расход $Q = \omega 2\pi r h = \text{const}$ (h — толщина пласта). Будем называть эту постановку «точной».

Тогда уравнение теплопереноса в пласте получается из (10.39) после проведения векторных операций div и ∇^2 в цилиндрических координатах. Имеем:

$$c_n \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{cQ}{2\pi r h} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (0 < z < h) \quad (10.45)$$

где

$$c_n = mc + (1 - m) c_{ск}. \quad (10.46)$$

Для окружающих пород, в которых фильтрация отсутствует,

$$c_o \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{or}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{oz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (10.47)$$

где $z > h$ для пород, расположенных выше кровли, и $z < 0$ — для пород, лежащих ниже подошвы пласта.

На кровле ($z = h$) и подошве ($z = 0$) пласта граничными условиями для уравнений (10.45) и (10.47) будут условия непрерывности температуры и потока теплоты. Граничное (на скважине) и начальное условия можно взять в виде

$$T(r, z, 0) = T_0, \quad T(0, z, t) = T_c \quad \text{при } 0 < z < h.$$

Численное решение задачи в данной точной постановке получено разностными методами.

§ 7. НАГРЕВАНИЕ ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЫ ПЛАСТА ПРИ ЗАКАЧКЕ ГОРЯЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Пусть в пласт толщиной h с теплоемкостью c_{π} через скважину закачивается горячая (или холодная) вода с температурой T_c , отличной от начальной пластовой T_0 , и постоянным расходом Q . Если считать кровлю и подошву пласта теплоизолированными и пренебречь оттоком теплоты через кровлю и подошву, а также не учитывать теплопроводность в самом пласте и рассматривать только конвективный перенос теплоты, то задача об определении поля температуры пласта сильно упрощается. В этом случае (10.39) для рассматриваемого плоскорадиального течения принимает вид

$$c_{\pi} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{cQ}{2\pi rh} \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

т. е. сводится к решению линейного гиперболического уравнения. Общее решение этого уравнения находится методом характеристик (см. § 5, гл. 9) и имеет следующий вид:

$$T(r, t) = \Phi\left(t - \frac{c_{\pi} V}{cQ}\right). \quad (10.48)$$

Здесь $V = \pi r^2 h$, а Φ — произвольная функция своего аргумента.

Используя условие, что на скважине ($r = 0$) задана температура нагнетания воды $T_c(t)$, из (10.48) находим

$$T(0, t) = T_c(t) = \Phi(t).$$

Тогда

$$T(r, t) = T_c\left(t - \frac{c_{\pi} V}{cQ}\right). \quad (10.49)$$

Из (10.49) следует, что температурный профиль в этих условиях сохраняется (распространяется без искажений); к моменту времени t он достигает сечения пласта, положение r_T которого определяется из равенства

$$V = \pi r_T^2 h = cQt/c_{\pi}, \quad (10.50)$$

а «объемная скорость» распространения тепловой волны постоянна и равна cQ/c_{π} . Учитывая выражение (10.46) для теплоемкости c_{π} пласта, эту скорость можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{cQ}{c_{\pi}} = \frac{cQ}{mc + (1-m)c_{\text{ск}}} = \frac{Q}{m} \frac{1}{1 + \frac{(1-m)}{m} \frac{c_{\text{ск}}}{c}}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{cQ}{c_{\pi}} < \frac{Q}{m},$$

т. е. «объемная скорость» тепловой волны оказывается существенно

меньше «объемной скорости» Q/m фронта нагнетаемой жидкости, перемещающегося в области с начальной пластовой температурой T_0 . Это означает, что фронт тепловой волны всегда отстает от фронта нагнетаемой жидкости.

Из равенства (10.50) определяется радиус прогретой зоны пласта

$$r_T = \sqrt{\frac{cQt}{\pi h c_n}}. \quad (10.51)$$

Рассмотренное решение было получено И. А. Чарным. Формула (10.51) не учитывает потерь теплоты через кровлю и подошву, но очень проста и удобна для оценочных расчетов. Учет этих потерь приводит к еще меньшим значениям радиуса прогрева r_T .

Сопоставим формулу (10.51) с формулой для расчета движения фронта воды r_c при двухфазном течении. В соответствии с теорией двухфазной фильтрации, изложенной в гл. 9, из выражения (9.56) с учетом (9.36) находим

$$r_c = \sqrt{f'(\sigma_c) \frac{Qt}{\pi m h}}, \quad (10.52)$$

где σ_c — фронтовая водонасыщенность.

Тогда из (10.51) и (10.52) имеем

$$\frac{r_T}{r_c} = \sqrt{\frac{mc}{f'(\sigma_c) c_n}}. \quad (10.53)$$

Найдем это отношение при следующих исходных данных. Объемные теплоемкости: воды $c_v = 4,19$ Дж/(см³·°С), водонасыщенного песчаника $c_n = 1,93$ Дж/(см³·°С); $m = 0,2$; отношение вязкостей $\mu_0 = \mu_v/\mu_n = 0,1$; $\sigma_c = 0,55$, $f'(\sigma_c) = 2,2$ (примерные значения из графика на рис. 9.5). Тогда из (10.53) находим, что $r_T/r_c = 0,467$, т. е. тепловой фронт отстает от водяного примерно в 2 раза, а объем прогретой зоны составляет только 22 % от объема, занятого водой.

Указанные обстоятельства говорят о малой эффективности воздействия горячей водой при вытеснении нефти в однородном пласте. Горячая вода в основном снижает вязкость флюидов, благодаря чему уменьшает сопротивление движению в призабойной зоне. Эффект может быть достигнут лишь на поздних этапах разработки залежи, после прокачки нескольких поровых объемов. Однако в слоистых пластах этот эффект может оказаться значительным, так как воздействие теплотой в направлении от хорошо проницаемого пропластка на малопроницаемый возможно и до прохождения в нем фронта вытеснения воды. Поэтому рассмотренные схемы расчета пластовой температуры с учетом теплотерь через кровлю и подошву важны для практики.

Лабораторные и промысловые исследования показали, что для хорошо проницаемых пластов, насыщенных высоковязкой нефтью, закачка горячей воды для увеличения нефтеотдачи экономически оправдана.

Рост нефтеотдачи при закачке горячей воды обусловлен следующими факторами:

уменьшается вязкость нефти, растут отношение вязкостей $\mu_0 = \mu_v/\mu_n$ и фронтовые насыщенности (см. рис. 9.5);

уменьшается остаточная нефтенасыщенность, увеличивается коэффициент вытеснения;

растет относительная проницаемость нефти (по данным некоторых экспериментов);

улучшаются свойства смачиваемости скелета породы;

уменьшается поверхностное натяжение на границе нефть—вода;

исчезают структурные свойства нефтей.

Закачка горячей воды благотворно влияет на сроки разработки. С ростом температуры уменьшается вязкость закачиваемой воды, что увеличивает приемистость нагнетательных скважин и позволяет интенсифицировать процесс извлечения нефти.

При расчете неизотермического вытеснения нефти горячей водой используют модель двухфазного течения (см. § 4, гл. 9), в которой вязкости флюидов и функция Баклея—Леверетта зависят от температуры:

$$\mu_v = \mu_v(T), \quad \mu_n = \mu_n(T), \quad f = f(\sigma, T).$$

Температурное поле пласта находится обычно по одной из приближенных схем (например, по схеме Ловерье) или с помощью уравнения (10.39), записанного для двухфазного потока. В этом случае в нем следует положить:

$$\vec{c}\omega = c_v\vec{\omega}_v + c_n\vec{\omega}_n; \quad c_n = m[c_v\sigma + c_n(1-\sigma)] + (1-m)c_{ск},$$

где σ — водонасыщенность.

Если объемные теплоемкости нефти и воды считать приблизительно одинаковыми ($c_v \approx c_n = c$), то последние равенства упрощаются.

Особенности разностных схем при решении задач такого класса изложены в специальной литературе.

Глава 11

ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В гл. 1 в связи с исследованием нижней границы применимости закона Дарси (при очень малых числах Рейнольдса) было рассмотрено аномальное (неньютоновское) поведение флюидов в пластовых условиях, не проявляющих этих свойств вне контакта с пористой средой. Это объяснялось тем, что при очень малых скоростях фильтрации наряду с силами вязкого сопротивления стано-

влятся существенными силы сопротивления, не зависящие от скорости фильтрации и связанные с физико-химическим взаимодействием фильтрующихся жидкостей с материалом пористой среды. Учет этих сил приводит к нелинейным законам фильтрации.

Из практики разработки некоторых нефтяных месторождений (Азербайджана, Башкирии, Татарии, Казахстана) известны факты, которые можно объяснить проявлением неньютоновских свойств флюидов при их фильтрации. Особенности фильтрации таких аномальных нефтей связаны в основном с повышенным содержанием в них высокомолекулярных компонентов: смол, асфальтенов, парафина — и наличием предельного напряжения сдвига.

В последние годы развитие методов воздействия на природные залежи с целью увеличения нефте- и газоконденсатотдачи привело к значительному расширению ассортимента веществ, закачиваемых в продуктивные пласты. Многие из этих веществ (высокомолекулярные соединения, полимеры) не обладают свойствами ньютоновских жидкостей. Поэтому рассмотрение особенностей фильтрации неньютоновских систем приобретает самостоятельное значение.

В этой главе будем рассматривать нелинейные законы фильтрации, описывающие только безынерционные движения при условии, что фильтрующиеся жидкости обладают неньютоновскими свойствами.

§ 1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Для ньютоновской жидкости единственным параметром, характеризующим ее течение, является динамический коэффициент вязкости μ — коэффициент пропорциональности в законе вязкого трения Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}, \quad (11.1)$$

где τ — касательное напряжение; dw/dy — градиент скорости в направлении, перпендикулярном направлению течения x . Зависимость между τ и dw/dy является в этом случае прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 11.1, кривая 2).

Жидкости, не подчиняющиеся закону трения (11.1), называются аномальными, или

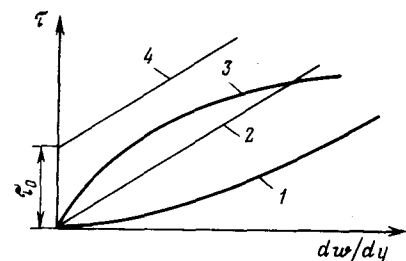


Рис. 11.1. Зависимость касательного напряжения от градиента скорости.

Жидкость: 1 — дилатантная; 2 — ньютоновская; 3 — псевдопластичная; 4 — вязкопластичная

неньютоновскими. Неньютоновские жидкости можно разбить на три класса.

1. Неньютоновские вязкие жидкости, для которых касательное напряжение зависит только от градиента скорости (стационарно

реологические жидкости):

$$\tau = \dot{f}(dw/dy). \quad (11.2)$$

2. Жидкости, для которых связь между τ и dw/dy зависит от времени действия напряжений (нестационарно реологические жидкости), т. е.

$$\tau = f(dw/dy, t).$$

3. Вязкоупругие жидкости, т. е. среды, обладающие свойствами как твердого тела, так и жидкости, а также способные к частичному восстановлению формы после снятия напряжений. Для таких сред зависимость между касательными напряжениями и градиентом скорости более сложная; она включает производные по времени как напряжений, так и градиента скорости.

Среди неньютоновских жидкостей первого класса, описываемых уравнением (11.2), можно выделить три типа.

1. Вязкопластичные жидкости, для которых уравнение (11.2) имеет вид

$$\frac{dw}{dy} = \frac{1}{\mu} (\tau - \tau_0) \quad \text{при} \quad \tau > \tau_0, \quad (11.3)$$

$$dw/dy = 0 \quad \text{при} \quad \tau \leq \tau_0.$$

Графическое представление этой зависимости, называемое реологической кривой (или «кривой течения»), приведено на рис. 11.1 (кривая 4). В равенство (11.3), кроме коэффициента вязкости μ , входит также постоянная τ_0 , называемая начальным (или предельным) напряжением сдвига. Считается, что при $\tau \leq \tau_0$ жидкость ведет себя как твердое тело и течение отсутствует. Это объясняется наличием у покоящейся вязкопластичной жидкости пространственной жесткой структуры, сопротивляющейся любому напряжению τ , меньшему τ_0 . Когда τ становится больше τ_0 , структура разрушается.

2. Псевдопластичные жидкости. Эксперименты показали, что для ряда сред связь между напряжением сдвига и градиентом скорости в логарифмических координатах оказывается на некотором участке линейной. Угловым коэффициентом соответствующей прямой заключен между 0 и 1. Поэтому для описания таких сред используется степенная зависимость

$$\tau = k(dw/dy)^n, \quad (n < 1), \quad (11.4)$$

где k и n постоянны для данной жидкости; коэффициент k — мера консистенции жидкости; отличие показателя n от единицы характеризует степень отклонения данной жидкости от ньютоновской. Типичная реологическая кривая (11.4) псевдопластичной жидкости приведена на рис. 11.1 (кривая 3). Модель псевдопластичной жидкости применяется, в частности, для описания движения растворов и расплавов полимеров.

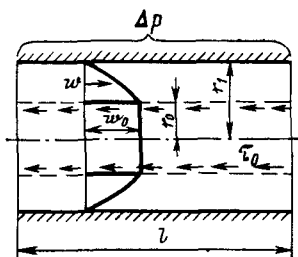


Рис. 11.2. Эпюра скоростей вязкопластичной жидкости при движении в капилляре

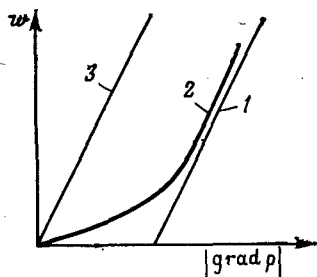


Рис. 11.3. [Индикаторные линии:

1 — для неньютоновской жидкости; 2 — ее линейная аппроксимация; 3 — зависимость по закону Дарси

Введем понятие кажущейся вязкости μ_* как отношения касательного напряжения к градиенту скорости:

$$\mu_* = \tau / (dw/dy).$$

Для псевдопластичной жидкости, как следует из (11.4), эта величина

$$\mu_* = k (dw/dy)^{n-1},$$

и так как $n < 1$, то μ_* убывает с возрастанием градиента скорости.

3. Дилатантные жидкости описываются степенным уравнением (11.4), но при $n > 1$. Кривая течения представлена на рис. 11.1 (кривая 1). У этих жидкостей кажущаяся вязкость μ_* увеличивается с возрастанием градиента скорости. Модель дилатантной жидкости хорошо описывает свойства суспензий с большим содержанием твердой фазы.

Рассмотрим наиболее простой случай среды с неньютоновскими свойствами: стационарное движение вязкопластичной жидкости (11.3) в одной поре как в капиллярной трубке постоянного радиуса. Распределение скоростей в некотором сечении трубки представлено на рис. 11.2. На некотором расстоянии r_0 от оси трубки касательное напряжение $\tau = \tau_0$, что выражается равенством (11.3), где $dw/dy = dw/dr$, причем $dw/dr = 0$ при $r = r_0$. Расстояние r_0 определяется из условия равновесия жидкого цилиндрического слоя (см. рис. 11.2):

$$2\pi r_0 l \tau_0 = \pi r_0^2 \Delta p,$$

откуда

$$d_0 = 2r_0 = 4l\tau_0/\Delta p. \quad (11.5)$$

Предположим, что в (11.5) $d_0 = 2r_1 = d$; найдем наибольший перепад давления $(\Delta p)_0$, при котором вязкопластичная жидкость находится в предельном равновесии, отвечающем полному прекращению движения в данной поре. Тогда из (11.5) найдем

$$\gamma = (\Delta p/l)_0 = 4\tau_0/d \quad (11.6)$$

Это предельное значение γ определяет тот градиент давления $(\Delta p/\eta)_0$, по достижении которого начинается движение жидкости. При меньших значениях градиента движение отсутствует. Если учесть, что характерный размер пор пористой среды $d \sim \sqrt{k}$ (где k — проницаемость, см. § 7, гл. 2), то из (11.6) находим:

$$\gamma \sim \tau_0/\sqrt{k}. \quad (11.7)$$

Величина γ называется предельным (начальным) градиентом. Если для исследуемого фильтрационного течения такое предельное значение существует, то говорят о фильтрации с предельным (начальным) градиентом.

Соответствующий закон фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде был сформулирован в гл. 1 и получен из соображений размерности в § 7, гл. 2:

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}, \quad w > 0;$$

$$|\text{grad } p| \leq \gamma, \quad w = 0. \quad (11.8)$$

В соответствии с (11.8) скорость фильтрации $\vec{w}$ отлична от нуля только в тех областях, где $|\text{grad } p| > \gamma$ (рис. 11.3, кривая 1). Модель фильтрации с предельным градиентом следует рассматривать как некоторую идеализацию реальных течений аномальных нефтей в пластовых условиях, для которых реологическая кривая имеет вид кривой 2 на рис. 11.3. Для сравнения на рис. 11.3 показан закон Дарси (кривая 3).

В пористой среде, состоящей из множества микрокапилляров различных диаметров, при снижении перепада давления начинается постепенное «закупоривание» капилляров. В соответствии с формулой (11.6) вначале движение прекращается в наиболее мелких капиллярах (порах), а по мере снижения давления происходит закупоривание все больших и больших капилляров. Чем сильнее разброс размеров пор, тем больше растянут переход к полному прекращению движения и тем сильнее отличается истинный закон фильтрации от соотношения (11.8).

В основе проявления неньютоновских свойств пластовых систем лежат различные физические механизмы. Важно, однако, что неньютоновские эффекты проявляются при малых скоростях фильтрации и в средах с малым размером пор, т. е. с малой проницаемостью. Это определяет особенности неньютоновской фильтрации в неоднородных пластах. Области малой проницаемости оказываются областями наибольшего проявления неньютоновских эффектов.

Рассмотрим это на примере пласта со слоистой неоднородностью. В слоистых пластах предельные градиенты различны для разных пропластков. Как следует из (11.7), чем больше проницаемость, тем меньше предельный градиент γ , и наоборот.

Предположим, что для каждого пропластка справедлив закон фильтрации типа (11.8) с предельным градиентом:

$$\vec{\omega}_i = - \frac{k_i}{\mu} \left(\text{grad } p - \gamma_i \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right), \quad \text{если } |\text{grad } p| > \gamma_i; \quad (11.9)$$

$$\omega_i = 0, \quad \text{если } |\text{grad } p| < \gamma_i.$$

Здесь индекс i соответствует характеристикам i -го пропластка.

Для определенности рассмотрим пласт, состоящий из трех пропластков различной проницаемости: $k_1 > k_2 > k_3$; тогда $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. Будем предполагать, что пропластки идеально сообщаются между собой, т. е. можно пренебречь изменением давления по толщине. Это эквивалентно допущению, что возникающие между отдельными пропластками разности давлений быстро выравниваются за счет обмена жидкостью между слоями. Усредняя в этом предположении скорость фильтрации по суммарной толщине H слоистого пласта и используя (11.9), находим среднюю скорость фильтрации

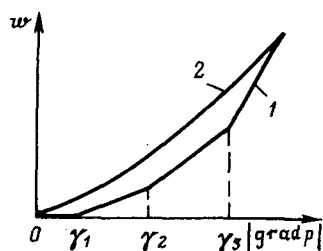


Рис. 11.4. Зависимость w от $|\text{grad } p|$:

1 — кусочно-линейная (в слоистом пласте); 2 — при непрерывном изменении проницаемости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{H} \int_0^H \vec{\omega}_i dz = - \frac{1}{H} \left[\sum_{i=1}^j \left(\frac{k_i h_i}{\mu} - \frac{\gamma_i}{|\text{grad } p|} \right) \text{grad } p \right]. \quad (11.10)$$

Здесь номер пропластка $0 \leq j \leq 3$, до которого ведется суммирование, определяется из условия

$$\gamma_j < |\text{grad } p| \leq \gamma_{j+1}. \quad (11.11)$$

Отсюда следует, что пропластки будут последовательно включаться в работу. Если $|\text{grad } p| < \gamma_1$, то движение отсутствует во всем пласте ($w = 0$). Если $\gamma_1 < |\text{grad } p| < \gamma_2$, то фильтрация будет только в первом пропластке, и т. д. Следовательно, соотношение (11.10) представляет собой кусочно-линейный закон фильтрации, описываемый выпуклой к оси абсцисс ломаной линией (кривая 1 на рис. 11.4). Отсюда легко перейти к случаю непрерывно изменяющейся проницаемости по толщине пласта (кривая 2 на рис. 11.4). В обоих случаях закон фильтрации имеет прямолинейный участок в области больших скоростей.

В соответствии с кусочно-линейным законом (11.9) фильтрацию жидкости с предельным градиентом в слоистом пласте можно рассматривать как движение в однородном пласте со средней скоростью фильтрации w .

Наряду с рассмотренными законами фильтрации (11.8) и (11.10), описывающими течение вязкопластичной жидкости в пористой

среде, рассматривают степенной закон фильтрации:

$$\vec{w} = -C |\text{grad } p|^n \text{grad } p, \quad (11.12)$$

где C — экспериментальная константа; $n > 0$.

Степенной закон (11.12), соответствующий псевдопластичному флюиду (11.4), хорошо описывает движение растворов полимеров в пористой среде и используется при расчете «полимерного» заводнения пластов с целью повышения их нефтеотдачи.

§ 2. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Движение аномальных нефтей в пластах по закону (11.8) приводит к существенным особенностям разработки этих пластов, не встречающимся в случае фильтрации по закону Дарси.

Установившееся течение

Рассмотрим плоскорадиальный приток несжимаемой вязкопластичной жидкости (ВПЖ) к скважине при условии выполнения соотношения (11.8), которое в этом случае принимает вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k} w + \gamma, \quad (w > 0), \quad (11.13)$$

$$dp/dr \leq \gamma, \quad (w = 0).$$

Выведем формулу для дебита скважины в круговом пласте, обобщающую формулу Дюпюи (см. § 2, гл. 4). Из (11.13) имеем:

$$w = \frac{Q}{2\pi rh} = \frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dr} - \gamma \right), \quad \text{если} \quad \frac{dp}{dr} > \gamma; \quad (11.14)$$

$$w = 0, \quad \text{если} \quad dp/dr \leq \gamma.$$

Считая заданными постоянные давления на забое скважины и на границе пласта

$$p(r_c) = p_c; \quad p(R_k) = p_k$$

($p_k > p_c$ для рассматриваемого случая притока и $p_k < p_c$ при закачке жидкости в пласт), после интегрирования (11.14) находим

$$dp = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{2\pi h} \frac{dr}{r} + \gamma dr,$$

откуда

$$p(r) = p_c + \gamma(r - r_c) + \frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln \frac{r}{r_c} \quad (r_c \leq r \leq R_k); \quad (11.15)$$

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu \ln(R_k/r_c)} (\Delta p_c - \gamma R_k) \quad \text{при} \quad \Delta p_c > \gamma R_k; \quad (11.16)$$

$$Q = 0 \quad \text{при} \quad \Delta p_c \leq \gamma R_k \quad (\Delta p_c = p_k - p_c).$$

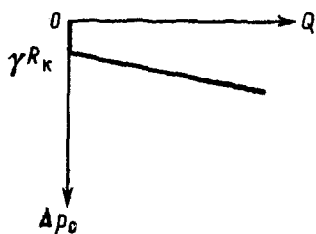


Рис. 11.5. Индикаторная линия при плоскорадиальной фильтрации вязкопластичной жидкости

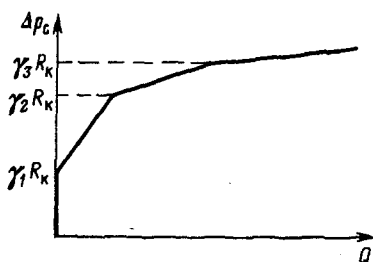


Рис. 11.6. Индикаторная линия для трехслойного пласта

Формулами (11.15), (11.16) представлены, соответственно распределение давления в пласте и дебит скважины. Из формулы (11.15) видно, что часть разности давлений в виде линейного слагаемого с угловым коэффициентом γ теряется на преодоление градиента давления сдвига. При $Q \rightarrow 0$, как следует из (11.15), давление не постоянно (как в случае фильтрации по закону Дарси), а изменяется по линейному закону. Как видно из (11.16), наличие предельного градиента давления в пласте ведет к уменьшению дебита скважины при тех же условиях по сравнению с фильтрацией по закону Дарси (формула Дюпюи). В рассматриваемом случае индикаторная линия скважины, т. е. зависимость Q (Δp_c), — прямолинейная, но не проходит через начало координат, а отсекает на оси депрессий отрезок, равный γR_k (рис. 11.5).

Обобщим полученные результаты на случай слоистого пласта (см. рис. 11.4). Пусть пропластки гидродинамически изолированы, т. е. отсутствуют перетоки между слоями с разными проницаемостями. Тогда для дебита в каждом пропластке справедлива формула (11.16):

$$Q_i = \frac{2\pi k_i h_i}{\mu \ln(R_k/r_c)} (\Delta p_c - \gamma_i R_k) \quad (\Delta p_c > \gamma_i R_k); \quad (11.17)$$

$$Q_i = 0 \quad (\Delta p_c \leq \gamma_i R_k),$$

а суммарный дебит Q равен

$$Q = \sum_{i=1} Q_i. \quad (11.18)$$

Если, как и ранее, проницаемости пропластков занумерованы так, что $k_1 > k_2 > k_3 > \dots$, и, следовательно, $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots$, то индекс j в (11.18) определяется условием (11.11). Пусть $\Delta p_c < \gamma_1 R_k$, тогда во всем пласте движение отсутствует и $Q = 0$. На индикаторной линии (рис. 11.6) это представлено вертикальным отрезком. Если $\gamma_1 R_k < \Delta p_c < \gamma_2 R_k$, то движение будет только в первом пропластке; формулы (11.17), (11.18) выполняются при

$i = 1$. Пусть теперь $\gamma_2 R_k < \Delta p_c < \gamma_3 R_k$, тогда движение будет в пропластках с проницаемостями k_1 и k_2 ($j = 2$ в (11.18)), и суммарный дебит

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2\pi}{\mu \ln(R_k/r_c)} [(k_1 h_1 + k_2 h_2) \Delta p_c - (k_1 h_1 \gamma_1 + k_2 h_2 \gamma_2) R_k].$$

Наконец, при $\Delta p_c > \gamma_3 R_k$ включается и третий пропласток и т. д. Индикаторная линия представляется ломаной, выпуклой к оси депрессии.

Неустановившаяся фильтрация

Рассмотрим нестационарное течение упругой ВПЖ в упругой пористой среде. Дифференциальные уравнения для определения давления при упругом режиме пласта можно получить, дополняя закон фильтрации с предельным градиентом (11.8) или другую аппроксимацию нелинейного закона уравнением неразрывности и уравнением состояния флюида и пористой среды. Уравнение неразрывности рассматриваемого фильтрационного потока (см. § 3, гл. 6) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0. \quad (11.19)$$

Используя (11.19) и (11.8), а также уравнение состояния (3.14) получаем дифференциальное уравнение для определения давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \operatorname{div} \left[\left(1 - \frac{\gamma}{|\operatorname{grad} p|} \right) \operatorname{grad} p \right], \quad |\operatorname{grad} p| > \gamma, \quad (11.20)$$

где κ — коэффициент пьезопроводности.

Уравнение (11.20) служит основой для построения нелинейной теории упругого режима. При решении конкретных задач фильтрации для уравнения (11.20) формулируются обычные начальные и граничные условия (см. гл. 3 и 6), вытекающие из условий задачи. Вместе с тем следует иметь в виду, что при решении нестационарных задач на основе модели фильтрации с предельным градиентом в пласте образуется переменная область фильтрации, на границе которой (пока она не достигнет границы пласта) модуль градиента давления должен равняться предельному градиенту γ , а давление — начальному пластовому.

Рассмотрим важную для практики задачу о пуске скважины с постоянным дебитом при фильтрации в пласте вязкопластичной жидкости с предельным градиентом. В случае плоскорадиальной фильтрации соотношение (11.8) принимает вид (11.13), а давление удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \gamma \right) \right]. \quad (11.21)$$

В начальный момент пласт невозмущен:

$$p = p_k \text{ при } t = 0. \quad (11.22)$$

Условие на стенке скважины получается из соотношения (11.14):

$$Q = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \gamma \right) 2\pi r h,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi k h r_c} + \gamma \quad \text{при } r = r_c. \quad (11.23)$$

Будем искать приближенное решение поставленной задачи по методу интегральных соотношений (см. § 7, гл 6). Возьмем распределение давления в возмущенной зоне радиусом $R(t)$ в виде

$$p(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)} \quad \text{при } r \leq R(t); \quad (11.24)$$

$$p(r, t) = p_k \quad \text{при } r > R(t),$$

где a_0, a_1, a_2 — коэффициенты, подлежащие определению; $R(t)$ — радиус возмущенной зоны, в которой происходит фильтрация, вне этой зоны фильтрация отсутствует; с течением времени граница возмущенной области перемещается по закону $R = R(t)$, причем $R(0) = r_c$.

На границе возмущенной области выполняются условия

$$p(r, t) = p_k, \quad \partial p / \partial r = \gamma \quad \text{при } r = R(t). \quad (11.25)$$

Из соотношений (11.23) и (11.25) найдем коэффициенты a_0, a_1 и a_2 ; тогда формула (11.24) примет вид

$$p(r, t) = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi k h} \left(\ln \frac{r}{R(t)} - \frac{r}{R(t)} + 1 \right) - \gamma (R(t) - r). \quad (11.26)$$

Радиус возмущенной области находится из уравнения материального баланса (6.7), которое для случая $Q = \text{const}$ можно записать в виде

$$Q(t) = \beta^* \pi R^2(t) h (p_k - \tilde{p}), \quad (11.27)$$

где $\tilde{p}$ — средневзвешенное давление в возмущенной области, определяемое из равенства (4.21), подставив в которое выражение (11.26) и проинтегрировав, получим

$$\tilde{p} = p_k - \frac{Q\mu}{12\pi k h} - \gamma \frac{R(t)}{3}. \quad (11.28)$$

Из равенства (11.27) с учетом (11.28) найдем закон перемещения границы возмущенной области:

$$R^2(t) + \frac{4\pi k h \gamma}{Q\mu} R^3(t) = 12\alpha t. \quad (11.29)$$

Определяя из последнего соотношения значения $R(t)$ в различные моменты времени и подставляя в формулу (11.26), можно найти значения давления $p(r, t)$.

Наибольший интерес представляет исследование изменения давления на забое скважины (при $r = r_c$):

$$p_c = p_k + \frac{Q_\mu}{2\pi kh} \left(\ln \frac{r_c}{R(t)} + 1 \right) - \gamma R(t). \quad (11.30)$$

Здесь учтено, что практически сразу после пуска скважины $r_c \ll R$.

Чтобы исследовать изменение давления в скважине при фильтрации с предельным градиентом, представим соотношение (11.29) в виде

$$R^2(t) \left(1 + \frac{4\pi kh \gamma}{Q_\mu} R(t) \right) = 12\kappa t. \quad (11.31)$$

Для значений $R(t) \ll Q_\mu / (4\pi kh \gamma)$ второе слагаемое в скобке много меньше единицы и его можно отбросить, тогда получается соотношение

$$R^2(t) = 12\kappa t, \quad (11.32)$$

характерное для упругого режима (см. гл. 6). Это соотношение выполняется для малых времен

$$t \ll \frac{1}{12\kappa} \left(\frac{Q_\mu}{4\pi kh \gamma} \right)^2,$$

при этом $\gamma R \ll Q_\mu / (4\pi kh)$ и основную роль в формуле (11.30) играет логарифмический член

$$p_c = p_k - \frac{Q_\mu}{4\pi kh} \ln \frac{12\kappa t}{r_c^2} + \dots \quad (11.33)$$

При больших значениях времени, когда в скобках формулы (11.31) можно отбросить единицу по сравнению со вторым слагаемым, т. е. $R \gg Q_\mu / (4\pi kh \gamma)$, закон движения границы возмущенной области имеет вид

$$R = \left(\frac{3Q_\mu \kappa t}{\pi kh \gamma} \right)^{1/3} \quad (11.34)$$

и зависимость забойного давления от времени следующая:

$$p_c = p_k - \frac{Q_\mu}{6\pi kh} \ln \frac{3Q_\mu \kappa t}{\pi kh \gamma r_c^3} - \gamma \left(\frac{3Q_\mu \kappa t}{\pi kh \gamma} \right)^{1/3} + \frac{Q_\mu}{2\pi kh}. \quad (11.35)$$

При некоторых значениях параметров оказывается, что основное значение имеет степенной член, так что закон падения давления на забое скважины изменяется с логарифмического на степенной. Следовательно, при больших временах вид кривых изменения забойного давления $p_c(t)$ при фильтрации с предельным градиентом существенно изменяется по сравнению с фильтрацией упругой жидкости. В принципе это позволяет обнаружить в пластовых условиях проявление предельного градиента давления.

§ 3. ОБРАЗОВАНИЕ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ

Важный эффект фильтрации с предельным градиентом давления — возможность образования в пласте застойных зон, где движение жидкости или газа отсутствует. Эти зоны образуются в тех участках пласта, где градиент давления меньше предельного. Возникновение застойных зон ведет к уменьшению нефтеотдачи пластов. На рис. 11.7, *а* застойная зона 3, расположенная между двумя добывающими скважинами с равными дебитами, заштрихована.

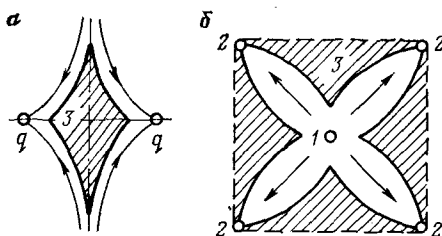


Рис. 11.7. Схема образования застойных зон (3):
а — между двумя добывающими скважинами; *б* — при пятиточечной расстановке скважин (1 — нагнетательная, 2 — добывающая)

Рассмотрим вытеснение нефти водой из пласта с пятиточечной системой расположения скважин (рис. 11.7, *б*). Пусть через нагнетательную скважину 1 закачивается вода, а через добывающие скважины 2 отбирается нефть. Анализ возникающего при этом двумерного течения показывает, что в зонах 3 (см. рис. 11.7, *б*) скорость течения будет мала по сравнению со скоростями течения в областях, прилегающих к прямым, соединяющим нагнетательную и добывающие скважины. Поэтому эти зоны и окажутся застойными. Отношение незаштрихованных областей на рис. 11.7, *б* ко всей площади пятиточечной ячейки можно считать площадным коэффициентом охвата пласта заводнением. Показано, что величина застойной зоны и коэффициент охвата пласта зависят от параметра

$$\lambda = Q\mu/(k\gamma L),$$

где Q — дебит добывающей скважины; L — характерный размер (например, половина расстояния между соседними скважинами).

Оказывается, что коэффициент охвата пласта увеличивается с увеличением параметра λ . Вместе с тем следует отметить, что для установления чистого эффекта изменения коэффициента охвата из-за предельного градиента давления применительно к реальному месторождению необходимы дополнительные тщательные исследования, позволяющие исключить влияние ряда других причин, связанных с деформацией горных пород, неоднородностью пласта, физико-химическими явлениями и т. п.

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО- ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

На некоторых месторождениях наблюдаются следующие аномалии: при бурении скважин происходит интенсивное поглощение глинистого раствора, хотя проницаемость породы очень мала; при работе скважин на установившихся режимах наблюдаются высокие дебиты при очень малой проницаемости породы. Эти и им подобные явления говорят о том, что пласт пронизан системой сообщающихся между собой трещин, по которым в основном и происходит приток жидкости в скважину или уходит глинистый раствор. Такие пласты называются трещиноватыми. Они распространены в Иране и Ираке, в Саудовской Аравии, США, Венгрии, Болгарии, в Советском Союзе — на Северном Кавказе (в Чечено-Ингушской АССР, в Дагестане), в Куйбышевском Поволжье, в Западной Сибири и др.

Промысловые данные, а также данные исследования кернов и шлифов свидетельствуют о том, что трещиноватые породы имеют сложную систему строения, а движение в них жидкости и газа отличается некоторыми особенностями по сравнению с движением в пористой среде. В трещиноватой породе имеются микро- и макротрещины, мелкие и крупные каверны, полости; сама порода — матрица (пространство между трещинами) может быть абсолютно непроницаемой или представлять собой обычную пористую среду. Раскрытия макротрещин имеют порядок 1 мм, а в отдельных случаях и больше, микротрещин — 1—100 мкм. Исходя из того, что сопротивление движению жидкости в трещиноватых породах достаточно велико, исследователи считают, что макротрещины не имеют значительной протяженности и в большинстве случаев соединяются между собой микротрещинами (которые и создают большие сопротивления).

Для понимания особенностей фильтрации жидкости и газа в трещиноватых породах рассматривают две модели пород — чисто трещиноватые и трещиновато-пористые (рис. 12.1). В чисто трещиноватых породах (см. рис. 12.1, а) блоки породы, расположенные между трещинами, практически непроницаемы, движение жидкости и газа происходит только по трещинам (на рисунке показано стрелками), т. е. трещины являются и коллектором, и проводником жидкости к скважинам. К таким породам относятся сланцы, кристаллические породы, доломиты, мергели и некоторые известняки. Рассматривая трещиноватую породу с жидкостью как сплошную

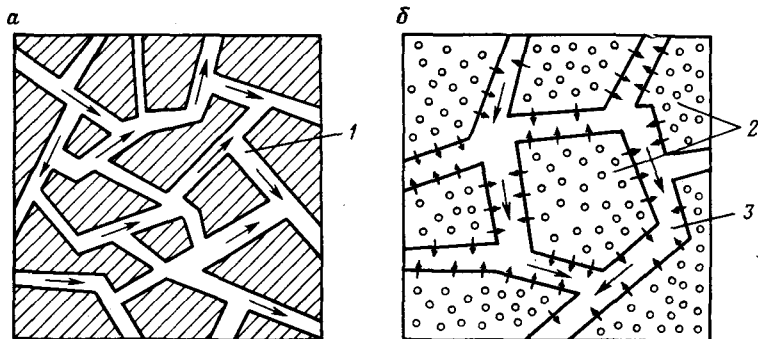


Рис. 12.1. Схемы чисто трещиноватой (а) и трещиновато-пористой (б) сред:

1, 3 — трещины; 2 — пористые блоки

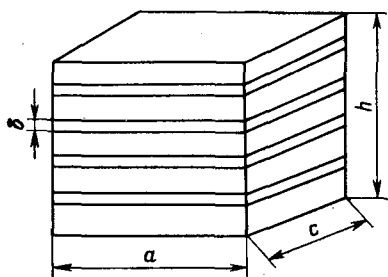


Рис. 12.2. Модель трещиноватой среды с упорядоченной системой трещин

среду, нужно за элемент породы принимать объем, содержащий большое количество блоков, и усреднение фильтрационных характеристик проводить в пределах этого элемента, т. е. масштаб должен быть гораздо большим, чем в пористой среде. Если представить себе блок в виде куба со стороной $a = 0,1$ м, то в качестве элементарного объема надо взять куб со стороной порядка 1 м.

Трещиновато-пористая среда представляет собой совокупность пористых блоков, отделенных один от другого развитой системой трещин (см. рис. 12.1, б). Жидкость или газ насыщают и проницаемые блоки, и трещины. При этом поперечные размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость системы трещин k_1 значительно больше, чем проницаемость системы пор в блоках k_2 . В то же время трещины занимают гораздо меньший объем, чем поры, так что коэффициент трещиноватости m_1 — отношение объема, занятого трещинами, к общему объему породы, существенно меньше пористости отдельных блоков m_2 .

Трещиновато-пористые коллекторы — это в основном известняки, иногда песчаники, алевролиты, доломиты.

Рассмотрим характеристики чисто трещиноватой породы. Трещина представляет собой узкую щель, два измерения которой во много раз больше третьего. Коэффициент трещиноватости состав-

ляет обычно доли процента (в то время, как коэффициент пористости зернистой породы составляет 10—20 %). Коэффициент трещиноватости m_1 так же, как и коэффициент проницаемости k_1 , определяется густотой и раскрытием трещин. Густотой трещин Γ называется число трещин n , отнесенное к длине нормали L , проведенной к поверхностям, образующим трещины. Для простоты представим себе модель трещиноватой среды с упорядоченной системой параллельных и равноотстоящих трещин с раскрытием δ (рис. 12.2). Густота трещин $\Gamma = n/h$, а коэффициент трещиноватости

$$m_1 = acn\delta/(ach) = \Gamma\delta.$$

Если в пласте имеется две взаимноперпендикулярные системы трещин с одинаковыми густотой и раскрытием, то $m_1 = 2\Gamma\delta$, если три — то $m_1 = 3\Gamma\delta$; в общем случае можно считать, что

$$m_1 = \theta\Gamma\delta, \quad (12.1)$$

где θ — безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии систем трещин в породе.

Движение жидкости или газа в трещине можно представить себе как движение в узкой щели между двумя параллельными плоскими стенками с расстоянием между ними δ ; для такого движения справедлива формула Буссинеска, согласно которой средняя скорость движения жидкости в щели

$$v = -\frac{\delta^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (12.2)$$

где μ — динамический коэффициент вязкости; dp/dx — градиент давления.

Переходя к скорости фильтрации $w = m_1 v$, получим

$$w = -\frac{m_1\delta^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (12.3)$$

Сопоставив формулу (12.3) с законом Дарси и используя соотношение (12.1), найдем выражение для коэффициента проницаемости трещиноватой породы.

$$k_1 = m_1\delta^2/12 = \theta\Gamma\delta^3/12. \quad (12.4)$$

Экспериментами установлена зависимость проницаемости трещиноватых пород от пластового давления более существенная, чем зависимость от давления проницаемости пористых сред. Из формулы (12.4) зависимость $k_1(p)$ можно получить следующим образом. Горное давление, которое можно считать постоянным, уравновешивается напряжениями в скелете породы и давлением жидкости в трещинах. При снижении пластового давления увеличивается нагрузка на скелет породы и уменьшается раскрытие трещин (с ростом давления раскрытие трещин увеличивается). Если считать, что деформации в трещиноватом пласте упругие и малы по вели-

чине, то зависимость раскрытия трещины от давления можно считать линейной:

$$\delta = \delta_0 [1 - \beta (p_0 - p)], \quad (12.5)$$

где β — параметр трещиноватой среды, зависящий от упругих свойств и геометрии трещин. Исходя из формул (12.4) и (12.5), можно записать зависимость коэффициента проницаемости k_1 от давления следующим образом:

$$k_1 = k_1^0 [1 - \beta (p_0 - p)]^3, \quad (12.6)$$

где k_1^0 — коэффициент проницаемости трещиноватой породы при давлении p_0 .

Как уже указывалось в гл. 3, экспериментом хорошо подтверждается экспоненциальная зависимость проницаемости от давления:

$$k_1 = k_1^0 e^{-\alpha (p_0 - p)}, \quad (12.7)$$

а при малых изменениях давления зависимость $k_1(p)$ можно считать линейной:

$$k_1 = k_1^0 [1 - \alpha (p_0 - p)], \quad (12.8)$$

где $\alpha = 3\beta$.

При рассмотрении установившейся фильтрации в трещиновато-пористом пласте обычно считают, что коэффициент проницаемости трещин k_1 существенно зависит от давления и определяется одной из формул (12.6) — (12.8), а коэффициент проницаемости пористых блоков k_2 не зависит от давления и принимается постоянным. Соотношения для установившихся фильтрационных потоков в трещиновато-пористой среде получаются суммированием потоков в трещинах и в пористых блоках.

В трещиноватых породах, где истинное сечение потока сравнительно мало, а дебиты обычно велики, особенно вероятно отклонение от закона Дарси за счет проявления инерционных сил. При этом обычно используют двучленный закон фильтрации (1.12).

Наиболее ярко особенности фильтрации в трещиновато-пористой среде проявляются в неустановившихся процессах. Система трещин и система пор представляют собой две среды с разными масштабами (см. рис. 12.1, б). Средний размер пор составляет 1—100 мкм, протяженность трещин — от нескольких сантиметров до десятков метров. Так как коэффициент пористости блоков m_2 на один-два порядка выше, чем коэффициент трещиноватости m_1 , то большая часть жидкости находится в порах. Чаще всего пористые блоки малопроницаемы ($k_2 \ll k_1$) и жидкость, фильтруясь из них в трещины, движется в скважины в основном по трещинам, проводимость которых значительно выше, чем пористых блоков (см. рис. 12.1, б).

Рассмотрим этот процесс подробнее. Пусть происходит резкое изменение давления на забое скважины. Если блоки считать непроницаемыми, то можно использовать обычную теорию упругого

режима, причем коэффициент пьезопроводности $\kappa = k_1 / [(\beta_{\text{ж}} m_1 + \beta_{\text{с}}) \mu]$, определенный через характеристики системы трещин, может оказаться очень большим, так как k_1 велик, а m_1 мал. Это значит, что процесс перераспределения давления в трещинах будет происходить с большой скоростью и в трещинах за сравнительно небольшое время установится новое распределение давления. Из-за малой проницаемости блоков k_2 жидкость из них выходит медленно и давление в блоках длительное время сохраняет свое начальное значение. Тем самым между жидкостью, находящейся в блоке, и жидкостью, его окружающей, создается разность давлений. В результате перетока части жидкости из блока в трещины происходит постепенное выравнивание давлений. Этот процесс будет тем длительнее, чем меньше проницаемость блока k_2 , больше его размеры, пористость m_2 , сжимаемость жидкости $\beta_{\text{ж}}$ и порового пространства $\beta_{\text{с}}$.

Таким образом, характеристики движения в блоках и трещинах оказываются различными: давление в блоках p_2 больше, чем давление в трещинах p_1 , скорость фильтрации в блоках w_2 значительно меньше, чем в трещинах w_1 . Поэтому трещиновато-пористую среду рассматривают как совмещение двух пористых сред с порами разных масштабов: 1) среда 1 — укрупненная среда, в которой роль зерен играют пористые блоки, которые рассматриваются как непроницаемые, а роль поровых каналов — трещины, давление в этой среде равно p_1 , скорость фильтрации w_1 ; 2) среда 2 — система пористых блоков, состоящих из зерен, разделенных мелкими порами, давление в ней достигает p_2 , скорость фильтрации w_2 . Таким образом, p_1 — среднее давление в трещинах в окрестности данной точки, p_2 — среднее давление в блоках, аналогично для скоростей фильтрации.

Важная особенность неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористой среде — интенсивный обмен жидкостью между обеими средами, т. е. между пористыми блоками и трещинами, обусловленный различием давлений в этих средах p_2 и p_1 . Обмен жидкостью происходит при достаточно медленном изменении давлений с течением времени, поэтому этот процесс можно считать квазистационарным, т. е. не зависящим явно от времени. Очевидно, что при движении слабосжимаемой жидкости масса жидкости, вытекающей из блоков в трещины за единицу времени в единице объема породы (интенсивность перетока q), пропорциональна разности давлений $p_2 - p_1$, плотности ρ_0 (считая, что плотность мало изменяется в интервале давлений от p_1 до p_2) и обратно пропорциональна вязкости μ , т. е.

$$q = \alpha_0 \frac{\rho_0}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (12.9)$$

где α_0 — безразмерный коэффициент, зависящий от геометрических характеристик блоков: проницаемости k_2 , среднего размера блоков l и безразмерных величин, характеризующих форму блоков;

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} k_2 / l^2.$$

Соотношение (12.9) должно быть уточнено для случая, если плотность значительно зависит от давления. Например, при фильтрации идеального газа интенсивность перетоков из блоков в трещины представляется в виде

$$q = \alpha_0 \frac{\rho_0 (p_2^2 - p_1^2)}{\mu 2 p_0}, \quad (12.10)$$

где p_0 — фиксированное давление, соответствующее плотности ρ_0 .

§ 2. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Выведем дифференциальные уравнения движения жидкости и газа в деформируемой трещиновато-пористой среде, считая, что в каждой точке имеется два давления (p_1 — в системе трещин, p_2 — в пористых блоках) и две скорости фильтрации — w_1 и w_2 соответственно. Перетоки между средами определяются формулами (12.9) или (12.10).

При составлении дифференциальных уравнений записывают два уравнения неразрывности — одно для фильтрации в трещинах (среда 1), другое для фильтрации в пористых блоках (среда 2). Уравнение баланса жидкости в трещинах, т. е. уравнение неразрывности, отличается от уравнения (3.3) только наличием в правой части добавочного члена, представляющего собой массу жидкости (или газа) q , перетекающей за единицу времени из блоков в трещины в единице объема среды:

$$-\left[\frac{\partial (\rho w_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_{1y})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_{1z})}{\partial z} \right] = \frac{\partial (\rho m_1)}{\partial t} - q, \quad (12.11)$$

где ρ — плотность жидкости или газа при давлении p_1 .

Для фильтрации в пористых блоках уравнение неразрывности принимает вид

$$-\left[\frac{\partial (\rho w_{2x})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_{2y})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_{2z})}{\partial z} \right] = \frac{\partial (\rho m_2)}{\partial t} + q, \quad (12.12)$$

где ρ — плотность жидкости или газа при давлении p_2 .

Для чисто трещиноватого пласта $q = 0$ и остается только уравнение (12.11), так как в блоках не содержится жидкости.

Считая, что выполняется линейный закон Дарси, можем написать дифференциальные уравнения движения в системе трещин и в пористых блоках соответственно:

$$w_{1x} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad w_{1y} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial y}, \quad w_{1z} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z}; \quad (12.13)$$

$$w_{2x} = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad w_{2y} = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial y}, \quad w_{2z} = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial z}. \quad (12.14)$$

К уравнениям (12.11) — (12.14) должны быть добавлены зависимости плотности ρ , пористостей обеих сред m_1 и m_2 и проницаемостей k_1 и k_2 от давлений p_1 и p_2 .

Подставив выражения (12.13), (12.14), а также (12.9) для упругой жидкости или (12.10) для газа в уравнения неразрывности (12.11) и (12.12), получим систему уравнений неустановившейся фильтрации любого однородного флюида в трещиновато-пористой среде в общем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(p_1) k_1(p_1)}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(p_1) k_1(p_1)}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho(p_1) k_1(p_1)}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\rho(p_1) m_1(p_1)] - \alpha_0 \times \\ \times \frac{\rho_0}{\mu} [f(p_2) - f(p_1)]; \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(p_2) k_2(p_2)}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(p_2) k_2(p_2)}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho(p_2) k_2(p_2)}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\rho(p_2) m_2(p_2)] + \\ + \alpha_0 \frac{\rho_0}{\mu} [f(p_2) - f(p_1)], \end{aligned} \quad (12.16)$$

где $f(p) = p$ — для упругой жидкости; $f(p) = p^2/2\rho_0$ — для идеального газа.

Для получения единственного решения при интегрировании этой системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно давлений p_1 и p_2 к ней необходимо добавить начальные и граничные условия (см. § 5, гл. 3).

§ 3. УСТАНОВИВШАЯСЯ ОДНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТОМ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Рассмотрим установившуюся фильтрацию жидкости и газа в деформируемом чисто трещиноватом пласте, в котором проницаемость изменяется в зависимости от давления по одному из законов (12.6) — (12.8). В этом случае правая часть уравнения (12.15) обращается в нуль, и дифференциальное уравнение для давления в трещинах принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Введем функцию Лейбензона

$$\mathcal{P} = \int \frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} dp + C \quad (12.18)$$

подобно тому, как это сделано в гл. 5; можно показать, что она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial z^2} = 0. \quad (12.19)$$

Вспоминая, что для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости в среде с постоянной проницаемостью изменение давления описывается уравнением Лапласа, можно провести аналогию между установившейся фильтрацией жидкости в недеформируемой пористой среде (см. гл. 4) и установившейся фильтрацией жидкости и газа в деформируемой трещиноватой среде: все выведенные в § 2 гл. 4 закономерности для несжимаемой жидкости можно использовать для описания течения в деформируемой породе, заменив давление p на функцию Лейбензона $\mathcal{P}$ (при одинаковых граничных условиях и в пластах одинаковой геометрии).

Для одномерной фильтрации массовый дебит можно определить из дифференциального уравнения

$$Q_m = - \frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} \frac{dp}{ds} \omega(s) = - \frac{d\mathcal{P}}{ds} \omega(s). \quad (12.20)$$

Рассмотрим фильтрацию несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) с постоянной вязкостью ($\mu = \text{const}$). Найдем выражение функции Лейбензона для экспоненциальной зависимости проницаемости от давления (12.7):

$$\mathcal{P} = \int \frac{\rho}{\mu} k_1^0 e^{-\alpha(p_0-p)} dp + C = \frac{\rho k_1^0}{\mu} \frac{e^{-\alpha(p_0-p)}}{\alpha} + C \quad (12.21)$$

и выведем формулы дебита и распределения давления для плоско-радиальной фильтрации жидкости в круговом пласте к скважине. Дебит определится по формуле Дюпюи (4.35), в которой давления p_k и p_c должны быть заменены значениями функции Лейбензона

$$\mathcal{P}_k = \frac{\rho k_1^0}{\mu} \frac{e^{-\alpha(p_0-p_k)}}{\alpha} + C, \quad \mathcal{P}_c = \frac{\rho k_1^0}{\mu} \frac{e^{-\alpha(p_0-p_c)}}{\alpha} + C. \quad (12.22)$$

При этом если принять, что $p_0 = p_k$, то

$$Q_m = \frac{2\pi h \rho k_1^0 [1 - e^{-\alpha(p_k-p_c)}]}{\mu \alpha \ln \frac{R_k}{r_c}}, \quad (12.23)$$

а объемный дебит выразится формулой

$$Q = \frac{2\pi k_1^0 h [1 - e^{-\alpha(p_k-p_c)}]}{\mu \alpha \ln(R_k/r_c)}. \quad (12.24)$$

Индикаторная диаграмма, описываемая формулой (12.24), криволинейна (рис. 12.3), причем для добывающих скважин она имеет выпуклость к оси дебита, а для нагнетательных ($p_c > p_k$) — к оси депрессий.

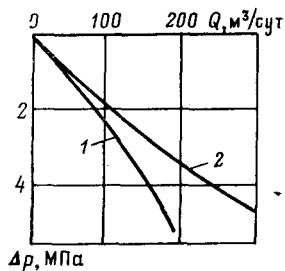


Рис. 12.3. Индикаторная линия для добывающей (1) и нагнетательной (2) скважин в деформируемом трещиноватом пласте

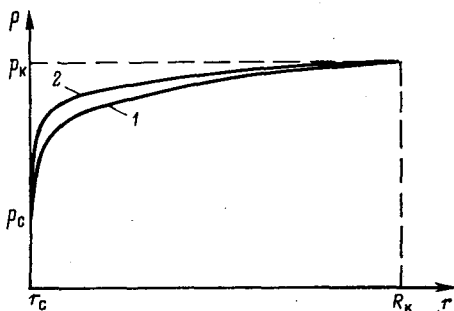


Рис. 12.4. Кривые распределения давления:

1 — в недеформируемом пласте ($k = \text{const}$);
2 — в трещиноватом пласте
($k = k_1^0 \exp \{11 - \alpha (p_0 - p)\}$)

Подставляя в формулу (4.35) вместо давлений p , p_k и p_c выражения функции Лейбенсона $\mathcal{P}$ по формуле (12.21), $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_c$ по формулам (12.22), будем иметь

$$e^{-\alpha (p_0 - p)} = e^{-\alpha (p_0 - p_k)} - \frac{e^{-\alpha (p_0 - p_k)} - e^{-\alpha (p_0 - p_c)}}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}.$$

Если $p_0 = p_k$, то

$$e^{-\alpha (p_k - p)} = 1 - \frac{1 - e^{-\alpha (p_k - p_c)}}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r},$$

и распределение давления определяется формулой

$$p = p_k + \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha (p_k - p_c)}}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} \right]. \quad (12.25)$$

На рис. 12.4 показаны кривые распределения давления, построенные по зависимостям (12.25) и (4.32) для недеформируемого пласта. Из сравнения кривых следует, что в деформируемом трещиноватом пласте за счет уменьшения раскрытия трещин при снижении пластового давления сопротивления увеличиваются и давление падает более резко, чем в недеформируемом пласте.

Качественные особенности, характеризующие соотношения (12.24) и (12.25), имеют место также и для зависимостей проницаемости от давления, выраженных формулами (12.6) и (12.8).

Большое практическое значение имеет определение параметров трещиноватого пласта — проницаемости k_1^0 и коэффициента α . Предложен следующий метод обработки индикаторных диаграмм (выпуклых к оси дебитов для добывающих скважин). Рассмотрим

этот метод применительно к формуле (12.24). На индикаторной диаграмме (рис. 12.5) определяются две площади: $f_1 = \int_0^{\Delta p_i} Q d(\Delta p)$ — между кривой $Q(\Delta p)$ и осью ординат (она заштрихована) и $f_2 = Q_i \Delta p_i$ — площадь прямоугольника для соответствующей точки индикаторной линии. Отношение этих площадей $z_{\text{теорет}} = f_1/f_2$ подсчитывается теоретически с использованием формулы (12.24), и оказывается, что z зависит только от одной безразмерной величины $\alpha \Delta p_i$:

$$z = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \Delta p_i}} - \frac{1}{\alpha \Delta p_i}. \quad (12.26)$$

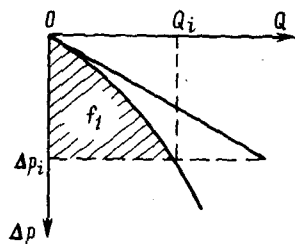


Рис. 12.5. Индикаторные линии в трещиноватом пласте

Задаются различные значения $\alpha \Delta p_i$ и по формуле (12.26) подсчитываются соответствующие значения z , которые заносятся в таблицу. С другой стороны, отношение $z = f_1/f_2$ определяется по фактической индикаторной диаграмме (площадь подсчитывается численно, например, по формуле трапеций) для разных точек индикаторной линии; затем для найденного значения z по таблице определяется произведение $\alpha \Delta p_i$, и так как фиктивные перепады Δp_i известны, то можно найти α . Находят значения α для нескольких перепадов Δp_i и берут среднее. Из формулы для дебита (12.24), зная α , можно найти коэффициент гидропроводности $k_0^0 h/\mu$ и затем проницаемость k_1^0 , если известны толщина пласта h и вязкость жидкости μ .

Проведенная обработка индикаторных кривых на различных месторождениях показала, что коэффициент α принимает значения $\alpha = (0,1-20) \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$.

Следует иметь в виду, что искривление индикаторных линий с ростом депрессии может быть вызвано не только зависимостью проницаемости от давления, но и другими причинами (отклонением от закона Дарси, наличием начального градиента давления в пласте, изменением работающей толщины пласта и т. д.), так что при их расшифровке надо учитывать возможное влияние и других факторов.

В трещиновато-пористом пласте дебит скважины складывается из дебита жидкости, притекающей из трещин, и из дебита жидкости, поступающей из пористых блоков. Например, в случае выполнения соотношения (12.7) формула суммарного дебита добывающей скважины принимает вид

$$Q = \frac{2\pi k_2 h (p_k - p_c)}{\mu \ln(R_k/r_c)} + \frac{2\pi k_1^0 h [(1 - e^{-\alpha(p_k - p_c)})]}{\mu \alpha \ln(R_k/r_c)}, \quad (19.27)$$

где принято, что $k_2 = \text{const}$. Однако обычно проницаемость пористых блоков k_2 много меньше, чем проницаемость трещин k_1^0 , поэтому основной вклад составляет приток жидкости из трещин и отбрасывание первого слагаемого не даст большой погрешности в определении дебита.

Рассмотрим установившуюся изотермическую фильтрацию идеального газа в чисто трещиноватом деформируемом пласте, в котором зависимость коэффициента проницаемости от давления линейная (12.8). Эта зависимость представляется естественной для газа, так как при фильтрации газа перепады давления обычно малы. В этом случае выражение для функции Лейбензона (12.18) можно записать в следующем виде (здесь принято $p_0 = p_K$):

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int \frac{\rho(p) k_1(p)}{\mu} dp + C = \int \frac{\rho_{\text{ат}} p}{p_{\text{ат}}} \frac{k_1^0 [1 - \alpha(p_K - p)]}{\mu} dp + C = \\ &= \frac{\rho_{\text{ат}} k_1^0}{p_{\text{ат}} \mu} [(1 - \alpha p_K) \int p dp + \alpha \int p^2 dp] + C = \\ &= \frac{\rho_{\text{ат}} k_1^0}{p_{\text{ат}} \mu} \left[(1 - \alpha p_K) \frac{p^2}{2} + \alpha \frac{p^3}{3} \right] + C. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Массовый дебит газа при плоскорадиальной фильтрации в круговом пласте можно получить, подставив в формулу Дюпюи (4.35) выражения (12.28) при $p = p_K$ и $p = p_c$:

$$Q_m = \frac{2\pi k_1^0 h \rho_{\text{ат}} \left\{ \left[(1 - \alpha p_K) \frac{p_K^2}{2} + \alpha \frac{p_K^3}{3} \right] - \left[(1 - \alpha p_K) \frac{p_c^2}{2} + \alpha \frac{p_c^3}{3} \right] \right\}}{p_{\text{ат}} \mu \ln(R_K/r_c)}. \quad (12.29)$$

Перейдем к объемному приведенному дебиту, по-иному представив формулу (12.29):

$$Q_{\text{ат}} = \frac{\pi k_1 h (p_K^2 - p_c^2)}{p_{\text{ат}} \mu \ln(R_K/r_c)} \left(1 - \frac{\alpha}{3} p_K + \frac{2}{3} \alpha \frac{p_c^2}{p_K + p_c} \right). \quad (12.30)$$

Здесь выражение перед скобкой представляет собой дебит газа в недеформируемой среде, и можно оценить влияние параметра α на поток газа в круговом пласте.

Если обозначить через Q^* дебит газа в недеформируемой среде (т. е. при $\alpha = 0$), то отношение

$$\frac{Q_{\text{ат}}}{Q^*} = 1 - \frac{\alpha}{3} p_K + \frac{2}{3} \alpha \frac{p_c^2}{p_K + p_c} \quad (12.31)$$

определяет отклонение дебита газа в сжимаемой среде от дебита газа в среде с постоянной проницаемостью. Если, например, $\alpha = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$, $p_c = 7 \text{ МПа}$, $p_K = 10 \text{ МПа}$, то $Q_{\text{ат}}/Q^* = 0,72$, т. е. дебит уменьшается на 28 %.

Аналогичным методом можно вывести формулы для дебита и распределения давления для жидкости и газа при прямолинейно-параллельной фильтрации к галерее.

§ 4. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Для определения характеристик неустановившегося фильтрационного потока в трещиновато-пористой среде нужно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (12.15) и (12.16) при заданных начальных и граничных условиях.

Сделаем следующие предположения: жидкость слабосжимаемая, упругая, т. е. $\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}} (p - p_0)]$; обе среды — трещины и пористые блоки — упругие, т. е. $m_i = m_{0i} + \beta_{ci} (p - p_0)$, ($i = 1, 2$), проницаемости обеих сред постоянны: $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$; происходит обмен жидкостью между трещинами и блоками, масса перетекающей из блоков в трещины жидкости подчиняется соотношению (12.9). При этих предположениях система уравнений (12.15) и (12.16) принимает следующий вид:

$$\frac{k_1}{\mu} \nabla^2 p_1 = \beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1); \quad (12.32)$$

$$\frac{k_2}{\mu} \nabla^2 p_2 = \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1), \quad (12.33)$$

где p_1 и p_2 — давления в трещинах и в пористых блоках;

$$\beta_i^* = \beta_{ci} + m_{0i} \beta_{\text{ж}}, \quad i = 1, 2; \quad (12.34)$$

β_1^* , β_2^* — коэффициенты упругоэластичности трещин и пористых блоков соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\kappa = k_1 / (\mu \beta_2^*), \quad \varepsilon_1 = \beta_1^* / \beta_2^*, \quad \varepsilon_2 = k_2 / k_1, \quad \tau = \mu \beta_2^* / \alpha_0. \quad (12.35)$$

В результате уравнения (12.32) и (12.33) запишутся в виде

$$\kappa \nabla^2 p_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau}; \quad (12.36)$$

$$\kappa \varepsilon_2 \nabla^2 p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau}. \quad (12.37)$$

Отметим, что коэффициент пьезопроводности κ определен здесь через проницаемость системы трещин k_1 и упругоэластичность блоков β_2^* ; параметр τ имеет размерность времени и называется временем запаздывания. Этот параметр имеет большое значение в теории неустановившегося движения жидкости в трещиновато-пористой среде; он характеризует отставание процесса перераспределения давления в трещиновато-пористой среде по сравнению с пористым пластом с пьезопроводностью κ . Это отставание объясняется наличием обмена жидкостью между системой пористых блоков и системой трещин. Время запаздывания τ можно записать по-другому:

$$\tau = \mu \beta_2^* / \alpha_0 = \mu \beta_2^* l^2 / (\bar{\alpha} k_2) = l^2 / (\bar{\alpha} \kappa_2).$$

Из последнего выражения следует, что большие значения τ соответствуют малым значениям пьезопроводности блоков и боль-

шим размерам блоков (и то, и другое затрудняет перетоки из блоков в трещины).

Анализируя систему уравнений (12.36) — (12.37), можно сделать следующие выводы. При $\tau = 0$ имеем $p_1 = p_2$, т. е. давления в трещинах и блоках одинаковы и среда ведет себя как однородная. При $\tau = \infty$ система разделяется на два уравнения фильтрации — в трещинах и блоках, т. е. блоки оказываются изолированными, непроницаемыми и среда ведет себя как чисто трещиноватая. Промежуточные значения τ соответствуют трещиновато-пористой среде, причем, независимо от конкретного вида решения той или иной задачи, с ростом времени t решение стремится к решению задачи упругого режима, сближаясь с ним по истечении периода времени порядка нескольких τ .

Систему уравнений (12.36) — (12.37) можно упростить, если использовать то обстоятельство, что трещинная пористость m_1 и проницаемость блоков k_2 малы, т. е. $m_1 \ll m_2$, $k_2 \ll k_1$, следовательно, $\epsilon_1 \ll 1$, $\epsilon_2 \ll 1$ и можно отбросить слагаемые $\epsilon_1 \partial p_1 / \partial t$ и $\kappa \epsilon_2 \nabla^2 p_2$. Тогда получим

$$\kappa \nabla^2 p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\tau} = 0; \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau} = 0. \quad (12.38)$$

Сделанное предположение ($m_1 = k_2 = 0$) означает, что жидкость «хранится» только в блоках, а перемещается только по трещинам (так как пренебрегли изменением массы жидкости в системе трещин и потоком жидкости в блоках).

Существуют различные решения как полной системы (12.36), (12.37), так и «усеченной» (12.38), полученные интегрированием дифференциальных уравнений, а также приближенными методами (интегральных соотношений, усреднения и т. д.). Все эти решения достаточно сложны и громоздки, поэтому здесь не приводятся.

Приведем лишь графики, построенные в результате решения плоскорадиальной задачи об отборе упругой жидкости из скважины радиуса r_c , расположенной в бесконечном пласте, с постоянным дебитом Q .

В начальный момент давления в трещинах $p_1(r, 0)$ и в блоках $p_2(r, 0)$ одинаковы и равны p_0 . Такое же давление сохраняется все время в удаленных точках.

Условие на стенке скважины имеет вид

$$r \frac{\partial p_1}{\partial r} + \epsilon_2 r \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{Q \mu}{2\pi k_1 h} \quad \text{при} \quad r = r_c. \quad (12.39)$$

На графиках (рис. 12.6) отложены по вертикали вниз значения $u_1 = 2\pi k_1 h (p_0 - p_1) / (Q \mu)$ и $u_2 = 2\pi k_1 h (p_0 - p_2) / (Q \mu)$, по горизонтали — безразмерная радиальная координата $r / \sqrt{\kappa \tau}$, кривые построены для разных значений t / τ . Из графиков видно, что перераспределение давления в блоках происходит значительно медленнее, чем в трещинах. Для $t / \tau = 3$ кривая $u_1 (r / \sqrt{\kappa \tau})$ почти совпадает с кривой $u = -\frac{1}{2} \text{Ei}(-r^2 / 4\kappa \tau)$, которая соответствует

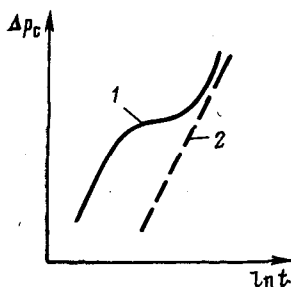
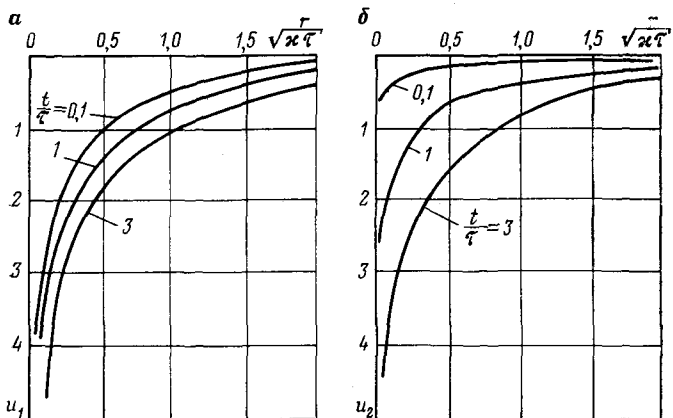


Рис. 12.6. Кривые распределения безразмерного давления в разные моменты времени в трещинах (а) и блоках (б)

Рис. 12.7. Кривые восстановления давления в трещиноватопористом (1) и пористом (2) пластах

обычной пористой среде с пьезопроводностью κ . Для значений $t/\tau = 3$ кривые u_1 и u_2 практически совпадают, т. е. для времен, значительно превышающих время запаздывания τ , давления в трещинах и порах одинаковы ($p_1 = p_2$) и можно пользоваться уравнениями для фильтрации в обычной пористой среде.

Отметим еще, что время запаздывания τ определяется по данным исследования скважин на неустановившихся режимах. Для этого используются кривые восстановления давления, которые в координатах $\Delta p_c = p_c(t) - p_c(0) - \ln t$ приведены на рис. 12.7.

§ 5. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ ИЗ ТРЕЩИНОВАТОПОРИСТЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

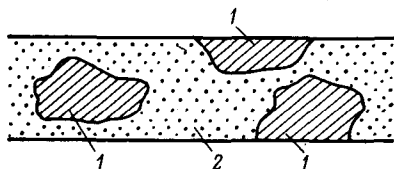
При вытеснении нефти водой из трещиновато-пористого пласта и из неоднородной среды, содержащей малопроницаемые включения (рис. 12.8), принимается следующая схема. Нагнетаемая в пласт вода под действием гидродинамических сил стремится вытеснить нефть из хорошо проницаемых зон, она прорывается по высокопроницаемой среде (или по трещинам), а малопроницаемые блоки, насыщенные нефтью, оказываются окруженными со всех сторон водой. Извлечение нефти из блоков возможно лишь за счет

капиллярной пропитки. Вода (смачивающая фаза) будет впитываться в блок за счет капиллярных сил, а нефть (несмачивающая фаза) будет вытесняться в высокопроницаемую среду (или трещины). Очевидно, вода будет впитываться через мелкие поры, а нефть будет выходить через крупные поры.

Рассмотрим отдельный малопроницаемый блок, у которого только один торец открыт и соприкасается с водой, а остальная поверхность непроницаема для жидкости. Вода под действием капиллярных сил начнет впитываться в блок, а нефть будет двигаться в противоположном направлении. Этот процесс носит название противоточной капиллярной пропитки. Дифференциальное уравнение одномерной противоточной капиллярной пропитки можно получить из общего уравнения (9.23) при $\Delta\rho = 0$ и при условии, что суммарная скорость фильтрации $w = w_1 + w_2 = 0$. Из ре-

Рис. 12.8. Схема неоднородного пласта, содержащего малопроницаемые включения.

Зона: 1 — малой проницаемости; 2 — хорошо проницаемая



шения этого уравнения следует, что при начальной водонасыщенности блока $\sigma_0 \leq \sigma_*$ средняя по длине насыщенность $\bar{\sigma}$ определяется из соотношения

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + K \sqrt{t}, \quad (12.40)$$

где K — константа, зависящая от значений σ на границах.

Скорость впитывания воды

$$w_1 = \alpha / \sqrt{t}. \quad (12.41)$$

После подхода фронта вытеснения к закрытому концу блока средняя насыщенность стремится к постоянному значению $\bar{\sigma}_1$, а скорость впитывания воды уменьшается с течением времени по закону

$$w_1 = A e^{-\alpha t}. \quad (12.42)$$

Вернемся к рассмотрению вытеснения нефти водой из трещиновато-пористого или неоднородного пласта. Как и для описания фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде, нужно ввести в каждой точке два значения давления и две скорости фильтрации (для каждой среды). Кроме того, в каждой среде имеются две жидкости, для которых скорости фильтрации и насыщенности различны, а давления отличаются на значения капиллярного давления. Нужно также ввести функцию, учитывающую перетоки между высокопроницаемой средой и малопроницаемыми включениями (трещинами и блоками). Таким образом, вместо четырех уравнений (12.11) — (12.14) будем иметь восемь — для каждой жидкости и для каждой среды.

Для вытеснения из трещиновато-пористой среды при условии, что поток обеих жидкостей в блоках отсутствует ($w_1^{(2)} = 0$, $w_2^{(2)} = 0$, верхние индексы 1 и 2 относятся соответственно к трещинам и блокам, нижние (1 и 2) — к воде и нефти) и объем трещин мал по сравнению с объемом пор, система уравнений для одномерного движения примет вид

$$w_1^{(1)} = -\frac{k_1^*(\sigma^{(1)})}{\mu_1} \frac{\partial p_1^{(1)}}{\partial x}; \quad w_2^{(1)} = -\frac{k_2^*(\sigma^{(1)})}{\mu_2} \frac{\partial p_2^{(1)}}{\partial x}; \quad (12.43)$$

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial x} + q = 0; \quad \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial x} - q = 0; \quad m_2 \frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial t} - q = 0.$$

Здесь $\sigma^{(1)}$ — водонасыщенность в трещинах; $\sigma^{(2)}$ — водонасыщенность в блоках.



Рис. 12.9. Схема вытеснения нефти водой из двухслойного пласта (проницаемость нижнего пропластка больше, чем верхнего)

Если рассматривать обмен жидкостью между средами как противоточную капиллярную пропитку, то интенсивность перетоков зависит только от времени нахождения данного блока в обводненной зоне. Если через $t_0(x)$ обозначить время подхода фронта вытеснения в высокопроницаемой зоне (или в трещинах) к данному блоку, то интенсивность перетоков будет функцией от $\tau = t - t_0(x)$. Вид функции $q(\tau)$ можно выбрать, исходя из выражений для скорости капиллярной пропитки одного элемента (12.41) и (12.42). Удобной аппроксимацией для $q(\tau)$ является функция вида

$$q(\tau) = A e^{-B\tau/\sqrt{\tau}}. \quad (12.44)$$

Постоянные A и B подбираются исходя из теоретических соображений или по экспериментальным данным. Подставляя выражение (12.44) в систему дифференциальных уравнений (12.43), можно найти характеристики движения, в первую очередь насыщенность в блоках, а также закон движения фронта вытеснения.

При закачке воды с постоянным расходом спустя некоторое время после начала процесса образуется задний фронт, за которым пропитка блоков практически отсутствует, и оба фронта будут двигаться с одинаковой скоростью, образуя стабилизированную зону, перемещающуюся равномерно.

Изложенный подход применим также к задачам о вытеснении нефти водой из пластов, состоящих из пропластков различной толщины, пористости и проницаемости.

Экспериментально установлено, что при небольшой толщине пласта в гидрофильных средах, т. е. средах, лучше смачиваемых

водой, фронт вытеснения устойчиво распространяется в пропластках различной проницаемости: разбег «фронтов» в слоях стабилизируется и не изменяется со временем. Это имеет место в том случае, когда перетоки, вызванные капиллярными силами, очень велики. Этот случай показан на рис. 12.9. Нижний пропласток имеет более высокую проницаемость k_2 , чем верхний ($k_2 \gg k_1$). Поэтому скорость вытеснения в нем больше и фронт вытеснения опережает фронт в верхнем пропластке. В зоне между фронтами вода капиллярно впитывается в поры верхнего пропластка (показано стрелками), за счет чего скорость движения фронта воды в верхнем пропластке увеличивается и расстояние между фронтами сохраняется постоянным.

Глава 13

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

§ 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРАВЛИКИ

Математическое описание процессов фильтрации пластовых флюидов, как мы видели, приводит к решению краевых задач, включающих в себя дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений, а также начальные и граничные условия.

Точные или приближенные аналитические решения этих задач, пригодные для практического использования, можно получить для фильтрационных потоков достаточно простой геометрии и при использовании различных упрощающих допущений. Существование аналитического решения, получаемого, например, с помощью трансцендентных или некоторых специальных функций (интеграл вероятности, интегральная показательная функция и т. д.), облегчает построение алгоритма. Для этого достаточно воспользоваться приближениями этих функций, основанными на методах интерполяции.

Однако большинство реальных фильтрационных потоков имеет сложную форму и описывается, как правило, системами нелинейных дифференциальных уравнений. Построить аналитические решения таких задач не удастся, и в этих случаях для их решения используют приближенные численные модели, основанные на различных принципах и использующие ЭВМ.

При построении численных моделей и численных алгоритмов используют дискретное представление переменных и дифференциальных операторов уравнений, а также области течения.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть некоторый фильтрационный процесс описывается дифференциальным уравнением, которое можно представить в обобщенном виде

$$L\vec{u} = f,$$

где L — дифференциальный оператор; $\vec{u}$ — вектор искомых функций; f — заданная векторная функция.

Решения отыскиваются в некоторой заданной области непрерывного изменения аргументов:

$$D\{x, y, z, t\} = D_l\{x, y, z\} \times D_t\{t\},$$

представляющей собой декартово произведение области изменения пространственных координат D_l и области изменения времени D_t .

В том случае, когда область D_l является одномерной и представляет собой отрезок $X_1 \leq x \leq X_2$, а область D_t является отрезком $t_0 \leq t \leq T$, область $D = D_l D_t$ можно наглядно изобразить прямоугольным участком плоскости (рис. 13.1). Если D_t является двумерной (или трехмерной), то область D будет представлять собой трехмерный (или четырехмерный) цилиндр с образующими, параллельными оси времени $0t$.

При использовании численных методов решения ищутся в дискретных точках, совокупность которых будет составлять дискретный аналог области D , который обозначим через D_h . Можно построить несколько дискретных аналогов непрерывной области. Один из возможных — сеточный — изображен на рис. 13.2. Промежуточное положение занимают полудискретные аналоги, которые получаются, если один из аргументов, например время, оставить изменяющимся непрерывно (рис. 13.3).

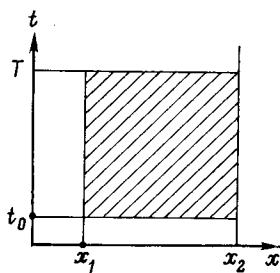


Рис. 13.1. Схема одномерной области фильтрации

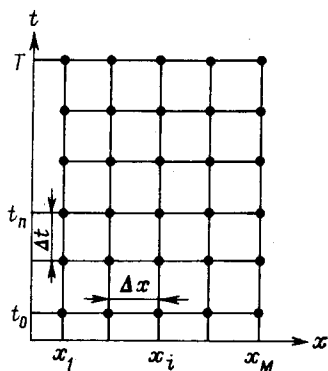
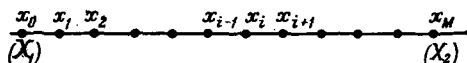
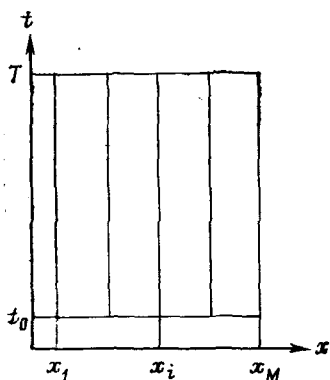


Рис. 13.2. Дискретный аналог непрерывной области фильтрации

Рис. 13.3. Полудискретный аналог непрерывной области фильтрации

Рис. 13.4. Деление отрезка на равные интервалы



§ 3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, АППРОКСИМИРУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Из математического анализа известно, что дифференциальные операторы при дискретном изменении аргументов не определены. Для отыскания решений в этом случае необходимо исходные дифференциальные уравнения заменить на их дискретные аналоги.

В качестве примера рассмотрим построение дискретных аналогов краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (13.1)$$

$$X_1 < x < X_2, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$u(X_1, t) = \psi_1(t) \quad \text{при} \quad x = X_1;$$

$$u(X_2, t) = \psi_2(t) \quad \text{при} \quad x = X_2$$

Напомним, что уравнение этого типа описывает распределение давления в однородном пласте при упругом режиме фильтрации слабосжимаемой жидкости. Разделим отрезок $X_1 \leq x \leq X_2$ на M одинаковых частей точками x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, M$), отстоящими одна от другой на расстоянии $\Delta x = (X_2 - X_1)/M$ (рис. 13.4). Выразим производную $\partial^2 u / \partial x^2$ через значения функции u в дискретных точках x_i ; при этом будем использовать обозначения $u(x_i) = u_i$.

Известно несколько способов построения дискретных аналогов (разностной аппроксимации) производных. Наиболее распространенный способ основан на использовании метода разложения функций в ряд Тейлора. Запишем выражение ряда Тейлора для функции $u(x)$ в окрестности точки x_i при положительном приращении аргумента;

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + u'_x(x_i) \Delta x + u''_{xx}(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \\ + u^{(n+1)}_{x \dots x}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

То же выражение в индексном обозначении имеет вид

$$u_{i+1} = u_i + u'_i \Delta x + u''_i \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + u_i^{*(n+1)} \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где

$$u_i^{(n)} = \frac{\partial^n u(x_i)}{\partial x^n}; \quad u_i^{*(n+1)} = \frac{\partial^{n+1} u(x_i^*)}{\partial x^{n+1}}; \quad x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1}.$$

Аналогично записывается разложение при отрицательном приращении аргумента:

$$u_{i-1} = u_i - u'_i \Delta x + u''_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} u_i^{** (n+1)} \frac{\Delta x^{n+n}}{(n+1)!}.$$

Напомним, что ряд Тейлора может содержать столько членов, сколько производных имеет функция $u(x)$.

Из первого разложения можем получить выражение для первой производной — правую разность

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - u''_i \frac{\Delta x}{2!} - u'''_i \frac{|\Delta x^2}{3!} - \dots = \\ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \end{aligned}$$

Из второго разложения получаем левую разность

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u''_i \frac{\Delta x}{2!} - u'''_i \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Наконец, вычтя второе разложение из первого, получим центральную разность

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - u'''_i \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Как видно из приведенных выражений, односторонние разности (левая и правая) при малых приращениях аппроксимируют первую производную с погрешностью $O(\Delta x)$, пропорциональной первой степени Δx («порядка Δx »). Центральная разность аппроксимирует производную с погрешностью $O(\Delta x^2)$, т. е. точнее.

Просуммировав оба исходных разложения, после несложных преобразований получим аппроксимацию второй производной

$$\begin{aligned} u''_i &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - u_i^{(IV)} \frac{2\Delta x^2}{4!} - \dots = \\ &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Используя полученную аппроксимацию второй производной, построим полудискретный аналог краевой задачи (13.1). Для этого область решения $D \{[X_1 \leq x \leq X_2] \times [0 \leq t]\}$ заменим совокупностью равноотстоящих прямых $x = x_i$, где $i = 0, 1, 2, \dots, M$ (см. рис. 13.3), составляющих полудискретный аналог области:

$D_h(t) \{x_i \times [0 \leq t]\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$. Заменяем в исходном уравнении вторую производную ее дискретным аналогом (13.2). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{1}{h^2} [u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$h = \Delta x.$$

Дискретный аналог начального условия принимает вид

$$\varphi(x_i) = \varphi_i, \quad \text{при } t=0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Дополним полученные соотношения граничными условиями

$$u_0 = \psi_1(t), \quad \text{при } x = X_1 \equiv x_0, \quad \psi_1(0) = \varphi_0;$$

$$u_M = \psi_2(t), \quad \text{при } x = X_2 \equiv x_M, \quad \psi_2(0) = \varphi_M.$$

Исходная задача для уравнения в частных производных, заданного в непрерывной области D с начальными и граничными условиями, заменяется задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных на прямых $x = x_i$, где $i = 1, 2, \dots, M-1$ с начальными условиями.

В этом состоит сущность метода прямых, который мы фактически только что рассмотрели. Преимущество его заключается в том, что решать обыкновенные дифференциальные уравнения, в принципе, значительно проще, чем уравнения в частных производных. Эти преимущества ярко проявляются в том случае, когда область решения имеет прямоугольную форму, а уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами. Если же форма области решения оказывается достаточно сложной, а уравнения имеют переменные коэффициенты или являются нелинейными, использование метода прямых вызывает серьезные затруднения.

В этих случаях для решения задач целесообразно использовать метод конечных разностей. Дискретный аналог области, в которой ищется решение, представляется в виде сетки (см. рис. 13.2). Поэтому метод конечных разностей иногда называют методом сеток. Отдельные точки сетки называются узлами. Если шаги сетки Δx и Δt постоянны, то сеточная область (сетка) называется регулярной. В общем случае использование регулярной сетки предпочтительнее, но иногда целесообразно использовать и нерегулярные сетки с переменными шагами.

Рассмотрим ту же краевую задачу (13.1), описывающую фильтрацию упругой жидкости. Для получения дискретного (конечно-разностного) аналога краевой задачи нужно в конечно-разностной форме представить уравнения, начальные и граничные условия.

Частная производная по времени обычно заменяется односторонней разностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Введя для удобства обозначения

$$u(x_i, t_n) = u_i^n, \quad \Delta t = \tau,$$

можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}.$$

С учетом дискретного аналога второй частной производной по пространственной координате (13.2) рассматриваемое дифференциальное уравнение упругого режима в конечно-разностной форме сводится к системе уравнений

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^* - 2u_i^* + u_{i-1}^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M-1.$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (13.3)$$

Дискретный аналог начального условия строится достаточно просто и записывается в виде

$$n = 0, \quad u_i^0 = \varphi(x_i) \equiv \varphi_i, \quad i = \overline{0, M}. \quad (13.4)$$

По аналогичной схеме строятся дискретные аналоги граничных условий первого рода:

$$u_0^n = \psi_1(t_n) \equiv \psi_1^n \quad \text{при} \quad i = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u_M^n = \psi_2(t_n) \equiv \psi_2^n, \quad \text{при} \quad i = M, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.5)$$

Более сложным является вопрос о построении дискретных аналогов граничных условий, в состав которых входят производные. Пусть, например, одно из граничных условий задано в виде

$$\text{при} \quad x = X_2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (13.6)$$

что физически означает непроницаемость границы $x = X_2$. Дискретный аналог условия (13.6) можно построить несколькими способами. Наиболее удобный основан на использовании метода отражения. При его реализации в рассмотрение дополнительно вводится фиктивная точка за пределами области решения $x_{M+1} = (M+1)\Delta x$. Представляя дискретный аналог первой производной по схеме центральных разностей, получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=X_2} \approx \frac{u_{M+1} - u_{M-1}}{2\Delta x}.$$

На этом основании дискретный аналог условия (13.6) можно представить в виде

$$u_{M+1}^n = u_{M-1}^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.7)$$

Как видно из приведенной записи, исходная краевая задача для дифференциального уравнения в конечно-разностной постановке сводится к системе алгебраических уравнений и тем самым существенно упрощается. В таком упрощении заключаются все преимущества метода конечных разностей. Наибольшую эффективность использование метода конечных разностей дает при численном решении нелинейных уравнений в областях сложной формы, когда

точные или приближенные аналитические решения получить не удастся или вообще невозможно.

Не следует думать, однако, что построение конечно-разностных решений любых задач не вызывает никаких затруднений. В действительности это достаточно сложный процесс, который не всегда приводит к удовлетворительному результату.

§ 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

После дискретизации области и построения дискретного аналога краевой задачи необходимо оценить сходимость конечно-разностного решения к точному решению исходной задачи, а также получить конечно-разностное решение, т. е. решить систему конечно-разностных уравнений. Реализация этих двух этапов представляет основные принципиальные трудности при практическом использовании метода конечных разностей.

Говорят, что разностное решение u_h сходится к решению исходной задачи u , если норма разности этих решений в узлах сетки стремится к нулю при стремлении к нулю шагов дискретизации:

$$\|u_i^n - (u_i^n)_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \{h, \tau\} \rightarrow 0.$$

В зависимости от свойств искоемых функций и решаемых задач в качестве норм могут приниматься различные величины (максимум абсолютных величин разностей, средняя квадратическая разность и т. д.).

Конечно-разностное решение представляет практический интерес только в том случае, если имеет место его сходимость к точному решению. Непосредственная проверка сходимости разностных схем вызывает большие затруднения. В теории разностных схем доказывается, что схема, которая аппроксимирует исходную задачу (когда погрешность аппроксимации стремится к нулю, если стремится к нулю шаг дискретизации) и устойчива (т. е. малым возмущениям начальных данных и разностного оператора соответствуют малые отклонения решений), является сходящейся. Исследования аппроксимации и устойчивости оказываются относительно более простыми. В соответствующих разделах теории разностных схем они описаны достаточно подробно.

Трудности решения системы конечно-разностных уравнений в первую очередь обусловлены ее большой размерностью, равной числу дискретных точек, в которых ищутся значения функций. Размерность системы можно уменьшить увеличением шага дискретизации. Однако этот путь приводит к потере точности, и им нельзя пользоваться без достаточного обоснования.

При фиксированной размерности трудоемкость решения системы конечно-разностных уравнений зависит от типа разностной схемы. Поясним это на примере системы уравнений (13.3), где во втором

слагаемом вместо индекса, указывающего номер временного шага, пока проставлены звездочки. Рассмотрим два варианта:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0; \quad (13.8)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0, \quad (13.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Совокупности узлов, участвующих в разностных схемах, можно изобразить схематично в виде так называемых шаблонов. Для первой и второй схем соответственно шаблоны имеют вид, представленный на рис. 13.5.

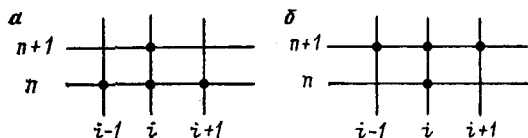


Рис. 13.5. Шаблоны для явной (а) и неявной (б) схем

Первая схема называется явной. Как наглядно видно из шаблона, в этой схеме каждое значение искомой функции на $(n+1)$ -м временном слое индивидуально определяется через три значения функции на предыдущем n -м слое.

Разрешив (13.8) относительно u_i^{n+1} , получим

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Используя начальные условия, т. е. значения функции на нулевом слое, мы довольно просто можем вычислить последовательно значения функции на любом последующем временном слое. Но явная схема имеет очень существенный недостаток: она оказывается сходящейся только при соблюдении ограничительного условия

$$\tau/h^2 \leq 1/2,$$

т. е. условно устойчива.

Вторая схема называется неявной. Она сходится при любом отношении шагов. Но, как видно из шаблона, непосредственно вычислить индивидуальное значение функции на $(n+1)$ -м слое по известным значениям на n -м слое нельзя. На каждом слое нужно полностью решать всю систему уравнений.

Как уже подчеркивалось ранее, система конечно-разностных уравнений является алгебраической, и поэтому к ней применимы известные методы решения алгебраических уравнений. В то же время отметим, что каждое неявное конечно-разностное уравнение содержит только три значения искомой функции в соседних узлах. Вследствие этого матрица коэффициентов системы конечно-раз-

ностных уравнений имеет специальный, так называемый трехдиагональный вид. Для системы (13.9) матрицей является

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & & & \\ b & a & b & 0 & & \\ 0 & b & a & b & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & b & a & b \\ & & & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

где $a = 1 + 2\tau/h^2$, $b = -\tau/h^2$, а все элементы, не лежащие на трех выделенных диагоналях, равны нулю. Для решения систем уравнений подобного вида разработаны специальные методы, среди которых одним из наиболее популярных является метод прогонки. Рассмотрим его на примере решения системы (13.9) с начальными и граничными условиями (13.4), (13.5), (13.7). Для удобства перепишем уравнение в развернутом виде

$$u_{i-1}^{n+1} - (2+s)u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} = -su_i^n, \quad s = h^2/\tau. \quad (13.10)$$

Будем считать, что значения функции в соседних узлах связаны между собой соотношениями

$$u_i^{n+1} = a_i^{n+1} (b_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}); \quad (13.11)$$

$$u_{i-1}^{n+1} = a_{i-1}^{n+1} (b_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1}). \quad (13.12)$$

Подставив (13.12) в (13.10), получим

$$a_{i-1}^{n+1} (b_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1}) - (2+s)u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} = -su_i^n,$$

откуда следует

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1}^{n+1}} [(a_{i-1}^{n+1} b_{i-1}^{n+1} + su_i^n) + u_{i+1}^{n+1}]. \quad (13.13)$$

Сравнивая (13.13) с (13.11), получаем соотношения

$$a_i^{n+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1}^{n+1}}, \quad b_i^{n+1} = a_{i-1}^{n+1} b_{i-1}^{n+1} + su_i^n, \quad (13.14)$$

которые по известным значениям a_{i-1}^{n+1} , b_{i-1}^{n+1} позволяют вычислить a_i^{n+1} , b_i^{n+1} .

Для узла $i = 1$ уравнение (13.10) и соотношения (13.11) имеют вид

$$u_0^{n+1} - (2+s)u_1^{n+1} + u_2^{n+1} = -su_1^n; \quad (13.15)$$

$$u_1^{n+1} = a_1^{n+1} (b_1^{n+1} + u_2^{n+1}). \quad (13.16)$$

Используя граничное условие (13.5) из (13.15) получим

$$u_1^{n+1} = \frac{1}{2+s} [(\psi_1^{n+1} + su_1^n) + u_2^{n+1}] \quad (13.17)$$

и далее в результате сопоставления равенств (13.17) и (13.16) имеем

$$a_1^{n+1} = \frac{1}{2+s}; \quad b_1^{n+1} = \psi_1^{n+1} + s u_1^n. \quad (13.18)$$

Соотношения (13.18) и (13.14) позволяют последовательно считать пары коэффициентов (a_1^{n+1}, b_1^{n+1}) , (a_2^{n+1}, b_2^{n+1}) , $(a_{M-1}^{n+1}, b_{M-1}^{n+1})$. Эта процедура известна как «прямой ход».

Используя найденные значения пар коэффициентов и второе из граничных условий (13.5), с помощью (13.11) можем вычислить искомые значения функции во всех узлах, начиная с $i = M-1$:

$$u_{M-1}^{n+1} = a_{M-1}^{n+1} (b_{M-1}^{n+1} + \psi_2^{n+1}); \quad u_{M-2}^{n+1} = a_{M-2}^{n+1} (b_{M-2}^{n+1} + u_{M-1}^{n+1}), \quad \dots$$

В этом состоит операция «обратный ход».

Повторяя «прямой» и «обратный» ходы на каждом последующем временном шаге, найдем численное решение задачи в любом заданном интервале изменения времени.

Метод прогонки удобен тем, что требует относительно небольших объемов оперативной памяти и затрат времени на проведение расчетов.

§ 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Пусть в горизонтальной плоскости (x, y) имеется область D_l , занятая нефтью и содержащая скважины — точечные источники или стоки. Будем считать, что пласт — неоднородный по проницаемости: $k_0 = k_0(x, y)$, а разработка залежи ведется при упругом режиме фильтрации. Для простоты будем предполагать, что область фильтрации D_l имеет форму прямоугольника: $X_1 \leq x \leq X_2$, $Y_1 \leq y \leq Y_2$ (рис. 13.6). На границах области фильтрации $x = X_1$, $x = X_2$ и $y = Y_2$ задано соответственно распределение давлений

$$p = p_1(y, t), \quad p = p_2(y, t), \quad p = p_3(x, t).$$

Граница пласта $y = Y_1$ считается непроницаемой, т. е. на этой границе нормальная составляющая скорости фильтрации (или $\partial p / \partial y$) равна нулю.

Пусть в начальный момент времени t_0 в пласте (область D_l) задано распределение давления по координатам, т. е. $p = p_0(x, y)$ при $t = t_0$.

Тогда задача о нахождении распределения давления $p(x, y, t)$ в процессе эксплуатации залежи сводится к решению (интегрированию) дифференциального уравнения параболического типа (типа теплопроводности), с переменными коэффициентами (см. гл. 3, 6), которое можно представить в следующем обобщенном виде

$$b \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right) + f, \quad (13.19)$$

$$b = b(x, y), \quad k = k(x, y), \quad f = f(x, y, t)$$

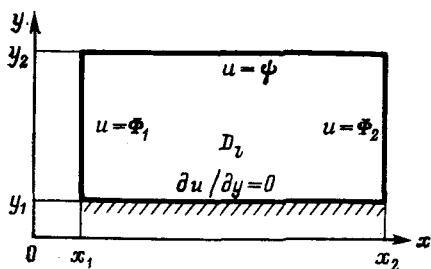


Рис. 13.6. Схема области фильтрации упругой жидкости

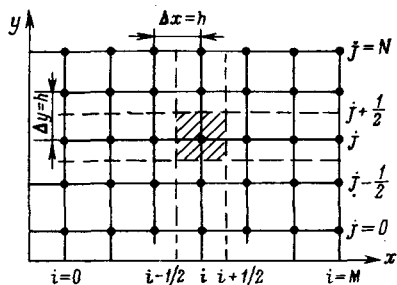


Рис. 13.7. Дискретный аналог непрерывной области фильтрации

в области $D = D_l \times D_T$, $D_T = \{t \geq t_0\}$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$p = \varphi(x, y) \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (13.20)$$

$$p = \Phi_1(y, t) \quad \text{при} \quad x = X_1, \quad (13.21)$$

$$p = \Phi_2(y, t) \quad \text{при} \quad x = X_2, \quad (13.22)$$

$$= 0 \quad \text{при} \quad y = Y_1, \quad (13.23)$$

$$p = \psi(x, t) \quad \text{при} \quad y = Y_2. \quad (13.24)$$

Здесь искомая функция $p(x, y, t)$ соответствует давлению, $k = k_0(x, y)/\mu$; $b = \beta^* = m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}}$ — коэффициент упругоёмкости пласта; f — плотность источников и стоков, моделирующих работу добывающих и нагнетательных скважин. Со способами моделирования скважин можно познакомиться в работе [12].

Будем решать задачу приближенно с использованием метода конечных разностей. Для этого заменим непрерывную область D_l ее дискретным аналогом — квадратной сеточной областью (рис. 13.7):

$$D_{lh} \{x_i, y_j\}, \quad x_i = ih, \quad y_j = jh, \\ i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N}.$$

Построим, далее, конечно-разностный аналог уравнения (13.19), используя интегро-интерполяционный метод.

Выделим в области D_l квадрат с центром в точке (x_i, y_j) и сторонами, образованными отрезками линий $x = x_i \pm h/2$, $y = y_j \pm h/2$ (см. рис. 13.7). Рассмотрим тройной интеграл от обеих частей уравнения (13.19):

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} b \frac{\partial p}{\partial t} dy dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial p}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial p}{\partial y} + f \right) dy dx dt.$$

Выполняя интегрирование по каждому слагаемому в порядке, соответствующем типу производной, получим

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} b(p^{n+1} - p^n) dy dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[\left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \right. \\ \left. - \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] dy dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j+1/2} - \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j-1/2} \right] dx dt + \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f dy dx dt. \end{aligned}$$

Это соотношение — точное. Используя формулы приближенного интегрирования, представим его в следующем виде:

$$\begin{aligned} [b(p^{n+1} - p^n)]_{x=x_i^{(1)}} \Delta x \Delta y = \left[\left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right]_{y=y_j^{(2)}} \times \\ \times \Delta y \Delta t + \left[\left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j+1/2} - \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j-1/2} \right]_{x=x_i^{(3)}} \Delta x \Delta t + \\ + f(x_i^{(4)}, y_j^{(4)}, t_n^{(4)}) \Delta x \Delta y \Delta t, \end{aligned} \quad (13.25)$$

$$\begin{aligned} x_i &\leq \{x_i^{(\alpha)}\} \leq x_{i+1}; \\ y_j &\leq \{y_j^{(\beta)}\} \leq y_{j+1}; \\ t_n &\leq \{t_n^{(\gamma)}\} \leq t_{n+1}, \\ \{\alpha, \beta, \gamma\} &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Произведения $k \partial p / \partial x$ и $k \partial p / \partial y$ в точках с полуцелыми индексами заменим дискретными аналогами:

$$\begin{aligned} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+1/2} &\approx k_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x}; \\ \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-1/2} &\approx k_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x}; \\ \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j+1/2} &\approx k_{j+1/2} \frac{p_{j+1} - p_j}{\Delta y}; \\ \left(k \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{j-1/2} &\approx k_{j-1/2} \frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_{i\pm 1/2} &= 2k_i k_{i\pm 1} / (k_i + k_{i\pm 1}), \\ k_{j\pm 1/2} &= 2k_j k_{j\pm 1} / (k_j + k_{j\pm 1}). \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (13.25), предварительно разделив все слагаемые на $\Delta x \Delta y \Delta t$ и положив приближенно $x_i^{(\alpha)} = x_i$, $y_j^{(\beta)} = y_j$, $t_n^{(\gamma)} = t_n$, т. е. отнеся все средние величины в интегралах к узлу x_i, y_j, t_n . В результате получим конечно-разностный аналог двумерного уравнения (13.19):

$$b_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\tau} = k_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h^2} - k_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + \\ + k_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h^2} - k_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + f_{i,j}^{n+1}, \quad (13.26)$$

$$i = 1, \overline{M-1}, \quad j = 1, \overline{N-1}.$$

Дискретные аналоги начального и граничных условий строятся по ранее рассмотренным схемам и принимают вид

$$\text{при } n=0 \quad p_{i,j}^0 = \Phi_{i,j}, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N}; \quad (13.27)$$

$$\text{при } i=0 \quad p_{0,j}^n = \Phi_{1,j}^n, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (13.28)$$

$$\text{при } i=M \quad p_{M,j}^n = \Phi_{2,j}^n, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (13.29)$$

$$\text{при } j=0 \quad p_{i,-1}^n = p_{i,1}^n, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (13.30)$$

$$\text{при } j=N \quad p_{i,N}^n = \psi_i^n, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.31)$$

Таким путем вместо исходной краевой задачи (13.19) — (13.24) мы получаем конечно-разностную задачу (13.26) — (13.31).

Для решения алгебраической системы уравнений (13.26) — (13.31) можно использовать различные общие и специальные методы. Из числа последних большое распространение получил метод смены направлений, суть которого заключается в следующем.

Шаг по времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ разбивается на два половинных шага $t_{n+1} - t_{n+1/2} = t_{n+1/2} - t_n = \Delta t/2$. На каждом полушаге вместо системы (13.26) — (13.31) решается ее модификация, явная по одному направлению и неявная по другому (направления чередуются).

Решаемые системы имеют вид, например, на первом полушаге

$$b_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^n}{0,5\tau} = k_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} - \\ - k_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i,j-1}^{n+1/2}}{h^2} + k_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{h^2} - \\ - k_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h^2} + f_{i,j}^{n+1/2},$$

$$\text{при } i=0 \quad p_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \Phi_{1,j}^+ - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 \Phi_{1,j}^-, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$\text{при } i=M \quad p_{M,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \Phi_{2,j}^+ - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 \Phi_{2,j}^-, \quad i = \overline{1, N-1},$$

где

$$\Phi^+ = \frac{1}{2} (\Phi^{n+1} + \Phi^n);$$

$$\Phi^- = \Phi^{n+1} - \Phi^{n-1};$$

$$\Lambda_2 \Phi_j^- = k_{i,j+1/2} \frac{\Phi_{j+1}^- - \Phi_j^-}{h^2} - k_{i,j-1/2} \frac{\Phi_j^- - \Phi_{j-1}^-}{h^2};$$

на втором полушаге

$$\begin{aligned} b_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1/2}}{0,5\tau} &= k_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} - \\ &- k_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} + k_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h^2} - \\ &- k_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + f_{i,j}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

$$j=0 \quad p_{i,-1}^{n+1} = p_{i,1}^{n+1}, \quad i = \overline{1, M-1},$$

$$j=N \quad p_{i,N}^{n+1} = p_{i,1}^{n+1}, \quad i = \overline{1, M-1}.$$

Поскольку на каждом полушаге задача оказывается фактически одномерной (неявной), то для ее решения можно использовать метод прогонки.

Решив системы дважды, в результате получаем решение на очередном шаге $t = t_{n+1}$.

§ 6. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим плоскую задачу фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в однородном пласте без учета капиллярных и гравитационных сил (см. гл. 9). Пусть область нефтеводоносного пласта D_l имеет прямоугольную форму $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq l$ (рис. 13.8). Требуется определить в области D_l ($t \geq 0$) давление $p(x, y, t)$, насыщенность $\sigma(x, y, t)$ вытесняемой фазой 2 (нефтенасыщенность), удовлетворяющие системе уравнений (9.11), (9.12). Считаем, что в начальный момент времени ($t = 0$) задано распределение насыщенности $\sigma = \sigma_0(x, y)$, а границы $y = 0$ и $y = l$ пласта непроницаемы, т. е. $\partial p / \partial y = 0$ на этих границах области фильтрации. На нагнетательной галерее $x = 0$ заданы $\sigma = \sigma_0(y, t)$, $p = p_0(y, t)$; на эксплуатационной галерее $x = L$ задается распределение давления $p = p_L(y, t)$ (см. рис. 13.8). Соответствующая система урав-

нений, описывающая процесс, а также начальные и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{k_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \left(\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{k_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (13.32)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} f \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} f \omega_y - m \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0;$$

$$\text{при } t=0 \quad \sigma = \sigma_0(x, y);$$

$$\text{при } x=0 \quad \sigma = \sigma_0(y, t), \quad p = p_0(y, t); \quad (13.33)$$

$$\text{при } x=L \quad p = p_L(y, t), \quad p_L < p_0;$$

$$\text{при } y=\{0, l\} \quad \partial p / \partial y = 0.$$

Рис. 13.8. Схема двухфазной фильтрации



Здесь $f = f(\sigma)$ — функция Баклея—Левверетта (доля вытесняющей фазы в суммарном потоке), определяемая из равенства (9.22);

$\vec{\omega} = -k \left[\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2} \right] \text{grad } p$ — вектор суммарной скорости

фильтрации, $f(\sigma) \vec{\omega} = \vec{\omega}_1$ — вектор скорости фильтрации вытесняющей фазы 1.

Первое уравнение системы (13.32) получено в результате суммирования уравнений неразрывности фаз (9.11) с использованием обобщенного закона Дарси (9.12).

Воспользовавшись изложенными ранее способами построения дискретных аналогов краевых задач, приведем задачу (13.32) — (13.33) к конечно-разностной форме, опустив промежуточные выкладки:

$$k_{i+1/2,j}^n (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - k_{i-1/2,j}^n (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}) + k_{i,j+1/2}^n (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - k_{i,j-1/2}^n (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}) = 0; \quad (13.34)$$

$$f_{i+1/2,j}^{n+1} \omega_{i+1/2,j}^{n+1} - f_{i-1/2,j}^{n+1} \omega_{i-1/2,j}^{n+1} + f_{i,j+1/2}^{n+1} \omega_{i,j+1/2}^{n+1} - f_{i,j-1/2}^{n+1} \omega_{i,j-1/2}^{n+1} - h m_{i,j} \frac{\sigma_{i,j}^{n+1} - \sigma_{i,j}^n}{\tau} = 0,$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{0, N}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{при } n=0 \quad \sigma = \sigma_{0i,j}, \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{0, N};$$

$$\text{при } i=0 \quad \sigma = \sigma_{0i,j}^{0n}, \quad p = p_{0i,j}^{0n};$$

$$\text{при } i=M \quad p = p_{L,j}^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\begin{aligned} \text{при } j=0 \quad p_{i,-1} &= p_{i,1}; \\ \text{при } j=N \quad p_{i,N+1} &= p_{i,N-1}, \\ i &= 1, M-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{i\pm 1/2, j}^n &= \frac{2k_{i, j}^n k_{i\pm 1, j}^n}{k_{i, j}^n + k_{i\pm 1, j}^n}; \\ k_{i, j\pm 1/2}^n &= \frac{2k_{i, j}^n k_{i, j\pm 1}^n}{k_{i, j}^n + k_{i, j\pm 1}^n}; \end{aligned} \quad (13.35)$$

$$k^n = k \left[\frac{k_1(\sigma^n)}{\mu_1} + \frac{k_2(\sigma^n)}{\mu_2} \right];$$

$$\begin{aligned} f_{i+1/2, j}^{n*} &= \begin{cases} f_{i+1, j}^n & \text{при } \omega_{i+1/2, j} < 0; \\ f_{i, j}^n & \text{при } \omega_{i+1/2, j} > 0; \end{cases} \\ f_{i, j+1/2}^{n*} &= \begin{cases} f_{i, j+1}^n & \text{при } \omega_{i, j+1/2} < 0; \\ f_{i, j}^n & \text{при } \omega_{i, j+1/2} > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично выбираются $f_{i-1/2, j}^{n*}$ и $f_{i, j-1/2}^{n*}$ (правило — «против потока»).

Приведенная схема является неявной по давлению и явной по насыщенности.

Система (13.34) является эллиптической. Для решения таких систем чаще всего используются различные итерационные методы. Простейший метод реализуется по схеме

$$\begin{aligned} p_{i, j}^{n+1, r+1} &= (k_{i+1/2, j}^n + k_{i-1/2, j}^n + k_{i, j+1/2}^n + k_{i, j-1/2}^n)^{-1} (k_{i+1/2, j}^n p_{i+1, j}^{n+1, r} + \\ &+ k_{i-1/2, j}^n p_{i-1, j}^{n+1, r} + k_{i, j+1/2}^n p_{i, j+1}^{n+1, r} + k_{i, j-1/2}^n p_{i, j-1}^{n+1, r}), \end{aligned}$$

где r — номер итерации.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении неравенства

$$\max_{i, j} |p_{i, j}^{n+1, r+1} - p_{i, j}^{n+1, r}| < \varepsilon,$$

где ε — заданная достаточно малая величина.

После того как будут найдены $p_{i, j}^{n+1}$, по явной формуле (13.35) можно вычислить насыщенности $\sigma_{i, j}^{n+1}$. Для устойчивости счета должно выполняться условие

$$\tau < h \frac{\min_{i, j} m_{i, j}}{\max_{i, j} \omega_{i, j} \max f'(\sigma)}.$$

Теория и практика приближенного численного решения задач подземной гидравлики достаточно развиты. Можно даже считать, что уже сложилась особая дисциплина — вычислительная подземная гидравлика. Изучая специальную литературу [1, 3, 11, 12], можно познакомиться с ее основами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М., Недра, 1982.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М., Недра, 1984.
3. Вахитов Г. Г., Кузнецов О. А., Симкин Э. М. Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта. М., Недра, 1978.
4. Гиматудинов Ш. К., Ширковский А. И. Физика нефтяного и газового пласта. М., Недра, 1982.
5. Движение углеводородных смесей в пористой среде/В. Н. Николаевский, Э. А. Бондарев, М. И. Миркин и др. М., Недра, 1968.
6. Евдокимова В. А., Кочина И. Н. Сборник задач по подземной гидравлике. М., Недра, 1979.
7. Желтов Ю. П. Механика нефтегазоносного пласта. М., Недра, 1975.
8. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., Мир, 1964.
9. Коротаев Ю. П., Закиров С. Н. Теория и проектирование разработки газовых и газоконденсатных месторождений. М., Недра, 1981.
10. Кристеа Н. Подземная гидравлика. Т. II. М., Гостоптехиздат, 1962.
11. Кричлоу Г. Б. Современная разработка нефтяных месторождений. Проблемы моделирования. М., Недра, 1979.
12. Максимов М. М., Рыбицкая Л. П. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений. М., Недра, 1976.
13. Механика насыщенных пористых сред/В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов, М., Недра, 1970.
14. Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Зайцев Ю. В. Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. М., Недра, 1972.
15. Пирвердян А. М. Физика и гидравлика нефтяного пласта. М., Недра, 1982.
16. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е. М., Наука, 1977.
17. Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г. Подземная гидравлика. М., Недра, 1973.
18. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР/Отв. редактор П. Я. Полубаринова-Кочина. М., Наука, 1969.
19. Розенберг М. Д., Кундин С. А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. М., Недра, 1976.
20. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
21. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1949.
22. Щелкачев В. Н. Разработка нефтегазоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
23. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л., Гостоптехиздат, 1963.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$	f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$	f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$
0,01	0,112	0,112	7	5,749	1,500	6	1,897	3,608
0,05	0,278	0,229	8	6,314	1,556	7	2,160	3,684
0,10	0,404	0,315	9	6,861	1,604	8	2,423	3,750
0,15	0,520	0,376	10	7,417	1,651	9	2,677	3,809
0,20	0,606	0,424	15	9,965	1,829	10^3	2,931	3,860
0,25	0,689	0,469	20	12,29	1,960	$1,5 \cdot 10^3$	4,136	
0,30	0,758	0,503	25	14,55	2,067	2	5,315	
0,40	0,898	0,564	30	16,81	2,147	2,5	6,466	
0,50	1,020	0,616	40	20,88	2,282	3	7,590	
0,60	1,140	0,659	50	24,82	2,388	4	9,757	
0,70	1,251	0,702	60	28,60	2,476	5	$1,188 \cdot 10^3$	
0,80	1,359	0,735	70	32,28	2,550	6	1,395	
0,90	1,469	0,772	80	35,99	2,615	7	1,599	
1,00	1,570	0,802	90	39,42	2,672	8	1,800	
1,5	2,032	0,927	10^2	43,01	2,723	9	1,999	
2,0	2,442	1,020	$1,5 \cdot 10^2$	59,80	2,921	10^4	2,196	
2,5	2,838	1,101	2	75,86	3,064	$1,5 \cdot 10^4$	3,146	
3,0	3,209	1,169	2,5	91,20	3,173	2	4,079	
4,0	3,897	1,275	3	$1,058 \cdot 10^2$	3,263	2,5	4,994	
5,0	4,541	1,362	4	1,348	3,406	3	5,891	
6,0	5,148	1,436	5	1,624	3,516	4	7,631	
$5 \cdot 10^4$	$9,312 \cdot 10^3$		$1,5 \cdot 10^7$	1,828		6	5,368	
6	$1,103 \cdot 10^4$		2	2,398		7	6,220	

f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$	f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$	f_0	$\bar{Q}$	$\bar{p}$
7	1,269		2,5	2,961		8	7,066	
8	1,433		3	3,517		9	7,909	
9	1,595		4	4,610		10 ¹⁰	8,747	
10 ⁵	1,756		5	5,689		1,5 · 10 ¹⁰	1,288 · 10 ⁹	
1,5 · 10 ⁵	2,538		6	6,758		2	1,697	
2	3,308		7	7,816		3,5	2,103	
2,5	4,066 · 10 ⁴		8	8,866		3	2,505	
3	4,817		9	9,911		4	3,299	
4	6,267		10 ⁸	1,095 · 10 ⁷		5	4,087	
5	7,699		1,5 · 10 ⁸	1,604		6	4,868	
6	9,113		2	2,108		7	5,643	
7	1,051 · 10 ⁵		2,5	2,607		8	6,414	
8	1,189		3	3,100		9	7,183	
9	1,326		4	4,071		10 ¹⁰	7,948	
10 ⁵	1,462		5	5,032		1,5 · 10 ¹⁰	1,17 · 10 ¹⁰	
1,5 · 10 ⁵	2,126		6	5,984		2	1,55	
2	2,781		7	6,928		2,5	1,92	
2,5	3,427		8	7,865		3	2,29	
3	4,064		9	8,797		4	3,02	
4	5,313		10 ⁹	9,725		5	3,75	
5	6,544		1,5 · 10 ⁹	1,429 · 10 ⁸		6	4,47	
6	7,761		2	1,880		7	5,19	
7	8,965		2,5	2,328		8	5,89	
8	1,016 · 10 ⁶		3	2,771		9	6,58	
9	1,134		4	3,645		10 ¹²	7,28	
10 ⁷	1,252		5	4,510		1,5 · 10 ¹²	1,08 · 10 ¹¹	
						2	1,42	

Примечания. 1. Зависимость безразмерного отобранного объема воды $\bar{Q}$ от параметра Фурье f_0 при эксплуатации укрупненной скважины с постоянной депрессией. 2. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье f_0 при эксплуатации скважины с постоянным дебитом. 3. Плат бесконечный.

Приложение 2

R=3		R=5		R=8		R=10	
f_0	$\bar{Q}$	f_0	$\bar{Q}$	f_0	$\bar{Q}$	f_0	$\bar{Q}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,3	0,755	3,0	3,195	9	6,861	15	9,965
0,4	0,895	3,5	3,542	10	7,398	20	12,32
0,5	1,023	4,0	3,875	11	7,920	22	13,22
0,6	1,143	4,5	4,193	12	8,431	24	14,09
0,7	1,256	5,0	4,499	13	8,930	26	14,95
0,8	1,363	5,5	4,792	14	9,418	28	15,78
0,9	1,465	6,0	5,074	15	9,895	30	16,59
1,00	1,563	6,5	5,345	16	10,361	32	17,38
1,25	1,791	7,0	5,605	17	10,82	34	18,16
1,50	1,997	7,5	5,854	18	11,26	36	18,91
1,75	2,184	8,0	6,094	19	11,70	38	19,65
2,00	2,353	8,5	6,325	20	12,13	40	20,37
2,25	2,507	9,0	6,547	22	12,95	42	21,07
2,50	2,646	9,5	6,760	24	13,74	44	21,76
2,75	2,772	10	6,965	26	14,50	46	22,42
3,0	2,886	11	7,350	28	15,23	48	23,07
3,25	2,990	12	7,706	30	15,92	50	23,71
3,50	3,084	13	8,035	34	17,22	52	24,33
3,75	3,170	14	8,339	38	18,41	54	24,94
4,0	3,247	15	8,620	40	18,97	56	25,53
4,25	3,317	16	8,879	45	20,26	58	26,11
4,50	3,381	18	9,338	50	21,42	60	26,67
4,75	3,439	20	9,731	55	22,46	65	28,02
5,0	3,491	22	10,07	60	23,40	70	29,29
5,50	3,581	24	10,35	70	24,98	75	30,49
6,0	3,656	26	10,59	80	26,26	80	31,61
6,5	3,717	28	10,80	90	27,28	85	32,67
7,0	3,767	30	10,98	100	28,11	90	33,66
7,5	3,809	34	11,26	120	29,31	95	34,60
8,0	3,843	38	11,46	140	30,08	100	35,48
9,0	3,894	42	11,61	160	30,58	120	38,51
10,0	3,928	46	11,71	180	30,91	140	40,89
11,0	3,951	50	11,79	200	31,12	160	42,75
12,0	3,967	60	11,91	240	31,34	180	44,21
14,0	3,985	70	11,96	280	31,43	200	45,36
16,0	3,993	80	11,98	320	31,47	240	46,95
18,0	3,997	90	11,99	360	31,49	280	47,94
20,0	3,999	100	12,0	400	31,50	320	48,54
22,0	3,999	120	12,0	500	31,50	360	48,91
24,0	4,0					400	49,14
						440	49,28
						480	49,36

Примечания. 1. Зависимость безразмерного отобранного объема воды $\bar{Q}$ от параметра Фурье f_0 при эксплуатации укрупненной скважины с постоянной депрессией. 2. Пласт конечный, закрытый. 3. $R=R_K/R_3$.

Приложение 3

R=3		R=5		R=8		R=10	
f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,52	0,627	3,0	1,167	8	1,556	12	1,732
0,54	0,636	3,1	1,180	8,5	1,582	12,5	1,750
0,56	0,645	3,2	1,192	9	1,607	12	1,768
0,60	0,662	3,3	1,204	9,5	1,631	13,5	1,784
0,65	0,683	3,4	1,215	10	1,653	14	1,801
0,70	0,703	3,5	1,227	10,5	1,675	14,5	1,817
0,75	0,721	3,6	1,238	11	1,697	15	1,832
0,80	0,740	3,7	1,249	11,5	1,717	15,5	1,847
0,85	0,758	3,8	1,259	12	1,737	16	1,862
0,90	0,776	3,9	1,270	12,5	1,757	17	1,890
0,95	0,791	4	1,281	13	1,776	18	1,917
1,0	0,806	4,2	1,301	13,5	1,795	19	1,943
1,2	0,865	4,4	1,321	14	1,813	20	1,968
1,4	0,920	4,6	1,340	14,5	1,831	22	2,017
1,6	0,973	4,8	1,360	15	1,849	24	2,063
2,0	1,076	5	1,378	17	1,919	26	2,108
3,0	1,328	5,5	1,424	19	1,986	28	2,151
4,0	1,578	6	1,469	21	2,051	30	2,194
5,0	1,828	6,5	1,513	23	2,116	32	2,236
		7	1,556	25	2,180	34	2,278
		7,5	1,598	30	2,340	36	2,319
		8	1,641	35	2,499	38	2,360
		9	1,725	40	2,658	40	2,401
		10	1,808	45	2,817	50,0	2,604
		11	1,892			60,0	2,806
		12	1,975			70,0	3,008
		13	2,059				
		14	2,142				
		15	2,225				

Примечания. 1. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье f_0 при эксплуатации укрупненной скважины с постоянным дебитом. 2. Пласт ограниченный, закрытый. 3. $R=R_K/R_3$.

Приложение 4

R=3		R=6		R=10		R=15	
f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,50	0,617	4	1,275	10	1,651	20	1,960
0,55	0,640	4,5	1,320	12	1,730	22	2,003
0,60	0,662	5	1,361	14	1,798	24	2,043
0,70	0,702	5,5	1,398	16	1,856	26	2,080
0,80	0,738	6	1,432	18	1,907	28	2,114
0,90	0,770	6,5	1,462	20	1,952	30	2,146
1,0	0,799	7	1,490	25	2,043	35	2,218

$R=3$		$R=6$		$R=10$		$R=15$	
f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$	f_0	$\bar{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1,2	0,850	7,5	1,516	30	2,111	40	2,279
1,4	0,892	8	1,539	35	2,160	45	2,332
1,6	0,927	8,5	1,561	40	2,197	50	2,379
1,8	0,955	9	1,580	45	2,224	60	2,455
2,0	0,980	10	1,615	50	2,245	70	2,513
2,2	1,00	12	1,667	55	2,260	80	2,558
2,4	1,016	14	1,704	60	2,271	90	2,592
2,6	1,030	16	1,730	65	2,279	10^2	2,619
2,8	1,042	18	1,749	70	2,285	$1,2 \cdot 10^2$	2,655
3,0	1,051	20	1,762	75	2,290	1,4	2,677
3,5	1,069	22	1,771	80	2,293	1,6	2,689
4,0	1,080	24	1,777	90	2,297	1,8	2,697
4,5	1,087	26	1,781	10^2	2,300	2,0	2,701
5,0	1,091	28	1,784	1,1	2,301	2,2	2,704
5,5	1,094	30	1,787	1,2	2,302	2,4	2,706
6,0	1,096	35	1,789	1,3	2,302	2,6	2,707
6,5	1,097	40	1,791	1,4	2,302	2,8	2,707
7	1,097	50	1,792	1,6	2,303	3	2,708
8	1,098						
10	1,099						

Примечания. 1. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье f_0 при эксплуатации укрупненной скважины с постоянным дебитом. 2. Пласт конечный, открытый. 3. $R=R_K/R_3$.

Введение	3
Глава 1. Основные понятия и законы фильтрации нефти, газа и воды	6
§ 1. Особенности движения флюидов в природных пластах	6
§ 2. Пористая среда и ее фильтрационные характеристики	6
§ 3. Скорость фильтрации. Закон Дарси — линейный закон фильтрации	9
§ 4. Границы применимости закона Дарси. Нелинейные законы фильтрации	13
§ 5. Обобщенный закон Дарси	19
§ 6. Понятие о режимах нефтегазоводоносных пластов	22
Глава 2. Основы моделирования процессов фильтрации нефти, газа и воды	24
§ 1. Цели и задачи моделирования фильтрационных процессов	24
§ 2. Физическое моделирование процессов фильтрации пластовых флюидов	25
§ 3. Математическое моделирование процессов фильтрации пластовых флюидов	26
§ 4. Численная и машинная модели пластовых систем	27
§ 5. Аналоговое моделирование	27
§ 6. Основы анализа размерностей и теории подобия	28
§ 7. Применение методов теории размерностей в подземной гидравлике	36
Глава 3. Дифференциальные уравнения фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах	39
§ 1. Вводные замечания	39
§ 2. Вывод уравнения неразрывности	40
§ 3. Дифференциальные уравнения движения	42
§ 4. Зависимость параметров флюидов и пористой среды от давления	45
§ 5. Начальные и граничные условия	49
Глава 4. Установившееся движение несжимаемой жидкости в пористой среде	51
§ 1. Вывод дифференциального уравнения установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси	51
§ 2. Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости в однородных пластах	53
§ 3. Исследование фильтрационных течений несжимаемой жидкости в неоднородных пластах	69
§ 4. Одномерные фильтрационные потоки несжимаемой жидкости при нелинейных законах фильтрации	78
§ 5. Интерференция скважин	82
§ 6. Приток к несовершенным скважинам	96
§ 7. Установившиеся безнапорные фильтрационные потоки жидкости	101
§ 8. Решение плоских задач фильтрации методами теории функций комплексного переменного	105

Глава 5. Установившееся движение упругой жидкости и газа в пористой среде	113
§ 1. Дифференциальные уравнения установившейся фильтрации упругой жидкости и газа по закону Дарси	113
§ 2. Аналогия установившейся фильтрации сжимаемого флюида с фильтрацией несжимаемой жидкости	115
§ 3. Установившаяся фильтрация упругой жидкости	116
§ 4. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток идеального газа	117
§ 5. Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по закону Дарси	119
§ 6. Плоскорадиальный фильтрационный поток идеального газа по двучленному закону фильтрации	123
§ 7. Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа по закону Дарси	125
§ 8. Фильтрационный поток реального газа по двучленному закону фильтрации к несовершенной скважине	126
Глава 6. Неустановившееся движение упругой жидкости в пористой среде	128
§ 1. Упругий режим пласта и его характерные особенности	128
§ 2. Подсчет упругого запаса жидкости в пласте	130
§ 3. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации упругой жидкости	131
§ 4. Одномерные фильтрационные потоки упругой жидкости. Точные решения уравнения пьезопроводности. Основная формула теории упругого режима	133
§ 5. Интерференция скважин в условиях упругого режима	144
§ 6. Определение коллекторских свойств пласта по данным исследования скважин при упругом режиме	148
§ 7. Приближенные методы решения задач теории упругого режима	151
§ 8. Приток упругой жидкости к укрупненной скважине	163
Глава 7. Неустановившееся движение газа в пористой среде	170
§ 1. Вывод дифференциального уравнения Лейбензона	170
§ 2. Линеаризация уравнения Лейбензона и основное решение линеаризованного уравнения	172
§ 3. Решение автомодельной задачи о притоке газа к скважине с постоянным дебитом в точной постановке	175
§ 4. Решение задачи о притоке газа к скважине методом последовательной смены стационарных состояний	177
§ 5. Метод усреднения	180
§ 6. Применение принципа суперпозиции к задачам неустановившейся фильтрации газа	182
§ 7. Приближенное решение задач об отборе газа из замкнутого пласта при помощи уравнения материального баланса	185
Глава 8. Взаимное вытеснение жидкостей и газов. Задачи с подвижными границами	187
§ 1. Кинематические условия на подвижной границе раздела при взаимном вытеснении жидкостей	188
§ 2. Прямолинейно-параллельное вытеснение нефти водой	189
§ 3. Плоскорадиальное вытеснение нефти водой	193
§ 4. Устойчивость движения границы раздела жидкостей	196
Глава 9. Основы теории фильтрации многофазных систем	198
§ 1. Связь с проблемой нефтегазоотдачи пластов	198

§ 2. Основные характеристики многофазной фильтрации . . .	199
§ 3. Исходные уравнения многофазной фильтрации	202
§ 4. Одномерные модели вытеснения несмешивающихся жидкостей	205
§ 5. Задача Баклея—Леверетта и ее обобщения	210
§ 6. Двухфазное течение с учетом капиллярного давления . . .	222
§ 7. Фильтрация трехфазной смеси	225
§ 8. Движение газированной жидкости в пористой среде . . .	228

Глава 10. Гидродинамические модели методов повышения нефте- и газоконденсатоотдачи пластов 232

§ 1. Физические основы применения химических реагентов при заводнении нефтяных пластов	232
§ 2. Вывод системы уравнений двухфазной фильтрации с активной примесью	234
§ 3. Движение скачков насыщенности и концентрации	236
§ 4. Вытеснение нефти раствором активной примеси	238
§ 5. Основы неизотермической фильтрации жидкостей и газов . .	244
§ 6. Температурное поле пласта. Определение потерь теплоты через кровлю и подошву	246
§ 7. Нагревание призабойной зоны пласта при закачке горячей жидкости	249

Глава 11. Особенности фильтрации неньютоновских жидкостей . . 251

§ 1. Реологические модели фильтрующихся жидкостей и нелинейные законы фильтрации	252
§ 2. Одномерные задачи фильтрации вязкопластичной жидкости	257
§ 3. Образование застойных зон при вытеснении нефти водой . .	262

Глава 12. Движение жидкостей и газов в трещиноватых и трещиновато-пористых средах 263

§ 1. Особенности фильтрации в трещиноватых и трещиновато-пористых средах	263
§ 2. Вывод дифференциальных уравнений движения жидкости и газа в трещиноватых и трещиновато-пористых средах	268
§ 3. Установившаяся одномерная фильтрация жидкости и газа в трещиноватом и трещиновато-пористом пласте	269
§ 4. Неустановившееся движение жидкости и газа в трещиноватых и трещиновато-пористых средах	274
§ 5. Вытеснение нефти водой из трещиновато-пористых и неоднородных сред	276

Глава 13. Численное моделирование основных процессов фильтрации пластовых флюидов 279

§ 1. Методы решения задач подземной гидравлики	279
§ 2. Построение дискретного аналога области фильтрации . . .	280
§ 3. Разностные схемы, аппроксимирующие уравнения фильтрации упругой жидкости	281
§ 4. Решение системы конечно-разностных уравнений. Сходимость метода	285
§ 5. Численное решение двумерной задачи нестационарной фильтрации упругой жидкости в неоднородном пласте	288
§ 6. Построение разностных схем для уравнений двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей	292
Список литературы	295

Приложения 296

УЧЕБНИК

Каплан Сафербиевич Басниев
Анатолий Михайлович Власов
Ираида Николаевна Кочина
Вячеслав Михайлович Максимов

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРАВЛИКА

Редактор издательства *Т. К. Лазарева*
Технические редакторы *О. А. Колотвина, В. Ю. Любимова*
Корректор *К. С. Торопцева*

ИБ № 5801

Сдано в набор 08.01.86 г. Подписано в печать 29.05.86. Т-07997. Формат 60×90^{1/16}. Бумага кн.-журн. имп. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,0. Усл. кр.-отт. 19,0. Уч.-изд. л. 19,0. Тираж 4600 экз. Заказ 218/439—6. Цена 95 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 103633, Москва, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая, 14