

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA KAFEDRASI**



TUTASH MUHIT MEHANIKASI
fanidan

O'QUV-USLUBIY MAJMUA

«5140300 – Mexanika» ta'lim yo'nalishi talabalari uchun

ANDIJON-2021

«Tutash muhit mexanikasi» fanidan o'quv – uslubiy majmua (5140300–«Mexanika» ta'lim yo'nalishi talabalari uchun). – Andijon: ADU nashri, 2021. –271 bet.

«Tutash muhit mexanikasi» fanidan ushbu o'quv – uslubiy majmua Andijon Davlat Universitetining «Matematika» kafedrasida tayyorlangan. Majmua «Tutash muhit mexanikasi» fanini o'rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta'minlovchi o'quv-uslubiy materiallarni o'z ichiga oladi, hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta'minlaydi.

Tuzuvchilar:

R.K.Azimov - Matematika kafedrasida o'qituvchisi;

Taqrizchilar:

R.V.Mullajonov - Andijon davlat universiteti o'quv-uslubiy boshqarma boshlig'i, fizika matematika fanlari nomzodi, dotsent;

D.Xojiyev - Andijon Mashinasozlik instituti

O'quv-uslubiy majmua ADU kengashining 2021 yil 31 avgust dagi 1-sonli qarori bilan foydalalanish uchun tavsiya qilingan.

Mazkur o'quv-uslubiy majmua O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta maxsus ta'lim Vazirligining 2017 yil 1 martdagi 107 – sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan yangi o'quv-uslubiy majmualarini tayyorlash bo'yicha uslubiy ko'rsatmaga asosan tayyorlandi.

MUNDARIJA

1.	O'quv materiallari 1.1. Ma'ruzalar matni 1.2. Amaliy mashg'ulotlar ishlanmasi	5 6-161 163-195
2.	Mustaqil ta'lim materiallari	196-201
3.	Glossariy	203-210
4.	Ilovalar - Fan dasturi - Ishchi o'quv dasturi - Tarqatma materiallar - Testlar - Baholash mezonlari - Boshqa materiallar - O'UMning elektron varianti	212-217 217-233 234-240 240-254 254-258 255-271 271

O'QUV MATERIALLARI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

**ANDIJON
DAVLAT
UNIVERSITETI**



FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIKA» KAFEDRASI

**1.1. «TUTASH MUHIT MEXANIKASI»
FANINING MA'RUZA MASHG'ULOTLARI
MATERIALLARI**

ANDIJON – 2021

1-mavzu: Kirish. Tutash muhitlar mexanikasi predmeti. Tutash muhitlar tushunchasi.

Reja

- 1 Tutash muhit tushunchasi;
2. TMM ning tadqiqot ob'ektlari va predmeti;
3. TMM usullari. Statistik va fenomenologik usullar;
4. Asosiy gipotezalar;
5. Asosiy tushunchalar.

Tayanch iboralar: muhit, zarracha, fazo, vaqt, metrika, kontinuum, uzluksizlik, muammolar

Tutash muhitlar mexanikasi mexanikaning gazlar, suyuqliklar, plazma va deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarning harakati hamda muvozanatini o'rganuvchi bo'limidir.

Tutash muhitlar mexanikasida qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlarning makroskopik nuqtai nazardan harakatlari o'rganiladi. Bu fan fundamental tushunchalar asosida, farazlar vositasida yaratilgan. Mexanik nuqtai nazardan o'rganilayotgan qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlar fazoning biror chekli yoki cheksiz bo'lagini to'la to'kis tutash holda egallagan, deb faraz qilinadi. Fazoda olingan istalgan geometrik nuqtada tutash muhit «zarrasi» mavjud degan tushunchani kiritamiz.

Tabiatdagi hamma jismlar o'zlarining gaz, suyuq yoki qattiq holatlaridan qat'iy nazar alohida-alohida mayda bo'lakchalar – zarrachalardan tashkil topgan. Molekulyar fizika kursidan ma'lumki 1 sm^3 hajmdagi u yoki bu gazning molekulalari soni, yulduzlararo muhitdagi molekulalar soni, biror qattiq jism, masalan temirning kichik bir bo'lakchasidagi zarrachalar soni va hokazolarni hisoblab topish qiyin emas. Hisoblashlar odatda bu sonlar biz qaraydigan hajmlar uchun juda katta ekanligini ko'rsatadi, shuning uchun har qanday jismni biz taqribiy ravishda fazoning ma'lum bo'lagini tutash (uzluksiz) to'ldirgan deb qaraymiz (asosiy gipoteza). Biz yaxshi biladigan odatdagi jismlar – suv, tuproq, havo, tosh, temir va hokazolarni fazoning biror bo'lagini butunlay to'ldirgan jism sifatida qaraymiz. Nafaqat oddiy moddiy jismlarni, balki har xil maydonlarni ham, masalan elektromagnit maydoni, gravitasion maydon va boshqalarni ham uzluksiz kontinuum sifatida qarash yoki hisoblash mumkin. Bundan keyin biz yuqorida eslatilgan jismlar va maydonlarni bitta umumiy nom bilan – *Tutash muhitlar* deb ataymiz. Ushbu muhitlarning mexanik xarakteristikalarini o'rganuvchi ularning o'zaro ta'siri, ulardagi boshqa jismlar harakatlari va muvozanatlari bilan bog'liq masalalarni o'rganuvchi fanni *Tutash muhitlar mexanikasi* deb ataydilar.

Tabiatdagi u yoki bu jismni tutash muhit deb qarash uni ideallashtirishdan iboratdir. Bunday ideallashtirish biz deformatsiyalanuvchi jismlar harakatlarini tekshirishda uzluksiz funksiyalar apparatini, differensial va integral hisobini qo'llaganimiz bois zarurdir.

Yuqorida aytilganlardan quyidagicha xulosa qilish mumkin: tutash muhit deganda *deformatsiyalanuvchi (tashqi ta'sir natijasida shakli o'zgaruvchi)*, qattiq, suyuq, gaz va plazma holatidagi jismlarni hamda ba'zi maydonlarni tushunamiz.

Nazariy mexanika kursida qattiq jism ideallashtirilib, ya'ni uni absolyut qattiq jism deb qarab, uning muvozanati va harakati o'rganiladi. *Tutash muhitlar mexanikasi* esa *deformatsiyalanuvchi qattiq, suyuq va gazsimon jismlarning muvozanati, harakati va o'zaro ta'siri masalalarini o'rganadi*. Bu yerdan ko'rinib turibdiki tutash muhitlar mexanikasi fan va texnikaning juda ko'p sohalariga tegishli masalalarni hal qilish bilan shuq'ullanishi kerak. Bunday masalalarning ichidan quyidagilarni alohida ajratib ko'rsatish mumkin:

- gaz va suyuqliklarning ularda harakat qilayotgan jismga ta'sirini o'rganish;
- gaz va suyuqliklarning quvurlardagi harakati;
- suyuqliklarning tuproq qatlami yoki jismlardan o'tish harakati – filtrasiya masalalari;
- gidrostatika masalalari;
- to'liqin harakati masalalari, bu yerda to'liqin harakati jismning har uch fazaviy holatida ham sodir bo'ladi;
- suyuqlik va gazlarning turbulent harakati masalalari;
- qattiq jismlar atmosferaning qalin qatlamlariga yorib kirganda ularni yonishdan va erishdan saqlash;
- magnit gidrodinamikasi masalalari;
- qovushoq elastiklik nazariyasi masalalari;
- elastiklik nazariyasi masalalari;

- plastiklik nazariyasi masalalari;
- astrofizika va kosmogoniya masalalari;
- qurilmalarning mustahkamligi va yemirilishi masalalari;
- biomexanika masalalari;
- meteorologiya masalalari;
- yer fizikasi va seysmologiya masalalari;
- harakatlanuvchi jismlarning elektromagnit maydonlar bilan o'zaro ta'siri masalalari;
- va hokazo.

Moddiy jismlar harakatini o'rganishda tutash muhitlar mexanikasi asosan ikki **usuldan** foydalanadi – *statistik* hamda *fenomenologik* – *makroskopik* usullar:

1) biror muhitning harakati tekshirilayotganda uning zarrachalari bir biriga nisbatan harakatda deb qaraladi, lekin uning har bir zarrasining traektoriyasi, tezligi, tezlanishi va boshqa xarakteristikalar o'rganilmasdan, shu jism zarrachalari uchun umumiy bo'lgan o'rtacha xarakteristikalar o'rganiladi. Bu esa o'z navbatida fizika fanida qo'llaniladigan statistik usulga olib keladi va o'rganilayotgan hodisalarga ehtimollar nazariyasi nuqtai – nazaridan qaraladi.

Statistik usullar har doim zarralarning xususiyatlari, o'zaro ta'siri va hokazolar bilan bog'liq bo'lgan qo'shimcha gipotezalarga asoslanadi. Shuning uchun ham statistik usullarni qat'iy va aniq usullar deb bo'lmaydi. Bundan tashqari statistik usullar asosida chiqarilgan harakat tenglamalari juda murakkab bo'lganligi sababli bu usullar o'z effektivligini yo'qotadilar;

2) moddiy jismlar harakatini o'rganishdagi ikkinchi yo'l – tajribadan olingan umumiy qonuniyatlar va gipotezalar asosida fenomenologik – makroskopik nazariyani yaratishdir. Amaliy jihatdan muhim ko'pgina masalalarni yechishda makroskopik nazariya juda effektiv apparat hisoblanadi va uning yordamida topilgan ma'lumotlar tajriba natijalari bilan mos tushadi. Shuning uchun ham biz tutash mumitlar mexanikasi kursini o'rganishni moddiy muhitning fenomenologik – makroskopik nazariyasi asosida olib boramiz.

Tutash muhitlar mexanikasida ham, moddiy jismlar harakatini o'rganadigan boshqa fanlarda bo'lgani kabi, **fazo** va **vaqt** tushunchalari asosiy tushunchalar bo'lib hisoblanadilar. Chunki har qanday harakat biror fazoda qandaydir vaqt davomida sodir bo'ladi. Tutash muhitlar mexanikasi doirasida har qanday harakatni biz **metrik** (ixtiyoriy nuqtalari orasidagi masofalar aniqlangan) fazolarda tekshiramiz. Bunday metrik fazoga misol sifatida oddiy uch o'lchovli Yevklid fazosini keltirish mumkin. Bu fazoning har bir nuqtasi, butun fazo uchun yaroqli bo'lgan, yagona (x, y, z) Dekart koordinatalari sistemasi bilan aniqlanadi va ixtiyoriy x_1, y_1, z_1 hamda x_2, y_2, z_2 koordinatali nuqtalari orasidagi masofa quyidagi $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ formula bilan aniqlanadi. Bundan keyin biz faqat hamma nuqtalari uchun yaroqli bo'lgan yagona Dekart koordinatalari sistemasini kiritish mumkin bo'lgan fazolarni qaraymiz. Bunday fazo *Yevklid fazosi deyiladi* va shu asosda rivojlantiriladigan mexanika *Nyuton mexanikasi deyiladi*.

Tutash muhitlar mexanikasida **absolyut vaqtdan** foydalaniladi. Vaqtning absolyutligini uning hamma uchun bir xilligida deb tushunish kerak, ya'ni vaqt poezddagi, samolyotdagi, auditoriyadagi va h.k. kuzatuvchilar uchun bir xil o'tadi. Lekin shuni ta'kidlash lozimki, bu narsa faqat Eynshteynning nisbilik nazariyasini hisobga olmaslik mumkin bo'lgan holdagina o'rinalidir.

Har bir fanning o'ziga xos tekshirish uslublari bo'ladi. Xuddi shunday, tutash muhitlar mexanikasining ham o'ziga xos **uslublari** mavjud. Bu uslublar matematik analiz, differensial geometriya, funksional analiz va boshqa matematik fanlar qonunlariga tayanadi. Tutash muhitlar mexanikasining hamma uslublari asosida quyidagi konsepsiya yotadi: tutash muhitning harakatini bir qiymatli aniqlovchi va tavsif etuvchi (xarakterlovchi) qator tushunchalar kiritiladi va ular sonlar yoki boshqa matematik tushunchalar yordamida aniqlanadi. Bunday tushunchalarga misol sifatida tezliklar maydoni, bosimlar maydoni, harakat, muvozanat, zichlik, harorat va boshqalar ko'rsatilishi mumkin.

Tutash muhitlar mexanikasida mexanik masalalarni matematik masalalarga keltiruvchi uslublar ishlab chiqiladi. Bu uslublar yordamida mexanik masala qandaydir sonlarni yoki sonlar funksiyalarini har

xil matematik amallar yordamida topishga keltiriladi. Lekin shuni ta’kidlash lozimki, ko’p hollarda matematik masalaga keltirilgan mexanik masala shunday qiyinlashadiki uni echish amri-mahol bo’ladi. Shuning uchun ham matematik ko’rinishga keltirilgan mexanik masalani echish matematikaning yoki matematiklarning ishi emas, balki mexanikaning, xususan mexaniklarning ishi hisoblanadi. Chunki ana shunday masalalar mexanik gipoteza va mulohazalar asosida soddalashtirilib, keyin echilishi mumkin. *Shunday qilib, tutash muhitlar mexanikasining uslublari mexanik masalani matematik masalaga keltirish va uni echish uslublardan iboratdir.*

Shunday qilib quyidagi *asosiy gipotezalarga* ega bo’ldik.

- 1) jism zarrachalari jism joylashgan fazo bo’lagini (qismini) tutash, (bo’shliqlarsiz) to’ldiradi. Bu zarrachalar cheksiz kichik hajmga ega bo’lib mexanik parametrlarga egadir (zichlik, harorat va h.k.);
- 2) Jism harakat qiladigan fazo YYevklid fazosi bo’lib, bu shunday fazoki unda hamma nuqtalar uchun umumiy bo’lgan Dekart koordinatalari sistemasini kiritish va ixtiyoriy nuqtalar orasidagi masofani aniqlash uchun yagona formula beriladi. *Masofaning o’lchov birligi sifatida* Parij meridianining milliondan bir bo’lagi – metr qabul qilingan.
- 3) Vaqt absolyutdir. Ya’ni u har qanday koordinatalar sistemasida bir xil va bir tekis o’tadi, boshqacha aytganda koordinatalar sistemasining nisbiy harakati bilan uzviy ravishda bog’langan. *Vaqt birligi sifatida* o’rtacha quyosh sutkasining 86400 dan bir qismi – *sekund* qabul qilingan.

Tabiiy hodisalarni kuzatish natijasida va ko’plab texnik muammolarni xal qilishda biz duch keladigan suyuqliklar, gazlar va qattiq deformatsiyalanadigan jismlarning turli xil harakatlarini belgilashimiz mumkin.

Kundalik shaxsiy tajribaga tayanib, deformatsiyalangan jismlarning ko’p harakatlarini kerakli darajada boshqarishimiz mumkin. Kundalik hayotdagi tajribalar bizda haqiqat va “umumiy tushuncha” tuyg’usini yuzaga keltiradi. Bu esa ko’pincha bizga kerakli mexanik ta’sirni to’g’ri taxmin qilish va yaratishga imkon beradi.

Biroq, murakkab holatlarda buni amalga oshirib bo’lmaydi. Buning uchun nazariy va tajribalarni o’rganishning maxsus usullari talab qilinadi. Bunday izlanishlar fan sifatida tutash muhitlar mexanikasining yaratilishiga va rivojlanishiga olib keldi. Bu fanning yaratilishi quyidagi muammolarga javob topishga yo’l ochdi. Masalan, gaz siqilgan holatda bo’lgan silindrdagi teshikdan chiqadigan gazning tezligi qancha; havo oqimining atmosferada qanday harakatlanishi; samolyot yoki kema suvga chidamliligini qanday kamaytirish mumkin; 500 metr balandlikdagi televizion metal minorani, eng yaqin ikki tayanch orasida ikki kilometrdan oshiq ko’prikni qanday qurish kerak; samolyotda pervanel diametrining oshishi yoki kamayishi bilan nima sodir bo’ladi; bosimlarning tarqalishi va bomba portlashi paytida havo harakati haqida nima deyish mumkin va hokazo.

Shuni ta’kidlashimiz kerakki, ko’pgina savollar va muammolar mavjud bo’lib, ularga hanuzgacha tajribalardan foydalanib, kerakli qoniqarli javob bera olmaymiz. Yangi murakkab muammolarni hal qilish, ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo’lgan vazifalar, shuningdek, ilm-fanning oldingi rivojlanishi tomonidan ishlab chiqilgan vazifalarni bugungi kunda ilmiy tadqiqot mavzusi hisoblanadi. Shoshilinch yangi muammolarga misollar: suvning 100 m/s tezlikda harakatlanishining pasayishi; millionlab daraja haroratga ega bo’lgan plazmani yaratish va ishlab turishi; yuqori yuk va yuqori haroratlarda materiallarning egiluvchanlik va boshqa hodisalarni hisobga olgan holda portlash paytida tuzilmalarga ta’sir etuvchi kuchlarni aniqlash; uzoq masofaga yo’lovchilarning parvozlari uchun yuqori darajadagi samolyotni yaratish; atmosferadagi umumiy havo aylanishini tushuntirish; ob-havo bashorati; o’simliklar va tirik organizmdagi mexanik jarayonlarni o’rganish; yulduzlar evolyutsiyasi muammolari, quyoshda ro’y beradigan hodisalar va boshqalar.

Biz tutash muhitlar mexanikasining qanday muammolar bilan shug’ullanishini aytib o’tamiz. Ular elastiklik nazariyasi masalalari, plastiklik nazariyalari va uning masalalari, gidrostatika masalalari, suyuqlikda harakatlanuvchi jismga suyuqlikning ta’siri masalalari, filtratsiya masalalari, to’lqin harakati, suyuqlik va qattiq jismlarda to’lqinning tarqalish masalalari, gazlarning kimyoviy o’zgarishlari bo’layotgan holatdagi, portlash va yonish jarayonlari bilan bo’lgan harakatlarini o’rganish masalalari, qattiq jismlarning atmosfera

qalin qatlamlariga kirganida yonish va erib ketishdan saqlash masalalari, suyuqlikning turbulent harakati masalalari, magnit gidrodinamikasi masalalari, ob-havoning o'zgarishini tekshirish yo'nalishi, biologik mexanika hamda boshqa masalalardan iboratdir. Masalan suyuqlik va gazning quvurlar orqali va umuman, turli xil mashinalar ichidagi harakatini ko'radigan bo'lsak. Ushbu masalalarda suyuqlikning oqim chegaralari bilan o'zaro ta'siri qonunlari, xususan, harakatlanuvchi va qo'zg'almas qattiq devorlarning qarshiligi hamda tezlikni taqsimlashda notekislik hodisalari va boshqalar muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Ushbu vazifalar gaz quvurlari, neft quvurlari, nasoslar, trubinalar va boshqa gidravlik mashinalarni loyihalashda bevosita ahamiyatlidir.

So'nggi paytlarda biologik mexanika sohasida ham juda ko'p izlanishlar olib borilmoqda, xususan, tirik organizmlardagi qonning harakatini va mushaklarning qisqarishi hodisasini tasvirlashga imkon beradigan mexanik modellar yaratilmoqda.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, yaqinda kimyo korxonalarida ishlab chiqarish texnologiyasi masalalari tutash muhitlar harakatini mexanik o'rganishga asoslangan.

Tutash muhitlar mexanikasida deformatsiyalanadigan jismlarning harakatini o'rganish uchun matematik usullar ko'rib chiqiladi. Matematik usullar turli mexanik hodisalarni o'rganishda muhim rol o'ynaydi, xususan, koordinatalar sistemasi tushunchasidan keng foydalaniladi. Koordinatalar sistemasi mexanik hodisalarni o'rganishda vosita sifatida xizmat qiladi.

Tutash muhitlar mexanikasida mexanik muammolarni matematik muammolar, ya'ni turli hil matematik usullardan foydalangan holda ma'lum sonlarni yoki sonli funksiyalarni topish usullari ishlab chiqilgan.

Bundan tashqari, tutash muhitlar mexanikasining eng muhim maqsadi deformatsiyalangan jismlarning umumiy xususiyatlari va harakat qonuniyatlarini yaratishdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, matematik usullar yordamida tutash muhitlar mexanikasining o'ziga xos muammolarini hal qilish mumkin.

Tutash muhitlar mexanikasi ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining ba'zi qismlarini, differensial tenglamalar, integral tenglamalar va boshqalarni rivojlantirishga katta ta'sir ko'rsatdi.

Tutash muhit mexanikasining asosiy usullaridan biri - matematik tahlil usulidir. TMM(Tutash muhit mexanikasi)da mexanik masala yechilishi kerak bo'lgan ma'lum matematik masalaga keltiriladi va u o'z navbatida matematikaning ham rivojida katta rol o'ynab keladi. TMMda tajriba asosida olingan yechimlar ham muhim rol o'ynaydi. Tajriba matematik usullar asosida olingan yechimlarninggina emas, balki matematik tenglamalarga keltirilgandagi tutash muhit xarakati va holatini akslantiruvchi munosabatlarning maqsadga muvofiqlik darajasini ham ko'rsatuvchi omil bo'lib xizmat qiladi. Bundan tashqari, tutash muhit mexanikasining turli xil muammolari va ularni o'rganishning matematik usullari ko'p hollarda bir-biri bilan chambarchas bog'liq ekanligi ma'lum bo'ldi.

Yuqoridagi muammolarning fizik, geometrik va boshqa ichki tub xususiyatlarini aniqlovchi natijalar qaysi koordinatalar sistemasi yordamida olinishiga bog'liq emas. Shuning uchun mexanik hodisalarning koordinatalar sistemasi tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ichki fizik xususiyatlarini va ular orasidagi munosabatlarni o'rganish muhim hisoblanadi. Bunda esa tenzor va tenzor funksiyalar muhim rol o'ynaydi. Tenzorlarning xossalari va ular ustidagi amallarni o'rganish tenzor hisob deb ataladi.

Ushbu hisob geometriyada, nisbiylik nazariyasida, mexanikada, ayniqsa tutash muhit mexanikasida keng qo'llaniladi.

Nazorat savollari

1. Tutash muhit tushunchasi nima?
2. TMM ning tadqiqot ob'ektlari va predmetlari nima?
3. TMM usullari. Statistik va fenomenologik usullarini sanang?
4. Asosiy gipotezalar haqida nimalarni bilasiz?
5. Asosiy tushunchalar nimalardan iborat?

2-mavzu: Miqdorlarni indeksli belgilash. Tortburchakli dekart va egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Kovariant va kontrvariant koordinata bazislari.

Reja:

1. Miqdorlarni indeksli belgilash.
2. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.
3. Egri chiziqli koordinatalar sistemasi.
4. Kovariant koordinata bazislari.
5. Kontrvariant koordinata bazislari

1. Miqdorlarni indeksli belgilash. Biz bilamizki, agar uchta erkli o'zgaruvchi berilgan bo'lsa, ularni uchta harf yordamida, masalan, x, y, z deb belgilash mumkin. Tenzor hisobda esa ushbu erkli o'zgaruvchilarni indeksli bir dona harf yordamida belgilash mumkin:

$$x^1, y^1, z^1 \text{ yoki } x^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.1.1)$$

Bu belgilash odatda erkli o'zgaruvchilar uchun qabul qilingan. Ammo bu belgilashni x_α ko'rinishda ham kiritish mumkin. Masalan, (2.1.1) o'zgaruvchilarning bir jinsli chiziqli funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin;

$$\sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha x^\alpha = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (2.1.2)$$

Ta'rif: Muayyan bir harfni turli indekslar yordamida belgilab, hosil qilingan miqdorlar to'plami ob'yekt deb ataladi.

Ta'rif: Bir indeks yordamida x^α va a_α kabi belgilangan ob'yektlar birinchi rang ob'yekt deb ataladi.

Indeksli ayrim harflar (x^1, x^2, x^3 va a_1, a_2, a_3) esa mazkur ob'yektning komponentalari (tashkil etuvchilari) deb ataladi.

Birinchi rang ob'yektlar uchun ikki xil komponentalar mavjud:

- a) quyi indeksli (kovariant) - $a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$
- b) yuqori indeksli (kontrvariant) - $a^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$.

Demak, birinchi rang ob'yektning uchta kovariant va uchta kontrvariant komponentalari bo'ladi.

Tenzor hisobda ikkinchi, uchinchi va hokazo n - rang ob'yektlar ham ishlatiladi.

Ta'rif: Ikki indeksli ob'yektlar 2-rang ob'yektlar deb ataladi.

Masalan, uch o'zgaruvchili funksiyaning kvadratik funksiyasi ushbu ko'rinishga ega;

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta &= a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + a_{21} x^2 x^1 + \\ &+ a_{22} x^2 x^2 + a_{23} x^2 x^3 + a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33} x^3 x^3 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

bu yerda $a_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ kvadratik formaning o'zgarmas koeffitsientlaridir. Ularning har bir indeksini yuqori va quyi indeks sifatida yozish mumkin;

$$a^{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\cdot}, a_{\alpha\cdot} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Yani, ikkinchi rang ob'yektlarning to'rt xil ko'rinishidagi komponentalari mavjud bo'ladi. Ular $a_{\alpha\beta}$ -

kovariant, $a^{\alpha\beta}$ - kontrvariant, $a^{\alpha\cdot}$ - birinchi xil aralash, $a_{\alpha\cdot}$ - ikkinchi xil aralash komponentalar deb ataladi. Bu yerda nuqta yordamida indeksning o'rni ko'rsatiladi. Ikkinchi rang ob'yektning bir xil ko'rinishdagi komponentalarining soni to'qqizta bo'ladi. Qaralayotgan birinchi, ikkinchi va hokazo n - rang ob'yektlar ketma-ketligi to'la bo'lishi uchun indekssiz miqdorlar nolinchil rangli ob'yekt sifatida qabul

qilinadi. Yuqori rangli ob'yektlarni belgilash uchun nomerli indekslardan ham foydalaniladi. Masalan, n - rang ob'yektning kovariant komponentasini $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ ko'rinishda belgilash mumkin.

Indeksli harflarning yig'indisi. Indeksli harflarning yig'indisi A.Eynshteyn taklif qilgan qoidaga ko'ra bajariladi. Agar bir hadli ifodada biror indeks ikki marta - bir gal yuqori va ikkinchi gal quyi indeks sifatida uchrasa, u holda, ushbu indeksga 1, 2, 3 qiymat berilib, yig'indi hisoblanadi. Bu qoidaga binoan quidagi tenglik hosil bo'ladi;

$$a_{\alpha} x^{\alpha} = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$a_{\cdot \alpha} = a_{\cdot 1}^1 + a_{\cdot 2}^2 + a_{\cdot 3}^3$$

ushbu $a_{\alpha\alpha}$, $a^{\alpha\alpha}$, $a_{\alpha\alpha}^{\cdot\cdot}$ ifodalarda esa yig'indi hisoblanmaydi, chunki ularda α indeksi bo'yicha yig'indi hisoblash qoidasi buziladi.

Ta'rif: Yig'indini hisoblash amali bajariladigan indeks befarq yoki soqov (gung) indeks deb ataladi. Undan boshqa indekslar esa erkin indekslar deb ataladi.

Masalan, $a_{\alpha\beta} b^{\beta}$ ifodada β - befarq, α esa erkin indekslardir. Erkin indeks 1, 2, 3 sonlardan birini qabul qilishi mumkin. Yani, $a_{\alpha\beta} b^{\beta}$ ifoda ushbu $a_{1\beta} b^{\beta}$, $a_{2\beta} b^{\beta}$, $a_{3\beta} b^{\beta}$ ifodalardan biri bo'lishi mumkin.

Agar biror indeks harfli tenglikning ikkala tomonida uchrasa va tenglikning bir tomonida erkin bo'lsa, u holda ushbu indeks tenglikning ikkinchi tomonida ham erkin bo'ladi. Masalan,

$$a_{\alpha} = b_{\alpha} c^{\alpha} \text{ tenglikda } \alpha - \text{erkin indeks bo'ladi.}$$

A.Eynshteyn qoidasidan ko'p karrali yig'indilarni yozishda ham foydalanish mumkin. Masalan,

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = a_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 a_{\alpha\beta\gamma}^{\dots \alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\beta\gamma}^{\dots \alpha\beta\gamma}$$

2. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

TMMda koordinatalar sistemasi ham muhim ahamiyatga ega. TMMda ikki xil, ya'ni to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi va egri chiziqli koordinatalar sistemasidan foydalaniladi.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Markazi O nuqta, koordinata chiziqlari esa y^1 , y^2 , y^3 . Ixtiyoriy M nuqtaning vaziyati, koordinata tekisliklarining tenglamalarini beruvchi $y^{\alpha} = c^{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) munosabatlar bilan aniqlanadi.

Fazoda nuqtaning vaziyati mazkur uchta tekisliklarning kesishishi natijasida aniqlanadi. Tekisliklardan ikkitasi kesishganda hosil bo'ladigan to'g'ri chiziqlar koordinata chizig'i deb ataladi. U y^{α} koordinata chizig'i bo'ylab musbat tomonga yo'nalgan. $y^{\alpha} = c^{\alpha}$ koordinata tekisligiga perpendikulyar bo'lgan birlik vektor $\bar{k}_{\alpha}$ deb belgilanadi.

Quyidagi birlik vektorlar koordinata bazislari deb ataladi. Va ular fazoning barcha nuqtalarida bir xil yo'nalishga ega. Ular uchun quidagi tenglik o'rinli bo'ladi;

$$\bar{k}_{\alpha} \cdot \bar{k}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.2.1)$$

bu yerdagi $\delta_{\alpha\beta}$ - Kronekker belgisi (deltasi) deb ataladi.

Demak, to'g'ri burchakli dekart koordinata sistemasida bir xil nomli koordinata tekisliklari ham, bir xil nomli koordinata chiziqlari ham bir-biriga parallel bo'ladi. Har bir nuqtada esa uchchala koordinata tekisliklari ham, uchchala koordinata chiziqlari ham o'zaro ortogonal bo'ladi. Undan tashqari, bir xil nomli koordinata shu nomli koordinata tekisliklariga ortogonal bo'ladi.

Koordinatalari y^α va $y^\alpha + dy^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) sonlar bilan berilgan M va M' nuqtalar orasidagi masofa quyidagi tenglik bilan aniqlanadi;

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = \delta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta \quad (2.2.2)$$

M nuqtaning radius vektori $\bar{r}$ quyidagiga teng bo'ladi

$$\bar{r} = y^1 \bar{k}_1 + y^2 \bar{k}_2 + y^3 \bar{k}_3 = y^\alpha \bar{k}_\alpha. \quad (2.2.3)$$

Ortogonal dekart koordinatalar sistemasida nuqta koordinatalari quyi indeks

(y_α , x_α) yordamida ham belgilanishi mumkin.

3. Egri chiziqli koordinatalar sistemasi.

Uchta x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) miqdor dekart koordinatalari y^β ($\beta = 1, 2, 3$) larning funksiyasi sifatida berilgan bo'lsin;

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, y^2, y^3), \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.3.1)$$

x^α funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardir. Bu funksiyalarning Vronskiy determinanti ya'ni yakobiani noldan farqli bo'lsin;

$$J = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\alpha} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.3.2)$$

yani, (2.3.2) o'zaro bir qiymatli akslanish bo'lib, undan

$$y^\beta = y^\beta(x^1, x^2, x^3), \quad (\beta = 1, 2, 3) \quad (2.3.3)$$

lokal munosabatlarni olish mumkin bo'lsin.

U holda, uchta x^1, x^2, x^3 sonlar berilsa, (2.3.3) tenglikka binoan uchta y^1, y^2, y^3 sonlar (dekart koordinatalari) ham berilgan bo'ladi, yani fazoda muayyan nuqta aniqlanadi. Demak, x^α ($\alpha = 1, 2, 3$)

sonlarni fazodagi nuqtaning koordinatalari deb qarash mumkin va $x^\alpha = b^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) (b^α – o'zgarmas sonlar) munosabatlar yordamida hosil qilingan egri chiziqli sirtlarni koordinata sirtlari deyishimiz mumkin. U holda mazkur uchta sirtlarning kesishuvi fazoda biror $M(x^1, x^2, x^3)$ nuqtani

beradi. Ulardan istalgan ikkitasining kesishuvi esa egri chiziqni ya'ni koordinata chizig'ini bildiradi.

Egri chiziqli koordinata sirtlari va chiziqlarining ko'rinishi qaralayotgan nuqtaning holatiga bog'liqdir.

Koordinata chizig'i bo'ylab faqat x^α o'zgaradi va (2.2.3), (2.3.3) formulalarga ko'ra ushbu x^α koordinata chizig'ining tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{r}_\alpha = \bar{r}_\alpha(x^\alpha) \quad (2.3.4)$$

4 . Kovariant koordinata bazislari.

Ixtiyoriy ikkita bir-biriga yaqin koordinatalari x^α va $x^\alpha + dx^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) bo'lgan M va M' nuqtalar fazoda berilgan bo'lsin. Bu ikki nuqta yordamida aniqlangan $MM' = \bar{d}r$ yo'naltirilgan kesma koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq emas. Ular invariant miqdordir.

Ta'rif: Ushbu yo'naltirilgan $\bar{d}r$ kesma elementar ko'chish vektori, uning uzunligi ds , yani M va M' nuqtalar orasidagi masofa esa $\bar{d}r$ ning moduli deb ataladi.

Agar yuqoridagi mulohazani uzunligi bir birlik bo'lgan kesma uchun qo'llanilsa, moduli birga teng bo'lgan elementar ko'chish vektori $\bar{\Theta}$ hosil qilinadi. Ushbu birlik vektor yordamida $\bar{d}r$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$dr = ds\bar{\Theta} \quad (2.4.1)$$

Agar M va M' nuqtalar x^α koordinata chizig'ida yotsa, elementar ko'chish vektori $\bar{d}r_\alpha$ deb belgilanadi.

Elementar ko'chish vektori $\bar{d}r(x^1, x^2, x^3)$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\bar{d}r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^3} dx^3 \equiv \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha} = \bar{\Theta}_\alpha dx^\alpha \quad (2.4.2)$$

Bundan tashqari (1.3.4) tenglamadan

$$\bar{d}r_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \bar{\Theta}_\alpha dx^\alpha \quad (\alpha\text{-erkin indeks}) \quad (2.4.3)$$

va $\bar{d}r$ ning (2.4.2) ko'rinishidan quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$$d\bar{r} = d\bar{r}_1 + d\bar{r}_2 + d\bar{r}_3$$

Demak,

$$\bar{\Theta}_\alpha(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \bar{k}_\beta \quad (2.4.4)$$

vektor x_α koordinata chizig'iga urinma bo'ylab musbat tomonga yo'nalgan va $d\bar{r}_\alpha$ ga kollinear bo'lgan vektordir.

Bundan tashqari, $\bar{\Theta}_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ lar nokomplanar vektorlar. Ular uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

$$\begin{aligned} (\bar{\Theta}_1 \bar{\Theta}_2 \bar{\Theta}_3) &= \bar{\Theta}_1 (\bar{\Theta}_2 \times \bar{\Theta}_3) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^3} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = J^{-1} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Ular (2.3.1) va (2.3.2) munosabatlarning o'zaro bir qiymatli akslanishni ifodalashidan kelib chiqadi.

Ta'rif: Fazoning har bir nuqtasida (2.4.4) formula bilan aniqlangan uchta $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$ vektorlar kovariant bazis vektorlar deb ataladi. Ular egri chiziqli koordinatalar sistemasining koordinata bazislari sifatida qabul qilinadi.

Elementar ko'chish vektori modulining kvadratini (2.4.2) yoyilma yordamida

$$ds^2 = (d\bar{r} \cdot d\bar{r}) = (dx^\alpha \bar{\mathcal{D}}_\alpha) \cdot (dx^\beta \bar{\mathcal{D}}_\beta) = (\bar{\mathcal{D}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{D}}_\beta) dx^\alpha dx^\beta \quad (2.4.6)$$

yoki

$$g_{\alpha\beta} = \bar{\mathcal{D}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{D}}_\beta \quad (2.4.7)$$

belgilash yordamida

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.4.8)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Ta'rif: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ifoda asosiy kvadratik forma deb ataladi.

Asosiy kvadratik formaning koeffitsientlari (2.4.7) formula bilan aniqlanganligi sababli $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Ya'ni ushbu koeffitsientlarning matritsasi $\|g_{\alpha\beta}\|$ simmetrik bo'ladi. Bundan tashqari (2.4.5) ga ko'ra $g_{\alpha\beta}$ koeffitsientlarning determinanti uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi;

$$g = |g_{\alpha\beta}| = (\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 \bar{\mathcal{D}}_3)^2 = J^{-2} \neq 0 \quad (2.4.9)$$

bundan $\|g_{\alpha\beta}\|$ ning xosmas matrisa ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif: Kovariant bazis vektorlarning moduli

$$\mathcal{D}_\alpha = |\bar{\mathcal{D}}_\alpha| = \sqrt{\bar{\mathcal{D}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{D}}_\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \quad (2.4.10)$$

Lame koeffitsientlari deb ataladi.

Lame koeffitsientlari yordamida normalangan kovariant bazis vektorlarlarni kiritish mumkin:

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\bar{\mathcal{D}}_\alpha}{|\bar{\mathcal{D}}_\alpha|} = \frac{\bar{\mathcal{D}}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \quad (2.4.11)$$

bu yerdagi $\bar{e}_\alpha$ -normalangan kovariant bazis vektorlar.

5 . Kontravariant koordinata bazislari

Endi kontravariant koordinata bazislari tushunchalarini kiritamiz. Buning uchun fazoda koordinata bazisi sifatida ushbu sirtlarning normallari bo'ylab yo'nalgan vektorlarni tanlaymiz. Mazkur sirtlar

$$x^\alpha = \text{const} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

tenglamalar bilan aniqlanadi va shu tufayli

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} dy^\beta = (\text{grad } x^\alpha, d\bar{r}) \equiv (\nabla x^\alpha, d\bar{r}) = 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu yerda quyidagi ko'rinishda belgilangan

$$\nabla x^\alpha \equiv \text{grad } x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \bar{k}_\beta \quad (\alpha = \overline{1, 3})$$

va koordinata sirtlariga normal bo'ylab yo'nalgan miqdorlar nokomplanar vektorlar uchligini tashkil etadi:

$$\nabla x^1 \cdot (\nabla x^2 \times \nabla x^3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} = J \neq 0. \quad (2.5.1)$$

Demak, ushbu vektorlar uchligini ham koordinata bazisi sifatida qabul qilish mumkin.

Ta’rif: Quyidagi ko’rinishda belgilangan koordinata bazisi kontravariant koordinata bazisi deb ataladi.

$$\bar{\vartheta}^\alpha(x^1, x^2, x^3) = \text{grad } x^\alpha \equiv \nabla x^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \bar{k}_\beta \quad (2.5.2)$$

Elementar ko’chish vektorining kontravariant bazisi orqali yoyilmasi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\bar{dr} = dx_\beta \bar{\vartheta}^\beta$$

bu yerdagi dx_β koeffitsientlar $\bar{dr}$ vektorining kovariant tashkil etuvchilari (komponentalari) deb ataladi.

Ushbu dx_β miqdorlar x_β koordinatalarning differensial bo’lmaydi.

Agar

$$g^{\alpha\beta} = \bar{\vartheta}^\alpha \cdot \bar{\vartheta}^\beta = g^{\alpha\beta} \quad (2.5.3)$$

deb belgilansa, u holda asosiy kvadratik forma quyidagi ko’rinishda yoziladi.

$$ds^2 = (\bar{dr} \cdot \bar{dr}) = (\bar{\vartheta}^\alpha dx_\alpha) \cdot (\bar{\vartheta}^\beta dx_\beta) = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \quad (2.5.4)$$

Yuqoridagi forma koeffitsientlarining matritsasi $\|g^{\alpha\beta}\|$ simmetrik va xosmas bo’ladi. Bu xossalari (1.5.3) dan va osonlik bilan tekshirish mumkin bo’lgan quyidagi munosabatdan kelib chiqadi.

$$(\bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3)^2 = g_1 = J^2 \neq 0 \quad (2.5.5)$$

Kontravariant bazis vektorining moduli quyidagiga teng

$$\vartheta^\alpha = |\bar{\vartheta}^\alpha| = \sqrt{\bar{\vartheta}^\alpha \cdot \bar{\vartheta}^\alpha} = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}.$$

Ushbu

$$\bar{e}^\alpha = \frac{\bar{\vartheta}^\alpha}{|\bar{\vartheta}^\alpha|} = \frac{\bar{\vartheta}^\alpha}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}$$

normalangan, yani moduli birga teng bo’lgan bazis vektor kiritiladi.

Kovariant va kontravariant bazis vektorlarning (2.4.4) va (2.5.2) formulalar bilan aniqlanganligi e’tiborga olinsa, ularning skalyar ko’paytmasi uchun quyidagi o’zarolik munosabatlari o’rinli ekanligini ko’rishimiz mumkin.

$$\bar{\vartheta}_\alpha \cdot \bar{\vartheta}^\beta = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta_{\alpha \cdot}^\beta; \quad \bar{\vartheta}^\alpha \cdot \bar{\vartheta}_\beta = \delta_{\beta \cdot}^\alpha \quad (2.5.7)$$

Misol uchun, $\alpha = 1$ va $\beta = 1, 2, 3$ qiymatlariga teng bo’lsa

$$\bar{\vartheta}^1 \cdot \bar{\vartheta}_1 = \vartheta^1 \cdot \vartheta_1 \cos(\bar{\vartheta}^1, \bar{\vartheta}_1) = 1, \quad \bar{\vartheta}^1 \cdot \bar{\vartheta}_2 = 0, \quad \bar{\vartheta}^1 \cdot \bar{\vartheta}_3 = 0$$

tengliklar hosil bo’ladi.

Demak, $\bar{\mathcal{E}}^1$ vektori $\bar{\mathcal{E}}_2$ va $\bar{\mathcal{E}}_3$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi, $\bar{\mathcal{E}}^1$ va $\bar{\mathcal{E}}_1$ vektorlar orasidagi burchak nolga teng emas.

O'zarolik munosabati bo'lmish (2.5.7) formulada, formal bajarilgan amalning to'g'ri ekanligini koordinata bazislarini aniqlovchi (2.4.4) va (2.5.2) formulalardan foydalanib tekshirish mumkin:

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{E}}^\beta = \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial r} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \bar{k}_i \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \bar{k}_j = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\beta$$

Ko'pincha kontravariant koordinata bazisi o'zarolik munosabatlari yordamida kiritiladi.

Agar (2.4.5) formulada

$$\bar{\mathcal{E}}_2 \times \bar{\mathcal{E}}_3 = \bar{\mathcal{E}}^1 J^{-1}, \quad (\bar{\mathcal{E}}_3 \times \bar{\mathcal{E}}_1) = \bar{\mathcal{E}}^2 J^{-1}, \quad (\bar{\mathcal{E}}_1 \times \bar{\mathcal{E}}_2) = \bar{\mathcal{E}}^3 J^{-1}$$

ko'rinishdagi belgilashlarni kiritsak, $\bar{\mathcal{E}}^\beta$ ($\beta = 1, 2, 3$) vektorlar quyidagi shartni qanoatlantiradi;

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{E}}^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

Demak $\bar{\mathcal{E}}^\beta$ ($\beta = 1, 2, 3$) vektorlar kovariant koordinata bazisiga qo'shma bo'lgan nokomplanar vektorlar uchligini tashkil etadi. Va ularni koordinata bazisi sifatida qabul qilish mumkin.

3-mavzu: Indekslni ko'tarish va tushurush amallari. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar.

Reja:

1. Indekslni ko'tarish va tushurish amallari.

2. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar

1. Indekslni ko'tarish va tushurish amallari.

Yuqorida berilgan (2.5.7) ifodani mos ravishda $g^{\alpha\gamma}$ va $g_{\alpha\gamma}$ ga ko'paytirib, α indeksi bo'yicha yig'indi amalini bajarsak, quyidagi tengliklar hosil bo'ladi:

$$g^{\alpha\gamma} (\bar{\mathcal{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{E}}^\beta) = g^{\alpha\gamma} \delta_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} = \bar{\mathcal{E}}^\beta \cdot \bar{\mathcal{E}}^\gamma$$

$$\Rightarrow (g^{\alpha\gamma} \bar{\mathcal{E}}_\alpha - \bar{\mathcal{E}}^\gamma) \cdot \bar{\mathcal{E}}_\beta = 0$$

$$g_{\alpha\gamma} (\bar{\mathcal{E}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{E}}_\beta) = g_{\alpha\gamma} \delta_\beta^\alpha = g_{\beta\gamma} = \bar{\mathcal{E}}_\beta \cdot \bar{\mathcal{E}}_\gamma$$

$$\Rightarrow (g_{\alpha\gamma} \bar{\mathcal{E}}^\alpha - \bar{\mathcal{E}}_\gamma) \cdot \bar{\mathcal{E}}_\beta = 0$$

bu yerda $\bar{\mathcal{E}}_\beta$ va $\bar{\mathcal{E}}^\beta$ nokomplanar vektorlar bo'lganligidan

$$\bar{\mathcal{E}}^\gamma = g^{\gamma\alpha} \bar{\mathcal{E}}_\alpha; \quad \bar{\mathcal{E}}_\gamma = g_{\gamma\alpha} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \quad (3.1.1)$$

munosabatlar-kontravariant (kovariant) bazis vektorlarning kovariant (kontravariant) bazis vektorlar orqali yoyilmasi kelib chiqadi.

O'zarolik munosabatlarini e'tiborga olib, indekslni ko'tarish va tushirish qoidasini beruvchi (4.22) tengliklarning ikkala tomonini mos ravishda $\bar{\mathcal{E}}_\beta$ va $\bar{\mathcal{E}}^\beta$ vektoriga ko'paytiramiz:

$$\bar{\mathcal{E}}^\beta \cdot \bar{\mathcal{E}}_\gamma = g_{\alpha\gamma} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{E}}^\beta = g_{\alpha\gamma} g^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta$$

$$\bar{\mathcal{E}}_\beta \cdot \bar{\mathcal{E}}^\gamma = \bar{\mathcal{E}}_\beta g^{\gamma\alpha} \cdot \bar{\mathcal{E}}_\alpha = g_{\beta\alpha} g^{\gamma\alpha} = \delta_\beta^\gamma$$

bu yerda matris'alarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib, quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz. Ya'ni bular o'zaro teskari matritsa va determinantlardir.

(3.1.2)

$$d\bar{r} = dx^\alpha \bar{\Theta}_\alpha = dx_\beta \bar{\Theta}^\beta$$
$$\left(g_{\alpha\beta}dx^\alpha - dx_\beta\right)\overline{\mathfrak{I}}^\beta = 0$$

$\bar{\Xi}^\beta$ ni $\bar{\Xi}_\alpha$ orqali ifodalasak esa ushbu

tenglik hosil bo'ladi. Yuqoridagilardan, $\bar{\mathfrak{E}}^\beta$ va $\bar{\mathfrak{E}}_\alpha$ lar erkli vektorlar bo'lgani uchun ushbu

(1.6.3)

Yuqorida elementar ko'chish vektorining kovariant komponentalarini, umuman olganda, $x_\beta(x^1, x^2, x^3)$

$$dx_\beta = \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \quad \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\beta}{\partial x^\alpha}$$
$$\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}$$
$$g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{12} = g_{13} = g_{25} = 0.$$

Ushbu

$$\bar{\vartheta}_\alpha = \bar{\vartheta}^\alpha = \bar{k}_\alpha; \quad g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta; \quad g_{\alpha\alpha} = 1$$

2. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar

17

1) Qo'shish amali ikkita ixtiyoriy oddiy ob'yekt uchun aniqlangan. Ikkita oddiy ob'yektning yig'indisi, mazkur vektorlar yordamida yasalgan parallelogramm diagonaliga teng. Bu amal kommutativlik va distributivlik xossasiga ega:

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha + \bar{\mathcal{O}}_\beta = \bar{\mathcal{O}}_\beta + \bar{\mathcal{O}}_\alpha; \quad \rho(\bar{\mathcal{O}}_\alpha + \bar{\mathcal{O}}_\beta) = \rho\bar{\mathcal{O}}_\alpha + \rho\bar{\mathcal{O}}_\beta$$

2) Skalyarga ko'paytirish amali har qanday skalyar va ixtiyoriy ob'yektga nisbatan aniqlangan. Biror ρ skalyar va $\bar{\mathcal{O}}_\alpha$ oddiy ob'yekt uchun $\rho\bar{\mathcal{O}}_\alpha$ ko'paytmaning moduli $|\rho||\bar{\mathcal{O}}_\alpha|$ bo'lgan va $\bar{\mathcal{O}}_\alpha$ bo'ylab yo'nalgan ob'yektni bildiradi.

3) Skalyar ko'paytirish amali ixtiyoriy ikkita oddiy ob'yekt uchun quyidagicha aniqlangan:

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}^\beta = g^{\alpha\beta}$$

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}^\beta = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}_\beta = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

Bu amal quyidagi xossalarga ega:

$$a) \bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}_\beta = \bar{\mathcal{O}}_\beta \cdot \bar{\mathcal{O}}_\alpha, \quad \bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}^\beta = \bar{\mathcal{O}}^\beta \cdot \bar{\mathcal{O}}_\alpha$$

$$b) \rho(\bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}_\beta) = (\rho\bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \bar{\mathcal{O}}_\beta) = (\bar{\mathcal{O}}_\alpha \cdot \rho\bar{\mathcal{O}}_\beta)$$

4) Vektor ko'paytirish amali ikkita ixtiyoriy oddiy ob'yekt uchun aniqlangan bo'lib, ushbu amal natijasida yana vektor hosil bo'ladi. Bu vektorning yoyilmasini koordinata bazislarining birortasi orqali yozish mumkin:

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \bar{\mathcal{O}}_\beta = e_{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathcal{O}}^\gamma, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \times \bar{\mathcal{O}}^\beta = e^{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathcal{O}}_\gamma \quad (3.2.1)$$

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \bar{\mathcal{O}}^\beta = e_{\alpha}^{\beta\gamma} \bar{\mathcal{O}}_\gamma = e_{\alpha}^{\beta\gamma} \bar{\mathcal{O}}_\gamma$$

bu amal uchun ushbu xossa o'rinli,

$$\rho(\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \bar{\mathcal{O}}_\beta) = (\rho\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \bar{\mathcal{O}}_\beta) = (\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \rho\bar{\mathcal{O}}_\beta)$$

ammo kommutativlik xossasi o'rinli emas:

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \times \bar{\mathcal{O}}_\beta \neq \bar{\mathcal{O}}_\beta \times \bar{\mathcal{O}}_\alpha.$$

5) Noaniq (indefenit) ko'paytirish amali chekli sondagi oddiy ob'yektlar uchun aniqlangan bo'lib, ko'paytirish natijasida yangi murakkab, poliada deb ataluvchi, ob'yekt hosil bo'ladi:

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \bar{\mathcal{O}}^\beta, \quad \bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}^\beta, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta,$$

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}_\gamma, \quad \bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}^\gamma, \quad \bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}^\beta \bar{\mathcal{O}}_\gamma, \quad \bar{\mathcal{O}}^\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}^\gamma$$

va hokazo.

Bu amal uchun ham ushbu

$$\rho(\bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}_\gamma) = ((\rho\bar{\mathcal{O}}_\alpha) \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}_\gamma) = (\bar{\mathcal{O}}_\alpha (\rho\bar{\mathcal{O}}_\beta) \bar{\mathcal{O}}_\gamma) = (\bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta (\rho\bar{\mathcal{O}}_\gamma))$$

xossa o'rinli. Ammo kommutativlik xossasi

$$\bar{\mathcal{O}}_\alpha \bar{\mathcal{O}}_\beta \neq \bar{\mathcal{O}}_\beta \bar{\mathcal{O}}_\alpha$$

o'rinli emas.

Ta'rif: Ikkita oddiy ob'yektni ko'paytirish natijasida hosil qilingan poliada diada deb ataladi. Uchta obektni ko'paytirish natijasi esa triada deb ataladi.

Ta'rif: Poliada indekslarining soniga teng bo'lgan ob'yektlarining soni poliadaning rangi deb ataladi.

Diada 2-rang, triada 3-rang poliada bo'ladi. n-rang poliadalar odatda nomerli indekslar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{\mathcal{O}}^{\alpha_1} \bar{\mathcal{O}}^{\alpha_2} \dots \bar{\mathcal{O}}^{\alpha_n}, \quad \bar{\mathcal{O}}_{\alpha_1} \bar{\mathcal{O}}_{\alpha_2} \dots \bar{\mathcal{O}}_{\alpha_n} \quad \text{va hokazo.}$$

4-mavzu: Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Slindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish.

Reja:

- 1.Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi;
- 2.Slindrik koordinatalar sistemasi;
3. Sferik koordinatalar sistemasi;
- 4.Koordinatalarni almashtirish.

1. Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi.

Ta'rif: Fazoning har bir nuqtasida koordinata chiziqlari o'zaro ortogonal bo'lgan egri chiziqli koordinatalar sistemasi ortogonal koordinatalar sistemasi deb ataladi. Koordinatalar sistemasining ortogonallik sharti

$$\bar{\Theta}_\alpha \cdot \bar{\Theta}_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (4.1.1)$$

ko'rinishida yoziladi. Shuning uchun ortogonal sistemada

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix}, \quad |g_{\alpha\beta}| = g_{11} g_{22} g_{33} \quad (4.1.2)$$

va (3.2.2) ga asosan

$$\|g^{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} g_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}^{-1} \end{vmatrix}, \quad |g^{\alpha\beta}| = \frac{1}{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad (4.1.3)$$

formular o'rinli bo'ladi.

Ortogonallik shartini almashtirish formulalari yordamida ham yozish mumkin.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi $y^\alpha = x^\alpha$ berilgan bo'lsin, ya'ni

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad |g_{\alpha\beta}| = |g^{\alpha\beta}| = 1 \quad (4.1.4)$$

formular o'rinli bo'lsin. «Yangi» $\hat{C}$ sistema $\hat{x}^\alpha$ koordinatalar bilan aniqlansin. U holda (4.1.4) formula e'tiborga olinsa,

$$\hat{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j}, \quad g_{\alpha\beta} = \hat{g}_{ij} \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^\beta}$$

$$\hat{g}^{ij} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = \hat{g}^{ij} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j}$$

almashtirish qoidalari

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^\beta} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\beta}$$

ko'rinishga keladi.

Demak, koordinatalar sistemasini almashtirish matrisasi

$$\left\| \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} \right\|$$

ning ixtiyoriy ikki ustuni elementlari ko'paytmasining yig'indisi nolga teng bo'lsa, bu koordinata sistemasi ortogonal sistema bo'ladi.

Agar koordinatalar sistemasi bazislari normallangan bo'lsa, u holda ortogonallik shartini

$$\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow \cos(x^i, \hat{x}^\alpha) \cos(x^j, \hat{x}^\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.1.5)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda

$$\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} = \cos(x^i, \hat{x}^\alpha),$$

chunki, normallangan bazisli sistemalarda

$$\cos(x^i, \hat{x}^\alpha) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_\alpha = \bar{K}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \hat{x}^\alpha} = \bar{K}_i \cdot \bar{K}_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^\alpha} \quad (4.1.6)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasiga misol tariqasida mexanikada ko'p qo'llaniladigan silindrik va sferik koordinatalar sistemalarini ko'ramiz. Bizga y^α - to'g'ri burchakli dekart va ξ^i - egri chiziqli koordinatalar sistemalari berilgan bo'lsin. Ushbu sistemalarning bazis vektorlari (1.4.4) formulalar

$$\bar{\mathcal{E}}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y^\alpha} = \bar{K}_\alpha, \quad \hat{\mathcal{E}}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^i} = \bar{K}_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^i}, \quad \hat{\mathcal{E}}^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial y^\alpha} \bar{K}_\alpha \quad (4.1.7)$$

bilan va ularning metrikasi (1.4.7) esa

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\mathcal{E}}_i \cdot \hat{\mathcal{E}}_j = \bar{K}_\alpha \cdot \bar{K}_\beta \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial \xi^j} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial \xi^j} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^j} \quad (4.1.8)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Bu yerda ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasining ortogonallik sharti

$$\hat{g}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \xi^j} = 0, \quad i \neq j \quad (4.1.9)$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar dekart koordinatalarini x, y, z orqali, yani $y^1 = x, y^2 = y, y^3 = z$ deb belgilasak, ortogonal sistemaning metrikasi (4.1.8) va (4.1.9) larga ko'ra

$$\hat{g}_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} + \frac{\partial y}{\partial \xi^i} \frac{\partial y}{\partial \xi^j} + \frac{\partial z}{\partial \xi^i} \frac{\partial z}{\partial \xi^j} = 0, \quad i \neq j \quad (4.1.10)$$

$$\hat{g}_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi^i} \right)^2, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1.11)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

2. Silindrik koordinatalar sistemasi

Agar sistema koordinatalarini ρ, θ, z orqali, ya'ni $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \theta, \xi^3 = z$ deb belgilasak, ushbu silindrik va y^α sistemalari orasidagi bog'lanish

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

$$\xi^1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \xi^2 = \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad \xi^3 = z = z \quad (4.2.1)$$

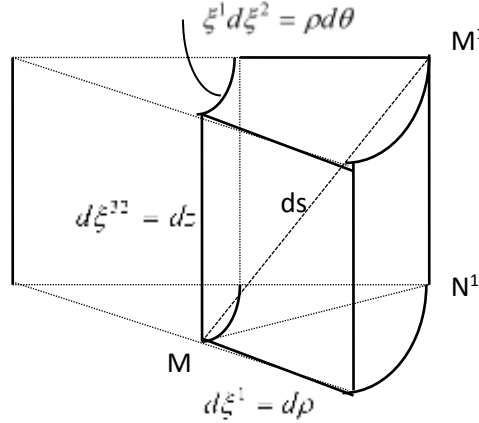
formulalar bilan beriladi. Ushbu bog'lanishlar va (1.8.10), (1.8.11) formulalardan foydalanib, osonlik bilan silindrik koordinatalar sistemasining metrikasini topamiz:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0 \quad (4.2.2)$$

Sistemaning bazislari esa (4.1.7) formulalardan aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \bar{k}_1 \cos \theta + \bar{k}_2 \sin \theta, \quad \hat{\theta}_2 = -\bar{k}_1 \rho \sin \theta + \bar{k}_2 \rho \cos \theta, \quad \hat{\theta}_3 = \bar{k}_3 \\ \hat{\theta}^1 &= \frac{x}{\rho} \bar{k}_1 + \frac{y}{\rho} \bar{k}_2, \quad \hat{\theta}^2 = -\frac{y}{\rho^2} \bar{k}_1 + \frac{x}{\rho^2} \bar{k}_2, \quad \hat{\theta}^3 = \bar{k}_3\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

Sistemaning metrikasini quyidagi 1-rasm va asosiy kvadratik formadan topishimiz mumkin.



1-rasm

Bu rasmdan quyidagi tenglikning o'rinaliligi kelib chiqadi;

$$|\overline{MM'}|^2 = |\overline{MN'}|^2 + |\overline{M'N'}|^2, \quad |\overline{MN'}|^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2, \quad |\overline{M'N'}| = dz$$

demak, $ds = |\overline{MM'}|$ kesma uzunligining kvadrati

$$ds^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan asosiy kvadratik forma

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (4.2.4)$$

formula bilan aniqlanadi. Ushbu munosabatlardan sistemaning metrikasi haqiqatan ham (1.9.2) formulalar bilan aniqlanishini ko'ramiz.

3. Sferik koordinatalar sistemasi

Biz sferik koordinatalar sistemasini analitik geometriya fanida ko'rib o'tganmiz. To'g'ri burchakli dekart va sferik koordinatalar sistemalari orasidagi bog'lanish ushbu formulalar bilan berilgan bo'lsin,

$$x = r \cos \lambda \sin \theta, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \lambda = \arctg \frac{y}{x}$$

bu yerda $\xi^1 = r$, $\xi^2 = \theta$, $\xi^3 = \lambda$ ekanligi nazarda tutilsa, (4.1.7), (4.1.10) va (4.1.11) formulalar sistema bazislarini va metrikasini aniqlash imkonini beradi. . Haqiqatan $ds = |\overline{MM'}|$ kesmaning kvadrati uchun o'rinli bo'lgan

$$ds^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\lambda)^2$$

munosabatdan va (4.2.4) dan $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = (r \sin \theta)^2$ formulalar kelib chiqadi

4. Koordinatalarni almashtirish

Ikkiti-«eski» ξ^1, ξ^2, ξ^3 va «yangi» η^1, η^2, η^3 koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin va ular orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'natigan bo'lsin, yani «eski» C sistemadan «yangi» $\hat{C}$ sistemaga o'tish qoidasini beruvchi

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.4.1)$$

funksiyalar uzluksiz differensiallanuvchi va almashtirish yakobiani

$$J = \left| \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^\beta} \right| \neq 0 \quad (4.4.2)$$

bo'lsin. Demak qaralayotgan sohaning har bir nuqtasi atrofida (4.4.1) formulalarni ξ^1, ξ^2, ξ^3 larga nisbatan yechib, $\hat{C}$ sistemadan C sistemaga o'tish qoidalarini beruvchi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \quad (4.4.3)$$

formulalarni yozish mumkin.

Koordinata bazisi elementlarini almashtirish uchun quyidagicha ish ko'riladi.

$\bar{\mathcal{O}}_\alpha$ va $\bar{\mathcal{O}}^\beta$ lar C sistemaning, $\hat{\mathcal{O}}_i$ va $\hat{\mathcal{O}}^i$ lar esa $\hat{C}$ sistemaning koordinata bazislari bo'lsin. Bazis vektorlarning tarifiga ko'ra;

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}_i &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}, \quad \hat{\mathcal{O}}^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{r}} \\ \bar{\mathcal{O}}_\alpha &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha}, \quad \bar{\mathcal{O}}^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^j}{\partial \bar{r}} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

formulalar yoki

$$\hat{\mathcal{O}}_i = \bar{\mathcal{O}}_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}, \quad \bar{\mathcal{O}}_\alpha = \hat{\mathcal{O}}_i \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha} \quad (4.4.5)$$

$$\hat{\mathcal{O}}^i = \bar{\mathcal{O}}^\beta \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\beta}, \quad \bar{\mathcal{O}}^\beta = \hat{\mathcal{O}}^i \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^i} \quad (4.4.6)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Ta'rif: Kovariant bazis vektorlarini almashtirish qoidasini beruvchi (4.4.5) formulalar kovariant almashtirish qonuni deb ataladi.

Ta'rif: Kontravariant bazis vektorlarni almashtirish qoidasini beruvchi (4.4.6) formulalar kontravariant almashtirish qonuni deb ataladi.

Elementar ko'chish vektori komponentalarini almashtirish qoidasi esa quyidagicha bo'ladi.

Invariant miqdor bo'lgan elementar ko'chish vektori C va $\hat{C}$ sistemalarning bazislari orqali quyidagi ko'rinishlarda ifodalanadi:

$$\bar{dr} = d\xi_\beta \bar{\mathcal{O}}^\beta = d\eta_j \cdot \hat{\mathcal{O}}^j, \quad \bar{dr} = d\xi^\alpha \bar{\mathcal{O}}_\alpha = d\eta^i \cdot \hat{\mathcal{O}}_i$$

bu yerdagi ifodalarni (4.4.5) va (4.4.6) qoidalar yordamida bir xil sistemadagi bazis vektorlar orqali yozilsa, u holda quyidagi tengliklar kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} \left(d\xi_\beta - d\eta_j \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^\beta} \right) \bar{\Theta}^\beta &= 0, \quad \left(d\xi_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} - d\eta_j \right) \hat{\Theta}^j = 0 \\ \left(d\xi^\alpha - d\eta^i \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \right) \bar{\Theta}_\alpha &= 0, \quad \left(d\xi^\alpha \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha} - d\eta^i \right) \hat{\Theta}_i = 0 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Bazis vektorlar erkli bo'lganligi sababli, (4.4.9) dan mazkur $d\bar{r}$ vektori komponentalarini almashtirish qoidalari deb ataluvchi quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$d\xi_\beta = d\eta_i \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\beta}, \quad d\eta_j = d\xi_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \quad (4.4.10)$$

$$d\xi^\alpha = d\eta^i \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i}, \quad d\eta^i = d\xi^\alpha \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^\alpha} \quad (4.4.11)$$

5-mavzu: SKALYAR VA VEKTOR MAYDONLAR. ULARNING XARAKTERISTIKALARI

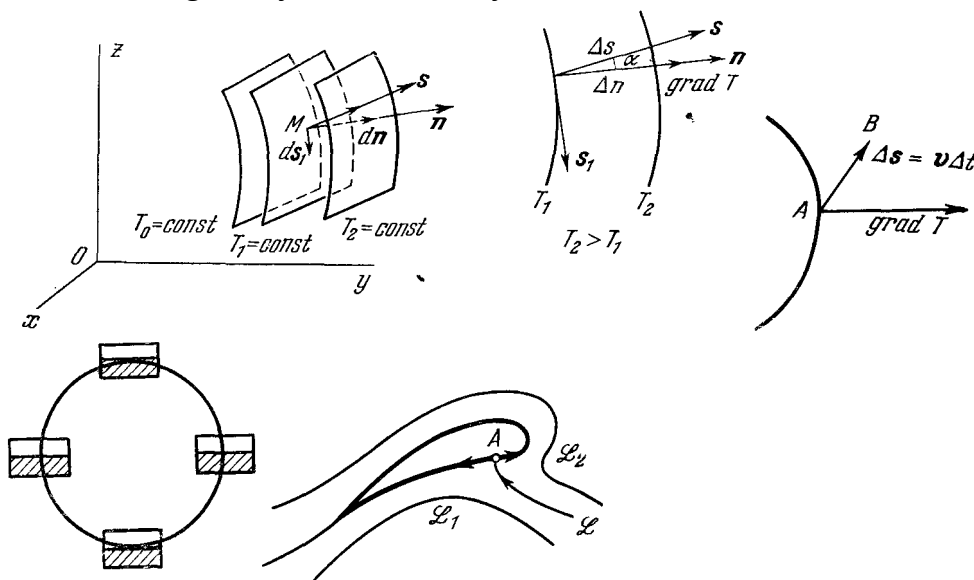
Reja:

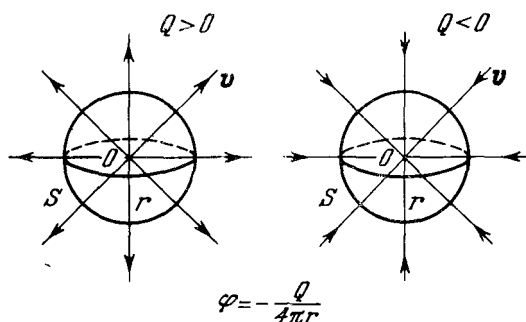
1. Skalyar va vektor maydonning ta'riflari;
2. Yo'nalish bo'yicha hosila va vektor gradiyent;
3. Oqim chiziqlari va traektoriya
4. Vaqt bo'yicha individual va mahalliy hosila. Konvektiv hosila;
5. Statsionar va nostatsionar harakati;
6. Vektor chiziqlari va oqim chiziqlari;
7. Potensialli maydonlar va potensialli oqim;
8. Manbaa va stok.

Tayanchiboralar: skalyar, vektor, hosila, gradiyent, oqimchizig'i, oqimnaychasi.

1. Skalyar va vektor maydonning ta'riflari

Har bir nuqtasida to'la aniqlangan biror miqdorlar maydoni *fazo* deb ataladi. Agar bu miqdor skalyar bo'lsa, ya'ni u bitta son bilan xarakterlansa, u holda bu maydon *skalyar maydon* (masalan, zichliklar maydoni, temperaturalar maydoni va hokazo) deb ataladi. Fazoning har bir nuqtasida miqdori va yo'nalishi bilan xarakterlanadigan maydon *vektorli maydon* deb ataladi.





Tutash muhit zarrachasi tezlik va tezlanishining biror koordinata o'qidagi, masalan, Ox o'qidagi mos u_x va a_x proyeksiyasini topish uchun uning x, y, z koordinatalar funksiyasi, va o'z navbatida, umumiy holda t vaqtga ham bog'liq bo'lishini hisobga olishimiz zarur.

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Tutash muhit butun massasining harakati ma'lum bo'ladi, agar quyidagi sistema ma'lum bo'lsa:

$$x = \varphi_1(a, b, c, t), \quad y = \varphi_2(a, b, c, t), \quad z = \varphi_3(a, b, c, t), \quad (5.1')$$

bunda a, b, c - zarrachalarning $t=0$ boshlang'ich vaqt momentidagi koordinatalari va ular zarrachalarni belgilash uchun xizmat qiladi. Bu tenglamalardan t vaqtni yo'qotib zarrachaning *traektoriyasi tenglamasini* hosil qilamiz. Bunda a, b, c va t miqdorlar *Lagranj o'zgaruvchilari* deyiladi. Lagranj usuliga ko'ra suyuqlik yakka zarrachasining traektoriyasi bo'ylab harakati tekshiriladi. Ma'lumki, zarrachalar cheksiz ko'p, bunday holda traektoriyani berish uchun faqat traektoriyasi qarashli bo'lgan zarrachani tekshirish lozim. Buning uchun esa zarrachaning xarakteristikasi sifatida a, b, c koordinatalar $t = t_0$ boshlang'ich vaqt momentida tanlab olinadi. Shunday qilib, suyuqlik zarrachasining x, y, z koordinatalari a, b, c miqdorlar va t vaqtda bog'liq bo'ladi.

Berilgan funksiyalar uchun zarrachalar $\vec{v}$ tezlik vektori va $\vec{a}$ tezlanish vektorining koordinat o'qlaridagi proeksiyalari quyidagilarga teng:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t},$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (5.2')$$

Radius-vektorga nisbatan esa

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}.$$

Harakatning har ikkala koordinat usullari uchun to'la tezlik, to'la tezlanish va yo'naltiruvchi kosinuslar mos ravishda quyidagicha hisoblanadi:

$$u = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{u_x}{u}, \quad \cos \beta = \frac{u_y}{u}, \quad \cos \gamma = \frac{u_z}{u}.$$

(x, y, z) koordinatalardan va t vaqtga bog'liq funksiya uchun zarracha traektoriyasi bo'ylab vaqt bo'yicha differensiallash operatorini (hosilani) kiritamiz:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}). \quad (5.3)$$

Bu erda $(\cdot)$ belgi qavs ichidagi miqdorlarning skalyar ko'payt-masini anglatadi. Bu kiritilgan (5.3) operator to'la yoki *individual* (ba'zida *substansional*) *hosila* deb ataladi. $\frac{dA(\vec{r},t)}{dt}$ to'la hosila zarrachadagi A

miqdorning vaqt o'zgarishi bo'yi-cha tezligidir. Shunga ko'ra, to'la yoki substansional hosila lokal ((5.3) ning o'ng tarafidagi birinchi qo'shiluvchi) va kon-vektiv (undagi ikkinchi qo'shiluvchi) hosilalar yig'indisiga teng ekan.

Yuqoridagi (5.3) to'la differensial formulasiga ko'ra suyuqlik zarrachasining $\vec{a}$ tezlanish vektorining to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi o'qlaridagi proeksiyalari quyidagilarga teng:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}$$

yoki

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } v_x), \\a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } v_y), \\a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } v_z).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Bu ifodalardan ko'rinadiki, suyuqlik zarrachasining $\vec{a}$ tezlanishi ikkita tezlanishlar yig'indisiga teng ekan:

$$\vec{a} = \vec{a}_{lok} + \vec{a}_{konv},$$

bu erda

$$\vec{a}_{lok} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \vec{k}$$

-tezliklar maydonining vaqt bo'yicha o'zgarishiga asoslangan lokal tezlanish. Lokal tezlanish nostatsionar jarayonni bildiradi. Bundan kelib chiqadiki, agar harakat statsionar (barqaror) bo'lsa, u holda lokal tezlanish bo'lmaydi, ya'ni

$$\vec{a}_{lok} = 0 \text{ (yoki } \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0);$$

$$\vec{a}_{konv} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{k}$$

- tezliklar maydonining bir jinslimasligiga asoslangan konvektiv tezlanish. Bu tezlanish tezliklar maydonining tekis emasligidan, ya'ni tezliklarning tekis taqsimlanmaganligidan kelib chiqadi.

Eyler o'zgaruvchilaridan Lagranj o'zgaruvchilariga, va aksincha, o'tish uchun (5.1) va (5.1') tenglamalar sistemalarini yechamiz, mos ravishda o'rniga qo'yishlarni bajaramiz. Qolgan kinematik parametrlar yuqoridagi formulalardan topiladi.

3.2. Tutash muhitning statsionar va nostatsionar harakati

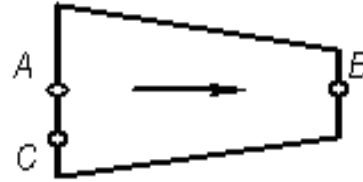
Tutash muhitning harakati *barqaror* (*statsionar*) *harakat* deb ataladi, agar berilgan nuqtada vaqt o'tishi bilan oqimning asosiy parametrlari (tezlik, bosim, zichlik) o'zgarmasa, ya'ni

$$\vec{v} = f_v(x, y, z); p = f_p(x, y, z); \rho = f_\rho(x, y, z).\tag{5.5}$$

Agar bu shart bajarilmasa va nuqtadagi parametrlar vaqt o'tishi bilan o'zgarib borsa, bunday harakat *nobarqaror* (*nostatsionar*) *harakat* deb ataladi, ya'ni

$$\vec{v} = f_u(x, y, z, t); p = f_p(x, y, z, t); \rho = f_\rho(x, y, z, t). \quad (5.6)$$

Bu tuchunchalarda gap nuqtadagi parametrlar to'g'risida borayotganligiga e'tibor beriskerak. Buni tushuntirish uchun 3.1-chizmada tasvirlangan kanalni qaraylik. Gidromexanikada oqim harakati bo'ylab kesim yuzasi kamayib boradigan kanallar *konfuzorlar* deb ataladi. Bunday kanal yo'li bo'ylab oqim oshib boradi va unda suyuqlik harakati barqaror bo'ladimi, degan savol tug'iladi. Tabiiyki, bunday bo'lishi uchun A va B nuqtalardagi parametrlar vaqt o'tishi bilan o'zgarish kerak. Harakat ko'rinishining ta'rifi A , B va C nuqtalardagi parametrlarning bir xil bo'lishini talab qilolmaydi.



5.1-chizma. Konfuzordagi oqimning sxematik tasviri.

5.3. Oqim chiziqlari va traektoriya

Oqim chizig'i deb kuzatilayotgan vaqt momentida ixtiyoriy nuqtasiga o'tkazilgan urinmasining yo'nalishi uning tezlik vektori yo'nalishi bilan mos tushadigan egri chiziqqa aytiladi.

Bu shartni vektor shaklida $\vec{v} \times d\vec{S} = 0$ kabi yozish mumkin, ya'ni vektor ko'paytma nolga teng bo'lishi lozim. Buni (5.1) formulaga asosan quyidagicha determinant shaklida yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

Bu determinantni ochib chiqib, oqim chizig'ining ushbu

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (5.8)$$

differentensial tenglamasiga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = ds,$$

bunda s - yordamchi o'zgaruvchi, yoki

$$\frac{dx}{ds} = v_x, \quad \frac{dy}{ds} = v_y, \quad \frac{dz}{ds} = v_z$$

tenglamalar sistemasini yechib, oqim chizig'ini topamiz. (x_0, y_0, z_0) nuqtadan o'tuvchi oqim chizig'ini topish uchun Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x|_{s=s_0} = x_0, \quad y|_{s=s_0} = y_0, \quad z|_{s=s_0} = z_0$$

boshlang'ich shartlarda yechish zarur bo'ladi.

Fazodagi harakatlanayotgan zarrachaning qoldirgan izi *trayektoriya* deb tushuniladi. Trayektoriyaning Eyler o'zgaruvchilaridagi differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt. \quad (5.9)$$

Bu yerdan ushbu

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

tenglamalar sistemasini yechib, trayektoriya tenglamasini topamiz. Tutash muhit zarrachasining trayektoriyasini topish uchun esa $t = t_0$ da Koshi masalasini oxirgi tenglamalar sistemasi bilan ushbu

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad z|_{t=t_0} = z_0$$

boshlang'ich shartlarda yechish zarur bo'ladi.

(5.8) va (5.9) tenglamalarni taggositlaganda, umumiy holda, ya'ni nobarqaror harakatda oqim chizig'i va trayektoriya mos tushmaydi. Tutash muhitning barqaror harakatida esa oqim chiziqlari vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'lib, suyuqlik zarrachasining traektoriyasi bilan ustma-ust tushadi.

Tutash muhitning harakati potensial yoki *uyurmasiz* deyiladi, agar vaqtning har bir momentida suyuqlikning to'la hajmida $\text{rot } \vec{u} = 0$ tenglik bajarilsa. Tutash muhitning statsionar harakatida $\text{rot } \vec{u} = 0$ tenglik uning oqim chiziqlari bo'ylab o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, agar oqim chiziqlarining biror nuqtasida uyurma sodir bo'lmasa, u holda bu uyurma butun shu chiziq bo'ylab sodir bo'lmaydi. Agar suyuqlikning harakati nostatsionar bo'lsa, u holda bu natija shunday farq bilan o'z kuchida qoladiki, bunda oqim chiziqlari haqida emas, balki vaqt o'tishi bilan suyuqlikning zarrachasi orqali aniqlangan traektoriya haqida gapirish lozim bo'ladi. Shuni eslatamizki, nostatsionar harakatda bu traektoriyalar, umuman olganda, oqim chiziqlari bilan mos tushmaydi.

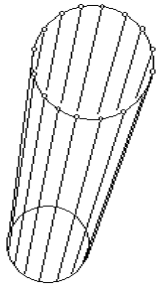
Agar harakatlanayotgan suyuqlikda tezliklar taqsimoti faqat ikkita, masalan, x va y koordinatalarga bog'liq va barcha nuqtalarda tezlik Oxy tekislikka parallel bo'lsa u holda bunday oqim *ikki o'lchovli* yoki *tekis oqim* deyiladi. Ikki o'lchovli oqimda suyuqlikning statsionar harakati uchun oqim chiziqlari uchbu

$$\frac{dx}{v_x(x,y,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,t)} = dt \quad \text{yoki} \quad v_y dx - v_x dy = 0 \quad (5.10)$$

differentensial tenglamadan topiladi. Bu tenglama *tekis holatdagi oqim chiziqlari tenglamasi* deb atalib, u har bir nuqtada oqim chizig'iga o'tkazilgan urinma yo'nalishidagi tezlik yo'nalishi bilan mos tushishini bildiradi.

3.4. Oqim naychasi (oqim sirti)

Harakatlanayotgan suyuqlikda cheksiz kichik yopiq kontur belgilaymiz va uning barcha nuqtalari orqali oqim chiziqlari o'tkazamiz (3.2-chizma). Hosil qilingan sirt *oqim naychasi (trubkasi)* yoki *oqim sirti* deb ataladi. Tanlangan kontur suyuqlik harakati bilan band bo'lgan fazoda belgilandi, demakki, harakatdagi suyuqlikning qaysidir bir qismi shu oqim sirtining ichida yotadi. Oqim naychasi bilan chegaralangan suyuqlik bo'lagi *sharracha* yoki *tizillab oqayotgan suyuqlik* deb ataladi.



5.2-chizma. Oqim naychasini tashkil

etuvchi oqim chiziqlari dastasining

sxematik tasviri.

Tutash muhitning barqaror harakatida oqim naychasi vaqt bo'yicha o'zgarmaydi va suyuqlik zarrachalari shunday harakat qiladiki, ularning har biri biror belgilangan sharracha ichida qoladi.

Agar oqim chiziqlari yetarlicha kichik tanlansa, u holda oqim naychasining ixtiyoriy ko'ndalang kesimida tezlikni bir jinsli deb hisoblash mumkin. Bunday holda, oqim naychasi bo'ylab $\rho Su = \text{const}$ tenglik o'rinli bo'lishini massaning saqlanish qonuni talab qiladi. Ammo tahlil uchun massaning saqlanish qonunini umumiyroq ifodalovchi tenglama – uzviylik differentensial tenglamasi talab qilinadi.

6-mavzu : Tenzor. Tenzorlar ustida amallar.

Reja:

1. Tenzor.

2. Tenzorlar ustida amallar.

Ta'rif: Koordinata sistemasini tanlanishiga bog'liq bo'lmagan va diadalarining ushbu

$$T = T^{\alpha\beta} \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}_\beta = T_{\alpha\beta} \bar{\partial}^\alpha \bar{\partial}^\beta = T^{\alpha\cdot} \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}^\beta = T_{\alpha\cdot} \bar{\partial}^\alpha \bar{\partial}_\beta \quad (6.1)$$

chiziqli ifodasi ko'rinishida beriladigan miqdor ikkinchi rang tenzor deb ataladi.

Ta'rif: Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar orqali tuzilgan ushbu ifoda $\underline{D} = \vec{a} \otimes \vec{b}$ diada deyiladi. $\vec{a}$ – diadaning chap vektori, $\vec{b}$ – diadaning o'ng vektori deyiladi. $\otimes$ – diadik ko'paytma belgisi, $a^i b^j$ – sonlar to'plami esa D ning komponentalari deyiladi.

Ta'rif: $\vec{E}_1$ va $\vec{E}_2$ lardan tuzigan $\underline{E}$ diada birlik diada deyiladi.

(6.1) ifodadagi diadalar oldidagi koeffitsientlar - tenzorning tashkil etuvchilari 4 xil bo'lib, $T^{\alpha\beta}$ - kontravariant, $T_{\alpha\beta}$ - kovariant, T_{β}^{α} va T_{α}^{β} lar esa aralash komponentalar deb ataladi.

Ikkinchi rang tenzor komponentalarining indeksi 1, 2, 3 qiymatlarni qabul qilgani tufayli, unga tegishli komponentalarning soni $3^2 = 9$ ta bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra, tenzor invariant miqdordir. Shu sababli uning tashkil etuvchilari va diadalar koordinata sistemasi almashtirilganda o'zaro teskari matritsalar yordamida almashtiriladi. Masalan, tenzorning ta'rifiga va (5.5)ga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$T^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} = \hat{T}^{ij} \hat{\mathcal{E}}_i \hat{\mathcal{E}}_j, \quad \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} = \hat{\mathcal{E}}_i \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^{\alpha}} \hat{\mathcal{E}}_j \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^{\beta}}$$

Munosabatlardan quyidagi almashtirish qoidasi kelib chiqadi.

$$\hat{T}^{ij} = T^{\alpha\beta} \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^{\beta}} \quad (6.2)$$

Ikkinchi tomondan, (5.5)ning birinchi formulasidan esa

$$\hat{\mathcal{E}}_i \hat{\mathcal{E}}_j = \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta}$$

almashtirish formulasi o'rinli ekanligini ko'ramiz. Ushbu diadaning almashtirish matritsalarini va (7.2) formuladagi matritsalar o'zaro teskari matritsalaridir:

$$\left\| \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^{\alpha}} \right\| = 1, \quad \left\| \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^{\beta}} \right\| = 1$$

Agar (5.5) va (5.6) formulalarga ko'ra

$$\hat{\mathcal{E}}_i = \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i}, \quad \hat{\mathcal{E}}^j = \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^{\beta}} \bar{\mathcal{E}}^{\beta}$$

ekanligi nazarda tutsak, quyidagi munosabatlar hosil qilinadi.

$$T^{\alpha\beta} = \hat{T}^{ij} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j}, \quad T_{\beta}^{\alpha} = \hat{T}_{\beta}^i \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^{\beta}} \quad (6.3)$$

Tenzor komponentalari uchun indeksni ko'tarish (tushirish) qoidasi o'rinlidir. Masalan, (7.1) va (4.2)dan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi.

$$T^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} = T_{\beta}^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}^{\beta} = T_{\beta}^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} g^{\beta\gamma} \bar{\mathcal{E}}_{\gamma} = T_{\beta}^{\alpha} g^{\beta\gamma} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\gamma}$$

Bu yerda β va γ befarq indekslardir. Agar ularning o'rnini almashtirsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$T^{\alpha\beta} = T_{\gamma}^{\alpha} g^{\beta\gamma} \quad (7.4)$$

Kovariant va aralash komponentalarda ham indeksni ko'tarish yoki tushirish shunga o'xshash bajariladi.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ tengligidan muayyan indeksni yuqorida yoki quyida yozishning farqi yo'q, yani

$$T^{\alpha\beta} = T_{\beta}^{\alpha} = T_{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\beta}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Yuqorida olingan munosabatlar tenzorni boshqacha ta'riflash mumkinligini anglatadi. Buni quyida n - rang tenzor uchun ko'ramiz.

2 - rang tenzorning ta'rifidan va poliadalarning xususiyatidan ko'rinib turibdiki, n - rang poliada yordamida ham tenzor tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif: Koordinata sistemasini tanlanishiga bog'liq bo'lmagan va muayyan koordinata sistemasida n - rang poliadalarning ushbu

$$\begin{aligned} T &= T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \bar{\Theta}_{\alpha_1} \bar{\Theta}_{\alpha_2} \dots \bar{\Theta}_{\alpha_n} = T^{\alpha_2 \dots \alpha_n}_{\alpha_1} \bar{\Theta}^{\alpha_1} \bar{\Theta}_{\alpha_2} \dots \bar{\Theta}_{\alpha_n} = \\ &= T^{\dots \alpha_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}} \bar{\Theta}^{\alpha_1} \dots \bar{\Theta}^{\alpha_{n-1}} \bar{\Theta}_{\alpha_n} = T^{\dots \alpha_n}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \bar{\Theta}^{\alpha_1} \bar{\Theta}^{\alpha_2} \dots \bar{\Theta}^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (6.5)$$

chiziqli ifodalari shaklida beriladigan miqdor n - rang tenzor deb ataladi.

Ta'rifga ko'ra, (6.5) formulada poliadalarning $\bar{\Theta}^{\alpha_\kappa}$ va $\bar{\Theta}_{\alpha_\kappa}$ ($\kappa = \overline{1, n}$) bazis vektorlar yordamida hosil qilinish mumkin bo'lgan barcha chiziqli ifodalari nazarda tutiladi. Mazkur (6.5) chiziqli ifodalarning barcha indeksleri yuqorida joylashgan koeffitsientlari tenzorning kontravariant, barcha indeksleri quyida joylashgani - kovariant va indeksleri yuqorida ham, quyida ham joylashganlari - aralash komponentalari deb ataladi. Demak, n - rang tenzor o'zining tashkil etuvchilari - komponentalari bilan aniqlanadi. Muayyan xil komponentalarning soni $N = 3^n$ ga teng bo'ladi.

Ushbu ta'rif $n = 1$ $n = 0$ bo'lsa ham o'rinli. Agar $n = 1$ ($N = 3$) bo'lsa, tenzor birinchi rang ob'ekt, yani vektor bo'ladi:

$$T = T^\alpha \bar{\Theta}_\alpha = T_\beta \bar{\Theta}^\beta$$

Agar $n = 0$ ($N = 1$) bo'lsa, tenzor nolinch rang ob'ekt - bir son bilan aniqlanuvchi invariant miqdor, yani skalyar bo'ladi.

Ikkinchi rang tenzor uchun yuqorida keltirilgan barcha xossalar n - rang tenzor uchun ham o'rinli. Masalan, tenzor komponentalarini almashtirish qoidalari (6.2) va (6.3) kabi ushbu

$$\hat{T}_{\beta_1}^{\beta_2 \dots \beta_n} = T_{\alpha_1}^{\alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial \xi^{\alpha_1}}{\partial \eta^{\beta_1}} \frac{\partial \eta^{\beta_2}}{\partial \xi^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}} \quad (6.6)$$

$$T_{\alpha_1}^{\alpha_2 \dots \alpha_n} = \hat{T}_{\beta_1}^{\beta_2 \dots \beta_n} \frac{\partial \eta^{\beta_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \frac{\partial \xi^{\alpha_2}}{\partial \eta^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial \eta^{\beta_n}} \quad (6.7)$$

formulalar bilan aniqlanadi. Indeksleri ko'tarish (tushirish) esa, (7.4) formula kabi ushbu

$$\begin{aligned} T_{\alpha \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n} &= g_{\alpha_k \sigma} T^{\dots \sigma}_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_n} \\ T^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n} &= g^{\sigma \alpha_k} T_{\dots \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_n} \end{aligned} \quad (6.8)$$

qoidaga binoan bajariladi.

Tenzorning ikkinchi ta'rifi (6.6) va (6.7) almashtirish qoidalaridan foydalanib beriladi.

Ta'rif: Muayyan koordinata sistemasida 3^n ta son- tashkil etuvchilari berilgan va koordinatalar sistemasi almashtirilganda mazkur komponentalar (6.6) va (6.7) formulalarga binoan o'zgaradigan miqdor n - rang tenzor deb ataladi.

Ushbu ta'rifga ko'ra, tenzor komponentalari va tenzorning invariantligini taminlovchi almashtirish qoidalari beriladi. Birinchi ta'rifda esa, uning invariant bo'lishi talab etiladi. Invariantlik esa chiziqli ifodani hosil qiluvchi poliada va koeffitsientlarni almashtirish qoidalari, yuqorida ko'rganimizdek, o'zaro teskari matritsalar bilan aniqlanishi evaziga bajariladi.

Tenzorlarning yoyilmasini normalangan bazislar

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\bar{\mathfrak{D}}_\alpha}{\mathfrak{D}_\alpha}, \quad \bar{e}^\alpha = \frac{\bar{\mathfrak{D}}^\alpha}{\mathfrak{D}^\alpha}$$

orqali ham yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{aligned} T &= T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \bar{\mathfrak{D}}_{\alpha_1} \bar{\mathfrak{D}}_{\alpha_2} \dots \bar{\mathfrak{D}}_{\alpha_n} = \\ &= T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathfrak{D}_{\alpha_1} \mathfrak{D}_{\alpha_2} \dots \mathfrak{D}_{\alpha_n} \bar{e}_{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_2} \dots \bar{e}_{\alpha_n} = T^{* \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \bar{e}_{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_2} \dots \bar{e}_{\alpha_n} \end{aligned}$$

Ta'rif: Tenzorning so'nggi ko'rinishida normalangan bazislar oldidagi koeffitsientlar

$$T^{* \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathfrak{D}_{\alpha_1} \mathfrak{D}_{\alpha_2} \dots \mathfrak{D}_{\alpha_n}$$

tenzorning fizik komponentalari deb ataladi.

Tenzorning boshqa xil fizik komponentalari ham shunga o'xshash yoziladi:

$$T^{* \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathfrak{D}_{\alpha_1} \mathfrak{D}_{\alpha_2} \dots \mathfrak{D}_{\alpha_n}$$

$$T^{* \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathfrak{D}_{\alpha_1} \mathfrak{D}_{\alpha_2} \dots \mathfrak{D}_{\alpha_n}$$

2. Tenzorlar ustida amallar.

1. Tenzorlarni qo'shish amali.

Tenzorlarni qo'shish uchun ularning ranglari bir xil bo'lishi kerak. n - rang P va Q tenzorlarning bir xil komponentalarini almashtirish qoidasi (7.6) ga ko'ra

$$\begin{aligned} \hat{P}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= P^{\beta_1 \dots \beta_n} \frac{\partial \eta^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \frac{\partial \eta^{\alpha_2}}{\partial \xi^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \eta^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} \\ \hat{Q}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= Q^{\beta_1 \dots \beta_n} \frac{\partial \eta^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \frac{\partial \eta^{\alpha_2}}{\partial \xi^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \eta^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

formular bilan beriladi. Bu tengliklarning ikkala tomonini hadma-had qo'shsak, quyidagi munosabatlar hosil bo'ladi:

$$\hat{P}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \hat{Q}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (P^{\beta_1 \dots \beta_n} + Q^{\beta_1 \dots \beta_n}) \frac{\partial \eta^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \eta^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} \quad (6.2)$$

Bu yerdan (7.6) qoidani e'tiborga olsak, tenzorning ikkinchi ta'rifi ko'ra

$$P^{\beta_1 \dots \beta_n} + Q^{\beta_1 \dots \beta_n} = T^{\beta_1 \dots \beta_n}$$

miqdorlar n - rang tenzor komponentalari ekanligi kelib chiqadi. P va Q tenzorlarning yig'indisi

$$T = P + Q \quad (6.3)$$

tenglik bilan belgilanadi.

Yig'indisi hisoblanishi kerak bo'lgan tenzorlarning turli xil komponentalari berilgan bo'lsa, ular indeksni ko'tarish va tushirish qoidasidan foydalanib, bir xil komponentalar ko'rinishida yoziladi, so'ngra qo'shish amali bajariladi.

Masalan, ikkinchi rang P va Q tenzorlarning $P^{\alpha\beta}$ va Q_{β}^{α} komponentalari berilgan bo'lsin. $P + Q$

yig'indini topish uchun qo'shish amali ushbu $P^{\alpha\beta}$ va $Q^{\alpha\beta} = g^{i\beta} Q_i^{\alpha}$ kontravariant yoki $P_{\beta}^{\alpha} = g_{\beta i} P^{\alpha i}$ va

Q_{β}^{α} aralash komponentalar bilan bajariladi.

2. Tenzorlarni ko'paytirish amali.

Bu amal har biri ixtiyoriy rangli ikkita tenzor uchun aniqlangan bo'lib, ko'paytmaning rangi ko'paytiruvchilar ranglarining yig'indisiga teng.

Ranglari n va m bo'lgan P va Q tenzorlar berilgan bo'lsin. Ularning ko'paytmasi $T = PQ$ ($n + m$) - rang tenzor bo'ladi. Buni isbotlash uchun, masalan, P tenzorining kontravariant va Q tenzorining kovariant komponentalarining ushbu almashtirish formulalarini

$$\begin{aligned}\hat{P}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} &= P^{\beta_1 \dots \beta_n} \frac{\partial \eta^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \eta^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} \\ \hat{Q}_{i_1 \dots i_m} &= Q_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial \eta^{i_1}} \dots \frac{\partial \xi^{j_m}}{\partial \eta^{i_m}}\end{aligned}\quad (6.4)$$

hadma-had ko'paytiramiz:

$$\hat{P}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \hat{Q}_{i_1 \dots i_m} = P^{\beta_1 \dots \beta_n} Q_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial \eta^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \eta^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}} \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial \eta^{i_1}} \dots \frac{\partial \xi^{j_m}}{\partial \eta^{i_m}}$$

Bu tenglikdan

$$T^{\beta_1 \dots \beta_n}_{j_1 \dots j_m} = P^{\beta_1 \dots \beta_n} Q_{j_1 \dots j_m} \quad (6.5)$$

miqdorlar ($n + m$) - rang tenzorining komponentalari ekanligi kelib chiqadi. Boshqa xil komponentalari bilan berilgan tenzorlarni ko'paytirish ham shunga o'xshash bajariladi.

3. Tenzorni skalyar miqdorga ko'paytirish amali.

Agar ρ skalyar miqdor bo'lsa, ushbu

$$T = \rho P \quad (6.6)$$

ko'paytma komponentalari

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \rho P^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

tenglik bilan aniqlangan n - rang tenzorni hosil qiladi.

4. Tenzorlarni yig'ishtirish amali.

Bu amal aralash indeksli komponentalar bilan bajariladi. Bu amal yordamida berilgan n - rang ($n \geq 2$) tenzorga ($n - 2$) - rang tenzor mos keltiriladi;

$$\begin{aligned}T^{\alpha_2 \dots \alpha_n}_{\alpha_1} \div T^{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n}_{\alpha_1} \\ T^{\alpha_1 \dots \alpha_k \cdot \alpha_{k+2} \dots \alpha_n}_{\alpha_{k+1}} \div T^{\alpha_1 \dots \alpha_k \cdot \alpha_{k+2} \dots \alpha_n}_{\alpha_k}\end{aligned}\quad (6.7)$$

va hokazo. 2 - rang tenzorga esa nolunchi rang tenzor - skalyar mos keltiriladi:

$$T^{\alpha_2}_{\alpha_1} \div T^{\alpha_1}_{\alpha_1} \quad (6.8)$$

Hosil qilingan ($n - 2$)- rang ob'ektlar tenzor ekanligi va ular uchun tenzor komponentalarini almashtirish qoidasi o'rinli ekanligidan kelib chiqadi. Masalan,

$$\hat{T}^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\beta_1} = T^{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n}_{\alpha_1} \frac{\partial \eta^{\beta_3}}{\partial \xi^{\alpha_3}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}}$$

almashtirish qoidasi o'rinli bo'ladi. Buni ko'rish uchun (7.6) almashtirishda $\beta_1 = \beta_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ deb qabul qilish yetarli.

Agar tenzor rangi n yetarlicha katta bo'lsa, yig'ishtirish amalini turli juft indekslar (masalan, birinchi va ikkinchi, birinchi va uchinchi va hokazo) bilan bajarish mumkin.

Yig'ishtirish amalini bir necha marta qaytarish ham mumkin. Bunda tenzor juft rangli bo'lganda u nolunchi rang tenzor-skalyarga mos keladi. Agar tenzor toq rangli bo'lsa - birinchi rang tenzor-vektorga mos keladi. Demak, yig'ishtirish amali yordamida invariantlar hosil qilish mumkin. Masalan:

$$T^{ij} g_{ij} = T^{i \cdot}_{\cdot i} = T^{1 \cdot}_{\cdot 1} + T^{2 \cdot}_{\cdot 2} + T^{3 \cdot}_{\cdot 3} - \text{son koordinata sistemasiga bog'liq emas. Demak bu invariant.}$$

Ta'rif: n - rang tenzorni yig'ishtirish natijasida hosil qilingan ($n-2$) - rang tenzorga tenzor o'rami deb ataladi.

O'ramlarda indeksnlarni ko'tarish va tushirish amali odatdagidek bajariladi. Masalan,

$$T_{\alpha_1}^{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n} = g^{\alpha_1 \gamma} g_{\alpha_1 \beta} T_{\gamma}^{\beta \alpha_3 \dots \alpha_n} \quad (6.9)$$

5. Tenzorlarni skalyar ko'paytirish amali.

Bu amal har biri ixtiyoriy rangli ikkita tenzor bilan bajariladi. Buning uchun avval ko'paytirish amalidan foydalanib, ko'paytma hosil qilinadi, keyin birinchi ko'paytuvchining oxirgi indeksi va ikkinchi ko'paytuvchining birinchi indeksi bo'yicha yig'ishtirish amali bajariladi.

Masalan, n - rang P tenzori va m - rang Q tenzorining skalyar ko'paytmasi $(m + n - 2)$ -rang T tenzor - o'ram bo'ladi:

$$T = P \cdot Q, T_{\beta_2 \dots \beta_n}^{\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} = P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}^{\alpha} Q_{\alpha \beta_2 \dots \beta_n} \quad (6.10)$$

2-rang tenzorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytirish natijasida yana 2-rang tenzor hosil bo'ladi:

$$T = T_{\beta}^{\alpha} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta}, \quad T \cdot T = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\beta}^{\sigma} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta} = T^2, \quad (6.11)$$

$$T^2 \cdot T = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\gamma}^{\sigma} T_{\beta}^{\gamma} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta} = T^3, \dots$$

Bu yerda T^2 tenzorning kvadrati, T^3 - kubi va hokazo deb ataladi. Ushbu ketma-ketlik to'la bo'lishi uchun

$$G = g_{\alpha\beta} \bar{\Theta}^{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta} \quad (6.12)$$

ko'rinishidagi metrik tenzor deb ataluvchi tenzorni T^0 -nolinchi darajali tenzor deb qabul qilinadi.

Yig'ishtirish amali yordamida (8.11) ketma-ketlikka quyidagi o'ramlar ketma-ketligi mos keltiriladi:

$$J_1 = T_{\alpha}^{\alpha}, \quad J_2 = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\alpha}^{\sigma}, \quad J_3 = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\beta}^{\sigma} T_{\alpha}^{\beta} \quad (6.13)$$

Tenzorlarni skalyar ko'paytirish amalini tenzorning birinchi ta'rifi va poliadalarni skalyar ko'paytirish qoidasi (4.25) dan foydalanib ham bajarish mumkin. Bunda ortiqcha (indekslarni tushirish yoki ko'tarish) amallarni bajarmaslik uchun birinchi tenzorning oxirgi va ikkinchi tenzorning birinchi bazis vektorlarining o'zaro teskari ko'rinishdagi ifodalarini olish qulay bo'ladi.

Masalan, 2-rang tenzor T va $\bar{a}$ vektorning skalyar ko'paytmasi quyidagicha bajariladi;

$$T \cdot \bar{a} = \left(T_{\beta}^{\alpha} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta} \right) \cdot \left(a^{\sigma} \bar{\Theta}_{\sigma} \right) = T_{\beta}^{\alpha} a^{\sigma} \bar{\Theta}_{\alpha} \left(\bar{\Theta}^{\beta} \cdot \bar{\Theta}_{\sigma} \right) =$$

$$= T_{\beta}^{\alpha} a^{\sigma} \delta_{\sigma}^{\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} = T_{\beta}^{\alpha} a^{\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} \quad (6.14)$$

Shunga o'xshash

$$T^2 = T \cdot T = \left(T_{\beta}^{\alpha} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\beta} \right) \cdot \left(T_{\gamma}^{\sigma} \bar{\Theta}_{\sigma} \bar{\Theta}^{\gamma} \right) = T_{\beta}^{\alpha} T_{\gamma}^{\sigma} \bar{\Theta}_{\alpha} \left(\bar{\Theta}^{\beta} \bar{\Theta}_{\sigma} \right) \bar{\Theta}^{\gamma} =$$

$$= T_{\beta}^{\alpha} T_{\gamma}^{\sigma} \delta_{\sigma}^{\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\gamma} = T_{\beta}^{\alpha} T_{\gamma}^{\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\gamma} \quad (6.15)$$

6. Tenzorlarni vektor ko'paytirish amali.

Bu amal ham har biri ixtiyoriy rangli ikkita tenzor bilan ularning birinchi ta'rifi va poliadalarni vektor ko'paytirish qoidasi (4.30) va (4.31) yordamida bajariladi.

Masalan,

$$T \times \bar{a} = \left(T^{\alpha\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}_{\beta} \right) \times \left(a^{\sigma} \bar{\Theta}_{\sigma} \right) = T^{\alpha\beta} a^{\sigma} \bar{\Theta}_{\alpha} e_{\beta\sigma\gamma} \bar{\Theta}^{\gamma} =$$

$$= T^{\alpha\beta} e_{\beta\sigma\gamma} a^{\sigma} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^{\gamma} \quad (6.16)$$

Shunga o'xshash

$$T \times T = \left(T^{\alpha\beta} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}_{\beta} \right) \times \left(T^{\sigma\gamma} \bar{\Theta}_{\sigma} \bar{\Theta}_{\gamma} \right) =$$

$$= T^{\alpha\beta} T^{\sigma\gamma} \bar{\Theta}_{\alpha} \left(\bar{\Theta}_{\beta} \times \bar{\Theta}_{\sigma} \right) \bar{\Theta}_{\gamma} = T^{\alpha\beta} T^{\sigma\gamma} e_{\beta\sigma q} \bar{\Theta}_{\alpha} \bar{\Theta}^q \bar{\Theta}_{\gamma} \quad (6.17)$$

Tenzorlarni vektor ko'paytirilganda ularning qaysi xil ifodasini olishning ahamiyati yo'q.

7-mavzu: Tenzorlarning invariantlari. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar. Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Metrik va diskriminant tenzorlar. Levi-Chivita tenzori.

Reja:

1. Tenzor invariantlari;
2. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar;
3. Tenzorlarni bo'lish teoremasi;
4. Metrik va diskriminant tenzorlar;
5. Levi-Chivita tenzori.

Ta'rif: Ikkita indeksining o'rnini almashtirilganda o'zgarmaydigan tenzor shu indekslarga nisbatan simmetrik tenzor deb ataladi.

Ta'rif: Ikkita indeksining o'rnini almashtirilganda faqat ishorasi o'zgaradigan tenzor esa shu indekslarga nisbatan antisimmetrik tenzor deb ataladi.

Masalan, birinchi va uchinchi indekslari bo'yicha simmetrik bo'lgan n - rang tenzor uchun

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n} = T^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \dots \alpha_n} \quad (7.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar tenzor mazkur indekslari bo'yicha antisimmetrik bo'lsa,

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n} = -T^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_4 \dots \alpha_n} \quad (7.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi qo'sh o'ramlar uchun o'rinli bo'lgan quyidagi to'g'ri va teskari teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Ikkita har birining rangi ixtiyoriy va yig'ishtirilayotgan indekslari bo'yicha biri simmetrik, ikkinchisi esa antisimmetrik bo'lgan tenzorlarning qo'sh o'rami nolga teng.

Teskari teorema. Agar rangi ixtiyoriy ikkita tenzorning qo'sh o'rami nolga teng bo'lsa va ushbu tenzorlardan biri yig'ishtirilayotgan indekslari bo'yicha simmetrik (antisimmetrik) bo'lsa, ikkinchi tenzor esa shu indekslari bo'yicha antisimmetrik (simmetrik) bo'ladi.

2. Komponentasi $T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ bo'lgan ixtiyoriy tenzor berilgan bo'lsin. Unga ixtiyoriy nomerli ikkita indeks bo'yicha simmetrik (antisimmetrik) tenzorni mos keltirish mumkin. Masalan, α_1 va α_2 indekslari bo'yicha simmetrik va antisimmetrik tenzorlar quyidagicha hosil qilinadi:

$$T^{(\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 \dots \alpha_n} = \frac{1}{2!} (T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n} + T^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n}) \quad (7.3)$$

$$T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3 \dots \alpha_n} = \frac{1}{2!} (T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n} - T^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_n}) \quad (7.4)$$

Bu yerda $(\alpha_1 \alpha_2)$ va $[\alpha_1 \alpha_2]$ belgilar ushbu indekslar bo'yicha simmetrik va antisimmetrik xususiyatlarga ega ekanligini bildiradi.

Tenzor bir xil nomerlarda joylashgan guruh indekslarining har bir jufti bo'yicha simmetrik (antisimmetrik) bo'lsa, u holda ushbu tenzor mazkur guruh indekslari bo'yicha simmetrik (antisimmetrik) tenzor deb ataladi. Ixtiyoriy tenzor yordamida simmetrik tenzor hosil qilish mumkin. Buning uchun indekslari barcha mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar natijasida hosil qilingan tenzorlarning yig'indisini olish kifoya. Ushbu yig'indining o'rta arifmetik qiymati berilgan tenzorga mos keltirilgan simmetrik tenzor sifatida qabul qilinadi. Masalan,

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!} (T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\alpha\gamma} + T_{\gamma\beta\alpha} + T_{\alpha\gamma\beta})$$

Indekslarni juft o'rniga qo'yish natijasida hosil qilingan tenzorlarni musbat ishora bilan toq o'rniga qo'yish natijasida hosil qilingan tenzorlarni manfiy ishora bilan olingan yig'indi esa antisimmetrik tenzorni beradi. Ushbu yig'indining o'rta arifmetik qiymati berilgan tengzorga mos keltirilgan antisimmetrik tenzor sifatida qabul qilinadi.

Masalan,

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!} (T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\alpha})$$

Mazkur mos keltirish amallari simmetriklash va alternirlash deb ataladi.

Simmetrik tenzorning xossalari

a) Simmetrik T tenzor uchun quidagi munosabatlar o'rinli ekanligidan

$$T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}, \quad T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$$

$A_1 = \|T_{\alpha\beta}\|$ va $A_4 = \|T^{\alpha\beta}\|$ matritsalar ham simmetrik ekanligi kelib chiqadi.

b) **Indekslarni ko'tarish (tushirish) qoidasiga ko'ra quidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:**

$$T_{\beta\sigma} g^{\sigma\alpha} = T_{\sigma\beta} g^{\sigma\alpha}, \quad T_{\beta\cdot}^{\alpha\cdot} = T_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$$

Demak, $A_2 = \|T_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\|$ va $A_3 = \|T_{\beta\cdot}^{\alpha\cdot}\|$ matritsalar bir-biriga teng bo'ladi: $A_2 = A_3$

a) **T tenzor simmetrik bo'lganligi uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi;**

$$T_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} a^{\beta} = T_{\beta\cdot}^{\alpha\cdot} a^{\beta}, \quad T \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot T$$

Tenzorning vektorga skalyar ko'paytmasi kommutativlik xossasiga egadir. Shuning uchun simmetrik tengzorga yagona chiziqli vektor funksiya mos keladi:

$$\bar{b} = T \cdot \bar{a}$$

Demak, simmetrik tenzorning ikkala uchlik xos vektorlari, yani $\bar{a}_\alpha$ va $\bar{a}'_\alpha$ bosh yo'nalishlari ustma-ust tushadi.

Tenzorning ushbu xos vektorlari (13.7) tenglamalardan aniqlanadi:

$$(\lambda \delta_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} - T_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}) a^{\beta} = 0 \quad (7.5)$$

Simmetrik tenzor bosh yo'nalishlarining quyidagi xossalari mavjud:

1) Xarakteristik tenglamaning turli ildizlariga mos kelgan xos vektorlar o'zaro ortogonal:

$$\lambda_\mu \neq \lambda_\nu, \quad \bar{a}_\mu \cdot \bar{a}_\nu = 0, \quad a_{(\mu}^{\alpha} \cdot a_{\alpha}^{(\nu)} = 0$$

2) Agar xarakteristik tenglamaning ildizlarining ixtiyoriy ikkitasi bir-biriga teng bo'lsa, bosh yo'nalishlar tekisligi va shu tekislikka ortogonal uchinchi bosh yo'nalish mavjud bo'ladi; ildizlarning uchalasi ham bir-biriga teng bo'lsa, hamma yo'nalishlar bosh bo'ladi.

Xarakteristik tenglama ildizlarining quyidagi xossalarga ega:

a) **2-rang simmetrik tenzor xarakteristik tenglamasining hamma ildizlari haqiqiy bo'ladi;**

b) 2-rang simmetrik tenzorning kvadratik formasi musbat aniqlangan bo'lsa, xarakteristik tenglamaning hamma ildizlari musbat va haqiqiy bo'ladi.

Ta'rif: Agar kvadratik forma faqat $x^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$) bo'lgandagina nolga teng bo'lib, x^α ning barcha haqiqiy qiymatlarida musbat bo'lsa, u musbat aniqlangan kvadratik forma deb ataladi.

Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Tenzorning asosiy xususiyati - invariantlik uning komponentalarini almashtirish qoidalarini bilan aniqlanadi. Ammo biror berilgan miqdorning tenzor ekanligini aniqlash uchun uning komponentalarini almashtirish qoidalarini bajarilishini tekshirish shart emas. Buning uchun quyidagi teorema bilan beriladigan shartni tekshirish kifoya.

Teorema (tenzorlarni bo'lish teoremasi): Biror ξ^α koordinata sistemasida 3^n ta son-komponentalar $T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ yordamida T obekt berilgan bo'lsin. Uni ixtiyoriy m - rang ($m \leq n$) tenzorga ko'paytirib, so'ngra $2m$ indeksi bo'yicha yig'ishtirish amali bajarilganda $(n-m)$ -rangli P tenzor hosil bo'lsa, mazkur T obekt tenzor deb ataladi.

Teoreмага ko'ra T obekti tenzor bo'lishi uchun ushbu (7.5) va (7.7) formulalar

$$P = TQ = T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} Q_{\beta_1 \dots \beta_m},$$

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} Q_{\beta_1 \dots \beta_n} \div T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} Q_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = P^{\alpha_{m+1} \dots \alpha_n}$$

yordamida hosil qilingan

$$P^{\alpha_{m+1} \dots \alpha_n} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} Q_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \quad (7.8)$$

sonlar $(n-m)$ - rang tenzorning komponentalari bo'lishi kerak.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra P - tenzor. Shuning uchun so'nggi tenglikni «yangi» η^α koordinata sistemasida yozish mumkin;

$$\hat{T}^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_{m+1} \dots \beta_n} \hat{Q}_{\beta_1 \dots \beta_n} = \hat{P}^{\beta_{m+1} \dots \beta_n} = P^{\alpha_{m+1} \dots \alpha_n} \frac{\partial \eta^{\beta_{m+1}}}{\partial \xi^{\alpha_{m+1}}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}}$$

Bu munosabatning o'ng tomonida $P^{\alpha_{m+1} \dots \alpha_n}$ ni (8.18)dan foydalanib almashtiriksak va Q tenzor komponentalarini yangi koordinata sistemasida yozsak, ushbu

$$\hat{T}^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_{m+1} \dots \beta_n} \hat{Q}_{\beta_1 \dots \beta_n} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} \hat{Q}_{\beta_1 \dots \beta_m} \frac{\partial \eta^{\beta_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_{n-1}}}{\partial \xi^{\alpha_{n-1}}} \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}}$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan Q ixtiyoriy tenzor bo'lgani uchun ushbu

$$\hat{T}^{\beta_1 \dots \beta_m \beta_{m+1} \dots \beta_n} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n} \frac{\partial \eta^{\beta_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}}$$

tenzor komponentalarini almashtirish qoidasi kelib chiqadi. Demak, teorema isbotlandi.

Ta'rif: Berilgan ikki P va Q tenzorlarning ko'paytmasi $T = PQ$ ni ixtiyoriy ikkita indeksi bo'yicha yig'ishtirish natijasida hosil bo'lgan tenzor qo'sh o'ram deb ataladi. Masalan,

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = P^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} Q_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$$

ko'paytma uchun $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-2} \beta_1 \beta_2}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$ tenzor qo'sh o'ram bo'ladi.

Metrik tenzor. Nolinchi darajali tenzor sifatida (6.12) formula bilan berilgan

obektni qabul qilib, uni metrik tenzor deb atagan edik.

G haqiqatan tenzor ekanligini aniqlash uchun

$$G = g_{\alpha\beta} \bar{\Theta}^\alpha \bar{\Theta}^\beta = \hat{g}_{ij} \hat{\Theta}^i \hat{\Theta}^j = \hat{G}$$

munosabat yoki (5.7) almashtirish formulalari o'rinli ekanligini ko'rsatish kerak. Buni (4.11) formula bilan aniqlangan $g_{\alpha\beta}$ ning ξ^α va η^α koordinata sistemalaridagi quyidagi ko'rinishlaridan foydalanib, osonlik bilan ko'rsatish mumkin.

$$g_{\alpha\beta} = \bar{\Theta}_\alpha \cdot \bar{\Theta}_\beta; \quad \hat{g}_{ij} = \hat{\Theta}_i \cdot \hat{\Theta}_j \quad (7.9)$$

$$G = g_{\alpha\beta} \bar{\Theta}^\alpha \bar{\Theta}^\beta$$

Agar $g_{\alpha\beta}$ ni asosiy kvadratik forma

$$dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (7.10)$$

koefitsientlari sifatida qarab, ushbu 9 ta son x^α koordinata sistemasida biror G obektni aniqlaydi desak, mazkur obekt ikkinchi rang tenzor ekanligini isbot qilingan teorema yordamida ko'rsatish mumkin.

Haqiqatan, dx^α va dx^β differensiallar ixtiyoriy bo'lgani uchun ularning ko'paytmasi ixtiyoriy 2-rang T tenzorning komponentalari bo'ladi. Shuning uchun tenglikning o'ng tomonini TG ko'paytmaning ikkala indeksi bo'yicha yig'ishtirish natijasi deb qarash mumkin. Ikkinchi tomonidan bu yerda $n = m = 2$ hamda tenglikning chap tomoni dS^2 skalyar miqdor. Demak, mazkur teoremaning shartlari bajariladi va G 2-rang tenzor ekanligi kelib chiqadi. Uni (4.22) va (4.23) indeksni ko'tarish va tushirish amallari yordamida olinadigan ushbu

$$G = g_{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}^\beta = g^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}_\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta = \delta_{\cdot\beta}^{\cdot\alpha} \bar{\mathcal{E}}_\alpha \bar{\mathcal{E}}^\beta = \delta_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta \quad (7.10')$$

ko'rinishlarda yozish mumkin.

Ta'rif: (7.8) ga muvofiq Koordinatalarning differensiallari orqali masofa differensialining kvadratini aniqlovchi simmetrik $g_{\alpha\beta}$ tenzor kovariant metric tenzor deb ataladi.

Kovariant metrik $g_{\alpha\beta}$ tenzorining o'zaro bog'lanmagan komponentalarining umumiy soni $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng bo'ladi.

Kovariant metrik $g_{\alpha\beta}$ tenzor komponentalaridan tuzilgan determinantni g orqali belgilaylik:

$$g = |g_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots \\ g_{21} & g_{22} & \dots \end{vmatrix}$$

Ta'rif: Kovariant metrik $g_{\alpha\beta}$ tenzorga teskari bo'lgan simmetrik $g^{\alpha\beta}$ tenzor kontravariant metric tenzor deb ataladi.

Kovariant va kontravariant metrik tenzorlarning determinantlarining ko'paytmasi birga teng bo'ladi.

$$|g_{\alpha\beta}||g^{\alpha\beta}| = 1$$

Shunday qilib, Dekart sistemasida metrik tenzorning bir xil indeksli komponentalari birga teng, har xil indeksli komponentalari nolga teng bo'ladi.

Metrik tenzorning xossalari

1. G - simmetrik tenzor. Bu xususiyat (7.1)dan kelib chiqadi.
2. Metrik tenzorning aralash komponentlari ixtiyoriy koordinata sistemasida Kroneker deltalarini beradi.

$$\hat{G}^{\alpha}_{\cdot\beta} = G^i_{\cdot j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^\beta} = \delta^i_{\cdot j} \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^\beta} = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial \eta^\beta} = \hat{\delta}^{\alpha}_{\cdot\beta} \quad (7.11)$$

3. Ixtiyoriy R tenzor bilan G ning skalyar ko'paytmasi yana R tenzorni beradi:

$$P \cdot G = P \quad (7.12)$$

yani, metrik tenzor skalyar ko'paytirish amalida birlik tenzor rolini bajaradi. Masalan, R 3-rang tenzor bo'lsa, skalyar ko'paytirish formulasi (8.10)ga binoan olingan

$$T = P \cdot G \quad (Q = G),$$

$$T^{\alpha_1\alpha_2\beta_2} = P^{\alpha_1\alpha_2\alpha} \delta_{\alpha}^{\beta_2} = P^{\alpha_1\alpha_2\beta_2}$$

munosabat (10.4) o'rinli ekanligini ko'rsatadi. Bu xususiyatdan G ning ixtiyoriy darajasi G ga teng ekanligi kelib chiqadi.

Diskriminant tenzor.

Biz avvalgi mavzularda bazis vektorlarning vektor ko'paytmasi kontravariant yoki kovariant bazis vektorlarning yoyilmasi (4.30) ko'rinishda ifodalanishini ko'rgan edik:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{S}}_\alpha \times \bar{\mathfrak{S}}_\beta &= e_{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathfrak{S}}^\gamma, & \bar{\mathfrak{S}}^\alpha \times \bar{\mathfrak{S}}^\beta &= e^{\alpha\beta\gamma} \bar{\mathfrak{S}}_\gamma \\ \bar{\mathfrak{S}}_\alpha \times \bar{\mathfrak{S}}^\beta &= e_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} \bar{\mathfrak{S}}_\gamma = e_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta} \bar{\mathfrak{S}}^\gamma\end{aligned}\tag{7.13}$$

Bu tengliklardan birinchisining ikkala tomonini $\overline{\mathcal{E}}_\sigma$, ikkinchisini $\overline{\mathcal{E}}^\sigma$, uchinchisini esa $\overline{\mathcal{E}}^\sigma$ va $\overline{\mathcal{E}}_\sigma$ vektorlarga skalyar ko'paytirsak, ushbu

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{E}}_\sigma \cdot (\overline{\mathcal{E}}_\alpha \times \overline{\mathcal{E}}_\beta) &= (\overline{\mathcal{E}}_\sigma \overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}_\beta) = e_{\alpha\beta\gamma} \overline{\mathcal{E}}_\sigma \cdot \overline{\mathcal{E}}^\gamma = e_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\sigma}^{\cdot\beta} = e_{\alpha\beta\sigma} \\ \overline{\mathcal{E}}^\sigma \cdot (\overline{\mathcal{E}}^\alpha \times \overline{\mathcal{E}}^\beta) &= (\overline{\mathcal{E}}^\sigma \overline{\mathcal{E}}^\alpha \overline{\mathcal{E}}^\beta) = e^{\alpha\beta\gamma} \overline{\mathcal{E}}_\sigma \cdot \overline{\mathcal{E}}_\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} \delta_{\gamma}^{\cdot\sigma} = e^{\alpha\beta\sigma} \\ \overline{\mathcal{E}}^\sigma \cdot (\overline{\mathcal{E}}_\alpha \times \overline{\mathcal{E}}^\beta) &= (\overline{\mathcal{E}}^\sigma \overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}^\beta) = e_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} \delta_{\gamma}^{\cdot\sigma} = e_{\alpha}^{\beta\sigma} \\ \overline{\mathcal{E}}_\sigma \cdot (\overline{\mathcal{E}}_\alpha \times \overline{\mathcal{E}}^\beta) &= (\overline{\mathcal{E}}_\sigma \overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}^\beta) = e_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta} \delta_{\sigma}^{\cdot\gamma} = e_{\alpha\cdot\sigma}^{\cdot\beta}\end{aligned}\quad (7.14)$$

Munosabatlarga ega bo'lamiz. Demak, (10.5) yoyilmalarning koeffitsientlarini almashtirish qoidasini aniqlash uchun bazis vektorlarning aralash ko'paytmasini tekshirish kifoya qilar ekan. Haqiqatan (5.5) formulalardan foydalanib, η^α koordinata sistemasida aralash ko'paytmalarning, masalan, birinchisini yozsak, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{ijk} &= (\hat{\mathcal{E}}_i \hat{\mathcal{E}}_j \hat{\mathcal{E}}_k) = \left(\overline{\mathcal{E}}_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \overline{\mathcal{E}}_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \overline{\mathcal{E}}_\gamma \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k} \right) = \\ &= (\overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}_\beta \overline{\mathcal{E}}_\gamma) \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k}\end{aligned}$$

Demak, ξ^α koordinata sistemasida berilgan $3^3 = 27$ ta $e_{\alpha\beta\gamma}$ sonlarning almashtirish qoidasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\hat{e}_{ijk} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k} \quad (7.16)$$

Bundan tenzorning ikkinchi tarifi ko'ra, $e_{\alpha\beta\gamma}$ 3-rang tenzorning kovariant komponentalari ekanligi kelib chiqadi. Indeksleri boshqacha joylashgan $e^{\alpha\beta\gamma}$, $e_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$, $e_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}$ va hokazo sonlar ham 3-rang tenzorning komponentalari ekanligi shunga o'xshash ko'rsatiladi. Indeksleri ko'tarish va tushirish amali yordamida esa bazis vektorlarning turli xil aralash ko'paytmalari hosil qiladigan barcha miqdorlar bir tenzorning turli xil komponentalari ekanligi oson isbot qilinadi.

Ta'rif: Quyidagi shaklda ifodalangan tenzor diskriminant tenzor deb ataladi.

$$E = e_{\alpha\beta\gamma} \overline{\mathcal{E}}^\alpha \overline{\mathcal{E}}^\beta \overline{\mathcal{E}}^\gamma = e_{\beta\gamma}^{\cdot\alpha} \overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}^\beta \overline{\mathcal{E}}^\gamma = \dots e^{\alpha\beta\gamma} \overline{\mathcal{E}}_\alpha \overline{\mathcal{E}}_\beta \overline{\mathcal{E}}_\gamma \quad (7.17)$$

Bazis vektorlarning aralash ko'paytmasini aniqlovchi (4.9), (4.16), (4.17) formulalardan va diskriminant tenzor komponentalarining ular orqali ifodasi (10.6)dan

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\gamma\beta\alpha} \quad (7.18)$$

munosabatlar o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, diskriminant tenzor uchchala indeksi bo'yicha antisimmetrik bo'lib, uning ikkita indeksi bir xil bo'lgan komponentalari nolga teng, yani faqat barcha indeksleri turli bo'lgan komponentalarigina noldan farqli bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, (4.9) va (4.13)ga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$(\overline{\mathcal{E}}_1 \overline{\mathcal{E}}_2 \overline{\mathcal{E}}_3)^2 = |g_{\alpha\alpha}| = g$$

Agar

$$e_{123} = (\overline{\mathcal{E}}_1 \overline{\mathcal{E}}_2 \overline{\mathcal{E}}_3) = J^{-1} = \sqrt{g} \quad (7.19)$$

deb qabul qilinsa va E ning (10.9) antisimmetriklik xususiyatlari e'tiborga olinsa, diskriminant tenzor komponentalari ushbu qoida bilan aniqlanadi:

$e_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g}$, agar $\alpha\beta\gamma$ sonli indekslar 1, 2, 3 dan juft o'rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa;

$e_{\alpha\beta\gamma} = -\sqrt{g}$, agar $\alpha\beta\gamma$ sonli indekslar 1, 2, 3 dan toq o'rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa;

$e_{\alpha\beta\gamma} = 0$, boshqa hollarda, yani ikki yoki uchchala indeksi bir xil qiymat

qabul qilsa.

Shunga o'xshash, (4.20)ga binoan,

$$(\overline{\mathfrak{D}}^1 \overline{\mathfrak{D}}^2 \overline{\mathfrak{D}}^3) = |g^{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g_1}$$

deb qabul qilsak va E ning (10.9) antisimmetrik xususiyatlarini etiborga olsak, diskriminant tenzorning kontravariant komponentalari

$$e^{\sigma\kappa r} = g^{\sigma\alpha} g^{\kappa\beta} g^{r\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}$$

qoida bilan aniqlanishi kelib chiqadi:

$e^{\sigma\kappa r} = \sqrt{g}$, agar $\sigma\kappa r$ sonli indekslar 1, 2, 3 dan juft o'rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa;

$e^{\sigma\kappa r} = -\sqrt{g}$, agar $\sigma\kappa r$ sonli indekslar 1, 2, 3 dan toq o'rin almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsa;

$e^{\sigma\kappa r} = 0$, boshqa hollarda, yani ikki yoki uchchala indeksi bir xil qiymat

qabul

qilsa.

Diskriminant tenzorlar vektor ko'paytmani va aralash ko'paytmani (uchinchi tartibli determinantni) indeksli yozishda qo'llaniladi. Masalan,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} = c_{\kappa} \overline{\mathfrak{D}}^{\kappa} = c^{\kappa} \overline{\mathfrak{D}}_{\kappa}$$

vektor ko'paytmaning kovariant komponentalarini

$$c_{\kappa} = e_{i j \kappa} a^i b^j \quad (7.20)$$

ko'rinishda yozilishi quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) = (a^i \overline{\mathfrak{D}}_i \times b^j \overline{\mathfrak{D}}_j) = a^i b^j (\overline{\mathfrak{D}}_i \times \overline{\mathfrak{D}}_j) = a^i b^j e_{i j \kappa} \overline{\mathfrak{D}}^{\kappa}$$

$\overline{\mathfrak{C}}$ vektorning kontravariant komponentasi esa

$$c^{\kappa} = e^{i j \kappa} a_i b_j \quad (7.21)$$

shaklda yozilishini ham ko'rsatish mumkin. Shunga o'xshash $(\bar{a} \bar{b} \bar{c})$ aralash ko'paytmani ham indeksli ko'rinishda, yani

$$(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = a^i b^j c^{\kappa} (\overline{\mathfrak{D}}_i \overline{\mathfrak{D}}_j \overline{\mathfrak{D}}_{\kappa}) = a^i b^j c^{\kappa} e_{i j \kappa} \quad (7.22)$$

yoki (7.11) e'tiborga olinsa, tenglikning o'ng tomonidagi i, j, k indekslar bo'yicha yig'indini ushbu

$$e_{i j \kappa} a^i b^j c^{\kappa} = \sqrt{g} (a^1 b^2 c^3 - a^1 b^3 c^2 + a^2 b^3 c^1 - a^2 b^1 c^3 + a^3 b^1 c^2 - a^3 b^2 c^1)$$

ko'rinishda ochib yozish mumkin. So'nggi tenglikda qavs ichidagi ifoda $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarning komponentalaridan hosil qilingan determinantga teng. Shuning uchun uchinchi tartibli determinantni indeksli belgilash qoidasini beruvchi quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$e_{i j \kappa} a^i b^j c^{\kappa} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (7.23)$$

Levi-Chivita tenzori.

Ta'rif: Ushbu $\varepsilon_{ijk} = \frac{e_{ijk}}{(\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3)}$, $\varepsilon^{ijk} = \frac{e^{ijk}}{(\bar{\varepsilon}^1 \bar{\varepsilon}^2 \bar{\varepsilon}^3)}$ (7.24)

formulalar bilan aniqlanadigan tenzorlar Levi-Chivita tenzori deb ataladi.

Levi-Chivita tenzori yordamida (10.16) munosabat

$$\varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (7.25)$$

ko'rinishda yoziladi. Shunga o'xshash kovariant komponentalar hosil qilgan determinantni quyidagi indeksli ifoda shaklida yozish mumkin:

$$\varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (7.26)$$

Yuqorida ko'rganimizdek, to'g'ri burchakli dekart koordinata sistemasida $g = g_1 = 1$ bo'lgani uchun

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

tenglik o'rinli, yani indekslarning yuqorida yoki quyida joy-lashtirishning farqi bo'lmaydi.

Diskriminant va Levi-Chivita tenzorlari (10.10)ga ko'ra yakobiani musbat bo'lgan almashtirishlar uchun kiritildi. Quyida $J < 0$ bo'lgan hollarni ham qarash mumkinligi ko'rsatiladi. Ortogonal dekart koordinata sistemasi y^α ni ξ^q sistemasiga va y^α ni η^r sistemasiga almashtirish matritsalarining determinantlari (4.9)ga binoan quyidagi ko'rinishga ega:

$$(\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial y^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial y^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial y^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial y^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}, (\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial y^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial y^3}{\partial \eta^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial \eta^2} & \frac{\partial y^2}{\partial \eta^2} & \frac{\partial y^3}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial \eta^3} & \frac{\partial y^2}{\partial \eta^3} & \frac{\partial y^3}{\partial \eta^3} \end{vmatrix}$$

Determinantlarning hossasiga ko'ra ularning nisbati ξ^q sistemani η^r sistemaga almashtirish matritsasining determinanti - yakobianga teng bo'ladi:

$$\frac{(\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3)}{(\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3)} = \left| \frac{\partial \eta^r}{\partial \xi^q} \right| = J \quad (7.27)$$

Levi-Chivita tenzorining komponentalarini almashtirish qoidasi (7.7) va (7.17) formulalarga ko'ra quyidagi ko'rinishga ega.

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = \frac{(\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_3)}{(\hat{\varepsilon}_1 \hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_3)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k} = J \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \eta^k} \quad (7.28)$$

Xususan, ξ^q va η^r ortogonal dekart koordinata sistemalari bo'lsa, $J = \pm 1$ bo'ladi.

Demak, Levi-Chivita tenzori komponentalarini almashtirish formulasi (7.21) yuqorida tenzorning komponentalari uchun berilgan (7.1) formuladan J vazni bilan farq qiladi.

Ta'rif: Almashtirish formulalari vaznli bo'lgan, yani komponentalari

$$\hat{T}_{\beta_1}^{\beta_2 \dots \beta_n} = J^m T_{\alpha_1}^{\alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial \xi^{\alpha_1}}{\partial \eta^{\beta_1}} \frac{\partial \eta^{\beta_2}}{\partial \xi^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial \eta^{\beta_n}}{\partial \xi^{\alpha_n}} \quad (7.29)$$

qoida bilan almashadigan ob'ektlar psevdotenzor deb ataladi.

Bu munosabat, xususan $m = 0$ bo'lganda, tenzor komponentalarini almashtirish formulasi (7.6) ko'rinishni oladi. Demak, psevdotenzorlar tenzor tushunchasini umumlashtirishdir.

8-mavzu: Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar. Shar va deviator tenzori. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Harakteristik tenglama. Tenzorning hos vektorlari.

Reja:

1. Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar;
2. Shar va deviator tenzori;
3. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari;
4. Harakteristik tenglama;
5. Tenzorning hos vektorlari.

2-rang T tenzor uchun qu'yidagi formulalar o'rinli:

$$T = T_{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}^\beta = T_{\beta}^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_\alpha \bar{\mathcal{E}}^\beta = T_{\alpha}^{\beta} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta = T^{\alpha\beta} \bar{\mathcal{E}}_\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta \quad (11.1)$$

Muayyan koordinata sistemasida 2-rang tenzorga to'rtta turli uchinchi tartibli kvadrat matritsalar mos keladi:

$$A_1 = \|T_{\alpha\beta}\|, \quad A_2 = \|T_{\beta}^{\alpha}\|, \quad A_3 = \|T_{\alpha}^{\beta}\|, \quad A_4 = \|T^{\alpha\beta}\| \quad (11.2)$$

Bu tengliklarda hamma birinchi indekslar matritsa elementi joylashgan satrning, ikkinchilari esa - ustunning nomerini ko'rsatadi.

Agar

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma} T_{\beta}^{\sigma} = T_{\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\beta} = g_{\alpha\sigma} T^{\sigma\tau} g_{\tau\beta}$$

munosabatlarni hisobga olib, matritsalarini ko'paytirish qoidasini eslasak,

$$A_1 = g_* A_2 = A_3 g_* = g_* A_4 g_*, \quad g_* = \|g_{\alpha\gamma}\| \quad (11.3)$$

tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, $A_i (i = \overline{1, 4})$ matritsalarining birontasi ma'lum bo'lsa, qolganlarini (11.3) dan foydalanib aniqlash qiyin emas.

2-rang tenzorlar uchun kiritilgan qo'shish, ko'paytirish, skalyar ko'paytirish amallariga mos kelgan amallar matritsalar uchun ham o'rinli. Bu esa matritsani hisoblash usullari va unda olingan natijalarni tenzor hisob nazariyasida ham qo'llash mumkinligini bildiradi.

Ma'lum bir koordinata sistemasida A_i larning birontasi berilgan bo'lsa, (11.2) va (11.3) tengliklarga binoan shu sistemada T tenzor ham aniqlangan bo'ladi. Shunday qilib, 2-rang tenzorlar va uchinchi tartibli matritsalar orasida bir qiymatli moslik mavjud.

2-rang tenzorlarni simmetrik va antisimmetrik tenzorlar orqali ifodalash ham mumkin.

Ixtiyoriy 2-rang tenzorning kovariant komponentalarini simmetrik va antisimmetrik tenzor komponentalarining yig'indisi shaklida yozish mumkin:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}) = T_{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]} \quad (12.1)$$

Teorema: Har bir 2-rang tenzor uchun (12.1) ko'rinish yagonadir.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, yani (12.1) bilan birga

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta} \quad (12.2)$$

tenglik ham o'rinli bo'lsin. Bu yerda S - simmetrik ($S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$), A esa antisimmetrik ($A_{\beta\alpha} = -A_{\alpha\beta}$) tenzorlar bo'lgani uchun (12.1) va (12.2) lardan quyidagilar hosil bo'ladi:

$$T_{(\alpha\beta)} + T_{[\alpha\beta]} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta} \quad (12.3)$$

$$T_{(\beta\alpha)} + T_{[\beta\alpha]} = S_{\beta\alpha} + A_{\beta\alpha} \quad (12.4)$$

Bu tengliklarni chap va o'ng tomonlarini mos ravishda qo'shsak,

$$T_{(\alpha\beta)} + T_{(\beta\alpha)} + T_{[\alpha\beta]} + T_{[\beta\alpha]} = S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} + A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$$

$$2 T_{(\alpha\beta)} = 2 S_{\alpha\beta} \Rightarrow T_{(\alpha\beta)} = S_{\alpha\beta} \quad (12.5)$$

munosabat kelib chiqadi.

Endi (12.3) va (12.4) tengliklarni hadma-had ayirsak,

$$T_{(\alpha\beta)} - T_{(\beta\alpha)} + T_{[\alpha\beta]} - T_{[\beta\alpha]} = S_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha} + A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}$$

munosabat kelib chiqadi. Bu yerda

$$2 T_{[\alpha\beta]} = 2 A_{\alpha\beta} \Rightarrow T_{[\alpha\beta]} = A_{\alpha\beta} \quad (12.6)$$

ekanligini ko'ramiz. (12.5) va (12.6) lardan esa (12.1) ko'rinishning yagonaligi kelib chiqadi. Shunday qilib, 2-rang T tenzor uchun yagona quyidagi ko'rinish o'rinli;

$$T = S + A \quad (12.7)$$

S va A lar (12.5) va (12.6) formulalar bilan aniqlanadi. T, S, A tenzorlarning birinchi invariantlarini

$$J_1^T = T_{\alpha}^{\alpha}, \quad J_1^S = S_{\alpha}^{\alpha}, \quad J_1^A = A_{\alpha}^{\alpha}$$

deb belgilaylik. Qo'sh o'ram haqidagi teorema ko'ra antisimmetrik tenzorning birinchi invarianti

$$J_1^A = A_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = 0$$

ekanligini topamiz. Bu yerdan va (12.7) formuladan

$$J_1^T = J_1^S + J_1^A = J_1^S \quad (12.8)$$

tenglik, yani tenzor va uning simmetrik qismining birinchi invariantlari teng ekanligi kelib chiqadi.

Shar va deviator tenzori.

Ta'rif: 2-rang P tenzor metrik tenzordan skalyar ko'paytma bilangina farq qilsa, u tenzor shar tenzori deb ataladi;

$$P = f G, \quad P_{\beta}^{\alpha} = f \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (12.9)$$

Demak, shar tenzorning birinchi invarianti

$$J_1^P = P_{\alpha}^{\alpha} = f \delta_{\alpha}^{\alpha} = 3f \quad (12.10)$$

bo'ladi.

Ta'rif: 2-rang simmetrik D tenzorning birinchi invarianti J_1^D nolga teng bo'lsa, D tenzor deviator tenzori deb ataladi.

Ixtiyoriy 2-rang simmetrik tenzor S ga quyidagi formula asosida deviator tenzorni mos keltirish mumkin:

$$D = S - P, \quad P = \frac{1}{3} J_1^S G \quad (12.11)$$

Bu yerda D deviator ekanligini isbotlash uchun $J_1^D = 0$ ekanligini ko'rsatish kerak. Haqiqatan,

$$J_1^D = D_{\alpha}^{\alpha} = S_{\alpha}^{\alpha} - P_{\alpha}^{\alpha} = S_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{3} J_1^S \delta_{\alpha}^{\alpha} = J_1^S - \frac{1}{3} J_1^S \cdot 3 = 0$$

Demak, 2-rang simmetrik tenzor S ni

$$S = P + D \quad (12.12)$$

ko'rinishida, yani shar va deviator tenzorning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Ixtiyoriy T tenzorni (12.7) va (12.12) ga asosan ushbu

$$T = P + D + A$$

yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerda (12.8) va (12.11)ga asosan shar tenzorini $P = \frac{1}{3} J_1^T G$ formula bilan ifodalash mumkin.

Tarif: 2-rang T va T^{-1} tenzorlarning skalyar ko'paytmasi metrik tenzorga teng bo'lsa,

$$T \cdot T^{-1} = G$$

ular o'zaro teskari tenzorlar deb ataladi.

2-rang T tenzor uchun, umuman olganda, ikkita teskari tenzor mavjud: T_1^{-1} - chap teskari tenzor, T_2^{-1} - o'ng teskari tenzor

$$T_1^{-1} \cdot T = G, \quad T \cdot T_2^{-1} = G$$

Lekin $T_1^{-1} = T_2^{-1}$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Buning uchun birinchi tenglikni o'ng tomonidan T_2^{-1} ga skalyar ko'paytirib, ikkinchi tenglikdan va assotsiativlik qonunidan foydalanish yetarli;

$$T_1^{-1} \cdot (T \cdot T_2^{-1}) = G \cdot T_2^{-1} = T_2^{-1} \Rightarrow T_1^{-1} \cdot G = T_2^{-1} \Rightarrow T_1^{-1} = T_2^{-1}$$

Endi teskari tenzor yagona ekanligini ko'rsatamiz. Ikkita T^{-1} va Q teskari tenzorlar mavjud deb faraz qilsak,

$$T \cdot T^{-1} = TQ$$

tenglik o'rinli bo'lar edi.

Endi bu tenglikni chapdan T^{-1} ko'paytirib assotsiativlik qonunidan foydalanish kifoya:

$$(T^{-1} \cdot T) \cdot T^{-1} = (T^{-1} \cdot T) \cdot Q \Rightarrow G \cdot T^{-1} = G \cdot Q \Rightarrow T^{-1} = Q$$

Ta'rif: Agar T tenzorning determinanti $|T_m^l|$ nolga teng bo'lsa, u xos tenzor deb ataladi.

10 §. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Xarakteristik tenglama.

Malumki, 2-rang tenzorga ikkita

$$\bar{b} = T \cdot \bar{a}, \quad \bar{b}' = \bar{a} \cdot T \quad (13.1)$$

chiziqli vektor-funktsiyalarni mos keltirish mumkin. Bu formulalardagi T tenzorga $\bar{a}$ vektorning uzunligini va yo'nalishini o'zgartiruvchi operator deb qarash mumkin.

Ta'rif: Agar T tenzorning ta'siri natijasida $\bar{a}$ vektorning faqat uzunligi o'zgarsa, yani shunday λ va μ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$\bar{b} = \lambda \bar{a} \quad \text{yoki} \quad \bar{b}' = \mu \bar{a} \quad (13.2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\bar{a}$ vektorning yo'nalishi T tenzorning bosh yo'nalishi deb ataladi.

Bu holda (13.1) tengliklarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin;

$$\lambda \bar{a} = T \cdot \bar{a} \Rightarrow (\lambda G - T) \cdot \bar{a} = 0 \Rightarrow (\lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha}) a^{\beta} = 0 \quad (13.3)$$

$$\mu \bar{a} = \bar{a} \cdot T \Rightarrow \bar{a} (\mu G - T) = 0 \Rightarrow (\mu \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha}) a^{\beta} = 0 \quad (13.4)$$

Shunday qilib, tenzorning bosh yo'nalishini aniqlash masalasi (13.3), (13.4) sistemalarning noldan farqli yechimlarini topish masalasiga keltirildi. Bunday yechimlar mavjud bo'lishi uchun esa (13.3), (13.4) sistemaning determinanti nolga teng bo'lishi kerak:

$$|\lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha}| = 0, \quad |\mu \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha}| = 0 \quad (13.5)$$

Ikkinchi tomondan, bu yerda indeksnlarni ko'tarish (tushirish) qoidasiga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$\lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} = g_{\beta\sigma} \left(\lambda \delta_{\tau}^{\sigma} - T_{\tau}^{\sigma} \right) g^{\tau\alpha}$$

tenglikdan va matritsalarini ko'paytirish qoidasidan ushbu

$$\left| \lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right| = g \left| \lambda \delta_{\tau}^{\sigma} - T_{\tau}^{\sigma} \right| g_1 = \left| \lambda \delta_{\tau}^{\sigma} - T_{\tau}^{\sigma} \right|$$

munosabatlar kelib chiqadi. Bundan (13.3), (13.4) tenglamalar bitta

$$\left| \lambda \cdot \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right| = 0 \quad (13.6)$$

tenglama ekanligini ko'ramiz.

Ta'rif: (13.6) tenglama T tenzorning xarakteristik tenglamasi deb ataladi.

Xarakteristik tenglama invariant ekanligini, yani turli koordinata sistemalarida determinantning qiymati o'zgarmasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\lambda G - T$ tenzorning aralash komponentalarining ushbu

$$\lambda \hat{\delta}_{\nu}^{\mu} - \hat{T}_{\nu}^{\mu} = \left(\lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right) \frac{\partial \eta^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{\nu}}$$

almashtirish formulalarini determinantlar orqali yozish kifoya:

$$\left| \hat{\delta}_{\nu}^{\mu} - \hat{T}_{\nu}^{\mu} \right| = \left| \lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right| J \cdot J^{-1} = \left| \lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right|$$

demak, xarakteristik tenglamaning invariantligi isbotlandi.

11 §. Tenzorning xos vektorlari

Xarakteristik tenglamaning hamma yechimlari haqiqiy va turli bo'lgan holni ko'raylik. Mazkur

λ_{ρ} ($\rho = 1, 2, 3$) ildizlarni (13.3) va (13.4) tenglikka keltirib qo'ysak,

$$\lambda_{\rho} \bar{a}_{\rho} = T \bar{a}_{\rho}, \quad \left(\lambda_{\rho} \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right) a_{\rho}^{\beta} = 0 \quad (13.7)$$

$$\lambda_{\rho} \bar{a}'_{\rho} = \bar{a}'_{\rho} \cdot T, \quad \left(\lambda_{\rho} \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \right) a'^{\beta}_{\rho} = 0 \quad (13.8)$$

tenglamalarni olamiz. Ular, umuman olganda, turli $\bar{a}_{\rho}$ va $\bar{a}'_{\rho}$ vektorlar uchligini aniqlaydi. Bu vektorlar T tenzorning bosh yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, tenzorning xos vektorlari deb ataladi. Xarakteristik tenglamaning turli ildizlariga mos kelgan xos vektorlar o'zaro chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz. Teskarisini, yani $\bar{a}_{\rho}$ vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq deb faraz qilamiz:

$$c^1 \bar{a}_1 + c^2 \bar{a}_2 + c^3 \bar{a}_3 = 0$$

Bu tenglikni chap tomondan T tenzorga skalyar ko'paytirsak va (13.7) munosabatlardan foydalansak,

$$\lambda_1 c^1 \bar{a}_1 + \lambda_2 c^2 \bar{a}_2 + \lambda_3 c^3 \bar{a}_3 = 0 \quad (13.9)$$

tenglikni olamiz. Shu amalni (13.9) ga qo'llab esa

$$\lambda_1^2 c^1 \bar{a}_1 + \lambda_2^2 c^2 \bar{a}_2 + \lambda_3^2 c^3 \bar{a}_3 = 0 \quad (13.10)$$

tenglikni olamiz. Ushbu bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli $c^1 \bar{a}_1, c^2 \bar{a}_2, c^3 \bar{a}_3$ yechimlarga ega bo'lgani uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi kerak. Lekin bu determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Bu yerdan $c^1 = c^2 = c^3 = 0$ va demak, $\bar{a}_\rho$ vektorlar chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi. Shunga o'xshash a'_ρ vektorlar ham chiziqli erkli ekanligi ko'rsatiladi.

Endi $\bar{a}_\rho$ va a'_ρ vektorlarning o'zaro munosabatlarini aniqlaymiz. Buning uchun (13.8) ni $\bar{a}_\mu$ ga skalyar ko'paytirib (13.7) larni hisobga olsak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}\lambda_\rho \bar{a}'_\rho \cdot \bar{a}_\mu &= (\bar{a}'_\rho \cdot T) \cdot \bar{a}_\mu = \bar{a}'_\rho \cdot (T \cdot \bar{a}_\mu) = \\ &= \lambda_\mu \bar{a}'_\rho \cdot \bar{a}_\mu \Rightarrow (\lambda_\rho - \lambda_\mu) \bar{a}'_\rho \cdot \bar{a}_\mu = 0\end{aligned}$$

Bu yerdan

$$\bar{a}'_\rho \cdot \bar{a}_\mu = 0, \quad \rho \neq \mu; \quad \bar{a}'_\rho \cdot \bar{a}_\mu = f, \quad \rho = \mu \quad (13.11)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda f - ixtiyoriy chegaralangan miqdor. Shu tufayli $f = 1$ deb olsa bo'ladi. Unda (13.11) ga o'zarolik munosabatlari deb qaralsa, $\bar{a}_\rho$ va $\bar{a}'_\rho$ vektorlar o'zaro uchlik vektorlar bo'ladi.

9-mavzu: Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi. Tenzorning asosiy invariantlari. Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.

12 §. Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi

Koordinata bazisi sifatida xos vektorlar uchligi $\bar{a}_\rho$ larni ($\bar{\vartheta}_\rho = \bar{a}_\rho$) olinsa, (13.1) vektor funksiyalarni ushbu ko'rinishda yozish mumkin;

$$T \cdot \bar{\vartheta}_\beta = T^i_j \bar{\vartheta}_i \bar{\vartheta}^j \cdot \bar{\vartheta}_\beta = T^i_\beta \bar{\vartheta}_i \Rightarrow \bar{\vartheta}^\alpha \cdot (T \cdot \bar{\vartheta}_\beta) = T^\alpha_\beta$$

$$\bar{\vartheta}_\alpha \cdot T = T^j_i \bar{\vartheta}_\alpha \cdot \bar{\vartheta}^i \bar{\vartheta}_j = T^j_\alpha \bar{\vartheta}_j \Rightarrow (\bar{\vartheta}_\alpha \cdot T) \cdot \bar{\vartheta}^\beta = T^\beta_\alpha$$

Bu yerda (13.7) ga ko'ra

$$\bar{\vartheta}^\alpha \cdot (T \cdot \bar{\vartheta}_\beta) = \bar{\vartheta}^\alpha \cdot \lambda_\beta \bar{\vartheta}_\beta = \lambda_\beta \delta^\alpha_\beta$$

tenglik o'rinli.

Demak, T tenzorning aralash komponentalari

$$T^\alpha_\beta = \lambda_\beta \delta^\alpha_\beta \quad (13.12)$$

qiymatlarni qabul qiladi. Ushbu tenzorning matritsasi esa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A_2 = \|T^\alpha_\beta\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (13.13)$$

Shunga o'xshash, $\bar{\vartheta}_\alpha = \bar{a}'_\alpha$ deb qabul qilsak, $T^\beta_\alpha = \lambda_\beta \delta^\beta_\alpha$ tenglik o'rinli bo'ladi va A_3 matritsa diagonal ko'rinishni oladi:

$$A_3 = \|T^\beta_\alpha\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (13.14)$$

Mazkur (13.13) va (13.14) matritsalar tenzorning kanonik ko'rinishi deb ataladi. Shu matritsalarining noldan farqli λ_β komponentalari esa, tenzorning bosh qiymatlari (komponentalari) deb ataladi.

13 §. Tenzorning asosiy invariantlari.

2-rang tenzorning komponentalaridan tuzilgan determinantni yoyib yozilsa, (13.6) tenglama ushbu

$$|\lambda \delta_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha}| = I_0 \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (13.16)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning koeffitsientlari quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$I_0 = 1,$$

$$I_1 = \frac{1}{3} (\delta_{\omega}^{\gamma} T_{\gamma}^{\omega} + \delta_{\tau}^{\beta} T_{\beta}^{\tau} + \delta_{\sigma}^{\alpha} T_{\alpha}^{\sigma}) = \frac{1}{3} (T_{\omega}^{\omega} + T_{\tau}^{\tau} + T_{\sigma}^{\sigma}) = T_{\sigma}^{\sigma} = J_1 \quad (13.17)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (J_1^2 - J_2)$$

$$I_3 = |T_m^{\sigma}| = \frac{1}{6} (J_1^3 - 3J_1 J_2 + 2J_3)$$

Bu yerda J_i ($i = \overline{1,3}$) - tenzorning o'ramlari

$$J_0 = 1, \quad J_1 = T_{\sigma}^{\sigma}, \quad J_2 = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\alpha}^{\sigma}, \quad J_3 = T_{\sigma}^{\alpha} T_{\tau}^{\sigma} T_{\alpha}^{\tau}$$

Demak, I_{α} koeffitsientlari ($\alpha = \overline{1,3}$) ham invariant miqdorlar bo'lib, ular bosh invariantlar deb ataladi. Endi (13.16) tenglamaning koeffitsientlari va ildizlari orasidagi munosabatlarni hisobga olinsa, bosh invariantlarning bosh komponentalari orqali ifodasi kelib chiqadi:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (13.18)$$

15 §. **Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash. Kristoffel belgilari va ularning xossalari.**

Bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga o'tganda $\bar{\Theta}_{\alpha} = \bar{\Theta}_{\alpha}(x^1, x^2, x^3)$ va $\bar{\Theta}^{\alpha} = \bar{\Theta}^{\alpha}(x^1, x^2, x^3)$

($\alpha = 1, 2, 3$) bazis vektorlarning o'zgarish tezligi koordinata bo'yicha olingan hosila bilan tariflanadi.

Hosila olish natijasi yana vektor miqdorni beradi:

$$\bar{\Theta}_{\alpha} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \bar{k}_{\gamma} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^2 y^{\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \bar{k}_{\gamma}$$

Demak, bazis vektorlarning hosilasini kovariant va kontravariant bazislarda yoyish mumkin:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \bar{\Theta}_{\sigma} = \Gamma_{\tau\alpha\beta} \bar{\Theta}^{\tau} \quad (14.1)$$

Ta'rif: (14.1) yoyilmaning $\Gamma_{\tau\alpha\beta}$ va $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ koeffitsientlari birinchi xil va ikkinchi xil Kristoffel belgilari deb ataladi.

Kristoffel belgilari quyidagi xossalarga ega:

1) (14.1) tenglikni $\bar{\Theta}_{\gamma}(\bar{\Theta}^{\gamma})$ ga hadma-had skalyar ko'paytiramiz:

$$\bar{\Theta}_{\gamma} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\tau\alpha\beta} \bar{\Theta}^{\tau} \cdot \bar{\Theta}_{\gamma}$$

$$\bar{\Theta}^{\gamma} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \bar{\Theta}_{\sigma} \cdot \bar{\Theta}^{\gamma}$$

Endi o'zarolik munosabatlarini $((\bar{\Theta}^{\tau} \cdot \bar{\Theta}_{\gamma}) = \delta_{\gamma}^{\tau}, (\bar{\Theta}_{\sigma} \cdot \bar{\Theta}^{\gamma}) = \delta_{\sigma}^{\gamma})$

eslasak, Kristoffel belgilari

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \bar{\Theta}_{\gamma} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \bar{\Theta}^{\sigma} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (14.2)$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

2) Bazislarning vektorlarning ta'rifiga ko'ra:

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \bar{\mathcal{E}}_\gamma \cdot \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^\gamma = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \cdot \bar{\mathcal{E}}^\gamma$$

tengliklar o'rinlidir.

Bu yerdan

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha}, \quad \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\cdot\beta\alpha}^\gamma \quad (14.3)$$

ekanligi, ya'ni Kristoffel belgilari oxirgi ikkita erkin indeksleri bo'yicha simmetrik ekanligi kelib chiqadi.

Bazislarning yoyilmasidan foydalanib, ushbu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\alpha\beta} &= g_{\gamma\omega} \bar{\mathcal{E}}^\omega \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_\alpha}{\partial x^\beta} = g_{\gamma\omega} \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^\omega \\ \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^\gamma &= g^{\gamma\omega} \bar{\mathcal{E}}_\omega \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_\alpha}{\partial x^\beta} = g^{\gamma\omega} \Gamma_{\omega\alpha\beta} \end{aligned} \quad (14.4)$$

munosabatlarni olamiz. Bu tengliklardan Kristoffel belgilari uchun ham indekslni ko'tarish va tushirish umumiy qoidalari o'rinli ekanligini kelib chiqadi.

3) Kristoffel belgilarini metrik tenzor komponentalari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun

$$g_{\gamma\alpha} = \bar{\mathcal{E}}_\gamma \cdot \bar{\mathcal{E}}_\alpha$$

tenglikdan x^β bo'yicha hosila olamiz:

$$\bar{\mathcal{E}}_\gamma \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_\alpha}{\partial x^\beta} + \bar{\mathcal{E}}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}_\gamma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}$$

Bu tenglik, (14.2) ni hisobga olib, quyidagicha yoziladi:

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \quad (14.5)$$

Bu yerda α, β, γ indekslni siklik almashtirsak, yani $g_{\alpha\beta}$ dan x^γ bo'yicha hosila olsak, (14.5) ga o'xshash

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \quad (\gamma \quad \beta) \quad (14.6) \rightleftarrows$$

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \quad (\beta \quad \alpha) \quad \rightleftarrows (14.7)$$

munosabatlarni olamiz.

Endi (14.6) ga (14.7) ni qo'shib, natijadan (14.5) ni ayirsak va (14.3) ni hisobga olsak, birinchi tur Kristoffel belgilari uchun

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \right) \quad (14.8)$$

formulani topamiz. Bu yerdan (14.7) yordamida ikkinchi tur Kristoffel belgilari uchun

$$\Gamma_{\cdot\gamma\alpha}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\omega} \cdot \left(\frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\omega\alpha}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\omega} \right) \quad (14.9)$$

formula kelib chiqadi.

5) Kontravariant koordinata bazisi vektorlaridan koordinatalar bo'yicha hosila ushbu yoyilmalar ko'rinishida yoziladi:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} = G_{\cdot\beta\sigma}^\alpha \bar{\mathcal{D}}^\sigma = G_{\beta}^{\alpha\tau} \bar{\mathcal{D}}_\tau \quad (14.10)$$

Bu yerdan yoyilmalarning koeffitsientlari

$$G_{\cdot\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \cdot \bar{\mathcal{D}}_\gamma, \quad G_{\beta}^{\alpha\gamma} = \bar{\mathcal{D}}^\gamma \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \quad (14.11)$$

formulalar bilan aniqlanishini osonlik bilan topiladi. Bu koeffitsientlarni Kristoffel belgilari orqali ham ifodalash mumkin:

$$G_{\cdot\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \cdot \bar{\mathcal{D}}_\gamma = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} (\bar{\mathcal{D}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{D}}_\gamma) - \bar{\mathcal{D}}^\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_\gamma}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} = -\Gamma_{\cdot\gamma\beta}^\alpha = -\Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha \quad (14.12)$$

$$G_{\beta}^{\alpha\gamma} = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \cdot \bar{\mathcal{D}}^\gamma = \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \cdot \bar{\mathcal{D}}_\sigma g^{\sigma\gamma} = -\Gamma_{\cdot\beta\sigma}^\alpha g^{\sigma\gamma} \quad (14.13)$$

Demak, (14.10) ning o'rniga

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{D}}^\alpha}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} = -\Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha \bar{\mathcal{D}}^\gamma = -\Gamma_{\cdot\beta\sigma}^\alpha g^{\sigma\gamma} \bar{\mathcal{D}}_\gamma \quad (14.14)$$

formulalarni yozsa bo'ladi.

Shunday qilib, kovariant va kontravariant bazis vektorlarning fazoning ixtiyoriy nuqtasi atrofida o'zgarishi (14.1) va (14.14) formulalar bilan beriladi.

6) Aralash ko'paytmaning koordinatalar bo'yicha hosilasini ko'paytmadan hosila olish qoidasiga ko'ra (14.1) yordamida hisoblaymiz:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} = \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_1}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \bar{\mathcal{D}}_2 \bar{\mathcal{D}}_3 \right) + \left(\bar{\mathcal{D}}_1 \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_2}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \bar{\mathcal{D}}_3 \right) + \left(\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_3}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta} \right)$$

Aralash ko'paytma uchun ($\bar{\mathcal{D}}_i \bar{\mathcal{D}}_i \bar{\mathcal{D}}_j = 0$) tenglik o'rinli ekanligini va (14.1) ni etiborga olsak, bu formula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\alpha} &= \Gamma_{\cdot 1\alpha}^\sigma (\bar{\mathcal{D}}_\sigma \bar{\mathcal{D}}_2 \bar{\mathcal{D}}_3) + \Gamma_{\cdot 2\alpha}^\sigma (\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_\sigma \bar{\mathcal{D}}_3) + \Gamma_{\cdot 3\alpha}^\sigma (\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 \bar{\mathcal{D}}_\sigma) = \\ &= (\Gamma_{\cdot 1\alpha}^1 + \Gamma_{\cdot 2\alpha}^2 + \Gamma_{\cdot 3\alpha}^3) (\bar{\mathcal{D}}_1 \bar{\mathcal{D}}_2 \bar{\mathcal{D}}_3) = \Gamma_{\cdot \sigma\alpha}^\sigma \sqrt{g} \end{aligned}$$

ko'rinishini oladi, yani

$$\Gamma_{\cdot \sigma\alpha}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\alpha} \quad (14.15)$$

formula hosil bo'ladi.

Kristoffel belgilari uchun quyidagi almashtirish formulalari o'rinli.

Bazis vektorlarini almashtirish formulalariga va (14.2) tengliklarga asoslanib, qo'yidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\cdot\mu\nu}^\lambda &\equiv \hat{\mathcal{D}}^\lambda \cdot \frac{\partial \hat{\mathcal{D}}_\mu}{\partial \xi^\nu} = \left(\bar{\mathcal{D}}^\alpha \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\alpha} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \left(\bar{\mathcal{D}}_\beta \frac{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta}{\partial \xi^\mu} \right) = \\ &= \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\alpha} \left(\bar{\mathcal{D}}^\alpha \cdot \bar{\mathcal{D}}_\beta \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{X}}^\beta}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \bar{\mathcal{D}}^\alpha \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_\beta}{\partial \bar{\mathcal{X}}^\gamma} \frac{\partial \bar{\mathcal{X}}^\gamma}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial \bar{\mathcal{X}}^\beta}{\partial \xi^\mu} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} \equiv \hat{\mathcal{D}}_{\lambda} \cdot \frac{\hat{\mathcal{D}}_{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} = \left(\bar{\mathcal{D}}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^{\nu}} \left(\bar{\mathcal{D}}_{\beta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} \right) =$$

$$= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \left(\bar{\mathcal{D}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathcal{D}}_{\beta} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu} \partial \xi^{\nu}} + \bar{\mathcal{D}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{D}}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\nu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} \right)$$

yoki

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \xi^{\mu} \partial \xi^{\nu}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\nu}} \right) \quad (14.16)$$

$$\hat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu} \partial \xi^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\nu}} \right) \quad (14.17)$$

Bu formulalar Kristoffel belgilari uchun almashtirish qonunlarini beradi. Ular tenzor komponentalarini almashtirish qoidasidan farq qiladi va Kristoffel belgilari, umuman olganda, tenzor komponentalari bo'lmaydi. Lekin $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ almashtirish formulalari chiziqli bo'lsa, (14.16) va (14.17) lardagi ikkinchi tartibli hosilalar nolga teng bo'ladi va ular tenzor komponentalarini almashtirish qonunlariga aylanadi. Demak, koordinatalarni affin almashtirishda Kristoffel belgilari tenzor komponentalari bo'ladi.

Kristoffel belgilarining ortogonal koordinata sistemasidagi ko'rinishi.

Agar x^{α} koordinata sistemi ortogonal bo'lsa, metrik tenzor komponentalari uchun

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad g^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}^{-1}$$

tengliklar o'rinni bo'adi. Bundan foydalanib, Kristoffel belgilarining indeksleri turli bo'lsa quidagicha;

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) = 0 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha),$$

ikkita oxirgi indeksleri bir-biriga teng bo'lsa esa;

$$\Gamma_{\beta\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (\alpha \neq \beta),$$

birinchi indeks ikkinchisiga yoki uchinchisiga teng bo'lsa

$$\Gamma_{\beta\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}},$$

va nihoyat indekslarning hammasi bir-biriga teng bo'lsa

$$\Gamma_{\beta\beta\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

Demak, fazoning metrikasi berilgan bo'lsa, Kristoffel belgilari quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = 0 \quad (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta),$$

$$\Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad (14.18)$$

$$\Gamma_{\beta\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \Gamma_{\beta\beta\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}}$$

Turli xildagi Kristoffel belgilari orasida quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lganligi tufayli

$$\Gamma_{\cdot\gamma\alpha}^{\beta} = g^{\beta\omega} \Gamma_{\omega\gamma\alpha} = g^{\beta\beta} \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{g_{\beta\beta}} \Gamma_{\beta\gamma\alpha}$$

ikkinchi xil Kristoffel belgilari uchun (14.18) ga ko'ra ushbu

$$\begin{aligned} \Gamma_{\cdot\gamma\alpha}^{\beta} &= 0 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha) \\ \Gamma_{\cdot\alpha\alpha}^{\beta} &= -\frac{1}{2g_{\beta\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{\partial_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \alpha}{\partial x^{\beta}} \quad (\beta \neq \alpha) \quad (14.19) \\ \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^{\beta} &= \frac{1}{2g_{\beta\beta}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\partial^{\beta}} \frac{\partial \beta}{\partial x^{\alpha}} \end{aligned}$$

formulalarni olamiz. (14.18) va (14.19) larda yig'indi olish amali bajarilmaydi.

10-mavzu: Kristoffel belgilari va ularning xossalari.

7. Kristoffel simvollarini hisoblash

Quyida Kristoffel simvollarini hisoblash masalasi bilan shug'ullanamiz. Oldindan aytish kerakki, simvollar har qanday tenzorning komponentalari bo'la olmaydilar. Ma'lumki, Evklid fazosida $\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i}$

bazis vektorlari kabi aniqlangan edi, bundan

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}_i}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{\epsilon}_j}{\partial \eta^i}. \quad (6.13)$$

Agar (6.8) ifodani hisobga olsak, (6.13) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Gamma_{ij}^k \vec{\epsilon}_k = \Gamma_{ij}^k \vec{\epsilon}_k$$

Bu tenglik Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini, ya'ni $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ekanligini ko'rsatadi. Kristoffel simvollarini fundamental metrik tenzor komponentalari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun quyidagi munosabatlar qaraladi:

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial (\vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_s)}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \vec{\epsilon}_j}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_s + \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_j, \quad \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{\epsilon}_k}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_s + \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_k,$$

bu tengliklarni

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_j = \frac{\partial \vec{\epsilon}_j}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_s = \Gamma_{jk}^l \vec{\epsilon}_l \cdot \vec{\epsilon}_s = \Gamma_{jk}^l g_{ls}; \quad \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_k = \frac{\partial \vec{\epsilon}_k}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_s = \Gamma_{kj}^l \vec{\epsilon}_l \cdot \vec{\epsilon}_s = \Gamma_{kj}^l g_{ls}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi bu ifodalarni hadma-had qo'shib, Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini hisobga olsak,

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \left(\frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_j + \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_k \right) = 2\Gamma_{jk}^l g_{ls} \quad (6.14)$$

ifodaga ega bo'lamiz va (6.13) tenglikdan foydalanib, qavslar ichidagi ifodani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^k} \cdot \vec{\epsilon}_j + \frac{\partial \vec{\epsilon}_s}{\partial \eta^j} \cdot \vec{\epsilon}_k = \frac{\partial \vec{\epsilon}_k}{\partial \eta^s} \cdot \vec{\epsilon}_j + \frac{\partial \vec{\epsilon}_j}{\partial \eta^s} \cdot \vec{\epsilon}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s}.$$

Bu tengliklarni hisobga olgan holda (6.14) ning ikkala tomonini $\frac{1}{2} g^{si}$ ga ko'paytirsak,

$$\frac{1}{2} g^{si} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right) = \Gamma_{jk}^l g_{ls} g^{si} = \Gamma_{jk}^l \delta_l^i$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan izlanayotgan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{si} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right). \quad (6.15)$$

Quyidagi koordinatalar sistemasini almashtirganda Kristoffel simvollarini almashtirish formulasini isbotsiz keltiramiz:

$$\Gamma_{ij}^{\gamma'} = \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} \right) \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}},$$

bu yerda $\Gamma_{ij}^{\prime k} - \eta^i$ koordinatalar sistemasidagi Γ_{ij}^k lar esa ξ^i koordinatalar sistemasidagi Kristoffel simvollaridir.

8. Riman – Kristoffel tenzori va uning xossalari

Evklid fazosi uchun yaroqli bo'lgan Dekart koordinatalari sistemasini kiritish mumkinki, bunday sistemada fundamental metrik tenzorning komponentalari o'zgarmas bo'ladi, ya'ni $g_{ik} = \text{const}$. U holda bu fazoning har bir nuqtasi uchun $\Gamma_{ij}^{\gamma'} = 0$. Agar fazo Riman fazosi bo'lsa, o'tish matrisasining determenanti 0 dan farqli, ya'ni

$$\text{Det} \left\| \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^{\omega}} \right\| \neq 0$$

bo'lganligi uchun (5.5) formulaga asosan,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = 0 \quad (6.16)$$

tenglik bajarilishi kerak bo'ladi. Demak, (6.16) tenglamalar tenglik bajariladigan koordinatalar sistemasini aniqlovchi tenglamalar sifatida qaralishi mumkin. Agar fazoning Evklid fazosi bo'lishligini talab qilinsa, (6.16) tenglamalar sistemi bilan ξ^{α} koordinatalar sistemasini η^j Dekart koordinatalar sistemi bilan almashtirish differensial tenglamalar sistemi bo'ladi. Umumiy holda bu sistemani integrallab bo'lmaydi. Shunday bo'lsada fazoning Evklid fazosi bo'lishligi sharti (5.6) tenglamalar sistemasining integrallanish sharti bilan bir xil bo'ladi. Bu shartlarni esa topish mumkin. Buning uchun (6.16) tenglamalarni η^k koordinatalar boyicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^k} \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0$$

va (6.16) ga asosan ikkinchi tartibli hosilalarni quyidagicha almashtiramiz

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}; \quad \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\beta} \cdot \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}; \quad (6.17)$$

va

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^{\mu}} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}$$

ekanligidan foydalanamiz. U holda (6.17) ifodalarning birinchisida α va λ larning, 2-sida esa μ va λ larning orinlarini almashtirib,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = -\Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \cdot \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k},$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu ifodalarni orniga qo'ysak,

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \cdot \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \right) \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0, \quad (6.18)$$

bu yerda μ va β hamma k va j indekslarining orinlarini almashtirib va $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ekanligidan foydalanib (6.18) ga oxshash munosabatni olamiz

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \right) \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0. \quad (6.19)$$

Keyingi (6.18) va (6.19) tengliklarning birini ikkinchisidan ayirib, hamda o'tish determenatli 0 dan farqi bo'lishi kerakligidan foydalansak, fazoning Evklid fazosi bo'lishi shartini keltirib chiqaramiz

$$R_{\beta\mu\alpha}^{\omega} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} = 0. \quad (6.20)$$

Agar fazo Evklid fazosi bo'lsa, bu shartlar istalgan koordinatalar sistemasida bajarilishi kerak.

Hosil qilingan $R_{\beta\mu\alpha}^{\omega}$ lar - 4-rang Riman-Kristoffel tenzorining komponentalaridan iborat. Riman-Kristoffel tenzorining sof kovariant komponentalarining ko'rinishi

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\nu} R_{ij\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu j}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu i}}{\partial \xi^j} + g^{\alpha\omega} (\Gamma_{\omega\mu j} \cdot \Gamma_{\alpha\nu i} - \Gamma_{\omega\mu i} \cdot \Gamma_{\alpha\nu j}) \quad (6.21)$$

dan iborat, bu yerda

$$\Gamma_{\nu\alpha j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial \xi^{\nu}} \right).$$

Ko'pincha (6.21)

$$R_{ij\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^i \partial x^{\mu}} \right].$$

ko'rinishda ishlatiladi. Bu formuladan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

$$R_{ij\mu\nu} = -R_{ji\mu\nu}; \quad R_{ij\mu\nu} = -R_{ij\nu\mu}; \quad R_{ij\mu\nu} = -R_{\mu\nu ij};$$

$$R_{ij\mu\nu} + R_{\mu i j \nu} + R_{i j \mu \nu} = 0; \quad R_{i i \mu \nu} = 0; \quad R_{i j \nu \nu} = 0$$

3-o'lchovli fazoda Riman-Kristoffel tenzori faqat oltita noldan farqli komponentalarda ega, ular

$$R_{1212}, \quad R_{1313}, \quad R_{2323}, \quad R_{1213}, \quad R_{2123}, \quad R_{3132} \quad \text{lardan iborat.}$$

11-mavzu: Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.

14. Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.

Ta'rif. Har bir nuqtasida vektor miqdor aniqlangan soha vektor maydon deb ataladi.

Demak, bu maydonda $\bar{a} = \bar{a}(x^1, x^2, x^3)$ bo'ladi.

Vektor maydonda o'tkazilgan biror chiziqning har bir nuqtasida maydon vektori va chiziq urinmasi bir xil yo'nalishga ega bo'lsa, ushbu chiziq vektor chizig'i deb ataladi. Demak, vektor chizig'i bo'ylab elementar ko'chish vektori $d\bar{r}$ maydon vektori $\bar{a}$ ga parallel bo'ladi:

$$d\bar{r} = \bar{a} d\lambda \quad (16.1)$$

Bu yerda $d\lambda$ - proporsionallik koeffitsienti. Ushbu (16.1) vektor tenglama quyidagi skalyar tenglamalarga ekvivalent:

$$dx^1 = a^1 d\lambda, \quad dx^2 = a^2 d\lambda, \quad dx^3 = a^3 d\lambda$$

yoki

$$\frac{dx^1}{a^1(x^1, x^2, x^3)} = \frac{dx^2}{a^2(x^1, x^2, x^3)} = \frac{dx^3}{a^3(x^1, x^2, x^3)} \quad (16.1)$$

Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, $a^\alpha = a^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, fazoning har bir nuqtasidan yagona vektor chizig'i o'tkazish mumkin. Bu funksiyalarning barchasi nolga yoki cheksizga teng bo'lgan nuqtalar (16.1) sistemaning maxsus nuqtalari deb ataladi. Maxsus nuqtalarda sistema yechimining mavjudlik va yagonalik teoremasining shartlari bajarilmaydi va bunday nuqtalar orqali bir nechta vektor chiziqlari o'tishi mumkin. Vektor maydonida biror vektor chizig'i bo'lmagan L chiziqning har bir nuqtasidan vektor chiziqlari o'tkazish natijasida hosil qilingan sirt $\sum$ vektor sirti deb ataladi. Bu sirtning har bir nuqtasida maydon vektori urinma tekislikda yotadi. L konturi yopiq bo'lsa $\sum$ naysimon sirt deb ataladi va maydonning $\sum$ bilan chegaralangan qismi vektor naychasi deb ataladi.

Vektor maydonining $M(x^\alpha)$ nuqtasidan $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$ nuqtasiga o'tganda $\bar{a}(x^1, x^2, x^3)$ vektorning orttirmasi

$$d\bar{a} = dx^\alpha \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^\alpha} = dx_\alpha \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_\alpha}$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda $dx^\alpha(dx_\alpha)$ ixtiyoriy elementar ko'chish vektori $d\bar{r}$ ning komponentalari,

$d\bar{a}$ esa vektor. Shu tufayli tenzorlarni bo'lish teoremasiga asosan $\bar{\mathcal{G}}^\alpha \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^\alpha}$ obekt 2-rang tenzor

ekanligi kelib chiqadi. Shu tenzor vektor gradienti deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\nabla \bar{a} \equiv \frac{\nabla \bar{a}}{d\bar{r}} = \bar{\mathcal{G}}^\alpha \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^\alpha} = \bar{\mathcal{G}}_\alpha \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_\alpha} \quad (16.2)$$

Ko'paytmaning hosilasini hisoblash qoidasiga binoan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (a^\sigma \bar{\mathcal{G}}_\sigma) = \frac{\partial a^\sigma}{\partial x^\alpha} \bar{\mathcal{G}}_\sigma + a^\sigma \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_\sigma}{\partial x^\alpha} = \\ &= \frac{\partial a^\sigma}{\partial x^\alpha} \bar{\mathcal{G}}_\sigma + a^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta \bar{\mathcal{G}}_\beta = \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + a^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta \right) \bar{\mathcal{G}}_\beta \equiv \nabla_\alpha a^\beta \bar{\mathcal{G}}_\beta \end{aligned} \quad (16.3)$$

munosabatlar o'rinli. Bu yerda

$$\nabla_{\alpha} a^{\beta} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + a^{\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta} \quad (16.4)$$

ifodalar, 2-rang tenzorning komponentalari bo'lib, $\bar{a}$ vektorning kontravariant komponentalarining kovariant hosilasi deb ataladi.

Demak, vektor gradienti ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$\nabla \bar{a} = \nabla_{\alpha} a^{\beta} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \quad (16.5)$$

Kristoffel belgilari tenzor komponentalari bo'lmagani tufayli, vektor komponentalarining koordinata bo'yicha odatdagi hosilasi, umuman olganda, tenzor komponentalari bo'lmaydi. Dekart koordinata sistemasida esa Kristoffel belgilarining barchasi nolga tengligidan kovariant hosila odatdagi hosilaga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$\nabla_{\alpha} a^{\beta} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \quad (16.6)$$

Agar vektorning kovariant komponentalari orqali yoyilmasini olsak, (16.3) ga o'xshab

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (a_{\sigma} \bar{\mathcal{E}}^{\sigma}) = \nabla_{\alpha} a_{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\beta}, \quad \nabla \bar{a} = \nabla_{\alpha} a_{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \quad (16.7)$$

munosabatlarni topish mumkin. Bu yerda

$$\nabla_{\alpha} a_{\beta} = \frac{\partial a_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - a_{\sigma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} \quad (16.8)$$

ifodalar vektorning kovariant komponentalarining kovariant hosilalari deb ataladi.

Shunga o'xshash, (16.6) va (16.7) dan foydalanib va (15.7) ni etiborga olib, vektor komponentalaridan olingan kontravariant hosila tushunchasini ham kiritish mumkin:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{a}}{\partial x^{\alpha}} = \nabla^{\beta} a^{\sigma} \bar{\mathcal{E}}_{\sigma} = \nabla^{\beta} a_{\tau} \bar{\mathcal{E}}^{\tau} \quad (16.9)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} \nabla^{\beta} a^{\sigma} &= g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} a^{\sigma} \\ \nabla^{\beta} a_{\sigma} &= g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} a_{\sigma} \end{aligned} \quad (16.10)$$

ifodalar $\bar{a}$ vektorning kontravariant va kovariant komponentalarining *kontravariant hosilasi* deb ataladi.

Vektor gradienti deb atalgan 2-rang tenzor quyidagi ko'rinishlarga ega:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{a} &= \nabla_{\alpha} a_{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}^{\beta} = \nabla_{\alpha} a^{\beta} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} = \\ &= \nabla^{\alpha} a_{\beta} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}^{\beta} = \nabla^{\alpha} a^{\beta} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} \end{aligned} \quad (16.11)$$

Maydonning barcha nuqtalarida vektorlar bir xil qiymatga ega bo'lsa, vektor maydoni bir jinsli deb ataladi. Bir jinsli vektor maydonida vektor gradienti nolga teng.

Demak, vektor maydon bir jinsli bo'lish sharti

$$\nabla_{\alpha} a_{\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (16.12)$$

ko'rinishda yoziladi.

Vektor gradienti (16.11) ning birinchi invarianti vektor divergensiya deb ataladi va

$$\operatorname{div} \bar{a} = \nabla_{\alpha} a^{\alpha} = \frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + a^{\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} \quad (16.13)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Misol. Dekart koordinata sistemasida

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_1}{\partial y^1} + \frac{\partial a_2}{\partial y^2} + \frac{\partial a_3}{\partial y^3} \quad (16.14)$$

ekanligi ko'rsatilsin.

Har bir nuqtasida $\operatorname{div} \bar{a} = 0$ shart bajarilgan vektor maydoni solenoidal maydon deb ataladi.

Vektor maydonda komponentalari

$$\Omega^\alpha = e^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma \quad (16.15)$$

tenglik bilan aniqlangan va vektor maydon uyurmasi deb ataluvchi vektor ham mavjud. Uyurma vektori odatda

$$\bar{\Omega} = \operatorname{rot} \bar{a}$$

ko'rinishda belgilanadi. Uning kontravariant komponentalari (16.15) diskriminant tenzor komponentalarini hisoblash qoidasi (10.12) ga binoan ushbu

$$\Omega^1 = \sqrt{g_1} (\nabla_2 a_3 - \nabla_3 a_2)$$

$$\Omega^2 = \sqrt{g_1} (\nabla_3 a_1 - \nabla_1 a_3)$$

$$\Omega^3 = \sqrt{g_1} (\nabla_1 a_2 - \nabla_2 a_1)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda kovariant hosilala (16.8) formulaga ko'ra hisoblansa, Kristoffel belgilari qatnashgan hadlar qisqaradi va uyurma vektori komponentalari uchun ushbu

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= \sqrt{g_1} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) \\ \Omega^2 &= \sqrt{g_1} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) \\ \Omega^3 &= \sqrt{g_1} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (16.16)$$

formulalarni olamiz.

Misol. Dekart koordinata sistemasida uyurma komponentalari ushbu ko'rinishda yozilishi ko'rsatilsin:

$$\Omega_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y^2} - \frac{\partial a_2}{\partial y^3}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial a_1}{\partial y^3} - \frac{\partial a_3}{\partial y^1}, \quad \Omega_3 = \frac{\partial a_2}{\partial y^1} - \frac{\partial a_1}{\partial y^2} \quad (16.17)$$

Vektor maydonning har bir nuqtasida $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$ shart bajarilsa, bu maydon uyurmasiz maydon deb ataladi. Maydon uyurmasiz bo'lishi uchun, (16.16) ga ko'ra

$$\frac{\partial a_3}{\partial x^2} = \frac{\partial a_2}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x^3} = \frac{\partial a_3}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x^1} = \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \quad (16.18)$$

tenglik bajarilishi kerak.

Differensial tenglamalar nazariyasidan malumki, (16.18) chiziqli $a_\alpha dx^\alpha$ differensial formaning integrallanish shartini beradi. Shu tufayli $a_\alpha dx^\alpha = d\varphi$, yani $a_\alpha dx^\alpha$ to'la differensial bo'ladi.

Demak,

$$a_\alpha = \nabla_\alpha \varphi, \quad \bar{a} = \nabla \varphi \quad (16.19)$$

deb yozish mumkin bo'ladi. Ikkinchi tomondan vektor maydoni potentsialli bo'lsa, yani (16.19) o'rinli bo'lsa, (16.18) tengliklar aynan bajariladi. Bulardan uyurmasiz vektor maydoni potentsialli bo'lishi va aksincha potentsialli maydon uyurmasiz bo'lishi kelib chiqadi.

Potensialli vektor maydonida $\bar{a} = \nabla \varphi$ bo'lganligi tufayli $\bar{a}$ vektorning divergensiya

$$\operatorname{div} \bar{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \varphi = \Delta \varphi \quad (16.20)$$

ko'rinishni oladi. Buyerda Δ - Laplas operatori. Demak, skalyardan olingan Laplas operatori invariantdir. (!)

U dekart koordinata sistemasida

$$\nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^1)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^2)^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial y^3)^2}$$

ko'rinishda yoziladi.

Skalyar maydonning biror $M(x^{\alpha})$ nuqtasidan unga yaqin joylashgan $M'(x^{\alpha} + dx^{\alpha})$ nuqtaga o'tilganda φ skalyar

$$d\varphi = dx^{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \quad (15.2)$$

orttirma oladi. Tenglikning o'ng tomoni ikkita birinchi rang ob'ektlarning o'ramidir. Undan tashqari M' nuqta M nuqta atrofidagi ixtiyoriy nuqталardan biri bo'lganligi tufayli, $dx^{\alpha} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha}$ ixtiyoriy vektor bo'ladi.

Shu sababli, tenzorlarni bo'lish teoremasidan $\bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}$ ob'ektning vektor ekanligi kelib chiqadi. Bu ob'ekt

skalyarning gradienti deb ataladi va

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} = \nabla_{\alpha} \varphi \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} \quad (15.3)$$

ko'rinishlarda belgilanadi.

Bu yerda $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}}$ ko'rinishdagi belgilashni quyidagicha izohlash mumkin:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^{\alpha}} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}}$$

Dekart koordinata sistemasida esa

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{\beta}} \bar{K}_{\beta} \quad (15.4)$$

formula o'rinli. Buni (15.4) va (4.17) lardan foydalanib, oson isbot qilinadi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \bar{\mathcal{E}}^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} \bar{K}_{\beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y^{\beta}} \bar{K}_{\beta}$$

Skalyar gradienti vektorining kovariant bazis vektorlari orqali yoyilmasi uchun

$$\nabla \varphi = \nabla^{\beta} \varphi \bar{\mathcal{E}}_{\beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\beta}} \bar{\mathcal{E}}_{\beta} \quad (15.5)$$

belgilashlar qabul qilingan. Ushbu formulalardan skalyar gradienti vektorining kovariant va kontravariant komponentalari orasidagi bog'lanishni olish mumkin:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \bar{\vartheta}^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \bar{\vartheta}_\beta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} \bar{\vartheta}_\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} g_{\beta\gamma} \bar{\vartheta}^\gamma \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} g_{\beta\alpha} \right) \bar{\vartheta}^\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \nabla_\alpha \varphi = g_{\alpha\beta} \nabla^\beta \varphi \quad (15.6)$$

Shunga o'xshash

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} \right) \bar{\vartheta}_\beta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \nabla^\beta \varphi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \quad (15.7)$$

munosabat olinadi. Ushbu (15.6) va (15.7) formulalar skalyar gradienti komponentalari uchun indeksni ko'tarish (tushirish) qoidasini beradi.

Demak, skalyar gradienti komponentalari uchun ham indeksni ko'tarish (tushirish) qoidalari o'rinli.

Invariant miqdor bo'lgan skalyar gradientining moduli uchun quyidagi munosabatlar o'rinli

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \right|^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} = g^{\sigma\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

Skalyar gradientiga teng bo'lgan $\bar{a} = \nabla \varphi$ vektor potentsialli vektor, φ esa skalyar potentsial deb ataladi. Potentsialli vektor maydoni potentsial maydon deb ataladi. Mazkur maydonning har bir nuqtasida skalyar gradienti shu nuqtadan o'tuvchi $\varphi(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$ sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Haqiqatan, ushbu sirtning har bir nuqtasida

$$d\varphi = dx^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = d\bar{r} \cdot \nabla \varphi = 0$$

tenglik o'rinli, yani qaralayotgan nuqtada $d\bar{r} \perp \nabla \varphi$ bo'ladi.

Potensial maydonida aniqlangan va tenglamasi $\bar{r} = \bar{r}(S)$ yoki $x^\alpha = x^\alpha(S)$ bo'lgan L chizig'i bo'ylab φ skalyar S o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\varphi[x^1(S), x^2(S), x^3(S)] = \varphi(S)$$

Ushbu

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dS} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{d\bar{r}}{dS}$$

hosila esa skalyarning S yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb ataladi va $\varphi = \varphi(S)$ ning L chizig'i bo'ylab o'zgarishi tezligini beradi.

Agar S deb L chiziqning yoy uzunligi belgilangan bo'lsa, $\frac{d\bar{r}}{dS}$ — L chizig'ining urinmasi bo'ylab S parametrlarning o'sish tomoniga yo'nalgan birlik vektordir. Demak, S yo'nalishi bo'ylab olingan hosila gradientning L chizig'i urinmasi yo'nalishi proeksiyasiga teng va maksimal tezlik $\frac{\partial \varphi}{\partial S}$ gradient yo'nalishida bo'ladi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \nabla \varphi \cdot \frac{d\bar{r}}{dS} = |\nabla \varphi| \cos(\nabla \varphi, S)$$

Har bir nuqtasida n -rang tenzor aniqlangan soha tenzor maydon deb ataladi. Demak, tenzor maydonda tenzor komponentalari va poliadalar qaralayotgan soha nuqtalarining funksiyasi bo'ladi:

$$T(x^1, x^2, x^3) = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha_1} \bar{\mathcal{E}}_{\alpha_2} \dots \bar{\mathcal{E}}_{\alpha_n} \quad (17.1)$$

$$T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x^1, x^2, x^3) \bar{\mathcal{E}}_{\alpha_i} = \bar{\mathcal{E}}_{\alpha_i}(x^1, x^2, x^3)$$

Avval 2-rang tenzor maydonini qaraymiz. Biror $M(x^\alpha)$ nuqtadan $M(x^\alpha + dx^\alpha)$ nuqtaga o'tganda T tenzor orttirmasi

$$dT = dx^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = dx_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \quad (17.2)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Buyerdan $\bar{\mathcal{E}}^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}$ obekt 3-rang tenzor ekanligi kelib chiqadi. Uni tenzor gradienti deb ataladi va ushbu

$$\nabla T = \bar{\mathcal{E}}^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = \bar{\mathcal{E}}_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (17.3)$$

ko'rinishda belgilanadi.

Buyerda tenzorning koordinata bo'yicha hosilasini, odatdagidek, ko'paytmadan hosila olish qoidasiga binoan hisoblasak va bazis vektorlarning koordinata bo'yicha hosilalarini aniqlovchi formulalarni eslasak, quyidagi munosabatlarni olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (T^{\beta \cdot \gamma} \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}^\gamma) = \frac{\partial T^{\beta \cdot \gamma}}{\partial x^\alpha} \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}^\gamma + \\ &+ T^{\beta \cdot \gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \bar{\mathcal{E}}_\sigma \bar{\mathcal{E}}^\gamma - T^{\beta \cdot \gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}^\sigma = \\ &= \left(\frac{\partial T^{\beta \cdot \gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\sigma \cdot \gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta - T^{\beta \cdot \sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma \right) \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}^\gamma \end{aligned} \quad (17.4)$$

Demak, tenzor gradienti

$$\nabla T = \nabla_\alpha T^{\beta \cdot \gamma} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}^\gamma \quad (17.5)$$

formula bilan, uning komponentalari esa T tenzor aralash komponentalarining kovariant hosilasi deb ataluvchi quyidagi munosabatlar bilan aniqlanuvchi 3-rang tenzor.

$$\nabla_\alpha T^{\beta \cdot \gamma} = \frac{\partial T^{\beta \cdot \gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\sigma \cdot \gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\beta - T^{\beta \cdot \sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma \quad (17.6)$$

Buyerdan Kristoffel belgilari tenzor komponentalari emasligi ko'rinib turibdi.

Demak, tenzor komponentasidan olingan odatdagi hosila $\frac{\partial T^{\beta \cdot \gamma}}{\partial x^\alpha}$ ham tenzor komponentasini hosil qilmaydi.

Lekin Dekart koordinata sistemasi bundan mustasno, chunki bu holda hosila

$$\nabla_\alpha T^{\beta \cdot \gamma} = \frac{\partial T^{\beta \cdot \gamma}}{\partial x^\alpha} \quad (17.7)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

T tenzorning boshqa xil komponentalaridan ham kovariant hosila olish mumkin.

$$\nabla T = \nabla_\alpha T^{\beta\gamma} \bar{\mathcal{E}}^\alpha \bar{\mathcal{E}}_\beta \bar{\mathcal{E}}_\gamma$$

Buyerda T tenzorning kovariant va kontravariant komponentalaridan olingan kovariant hosilalari

$$\nabla_{\gamma} T_{\alpha\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - T_{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - T_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} \quad (17.8)$$

$$\nabla_{\alpha} T^{\beta\gamma} = \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + T^{\sigma\gamma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta} + T^{\beta\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\gamma}$$

formulalar bilan aniqlanishini ko'rsatish qiyin emas.

Endi (17.5) dan foydalanib,

$$\frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T^{\sigma\tau} \bar{\partial}_{\sigma} \bar{\partial}_{\tau} = \nabla^{\alpha} T^{\sigma\tau} \bar{\partial}_{\sigma} \bar{\partial}_{\tau}$$

munosabatni olamiz. Bu yerda

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} T^{\sigma\tau} = \nabla^{\alpha} T^{\sigma\tau} \quad (17.9)$$

Demak, bu holda tenzor gradienti

$$\nabla T = \nabla^{\alpha} T^{\sigma\tau} \bar{\partial}_{\sigma} \bar{\partial}_{\tau}$$

ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif: $\nabla^{\alpha} T$ miqdor T tenzorining aralash komponentalaridan olingan kontravariant hosila deb ataladi.

(17.9) dan ko'rinib turibdiki, kontravariant hosila kovariant hosiladan indeks larni ko'tarish qoidasi yordamida olinadi.

2-rang tenzorlar uchun olingan koordinata bo'yicha differensiallash qoidalari n -rang tenzorlar uchun ham o'rinli bo'lib, differensiallash natijasida $(n + 1)$ - rang tenzor hosil qilinadi.

Tenzor komponentalaridan kovariant hosila olish qoidasiga binoan

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} - g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan Kristoffel belgilarining (14.6) xossalari e'tiborga olinsa, ushbu hosila aynan nolga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = (\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}) - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (17.10)$$

Shunga o'xshash

$$\nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_{\gamma} \delta^{\gamma}_{\beta} = 0$$

ekanligini ham ko'rsatish mumkin.

Indeks larni ko'tarish qoidasi o'rinli bo'lgani tufayli olingan natijalar kontravariant hosilalar uchun ham o'rinli.

Demak, metrik tenzorining gradienti 3-rangli nol tenzor ekan. Bundan metrik tenzorining maydoni bir jinsli maydon ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, metrik tenzorining komponentalari kovariant hosila olishda o'zini o'zgarmas kabi tutadi, yani ularni hosila belgisi ichiga kiritish va tashqarisiga chiqarish mumkin ekan.

Kovariant hosilaning ta'rifidan va (10.8) dan foydalanib,

$$\nabla_{\sigma} e_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial e_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\sigma}} - e_{\tau\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} - e_{\alpha\tau\gamma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau} - e_{\alpha\beta\tau} \Gamma_{\gamma\sigma}^{\tau}$$

formulalarni olamiz. Bu yerda

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} (\bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}_{\beta} \bar{\partial}_{\gamma}) = \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} (\bar{\partial}_{\tau} \bar{\partial}_{\beta} \bar{\partial}_{\gamma}) + \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau} (\bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}_{\tau} \bar{\partial}_{\gamma}) + \\ &+ \Gamma_{\gamma\sigma}^{\tau} (\bar{\partial}_{\alpha} \bar{\partial}_{\beta} \bar{\partial}_{\tau}) = \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} e_{\tau\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau} e_{\alpha\tau\gamma} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\tau} e_{\alpha\beta\tau} \end{aligned}$$

ekanligini hisobga olsak, kovariant hosila

$$\nabla_{\alpha} e_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (17.11)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Indekslarning tuzilishi boshqacha bo'lgan hollarda ham bu xossa o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Demak, diskriminant tenzor maydoni ham bir jinsli maydon bo'lib, hosila olishda diskriminant tenzor komponentalarini hosila belgisining ichiga kiritish yoki tashqarisiga chiqarish mumkin.

Kovariant hosila olish amali oddiy hosila olish amalining ayrim xossalriga ega:

1) ikkita vektor yig'indisining hosilasi shu vektorlar hosilalarining yig'indisiga teng. Vektor kovariant komponentasining kovariant hosilasini hisoblash (16.8) formulaga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}(a_{\alpha} + b_{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}(a_{\alpha} + b_{\alpha}) - (a_{\tau} + b_{\tau})\Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} = \\ &= \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} - a_{\tau}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} + \frac{\partial b_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} - b_{\tau}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} = \nabla_{\sigma}a_{\alpha} + \nabla_{\sigma}b_{\alpha}\end{aligned}\quad (17.17)$$

2) indefinit ko'paytmaning kovariant hosilasi odatdagi ko'paytmadan hosila olish qoidasiga binoan hisoblanadi:

$$\nabla_{\sigma}(a^{\alpha}b^{\beta}) = (\nabla_{\sigma}a^{\alpha})b^{\beta} + a^{\alpha}(\nabla_{\sigma}b^{\beta}) \quad (17.18)$$

Indefinit ko'paytma komponentalarining kovariant hosilasi uchun (16.4) ga ko'ra ushbu

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}(a^{\alpha}b^{\beta}) &= \frac{\partial(a^{\alpha}b^{\beta})}{\partial x^{\sigma}} + a^{\tau}b^{\beta}\Gamma_{\tau\sigma}^{\alpha} + a^{\alpha}b^{\tau}\Gamma_{\tau\sigma}^{\beta} = \\ &= \left(\frac{\partial a^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + a^{\tau}\Gamma_{\tau\sigma}^{\alpha}\right)b^{\beta} + \left(\frac{\partial b^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} + b^{\tau}\Gamma_{\tau\sigma}^{\beta}\right)a^{\alpha} = \\ &= (\nabla_{\sigma}a^{\alpha})b^{\beta} + (\nabla_{\sigma}b^{\beta})a^{\alpha}\end{aligned}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

3) kovariant hosila olish va yig'ishtirish amalining o'rinlarini almashtirish mumkin;

4) vektorning skalyar va vektor ko'paytmasidan kovariant hosila olish mumkin. Agar (17.18) ni $g_{\alpha\beta}$ ga ko'paytirib, α va β lar bo'yicha yig'indi hisoblash amalini bajarsak, ushbu

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a^{\alpha}b_{\alpha} = g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}$$

skalyar ko'paytmaning kovariant hosilasi uchun

$$\nabla_{\sigma}(g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}) = g_{\alpha\beta}(\nabla_{\sigma}a^{\alpha})b^{\beta} + g_{\alpha\beta}a^{\alpha}(\nabla_{\sigma}b^{\beta})$$

formula yoki

$$\nabla(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \nabla\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot (\nabla\bar{b}) \quad (17.19)$$

formula o'rinli.

Shunga o'xshash, (17.18) ni $e_{\alpha\beta\gamma}$ ga ko'paytirib, ushbu

$$\bar{a} \times \bar{b} = e_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}\bar{\varepsilon}^{\gamma}$$

vektor ko'paytmaning kovariant hosilasi uchun quyidagi

$$\nabla_{\sigma}(e_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}) = e_{\alpha\beta\gamma}(\nabla_{\sigma}a^{\alpha})b^{\beta} - e_{\beta\alpha\gamma}a^{\alpha}(\nabla_{\sigma}b^{\beta})$$

yoki

$$\nabla(\bar{a} \times \bar{b}) = \nabla\bar{a} \times \bar{b} - (\nabla\bar{b}) \times \bar{a} \quad (17.20)$$

formulalarni olamiz. Shunday qilib, (17.19) va (17.20) formulalar vektorlarning skalyar va vektor ko'paytmasidan kovariant hosila olish qoidasini beradi.

12-mavzu: TMMning asosiy farazlari. Hamroh koordinata sistemasi.

1 §. Tutash muhitlar mehanikasining asosiy farazlari.

Tutash muhitlar mehanikasining asosiy farazlari

a) Haqiqiy jismlarning tuzilishi va doimiylilik farazi.

Ma'lumki, barcha moddiy jismlar juda kichik zarralardan, ular molekula va atomlardan tashkil topgan. Atomlar esa elektronlarga va yadrolarga ega. Masalan, atom yadrosining radiusi 10^{-13} smga teng, vodorod molekulasining radiusi $1.36 \cdot 10^{-8}$ sm. Lekin vodorodning asosiy massasi uning yadrosida joylashgan.

Ma'lumki, oddiy sharoitda (0°C va dengiz yuzasidagi atmosfera bosimida) 1 sm^3 havo hajmida $N = 2.687 \cdot 10^{19}$ ta molekula mavjud. 60 km yuqorida esa $N = 8 \cdot 10^{15}$ ta, yulduzlar orasidagi muhitda esa $N = 1$ ta molekula bor deyish mumkin. Shuningdek, temir uchun $N = 8.622 \cdot 10^{22} \text{ 1/sm}^3$. Bundan ko'rinib turibdiki, jismlar massasi joylashgan hajmlar shu jism egallagan hajmlarning nihoyatda kichik qismini tashkil etadi. Ya'ni jismlar «bo'shliqlar»dan iborat. Atom va molekular doimiy xotik harakatda bo'ladilar. Bundan ko'rinadiki, ularning individual harakatini o'rganish nihoyatda qiyin: chunki ularning soni juda ko'p. Masalan, kislorod molekulari 1 sekundda $6.55 \cdot 10^9$ marta to'qnashadi, ularning o'rtacha tezligi $v = 425 \text{ m/sek}$ atrofida, harakatlanuvchi bu zarralar o'rtasidagi ta'sir kuchlari ham ma'lum emas.

Tutash muhit mehanikasida zarralar o'rtasida ma'lum o'zaro ta'sirlar mavjud. Gazda ular faqat to'qnashuvlar bilan bog'liq. Suyuqlik va qattiq moddalarda zarralar bir-biriga yaqinlashadi va ularda o'zaro ta'sir kuchlari katta ahamiyatga ega. Zarralarni bir-biriga yaqinlashtirish uchun zarrachalarning millionlab darajadagi haroratlarda tartibsiz harakatlanishi natijasida vujudga keladigan ulkan energiya talab qilinadi.

Tutash muhit mehanikasida real jismlar o'rganilganda amaliyot uchun har bir zarraning trayektoriyasi, tezligi va boshqa xarakteristikalar emas, balki bu jism zarralari uchun o'rtacha bo'lgan xarakteristikalar kerak bo'ladi.

Real jismlarning harakati o'rganilganda statistik fizika usullari ham qo'llaniladi. Statistik usullar bilan ish ko'rilganda doimo ayrim qo'shimcha gipotezalarga murojaat qilinadi. Lekin bularning hammasini ham asosli deb bo'lavermaydi. Boshqa tomondan, statistik usul asosidagi tenglamalar murakkab ko'rinishga ega bo'lib, effektiv yechimlar topish qiyin masalaga aylanadi.

Material jismlar harakatini o'rganishdagi ikkinchi yo'l bu - fenomenologik makroskopik nazariyadan iborat. Makroskopik nazariyalar amaliy muammolarni hal qilishning samarali vositasidir va ularning yordami bilan olingan ma'lumotlar tajribaga mos keladi.

a)

Tutashlik farazi

Tutash muhit mehanikasining asosiy farazsi *muhitning tutashligi* farazidir.

Jism fazosi yoki uning bo'lagini to'la ravishda qoplagan deb yuqorida aytilgan fikr real jismlar uchun taxminan mos keladi.

Deformatsiyalanuvchi jismlar tashqi kuchlar ta'sirida o'z o'lchamlari va formalarini o'zgartiradilar, jismning fikran ajratilgan bo'laklari o'rtasida kuchlar, zo'riqishlari, bosimlar deb ataluvchi mehanik miqdorlar paydo bo'ladi, bu kattaliklar faqat tashqi kuchlarga ega emas, balki jism geometrik formasiga, muhitning tajribalar asosida olinishi mumkin bo'lgan makroskopik xossalriga ham bog'liq bo'ladi. Bu muammolar TMMda o'rganiladi.

Gaz, suyuq yoki qattiq holatdagi jismlar, ularning aralashmalari turli sabablar bilan fazoda harakatlanishi va harakatlanish jarayonida «moddiy zarralar» orasidagi masofalar o'zgarishi mumkin. Bu yerda shuni yaqqol ko'rish mumkinki, bir tomondan tutash muhit tushunchasini kiritmay turib yaxlit, alohida moddiy jism tasavvuriga ega bo'lish qiyin, ikkinchi tomondan, har qanday tutash muhit aslida mayda zarralardan tashkil topganligi va ularda «bo'shliqlar» borligini ta'kidlash kerak. Bu dialektika asosida yechilishi kerak bo'lgan ichki ziddiyat va uning tajribalar asosida ma'lum masalalarni hal etishga xizmat qila oladigan nazariyasi bo'lib, nazariyaning amalda ishlatilishidir.

d) Fazo va vaqt.

Fazo va vaqt tushunchalari haqida ham to'xtalib o'taylik. Bu tushunchalar nazariy mexanika kursida to'la bayon etilgan. Shuning uchun bu tushunchalarning ayrim mohiyatlari ustidagina to'xtab o'tamiz.

Fazo deganda koordinatalar deb ataluvchi sonlar orqali berilgan nuqtalar to'plami tushuniladi. Agar fazoda ikki nuqta orasidagi masofa aniqlangan bo'lsa, bu fazo metrik fazo deyiladi.

Agar metrik fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

bo'lsa, bu fazo Yevklid fazosidir. Yevklid fazosiga shu fazo uchun umumiy bo'lgan Dekart koordinatalar sistemasini kiritish mumkin. Bunday fazoda biz o'rganadigan mexanika Nyuton mexanikasi deb ataladi. Bu fazoda joylashgan tutash muhit uning ixtiyoriy geometrik nuqtasida mavjuddir.

Vaqt tushunchasi tajriba bilan bog'liq va mexanikada zarur. Har qanday mexanik xodisa har doim bazi kuzatuvchilar nuqtayi nazaridan tavsiflanadi. Vaqt barcha kuzatuvchilar uchun bir xil yo'nalishda - poezd, samolyot, auditoriyada bir xil o'tadi deb taxmin qilamiz. TMMda absolut vaqt tushunchasi bilan ish ko'ramiz. Bizning vaqtimiz barcha koordinata sistemalarida bir xil o'zgaradi.

Shunday qilib, TMMda muhit harakati - kontinuum harakati Yevklid fazosida absolyut vaqtdan foydalanib o'rganiladi.

TMMda o'rganilayotgan muhit harakat jarayoni davomida nuqtalar orasidagi masofalar o'zgarishi mumkin. Harakat davomida muhit nuqtalari orasidagi masofa o'zgarmasa, bunday harakat nazariy mexanikada o'rganiladi.

Shunday qilib, yuqorida uchta fundamental farazlar kiritildi, ulardan foydalanib deformatsiyalanadigan jismlarning harakatlanish nazariyasi quriladi. Ushbu farazlarga asoslangan nazariyadan xulosalar ko'pincha, har doim ham tajribaga mos kelmaydi. Agar kerak bo'lsa, makon va vaqtning qabul qilingan modelini aniqlashtirish va umumlashtirish mumkin. Biroq, barcha keyingi umumlashmalar, yuqorida tavsiflangan fundamental farazlarga asoslanib, Nyuton mexanikasiga asoslangan.

2 §. Hamroh koordinata sistemasi.

Har qanday harakat kabi, kontinuum harakati har doim ba'zi koordinatalar sistemasi x^1, x^2, x^3 – kuzatuvchi sanoq sistemasiga nisbatan aniqlanadi. Bu koordinatalar sistemasi ixtiyoriy ravishda tanlanishi mumkin. U shart asosida kiritiladi, va uning tanlovi tadqiqotchiga bog'liq. Amalda u ko'pincha Yer bilan bog'liq, biroq shuningdek, Quyosh, yulduzlar, samolyot, vagon va boshqalar bilan ham bog'liq bo'lishi mumkin. Uni kiritish mazmuniga ko'ra, u harakatli yoki harakatsiz bo'lishi mumkin.

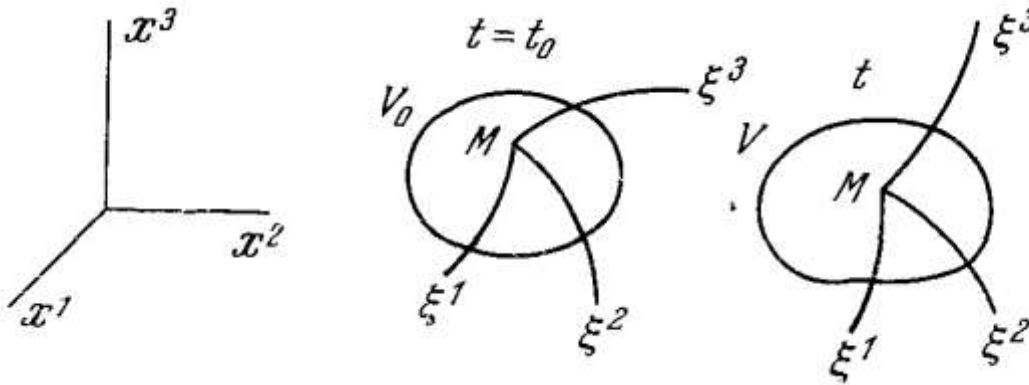
Nyutonning mexanikasida, bir-biriga nisbatan parallel ravishda vaqt bo'yicha doimiy tezlik bilan harakatlanuvchi koordinatalarning inersial sistemalariga nisbatan harakatlanishi alohida fizik ahamiyatga ega. Bunday koordinata sistemalarining mavjudligi mexanikasining asosiy postulati, ya'ni isbot talab qilmaydigan qoidasi bo'lib hisoblanadi.

Amaliyotda, hayotda inersial koordinatalar sistemasi sifatida, uzoq yulduzlarni harakatsiz deb hisoblash mumkin bo'lgan Dekart koordinatalar sistemasini tanlash mumkin.

Bulardan tashqari tutash muhit harakatini ifodalovchi koordinatalar sistemasini kiritish lozim. x^1, x^2, x^3 koordinatalari bilan bir qatorda, ξ^1, ξ^2, ξ^3 nuqtalarning Lagranj koordinatalarini fazoning huddi shu nuqtalarining D sohasidagi boshqa koordinatalari tariqasida ko'rib chiqish mumkin.

Ta'rif: ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar sistemasiga mos shu fazoda harakatlanuvchi, deformatsiyalanuvchi, egri chiziqli koordinatalar sistemasi hamroh koordinatalar sistemasi deb ataladi.

Agarda t_0 boshlang'ich vaqtda tutash muhitda, tutash muhit nuqtalaridan tashkil bo'lgan ξ^1, ξ^2, ξ^3 ayrim koordinata chiziqlari tanlansa, keyingi vaqtda ular kontinuum nuqtalari bilan birgalikda qaytadan hamroh koordinata sistemaning chiziqlariga o'tadi. Lekin, boshlang'ich vaqtda ular to'g'ri chiziq bo'lib tanlangan bo'lsa, keyingi vaqtda ular egri chiziqqa aylanadi (5- rasm)



5-rasm.

x^1, x^2, x^3 - sanoq sistemasi, ξ^1, ξ^2, ξ^3 - hamroh lagranj sistemasi.

Shunday qilib, koordinatalar sistemasi tutash muhit zarrachalari bilan bog'liq holda ko'rib chiqilsa, u vaqt o'tishi bilan o'zgarishi kuzatiladi. Bunday koordinatalar sistemasini tanlash istalgan vaqtda bizning qo'limizda, biroq vaqtning keyingi lahzalarida u bizning qo'limizda bo'lmaydi, chunki u muhitga "mustahkam kiritilgan" bo'lib, u bilan birgalikda o'zgaradi. Muhitga kiritilgan aynan bunday koordinatalar sistemasi yuqorida hamroh koordinatalar sistemasi deb belgilandi. Tutash muhitning barcha nuqtalari har doim harakatchan hamroh koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashadi, chunki ularning ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalari hamroh sistemada o'zgarmaydi. Lekin sistemaning o'zi harakatlanadi, cho'ziladi, qisqaradi, buraladi va hokazo.

Biz tutash muhitning harakatlanishi haqida doimo gapirganimizda, nuqtalarni alohida ajratishimiz va lagranj koordinatalaridan foydalanishimiz zarur.

Shu sababli, doim tutash muhitning harakatlanishini ko'rib chiqqanimizda x^1, x^2, x^3 sanoq sistemasining mavjudligi nazarda tutilib, unga nisbatan hamroh koordinatalar sistemasining harakatlanishi ham ko'rib chiqiladi.

Erkin o'zgaruvchilar ξ^1, ξ^2, ξ^3 va t ning qo'llanilishi Lagranjning tutash muhit harakatlanishini o'rganishdagi nazariyasi bo'yicha, tutash muhitning har bir nuqtasining harakatlanishini alohida o'rganish kerak. Amaliyotda bunday ta'riflash odatda haddan tashqari batafsil va mukammal bo'ladi, biroq u doimo fizika qonunlarini shakllantirishda nazarda tutiladi. Tutash muhit harakatlanishiga ta'rif berish uchun, harakat qonunining tushunchasidan tashqari yana boshqa tushunchalarni ham kiritish zarur, hususan, tezlik va tutash muhit nuqtalarining tezlashish tushunchalarini.

Aytaylik, tutash muhitning ixtiyoriy nuqtasi t vaqtda fazoning M nuqtasida, $t+\Delta t$ vaqtda esa – M' va $MM' = \Delta r$ nuqtasida joylashgan bo'lsin.

Δr Δt vaqtda tutash muhit nuqtasining yo'naltirilgan harakatidir. Fazoda r radius-vektorini kiritish mumkin bo'lsa, Δr qaralayotgan radius-vektorning orttirmasidir.

Ta'rif: Yevklid fazosida radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan xususiy hosila $\frac{\partial r}{\partial t}$ tutash muhit nuqtasining tezligi deb ataladi. Tezlik vektorini ϑ harf bilan belgilanadi.

$$\vartheta = \frac{\partial r}{\partial t}$$

Tezlik sanoq sistemasiga nisbatan hisoblanadi. Demak, hamroh koordinatalar sistemasiga nisbatan tezlik doimo nolga teng. Tutash muhitlar mehanikasida tezlikdan tashqari tezlanish ham o'rganiladi va u quyidagicha ifodalanadi:

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{\xi^i} = a^i \vartheta_i$$

Bu yerda $a^i = a^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ – tezlanish komponentalari. a tezlanish, ϑ tezlik kabi, tutash muhitning individual nuqtasi uchun hisoblab chiqiladi. Tezlanishning aniqlanishi kuzatuvchining x^1, x^2, x^3 koordinatalar tizimini tanlash bilan bog'liq bo'lib, unda harakat qonuni ko'rib chiqiladi

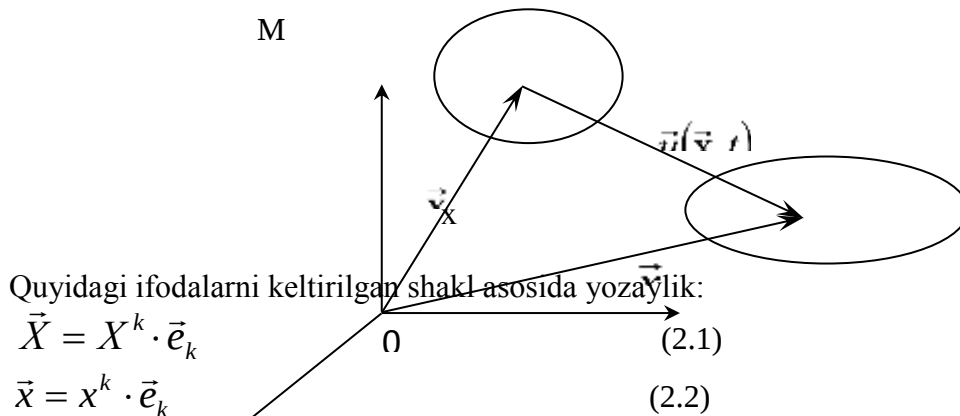
13-14-mavzu: Muhitning harakat tenglamasi.

3 §. Muhitning harakat tenglamasi. Tutash muhit harakatini tavsiflashning Lagranj va Eyler usullari. Tutash muhit uch o'lchovli Yevklid fazosida joylashgan va unda harakatlanadi deylik. Uning kinematikasini o'rganaylik. Shu maqsadda tutash muhit tushunchasi, asosiy gipotezalarini eslaylik.

$$\text{Ushbu } |\vec{e}_i| = 1 \text{ va } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

bazis vektorni kiritaylik.

Tutash muhitning t_0 - dastlabki paytdagi holatini $\vec{X}(X^1, X^2, X^3)$ koordinatalar bilan va ixtiyoriy $t \geq t_0$ momentdagi koordinatalarini $\vec{x}\{x^1, x^2, x^3\}$ lar bilan belgilaylik. Bunda t_0 momentda tutash muhit egallagan τ_0 hajm $t \geq t_0$ momentda τ hajmni egallaydi (6-rasm).



Bu yerda $\vec{X}$ - tutash muhit zarrasi, fizik M nuqtaning dastlabki paytdagi ortogonal Dekart koordinatalaridir. x^k - shu fizik M nuqtaning bir oz vaqt o'tgach, ya'ni $t \geq t_0$ momentdagi ortogonal Dekart koordinatalaridir.

«Fizik M nuqta» deganimizda tutash muhit gipotezasiga ko'ra barcha geometrik nuqtalar va ularda «joylashgan» muhit zarralari tasavvur etiladi.

Shaklda tasvirlangani kabi, har bir $\vec{x}$ o'zining $t = t_0$ momentga mos kelgan dastlabki holatlari - fizik nuqtalariga ega, hamda ularga bog'liq bo'ladi. t_0 momentda ixtiyoriy olingan M nuqta τ_0 hajmdagi tutash muhitning ixtiyoriy fizik nuqtasi bo'la oladi va har bir M nuqtalar tutash muhit harakati tufayli biror t momentda τ hajmga tegishli nuqtani egallaydi.

Shunday qilib, quyidagini yoza olamiz:

$$x^\alpha = x^\alpha \{X^1, X^2, X^3, t\}, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

(2.3) o'rniga ushbu vektor tenglamani yozish mumkin:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad (2.4)$$

(2.3) (yoki (2.4)) $\vec{X}$ nuqtaning harakat qonuni deyiladi. TMMning asosiy vazifasi shu harakat qonunini topish, uni o'rganishdir. Ikkinchi tomondan, (5.4) ga matematik nuqtayi nazardan qaralganda, undan $\vec{X}$ ni $\vec{x}$ ning funksiyasi sifatida topish masalasini qo'yish mumkin. $\vec{x}$ va $\vec{X}$ lar o'rtasida har bir $t \geq t_0$ uchun bir qiymatli akslantirish mavjudligi uchun ushbu yakobian noldan farqli bo'lishi kerak:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu shart bajarilsa, (2.4) dan yoza olamiz: $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ ya'ni:

$$\begin{aligned} X^1 &= X^1\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^2 &= X^2\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^3 &= X^3\{x^1, x^2, x^3, t\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5) dan (2.3) yoki (2.4) ga o'tish uchun o'tish ko'rilayotgan $t = t_0$ momentda:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

bajarilishi kerak.

Tutash muhit harakati o'rganilayotganda ayrim $t \geq t_0$ onda yuqorida keltirilgan yakobianlar qiymati nolga teng bo'lishi mumkin. Yakobianlar qiymati ayrim nuqta yoki nuqtalarda, chiziqlarda, sirtlarda nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bunday nuqtalar kritik nuqtalar yoki kritik nuqtalar to'plami deyiladi. Biz tekshirishlarimizda yakobianlar noldan farqli deb faraz qilamiz.

2-rasmdan quyidagini yoza olamiz:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad (2.6)$$

$\vec{u}(X^1, X^2, X^3, t)$ vektor ko'chish vektori deyiladi. M nuqtaning harakatini o'rganganda, uning uchun (2.4) formula, $\vec{X}$ miqdor vaqt o'tishi bilan har bir individual fizik zarra uchun o'zgarmasligi sababli ular t ga bog'liq emas. Shuni e'tiborga olsak, ko'chish $\vec{u}$, tezlik $\vec{V}$ va tezlanish $\vec{W}$ ni istalgan t ondagi ifodasi mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \quad (2.7)$$

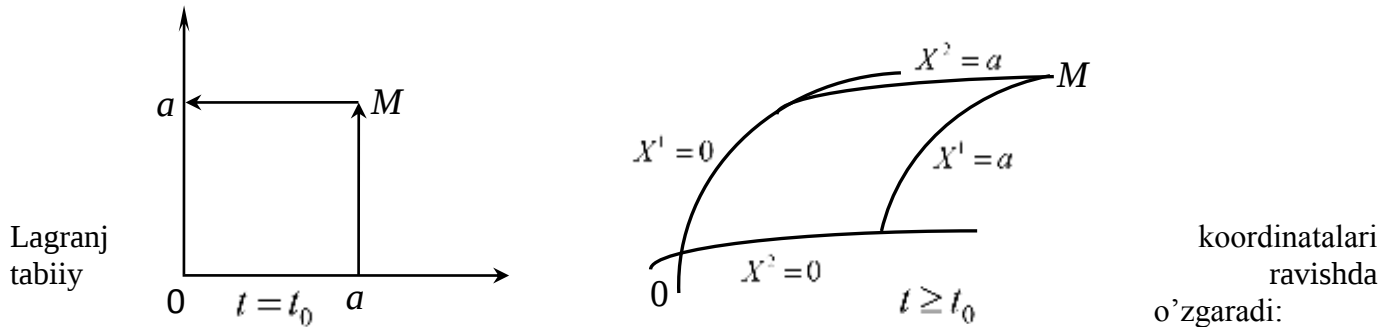
$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\vec{W} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

$\vec{u}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ lar $\vec{X}$ va t ga bog'liq bo'lib, uning funksiyalaridir:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{u}\{X^1, X^2, X^3, t\} \\
\vec{V} &= \vec{V}\{X^1, X^2, X^3, t\} \\
\vec{W} &= \vec{W}\{X^1, X^2, X^3, t\}
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

Yuqorida foydalanilgan $\vec{X}$, t lar Lagranj koordinatalari deyiladi. Ular har bir individual fizik nuqta uchun $t = t_0$ momentda olgan qiymatlarini istalgan $t \geq t_0$ momentda saqlab qolgani sababli tutash muhitning $t \geq t_0$ momentdagi holati uning dastlabki holati bilan aniqlanadi. Lagranj koordinatalari $t = t_0$ da ortogonal Dekart koordinatasi sifatida qabul qilingan edi. Bu paytda metrik tenzor $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ dan iborat bo'lsa ham, $t \geq t_0$ da Lagranj koordinatalari egri chiziqli koordinatalarga aylanadi va olinayotgan Yevklid fazosida metrik tenzor turlicha bo'lishi mumkin. Umuman aytganda, $t = t_0$ momentda olingan ortogonal koordinatalar sistemasi va u bilan bog'liq bo'lgan δ_{ij} metrik tenzor olinishi shart emas. Dastlabki $t = t_0$ momentda ixtiyoriy ortogonal bo'lmagan ma'lum metrik tenzorga ega koordinata sistemasini tanlab olish mumkin edi. Uni odatda $\dot{g}_{ij}$ bilan belgilash mumkin. Lekin umumiyatga zarar keltirmasdan TMM masalalarini o'rganganda dastlabki vaqtda $g_{ij}|_{t=t_0} = \delta_{ij}$ metrik tenzorga ega ortogonal Dekart koordinata sistemasini ishlatish, shubhasiz, qulay bo'ladi. Misol sifatida ushbu $0 \leq X^1 \leq a$, $0 \leq X^2 \leq a$ Lagranj koordinatalarini tekislikda ko'raylik (7-rasm).



7-rasm

$$(a, a, 0) \rightarrow (a, a, 0)$$

$$t = t_0 \rightarrow t > t_0$$

Biror bir F miqdor fizik zarra uchun Lagranj koordinatalarida aniqlangan bo'lsa (skalyar yoki vektor miqdor), uning o'zgarish tezligi

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F(\vec{X}, t)}{\partial t}$$

bo'ladi.

$F(\vec{X}, t)$ ning t momentda olingan ikki cheksiz kichik masofadagi X^k va $X^k + dX^k$ nuqtalardagi farqi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial F}{\partial X^k} dX^k.$$

4 §. Lagranj va Eyler koordinatalariga o'zaro o'tish

Tutash muhit harakatini ixtiyoriy t momentda ortogonal Dekart koordinata sistemasida ko'raylik. Fazoning $\vec{x}$ - radius vektorini olaylik va uni harakat davomida o'zgartirmaylik. U holda radius-vektor belgilangan fazoning nuqtasi va ular to'plamiga turli parametrlar bilan xarakterlanuvchi turli tutash muhit zarralari o'tishini kuzatish mumkin. $\vec{x}$ nuqtada turli paytlarda turlicha fizik zarralar o'tadi. Demak, bu holda har bir individual fizik zarra harakati kuzatilmaydi, balki fazoning ayrim bo'lagiga kelayotgan va undan o'tib ketayotgan zarralar kuzatiladi, aniqrog'i, shu fazo har bir nuqtasiga kelayotgan va undan o'tib ketayotgan fizik zarralar harakati kuzatiladi. Shunday qilib, $\vec{x}$ o'zgarmas fazosiga bog'liq maydon bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Masalan, $\vec{V}(\vec{x}, t)$ - tezlik maydoni. Bu maydon Eyler maydoni deyiladi. $\vec{x}$ - esa Eyler koordinatasi deyiladi. Har bir $\vec{x} = \text{const}$ zarra bu maydonda o'z trayektoriyasini «chizib» o'tadi. Agar shu maydonga tegishli $\vec{V}(\vec{x}, t)$ ma'lum bo'lsa, t momentda $\vec{x}$ nuqtadagi fizik zarra $\vec{V}(\vec{x}, t)$ tezlikka va kichik dt vaqtda shu fizik nuqta $\vec{V}(\vec{x}, t)dt$ ko'chishga ega bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu ko'chishni $d\vec{x}$ desak:

$$d\vec{x} = \vec{V}(\vec{x}, t)dt$$

bo'ladi.

Bundan

$$\frac{dx^k}{dt} = V^k(x^1, x^2, x^3, t) \quad (2.11)$$

Faraz qilaylik, (2.11) differensial tenglamalar sistemasi integrallari topilgan deylik:

$$x^k = x^k(c_1, c_2, c_3, t) \quad (2.12)$$

Dastlabki paytda esa fizik zarralar holati ma'lum bo'lgan va ular X^k lar bilan belgilangan deylik. U holda $x^k|_{t=t_0} = X^k$

c_1, c_2, c_3 lar X^k orqali ifodalanadi.

U holda

$$X^k = X^k(\vec{X}, t) \quad (2.13)$$

Demak, x^1, x^2, x^3, t Eyler koordinatadan X^1, X^2, X^3, t Lagranj koordinatalariga, agar Eyler maydoni va undagi $V^k(x^1, x^2, x^3, t)$ ma'lum bo'lsa, o'tish formulalarini ko'rdik.

Shuningdek, Lagranj koordinatalaridan Eyler koordinatalariga ham o'tish mumkin. Masalan, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$ ma'lum deylik (ya'ni ko'chish Lagranj koordinatalarida berilgan) va $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$ topilishi talab qilingan deylik.

Yoza olamiz:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{V}(\vec{X}, t)$$

edi.

Bundan

$$\vec{V} = \vec{V}[\vec{X}(\vec{x}, t), t] = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

kelib chiqadi.

Eyler koordinata sistemasida tezlik va tezlanish. Turli nuqtalar tezligi $\vec{V} = \vec{V}(x^1, x^2, x^3, t)$. Agar $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ ma'lum bo'lsa va uni yuqoriga qo'yilsa, $\vec{V} = \vec{V}(x^1(\vec{X}, t), x^2(\vec{X}, t), x^3(\vec{X}, t), t)$ $\vec{X}$ nuqta uchun topiladi.

$$V^k = V^k(x^i, t)$$

bo'lganda,

$$\frac{\partial V^k}{\partial t}$$

tezlanish bo'la olmaydi.

Tutash muhit fizik zarrasi tezlanishi $\vec{W} = W^i \cdot \vec{e}_i$ bo'lib,

$$W^i = \frac{dV^i}{dt} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial t} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \cdot \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

bo'ladi.

Har ikki usul o'zaro ekvivalent va ulardan foydalaniladi. Yuqorida ko'rganimizdek, bir koordinata sistemasidan ikkinchisiga yoki aksincha o'tish mumkin. TMMda masalaning qo'yilishi va tutash muhit modellariga qarab u yoki bu koordinatalardan foydalaniladi. Odatda, suyuqlik harakatini o'rganishda Eyler koordinatalari ko'p ishlatilsa, deformatsiyalanuvchi qattiq jism uchun esa Lagranj koordinatalari qo'l keladi. Ayrim masalalarni yechishda bu an'ana buzilishi ham mumkin.

15-mavzu: Skalyar va vektor maydonlar va ularning ayrim xossalari.

Ta'rif. Har bir nuqtasida skalyar miqdor aniqlangan soha skalyar maydon deb ataladi.

Ta'rif. Fazodagi biror D sohaning har bir M nuqtasiga aniq qonun bo'yicha biror $u(M)$ son mos qo'yilgan bo'lsa, bu sohada $u=u(M)$ skalyar maydon berilgan deyiladi. D soha sifatida fazoning biror bo'lagi, sirti yoki chizig'i bo'lishi mumkin.

Agar skalyar maydon sohaning barcha nuqtalarida bir xil bo'lsa, bunday maydonni bir jinsli maydon deyiladi. Agar skalyar maydonning qiymati bir nuqtadan boshqa nuqtaga ko'chganda o'zgarsa bunday maydonga bir jinssiz maydon deymiz.

Ba'zan skalyar maydonning qiymati vaqtga qarab ham o'zgarib borishi mumkin. Masalan, qizdirilgan jism temperaturasi tashqi muhit temperaturasiga qarab o'zgaradi. Bunday maydonlar nostasionar skalyar maydonlarni tashkil qiladi. Agar skalyar maydon vaqtga bog'liq bo'lmasa bunday maydonlarni stasionar (barqaror) maydonlar deyiladi.

Skalyar - har bir nuqtada yagona qiymatga ega bo'ladi, ya'ni u koordinatalarning bir qiymatli funktsiyasidir:

$$\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$$

skalyar miqdor bir xil qiymatga ega bo'lgan nuqtalar ushbu

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \text{const} \quad (15.1)$$

shartdan topiladi. Bu shart fazoda sirt tenglamasini beradi. Ushbu sirt ekvipotentsial sirt yoki saviya (daraja) sirti deb ataladi. Konstantaga har xil qiymatlar berilsa mazkur sirtlarning oilasi hosil bo'ladi. Fazoning har bir nuqtasidan yagona ekvipotentsial sirti o'tadi.

Ta'rif. Har bir nuqtasida vektor miqdor aniqlangan soha vektor maydon deb ataladi.

Demak, bu maydonda $\vec{a} = \vec{a}(x^1, x^2, x^3)$ bo'ladi.

Demak, maydon skalyar yoki vektor maydondan iborat bo'lishi mumkin ekan. Bunga ko'pgina misollar keltirish mumkin. Tutash muhit mexanikasida tezlik vektori va fazoning bo'lagini uzluksiz egallagan tutash muhit zarralari uchun tekshirilganda tezlik maydoni tushunchasiga kelamiz: har bir tutash muhit zarrasi har

bir onda o'z tezligiga ega va bu tezlik vektori fazoning (masalan, Eyler koordinatalarida) va vaqtning funksiyasi sifatida tezlik maydonini tashkil etadi.

Endi vektorning sirkulatsiyasini ko'raylik. Biror vaqt uchun harakat jarayoni davomida tutash muhit egallagan fazoga tegishli A va B nuqtalar bilan birga shu nuqtalarni tutashtiruvchi ixtiyoriy o'zaro kesishmaydigan egri chiziq olaylik. Tutash muhit harakati tufayli ko'rilayotgan onda chiziqlarning barcha nuqtalarida $\vec{V}$ tezlik vektorini chizish mumkin. Kuch maydonida bajariladigan ishni hisoblash kabi, ushbu

$\int_A^B (\vec{V} \cdot d\vec{s})$ ifodani tuzaylik. Bu ifodaning qiymati skalyar miqdor va u tezlik vektoridan berilgan chiziq

bo'yicha olingan sirkulyasiya deyiladi. Agar ko'rilayotgan chiziq yopiq chiziqdan iborat bo'lsa, (ya'ni A va B nuqtalar ustma-ust tushsa) tezlik vektorini sirkulyasiyasi quyidagicha yoziladi:

$$\oint_C (\vec{V} \cdot d\vec{s})$$

bu yerda S - yopiq konturdir.

Endi potentsialli maydon tushunchasini eslaylik. Agar ushbu $\vec{a} = \vec{a}(x^1, x^2, x^3, t)$ vektor maydoni berilgan bo'lib, bu maydon uchun shunday $\varphi(x^1, x^2, x^3, t)$ funksiya topish mumkin bo'lsaki, natijada $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ uchun

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}$$

o'rinli bo'lsa, berilgan maydon potentsialli maydon deyiladi. U holda $\varphi(x^1, x^2, x^3, t)$ funksiya maydon potentsiali deyiladi. Ko'rish qiyin emaski, potentsialli maydon uchun

$$\frac{\partial a_x}{\partial x^2} = \frac{\partial a_y}{\partial x^1}, \frac{\partial a_x}{\partial x^3} = \frac{\partial a_z}{\partial x^1}, \frac{\partial a_y}{\partial x^3} = \frac{\partial a_z}{\partial x^2}$$

bajarilishi kerak.

Agar potentsialli tezlik maydoni uchun sirkulyasiya ko'riladigan bo'lsa, yoza olamiz:

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \text{grad} \varphi \cdot d\vec{s} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A.$$

Bu yerda potentsialli maydonda yopiq kontur bo'yicha olingan tezlik vektorini sirkulyasiyasi nolga tengligi, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq esa bu chiziqning tuzilishiga bog'liq bo'lmay, sirkulyasiya ko'rilayotgan nuqtalardagi potentsiallar ayirmasiga tengligi isbotlanadi.

Endi tutash muhit tezligi bilan bog'liq bo'lgan tok chiziqlarini o'rganaylik. Tok chizig'i deb tutash muhit harakati jarayonida biror t onda o'tkazilgan shunday chiziqqa aytiladiki, bu chiziq har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinma yo'nalishi shu nuqtasi uchun t onda tezlik yo'nalishi bilan bir xil bo'lishi kerak. Agar bu ta'rifimizda $\vec{V}$ o'rniga $\vec{\omega} = 2 \text{rot} \vec{V}$ ko'rilsa, ko'rilayotgan chiziq uyurma chizig'i deyiladi. Tok chizig'i va uyurma chiziqlaridan tuzilgan (ular joylashgan) sirtlar mos ravishda tok sirtlari va uyurma sirtlari deyiladi.

Tok chiziqlarini berilgan tezlik maydoni bo'yicha tuzish uchun t va $t + \Delta t$ onlarni olaylik. Bunda $\vec{V}(x^1, x^2, x^3, t)$ uchun $d\vec{r} = \vec{V}(x^1, x^2, x^3, t) dt$ bo'ladi. Umuman olganda, tok chizig'i uchun dt o'rniga $d\lambda$ ni ham olish mumkin.

Agar $\vec{V}$ vaqtga bog'liq bo'lmasa, maydon statsionar, aks holda statsionar bo'lmagan maydon deyiladi. Demak, statsionar bo'lgan maydonda tok chiziqlari tutash muhit zarralari trayektoriyalaridan farq qilmaydi. Statsionar bo'lmagan harakat uchun esa ular umuman olganda turlicha chiziqlardan iborat bo'ladi.

Endi dekart koordinatalari sistemasida biror ondagi tezlik maydoni gradiyenti $\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j}$ bilan ish ko'raylik. Bu

tenzorni simmetrik va antisimmetrik tenzorlar yig'indisi sifatida yozish mumkin:

$$\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j} + \frac{\mathcal{N}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j} - \frac{\mathcal{N}_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + V_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j} + \frac{\mathcal{N}_j}{\partial x_i} \right) \text{ -simmetrik tenzor bo'lib, deformatsiya tezligi tenzoridir, } V_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{N}_i}{\partial x_j} - \frac{\mathcal{N}_j}{\partial x_i} \right)$$

-antisimmetrik tenzor uyurma tenzori deyiladi.

Masalalar yechishga doir namunalar

1-masala. $Ox'_1x'_2x'_3$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini bog'lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan. Bu jadvaldan foydalanib ortoganallik sharti bajarilishini, A(1,2,4) nuqtaning shtrixli koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini aniqlang va $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida hamda $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

Yechish.

Berilgan jadvaldan foydalanib ortoganallik sharti bajarilishini aniqlaymiz. Buning uchun ixtiyoriy satr(ustun)ning komponentalarini boshqa ixtiyoriy satr(ustun)ning mos komponentalariga ko'paytmalari yig'indisi nolga teng bo'lishi kerak:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \\ & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 0; \\ & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0; \\ & -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0. \end{aligned}$$

Demak ortoganallik sharti bajarilar ekan.

Shtrixli koordinatalar sistemasida A nuqtaning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -\frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 4 = -\frac{23}{5\sqrt{2}}; \\ x'_2 &= -\frac{4}{5} \cdot 1 + 0 \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot 4 = -\frac{16}{5}; \\ x'_3 &= \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 4 = \frac{19 + \sqrt{5}}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Demak, shtrixli koordinatalar sistemasida A $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{16}{5}, \frac{19+\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right)$ ga teng bo'ladi.

Tekislik tenglamasi shtrixli koordinatalarda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{aligned}
& Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = \\
& = A\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}x'_3\right) + B\left(-\frac{4}{5}x'_1 - \frac{3}{5}x'_3\right) + C\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 + \frac{4}{5\sqrt{2}}x'_3\right) \\
& + D = 0 \Rightarrow \\
& \left(-\frac{3A}{2\sqrt{5}} + \frac{4B}{5} + \frac{3C}{5\sqrt{2}}\right)x'_1 + \left(-\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}}\right)x'_2 + \left(-\frac{4A}{5\sqrt{2}} - \frac{3B}{5} + \frac{4C}{5\sqrt{2}}\right)x'_3 + D = 0
\end{aligned}$$

1 Bobga doir masalalar.

1. Indeksni sonli qiymatlaridan foydalanib, quyidagi ifodalarni yoyib yozing. O'zaro teng ifodalarni ko'rsating.

a) t_{ii} ;

b) $p_{ij}u_j, u_jp_{ij}, p_{ij}u_i, u_ip_{ij}$;

c) $q_{ij}a_ib_j, q_{ij}b_ja_i, b_jq_{ij}a_i, a_iq_{ij}b_j, a_ib_jq_{ij}, b_ja_iq_{ij}, q_{ij}a_jb_j$;

d) $a_{ij}b_{ij}, a_{ji}b_{ji}, a_{ij}b_{ji}, b_{ij}a_{ji}$.

2. a) $\delta_{ii}, \delta_{ij}\delta_{ji}, \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$ ifodalarni yigindisini hisoblang;

b) agar barcha indekslar $1, 2, \dots, n$ qiymatlarni qabul qilsa, ularning yigindisini hisoblang.

3. a) Quyidagi munosabatni qanoatlantiruvchi basis e_i berilgan, e^k birlik bazis bo'lishini ko'rsating:

$$e^i = g^{ik}e^k, e_j = g_{jk}e^k,$$

bu yerda $g^{ik} = \|g^{ij}\|$ matritsaning komponentalari, $\|g_{ij}\|$ teskari matritsa, $g_{ij} = e_ie_j$.

b) $e^ie^j = g^{ij}$ tenglikni tekshiring.

v) $uv = u^iv_i, v^i = e^iv, v_i = e_iv$ tenglikni tekshiring

g) e_i va e^j bazislarni o'zaro bir-biri orqali quyidagi formulalar bilan ifodalanishini tekshiring,

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{V_*}, e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{V_*}, e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{V_*}, V_* = e_1(e_2 \times e_3),$$

$$e_1 = \frac{e^2 \times e^3}{V^*}, e_2 = \frac{e^3 \times e^1}{V^*}, e_3 = \frac{e^1 \times e^2}{V^*}, V^* = e^1(e^2 \times e^3)$$

Bu yerda $e_2 \times e_3, e_2, e_3$ vektorlarning vektor ko'paytmasi, V_* - e_1, e_2, e_3 vektorlarning aralash ko'paytmasi.

d) Metrik tenzor komponentlari ma'lum bo'lsa, e_i va e^j vektorlar uzunligi qancha?

4. a) O'zaro ortonormallangan bazisni toping;

b) Har ikkitasining orasidagi burchagi $\frac{\pi}{3}$ ga teng bo'lgan e_i birlik vektorlar bazisi berilgan bo'lsin. Ularning o'zaro bazislarini toping. e^i vektor uzunligi qancha? $v = ae^1 + be^2 + ce^3$ vektorning kontravariant komponentalarini toping.

5. Ekvivalent tenzor komponentlari uchun quyidagi munosabatlarni to'g'riligini ko'rsating:

$$a) s_{ij} = s_{ji} \Leftrightarrow s^{kl} = s^{lk} \Leftrightarrow s_n^m = s_n^m;$$

$$b) a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow a^{kl} = -a^{lk} \Leftrightarrow a_n^m = -a_n^m.$$

6. Ikkinchi rang tenzor uchun quyidagi munosabatlar to'g'rimi:

$$a) t_{ij}^i = t_j^i; \quad b) t_{ij}^i = t_k^k?$$

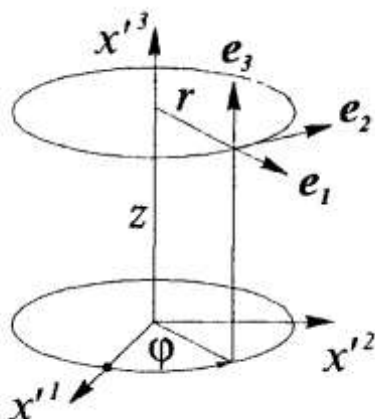
7. Silindr koordinatalar sistemasi

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z,$$

dekart kordinatalari bilan quyidagicha bog'langan (1-rasmga qarang):

$$x'^1 = r \cos \varphi, \quad x'^2 = r \sin \varphi, \quad x'^3 = z.$$

3-rasm.



b) quyidagi nuqtalarda silindrik kordinatalar sistemasi bazis vektorlarini toping va ularni dekart koordinatalar sistemasi bazislari bilan ifodalang:

$$M_1(r = 5; \varphi = 0; z = 0) \text{ va } M_2(r = 10; \varphi = \frac{\pi}{6}; z = 1).$$

b) silindr kordinatalar sistemasida metrik tenzorning kovariant, kontvariant va aralash komponentlarini toping.

v) M_1 va M_2 nuqtalarda o'zaro bazis vektorlarni toping.

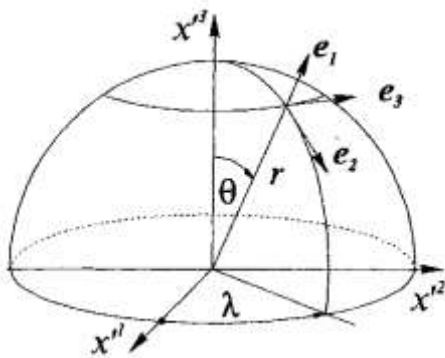
8. Tekislikdagi Dekart koordinatalar sistemasi bilan (x'^1, x'^2) $x'^1 = r \cos \varphi$, $x'^2 = r \sin \varphi$ ko'rinishida bog'langan e'^1 va e'^2 bazis vektorlarni $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ polyar koordinatalar sistemasi bo'yicha yoying.

9. (7) masaladagi silindr kordinatalar sistemasida p ikkinchi rang tenzor $p^{11} = a$, $p^{22} = b/r^2$ komponentlarga ega, qolgan komponentlari esa nolga teng. Shu tenzorning dekart kordinatalar sistemasidagi komponentlarini toping.

10. $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \lambda$ sferik kordinatalarni dekart kordinatalar bilan quyidagicha bog'langan (3.2-rasmga qarang),

$$x'^1 = r \sin \theta \cos \lambda, \\ x'^2 = r \sin \theta \sin \lambda,$$

$$x'^3 = r \cos \theta.$$



4-rasm.

Sferik kordinatalar sistemasi bazisini toping va ularni dekart sistema bazisi bilan ifodalang. Sferik kordinatalar sistemasida metrik tenzorning kovariant, kontvariant va aralash komponentlarini toping.

11. Dekart kordinatalar sistemasida v vektor quyidagi tenglik orqali aniqlangan bolsa, sferik kordinatalar sistemasida uni komponentlarini toping:

$$v = \frac{x'^1 e'_1 + x'^2 e'_2 + x'^3 e'_3}{\sqrt{(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2}}.$$

12. (x, y, z) dekart koordinatalari bilan $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ elliptik kordinatalar sistemasi quyidagicha bog'langan bo'lsa,

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0.$$

$dx^1 e_1 + dx^2 e_2 + dx^3 e_3$ element uzunligi kvadratini toping.

13. Uchta a_1, a_2, a_3 vektorlardan hosil qilingan $a_1(a_2 a_3) - a_2(a_3 a_1)$ vektorning a_3 ga perpendikulyarligini isbotlang.

14. Agar a_1 va $a_2 + a_3$ vektorlar bir-biriga perpendikulyar bo'lsa, $a_1 + a_2 + a_3$ va $a_1 - a_2 - a_3$ vektorlarning modullarini teng bo'lishini isbotlang.

15. $a = i + j - k$ va $b = i - j + k$ vektorlarning modullari orasidagi burchagini va a_b , b_a proeksiyalarini toping.

16. Komplanar bo'lmagan a_1, a_2, a_3 vektorlar bilan komplanar bo'lmagan b_1, b_2, b_3 vektorlar quyidagicha bog'langan bo'lsin:

$$a_1 = \alpha_{11} b_1 + \alpha_{12} b_2 + \alpha_{13} b_3,$$

$$a_2 = \alpha_{21} b_1 + \alpha_{22} b_2 + \alpha_{23} b_3,$$

$$a_3 = \alpha_{31} b_1 + \alpha_{32} b_2 + \alpha_{33} b_3.$$

a_1, a_2, a_3 va b_1, b_2, b_3 vektorlar uchtaliklari bir orientatsiyali bo'lsa,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} > 0 \text{ bo'ladi, turli orientatsiyali bo'lsa,}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ bo'ladi. Shularni isbotlang.}$$

17-23 masalalarda quyidagilarni aniqlang:

b) ortoganallik sharti bajarilishini;

b) $A(1, 2, 4)$ nuqtaning shtrixli koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini;

c) $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang;

d) $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

17.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

18.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x'_2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x'_3	0	0	1

19.

	x_1	x_2	x_3
--	-------	-------	-------

x'_1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x'_2	1	0	0
x'_3	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

20.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x'_2	1	0	1
x'_3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

21.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x'_2	0	0	1
x'_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

22.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

23.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

16-mavzu: Uzayish va siqilish.

Yevklid fazosidagi tutash muhitning t_0 - dastlabki holati ma'lum, ya'ni $\vec{X} = X^k \cdot \vec{e}_k$ vektor ma'lum deylik. U holda $t \geq 0$ onda ko'rilayotgan tutash muhit barcha nuqtalari holati ma'lum bo'lishi uchun deformatsiya tushunchasidan foydalanamiz. Biz tutash muhit nuqtasi deganimizda, oldinroq ta'kidlanganidek, shu geometrik nuqta bilan bog'liq tutash muhitning cheksiz kichik bo'lagini fikran ajratib qaraymiz. Geometrik nuqtani va uni xarakterlovchi ($t = t_0$ dagi $\vec{X} = X^k \cdot \vec{e}_k$ vektor va $t \geq 0$ da $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ vektor) vektorlarning uchidagi moddiy zarralar turlicha kichik hajm va uni qamrovchi sirtlariga

ega bo'lib, ular harakat davomida deformatsiyalanish imkoniyatiga ega. Tutash muhit uchun deformatsiyalanish uning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarishi tufayli paydo bo'ladi. Agar bu shart bajarilmasa, bunday muhit absolut qattiq jismdan farq qilmaydi. Deformatsiyalanish tutash muhit turli qismlarida miqdori va sifati bo'yicha turlicha bo'lishi mumkin. Tushinish qiyin emaski, bir-biriga cheksiz kichik masofadagi yaqin nuqtalar olinishi bilangina nuqtadagi deformatsiyalanishni o'rganish mumkin. Bu vazifani Lagranj koordinatalarida tekshiramiz. Albatta, bu deformatsiyalanishning mazmunini ravshanlashtirish va miqdorini aniqlash ahamiyatlidir. Tutash muhitning ixtiyoriy $\vec{X} = X^k \cdot \vec{e}_k$ vektor bilan berilgan nuqtasi barcha ixtiyoriy $t \geq t_0$ onda deformatsiya ma'lum bo'lsa, tutash muhit deformatsiyasi ma'lum deyiladi.

Ixtiyoriy nuqta atrofi deformatsiyasi ma'lum bo'lishi uchun shu nuqtada olingan ixtiyoriy yo'nalishdagi cheksiz kichik $\vec{X}_N(\vec{X} + \vec{\xi}) - \vec{X}_M(\vec{X})$ vektor – tola $d\vec{X} = \vec{\xi}$ ning deformatsiyasi ma'lum bo'lishi zarur va yetarliligi geometrik nuqtayi nazardan ravshandir. Ya'ni $t = t_0$ da

$$(d\vec{X})^2 = (\vec{\xi})^2 = \xi^i \xi^j \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} dX^i \cdot dX^j$$

Lekin $t = t_0$ da to'g'riburchakli Dekart koordinatalar sistemasi uchun $g_{ij} = \delta_{ij}$ bo'lgani tufayli

$$(d\vec{X})^2 = \xi^i \xi^j \cdot \delta_{ij} \text{ bo'ladi. Ma'lumki:}$$

$$(\vec{x})_M = \vec{x}(X^i, t)$$

$$(\vec{x})_N = \vec{x}(X^i + \xi^i, t)$$

Lekin $\vec{\rho} = (\vec{x})_N - (\vec{x})_M$ ni X^i nuqta atrofida qatorga yoysak, quyidagini topamiz:

$$\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k} \xi^k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i} dX^i + \dots$$

Ko'p nuqtalar bilan ko'rsatilgan hadlar birinchi hadga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik o'zgaruchilar

deb olsak va $\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k} \xi^k$ Lagranj koordinatalariga bog'liq ifodaligini eslab yoza olamiz:

$$\vec{\rho} = \vec{\rho} \cdot dX^k = \vec{\rho}_k \cdot \xi^k$$

Demak, $t = t_0$ dagi $\vec{\xi} = \xi^k \cdot \vec{e}_k$ tola $t \geq t_0$ da $\vec{\rho} = \xi^k \cdot \vec{\rho}_k$ bo'ladi.

$$\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k} \xi^k \text{ dan } \rho^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \cdot \xi^k \text{ orqali bu almashtirishda } A_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \text{ matritsa } \vec{\xi} \text{ ni } \vec{\rho} \text{ ga}$$

ko'rilyotgan nuqta atrofida affin (chiziqli) almashtiradi. Uni $\vec{\rho} = \tilde{A} \vec{\xi}$ sifatida yozish mumkin. $\tilde{A}$ operatori uchun quyidagilar o'rinli:

1. $\tilde{A}(\vec{\xi} + \vec{\eta}) = \tilde{A}\vec{\xi} + \tilde{A}\vec{\eta}$
2. $\tilde{A}(k\vec{\xi}) = k \cdot \tilde{A} \cdot \vec{\xi}$
3. $\tilde{A}(\vec{X}, t)$ operatori $\vec{\xi}$ ga bog'liq emas, bunday operator affinor deyiladi.

Faraz qilaylik, tutash muhitning ko'rilyotgan nuqtasi atrofi uchun $(\|A_k^i\| \neq 0 \text{ bo'lsin deylik. U holda } \xi^i = B_k^i \cdot \rho^k \text{ bo'ladi.}$

Bu yerda $B_k^j = \frac{\partial X^j}{\partial \rho^k}$ va $A_k^i \cdot B_j^k = \delta_j^i$ bo'ladi.

Affin almashtirishning xossalari:

- a) tekislik tekislikka o'tadi (ya'ni akslanadi);
- b) nuqta nuqtaga almashinadi, ya'ni akslanadi;
- c) biror chiziq ikkinchi bir chiziqqa almashinadi;
- d) parallel tekisliklar parallel tekisliklarga almashinadi.

Yuqoridagi xossalari asosida ko'rish qiyin emaski, $\vec{\xi}$ tola (vektor) $\vec{\rho}$ tolaga (vektorga) o'tadi. Masalan, $\xi^i \cdot \xi^i = R^2$ sfera $B_k^i \cdot B_j^i \cdot \rho^k \cdot \rho^j = R^2$ ellipsoidga o'tadi.

Shunday qilib, biz yuqorida

$$\vec{\xi} = \xi^k \cdot \vec{e}_k \rightarrow \vec{\rho} = \xi^k \cdot \vec{\varepsilon}_k \left(\vec{\varepsilon}_k = \frac{\partial \vec{X}}{\partial X^k} \right)$$

$\vec{\rho} = \rho^k \cdot \vec{e}_k$ ifodalarni hosil qildik. Yoza olamiz:

$$\vec{\xi}^2 = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \xi^2 = \delta_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j, \left(\delta_{ij} = g_{ij} \Big|_{t=t_0} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \right)$$

$$\vec{\rho}^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = g_{ij} \cdot \xi_i \xi_j, \left(g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j \right)$$

$$\rho^2 - \xi^2 = (g_{ij} - \delta_{ij}) \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

Endi tola uchun quyidagi nisbiy o'zgarishni xarakterlovchi miqdorni

$$e_\xi = \frac{\rho - \xi}{\xi} = \frac{\rho}{\xi} - 1$$

va

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.18)$$

rangi ikkidan iborat tenzor elementlari ifodasini kiritaylik. U holda:

$$\rho^2 - \xi^2 = 2\varepsilon_{ij} \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

va

$$\frac{\xi^i}{|\vec{\xi}|} = l^i$$

desak,

$$\frac{\rho^2 - \xi^2}{|\vec{\xi}|^2} = 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j$$

bo'ladi.

U holda

$$e_\xi = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j} - 1$$

ga ega bo'lamiz.

ε_{ij} metrik tenzorlar elementlari orqali ifodalanganligi tufayli, shubhasiz tenzor elementlari bo'la oladi va uni E bilan belgilaymiz:

$$E = \varepsilon_{IJ} (\vec{\varepsilon}^I \otimes \vec{\varepsilon}^J) \quad (2.19)$$

(2.19) bilan birga ko'rilayotgan Lagranj koordinatalarida ushbu $E = \varepsilon^{ij}(\bar{\varepsilon}_i \otimes \bar{\varepsilon}_j)$, $E = \varepsilon^i_j(\bar{\varepsilon}_i \otimes \bar{\varepsilon}^j)$ larga ham ega bo'lamiz.

Bu tenzor deformatsiya tenzori deyiladi va tutash muhit nuqtasi atrofi deformatsiyasini aniqlaydi.

Shunday qilib, (2.18) formula Lagranj koordinatalarida aniqlandi va ixtiyoriy dastlabki $t = t_0$ da olingan $\bar{X} = X^k \cdot \bar{e}_k$ nuqtadagi cheksiz kichik $\bar{\xi}$ tola (o'zaro tik koordinatalar sistemasida-Dekart koordinatalar sistemasida aniqlangan) $\bar{\rho} = \xi^i \cdot \bar{\varepsilon}_i$ tola bo'lib o'zgaradi. O'zaro tik birlik bazis e_i vektorlar umumiy holda $|\bar{\varepsilon}_i| \neq 1$ ga mos ravishda o'tadi. Ixtiyoriy $t \geq t_0$ uchun $\bar{\varepsilon}_i$ lar Lagranj koordinatalarida aniqlanadi va nuqta ko'chgan yangi holat uchun o'zaro tik bo'lishi shart bo'lmagan bazis vektorlarni tashkil etadi. Agar dastlabki ($t = t_0$) da nuqta atrofida olingan tola uchun o'zaro tik $\bar{e}_i$ bazislar o'zaro tikligi $t \geq t_0$ da ham saqlansa va ularning uzunliklari (ular birga teng) ham saqlansa, ko'rilayotgan tutash muhit zarrasi deformatsiyalanmaydi va u absolut qattiq jism uchun olingan $\bar{\xi}$ tola kabi fazoda Lagranj koordinatalarida ilgarilama va aylanma harakatni (yoki ular yig'indisi bo'lgan vint harakatini) sodir etishi mumkin. U holda $t = t_0$ da olingan $\dot{g}_{ij}$ (bu ifoda xususiy holda, biz ko'rgandek $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ bo'lishi mumkin va bunday olinishi Yevklid fazosida umumiyatga zid emas) $\dot{g}_{ij}$ ga teng bo'lganicha (yoki δ_{ij} bo'lganicha) qoladi va deformatsiya sodir bo'lmaydi.

17-mavzu: Deformatsiya tenzori, uning bosh o'qlari va qiymatlari.

Biz ko'rdikki, deformatsiya tenzori - simmetrikdir. Shuning uchun $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ tenzor elementlari bilan tutash muhitning har bir nuqtasida $\varepsilon_{ij} dx^i dx^j = C$ kvadratik formani tuzish mumkin. Ma'lumki, agar $\varepsilon_{ij} dx^i dx^j$ kvadratik forma tutash muhit biror nuqtasiga tegishli bo'lsa, algebradan ma'lumki, shu nuqtada uni kanonik ko'rinishga keltirish mumkin, ya'ni

$$\varepsilon_1(d\eta^1)^2 + \varepsilon_2(d\eta^2)^2 + \varepsilon_3(d\eta^3)^2 = C_1$$

Bu yerda η^1, η^2, η^3 koordinata o'qlari - o'zaro tik o'qlardir. Bunda ε_{ij} lar koordinata o'qlari o'zgarishiga qarab o'zgaradi va η^1, η^2, η^3 larga nisbatan $\varepsilon_{ij} = 0$ ($i \neq j$) bo'ladi. O'zaro tik η^1, η^2, η^3 lar ma'lum bo'lsa, kvadratik forma $\varepsilon_{ij} dx^i dx^j$ bilan birga bu koordinata sistemasida $\varepsilon_{ij} dx^i dx^j$ ham kanonik ko'rinishga keladi.

Shunday qilib, deformatsiyalanuvchi tutash muhit istalgan nuqtasi atrofi deformatsiyasi ε_{ij} bilan beriladigan bo'lsa, shu nuqtada deformatsiya jarayoni davomida o'zaro tik bo'lib uzluksiz harakatlanadigan (yoki o'z yo'nalishlarini o'zgartirmaydi) 3 ta o'qlarni tuzish mumkin. Bu o'qlarga nisbatan $\varepsilon_{ij} dx^i dx^j$ kvadratik forma ko'rilganda, u eng sodda holda bo'lib, deformatsiyani xarakterlovchi tenzor elementlaridan tuzilgan matritsa diagonal matritsadan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, bosh o'qlarga nisbatan ushbu matritsalariga ega bo'lamiz:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_{.1}^1, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_{.2}^2, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon_{.3}^3 \end{pmatrix}$$

Tushunish qiyin emaski, bu holda o'qlar bo'ylab olingan tola uchun faqat cho'zilish yoki siqilish deformatsiyasiga mavjud bo'lishi mumkin.

Endi deformatsiya tenzorining bosh komponentalari haqida fikr yuritaylik. Dastlabki $t = t_0$ momentda, ya'ni boshlang'ich paytda tutash muhit holati ma'lum deyishimiz kerak. Bu paytda, asosan, eng tabiiy holat sifatida tutash muhit deformatsiyalanmagan va uning holatini uch o'lchovli o'zaro tik Dekart koordinata sistemasida berish mumkin. Lekin shunday hol ko'rilishi mumkinki, biz ko'rayotgan $t = t_0$ deb olingan dastlabki paytda tutash muhit deformatsiyalangan bo'lishi va tekshirishlarni $t = t_0$ holat uchun ana shu ma'lum holat asosida o'rganilishi talab qilinishi mumkin. U holda $t = t_0$ momentda tutash muhit barcha nuqtalari uchun dastlabki deformatsiyalanganlik holati ma'lum va shu asosda $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})$ dan $t = t_0$ da $\dot{g}_{ij}$ (va demak $\dot{\varepsilon}_{ij}$) ma'lum deb olamiz.

Shunday qilib, $t \geq t_0$ holat uchun ε_{ij} quyidagicha aniqlanishini ko'rish qiyin emas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \dot{g}_{ij}) \quad (2.20)$$

Agar biror $t \geq t_0$ moment uchun bosh o'qlar ma'lum bo'lsa va bu o'qlarni η^1, η^2, η^3 bilan belgilab, bu o'qlar bo'ylab $d\vec{x}$ vektorini olsak $d\vec{x} (ds_1, ds_2, ds_3)$. U holda yoza olamiz:

$$(ds_\alpha)^2 = g_{\alpha\alpha}(d\eta^\alpha)^2.$$

Ixtiyoriy yo'nalishdagisi uchun

$$|d\vec{x}|^2 = (ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 + (ds_3)^2.$$

$$t = t_0 \text{ da esa: } (ds_{0\alpha})^2 = \dot{g}_{\alpha\alpha}(d\eta^\alpha)^2.$$

$$(ds_0)^2 = (ds_{01})^2 + (ds_{02})^2 + (ds_{03})^2.$$

Bu yerdan

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{11} - \dot{g}_{11})(d\eta^1)^2 + (g_{22} - \dot{g}_{22})(d\eta^2)^2 + (g_{33} - \dot{g}_{33})(d\eta^3)^2$$

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - \dot{g}_{ij} \text{ dan}$$

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2[\varepsilon_1(ds_1)^2 + \varepsilon_2(ds_2)^2 + \varepsilon_3(ds_3)^2] =$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}(ds_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_{ii}}{\dot{g}_{ii}}(ds_{0i})^2$$

Lekin

$$\frac{\varepsilon_{ii}}{g_{ii}} = \varepsilon_{ii} \cdot g^{ii} = \varepsilon_i^i = \varepsilon_i, \quad \frac{\varepsilon_{ii}}{\dot{g}_{ii}} = \dot{\varepsilon}_i$$

Shunday qilib,

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2 \cdot \sum \varepsilon_i (ds_i)^2 = 2 \sum \dot{\varepsilon}_i (ds_{oi})^2$$

ε_i va $\dot{\varepsilon}_i$ lar deformatsiya tenzori bosh komponentalari deyiladi.

2.5-§. DEFORMATSIYA TENZORI SIRTILAR INVARIANTLAR

Shunday qilib, deformatsiyalangan tutash muhit har bir nuqtasida shu nuqtaning funksiyalari sifatida 6 ta ε_{ij} ga egamiz. Ular nuqtadan nuqtaga o'tishda, umuman olganda, o'zgarishi bilan birga vaqtga ham bog'liq bo'lishi mumkin. Deformatsiya tenzori bosh o'qlari va bosh qiymatlari ustida fikr yuritilganda har bir ondagi yo'nalish va qiymatlar nazarda tutiladi. Olingan har bir nuqta uchun to'g'ri burchakli Dekart koordinata sistemasi kiritib, ushbu $\varepsilon_{ij} x^i \cdot x^j = c^2$ kvadratik forma orqali tuzilgan ikkinchi tartibli sirt deformatsiya tenzori sirti deyiladi. Deformatsiya tenzori bosh o'qlari va bosh qiymatlari shu sirtning bosh o'qlari va bosh qiymatlari bilan bir xil qilib olinishi mumkin. Analitik geometriyadan ma'lumki, ikkinchi tartibli sirtlar o'z invariantlariga ega bo'ladilar, ya'ni shu sirtning xarakterlovchi shunday 3 ta skalyar miqdor ko'rsatish mumkinki, deformatsiyalangan tutash muhit har bir nuqtadagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirganda bu miqdorlar o'zgarmaydilar va ular, tabiiy holda, ε_{ij} lar orqali aniqlanadilar.

Agar bosh o'qlarni x^i lardan farqlash uchun η^i lar bilan belgilasak, ularga nisbatan deformatsiya tenzori sirti quyidagicha bo'ladi:

$$\varepsilon_1(\eta^1)^2 + \varepsilon_2(\eta^2)^2 + \varepsilon_3(\eta^3)^2 = c_1^2 \quad (2.21)$$

Endi yuqorida aytilgan bosh qiymatlar va bosh o'qlarni topish bilan shug'ullanamiz.

Agar $2F(x^1, x^2, x^3) = \varepsilon_{ij} x^i x^j = c^2$ desak, bosh yo'nalishlar uchun $\text{grad}F = \lambda \vec{x}$ bo'lishi kerak.

Bu yerda λ -skalyar miqdor.

Agar $\vec{e}_i$ - birlik bazis vektorlar kiritsak, yoza olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_i = \lambda x^j \vec{e}_j$$

$$(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j) \cdot x^j = 0$$

Bundan

$$(\varepsilon_{i1} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_1) = 0$$

$$(\varepsilon_{i2} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_2) = 0$$

$$(\varepsilon_{i3} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$\vec{e}_i$ lar o'zaro tik birlik bazislar bo'lganligi tufayli

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

bo'lishi kerak.

Bundan

$$-\lambda^3 + J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda + J_3 = 0$$

Bu yerda

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$J_2 = \left(J_1^2 - \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \right) \cdot \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

$$J_3 = \det \varepsilon_{ij}$$

Bu miqdorlar - deformatsiya tenzori sirtining invariantlaridir.

Bu tenglamaning haqiqiy, o'zaro teng bo'lmagan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ildizlari bosh miqdorlarni belgilaydi. Masalan, xususiyl holda, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ bo'lsa, deformatsiya tenzori sirti sferadan iborat bo'ladi va barcha o'zaro tik qilib olingan (tekshirilayotgan nuqta uchun) yo'nalishlar bosh yo'nalishlar bo'ladi va bosh miqdorlar o'zaro teng bo'ladi.

Deformatsiya tenzori sirtining bosh yo'nalishlarini topaylik. Buning uchun yuqoridagi

$$(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j) \cdot x^j = 0$$

ifodaning har ikkala tomonini birlik bazis vektor $\vec{e}_i$ ga skalyar ravishda ko'paytiramiz:

$$(\varepsilon_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}) \cdot x^j = 0$$

Agar

$$l^i = \frac{x^i}{|\vec{x}|} = \cos(\vec{l} \cdot \vec{e}_i) \quad \text{kiritsak}$$

$$(\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \cdot l^j = 0 \quad (2.23)$$

va $(l^1)^2 + (l^2)^2 + (l^3)^2 = 1$ ifodalarga ega bo'lamiz va bulardan har bir λ_i ga mos ravishda to'g'ri keladigan 3 ta bosh yo'nalishlarni topa olamiz.

Masala. Ushbu deformatsiya tenzori berilgan

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenzorning invariantlari, bosh qiymatlari, bosh yo'nalishlari va ularga nisbatan deformatsiya sirti tenglamasi yozilsin.

Yuqorida keltirilgan invariantlar J_1, J_2, J_3 larni hisoblash formulalaridan ε_{ij} qiymatlarini bevosita qo'yish orqali hisoblab topamiz:

$$J_1 = 15, J_2 = 68, J_3 = 96$$

Bosh qiymatlarni topish uchun ushbu tenglamaga ega bo'lamiz:

$$-\lambda^3 + 15\lambda^2 - 68\lambda + 96 = 0$$

Olingan kubik tenglama yechimlarini topish orqali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ildizlarni topishimiz kerak. Bu ildizlarni topish, yuqorida keltirilgandek, ushbu determinant ko'rinishidagi tenglamani yechishga keltirish osonlik bilan bajariladi:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 = 3, \lambda_2 = \varepsilon_2 = 4, \lambda_3 = \varepsilon_3 = 8$$

Shunday qilib, hozircha noma'lum o'zaro tik bo'lgan bosh yo'nalishlar bo'yicha deformatsiyalar 3, 4, va 8 ga tengdir. Bu yo'nalishlarni topaylik. $\lambda_1 = \varepsilon_1 = 3$ ga teng deformatsiya sodir bo'layotgan o'qni η_1 bilan, $\lambda_2 = \varepsilon_2 = 4$ ga teng deformatsiya sodir bo'layotgan yo'nalishni η_2 va $\lambda_3 = \varepsilon_3 = 8$ ga teng deformatsiyalangan o'qni η_3 deylik. Bu η_i lar o'zaro tik va ularning har biri dastlabki X_i koordinatalariga nisbatan qanday yo'nalganligini topish bosh yo'nalishlarni topishdan iborat bo'ladi. Har bir λ_i ga mos keluvchi yo'nalish deb dastlabki koordinatalar sistemasiga nisbatan yo'naltiruvchi vektori $(l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, l_3^{(i)})$ bo'lgan vektor tushinilar edi.

Ularni topamiz.

$\lambda_1 = 3$ ga mos keluvchi $(l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, l_3^{(1)})$ ushbu sistemadan topiladi:

$$\begin{cases} (4-3) \cdot l_1^{(1)} + 0 \cdot l_2^{(1)} + 0 \cdot l_3^{(1)} = 0 \\ 0 \cdot l_1^{(1)} + (7-3) \cdot l_2^{(1)} + 2 \cdot l_3^{(1)} = 0 \\ 0 \cdot l_1^{(1)} + 2 \cdot l_2^{(1)} + (4-3) \cdot l_3^{(1)} = 0 \\ (l_1^{(1)})^2 + (l_2^{(1)})^2 + (l_3^{(1)})^2 = 1 \end{cases}$$

Sistemaning yechimlarini topamiz:

$$\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \mp \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$\lambda_2 = 4$ ga mos keluvchi $(l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, l_3^{(2)})$ ning qiymatlarini ham yuqoridagidek topamiz:

$$(\pm 1, 0, 0)$$

$\lambda_3 = 8$ uchun esa $\left(0, \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ ga ega bo'lamiz. Qavs ichidagi ishoralar

$l_1^{(i)} \cdot l_1^{(j)} + l_2^{(i)} \cdot l_2^{(j)} + l_3^{(i)} \cdot l_3^{(j)} = 0$ shart asosida tanlanishi kerak bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak, η^i koordinatalar sistemasi yo'nalishlari qavslar ichidagi birinchi ishorali sonlar tanlanishi hisobiga amalga oshiriladi.

Izlanayotgan deformatsiya tenzori sirti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\varepsilon_1(\eta_1)^2 + \varepsilon_2(\eta_2)^2 + \varepsilon_3(\eta_3)^2 = c_1^2$$

$$3 \cdot \eta_1^2 + 4 \cdot \eta_2^2 + 8 \cdot \eta_3^2 = c_1^2$$

$$\left(\frac{\eta_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}c_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\frac{1}{2}c_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta_3}{\frac{1}{2\sqrt{2}}c_1}\right)^2 = 1$$

Demak, deformatsiya tenzori sirti ellipsoiddir.

18-mavzu: Deformatsiya tenzori komponentalarini ko'chish orqali ifodalash. Grin va Al'mansi tenzorlari.

2.7-§. DEKART KOORDINATALAR SISTEMASIDA

ε_{ij} NING KO'CHISHLAR ORQALI IFODASI

To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi amalda ko'p ishlatilishi tufayli deformatsiya tenzori E ning ε_{IJ} elementlarini ko'chish vektori $\vec{u}(\vec{X}, t)$ orqali ifodasini keltirish maqsadga muvofiqdir. ε_{IJ} larning ko'chish vektori komponentalari orqali Lagranj koordinatalarda ifodalaymiz. Buning uchun oldingi paragrafda keltirilgan formulalarda $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ ekanligini nazarda tutib, izlanayotgan ifodalar formulalarini xususiy hol sifatida yoza olishimiz mumkin. Lekin biz bu yerda izlanayotgan formulalarni oddiy hisoblashlar orqali keltiramiz. Ma'lumki:

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})$$

$$g_{ij} = (\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j), \quad \vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i} = \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial X^i}, \frac{\partial x^2}{\partial X^i}, \frac{\partial x^3}{\partial X^i} \right\}$$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}, \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

Yoza olamiz:

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} = \frac{\partial X^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^i} = \delta_{ki} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i}$$

Bundan:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^j} \right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^i} \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right) = \\ &= \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} + \delta_{ki} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} + \delta_{kj} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} = \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} \end{aligned}$$

Bu ifodani ε_{IJ} ifodasiga qo'yib topa olamiz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} \right) \quad (2.29)$$

Ilova 1.

Agar tutash muhit harakati Dekart koordinatalarida, yuqorida ta'kidlagandek, $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\vec{X}, t)$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ tenzori deformatsiya moddiy gradienti tenzori deyiladi. Harakat Eyler koordinatalarida berilgan bo'lsa, $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ deformatsiyaning

fazoviy gradienti deyiladi.

$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$ -Koshining deformatsiya tenzori,

$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$ -Grinning deformatsiya tenzori deyiladi.

Ilova 2.

(2.28) formula ko'chish vektorining Lagranj koordinatalari orqali ifodalash orqali olinganligi tufayli uni Lagranjning chekli deformatsiya formulasi ham deyiladi. Bu tenzorni Grinning chekli deformatsiya tenzori deb ham ataladi. Chekli deformatsiyaning Eyler koordinatalaridagi ifodasi (2.27) asosida olinadi va uning ifodasi Dekart koordinatalarida quyidagicha bo'ladi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.30)$$

Bu tenzorni Eylerning chekli deformatsiya tenzori (yoki Almansining chekli deformatsiya tenzori ham deyiladi). (2.29) va (2.30) formulalar tutash muhit ixtiyoriy nuqtasidagi mazmun jihatdan yagona bo'lgan deformatsiya o'lchovlarining mos ravishda Lagranj va Eyler koordinatalaridagi ifodalaridir, ularni, yuqorida ta'kidlangandek, L_{ij} va E_{ij} deb ham belgilanadi.

2.8-§. DEFORMATSIYANING BIRGALIKDA BO'LISH SHARTI

Lagranj koordinata sistemasida berilgan 6 ta ε_{IJ} larni, ya'ni $\varepsilon_{IJ} = \varepsilon_{ij}(X^k, t)$ ni ko'raylik. Tutash muhit uchun ε_{IJ} lar turlicha erkin holda berilsa, tutash muhit deformatsiyasi birgalikda bo'lmay qolishi mumkin. Ya'ni tutash muhitda bo'shliq mavjud bo'lib qolishi yoki bir nuqtada bir nechta tutash muhit zarrasi joylashishiga to'g'ri kelardi. Lekin bu hol bo'lishi mumkin emas, chunki $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ formulamizga ko'ra tutash muhitning har bir ikki vaqtdagi holati, biri ikkinchisidan uzluksiz va bir qiymatli ko'chish tufayli hosil bo'ladi. Bunda ε_{IJ} lar shu $\vec{u}(u^1, u^2, u^3)$ lar orqali (3 ta komponentasi orqali) ifodalangan. Demak, ε_{IJ} lar o'rtasida ko'chishga shartlar - tenglamalar mavjud bo'lishi kerakki, bu asosda deformatsiyaning birgalikda bo'lish sharti topiladi.

Har bir nuqtada ε_{IJ} lar soni 6 ta bo'lib, ular ko'chish vektorini komponentalari hosilalari orqali ifodaga ega. Demak, ε_{IJ} lar ixtiyoriy ravishda, bir biriga bog'liq bo'lmagan holda berilishi mumkin emas. Agar ular ixtiyoriy bo'lganda, tutash muhit deformatsiyalangan paytda g'ovaklar yoki bir nuqtaga ko'chishning ikki xil qiymati mos kelishi mumkin edi. ε_{IJ} lar o'rtasidagi bunday munosabatni fazoning Yevklidligi bajarilishi shartidan hosil qilamiz.

Ma'lumki,

$$\frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^j} = \Gamma_{ij}^k \cdot \vec{\Xi}_k \quad (2.31)$$

Shuningdek, $d \vec{\Xi}_i = \frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^j} d\alpha^j$ bo'lib, bu yerda $\frac{\partial^2 \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^l \partial \alpha^j} = \frac{\partial^2 \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^j \partial \alpha^l}$ shart bajarilishi kerak. Yoza olamiz:

$$\frac{\partial^2 \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^j \partial \alpha^l} - \frac{\partial^2 \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^l \partial \alpha^j} = R_{jli}^m \cdot \vec{\Xi}_m$$

Ushbu R_{jlik} tenzor kovariant egrilik tenzori deyiladi.

$$R_{jli}^m g_{mk} = R_{jlik}$$

(2.31) ning integrallanish sharti $R_{jli}^m = 0$ dir.

Yoza olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \left(\frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^l} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha^j} (\Gamma_{il}^m \cdot \vec{\Xi}_m) = \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} \cdot \vec{\Xi}_m + \Gamma_{il}^k \cdot \frac{\partial \vec{\Xi}_k}{\partial \alpha^j} = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} \cdot \vec{\Xi}_m + \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{kj}^m \vec{\Xi}_m = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} + \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{kj}^m \right) \cdot \vec{\Xi}_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^l} \left(\frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^j} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha^l} (\Gamma_{ij}^m \cdot \vec{\Xi}_m) = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \alpha^l} \cdot \vec{\Xi}_m + \Gamma_{ij}^m \cdot \frac{\partial \vec{\Xi}_m}{\partial \alpha^l} = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \alpha^l} \cdot \vec{\Xi}_m + \Gamma_{ij}^m \cdot \Gamma_{ml}^k \vec{\Xi}_k = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \alpha^l} + \Gamma_{ij}^k \cdot \Gamma_{kl}^m \right) \cdot \vec{\Xi}_m \end{aligned}$$

Shunday qilib, deformatsiya birgalikda bo'lish shartini topamiz:

$$\frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \alpha^l} + \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{ij}^k \cdot \Gamma_{kl}^m = R_{jli}^m = 0 \quad (2.32)$$

Agar

$$R_{jlik} = g_{km} \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial \alpha^l} + \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{kj}^m - \Gamma_{ij}^k \cdot \Gamma_{kl}^m \right)$$

deb olsak, R_{jlik} kovariant komponentali 4 rang egrilik tenzori bo'ladi.

Ushbu munosabatni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} &= \frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{\Xi}_j + \vec{\Xi}_i \cdot \frac{\partial \vec{\Xi}_j}{\partial \alpha^k} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \vec{\Xi}_i \cdot \Gamma_{jk}^m \cdot \vec{\Xi}_m = \\ &= \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m \cdot g_{im} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} \end{aligned}$$

U holda

$$\frac{\partial(\Gamma_{il}^m g_{km})}{\partial \alpha^j} = \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial \alpha^j} g_{km} + \Gamma_{il}^m \cdot \frac{\partial g_{km}}{\partial \alpha^j}$$

Yuqoridagi ifodalardan foydalanib yoza olamiz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{il,k}}{\partial \alpha^j} - \Gamma_{il}^m (\Gamma_{kj,m} + \Gamma_{mj,k}) - \left[\frac{\partial \Gamma_{ij,l}}{\partial \alpha^l} - \Gamma_{ij}^m (\Gamma_{kl,m} + \Gamma_{ml,k}) \right] + \\ & + \Gamma_{il}^k \cdot \Gamma_{nj,k} - \Gamma_{ij}^n \cdot \Gamma_{nl,k} = 0 \end{aligned}$$

Shunday qilib:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij,k}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij,l}}{\partial \alpha^k} + \Gamma_{ij}^m \cdot \Gamma_{kl,m} - \Gamma_{il}^m \cdot \Gamma_{kj,m} = 0.$$

Kristoffelning 1- va 2- tur simvollarini metrik tenzor orqali, ya'ni deformatsiya tenzori orqali ifodalab yozish mumkin. Haqiqatan ham:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \alpha^k}$$

(chunki Dekart koordinatasi $g_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}$). U holda tutash muhit deformatsiyasi birgalikda bo'lish sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{lk}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^i} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial \alpha^l \partial \alpha^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \alpha^l \partial \alpha^i} + \Gamma_{kl,m} \cdot \Gamma_{ij}^m - \Gamma_{kj,m} \cdot \Gamma_{il}^m = 0 \quad (2.33)$$

Tekshirish mumkinki, egrilik tenzori uchun:

$$R_{jlik} = -R_{ljik}$$

$$R_{jlik} = -R_{jlik} \quad (2.34)$$

$$R_{jlik} = -R_{ikjl}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, 6 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan deformatsiya birgalikda bo'lish sharti tenglamalarini hosil qilamiz. Hosil qilingan bu munosabatlardagi so'nggi ikkinchi had, chiziqli bo'lmagan hadlardan iborat (deformatsiya tenzori komponentalari va ularning birinchi hosilalariga bog'liqdir).

2.9-§. CHEKSIZ KICHIK DEFORMATSIYA

Tutash muhitning tekshiralayotgan istalgan vaqt uchun $\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$ ko'chishida

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \approx \delta, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \approx \delta^2$$

bo'lsin deylik (δ -cheksiz kichik miqdor). U holda tutash muhit uchun ixtiyoriy biror nuqtasi nisbiy ko'chishini nolga teng deb, shu koordinata sistemasida qaralayotgan ko'chishning hosilasigina emas, o'zi ham cheksiz kichik bo'lishini ko'rish mumkin.

U holda Dekart koordinata sistemasida:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

yoki umuman ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalarda

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$$

bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida cheksiz kichik deformatsiyani tahlil etaylik. (2.26) va (2.27) formulalar Dekart koordinatalarida cheksiz kichik deformatsiyalanish uchun mos ravishda

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{va} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va ularni 2 ilova asosida (2.7-§.) quyidagicha yozish mumkin:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{va} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

Agar ko'chish vektori kichik bo'lsa, $x_i \approx X_i$ deb olish mumkin. Shuning uchun ε_{ij} larni hisoblaganda Lagranj va Eyler koordinatalari o'rtasida farq yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar darajasida bo'ladi. Shuning uchun $L_{ij} = E_{ij} = \varepsilon_{ij}$ deb olinadi va ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Bu ifoda ***Koshining cheksiz kichik deformatsiyalar tenzori*** deyiladi.

Endi bu hol uchun deformatsiya birgalikda bo'lishi shartini ko'raylik. Yuqoridagi δ va δ^2 tartibdagi ifodalar e'tibori asosida cheksiz kichik deformatsiya uchun deformatsiya birgalikda bo'lish sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} = 0$$

Bundan o'zaro bo'g'liq bo'lmagan quyidagi tenglamalarni (bu tenglamalar elastiklik nazariyasida Sen-Venan tenglamalari deyiladi) hosil qilish mumkin:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}; \\
2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}; \\
2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \cdot \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

(2.33) munosabat 81 ta teglamani beradi, lekin ulardan 6 tasidan boshqasi (2.34) tenglamalar ayniyatlardan iborat bo'ladi.

2.10-§. CHEKSIZ KICHIK DEFORMATSIYA TENZORI ELEMENTLARINING MEXANIK MA'NOSI

Deformatsiya tenzori elementlari ε_{ij} larni, albatta, Eyler va Lagranj koordinatalarida yozish mumkin. Deformatsiyalanganlik holatini, ya'ni tutash muhit zarrasi deformatsiyasi dastlabki holatidan (ma'lum Lagranj koordinatalari bilan berilgan deb qaraylik) ikkinchi boshqa bir holatga uzluksiz jarayon davomida ko'chib, biror ondagi holati ε_{ij} orqali aniqlanishini ko'rdik. Endi xususiy holni, ya'ni ko'chish vektorining hosilasi cheksiz kichik miqdor bo'lgan holni ko'raylik. Lekin hosilaning kichik bo'lishidan cheksiz kichik deformatsiyalanganlik doimo kelib chiqavermasligi mumkin. Buning uchun qo'shimcha ravishda tutash muhit harakati ko'rilyotganda uning ixtiyoriy biror nuqtasi nisbiy ko'chishi nolga teng deb qaralayotgan koordinatalar sistemasida tekshirish olib borilishi kerak. U holda

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \leq \delta, \quad \delta \ll 1 \quad \text{bo'lsa, } |\vec{u}| \text{ - ko'chish vektori } \delta \text{ tartibda bo'ladi, ya'ni bu yerda } \delta \text{ tutash muhit}$$

egallagan fazo bo'lagi tartibidagi sondan kichik sonidir. U holda deformatsiyalanganlik holati cheksiz kichik deformatsiyalanganlik holati deyiladi va ε_{ij} larni biror so'ngi holatidagi fazo nuqtasida emas, balki uning dastlabki holatiga nisbatan ko'rish cheksiz kichik xatolikka olib keladi. Demak, bu yerda tutash muhitning dastlabki koordinatasi bo'lishi Lagranj koordinatalari va umuman, biror so'ngi holatini akslantiruvchi Eyler koordinatalari o'rtasidagi farq cheksiz kichik xatolikka olib keladi. U holda, tutash muhit deformatsiyasini uning dastlabki holatini aniqlovchi koordinatalarga nisbatan ko'rish mumkin. Mana shu mulohazalar asosidagi cheksiz kichik deformatsiya tenzori elementlari ε_{ij} larning mexanik ma'nosini tasvirlashga urinaylik. Biz ushbu formulaga ega edik:

$$(1 + e_{\xi})^2 = 1 + 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j$$

bu yerda

$$l^i = \frac{\xi^i}{|\vec{\xi}|} - \vec{\xi} \text{ vektor-tolaning } i \text{ o'qi bilan tashkil etgan yo'naltiruvchi kosinusi.}$$

ε_{ij} larning mexanik ma'nosini aniqlash uchun quyidagi ikki xususiy holni ko'raylik:

1. $\vec{\xi}$ - yetarlicha kichik miqdor bo'lib, uning berilishi $\vec{\xi}(\xi, 0, 0)$ dan iborat bo'lsin deylik. Bu vektor-tola uchun yuqoridagi formula asosida yoza olamiz:

$$l^1 = 1, l^2 = 0, l^3 = 0$$

Bundan:

$$1 + 2e_{\xi} + e_{\xi}^2 = 1 + 2\varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_{11} = e_{\xi} + \frac{1}{2}e_{\xi}^2$$

ya'ni

$$\varepsilon_{11} \approx e_{\xi}.$$

Demak, nisbiy ε_{11} cho'zilish (siqilish) deformatsiyasini ifodalaydi. Xuddi shuningdek, $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ lar ham cheksiz kichik tolaning o'z o'qlari yo'nalishi bo'ylab (ya'ni to'g'ri chiziq bo'ylab) siqilish yoki cho'zilishini ifodalaydi.

Demak, deformatsiya tenzori ε ning diagonal elementlarining mexanik ma'nosi nisbiy cho'zilish va siqilish deformatsiyalarini ifodalashdan iboratdir.

2. Endi dastlabki paytdagi ushbu ikki

$$\vec{\xi}_1 = \xi_1^i \cdot \vec{e}_i = |\vec{\xi}_1| \cdot l_1^i \cdot \vec{e}_i$$

$$\vec{\xi}_2 = \xi_2^i \cdot \vec{e}_i = |\vec{\xi}_2| \cdot l_2^i \cdot \vec{e}_i$$

vektor-tolalarni olaylik. Dastlabki paytdagi bular orasidagi burchak θ^0 bo'lsa,

$$\cos \theta^0 = l_1^i \cdot l_2^i$$

Ikkinchi holatda $\vec{\xi}_1$ va $\vec{\xi}_2$ cheksiz kichik tolalar yana cheksiz kichik bo'lgan $\vec{\rho}_1$ va $\vec{\rho}_2$ tolalar bo'lib almashinadi. U holda bular orasidagi burchakni θ desak:

$$\cos \theta = \frac{\rho_1^i \cdot \rho_2^i}{|\vec{\rho}_1| \cdot |\vec{\rho}_2|}$$

$\vec{\xi}_1$ va $\vec{\xi}_2$ vektorlar $\vec{\rho}_1$ va $\vec{\rho}_2$ larga almashganda quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$\vec{\rho}_1 = \rho_1^i \cdot \vec{e}_i = \xi_1^i \cdot \vec{\xi}_i, \quad \vec{\rho}_2 = \rho_2^i \cdot \vec{e}_i = \xi_2^j \cdot \vec{\xi}_j$$

$$(1 + e_{\xi_1})^2 = \frac{|\vec{\rho}_1|^2}{|\vec{\xi}_1|^2}, \quad (1 + e_{\xi_2})^2 = \frac{|\vec{\rho}_2|^2}{|\vec{\xi}_2|^2}$$

$$|\vec{\rho}_1| = (1 + e_{\xi_1}) \cdot |\vec{\xi}_1|, \quad |\vec{\rho}_2| = (1 + e_{\xi_2}) \cdot |\vec{\xi}_2|$$

$$\cos \theta = \frac{\xi_1^i \cdot \xi_2^j \cdot (\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j)}{|\vec{\xi}_1| \cdot |\vec{\xi}_2| (1 + e_{\xi_1})(1 + e_{\xi_2})} = \frac{l_1^i \cdot l_2^j \cdot g_{ij}}{(1 + e_{\xi_1})(1 + e_{\xi_2})}$$

$$\cos \theta^0 = \frac{\vec{\xi}_1 \cdot \vec{\xi}_2}{|\vec{\xi}_1| \cdot |\vec{\xi}_2|} = \frac{\xi_1^i \xi_2^j \delta_{ij}}{|\vec{\xi}_1| \cdot |\vec{\xi}_2|} = e_1^i \cdot e_2^j \cdot \delta_{ij}$$

U holda:

$$(1 + e_{\xi_1}) \cdot (1 + e_{\xi_2}) \cos \theta - \cos \theta_0 = (g_{ij} - \delta_{ij}) \cdot l_1^i \cdot l_2^j = 2\varepsilon_{ij} \cdot l_1^i \cdot l_2^j$$

Demak,

$$(1 + e_{\xi_1}) (1 + e_{\xi_2}) \cos \theta - \cos \theta_0 = 2\varepsilon_{ij} \cdot l_1^i \cdot l_2^j$$

formulalarga ega bo'lamiz.

Agar dastlabki tolalar orasidagi burchak $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa,

$$(1 + e_1)(1 + e_2) \cos \theta = 2\varepsilon_{12}$$

bo'ladi. Bu yerdan ε_{12} birinchi va ikkinchi koordinatalar orasidagi dastlabki to'g'ri burchakli bo'lgan burchakning o'zgarishini - deformatsiyasini xarakterlashini ko'rish qiyin emas. Yuqoridagiga o'xshash mulohazalarimizni ε_{23} va ε_{31} larga nisbatan ham ayta olamiz.

Vazifa.

Levi-Chivita tenzoridan foydalanib, (2.33) ni ushbu ko'rishda yozilishi to'g'riligini isbotlang:

$$\varepsilon_{mlj} (\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{jk,il}) = 0.$$

Shunday qilib, cheksiz kichik deformatsiya nazariyasida Eyler va Lagranj koordinatalari farqi yo'qoladi va

ko'chish vektori gradienti $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ni fazoning har bir nuqtasida ko'rilyotgan onda tassavur etish mumkin.

Bu tenzorni 2 ta qismdan iborat tenzor yig'indisi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.36)$$

ε_{ij} -tutash muhit nuqtasi atrofi sof deformatsiyasini ifodalashini, bu tenzor elementlari olinadigan $\vec{\xi}$ tolalar cho'zilishi yoki siqilishi ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ lar) yoki olingan nuqtadagi ixtiyoriy ikki cheksiz kichik tolalar orasidagi burchaklar o'zgarishini xarakterlashini ko'rdik (ε_{ij} da $i \neq j$ lar uchun). ω_{ij} lar esa

antisimmetrik tenzorni beradi va uning uchun $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$ dir. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$ kiritib, ushbu

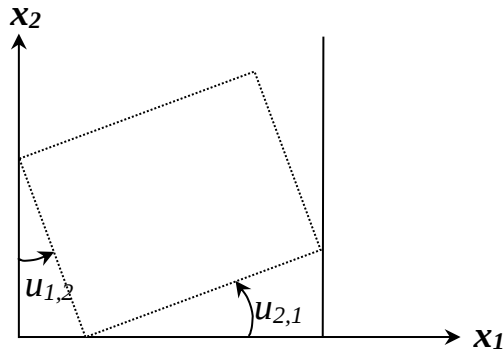
matritsani tuzaylik:

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) & 0 & \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} - u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}) & 0 \end{vmatrix}$$

Tutash muhit nuqtasida $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ buralish vektoriga ega
 $\left(\omega_1 = \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}), \omega_2 = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}), \omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) \right)$ ko'chish ko'rilayotgan

elementning deformatsiyalanmaydigan holda absolut qattiq jism sifatida burilishini ifodalaydi.

Eng sodda holni ko'raylik. OX_3 o'qi atrofida dx_1 va dx_2 o'zaro tik elementlardan tashkil topgan elementning buralishi shaklda tasvirlangandek sodir bo'ladi.



4-rasm

$-u_{1,2}$ va $u_{2,1}$ larning o'rtachasi $\omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})$

bo'ladi.

Shunday qilib, cheksiz kichik deformatsiya nazariyasida

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ni elementning deformatsiyasi va qattiq jism sifatida

buralishini ifodalovchi ikki tenzor yig'indisi sifatida ifodalash mumkin.

19-mavzu: Hajmning nisbiy o'zgarishi. Fazoning yevklidlik sharti.

2. Nisbiy uzayish koeffitsiyenti. Cheksiz kichik deformatsiya. Chekli deformatsiya

Deformatsiyalanuvchi qattiq jismning ikkita ixtiyoriy t va t' paytlarida jismning ikkita ixtiyoriy M va M' nuqtalarining vaziyatlarini tekshiramiz. Jismning M nuqtasidagi bazis vektorlarini vaqtning t va t' paytlari uchun mos ravishda $\vec{\epsilon}_i$ va $\vec{\epsilon}'_i$ kabi belgilaymiz. U holda yo'ldosh koordinatalar sistemasida

$$d\vec{r} = d\xi^i \vec{\epsilon}_i \quad \text{va} \quad d\vec{r}' = d\xi'^i \cdot \vec{\epsilon}'_i$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bularni hisobga olgan holda vaqtning t va t' paytlari uchun fazoning metrikalari quyidagicha aniqlanadi:

a) t payt uchun

$$|d\vec{r}| = ds, \quad ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad g_{ij} = \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j \quad (7.1)$$

b) t' payt uchun

$$|d\vec{r}'| = ds', \quad ds'^2 = g'_{ij} d\xi'^i d\xi'^j, \quad g'_{ij} = \vec{\epsilon}'_i \cdot \vec{\epsilon}'_j \quad (7.2)$$

Bu yerdan ko'rinadiki, vaqtning t va t' paytlari uchun g_{ij} va g'_{ij} komponentalar ham har xil, lekin M va M' nuqtalarning yo'ldosh sistemasidagi koordinatalari o'zgarmasdan qolganlar, ya'ni masalan

M nuqtaning ξ^i yo'ldosh koordinatalar sistemasidagi koordinatalar vaqtning t va t' paytlari uchun bir xildir.

Quyidagi nisbatni

$$\ell = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1 \quad (7.3)$$

nisbiy uzayish koeffitsiyenti deb ataymiz. Agar muhitning har bir nuqtasida va har qanday yo'nalishda ℓ - cheksiz kichik miqdor bo'lsa, deformatsiya cheksiz kichik deformatsiya deyiladi.

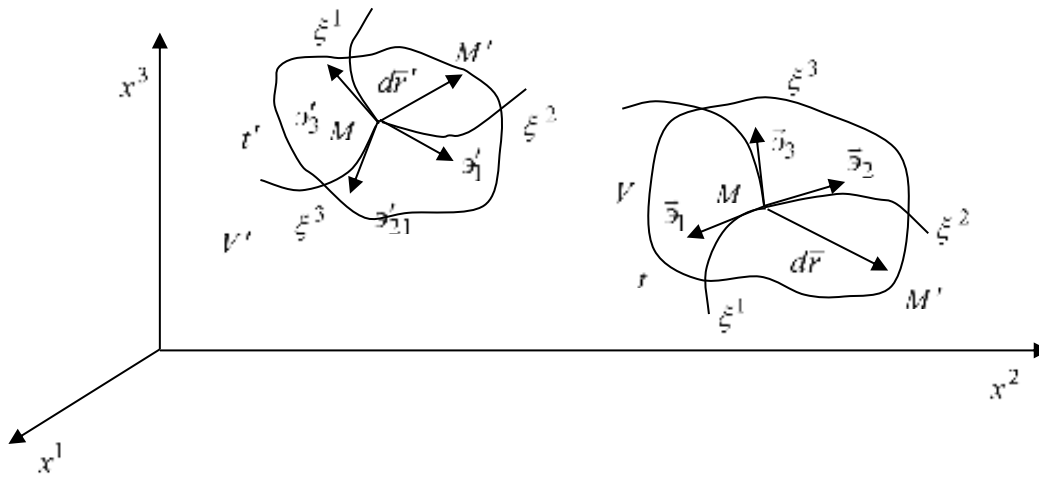
Agar, ℓ chekli qiymatga ega bo'lsa, deformatsiya ham chekli deformatsiya deyiladi.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g'_{ij}) \quad (7.4)$$

u holda yuqoridagi (2.1) va (2.2) formulalarga asosan

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j \quad (7.5)$$



7.1- chizma

ko'rinib turibdiki, ε_{ij} larni ikkinchi rang tenzorning kovariant komponentalari sifatida qarash mumkin. Bu tenzorning kontravariant komponentalarini fundamental metrik tenzor yordamida hosil qilish mumkin. Lekin bu ishni ikki xil amalga oshirsa bo'ladi, ya'ni buning uchun g_{ij} larni ishlatib ε^{ij} larni, g'^i_j larni hosil qilish mumkin. Shular mos ravishda ikkita bir xil (7.4) kovariant komponentalarga ega, lekin kontravariant komponentalari har xil bo'lgan deformatsiya tenzorlarini hosil qilish mumkin:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}\bar{\partial}^i\bar{\partial}^j \quad \text{va} \quad \varepsilon' = \varepsilon'^i_j\bar{\partial}^i\bar{\partial}^j. \quad (7.6)$$

Bu tenzorlarning kontrovariant va aralash komponentalarini mos ravishda $\varepsilon^{ij}, \varepsilon^i_j$ va $\varepsilon'^{ij}, \varepsilon'^i_j$ kabi belgilaymiz.

Aralash ε'^i_j va ε^i_j komponentalar bir-birlariga teng emas. Ya'ni $\varepsilon'^i_j \neq \varepsilon^i_j$, chunki $\varepsilon'^i_j = \varepsilon_{pj}g'^{pi}$, $\varepsilon^i_j = \varepsilon_{pj}g^{pi}$ va $g'^{pi} \neq g^{pi}$.

3. Deformatsiya tenzori komponentalarning geometrik ma'nosi: a) $\varepsilon_{ii}(i = j)$ b) $\varepsilon_{ij}(i \neq j)$ bo'lgan hollar

Odatda jismning t paytdagi deformatsiya holati boshqa biror t_0 paytdagi boshlangich holatiga nisbatan olib tekshiriladi. Ana shu paytda jism deformatsiyalangan yoki deformatsiyalanmagan holatda bo'lishi mumkin. Har ikkala holda ham boshlangich holat fikran kiritiladi. Ana shu fikran kiritilgan boshlangich holatdagi jism yo'ldosh koordinat sistemasining bazis vektorlarini $\vec{e}_i^0$ lar orqali, fazoning shu paytdagi metrikasini esa g_{ij}^0 lar orqali belgilaymiz.

Xuddi yuqoridagidek g_{ij}^0 metrika yordamida ε^0 tenzorini hosil qilish mumkinki, bu tenzorning kovariant komponentalari ε_{ij}^0 lardan, kontravariant komponentalari esa g_{ij}^0 lar yordamida hosil qilingan ε^{ij} lardan, aralash komponentalari esa ε_j^i lardan iborat bo'ladi. Ma'lumki fundamental metrik tenzorning kovariant komponentalari uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cos \psi_{ij}, \quad \cos \psi_{ij} = \cos(\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j), \quad (7.7)$$

$$g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0 = |\vec{e}_i^0| \cdot |\vec{e}_j^0| \cos \psi_{ij}^0, \quad \cos \psi_{ij}^0 = \cos(\vec{e}_i^0 \wedge \vec{e}_j^0), \quad (7.8)$$

Lekin

$$\frac{|\vec{e}_i|}{|\vec{e}_i^0|} = \frac{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \right|}{\left| \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} \right|} = \frac{|d\vec{r}_i|}{|d\vec{r}_{0i}|} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} = \ell_i + 1 \quad (7.9)$$

bo'lganligi uchun

$$g_{ij} = |\vec{e}_i| |\vec{e}_j| \cos \psi_{ij} = |\vec{e}_i^0| |\vec{e}_j^0| (1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \cos \psi_{ij} \quad (7.10)$$

Yuqoridagi (7.4) formuladan muhitning t paytdagi holati sifatida uning boshlang'ich holatini qabul qilib, (7.10) va (7.8) larni hisobga olgan holda ε_{ij} lar uchun

$$2\varepsilon_{ij} = [(1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \cos \psi_{ij} - \cos \psi_{ij}^0] |\vec{e}_i^0| |\vec{e}_j^0| \quad (7.11)$$

formulani olamiz. Bu yerda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $i = j$ bo'lsin, u holda

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(1 + \ell_i)^2 - 1] g_{ij}^0$$

bu yerdan

$$\ell_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}^0}} - 1 \quad (7.12)$$

Agar deformatsiya kichik bo'lsa, (7.12) ning o'ng tomonidagi ildizni qatorga yoyib dastlabki ikkita hadi bilan chegaralanilsa ℓ_i lar uchun

$$\ell_i \approx \frac{1}{g_{ii}^0} \varepsilon_{ii} \quad (7.13)$$

formula chiqadi. Bu yerdan yo'ldosh sistema Dekart koordinatalari sistemasidan iborat bo'lgan ($g_{ij}^0 = 1$) hol uchun

$$\ell_i \approx \varepsilon_{ii} \quad (7.14)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tengliklardan ko'rinadiki, cheksiz kichik deformatsiyalar holida deformatsiya tenzorining bir xil indeksli kovariant komponentalari Dekart o'qlari bo'yicha nisbiy uzayish koeffitsiyetlariga tengdirlar;

2) $i \neq j$ bo'lsin. Soddalik uchun $\vec{\varepsilon}_i^0$ bazis vektorlari ortogonal bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda,

$$\psi_{ij}^0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{bo'ladi,} \quad \psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij} \quad \text{deb qabul qilsak (7.11) formuladan}$$

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + \ell_i)(1 + \ell_j) |\vec{\varepsilon}_i^0| |\vec{\varepsilon}_j^0| \sin \chi_{ij} = |\vec{\varepsilon}_i| |\vec{\varepsilon}_j| \sin \chi_{ij}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} \quad (7.15)$$

Chunki $g_{ii} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_i = |\vec{\varepsilon}_i|^2, \quad g_{jj} = |\vec{\varepsilon}_j|^2.$

Oxirgi (7.15) formuladan ko'rinadiki, boshda to'g'ri bo'lgan burchaklar deformatsiya natijasida o'zgarib, kattarib yoki kichrayib qoladilar va ε_{ij} komponentalar esa ana shu o'zgarishlarni xarakterlaydilar.

Agar deformatsiya cheksiz kichik bo'lsa va boshlang'ich holatdagi koordinat sistemasi Dekart koordinatalari sistemasidan iborat bo'lsa, $g_{ii}^0 = 1$ va $g_{ii} = 1 + 0(\varepsilon)$ deyish mumkin. U holda, (7.15) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sin \chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad \text{yoki} \quad \chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (7.16)$$

4. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish

Ma'lumki har qanday simmetrik tenzor bilan, shu jumladan ε_{ij} deformatsiya tenzori bilan ham

$$\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

kvadratik shaklni bog'lash mumkin. Ilgari ko'rganimizdek fazoning har bir nuqtasi uchun shunday η^1, η^2, η^3 ortogonal koordinat sistemasini topish mumkinki, bu sistemada yuqoridagi kvadratik shakl quyidagi kanonik ko'rinishga keltiriladi

$$\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j = \varepsilon'_{11} (d\eta^1)^2 + \varepsilon'_{22} (d\eta^2)^2 + \varepsilon'_{33} (d\eta^3)^2 \quad (7.17)$$

Dastlabki ξ^i koordinat sistemasini η^i koordinat sistemasi bilan almashtirish ε_{ij} komponentalarga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun η^i koordinat sistemasi tutash muhit harakatining har xil paytlari uchun har xil bo'ladi.

20-mavzu: Riman-Kristofell tenzori.

Kristoffel simvollarini hisoblash

Quyida Kristoffel simvollarini hisoblash masalasi bilan shug'ullanamiz. Oldindan aytish kerakki, simvollar har qanday tenzorning komponentalari bo'la olmaydilar. Ma'lumki, Evklid fazosida $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i}$

bazis vektorlari kabi aniqlangan edi, bundan

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_i}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_j}{\partial \eta^i}. \quad (6.13)$$

Agar (6.8) ifodani hisobga olsak, (6.13) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k = \Gamma_{ij}^k \vec{\varepsilon}_k$$

Bu tenglik Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini, ya'ni $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ekanligini ko'rsatadi. Kristoffel simvollarini fundamental metrik tenzor komponentalari orqali ifodalash mumkin. Buning uchun quyidagi munosabatlar qaraladi:

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial(\bar{\eta}_j \bar{\eta}_s)}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_s + \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_j, \quad \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \bar{\eta}_k}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_s + \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_k,$$

bu tengliklarni

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_j = \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_s = \Gamma_{jk}^l \bar{\eta}_l \bar{\eta}_s = \Gamma_{jk}^l g_{ls}; \quad \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_k = \frac{\partial \bar{\eta}_k}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_s = \Gamma_{kj}^l \bar{\eta}_l \bar{\eta}_s = \Gamma_{kj}^l g_{ls}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Endi bu ifodalarni hadma-had qo'shib, Kristoffel simvollarining pastki indekslar bo'yicha simmetrikligini hisobga olsak,

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \left(\frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_j + \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_k \right) = 2\Gamma_{jk}^l g_{ls} \quad (6.14)$$

ifodaga ega bo'lamiz va (6.13) tenglikdan foydalanib, qavslar ichidagi ifodani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^k} \bar{\eta}_j + \frac{\partial \bar{\eta}_s}{\partial \eta^j} \bar{\eta}_k = \frac{\partial \bar{\eta}_k}{\partial \eta^s} \bar{\eta}_j + \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial \eta^s} \bar{\eta}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s}.$$

Bu tengliklarni hisobga olgan holda (6.14) ning ikkala tomonini $\frac{1}{2} g^{si}$ ga ko'paytirsak,

$$\frac{1}{2} g^{si} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right) = \Gamma_{jk}^l g_{ls} g^{si} = \Gamma_{jk}^l \delta_l^i$$

ifodaga ega bo'lamiz, bu yerdan izlanayotgan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{si} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right). \quad (6.15)$$

Quyidagi koordinatalar sistemasini almashtirganda Kristoffel simvollarini almashtirish formulasini isbotsiz keltiramiz:

$$\Gamma_{ij}^{\prime\gamma} = \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} \right) \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}},$$

bu yerda $\Gamma_{ij}^{\prime k} - \eta^i$ koordinatalar sistemasidagi Γ_{ij}^k lar esa ξ^i koordinatalar sistemasidagi Kristoffel simvollaridir.

Riman – Kristoffel tenzori va uning xossalari

Evklid fazosi uchun yaroqli bo'lgan Dekart koordinatalari sistemasini kiritish mumkinki, bunday sistemada fundamental metrik tenzorning komponentalari o'zgarmas bo'ladi, ya'ni $g_{ik} = \text{const}$. U holda bu fazoning har bir nuqtasi uchun $\Gamma_{ij}^{\prime\gamma} = 0$. Agar fazo Riman fazosi bo'lsa, o'tish matrisasining determinanti 0 dan farqli, ya'ni

$$\text{Det} \left\| \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^{\omega}} \right\| \neq 0$$

bo'lganligi uchun (5.5) formulaga asosan,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = 0 \quad (6.16)$$

tenglik bajarilishi kerak bo'ladi. Demak, (6.16) tenglamalar tenglik bajariladigan koordinatalar sistemasini aniqlovchi tenglamalar sifatida qaralishi mumkin. Agar fazoning Evklid fazosi bo'lishligini talab qilinsa, (6.16) tenglamalar sistemasi bilan ξ^{α} koordinatalar sistemasini η^i Dekart koordinatalar sistemasi bilan almashtirish diffirensial tenglamalar sistemasi bo'ladi. Umumiy holda bu sistemani integrallab bo'lmaydi. Shunday bo'lsada fazoning Evklid fazosi bo'lishligi sharti (5.6) tenglamalar sistemasining

integrallanish sharti bilan bir xil bo'ladi. Bu shartlarni esa topish mumkin. Buning uchun (6.16) tenglamalarni η^k koordinatalar boyicha differensiallaymiz

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^k} \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0$$

va (6.16) ga asosan ikkinchi tartibli hosilalarni quyidagicha almashtiramiz

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}; \quad \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\lambda\mu}^{\beta} \cdot \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}; \quad (6.17)$$

va

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \eta^{\mu}} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k}$$

ekanligidan foydalanamiz. U holda (6.17) ifodalarning birinchisida α va λ larning, 2-sida esa μ va λ larning orinlarini almashtirib,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i \partial \eta^k} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = -\Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \cdot \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k},$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu ifodalarni orniga qo'ysak,

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \cdot \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \right) \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0, \quad (6.18)$$

bu yerda μ va β hamma k va j indekslarning orinlarini almashtirib va $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ekanligidan foydalanib (6.18) ga oxshash munosabatni olamiz

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \right) \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0. \quad (6.19)$$

Keyingi (6.18) va (6.19) tengliklarning birini ikkinchisidan ayirib, hamda o'tish determenatli 0 dan farqi bo'lishi kerakligidan foydalansak, fazoning Evklid fazosi bo'lishi shartini keltirib chiqaramiz

$$R_{\beta\mu\alpha}^{\omega} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} = 0. \quad (6.20)$$

Agar fazo Evklid fazosi bo'lsa, bu shartlar istalgan koordinatalar sistemasida bajarilishi kerak.

Hosil qilingan $R_{\beta\mu\alpha}^{\omega}$ lar - 4-rang Riman-Kristoffel tenzorining komponentalaridan iborat. Riman-Kristoffel tenzorining sof kovariant komponentalarining ko'rinishi

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\nu} R_{ij\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu j}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu i}}{\partial \xi^j} + g^{\alpha\omega} (\Gamma_{\omega\mu j} \cdot \Gamma_{\alpha\nu i} - \Gamma_{\omega\mu i} \cdot \Gamma_{\alpha\nu j}) \quad (6.21)$$

dan iborat, bu yerda

$$\Gamma_{\nu\alpha j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial \xi^{\nu}} \right).$$

Ko'pincha (6.21)

$$R_{ij\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^i \partial x^{\mu}} \right].$$

ko'rinishda ishlatiladi. Bu formuladan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

$$R_{ij\mu\nu} = -R_{ji\mu\nu}; \quad R_{ij\mu\nu} = -R_{ij\nu\mu}; \quad R_{ij\mu\nu} = -R_{\mu\nu ij};$$

$$R_{ij\mu\nu} + R_{\mu i j \nu} + R_{i j \mu \nu} = 0; \quad R_{i i \mu \nu} = 0; \quad R_{i j \nu \nu} = 0$$

3-o'lchovli fazoda Riman-Kristoffel tenzori faqat oltita noldan farqli komponentalarda ega, ular $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}$ lardan iborat.

21-mavzu: Deformasiyaning birgalikdagi tenglamalari.

Endi $\vec{w}$ ko'chish vektorini $\vec{\partial}_i^0$ va $\vec{\partial}_i$ bazis vektorlari orqali yozamiz

$$\vec{w} = w_o^k \vec{\partial}_k^0, \quad \vec{w} = w^k \vec{\partial}_k,$$

ushbuga mos ravishda kovariant hosilalar quyidagicha yoziladi

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \nabla_i^o w_o^k \vec{\partial}_k^0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \nabla_i w^k \vec{\partial}_k \quad (8.9)$$

bu yerda

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \xi^i} + w^j \Gamma_{ji}^k.$$

Olingan (8.9) ifodalarning birinchisini (8.8) ifodaning birinchi qismiga qo'yamiz

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\vec{\partial}_i^o \nabla_j^o w_o^k \vec{\partial}_k^0 + \vec{\partial}_j^o \nabla_i^o w_o^k \vec{\partial}_k^0 + (\nabla_i^o w_o^k \nabla_j^o w_o^l) \vec{\partial}_k^0 \vec{\partial}_l^0] = \frac{1}{2} [(\nabla_j^o w_o^k) g_{ki}^o + (\nabla_i^o w_o^k) g_{kj}^o + (\nabla_i^o w_o^k \cdot \nabla_j^o w_o^l) g_{kl}^o]$$

Ma'lumki metrik tenzorining komponentalarini kovariant hosila belgisi ostiga kiritish mumkin. Bundan foydalansak yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i^o w_{oj} + \nabla_j^o w_{oi} + \nabla_j^o w_{ok} \cdot \nabla_j^o w_o^k) \quad (8.10)$$

Xuddi shunday (8.12) va (8.13) larning ikkinchi qismlaridan

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \cdot \nabla_j w^k) \quad (8.11)$$

Agar nisbiy ko'chishlarni cheksiz kichik deb hisoblasak $\vec{w}$ ko'chish vektori hosilalarining ko'paytmalari va kvadratik hadlarni hisobga olmaslik mumkin. U holda (8.10) va (8.11) lardan

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i^o w_{oj} + \nabla_j^o w_{oi}) = \frac{1}{2} (\nabla_i w_j + \nabla_j w_i) \quad (8.12)$$

Ko'rinib turibdiki bu holda ε_{ij} lar simmetriklashtirilgan $\nabla_i w_j \vec{\partial}^i \vec{\partial}_j$ tenzorining komponentalari bilan ustma-ust tushadi.

Dekart koordinatalari sistemasida esa

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right) \quad (8.13)$$

Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari mavjudligini taqozo qiluvchi mulohazalar

Deformatsiya tenzori komponentalari uchun chiqarilgan (8.8) va (8.10) yoki (8.11) formulalar faqatgina tutash muhitning hamma nuqtalari uchun $\vec{w}$ ko'chish vektorini kiritish mumkin bo'lgan holdagina o'rinalidir. Umuman olganda esa deformatsiya tenzori komponentalari ds^1 va ds^2 metrikalar bo'yicha (7.4) va (8.2) formulalarga ko'ra ko'chish vektorining mavjud yoki mavjud emasligidan bog'liq bo'lmagan holda aniqlanadi.

Deformatsiya tenzori ham rangi ikkiga teng bo'lganligi uchun to'qqizta komponentaga ega. *Lekin ε_{ij} larning simmetrikligi tufayli bu komponentalarning har xillari faqat oltita bo'ladi.* Ko'chish vektori

mavjud bo'lganda ushbu oltita ε_{ij} lar (8.10) yoki (8.11) formulalarga asosan $\frac{\partial w_i}{\partial \xi^j}$ to'qqista hosilalar orqali

ifodalanadi va demak, fazoning berilgan nuqtasida ixtiyoriy qiymatlarga ega bo'lishlari mumkin. Ammo, o'sha (8.10) formulaga ko'ra ε_{ij} oltita funksiya faqat uchta w_i funksiyalarning ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar bo'yicha hosilalari orqali ifodalanadi va shuning uchun ular ixtiyoriy bo'lishlari mumkin emas.

Ana shu sababga ko'ra ε_{ij} lar birgalik tenglamalari deb ataluvchi tenglamalarni qanoatlantirishlari kerak.

Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari faqat $\vec{w}$ ko'chish vektori mavjud bo'lgan holdagina mavjud bo'ladilar. Birgalik tenglamalari tutash muhit mexanikasining har qanday amaliy masalasining yechimi to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishga imkon beradi. Kelgusi ma'ruzada biz ana shu birgalik tenglamalarini qaraymiz.

Deformatsiyalarning birgalik tenglamalari

Ma'limki, deformatsiya tenzorining komponentalari

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \dot{g}_{ij}) \quad (8.14)$$

tengliklar bilan aniqlanadilar. Ko'chish vektori mavjud bo'lganda metrikalari quyidagi

a) t – payt uchun

$$|d\vec{r}| = ds, \quad ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad \vec{g}_{ij} = \vec{\partial}_i \vec{\partial}_j \quad (8.15)$$

b) t^o- payt uchun

$$|d\vec{r}^o| = ds_o, \quad ds_o^2 = \dot{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad \dot{g}_{ij} = \vec{\partial}_i^o \vec{\partial}_j^o \quad (8.16)$$

formula bilan aniqlovchi

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad \text{va} \quad ds_o^2 = \dot{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

kvadratik shakllarning har ikkalasi ham Evklid fazosidagi biror element uzunligining kvadratini ifodalaydilar. Shuning uchun, fazoning evklidligi shartidan kelib chiqib, har ikkala g_{ij} va $\dot{g}_{ij}$ fundamental metrik tenzorlar nolga teng bo'lishlari kerak degan xulosaga kelamiz. Bu esa o'z navbatida keltirilgan

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\omega} \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda} \right) \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^i} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^j} \cdot \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^i \partial \eta^j \partial \eta^k} = 0 \quad (8.17)$$

$$\text{Va} \quad R_{\beta\mu\alpha}^{\dots\omega} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\omega}}{\partial \xi^{\beta}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\omega} \cdot \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} = 0 \quad (8.18)$$

$$\text{formulalarga asosan} \quad \overset{o}{R}_{ij\mu\nu} = 0 \quad \text{va} \quad R_{ij\mu\nu} = 0 \quad (8.19)$$

tenglamalarga olib keladi.

O'tgan paragrafdagi $\vec{\partial}_i$ yoki $\vec{\partial}_i^o$ bazis vektorlaridan birlari ixtiyoriy ravishda tanlansa ikkinchilari

$$\vec{\partial}_i = \vec{\partial}_i^o + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \quad \text{va} \quad \vec{\partial}_i^o = \vec{\partial}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \text{va} \quad \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\vec{g}_{ij} - \dot{\vec{g}}_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\vec{\partial}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{\partial}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{\partial}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{\partial}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) \end{aligned} \quad (8.21)$$

formulalarga ko'ra deformatsiya yordamida to'liq aniqlanadi. Demak, (8.23) tenglamalardan biri Evklid fazosida bazis vektorlarini tanlash vositasida avtomatik qanoatlaniriladi, ikkinchisi esa bu holda deformatsiya tenzori komponentalari uchun tenglama deb qaralishi mumkin va bu holda ular deformatsiyalarning birgalik tenglamalari deb yuritiladi. Bu tenglamalarni (8.4) formulalar yordamida aniq ko'rinishda yozish mumkin. Hususiy holda ayni deformatsiya holati uchun dekart koordinatalari sistemasi tanlangan bo'lsa, $\partial g_{ij} / \partial \xi^\mu = 0$ bo'ladi, shuning uchun

$$\dot{R}_{ij\mu\nu} = 0$$

birgalik tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\dot{R}_{ij\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} + \dot{g}^{\alpha\omega} [G_{\omega\mu j} \cdot G_{\alpha v i} - G_{\omega\mu i} \cdot G_{\alpha v j}] = 0, \quad (8.22)$$

bu erda

$$G_{\nu\alpha j} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \varepsilon_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu}.$$

Oxirgi (8.5) formulalardagi $g^{\alpha\omega}$ komponentalar quyidagi

$$\|g^{\alpha\omega}\| = \|g_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega}\|^{-1}$$

matrisaning elementlari kabi aniqlanadi. Bu erda $\|g_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega}\|^{-1}$ matrisa elementlari

$$(g_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega})$$

bo'lgan matrisaga teskari matrisadir.

5. Cheksiz kichik deformatsiya holidagi birgalik tenglamalari

Xususiyl holda, agar deformatsiya cheksiz kichik deformatsiyadan iborat bo'lsa (8.5) tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladilar

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0. \quad (8.23)$$

Indekslarning har xil qiymatlarida (8.23) sistemalar faqat o'zaro bog'lanmagan tenglamalar sistemasidan iborat. *Ko'pincha (8.23) tenglamalar sistemasi Sen-Venan shartlari deb yuritiladi.* Sen-Venan shartlari i, j, μ, ν indeksning faqat (1212), (2323), (3131), (1213), (2321), (3132) kombinatsiyalari uchungina aynan nolga teng bo'lmaydi. Ana shu tenglamalar deformatsiya tenzori komponentalari orasidagi differensial bo'g'lanishlarning ikkita guruhini tashkil qiladi.

Birinchi quruh bog'lanishlaridan birini $i=\nu=1, \mu=j=2$ bo'lgan holda olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^{22}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^{12}} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^{32}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^{22}} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^{12}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^{32}} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} &= 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Bu sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalari indekslarini doiraviy almashtirish yordamida yozildi.

Ikkinchi guruh tenglamalaridan birini $\nu=i=1, j=2, \mu=3$ bo'lgan holda, qolgan ikkitasini esa indeksni doiraviy almashtirishlar yordamida yozamiz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial \xi^3 \partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial \xi^2} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Shunday qilib, *tutash muhitning boshlangich va ayni holatlari uchun ko'chish vektorini kiritish mumkin bo'lsa, deformatsiyalarning birgalik tenglamalari bajarilishi kerak.*

22-23- mavzu: DEFORMATSIYA TEZLIKLARI TENZORI. TUTASH MUHITDAGI CHEKSIZ KICHIK

ZARRACHA TEZLIGINING TAQSIMLANISHI

Reja

1. Deformatsiya tezliklari tenzorini aniqlash
2. Deformatsiya tenzori va deformatsiya tezligi tenzori orasidagi bo'g'lanish
3. Deformatsiya tezliklarining birgalik tenglamalari
4. Tutash muhit zarrachalarining tezliklari
5. Deformatsiyalanuvchi tutash muhit cheksiz kichik zarrachasidatezliklar taqsimoti
6. Koshi-Gelmgols teoremasi
7. Tezlik divergentsiyasi

Tayanch iboralar: deformatsiya, tezlik, vektor, cheksiz kichik zarracha, tenzor, oniy aylanish tezligi, sof deformatsiya, vaqt, radius-vektor, deformatsiya tezliklari tenzori

1. Deformatsiya tezliklari tenzorini aniqlash

Ilgari ko'rganimizdek ε_{ij} deformatsiya tenzori tutash muhitning ikki boshlang'ich va "ayni" holatlari bilan bog'liq holda kiritiladi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g'_{ij})$$

Agar boshlang'ich holat haqiqatan ham bor bo'lsa, uzluksiz muhit nuqtalarining hammasi uchun vaqtning t o'q paytida erishiladigan boshlang'ich holatdan, vaqtning t paytida erishilgan ayni holatiga ko'chish vektori $\vec{w}$ mavjud bo'ladi. Tutash muhitning bu ikki holatidan tashqari uchinchi bir, vaqtning $t + \Delta t$ paytiga to'g'ri keladigan va qaralayotgan ayni g_{ij} holatga yaqin g'_{ij} holatini ham qarash mumkin. U holda t va $t + \Delta t$ paytlardagi holatlar uchun deformatsiya tenzori

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \nabla_j w_k) \quad (9.1)$$

kabi aniqlanadi. Bu erda g_{ij} – boshlang'ich $(g'_{ij} - \text{ayni})$ hol uchun

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i^o w_{oj} + \nabla_j^o w_{oi} + \nabla_i^o w_{ok} \nabla_j^o w_{ok}) \quad (9.2)$$

formuladan foydalandik; $\vec{w} = w_i \vec{e}^i$; $\nabla_i w_j$ – hosilalar (kovariant) ham g_{ij} boshlang'ich holat uchun hisoblanadilar.

Ma'lumki

$$\vec{w} = \vec{g} \cdot \Delta t = g_i \vec{e}^i \Delta t, \quad (9.3)$$

ya'ni agar Δt - kichik bo'lsa, w_i lar Δt tartibiga ega cheksiz kichik ko'chishlar ekanligi ma'lum bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}, \quad (9.4)$$

bu erda e_{ij} kattaliklar simmetrik va *bu tenzor deformatsiya tezliklari tenzori deyiladi.*

Ko'rinib turibdiki

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (9.5)$$

formula ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham o'z ko'rinishini saqlaydi.

2. Deformatsiya tenzori va deformatsiya tezligi tenzori orasidagi bo'g'lanish. Deformatsiya tezliklarining birgalik tenglamalari.

Yuqoridagi (9.1) formulani, agar faqat yo'ldosh sistema uchun qaraydigan bo'lsak

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dg_{ij}}{dt} \quad (9.6)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu erda, agar $g_{ij}^0 = \text{const}$ bo'lsa,

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \quad (9.7)$$

bundan

$$e_{ij} \Delta t = \varepsilon_{ij}, \quad (9.8)$$

ya'ni $e_{ij} \Delta t$ lar Δt vaqtdagi ko'chishga mos keluvchi cheksiz kichik deformatsiyalar tenzorining komponentalaridir. Tushunarliki, deformatsiya tenzorining (9.8) komponentalari ham birgalik tenglamalarini qanoatlantirishlari kerak. Oxirgi (9.8) formulani (8.27) ga qo'yib $\Delta t \rightarrow 0$ bo'lganda limitga o'tsak, deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari uchun quyidagi birgalik tenglamalari sistemasini olamiz

$$\frac{\partial^2 e_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0 \quad (9.9)$$

3. Tutash muhit zarrachalarining tezliklari

Endi tutash muhit zarrachasi nuqtalarining tezliklarini o'rganamiz. Biror berilgan ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatali o markazga nisbatan cheksiz kichik masofada yotuvchi, koordinatalari $\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i$ bo'lgan nuqtalar majmuasini cheksiz kichik zarracha deb tushunamiz. Tezliklar maydoni $\vec{v}$ ni uzluksiz va hech bo'lmaganda birinchi tartibli hosilalarga ega deb qabul qilamiz.

Faraz qilaylik, o nuqtaning tezligi $\vec{v}_0$ o nuqtaning esa $\vec{v}_1$ bo'lsin. Cheksiz kichik Δt vaqt davomida

$\vec{\rho} = \vec{00}_1$ vektor biror $\vec{\rho}' = \vec{0'0'}$ vektorga o'tadi va rasmdan ko'rinadiki

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \Delta t \quad (9.10)$$

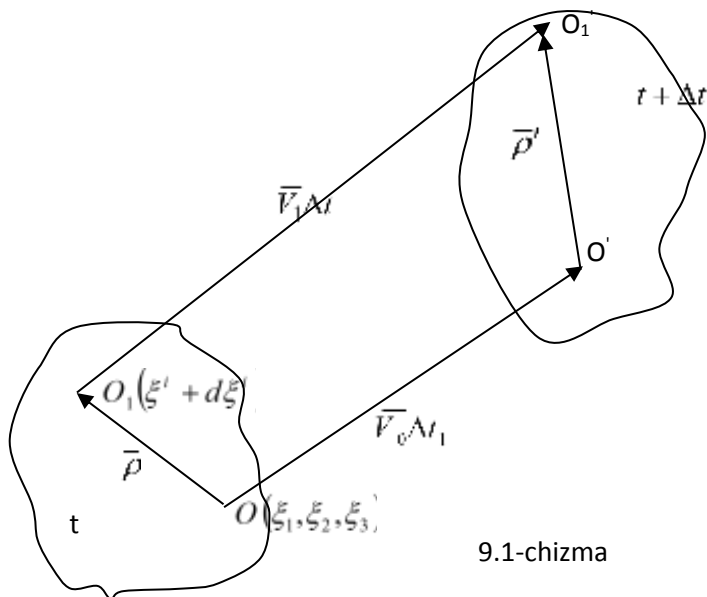
Tezlik vektori $\vec{v}$ ni o nuqta atrofida ρ bo'yicha birinchi tartibli miqdor aniqligida qatorga yoyamiz

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right)_0 \rho^i + \rho \vec{0}(\vec{\rho}). \quad (9.11)$$

Oxirgi (9.11) ni (9.10) ga qo'ysak

$$\vec{v}_1 = \rho + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi} \right) \rho^i \Delta t + O(\rho) \Delta t \quad (9.12)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan tutash muhitning cheksiz kichik zarrachasi cheksiz kichik Δt vaqt davomida $\rho O(\rho) \Delta t$ gacha aniqlik bilan cheksiz kichik affin almashtirishda qatnashishi ko'rinadi.



9.1-chizma

4. Deformatsiyalanuvchi tutash muhit cheksiz kichik zarrachasida tezliklar taqsimoti

Tutash muhit cheksiz kichik zarrachasining ixtiyoriy O_1 nuqtasining $\vec{v}_1$ tezligi (9.12) formula yordamida, bu zarrachaning O – markazining $\vec{v}_0$ tezligi. $\vec{v}_1$ ning markazdagi (O – nuqtadagi) hosilalari va qarayotgan nuqtaning koordinatalari ($\vec{\rho}$ - vektor orqali ifodalanishini ko'rdik. Bu formuladagi $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}$ ifoda $\vec{v}$ - tezlik

vektorining kovariant hosilasidir. U holda

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right) = \nabla_i v_k \vec{\xi}^k$$

ekanligini hisobga olsak, (9.12) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \nabla_i \vec{v}_k \rho^i \vec{\xi}^k + \rho \vec{O}(\rho) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) \rho^i \vec{\xi}^k + \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) \rho^i \vec{\xi}^k + \rho \vec{O}(\rho) = \vec{v}_0 + e_{ki} \rho^i \vec{\xi}^k + \omega_{ki} \rho^i \vec{\xi}^k + \rho \vec{O}(\rho), \end{aligned} \quad (9.13)$$

bu erda simmetrik

$$e_{ki} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i), \quad (9.14)$$

va antisimmetrik

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) \quad (9.15)$$

tenzorlar ajratib yozildi.

Bundan oldingi (9.13) ifodani Dekart koordinatalarida yozish uchun

$$\vec{\rho} = x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j} + x^3 \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

ekanligidan foydalanamiz va (9.13) tenglikni koordinat o'qlariga proeksiyalab

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + e_{1i} x_0^i + \omega_{1i} x^i, \\ v_1 &= v_0 + e_{2i} x^i + \omega_{2i} x^i, \\ w_1 &= w_0 + e_{3i} x^i + \omega_{3i} x^i \end{aligned} \quad (9.16)$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Bu ifodalardagi e_{ji} va ω_{ji} komponentalar x^i larga bog'liq emas va x^i bo'yicha yuqori tartibli $\rho\bar{0}(\rho)$ hadlar esa tashlab yuborilgan.

Quyidagi kvadratik shaklni kiritamiz

$$\Phi = \frac{1}{2}e_{11}x^1x^1 + e_{12}x^1x^2 + e_{31}x^3x^1 + e_{23}x^2x^3 + \frac{1}{2}e_{22}x^2x^2 + \frac{1}{2}e_{33}x^3x^3; \quad (9.17)$$

yoki

$$\Phi = \frac{1}{2}e_{pq}x^p x^q.$$

Ko'rinib turibdiki

$$e_{ki}x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \quad (9.18)$$

Oxirgi (9.18) formulani (9.16) formulalarga qo'ysak

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^i, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \omega_{2i}x^i, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^i. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Shunday qilib, tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi nuqtasining tezligi uchta tuzuvchilarga ajratiladi: birinchisi $\vec{v}_0(u_0, v_0, w_0) - x^1x^2x^3$ - koordinatalardan bo'q'liq emas va demak, butun zarrachaning ilgarilanma harakatini xarakterlaydi; ikkinchisi $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}\right)$ esa Φ potensialga ega, uchunchisini $(\omega_{1i}x^i, \omega_{2i}x^i, \omega_{3i}x^i)$ mufassal tekshirish uchun Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi antisimmetrik matrisani kiritamiz

$$\| \omega_{ij} \| = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix},$$

bu erda quyidagicha belgilashlar kiritildi

$$\omega_1 = \omega_{32}; \quad \omega_2 = \omega_{13}; \quad \omega_3 = \omega_{21}. \quad (9.20)$$

5. Koshi-Gelmgolts teoremasi

(9.20)ga asosan (9.15) dan

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right); \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (9.21)$$

Bu ifodalarni quyidagi simvolik tasvirlashdan chiqarish mumkin

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \quad (9.22)$$

Agar

$$\omega_{1i} x^i = \omega_{11} x^1 + \omega_{12} x^2 + \omega_{13} x^3$$

ekanligini hisobga olsak, (9.20) belgilashlarga asosan

$$v_{1i} x^i = \omega_2 z - \omega_3 y$$

tenglikka ega bo'lamiz. Xuddi shunday

$$\omega_{2i} x^i = \omega_3 x - \omega_1 z, \quad \omega_{3i} x^i = \omega_1 y - \omega_2 x,$$

u holda (9.19) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y, v_1 = v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z, w_1 = w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x \quad (9.23)$$

yoki (9.22) belgilashlarga asosan

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y) \vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z) \vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x) \vec{k} \quad (9.23^1)$$

bo'lganligidan

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho})_x = \omega_2 z - \omega_3 y, (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_y = \omega_3 x - \omega_1 z, (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_z = \omega_1 y - \omega_2 x. \quad (9.24)$$

Bu ifodalarni (9.23) ga qaytasak

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_x; \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_y; \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})_z. \end{aligned} \quad (9.25)$$

formulaga ega bo'lamiz. Agar (9.25)ni vektor ko'rinishida yozsak

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \text{grad } \Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho \vec{\Omega}(\rho), \quad (9.26)$$

bu formula (9.13) va (9.25) formulalarni to'liq almashtira oladi.

Nazariy mexanika kursidan ma'lumki *tezliklarning absolyut qattiq jisimdagi taqsimoti uchun quyidagi Eyler formulasi o'rinli*

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \quad (9.27)$$

bu erda $\vec{v}_0$ - absolyut qattiq jismning ma'lum (qutb deb ataluvchi) nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi; $\vec{\Omega}$ - absolyut qattiq jisimning oniy burchak tezligi vektori; $\vec{\rho}$ - absolyut qattiq jism qaralayotgan nuqtasining ma'lum (qutb) nuqtaga nisbatan radius – vektori.

Agar (9.27) va (9.26) formulalarni solishtirib qarasak, oxirgisida $\text{grad } \Phi$ va $\rho \vec{\Omega}(\rho)$ hadlar oldingiga nisbatan ortiq ekanligini ko'ramiz. Bu erda biz $\rho \vec{\Omega}(\rho)$ had ρ ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo'lganligi uchun birinchi yaqinlashishda uni e'tiborga olmaslik mumkin ekanligini hisobga olsak, (9.26) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \text{grad } \Phi. \quad (9.28)$$

Bu formula esa Koshu-Gelmgols teoremasini ifodalaydi. Tutash muhit cheksiz kichik zarrasining ixtiyoriy o_1 nuqtasining $\vec{v}_1$ tezligi, xuddi absolyut qattiq jisimdagi kabi, ilgarilanma $\vec{v}_0$ va aylanma $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ harakat tezliklari hamda $\vec{v} = \text{grad } \Phi$ sof deformatsiya tezliklari yigindisiga teng:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{ayl}} + \vec{v}_{s.d}. \quad (9.29)$$

Yuqorida biz $\vec{\omega}$ vektor bilan $\vec{\Omega}$ vektorlarining o'xshashligini ko'rdik. Agar $\vec{\Omega}$ vektor absolyut qattiq jism oniy aylanish burchak tezligi bo'lsa, $\vec{\omega}$ - vektori uzluksiz muhit cheksiz kichik zarrachasi bilan bog'langan

va dt cheksiz kichik vaqt davomida qattiq bo'lib turadigan jismning *oniy aylanish burchak tezligi deb qaralishi mumkin. Boshqacha aytganda $\vec{\omega}$ deformatsiya tezliklari tenzori bosh o'qlarining oniy aylanish burchak tezligidir va u uyurma ($\epsilon_{\alpha\beta}$) vektori deb ataladi.*

6. Tezlik divergensiyasi

Tezlik divergensiyasi tushunchasini kiritish uchun deformatsiya tezliklari tenzoridan foydalanamiz. Buning uchun biror t paytdagi tutash muhit nuqtalaridan tashkil topgan cheksiz kichik

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

sferani qaraymiz. Vaqt Δt ga o'zgarganda deformatsiya natijasida, bu sfera ellipsoidga o'tadi va uning tenglamasi bosh o'qlarga nisbatan

$$\frac{x^{*2}}{(1+e_1\Delta t)^2} + \frac{y^{*2}}{(1+e_2\Delta t)^2} + \frac{z^{*2}}{(1+e_3\Delta t)^2} = R^2$$

ko'rinishda bo'ladi. Vaqtning dt oralig'ida bu sferaning hajmi qanday o'zgarishini qaraymiz. Ixtiyoriy t vaqtda uning hajmi

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$t+\Delta t$ paytda esa ellipsoidning hajmi

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3(1+e_1\Delta t)(1+e_2\Delta t)(1+e_3\Delta t)$$

bo'ladi. U holda muhit cheksiz kichik hajmining nisbiy o'zgarishi v_0 va t nolga intilganlarida

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} = e_1 + e_2 + e_3 \quad (9.30)$$

ga teng bo'ladi.

Ko'rinish turibdiki, $e_1 + e_2 + e_3$ yig'indi invariantdan iboratdir. U ham bo'lsa deformatsiya tezliklari tenzorining birinchi invariantidir. Ma'lumki bu invariantni ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ikkinchi tomondan e_{ij} larning ta'rifiga ko'ra

$$e_{\alpha}^{\alpha} = \nabla_{\alpha} v^{\alpha} \left(e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \right).$$

Oxirgi $\nabla_{\alpha} v^{\alpha}$ invariant miqdor tezlik vektori divergensiyasi deyiladi va $\text{div } \vec{v}$ kabi belgilanadi

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_{\alpha} v^{\alpha}. \quad (9.31)$$

Dekart koordinatalari sistemasida

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (9.32)$$

Keltirilgan (9.32) formuladan ko'rinadiki, mexanik nuqtai nazardan $\text{div } \vec{v}$ uzluksiz muhitning cheksiz kichik alohida hajmining nisbiy kengayishidan iboratdir

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} \quad (9.33)$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi nuqtasining tezligi nechta tuzuvchilarga ajratiladi?
2. Qanday matrisaga antisimmetrik deyiladi?

3. AQJ dagi tezliklarning taqsimoti uchun Eyler formulasini yozing.
4. Koshi-Gelmgols teoremasini yozing.
5. Uyurma vektori deb nimaga aytiladi.
6. Jismning oniy aylanish tezligi tushunchasini bering.

24-25-mavzu: VEKTOR ROTORI VA DIVERGENSIYASI. VEKTOR SIRKULYASIYASI. STOKS TEOREMASI. POTENSIALLI VA UYURMASIZ HARAKAT

Reja

1. Vektor rotori va divergensiyasi;
2. Vektor sirkulyasiyasi;
3. Stoks teoremasi;
4. Potensialli va uyurmasiz harakat.

Tayanch iboralar: tezlik, vektor, kovariant hosila, cheksiz kichik zarracha, tenzor, kvadratik shakl, oniy aylanish tezligi, sof deformatsiya, vaqt, radius-vektor, deformatsiya tezliklari tenzori, divergensiya

1. Vektor maydonining rotori va divergensiyasi

Endi vektorning rotasiyasi tushunchasini kiritamiz. Faraz qilaylik biror uzluksiz $\vec{A}$ vektorli maydon berilgan bo'lib, $\vec{A}$ vektori koordinatalar bo'yicha birinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin. Qaralayotgan $\vec{A}$ vektorini tezlik vektori $\vec{v}$ ning o'rniga qo'yib $\vec{A}$ maydon uchun (9.26) formulani quyidagicha yozish mumkin

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad}\psi + \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \rho \vec{\omega}(\rho), \quad (10.1)$$

bu erda

$$\psi = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j; \quad a_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i);$$

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}; \quad \vec{A} = \vec{A}(A_1, A_2, A_3). \quad (10.2)$$

Oxirgi (10.2) formula Dekart koordinatalari sistemasida yozilgan. Ushbu (10.2) formula yordamida kiritilgan $\vec{\Omega}$ vektori $\vec{A}$ vektorining rotori deyiladi va

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{A} \quad (10.3)$$

kabi belgilanadi.

Xuddi (9.31) ga o'xshash $\vec{A}$ vektorining divergensiyasini ham kiritish mumkin

$$\text{div}\vec{A} = \nabla_\alpha A^\alpha$$

yoki Dekart koordinatalari sistemasida

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

Bundan oldingi (9.21) va (9.22) formulalardan ko'rinadiki, uyurma vektori

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{v}$$

tezlik vektori rotorining yarmiga teng.

2. Vektorning sirkulyasiyasi

Vektorning sirkulyasiyasi tushunchasini kiritish uchun $\vec{A}$ vektorli maydonning aniqlanish sohasida biror L ochiq yoki C yopiq konturni olamiz va $\vec{A} \cdot d\vec{s}$ - skalyar ko'paytmani tuzamiz. Bu erda $d\vec{s}$ L yoki C ning yo'nalishga ega biror elementi. Ma'lumki, vektorlarning skalyar ko'paytmasi invariant miqdordir, chunki ko'paytirish natijasida skalyar miqdor hosil qilinadi. $\vec{A}$ vektorning L kontur bo'yicha sirkulyasiyasi deb quyidagi integral ko'rinishdagi skalyar miqdorga aytiladi

$$\Gamma = \int_{AB} (\vec{A} \cdot d\vec{s}).$$

Kiritilgan Γ miqdor $d\vec{s}$ ning yo'nalishidan bog'liq bo'lganligi uchun

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

Agar $\vec{A}$ vektor sifatida tutash muhit nuqtalarining $\vec{v}$ - tezligi qaralsa

$$\Gamma = \int_{AB} (\vec{v} \cdot d\vec{s}) = \int_{AB} udx + vdy + \omega dz$$

miqdor, tezlik sirkulyasiyasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $\vec{v}$ tezlik vektori potensialga ega bo'lsin, ya'ni

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi,$$

u holda

$$\Gamma = \int_{AB} (\vec{v} \cdot d\vec{s}) = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \varphi_B - \varphi_A.$$

Bu erdan ko'rinadiki, harakat potensialli bo'lganida tezlik sirkulyasi A va B nuqtalarning kordinatalariga bog'liq, ya'ni agar φ - potensial koordinatalarning bir qiymatli funksiyasi bo'lsa, Γ ning qiymati L konturning ko'rinishiga bog'liq emas. Masalan,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r}, \quad Q = \text{const}$$

bo'lganda $\Gamma_L = \Gamma_C = 0$ tengliklar o'rinalidir. Lekin agar

$$\varphi = k \cdot \theta = k \cdot \arctg \frac{y}{x}$$

bo'lsa,

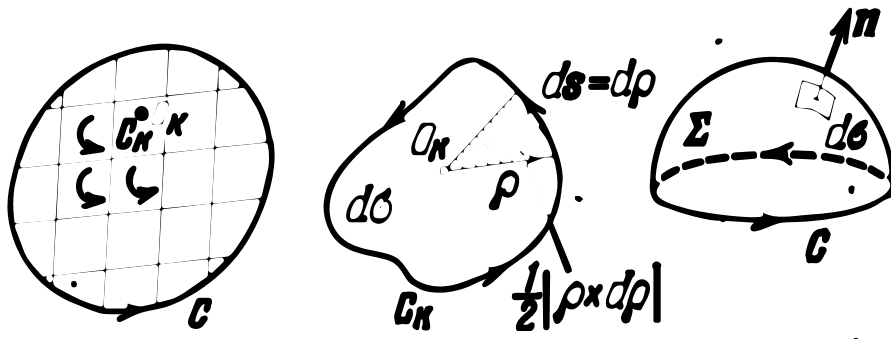
$$\varphi_B - \varphi_A = k(Q_B - Q_A),$$

yani shunday koordinat boshini o'z ichiga olgan, yopiq C konturlar mavjudki, bu konturlar bo'yicha hisoblangan sirkulyasiya noldan farqli bo'ladi.

3. Stoks teoremasi

Endi $\vec{v}$ tezlik vektor potensialli bo'lmagan holni qaraymiz. Yopiq C - konturni olamiz va unga Σ silliq sirtini tortish (yopish) mumkin deb hisoblaymiz (doiraning qasnog'iga teri tortgan kabi). Silliq Σ sirtida $\vec{v}$ tezlik uzluksiz va differensiallanuvchi, ya'ni C konturni $\vec{v}$ ning uzliksizligi va differensiallanuvchiligini saqlagan holda nuqtagacha toraytirish mumkin deb hisoblaymiz.

Silliq Σ sirtini C_k konturlar yordamida 11.1-chizmada ko'rsatilganidek qisimlarga bo'lamiz. U holda



10.1- chizma

$$\Gamma = \int_C (\vec{v} d\vec{s}) = \sum_k \int_{C_k} (\vec{v} \cdot d\vec{s})$$

Bunda C_k konturlarning umumiy tomonlari bo'ylab olingan integrallar o'zaro qisqarib ketganliklari uchun tenglik o'rirlidir.

Endi C_k konturlarni juda kichik deb qarasak, tenglikning o'ng tomonidagi integralni hisoblashda $\vec{v}$ tezlik Koshi Gelmgols teoremasiga ko'ra aniqlanadi deb hisoblash mumkin

$$\vec{v}_{C_k} = \vec{v}_{C_k} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \text{grad} \Phi + \rho \vec{G}(\rho), \quad (10.4)$$

u holda Γ_{C_k} uchun

$$\Gamma_{C_k} = \int_{C_k} (\vec{v}_{C_k} \cdot d\vec{s}) = \int_{C_k} (\vec{v}_{C_k} \cdot d\vec{s}) + \int_{C_k} [(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot d\vec{s}] + \int_{C_k} [\text{grad} \Phi \cdot d\vec{s}] + \int_{C_k} [\rho \vec{O}(\rho) \cdot d\vec{s}]$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu erda $\int_{C_k} [\rho \vec{O}(\rho) \cdot d\vec{s}]$ had $\int_{C_k} [\text{grad} \Phi \cdot d\vec{s}]$ hadga nisbatan yuqori darajali cheksiz

kichik miqdor va uni hisobga olmaslik mumkin. Bundan tashqari

$$\int_{C_k} (\vec{v}_{ok} \cdot d\vec{s}) = \int_{C_k} [\text{grad} \Phi \cdot d\vec{s}] = 0$$

bo'lganligidan

$$\Gamma_{C_k} = \int_{C_k} [(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot d\vec{s}]$$

Ikkinchi tomondan $ds = d\rho$ (10.1-chizmaga qarang), demak

$$\int_{C_k} [(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot d\vec{s}] = \int_{C_k} [(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot d\vec{\rho}] = \int_{C_k} [\vec{\omega} \cdot (\vec{\rho} \times d\vec{\rho})] = \vec{\omega} \cdot \int_{C_k} (\vec{\rho} \times d\vec{\rho}) = 2\vec{\omega} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\omega_n d\sigma.$$

Bu erda $\vec{\omega}$ vektorining C_k konturi bo'yicha o'zgarmasligidan foydalanildi ($\vec{\omega}$ faqat O_k ning vaziyatidagina bog'liq). Undan tashqari

$$\int_{C_k} (\vec{\rho} \times d\vec{\rho}) = 2\vec{n} d\sigma,$$

bu erda $\vec{n}$ - $d\sigma$ ning birlik normal va Σ ning C_k ni tortib turuvchi sirtini tekis deb hisoblash mumkin (shaklga qarang).

Shunday qilib,

$$\int_{C_k} (\vec{v}_{ck} \cdot d\vec{s}) = \int_{C_k} [(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot d\vec{s}] = 2\omega_n d\sigma,$$

bu erdan $k \rightarrow \infty$ da va C_k - nuqttagacha kichaytirilganda quyidagi ifodaga ega bo'lamiz

$$\int_C \vec{v}_s \cdot d\vec{s} = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma. \quad (10.5)$$

Olingan (10.5) natija Stoksteoremaside bataladi, unako 'ratezlikning Cyopiq kontur bo'yicha sirkulyasi, shukonturgator tilgan $\sum$ sirt orqali 'tuvchi uyurma vektorining ikkilangan oqimigateng.

Uynrma vektorining $\sum$ sirt orqali o'tuvchi oqimi

$$\int_{\Sigma} \omega_n d\sigma$$

dir. Yuqoridagi (10.5) formulani chiqarishda $\vec{\rho} \times d\vec{\rho}$ vektor ko'paytmadan foydalanildi va u $\sum$ sirtning $\vec{n}$ normal bo'ylab yo'nalgan deb hisoblanildi ($\sum$ sirt tekis sirt deb qaraldi). Vektorlarning vektor ko'paytmasi xossalarini esga oladigan bo'lsak, $\vec{n}$ yo'nalishi uchidan qaraganda C konturni soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda aylanadigan bo'lib ko'ringan tomonga qarab yo'nalganligi ma'lum bo'ladi. Demak, $\vec{n}$ vektorining uchidan qaraganda C konturni aylanishi soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda bo'lishi kerak.

Agar $\vec{v}$ - tezlik vektorining o'rniga boshqa $\vec{A} = A_i \vartheta^i$ - uzliksiz va differensiallanuvchi vektor qaralsa ham Stoks teoremasi o'rinli

$$\int_C \vec{A} d\vec{s} = \int_C A_i dx^i = \int_{\Sigma} (\text{rot} \vec{A})_n d\sigma \quad (10.6)$$

Lekin

$$(\text{rot} \vec{A})_n = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cdot \cos(n, y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cdot \cos(n, z)$$

bo'lganligidan ixtiyoriy $\vec{A}$ vektorning sirkulyasiyasi uchun

$$\int_C \vec{A} d\vec{s} = \int_C A_i dx^i = \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] d\sigma$$

formulaga ega bo'lamiz.

4. Potensialli va uyurmasiz harakat

Biz yuqoridagi $\vec{\omega}$ - vektorini uyurma vektor deb atadik. Agar tutash muhitning biror sohadagi harakati davomida bu sohaning har bir nuqtasida $\vec{\omega} = 0$ bo'lsa, bunday harakat uyurmasiz, agar $\vec{\omega} \neq 0$ bo'lsa uyurmali harakat deyiladi. Agar $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ bo'lsa, $\vec{\omega} = 0$ bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Demak, bu holda Stoks teoremasiga ko'ra bu teorema shartini qanoatlantiruvchi har qanday yopiq kontur bo'yicha olingan sirkulyasiya nolga teng bo'ladi. Demak, har qanday harakat potensialli bo'lsa, u uyurmasiz bo'ladi. Aksincha, ya'ni harakat uyurmasiz bolsa, u potensialli bo'lishini isbotlash qiyin emas.

26-mavzu: STOKS VA GAUSS-OSTROGRADSKIY TEOREMALARI, HAMDA VEKTOR MASYDONLARNING ULARDAN BOG'LIQ BA'ZI XUSUSIYATLARI

Reja

1. Solenoidal maydonlar;
2. Gauss-Ostrogadskiy teoremasi;
3. O'zgaruvchan hajm bo'yicha integralni vaqt bo'yicha differensiallash.

Tayanch iboralar: vektor maydon, solenoidal maydon, sirt, differensial, o'zgaruvchan hajm.

1. Solenoidal maydonlar

Agar $\vec{B}$ vektorli maydon uchun

$$\text{div} \vec{B} = \Delta_{\alpha} B^{\alpha} = 0$$

tenglama o'rinli bo'lsa, $\vec{B}$ vektorli maydon solenoidal maydon deyiladi. Vektor maydonining rotasiya va divergensiyasi ta'rifidan, agar $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ bo'lsa, $\text{div} \vec{B} = 0$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni ixtiyoriy $\vec{A}$ vektor maydonining rotasiya maydoni solenoidaldir. Xususiyl holda uyurma vektori

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad (11.1)$$

bo'lganligidan $\text{div} \vec{\omega} = 0$ ga ega bo'lamiz. Demak, uyurma vektori maydoni (uyurmalar maydoni) solenoidal maydondir.

Ma'lumki,

$$e_1 + e_2 + e_3 = \Delta_\alpha v^\alpha$$

ya'ni

$$\text{div} \vec{v} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t}, \quad (11.2)$$

shuning uchun ham, agar muhit siqilmaydigan (hajmi o'zgarmas) bo'lsa,

$$\text{div} \vec{V} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik siqilmaydigan muhitning tezlik vektorlari maydoni solenoidal ekanligini ko'rsatadi.

Yuqorida istalgan vektorning rotasiya maydoni solenoidal ekanligini ko'rdik. Teskarisini, ya'ni istalgan solenoidal maydon vektorini

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin ekanligini isbotlash qiyin emas.

2. Gauss-Ostrogradskiy teoremasi

Endi Gauss- Ostrogradskiy teoremasi bilan tanishamiz. Vaqtning t paytida tutash muhitning S sirt bilan chegaralangan V hajmini qaraymiz. Qaralayotgan S - sirtning har bir nuqtasida hajmning tashqi tomoniga yo'nalgan normalni tanlaymiz. Deformatsiya natijasida vaqtning $t + \Delta t$ paytida ajratilgan V hajm V' hajmga, S esa S' sirtga o'tadilar. Bu erda hajmning o'zgarishi uning o'zgarish tezligi $\vec{v}$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$V' - V = \int_S \vec{v}_n \Delta t d\sigma \quad (11.3)$$

Agar harakat davomida hajm kengaymasdan toraysa, bu holat $\vec{n}$ normalning yo'nalishi V ga nisbatan tashqi tomonda yo'nalganligidan, avtomatik ravishda hisobga olinadi. Oxirgi (11.3) formuladan hajmning o'zgarish tezligini topamiz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V' - V}{\Delta t} = \int_S \vec{v}_n d\sigma$$

va bu munosabatni S sirt bilan chegaralangan cheksiz kichik hajmga nisbatan qo'llaymiz:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V^* - V^*}{\Delta t} = \int_{S^*} \vec{v}_n d\sigma \quad (11.4)$$

Tutash muhit hajmining o'zgarish tezligi uchun (11.3) ifodani, tezlik divergensiyasi uchun (11.2) formulalar asosida (11.4) formulaning o'ng tomonini quyidagicha o'zgartiramiz

$$\int_{S^*} \vec{v}_n d\sigma = \int_{S^*} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] d\sigma = \quad (11.5)$$

$$= V^* \text{div} \vec{v} + \varepsilon V^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) V^* + \varepsilon V^*,$$

bu erda ε -cheksiz kichik miqdor. Bu tenglik quyidagi munosabatdan kelib chiqadi:

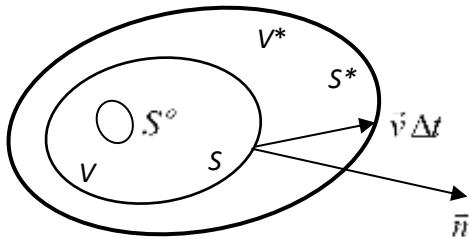
$$\frac{V^* - V^*}{V^* \Delta t} = \operatorname{div} \vec{v} + \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \frac{V^* - V^*}{\Delta t} = V^* \operatorname{div} \vec{v} + V^* \varepsilon,$$

bunda $t \rightarrow 0$ bo'lganda, $\varepsilon \rightarrow 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi chekli hajmni har doim cheksiz kichik V^* hajmlarga bo'lish mumkin va ularning har biri uchun (12.5) tenglikni yozish mumkin. U holda (11.5) tenglikni hamma V^* lar bo'yicha yig'ib $V^* \rightarrow 0$ bilan bir vaqtda cheksizlikka intiluvchi bo'linihlar soni bo'yicha limitga o'tib quyidagiga ega bo'lamiz

$$\int_S [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau, \quad (11.6)$$

chunki tenglikning chap tomonidagi qo'shni S_k sirtlar bo'yicha olingan integrallar, bu sirtlar normallarining yo'nalishlari qarama – qarshi bo'lganligidan qisqarib ketadilar va natijada faqat tashqi S sirt bo'yicha olingan integralgina qoladi. Bu tenglik Gauss-



12.1- chizma

Ostrogradskiy teoremasini ifodalaydi. Uni ixtiyoriy koordinatalar sistemasida

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{v} d\tau \quad (11.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\vec{v}$ - tezlik o'rniga ixtiyoriy $\vec{A}$ -vektorini olsak (11.7) formula quyidagicha bo'ladi

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{A} d\tau \quad (11.8)$$

Biror η_1, η_2, η_3 koordinatalar sistemasida

$$\vec{A} = A^k \cdot \vec{\partial}_k, \quad \vec{n} = n_i \cdot \vec{\partial}^i$$

bo'lsin, u holda

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = A^k \cdot n_i \cdot \vec{\partial}_k \cdot \vec{\partial}^i = A^k n_k,$$

ikkinchi tomondan

$$\operatorname{div} \vec{A} = \Delta_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + A^i \Gamma_{ki}^k,$$

bu yerda Γ_{ki}^k Kristoffel simvolining η_1, η_2, η_3 fazodagi g_{ij} fundamental metrik tenzor komponentalari orqali ma'lum formulalar bo'yicha aniqlanadi. Demak, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida Gauss-Ostrogradskiy teoremasini quyidagicha yozish mumkin

$$\int_S A^k n_k d\sigma = \int_V \Delta_k A^k d\tau. \quad (11.9)$$

3. O'zgaruvchan hajm bo'yicha integralni vaqt bo'yicha differensiallash

Endi kelgusida zarur bo'ladigan o'zgaruvchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differinsiallash qoidasini chiqaramiz. O'zgaruvchan hajm bo'yicha olingan ushbu

$$\int_V f(x, y, z, t) d\tau$$

integralning vaqt bo'yicha olingan hosilalarini hisoblaymiz. Bunda V hajm t vaqtga bog'liq ravishda o'zgaradi. Hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V f(x, y, z, t) d\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V'} f(x, y, z, t + \Delta t) d\tau - \int_V f(x, y, z, t) d\tau}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V [f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)] d\tau + \int_{V' - V} f(x, y, z, t + \Delta t) d\tau}{\Delta t} = \\ &= \int_V \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} d\tau + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V' - V} f(x, y, z, t + \Delta t) \frac{v_n \cdot d\sigma \Delta t}{\Delta t} = \int_V \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} d\tau + \int_S f(x, y, z, t) v_n d\sigma. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Oxirgi integralga Gauss-Ostrogradskiy teoremasini qo'llasak

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x, y, z, t) d\tau = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i) \right] d\tau \quad (11.11)$$

tenglikka ega bo'lamiz, lekin

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_i (f v^i) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \Delta_i f + f \Delta_i v^i = \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_i v^i f \quad (11.12)$$

chunki

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f$$

f funksiyani to'liq hosilasi. Oxirgi (11.11) ifodani (11.10) ga qo'ysak izlanayotgan

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V f(x, y, z, t) d\tau = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f \nabla_i v^i \right] d\tau \quad (11.13)$$

formulda ega bo'lamiz. Hususiy holda

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{V} = f(t)$$

bo'lsin, u holda (11.10) ga ko'ra

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{V} d\tau = \int_V \left[\frac{\partial (1/V)}{\partial t} + \nabla_i \left(\frac{1}{V} \cdot v^i \right) \right] d\tau,$$

lekin

$$\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = \frac{1}{V(t)} \int_V d\tau = 1$$

va

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{d\tau}{V(t)} = 0.$$

Demak,

$$\int_V \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{V} \right) + \frac{1}{V} \nabla_i v^i \right] d\tau = 0 \quad (11.14)$$

Bu ifoda butun V hajm uchun, yoki uning biror qismi uchun yozilishi mumkin. Shuning uchun (11.11) ni cheksiz kichik ΔV hajm uchun qo'llab

$$\frac{\partial(1/\Delta V)}{\partial t} + \frac{1}{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (11.15)$$

ga ega bo'lamiz. Bu erda $\vec{v}$ tezlik vektorining divergensiyasi ΔV ni toraytirish mumkin bo'lgan nuqtada hisoblanadi. Bu tenglik muhitning xususiyatlariga bog'liq emas, shuning uchun u istalgan muhitlar uchun, hususiy holda fazo uchun ham o'rinalidir.

27-mavzu: Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.

Tutash muhit deformatsiyalanishida uning egallagan hajmi yoki uning bo'lagi vaqtning funksiyasi sifatida o'zgarishi mumkin. Keyingi paragraflarda tekshirilayotgan tutash muhitga tegishli miqdorlar o'zgaruvchan hajmlarda aniqlangan bo'lishligi va bu hajmlardan olingan integrallarning hosilasini topishga harakat qilamiz. Shu munosabat bilan biror t onda tutash muhit egallagan τ hajmni va unda aniqlangan ixtiyoriy

$f(x^1, x^2, x^3, t)$ funksiyani olaylik va ushbu integralni ko'raylik:

$$\int_{\tau(t)} f(x^1, x^2, x^3, t) d\tau$$

Bu integraldan vaqt bo'yicha olingan ushbu hosilani, ya'ni $J = \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} f(x^1, x^2, x^3, t) d\tau$ ni hisoblaylik.

Hosilaning ta'rifi ko'ra

$$\begin{aligned} J &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\tau'} f(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) d\tau - \int_{\tau} f(x_1, x_2, x_3, t) d\tau}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\tau} [f(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - f(x_1, x_2, x_3, t)] d\tau + \int_{\tau' - \tau} f(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) d\tau}{\Delta t} = \\ &= \int_{\tau} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \int_{\Sigma} f \cdot V_n d\sigma \end{aligned}$$

bu yerda V hajm $d\tau = V_n d\sigma \cdot d\tau$ elementar silindrdan ibo-ratligi hisobga olingan. $\int f V_n d\sigma$ uchun Gauss-Ostrogradskiy formulasini qo'llasak, izlanayotgan ushbu zarur formulaga ega bo'lamiz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} f(x^1, x^2, x^3, t) d\tau = \int_{\tau} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f V^i) \right] d\tau.$$

28-mavzu: Muhitning massasi va zichligi.

DINAMIK TUSHUNCHALAR VA TENGLAMALAR

Biror koordinata sistemasiga nisbatan absolut vaqt o'zgarishida harakatda bo'lgan va inersiya xossasiga ega bo'lgan jism moddiy jismni tashkil etadi. Inersiya xossasi jism massasi orqali xarakterlanadi. Tutash muhit massasi o'rganilayotgan moddiy jismning shu tutash muhit egallagan fazoning bo'lagidagi massasi tushuniladi. Tutash muhit ayrim ixtiyoriy bo'laklari massasi yig'indisi shu tutash muhit massasi

deb olinadi. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasi va istalgan vaqt uchun individual ajratilgan tutash muhit massasi o'zgarmasdir - bu *massaning saqlanish qonunidir*. Albatta, absolut qattiq jism uchun massaning saqlanish qonuni deformatsiyalanish xossasiga ega bo'lgan tutash muhit massasining saqlanish qonunidan hosil qilish mumkin: buning uchun harakat jarayonida individual hajm va uning ixtiyoriy bo'laklarini o'z ichiga olgan moddiy jismlar ham o'zgarmasligi kerak.

Agar individual hajmdagi massani m desak,

$$m = \text{const} \text{ yoki } \frac{dm}{dt} = 0$$

tenglamalarni yoza olamiz.

Tutash muhit biror vaqtda $\Delta\tau$ hajmda Δm massaga ega deylik. U holda shu moment uchun $\rho_{o'rt.}$, ya'ni o'rtacha zichlikni kiritish mumkin:

$$\rho_{o'rtacha} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

Tutash muhit egallagan τ hajmning bo'lagi sifatida $\Delta\tau$ hajm yetarli darajada kichik qilib olinsa, har bir $\Delta\tau$ hajmdagi o'rtacha zichlik turlicha bo'lishi mumkin va bu miqdor muhit massasining o'zi egallagan hajm bo'ylab qanday taqsimlanganligini o'rtacha xarakterlaydi. Haqiqiy zichlik quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}.$$

Cheksiz kichik hajmdagi muhit uchun $\Delta m \approx \rho \cdot \Delta\tau$ deb yozish mumkin. Agar muhit $\tau(t)$ hajmni egallasa, uning massasini, ravshanki, quyidagicha hisoblash mumkin:

$$m = \int_{\tau} \rho(x^1, x^2, x^3, t) d\tau$$

O'zgaruvchan hajm bo'yicha olingan integralni hisoblash formulasidan foydalanib, massaning saqlanish qonunini yoza olamiz:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) d\tau$$

Yozilgan formula har bir individual hajm uchun o'rinli bo'lganligidan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

yoki baribir

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{v} = 0$$

Bu tenglama Eyler koordinatalarida yozilgan *massaning saqlanish qonuni tenglamasi* yoki *uzluksizlik tenglamasi* deyiladi.

Massaning saqlanish qonunining quyidagi xususiy hollarini ko'raylik.

1. Zichlik maydoni vaqtga bog'liq bo'lmagan hol:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

2. $\rho = \text{const}$ bo'lgan hol:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0.$$

Bundan ixtiyoriy koordinata sistemasida

$$\nabla_k v^k = 0$$

bo'ladi.

Bu tenglama siqilmaydigan tutash muhit uchun **massaning saqlanish qonuni** yoki **uzluksizlik tenglamasi** deyiladi.

29-30-mavzu: Muhitning massasi va zichligi. Massaning saqlanish qonuni.

Reja

1. Massaning saqlanish qonuni;
2. Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi;
3. Individual hajimda o'z qiymatlarini saqlab qoluvchi miqdorlar uchun shartlar;
4. Ko'p komponentali aralashmalar uchun uzviylik tenglamalari;
5. Diffuziyali jarayonlar uchun uzviylik tenglamalari;
6. Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari.

Tayanch iboralar: **Lagranj o'zgaruvchilari, diffuziya, Eyler o'zgaruvchilari, massa, zichlik, aralashmalar, massa.**

1. Massaning saqlanish qonuni

Fizik ob'ektlar, ya'ni moddiy jismlar va maydonlar harakatini o'ranish bilan shug'ullanamiz. *Inersiya xossasiga ega bo'lgan jismlar moddiy jismlar* deyiladi. Inersiya xossasi massa bilan xarakterlanadi. Massani butun jism uchun m orqali yoki ixtiyoriy bo'lagi uchun m_i orqali kiritish mumkin. Ta'rifga ko'ra N'yuton mexanikasida butun jism massasi m – jism tashkil qiluvchi barcha bo'laklari m_i larning yig'indisiga teng. Ma'lumki ixtiyoriy individual hajm ya'ni muhitning bir xil zarrachalaridan iborat bo'lgan hajmning m massasining saqlanish qonuni N'yuton mexanikasining fundamental qonunlaridan biri hisoblanadi. Tutash muhit mexanikasining asosiy tenglamalariga ko'ra, ixtiyoriy individual hajm uchun $m = const$.

Bu tenglamalarni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.1)$$

O'rtacha zichlik $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ ni kiritamiz, bu yerga ΔV massasi Δm da teng bo'lgan hajm, haqiqiy zichlikni quyidagi limit orqali ifodalaymiz

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Tutash muhitlar mexanikasida deyarli hamma vaqt m massa o'rniga ρ - zichlik qaraladi. Kichik hajm uchun $\Delta m \approx \rho \Delta V$

tenglik o'rinli, chekli hajm uchun $m = \int_V \rho d\tau$ bo'ladi, bu yerda integral harakatlanuvchi individual hajm

bo'yicha olingan. Shunday qilib, agarda ρ - ma'lum bo'lsa, m ni topish mumkin. Hajm zarrachalari harakat mobaynida o'zgarishi mumkinligi uchun individual zarracha zichligi o'zgarishi mumkin.

Endi tutash muhit individual hajmi uchun massaning saqlanish qonunini

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = 0 \quad (1.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin.



Ms

Massaning saqlanish qonuni TMM da nima uchun kerak?



Mv

Massaning saqlanish qonunini yana qanday ko'rinishlarda yozish mumkin?

2. Eyler o'zgaruvchilarda uzviylik tenglamalari

Massaning saqlanish qonunini hisobga olgan holda harakatlanuvchi hajm bo'yicha olingan integralni differensiallash qoidasini qo'llab

$$0 = \frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d\tau = \int_V \left(\frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) d\tau$$

ga ega bo'lamiz, yoki bu tenglik ixtiyoriy individual hajm uchun o'rinli bo'lganligidan Eyler o'zgaruvchilaridagi *uzviylik tenglamasi deb ataluvchi tutash muhit mexanikasining birinchi asosiy tenglamasini* hosil qilamiz:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.3)$$



Ms

Uzviylik tenglamasi faqat massa uchun o'rinli bo'ladimi?

3. Individual hajmda o'z qiymatlarini saqlab qoluvchi miqdorlar uchun shartlar

Xuddi shu tenglamani ixtiyoriy individual hajm uchun massa o'zgarmas bo'lganligidan

$\frac{d\left(\frac{1}{\Delta V}\right)}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} = 0$ formula yordamida hosil qilish mumkin. m massadan tashqari harakat davomida

turash muhitning ixtiyoriy individual hajmda o'zgarmaydigan boshqa fizik xarakteristkalar ham mavjud.

Masalan, faraz qilaylik N – ixtiyoriy individual hajmdagi molekulalar yoki atomlar soni bo'lsin. Individual

hajmda N – o'zgarmas. Hajm birligida molekula yoki atom sonlari $n = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{N}{V}$ ni kiritib, ixtiyoriy individual

hajmda N ni o'zgarmasligini hisobga olib (*) formula yordamida n uchun

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.4)$$

tenglamani hosil qilamiz. Agarda tutash muhitda ximik reaksiyalar bo'lsa, (1.3) tenglamalar bajariladi, (1.4) tenglamalar esa bajarilmaydi. Bundan tashqari ixtiyoriy individual hajmda o'z qiymatini o'zgartirmaydigan skalyar, vektor yoki tenzor miqdorlar mavjud. Bunday o'zgarmas miqdorlarni ϕ orqali belgilaymiz va bu miqdor zichligi

$$f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta V}$$

ni kiritamiz. ϕ va f lar uchun quyudagi shartlar o'rinli:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad \phi = \int_V f d\tau, \quad \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

4. Ko'p komponentali aralashmalar uchun uzviylik tenglamalari

Faraz qilaylik, biz N ta komponentadan iborat aralashmaga ega bo'laylik, masalan vodorod, kislorod va suv bug'idan iborat aralashma ($N=3$). Mis va alyuminiy eritmasi, suvning tuzdagi eritmasi va hokazo. Bunday ko'p komponentali aralashmani, aralashma egallagan bir xil hajmga ega bo'lgan N ta kontiumlar yig'indisi sifatida tasvirlash mumkin. Bu kontiniumlarning har biri uchun zichlik va tezlikni kiritish mumkin. Ularni $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ va $v_1, v_2, \dots, v_n$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib, aralashma mexanikasi bir xil hajmni to'ldiruvchi kontiniumlar yig'ish mexanikasidan iborat. Avval aralashmada ximik reaksiya yoki ionizatsiya sodir bo'lmagan holni qaraymiz. Bu holda aralashma N ta komponentasining har biri uchun massaning saqlanish qonuni bajarilishi kerak va biz quyudagi N ta tenglamaga ega bo'lamiz.

$$\frac{dm_i}{dt} = 0$$

yoki

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i v_i = 0. \quad (1.5)$$

Agarda aralashmada ximik reaksiyalar yoki ionizatsiya sodir bo'lsa, u holda m_i komponenta massalari o'zgarishi mumkin. Aralashma i - komponentasi massasi m_i ning birlik vaqtda birlik hajmga o'zgarishi χ_i

ni kiritamiz. χ_i - miqdorlar ximiyada aniqlanadi. U holda aralashma komponentalari uchun uzviylik tenglamalarini

$$\frac{dm_i}{dt} = \int_V \chi_i d\tau$$

yoki

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \mathbf{v}_i = \chi_i \quad (1.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ximik reaksiya asosiy qonuni shundan iboratki, aralashma umumiy massasi o'zgarmas va shuning uchun

$$\sum_{i=1}^n \chi_i = 0. \quad (1.7)$$

Ta'rifga ko'ra, qaralayotgan hajmdagi aralashma massasi shu hajmdagi komponentalari massasi yig'indasiga teng, yoki

$$m = \sum_{i=1}^N m_i,$$

qorishma zichligi ρ esa

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

ko'rinishga ega. Aralashma komponentalari zichligi

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$$

va shuning uchun

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i.$$

(1.5) iboralarni yig'ib, (1.7) ni hisobga olib

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{V}_i = 0$$

tenglama hosil qilinadi. Bu tenglama uzviylik tenglamasining (1.3) oddiy ko'rinishidan iborat bo'ladi agarda qorishma tezligi $\vec{v}$

$$\rho \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i, \quad m \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i;$$

ya'ni

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{v}_i}{\rho} \quad (1.8)$$

ko'rinishda aniqlangan bo'lsa.

3. Diffuziyali jarayonlar uchun uzviylik tenglamalari

Shunday holat bo'lishi mumkinki, bunda aralashma barcha komponentalari bir xil tezliklar bilan harakat qilishi mumkin va bu holda harakat tezligi bilan umumiy holda bir xil bo'lishi mumkin, ya'ni $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \dots = \vec{v}_n = \vec{v}$

Bunday hodisalar diffuziyasiz hodisalar deyiladi. Agarda V_i komponentalar har xil bo'lsa, u holda diffuziya sodir bo'ladi va bu holatdagi aralashmaning bir komponentasi ikkinchisiga nisbatan harakat qiladi. Umumiy

holda ximik munosabat va diffuzaga mavjud bo'lganda (1.6) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{v} = \chi_i - \operatorname{div} I_i, \quad (1.9)$$

bu erda $I_i = \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v})$. $\vec{v}_i - \vec{v}$ - ayirma, i - komponentaning butun muhitga nisbatan tezligidan iborat.



M_V

Uzviylik tenglamalari Lagranj o'zgaruvchilarida qanday ifodalanadi?



M_S

Massani zichlik va hajm orqali qanday ifodalash mumkin?

6. Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari

Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Buning uchun vaqtning ayni holati t da tutash muhitning ixtiyoriy M nuqtasida yo'ldosh ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordinatalar sistemasi bo'ylab yo'nalgan $\vec{\alpha}_1 d\xi^1, \vec{\alpha}_2 d\xi^2, \vec{\alpha}_3 d\xi^3$ kichik vektorlarda kichik burchakli parallelopipedni quramiz, uning hajmi

$$V = |\vec{\alpha}_1 (\vec{\alpha}_2 \times \vec{\alpha}_3) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3|$$

lar bo'ladi. Ixtiyoriy t_0 paytda bu parallelopipedga o'sha individual M nuqtada olingan $\vec{\alpha}_1 d\xi^1, \vec{\alpha}_2 d\xi^2, \vec{\alpha}_3 d\xi^3$ vektorlarda qurilgan elementlar qiyshiq burchakli parallelopiped mos keladi, uning hajmi

$$V_0 = |\vec{\alpha}_1^0 (\vec{\alpha}_2^0 \times \vec{\alpha}_3^0) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3|$$

ko'rinishda bo'ladi. Muhitning t va t_0 paytdagi zichliklarini mos ravishda ρ va ρ_0 orqali belgilaymiz, massaning saqlanish qonuniga ko'ra

$$\rho_0 V_0 = \rho V$$

yoki

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \left| \frac{\vec{\alpha}_1^0 \cdot (\vec{\alpha}_2^0 \times \vec{\alpha}_3^0)}{\vec{\alpha}_1 \cdot (\vec{\alpha}_2 \times \vec{\alpha}_3)} \right| \quad (1.10)$$

bo'ladi.

Baris vektorlarining aralash ko'paytmasini hisoblash uchun yana $\vec{\alpha}_1 = \vec{i}, \vec{\alpha}_2 = \vec{j}, \vec{\alpha}_3 = \vec{k}$ baris vektorli x^1, x^2, x^3 Dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz. Muhit nuqtasining bu sistemaga nisbatan koordinatalarini t paytda x^1, x^2, x^3 orqali, t_0 paytda x_0^1, x_0^2, x_0^3 orqali belgilaymiz, u holda

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0),$$

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

ya'ni x_0^i va x^i lar erkin o'zgaruvchi t - ning har xil qiymatlarida olingan harakat qonunini ifodalovchi funksiyalar qiymatlaridan iborat M nuqtaning hisob sistemasiga nisbatan radius vektori

$$\vec{r} = x^k \vec{\alpha}_k, \quad \vec{\alpha}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}$$

bo'lganligi uchun $\vec{\alpha}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \vec{\alpha}_k$ va $\vec{\alpha}_1 (\vec{\alpha}_2 \times \vec{\alpha}_3)$ aralash ko'paytmani quyidagi determinant orqali belgilash mumkin:

$$\vec{\partial}_1 \cdot (\vec{\partial}_2 \times \vec{\partial}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \Delta,$$

bu erda $\Delta - \xi^1 \xi^2 \xi^3$ o'zgaruvchilaridan x^1, x^2, x^3 o'zgaruvchilarga o'tish yakobianidan iborat.

Xuddi shuningdek

$$\vec{\partial}_1^0 (\vec{\partial}_2^0 \times \vec{\partial}_3^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \Delta_0,$$

bu erda $\Delta_0 - \xi^1, \xi^2, \xi^3$ o'zgaruvchilaridan x_0^1, x_0^2, x_0^3 o'zgaruvchilariga o'tish yakobiani. Endi (1.10) tenglamani yakobianlar xossalarini hisobga olib quyidagicha yozish mumkin:

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta_0}{\Delta} = \rho_0 \det \left\| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right\|. \quad (1.11)$$

(1.11) ni quyidagicha o'zgartiramiz, x, y, z koordinatalari sistemasida $\vec{\partial}_j$ vektorlarning $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$

komponentalarini $\vec{\partial}_{jx}, \vec{\partial}_{jy}, \vec{\partial}_{jz}$ orqali belgilaymiz. U holda

$$[\vec{\partial}_1 \cdot (\vec{\partial}_2 \times \vec{\partial}_3)]^2 = \Delta^2 = \begin{vmatrix} \partial_{1x} & \partial_{1y} & \partial_{1z} \\ \partial_{2x} & \partial_{2y} & \partial_{2z} \\ \partial_{3x} & \partial_{3y} & \partial_{3z} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \partial_{1x} & \partial_{1y} & \partial_{1z} \\ \partial_{2x} & \partial_{2y} & \partial_{2z} \\ \partial_{3x} & \partial_{3y} & \partial_{3z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \partial_{1x} & \partial_{1y} & \partial_{1z} \\ \partial_{2x} & \partial_{2y} & \partial_{2z} \\ \partial_{3x} & \partial_{3y} & \partial_{3z} \end{vmatrix} = \det \|g_{ik}\| = g,$$

chunki $g_{ik} = \vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_k$. Xuddi shuningdek

$$[\vec{\partial}_1 (\vec{\partial}_2 \times \vec{\partial}_3)]^2 = \det \|g_{ik}^0\| = g^0$$

va demak (1.10) ni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{g^0}{g}}. \quad (1.12)$$

(1.10), (1.11) va (1.12) lar Lagranj o'zgaruvchilaridagi uzviylik tenglamalarining har xil ko'rinishlari, umumiy holda tutash muhitlar individual hajmida o'z qiymatini saqllovchi ixtiyoriy Φ miqdorning f zichligi uchun

$$f = f_0 \sqrt{\frac{g^0}{g}} = f_0 \Delta \quad (1.13)$$

tenglama bajariladi, bu yerda $\Delta - x^i$ o'zgaruvchilardan x_0^i o'zgaruvchilariga o'tish matritsasi determinanti. Uzviylik tenglamasi universal xarakterga ega va ixtiyoriy muhit harakatida bajariladi, uning ko'rinishi muhit xossalariga bog'liq emas, u barcha muhitlar uchun bir xil (suv, havo, metal va h.k.).

XULOSA

O'tgan semestrda o'tilgan tutash muhit kinematikasiga doir asosiy tushuncha va munosabatlar takrorlandi. Asosiy integral munosabatlar tahlil qilindi.

Tutash muhit uchun Lagranj va Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalari massaning saqlanish qonunidan keltirib chiqarildi.

31-32-mavzu: Kuchlarning klassifikatsiyasi. Tutash muhit ning harakat tenglamalari. Ichki kuchlanish va uning xossalari

Reja:

1. Taqsimlangan va jamlangan kuchlar;
2. Hajmiy yoki massaviy kuchlar;
3. Sirt kuchlari;
4. Tashqi va ichki kuchlar;
5. Ichki kuchlanish kuchlari;
6. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamalari.
7. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori tenglamalari.
8. Ichki kuchlanishlarning asosiy xossalari.

Tayanch iboralar: harakat, hajm, material nuqta, harakat miqdori, massa, kuch, tezlik, hajm, sirt, massalar markazi.

1. Taqsimlangan va jamlangan kuchlar

Nazariy mexanikada asosan jamlangan yoki konsentirlangan kuchlar qaraladi, ya'ni nuqtada ta'sir qiluvchi chekli kuchlar. Tutash muhit mexanikasida asosan taqsimlangan kuchlar qaraladi, ya'ni hajmning ixtiyoriy qismida yoki tutash muhitlarning har bir $\sum$ sirtida ta'sir qiluvchi kuchlar. Jamlangan kuchlar N'yutonning ikkinchi qonuni $\vec{F} = \Delta m \vec{a}$ dan (bu yerda Δm - tutash muhit kichik elementining massasi, $\vec{a}$ - uning tezlanishi) jamlangan kuch faqat $\vec{a}$ (yoki ρ) cheksizlikka erishayotgan nuqtada paydo bo'lishi mumkin.

2. Hajmiy yoki massaviy kuchlar

Butun N hajm bo'yicha taqsimlangan kuchlar hajmiy yoki massaviy kuchlar deyiladi. $\vec{F}$ orqali m massaga ta'sir qiluvchi massaviy kuchlarning bosh vektorini belgilaymiz. U holda berilgan nuqtada massaviy kuchlar zichligi $\vec{F}$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta m}$$

bo'ladi. Kichik zarracha uchun $\vec{F} \approx \vec{F} \Delta m$. Ayrim hollarda $\vec{\Phi}$ kuchni massa birligiga nisbatan emas, hajm birligiga nisbatan qaraladi. U holda

$$\vec{\Phi} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta V}, \quad \text{ya'ni} \quad \vec{\Phi} = \rho \vec{F}.$$

$\vec{\Phi} dV$ va $\vec{F} dm$ - kuch o'lchamiga ega, $\vec{F}$ - tezlanish o'lchamiga, $\vec{\Phi}$ - esa tezlanish o'lchamining zichlik o'lchamiga ko'paytmasiga teng. Massaviy kuchlarning turlari unchalik ham ko'p emas. Bular og'irlik kuchi $\vec{F} = \vec{g}$, $\vec{\Phi} = \rho \vec{g}$ va tortishish qonuniga bo'ysinuvchi gravitatsiya kuchlari, elektromagnit kuchlar.

Ayrim hollarda tutash muhitning konkret harakatlari qaralayotganda massaviy kuchlar sun'iy ho'l bilan kiritiladi. Masalan, qanot profili harakatini qaraganda qanot profili egallagan soha suyuqlik bilan to'ldirilgan ammo, sun'iy kiritilgan suyuqlik qanot profili kabi harakatlanishi uchun taqsimlangan massaviy kuchlar qo'yilishi kerak.

3. Sirt kuchlari

Tutash muhit mexanikasida asosiy rolni massaviy kuchlar emas, balkim *tutash muhit sirti bo'ylab taqsimlangan sirt kuchlari* egallaydi. Masalan, agar idishga solingan suvni olsak, u holda suvning idish devoriga tegib turgan S sirtida kuch ta'siri kuzatiladi. S sirtlar $d\sigma$ elementini olib $d\vec{P} = \vec{p} d\sigma$ elementar sirt kuchini kiritish mumkin. Bu yerda

$\bar{p} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{P}}{\Delta\sigma}$ yuzachaga ta'sir qiluvchi sirt kuchlari zichligi $\bar{p}$ ni S sirtning ixtiyoriy nuqtasida kiritish mumkin.

4. Tashqi va ichki kuchlar

Kuchlarni ichki va tashqi kuchlarga bo'lish mumkin. *Kuchlar ichki deyiladi, agarda uning harakati qaralayotgan sistemaga taaluqli ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lsa va tashqi deyiladi, agarda ular qaralayotgan sistemaga nisbatan tashqi bo'lgan ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lsa.*

Tashqi va ichki kuchlar tushunchasi nisbiydir. Masalan, agarda biz havo harakatini yer atmosferasida va yer bilan birga qarasak, u holda havoning og'irlik kuchi - ichki kuch bo'ladi. Agarda faqat havoning harakatini qarasak, u holda og'irlik kuchi - tashqi kuch bo'ladi. Agarda material jism va elektromagnit maydon harakati qaralsa, u holda elektromagnit kuchlar - ichki, agarda faqat material jism harakati qaralsa, u holda maydon unga nisbatan tashqi agent hisoblanadi va elektromagnit kuchlar tashqi kuchlardan iborat bo'ladi.

5. Ichki kuchlanish kuchi

Tutash muhitda ixtiyoriy V hajmni olamiz va uni S kesim bilan 2 ta V_1 va V_2 qismlarga ajratamiz. Agarda

biz V ning bir qismining harakatini qarasak, masalan V_1 ning harakatini qarasak, u holda uning qolgan qismi V_2 ning V_1 ga ta'sirini V_1 bo'yicha taqsimlangan sirt kuchlari bilan almashtirish kerak. Shu yo'sinda kiritilgan kuchlar V_1 uchun tashqi bo'ladi. Agarda biz butun V hajm harakatini qarasak bu kuchlar ichki bo'ladi.

S - kesimni har xil qilib o'tkazish mumkin va shuning uchun S - sirt bo'yicha taqsimlangan sirt kuchlari har xil S -larda har xil bo'ladi.

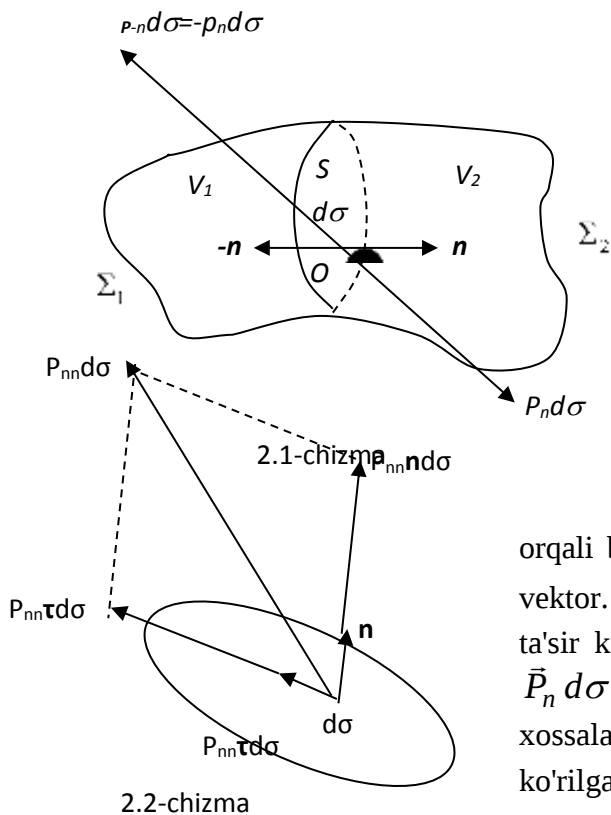
Jism ichida biror bir M nuqta olamiz va bu nuqtaga har xil $d\sigma$ yuzachalarini qaraymiz. Bu yuzachalarning orientatsiyasini uning $\bar{n}$ normal $d\sigma$ yuzachaga V_2 hajmdagi muhit bo'lagiga ta'sir qiluvchi butun kuchni $d\bar{p}$

orqali belgilaymiz va $d\bar{p} = \bar{p}_n d\sigma$ deb olamiz, bu yerda $\bar{p}_n$ - chekli vektor. $\bar{p}_n$ vektorni $d\sigma$ yuzaga bo'lib taqsimlangan qismlarning o'zaro ta'sir kuchining sirt zichliklari kabi qarash mumkin. Umumiy holda $\bar{P}_n d\sigma$ yuzachalar orientatsiyasiga va uning boshqa geometrik xossalariga bog'liq. $\bar{n}$ - normal yo'nalishini shunday tanlaymizki, ko'rilgan $\bar{P}_n d\sigma$ kuch ta'sir qiluvchi muhitning qismiga nisbatan tashqi bo'lsin. Masalan V_2 hajmning V_1 ga ta'sirini $\bar{p}_n d\sigma$ taqsimlangan

kuchlar bilan almashtiramiz. V_1 hajmning V_2 ga ta'sirini $\bar{p}_{-n} d\sigma$ taqsimlangan kuchlar orqali almashtiramiz. Bu turdagi sirt kuchlarini tutash muhitning ixtiyoriy nuqtasida kiritish mumkin va ular *ichki kuchlanish kuchlari deyiladi*. (2.1 - chizma).

Ichki kuchlanish kuchi $\bar{p}_n d\sigma$ ni tutash muhitning har bir nuqtasida $d\sigma$ elementar yuzaga nisbatan ikkita tuzuvchilari - n - normal va τ urinma bo'ylab yoyish mumkin. (2.2 - chizma)

$$\bar{p}_n d\sigma = p_{nn} \bar{n} d\sigma + p_{n\tau} \bar{\tau} d\sigma,$$



bu yerda $p_{nn}d\sigma$ ichki kuchlanish kuchining normal komponentasi. $P_{n\tau}\tau d\sigma$ - urinma komponentasi, shu bilan birga uni *tangensalkuch yoki suyuqlik uchun ichki ishqalanish kuchi deyiladi*. $p_n d\sigma$ sirt kuchlari tashqi kuchlar ham bo'lishi mumkin, ya'ni tutash muhitni chegaralovchi tashqi sirtida ta'sir qiluvchi kuchlar. Tutash muhitning har bir M nuqtasida bu nuqtadan o'tuvchi cheksiz ko'p $\vec{p}_n$ vektorlar mavjud. Ammo ular orasida harakatlanuvchi muhitning xususiy xossalariga bog'liq bo'lmagan universal bog'lanish bo'ladi.

6. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamalari

Moddiy nuqta harakatining asosiy dinamik tenglamasi Nyutonning 2-qonunidan iborat:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Quyida biz Nyutonning 2-qonunidan kelib chiqadigan material tutash muhit harakatini ifodalovchi murakkabroq munosabatlarni keltirib chiqaramiz.

m massali moddiy nuqtaning x, y, z - inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini qaraymiz. M - massa o'zgarmas bo'lganligi uchun

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d m \vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (2.1)$$

bo'ladi.

Massaning tezlikka ko'paytmasi $m\vec{v}$ - nuqta harakat miqdori deyiladi. *Moddiy nuqta harakat miqdoridan olingan vaqt bo'yicha hosila, bu nuqtaga ta'sir etuvchi barcha kuchlar yig'indisiga teng.*

Agarda biz m_i massali n ta moddiy nuqtadan iborat sistemaga ega bo'lsak, bu sistema unga ta'sir qiluvchi yig'indi kuch $\vec{F}_i$ ta'sirida $\vec{v}_i$ tezlik bilan harakatlanadi, bu nuqtalarning har biri uchun (3.1) harakat miqdori tenglamasini yozish mumkin:

$$\frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i,$$

bu yerda F_i ga i - chi nuqtaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi va ichki kuchlar kiradi. n ta nuqta uchun harakat miqdori tenglamalarini qo'shib

$$\sum_{i=1}^n \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}$$

ga ega bo'lamiz, bu erda o'ng tomonda sistemaga nisbatan faqat tashqi kuchlar yig'indisi turibdi, chunki ichki kuchlanish o'zaro ta'sir kuchlari N'yutonning 3-qonuniga ko'ra juft-jufti bilan mavjud va yig'ganda qisqarib ketadi.

Ushbu $\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}^*$ - yig'indi *sistema harakat miqdori* deyiladi, bu yerda $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - butun sistema

massasi, $\vec{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}$ - n ta nuqtadan iborat sistema massa markazining tezligi va biz n ta Moddiy nuqtadan

iborat sistema uchun harakat miqdori tenglamalariga kelimiz:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)} \quad \text{yoki} \quad m \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)},$$

ya'ni Moddiy nuqtalar sistemasi harakat miqdoridan vaqt boyicha olingan hosila sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlar yig'indisiga teng, yoki massaning sistema massa markazi tezligiga ko'paytmasi bu sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuchlar yig'indisiga teng.

Moddiy nuqtaning harakat miqdori tenglamasi universal ahamiyatga ega, uni har xil mexanik sistemalar uchun qo'llash mumkin: galaktikalarga, yulduzlarga, planetalarga, uchar apparatlarga, odamlarga, qushlarga va h.k. qo'llash mumkin.

7. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori tenglamalari

Endi harakat miqdori tenglamalarini $\sum$ sirt bilan chegaralangan tutash muhitning chekli individual V hajmi uchun

umumlashtiramiz. Ushbu

$$\int_V \frac{d}{dt} (\bar{v} \rho d\tau) = \int_M \frac{d\bar{v}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_M \bar{v} dm = \frac{d}{dt} \int_V \bar{v} \rho d\tau$$

munosabat o'rinli bo'lganligi uchun quyidagi ifoda

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \bar{F} \rho dr + \sum \int \bar{p}_n \rho d\tau, \text{ bu yerda } \left(\bar{Q} = \int_V \bar{v} \rho d\tau \right)$$

ta'rifga ko'ra V hajmni egallagan tutash muhitning harakat miqdorini ifodalaydi.

$$\int_V \bar{F} \rho d\tau \text{ va } \sum \int \bar{P}_n d\tau$$

lar esa mos ravishda V hajmdagi muhitga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari yig'indilari.

Shunday qilib tutash muhitning ixtiyoriy hajm uchun inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat miqdori tenglamalarini yozish mumkin

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{v} \rho dr = \int_V \bar{F} \rho d\tau + \sum \int \bar{p}_n d\sigma, \quad (2.2)$$

ya'ni V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdoridan vaqt boyicha olingan hosila unga tasir qiluvchi barcha tashqi massaviy va sirt kuchlari yig'indisiga teng.

Quyidagi

$$m \bar{v}^* = \int_V \bar{v} \rho d\tau$$

formula orqali V hajmdagi tutash muhitning massalar markazi tezligi $\bar{v}^*$ ni kiritish mumkin va (3.2) harakat miqdori tenglamasini individual V hajmdagi tutash muhitning individual hajmining massalar markazi tenglamalari deb ta'riflash mumkin:

$$m \frac{d\bar{v}^*}{dt} = \int_V \bar{F} \rho d\tau + \sum \int \bar{p}_n d\sigma.$$

Aytib o'tish lozimki, (2.2) munosabatlarni ko'pincha impulsar tenglamalari deyishadi, chunki uni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$d \int_V \bar{v} \rho d\tau = \int_V \bar{F} \rho d\tau dr + \sum \int \bar{p}_n \bar{v} d\sigma dt.$$

(2.2) munosabatlarni kuchlarni aniqlovchi tenglik sifatida qarash mumkin.

8. Ichki kuchlanishning asosiy xossalari

Endi (3.2) harakat miqdori tenglamalarning tutash muhitning uzluksiz harakatida berilgan nuqtada olingan $\bar{p}_n$ kuchlanishlarning mos yuzalariga bog'liqligiga chegaralanishlar kiritamiz.

Buning uchun V hajm olamiz va uni ixtiyoriy S kesim bilan ikkita V_1 va V_2 qismlarga bo'lamiz (2.1-chizma). V_1 va V_2 larning biriga va butun V hajmga (3.2) harakat miqdori tenglamalarini qo'llab va bo'lingan qisimlarning o'zaro ta'siri, massaviy taqsimlangan kuchlari va S kesim bo'ylab taqsimlangan sirt kuchlari orqali sodir bo'lishini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{V_1} \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int_{V_1} \bar{F}' \rho d\tau + \sum_1 \int \bar{p}_n d\sigma + \int_S \bar{p}_n d\sigma,$$

$$\int_{V_2} \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int_{V_2} \bar{F}'' \rho d\tau + \sum_2 \int \bar{p}_n d\sigma + \int_S p_{-n} d\tau,$$

$$\int_V \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int_V \bar{F} \rho d\tau + \sum \int \bar{p}_n d\sigma,$$

bu erda $\vec{F}'$ va $\vec{F}''$ lar orqali taqsimlangan massaviy zichliklar belgilangan.

Ichki masalaviy kuchlar uchun hamma vaqt ta'sir va aks – ta'sir tengligi qonuni bo'lganda yuqoridagi birinchi ikkita tenglikni qo'shib, yig'indidan uchinchi tenglikni ayirganda, ya'ni

$$\int_{V_1} \vec{F}' \rho d\tau + \int_{V_{12}} \vec{F}'' \rho d\tau = \int_V \vec{F} \rho d\tau$$

tenglik o'rinli bo'lganda, yig'indidan yuqoridagi uchinchi tenglikni ayirganda

$$\int_V (\vec{P}_n + \vec{P}_{-n}) d\tau = 0$$

bo'ladi. Bu yerdan V , V_1 , V_2 hajmlarning va S kesimning ixtiyoriy tanlanganligidan

$$p_n = -p_{-n} \quad (2.3)$$

ekanligi kelib chiqadi. (2.2) harakat miqdori tenglamalarni ixtiyoriy cheksiz kichik V Moddiy hajm uchun ham qo'llash mumkin. Buning uchun harakat xarakteristikalarini uzluksiz va chekli deb faraz qilib, ixtiyoriy

V individual hajm uchun 0 ga teng bo'lgan quyidagi ifodani tuzamiz:

$$\Omega = \int_V F \rho d\tau + \int_{\Sigma} p_n \rho d\tau - \int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho d\tau.$$

U holda V hajmni nuqttagacha toraytirsak integral ostidagi funksiyalarga bog'liq bo'lmagan holda quyidagi limit o'runli:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \Omega = 0.$$

U Ω ning intergral osti ifodalariga kiruvchi ixtiyoriy chekli funksiyalarda bajariladi.

Vaqtning ayni paytida tutash muhitning ixtiyoriy M nuqtasini olamiz va undan dekart koordinatalar sistemasiga parallel yo'nalishlar o'tkazamiz (2.3-chizma). Bu yo'nalishlarda ixtiyoriy cheksiz kichik $dx = MA$, $dy = MC$ va $dz = MB$ kesmalar o'tkazamiz. Uning MBC , MAB , MAC yon yoqlari

koordinat o'qlariga mos ravishda perpendikulyar, ABC yoq esa ixtiyoriy ravishda joylashgan. Uning orientatsiyasi birlik vektor normal orqali aniqlanadi:

$$\vec{n} = \cos(\vec{n}, x) \vec{i} + \cos(\vec{n}, y) \vec{j} + \cos(\vec{n}, z) \vec{k} = n_i \vec{e}^i.$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{n}$ normali yuzachalarda kuchlanishlarni mos ravishda p^1 , p^2 , p^3 va p_n orqali, ABC yon yoq yuzasini S bilan belgilaymiz. MBC , MAB , MAC yon yoqlarning yuzalari

$$S \cos(\vec{n}, y), \quad S \cos(\vec{n}, y), \quad S \cos(\vec{n}, z)$$

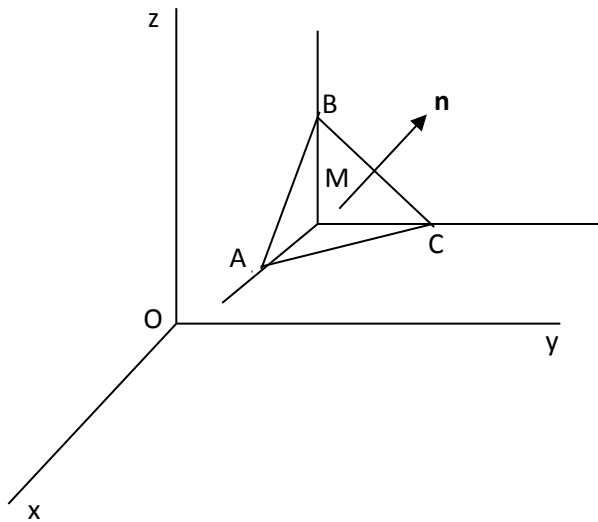
larga teng, tetraedrning hajmi esa

$$V = \frac{1}{3} h s,$$

bu yerda h - M nuqtadan ABC yon yoqqa tushgan balandlik. Agarda tetraedrni t nuqttagacha toraytirib borsa, h birinchi - tartibli cheksiz kichik miqdor, S esa 2-tartibli cheksiz kuchlik miqdor bo'ladi. Vaqtning ayni paytida bu tetraedrning hajmida joylashgan tutash muhit hajmi uchun Ω ni hisoblaymiz. Buning uchun (2.3) ichki kuchlanishlar xossasidan foydalanamiz, u holda

$$\Omega = - \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \rho \right)_M \frac{1}{3} S \cdot h + (\vec{F} \rho)_M \frac{1}{3} S h + \vec{p}_n S - \vec{p}^1 S \cos(\vec{n}, x) - \vec{p}^2 S \cos(\vec{n}, y) - \vec{p}^3 S \cos(\vec{n}, z) + O(h^{2+\lambda}),$$

bu yerda $\lambda > 0$.



2.3-rasm

Faraz qilaylik, tetraedr o'z-o'ziga o'xshash bo'lgan holda nuqtagacha torayib borsin. U holda $\Omega = 0$ bo'lganligi uchun (2.2) ga ko'ra quyidagi limit tengliklar o'rinli

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Omega}{h} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Omega}{h^2} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Omega}{h^3} = 0.$$

Birinchi limit uzluksiz va chekli xarakteristikali harakatlarda doim nolga teng, ya'ni Ω ning integral osti funksiyalariga hech qanday chegaralanishlar qo'yilmaydi. Ushbu

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Omega}{S} = 0$$

shartdan quyida shart doumo bajarilishi kelib chiqadi:

$$\vec{p}_n = \vec{p}^1 \cos(\vec{n}, x) + \vec{p}^2 \cos(\vec{n}, y) + \vec{p}^3 \cos(\vec{n}, z). \quad (2.4)$$

Bunga ko'ra tutash muhitning M nuqtasida olingan ixtiyoriy $d\tau$ yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish (2.4) formula bo'yicha o'sha M nuqtadagi fiksirlangan yuzachalarda olingan $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ kuchlanishlar orqali chiziqli ifodalanadi. (2.4) munosabatga ko'ra $\sum_i$ sirt bo'yicha chegaralangan V hajmli tutash muhitga ta'sir

qiluvchi $\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\tau$ tashqi sirt kuchlari yig'indisini Gauss-Ostragradskiy formulasiga ko'ra hajm bo'yicha

olingan integralga almashtirish mumkin:

$$\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\tau = \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \right) d\tau. \quad (2.5)$$

Xulosa

Shunday qilib, nazariy mexanika fanida o'rganilgan moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori tenglamasi TM uchun umumlashtirildi. Ichki kuchlarning xossalari o'rganildi.

33-34-mavzu: Kuchlanish tenzori. Bosh normal va urinma kuchlanishlar.

REJA

1. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari.
2. Kuchlanish tenzori.
3. Kuchlanish vektorining fizik komponentalari.
4. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari.

Tayanch iboralar: kuchlanish, kuchlanish vektori komponentalari, uzluksiz harakat, hajm, bazis vektori, zichlik, kovariant komponentalar, hajmiy kuchlar, massa.

1. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari

Quyidagi

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Omega}{V} = 0 \quad (3.1)$$

shartni qaraymiz. Yuqoridagi

$$\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \right) d\tau \quad (2.5)$$

(2.5) munosabatga ko'ra Ω ni quyidagi ko'rinishda tasvirlaymiz.

$$\Omega = \int_V \vec{F} \rho d\tau + \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \right) d\tau - \int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho d\tau$$

va (2.1) shartdan

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \quad (3.2)$$

ni hosil qilamiz.

Bu vektorli tenglama tutash muhit harakatining asosiy differensial tenglamasidir. U ixtiyoriy muhitlarning ixtiyoriy harakatlari uchun bajariladi va uzluksiz harakat holida

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{v} \rho d\tau = \int_V \bar{F} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \bar{p}_n \rho d\sigma \quad (3.2)$$

(3.2) harakat miqdori tenglamalariga ekvivalent bo'ladi, chunki (3.2) ga ko'ra ixtiyoriy V hajm uchun $\Omega = 0$. Aytib o'tish kerakki, (3.5) va (4.2) tengliklar $\bar{p}^i$ vektorlar uzluksiz va differensiallanuvchi degan farazda chiqarilgan. (3.2) tenglama umumiy hollar uchun o'rinni

$\bar{p}^1, \bar{p}^2, \bar{p}^3$ vektorlarni dekart koordinatalar sistemasining $\bar{e}_1 = \bar{i}, \bar{e}_2 = \bar{j}, \bar{e}_3 = \bar{k}$ bazis vektorlari orqali yoyamiz

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}^1 &= p^{k1} \bar{e}_k, \\ \bar{p}^2 &= p^{k2} \bar{e}_k, \\ \bar{p}^3 &= p^{k3} \bar{e}_k, \end{aligned} \right\} \text{ yoki } \bar{p}^i = p^{ki} \bar{e}_k \quad (4.3)$$

hamda 9 ta sondan iborat bo'lgan quyidagi matrisani kiritamiz

$$\begin{vmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{vmatrix} = \|p^{ik}\| = p.$$

(3.4) kuchlanishlarning hossasiga ko'ra

$$\bar{p}_n = p_n^1 \bar{e}_1 + p_n^2 \bar{e}_2 + p_n^3 \bar{e}_3 = p_n^i \bar{e}_i$$

kuchlanishning tutash muhitning berilgan nuqtasida olingan ixtiyoriy orientirlangan yuzachasidagi p_n^i komponentasi quyidagi formulalar orqali ifodalanadi.

$$\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11} \cos(\bar{n}, x) + p^{12} \cos(\bar{n}, y) + p^{13} \cos(\bar{n}, z) = p^{1i} n_i, \\ p_n^2 &= p^{21} \cos(\bar{n}, x) + p^{22} \cos(\bar{n}, y) + p^{23} \cos(\bar{n}, z) = p^{2i} n_i, \\ p_n^3 &= p^{31} \cos(\bar{n}, x) + p^{32} \cos(\bar{n}, y) + p^{33} \cos(\bar{n}, z) = p^{3i} n_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Shunday qilib, P matrisa $\bar{n} = n_i \bar{e}^i$ vektorning n_i komponentasini $\bar{p}_n$ vektorning p_n^i komponentasiga almashishini aniqlaydi.

Tutash muhit harakatining vektor tenglamalari (3.2) ga 9 ta p^{ik} funksiyalar kiradi, ularni dekart koordinatalar sistemasining o'qlariga nisbatan proeksiyalarda quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

bu yerda F_x, F_y, F_z orqali $\bar{F}$ hajmiy (massaviy) kuch zichliklarining koordinata o'qlariga proeksiyalari belgilangan.

Agarda bu tenglamalarga (1.3) uzviylik tenglamalarini qo'shsak, u holda biz berilgan tashqi massaviy kuchlarda, umuman olganda, 13 ta noma'lum funksiya: zichlik - ρ , tezlik komponentalari u, v, w , va ichki sirt kuchlanishlarining to'rta komponentasi p^{ik} larga bog'liq 4 ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

2. Kuchlanish tenzori

Orientirlangan yuzachadagi $\vec{p}_n$ kuchlanish vektorining koordinata yuzachalardagi $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ kuchlanish vektorlari orasidagi munosabatlar (3.4) orqali ifodalanadi. Bu munosabatlarni (3.4) formulalar yordamida quyidagicha yozish mumkin

$$\vec{p}_n = \vec{p}^i n_i = p^{ki} \vec{\partial}_k n_i = \vec{p}^i (\vec{\partial}_i \vec{n}) = p^{ki} \vec{\partial}_k (\vec{\partial}_i \vec{n}). \quad (3.6)$$

Bu tenglik $\vec{n}$ vektor komponentalarini $\vec{p}_n$ vektorning komponentalariga p^{ki} koeffisientlar bo'yicha chiziqli almashtiradi. Bu tenglik ortogonal dekart koordinatalar sistemasida hosil qilingan va demak, p^{ki} lar ixtiyoriy ortogonal dekart koordinatalar sistemasida aniqlangan. (3.6) munosabat $\vec{p}_n$ va $\vec{n}$ vektorlar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi va shuning uchun uni ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida yozish mumkin. Bundan kelib chiqadiki,

$$P = P^{ki} \vec{\partial}_k \vec{\partial}_i \quad (3.7)$$

tenzorning kontravariant komponentalari sifatida qarash mumkin bo'lgan p^{ki} miqdorlarni (3.6) tenglik yordamida nafaqat ortogonal dekart o'qlarda balkim ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham kiritish mumkin. (3.7) ko'rinishdagi tenzor *ichki kuchlanish tenzori deyiladi*. Shu bilan birga ixtiyoriy koordinatalar sistemasida

$$\vec{p}_n = P \cdot \vec{n} = \vec{p}^i n_i$$

tenglik o'rinli, bu yerda $\vec{p}_n - \vec{n}$ normalli ixtiyoriy yuzachadagi kuchlanish, $n_i - \vec{n}$ normalning kovariant komponentalari.

3. Kuchlanish vektorining fizik komponentalari

Aytish kerakki, $\vec{p}^i = \vec{p}_n$ tenglik mos keluvchi koordinat yuzachalarda faqatgina ortogonal dekart koordinatalar sistemasida bajariladi, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida mos keluvchi koordinat yuzachalarda $\vec{p}^i \neq \vec{p}_n$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham berilgan egri chiziqli koordinatalar sistemasida $\vec{\partial}_{i+1}$ va $\vec{\partial}_{i+2}$ bazis vektorlari orqali aniqlanadigan yuzachani qaraymiz, bu yuzachaga nisbatan normalning yo'nalishini

$$\vec{\partial}^i = \frac{\vec{\partial}_{i+1} \times \vec{\partial}_{i+2}}{\sqrt{g}}$$

kontravariant bazis vektorni yo'nalishlari kabi aniqlaymiz. Bu yo'nalishning bazis vektor

$$\vec{n}^i = \frac{\vec{\partial}_i}{\sqrt{g^{ii}}}$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda $g^{ii} > 0$, kvadrat ildiz esa bu yerda va bundan keyin musbat ishora bilan olinadi. (3.6) ga ko'ra bunday yuzachalar kuchlanish vektori $\vec{p}^n$ orqali belgilaymiz va u

$$\vec{p}_i^* = \frac{p^{\alpha k} \vec{\partial}_\alpha (\vec{\partial}_k \cdot \vec{\partial}^i)}{\sqrt{g^{ii}}} = \frac{p^{\alpha i} \vec{\partial}_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}}$$

ko'rinishda tasvirlanadi va demak, umuman olganda

$$\vec{p}^i = p^{\alpha i} \vec{\partial}_\alpha$$

kuchlanish vektorini qaralayotgan nuqtada olingan $\vec{\partial}_\alpha / \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ bazisning birlik vektorlari bo'yicha yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{p}_i^* = X^{\alpha i} \frac{\vec{\partial}_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}.$$

$X^{\alpha i}$ miqdorlar $\vec{p}_i^*$ kuchlanish vektorining fizik komponentalari deyiladi. Keyingi ikkita tengliklar asosida

$$P^{\alpha i} = X^{\alpha i} \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}$$

deb yozishimiz mumkin (bu formulada α bo'yicha yig'indi yo'q). Bu yerdan ko'rinadiki $X^{\alpha i}$ fizik komponentalar hech qanday tenzorning komponentasi bo'la olmaydi.

Ortogonal Dekart koordinatalar sistemasida

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$$

bo'ladi.

4. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari

(3.2) harakat miqdorining vektor tenglamalaridan

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \int_V \vec{F} \rho d\tau + \sum_n \vec{p}_n d\tau$$

hamda Gauss-Ostrogradskiy teoremasi

$$\sum_n \int \vec{p}_n d\sigma = \sum_n \int \vec{p}^i n_i d\sigma = \int_V \vec{p}^i d\tau$$

ga ko'ra uzluksiz harakatlar holda ixtiyoriy chiziqli koordinatalar sistemasida bajariladigan quyidagi harakat tenglamalarini hosil qilamiz.

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} + \Delta_i \vec{p}^i \text{ yoki } \rho a^k = \rho F^k + \Delta_i \vec{p}^{ki} \quad (3.8)$$

(3.8) harakat tenglamalarida

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^j \Delta_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^j \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^i} + v^s \Gamma^k_{si} \right)$$

va

$$\Delta_i \vec{p}^i = \frac{\partial \vec{p}^i}{\partial \eta^i} + \vec{p}^s \Gamma^i_{si} = (\Delta_i p^{ki}) \vec{e}_k.$$

(3.8) vektorli tenglama ham harakatlanuvchi, ham qo'zg'almas koordinatalar sistemasida o'rinli, xususiyl holda hisob sistemasida ham, yo'ldosh sistemada ham o'rinli. Ammo shuni hisobga olish kerakki $\vec{a}$ vektor tutash muhit individual nuqtalarining biror bir inersial koordinatalar sistemasiga nisbatan tezlanishidan iborat, $\vec{F}$ esa berilgan massaviy kuchlarning zichliklaridan iborat. Agarda harakat va tezlanishni noinersial koordinatalar sistemasiga nisbatan qarasak, u holda $\vec{F}$ ning ifodasiga inersiya kuchlarini ham qo'shish kerak.

Tutash muhitda ρdi massali cheksiz kichik zarrachasi qaraymiz, unga $\rho \vec{F} d\tau$ - massaviy kuchlar hamda yo'ldosh koordinatalar sistemasida inersiya kuchlaridan iborat bo'lgan $\rho \vec{a} d\tau$ kuchlar, zarracha chegarasida sirt kuchlari tasirida paydo bo'layotgan massaviy kuchlar deb qarash mumkin bo'lgan $\Delta_i \vec{p}^i d\tau = (\Delta_i p^{ki}) \vec{e}_k d\tau$ kuchlar ta'sir qiladi. (3.8) tenglamani yo'ldosh koordinatalar sistemasiga nisbatan muvozanat sharti deb qarash mumkin; (3.8) ga ko'ra zarrachaga ta'sir qiluvchi barcha kuchlar yig'indisi 0 ga teng. Agarda $P = p^{ki} \vec{e}_k \vec{e}_i$ tenzor tutash muhitning barcha nuqtalarida o'zgarmas bo'lsa, u holda $\Delta_i \vec{p}^i = 0$ bo'ladi. Dekart koordinatalar sistemasida p^{ki} kuchlanish tenzori komponentalari harakat tenglamalariga faqatgina ular x, y, z koordinatalardan bog'liq bo'lganda qatnashadilar. Shu bilan birga

$$\Delta_i \vec{p}^i = 0 \text{ yoki } \Delta_i p^{ki} = 0$$

tenglik hamda $P = p^{ki} \vec{e}_k \vec{e}_i = \cos t$ tenglik ekvivalent emas. Masalan, agar massaviy kuchlar ta'sir qilmayotgan muhit muvozanatda bo'lsa, u holda

$$\Delta_i \vec{p}^{ki} = 0.$$

Bu tenglama faqat tashqi sirt kuchlari bilan yuklangan har xil ob'ektlarning muvozanati haqidagi masalalar qaralayotganda elastiklik nazariyaning asosiy tenglamasi hisoblanadi.

Xulosa

Shunday qilib, muhitga ta'sir etuvchi sirt, massaviy va inersiya kuchlari muvozanati shartidan Dekart va ixtiyoriy koordinatalarda tutash muhitning harakat tenglamalari keltirib chiqarildi

Mustaqil ishlar uchun savollar.

1. Tutash muhit harakatining asosiy differensial tenglamasini yozing (vektorli ko'rinishi).
2. P matrisa nimani aniqlaydi.
3. Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning harakat tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Kuchlanish tenzori deb nimaga aytiladi?
5. Kuchlanish tenzorining fizik komponentalarini keltiring.
6. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida tutash muhit harakat tenglamalarini keltiring.
7. Gauss – Ostrogradsiy formulasini yozing.
8. Vektorning kovariant va kontravariant komponentasini yozing.

35-36-mavzu : Tutash muhit muvozanat tenglamasi. Harakat miqdori momenti tenglamalari va ulardan klassik holda kelib chiqadigan natija.

Reja:

1. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi.
2. Chekli hajmdagi tutash muhit harakati miqdori momenti.
3. Harakat miqdorining momentlari.
4. Taqsimlangan massaviy va sirt juftlari.
5. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi.
6. Klassik holatda harakat miqdori momentlari tenglamalari.
7. Giromagnit effekt va harakat momentlari tenglamalari.

Tayanch iboralar: harakat miqdori, harakat miqdori momenti, hajm, juftlar, kuchlanish tenzori, radius - vektor, massa, ichki kuchlar, nuqtalar sistemasi, og'irlik markazi tezligi

1. Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi
Yuqorida takidlaganimizdek, hosil qilingan tutash muhit harakatining universal tenglamalari sistemasi to'liq emas. Harakatlanuvchi muhitning hususiy xossalariga bog'liq bo'lmagan boshqa universal tenglamalarni ham hosil qilish mumkin. Shu maqsadda mexanikaning umumiy tenglamalaridan biri bo'lgan harakat miqdori momentlari tenglamalarini ko'rib chiqamiz.

Ushbu

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

tenglamani chap tomondan qaralayotgan m massali Moddiy nuqtaning biror bir inersial koordinatalar sistemasining boshi O nuqtaga nisbatan r - radius vektorga vektorli ko'paytirib, nuqta uchun harakat miqdori momenti tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.1)$$

bu erda

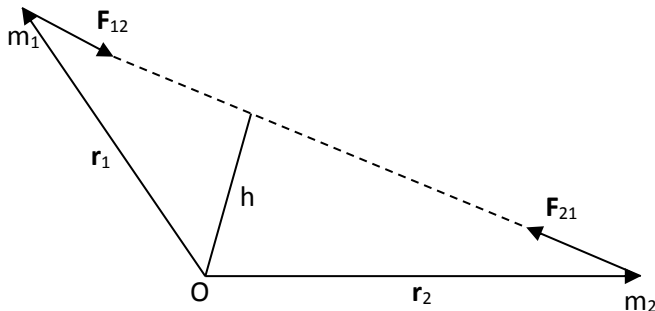
$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{va} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

lar mos ravishda moddiy nuqta harakati miqdori momenti va O nuqtaga nisbatan unga ta'sir qiluvchi $\vec{F}$ - yig'indi kuchning momenti. Shunday qilib, bitta moddiy nuqta uchun harakat miqdori momentlari tenglamalari N'yuton 2- qonunning trivial natijasidir.

Agarda biz $\vec{v}_i$ tezlik bilan harakatlanuvchi m_i massali n ta moddiy nuqtalar sistemasiga ega bo'lsak, u holda ularning har biri uchun (4.1) harakat miqdori momentlari tenglamalarini yozishimiz mumkin:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

bu erda $\vec{F}_i - m_i$ massali qaralayotgan nuqtaga ta'sir qiluvchi barcha (shu bilan birga butun sistemaga nisbatan ichki bo'lgan) kuchlarning bosh vektori. Bu tengliklarni sistemaning barcha n ta nuqtasi uchun qo'shib va sistema harakat miqdori momentini



4.1-chizma

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

ko'rinishda aniqlab, sistema nuqtalari uchun harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}),$$

bu yerda o'ng tomonda N'yutonning 3 - qonuniga ko'ra kuchlar ning butun sistemasiga nisbatan faqat tashqi momentlar yig'indisi turadi (4.1-chizma). Biror bir O nuqtaga nisbatan nuqtalar sistemasining harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan hosilasi, o'sha O nuqtaga

nisbatan sistemaga ta'sir qiluvchi barcha tashqi kuch momentlarining yig'indisiga teng.

Moddiy nuqtalar sistemasi harakat miqdori momentini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\vec{K} = \vec{r}^* \times m \vec{v}^* + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{i \text{ nisb}} \times m_i \vec{v}_{i \text{ nisb}}),$$

bu yerda $m = \sum_{i=1}^n m_i$, $\vec{r}^*$ - sistema massalar markazi radius vektori, $\vec{v}^*$ - massalar markazi tezligi, $\vec{r}_i$ - massalar markaziga nisbatan i - nuqtaning radius - vektori, $\vec{v}_i$ - massalar markazi bilan ilgarilanma harakat qilayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan i - nuqtaning tezligi.

2. Chekli hajmdagi tutash muhit harakati miqdori momenti

V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momenti deb odatda quyidagi vektorni aytishadi

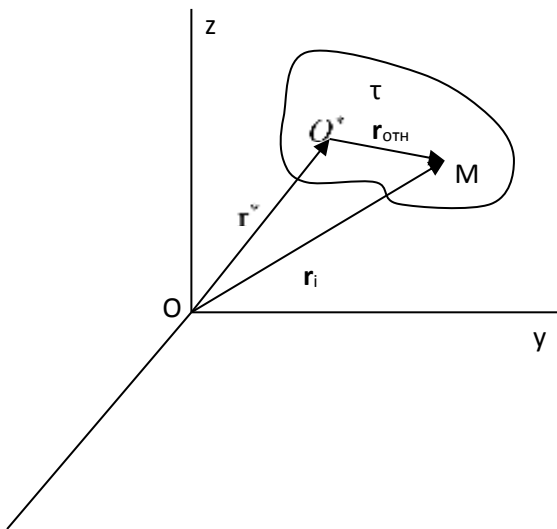
$$\vec{K} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau, \quad (4.2)$$

bu yerda $\vec{r}$ - biror bir qo'zg'almas O nuqtaga nisbatan tutash muhit nuqtalarining radius - vektorlari, $\vec{v}$ esa ularning tezliklari.

Faraz qilaylik biz tutash muhitning m massali biror bir τ hajmiga ega bo'laylik. Bu hajmning ixtiyoriy M nuqtasining $\vec{v}$ - tezligini (4.2 - chizma)

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_{\text{nisb}}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\vec{v}^* - \tau$ hajm massalar markazi O^* ning tezligi, $\vec{v}_{\text{nisb}}$ - qaralalayotgan nuqtaning massalar markaziga nisbatan tezligi. U holda biror bir O nuqtaga nisbatan τ hajm harakat miqdori momenti hajm massalar markazi bilan mos tushuvchi m - massali moddiy nuqtaning O nuqtaga nisbatan harakat miqdori momentiga hamda O^* massalar markaziga nisbatan τ hajmdagi barcha M nuqtalar harakat miqdori momentlari yig'indisiga teng, ya'ni



1.2-chizma

$$\vec{K} = \vec{r}^* \times \vec{Q} + \int_{\tau} \vec{r}_{nisb} \times \vec{v}_{nisb} \rho d\tau,$$

bu yerda

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}^*$$

massalar markazi bilan mos tushuvchi m -massali Moddiy nuqta harakat miqdori. Yuqoridagi munosabatni quyidagicha yozib olamiz

$$\vec{K} = \vec{r}^* \times \vec{Q} + \vec{K}^*, \quad \vec{K}^* = \int_V \vec{r}_{nisb} \times \vec{v}_{nisb} \rho d\tau.$$

Endi cheksiz kichik $d\tau$ hajmni qaraymiz. Ko'p hollarda cheksiz kichik hajm uchun $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ miqdorga nisbatan $\vec{K}^*$ - harakat miqdori momentini hisobga olmaslik mumkin. Masalan, $d\tau$ ni O^* markazdan o'tuvchi o'z o'qi atrofida $\vec{\omega}$ - burchak tezligi bilan aylanuvchi R - radiusli bir jinsli sfera sifatida olsak, u holda

$$\vec{K}^* = \vec{I} \omega = m \ell^2 \omega,$$

bu yerda I - inersiya momenti, ℓ - bu sferaning o'z aylanish o'qiga nisbatan inersiya radiusi. Ko'rinib turibdiki, $m \ell$ miqdor R^5 tartibga ega, $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ esa R^3 tartibga ega hamda agarda ω - chekli bo'lsa, $\vec{v}^*$ miqdor $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ ga nisbatan kichik, V hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momenti $\vec{K}$ ning limitik holati esa

$$\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau$$

ko'rinishda bo'ladi.

Lekin, agarda ω - burchak tezligi shunchalik katta bo'lsaki, $\omega \ell^2$ miqdor chekli bo'lsa, u holda $\vec{K}^*$ va $\vec{r}^* \times \vec{Q}$ miqdorlar bir xil R^3 tartibga ega va V hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momenti quyidagiga teng bo'ladi

$$\vec{K} = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau, \quad (4.3)$$

bu yerda k orqali harakat miqdorining ichki (yoki xos) momentlarining zichligi belgilangan.

3. Harakat miqdorining momentlari

O'rganilayotgan masalani fizik mikroskopik nuqtai nazardan qaraymiz. Yadro va uning atrofida aylanuvchi elektronlar iborat sistemani, ya'ni atomni qaraymiz. Elektron o'z orbitasi bo'ylab yorug'lik tezligi tartibidagi tezlik bilan aylanadi, shuning uchun atomning kichik o'lchamiga qaramasdan, yadro-elektron sistemasi anchagina harakat miqdorining xos momentiga ega. Elektronning orbita bo'ylab aylanish hisobiga hosil bo'layotgan harakat miqdori momenti, harakat miqdorining orbital momenti deyiladi.

Shunday qilib, barcha atomlar k ga teng harakat miqdori xos momentiga ega. Lekin bu harakat miqdori momentlari yig'indisi barcha atomlar uchun ko'p hollarda ularning xaotik harakati tufayli nolga teng. Ammo elementar zarrachalar harakatini, masalan maqnit maydonini qo'yib tartiblash mumkin va bu holda barcha atomlar ichki momentlar yig'indisi noldan farqli bo'ladi. Tutash muhit makroskopik zarracha harakat miqdori momenti ifodasiga, umuman,

$$\vec{K}' = \int_V \vec{k} \rho d\tau$$

harakat miqdori xos momentlari yig'indisi kiradi.

Shunday qilib, agar masalan biz tutash muhit mexanikasida real muhitlarning elektromagnit maydonda harakatini ifodalamoqchi bo'lsak, u holda biz $\vec{k}$ xos momentlarni kiritishimiz kerak va bu larni hisobga olib, V hajmdagi tutash muhit harakati momentlarini (4.3) bo'yicha aniqlashimiz kerak.

Tutash muhit mexanikasida harakat miqdori xos momentlari faqat oxirgi vaqtlarda qaralmoqda, sababi hozirgi zamon texnikasining rivojlanib borishi bilan tutash muhit mexanikasi masalalari ancha

kengaygan. Tutash muhitning klassik masalalarida $\vec{k}$ - ichki momentlar hisobga olinmaydilar va V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momenti

$$\int_V \vec{r} \times \vec{v} d\tau$$

ko'rinishda aniqlanadi.

4. Taqsimlangan massaviy va sirt juftlari

Ichki moment $\vec{K}$ larni qaraganda biz taqsimlangan massaviy va sirt juftlari mavjud deb faraz qilishimiz kerak.

Tutash muhitning har bir zarrachasiga taqsimlangan massaviy va sirt kuchlari ta'sir qiladi. Ammo shunday bo'lishi mumkinki, tashqi Moddiy ob'ektlarning tutash muhit zarrachasiga ta'sirini faqat bu kuchlar bilan almashtirib bo'lmaydi, bundan tashqari massaviy va sirt juftlari kiritish kerak bo'ladi.

$\vec{Q}_n$ va $\vec{h}$ orqali sirt va massa birligiga nisbatan mos ravishda sirt va massaviy juftlar momentini belgilaymiz. Taqsimlangan massaviy juftlarga misol bo'lib, yer magnit maydonida joylashgan kompas strelkasining har bir elementiga ta'sir qiluvchi juftlarni qarash mumkin.

5. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori momentlari tenglamasi

Bitta Moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori momentlari tenglamalarini chekli individual V hajmdagi, $\sum$ sirt bilan chegalangan tutash muhit harakati miqdori tenglamalari uchun umumlashtiramiz

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau \right) = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \sum \int_V \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma + \int_V \vec{h} \rho d\tau + \sum \int_V \vec{Q}_n d\sigma. \quad (4.4)$$

Ixtiyoriy V individual hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha hosilasi bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari momentlari yig'indisiga va hajmga nisbatan tashqi ob'ektlar ta'sirida paydo bo'lgan taqsimlangan massaviy va sirt juftlar momentlarining yig'indisiga teng.

Harakat miqdorining momentlari tenglamalari, harakat miqdori tenglamalari kabi V hajmdagi tutash muhit uchun huddi bitta Moddiy nuqta uchun N'yutonning $\vec{F} = m\vec{a}$ qonuni bajarilgani kabi bajariladi. Shuni aytishimiz kerakki, ixtiyoriy individual V hajmdagi tutash muhitning harakat miqdori momentlari tenglamalari Moddiy nuqtalar sistemasi mexanikasining harakat miqdori momentlari tenglamalaridan kelib chiqmaydi. Bu tenglama alohida tenglama hisoblanadi. Bu tenglama ixtiyoriy tutash muhitlar uchun ham uzliksiz, ham xarakteristikali, vaqt va fazo nuqtalari koordinatalari bo'yicha uzilishga ega bo'lgan ixtiyoriy harakatlarda qo'llash mumkin.

6. Klassik holda harakat miqdori momentlari tenglamalari

Klassik holda ichki harakat miqdori momentlari qatnashmaganda hamda taqsimlangan massaviy va sirt juftlari qatnashmaganda harakat miqdori momentlari tenglamalari quyidagi ko'rinishga keladi

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \sum \int_V \vec{r} \times \vec{p}_n \rho d\sigma. \quad (4.5)$$

Inersial koordinatalar sistemasiga bog'liq biror bir O nuqtaga nisbatan tutash muhitning individual V hajmi harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan o'sha nuqtaga nisbatan bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy va sirt kuchlari momentlarining yig'indisiga teng.

Agarda bu jismga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa, u holda

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

bo'ladi va harakat miqdori momenti $\vec{k}$ o'zgarmas bo'ladi.

7. Giromagnit effekt va harakat momentlari tenglamalari

Endi biz harakat miqdorining ichki momentlari va taqsimlangan massaviy juftlarni hisobga olish kerakligini ko'rsatayot tajriba o'tkazamiz. Agarda magnit maydonda temir sterjenni joylashtirsak, u holda u magnitlanadi va ko'rsatish mumkinki, $\vec{k}$ ichki momentlar yig'indisi noldan farqli bo'ladi.

Haqiqatan, faraz qilaylik bu sterjen bo'shliqda maqnit maydon ta'sirida erkin holatda joylashgan bo'lsin. Magnit maydonni olib tashlaymiz. U holda xaotik harakat tufayli sterjenda biror vaqt o'tgach $\vec{k}$ - ichki momentlarning taqsimlanishi tartibsiz bo'lib qoladi va shuning uchun harakat miqdori ichki momentlar yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Shu bilan birga sterjenga hech qanday tashqi obektlar ta'sir qilmagani uchun harakat miqdorining to'liq momenti saqlanib qolishi kerak. Shuning uchun sterjenning to'laligicha aylanishi hisobiga harakat miqdori momenti paydo bo'lishi kerak va sterjen aylanishi kerak.

Tajriba shuni ko'rsatadiki, magnit maydonini olib tashlagandan keyin sterjen haqiqatan aylanib boshlaydi. Bunday hodisani *giromagnit effekt* deb ataymiz. Bu hodisani harakat miqdori ichki momenti va taqsimlangan massaviy juftlarni hisobga olmasdan tushintirib bo'lmaydi.

8. Differensial formada harakat miqdori momentlari tenglamalari

Tutash muhitning uzluksiz harakatida (3.4) tenglik va Gauss-Ostrogradskiy teoremasidan foydalanib, tashqi sirt kuchlari momentlari yig'indisi uchun V hajm bo'yicha olingan integral ko'rinishidagi ifodani hosil qilish mumkin:

$$\sum \int \vec{r} \times \vec{p}_n d\tau = \sum \int (\vec{r} \times \vec{p}^i) n_i d\sigma = \int_V \Delta_i (\vec{r} \times \vec{p}^i) d\tau$$

Xuddi $\vec{p}_n$ ichki kuchlanishlar kabi taqsimlangan sirt juftlari momentlari $\vec{Q}_n$ ni quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin

$$\vec{Q}_n = \vec{Q}^i n_i.$$

U holda Gauss - Ostrogradskiy teoremasiga ko'ra

$$\sum \int \vec{Q}_n d\sigma = \sum \int \vec{Q}^i n_i d\sigma = \int_V \Delta_i \vec{Q}^i d\tau$$

quyidagi almashtirishdan foydalanamiz

$$\begin{aligned} \int_V \Delta_i (\vec{r} \times \vec{p}^i) d\tau &= \int_V \vec{r} \times \Delta_i \vec{p}^i d\tau + \int_V \Delta_i \vec{r} \times \vec{p}^i d\tau = \\ &= \int_V \vec{r} \times \Delta_i \vec{p}^i d\tau + \int_V \Delta_i (\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_k) \vec{p}^{ki} d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{chunki } \Delta_i \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{\varepsilon}_i.$$

Endi $dm = \rho d\tau$ massani o'zgarmas deb (4.4) harakat miqdori momenti haqidagi teoremani

$$\begin{aligned} \int_V \left[\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} - \frac{1}{\rho} \Delta_i \vec{p}^i \right) \right] \rho d\tau + \int_V \frac{d\vec{k}}{dt} \rho d\tau = \\ = \int_V \vec{h} \rho d\tau + \int_V \Delta_i \vec{Q}^i d\tau + \int_V (\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_n) p^{ki} d\tau \end{aligned}$$

ko'rinishda yozish mumkin, yoki (3.6) harakat miqdori tenglamalariga ko'ra quyidagi ko'rinishda

$$\int_V \frac{d\vec{k}}{dt} \rho d\tau = \int_V \vec{h} \rho d\tau + \int_V \Delta_i \vec{Q}^i d\tau + \int_V (\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_n) p^{ki} d\tau$$

yo'zish mumkin. Bu yerdan tutash muhit hajmi V - ixtiyoriyligidan tutash muhitning uzluksiz harakatida differensial shaklda harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\rho \frac{d\vec{k}}{dt} = \rho \vec{h} + \Delta_i \vec{Q}^i + (\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_k) p^{ki}. \quad (4.6)$$

Klassik hol uchun (4.6) tenglamalar (ichki momentlar hamda taqsimlangan sirt va massaviy taqsimlangan juftlar mavjud bo'lmagan holda) quyudagi

$$(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{\varepsilon}_k) p^{ki} = 0 \quad (4.7)$$

ko'rinishga ega.

9. Klassik holda kuchlanish tenzorining simmetriyaligi

(4.7) momentlar tenglamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$(\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_k) p^{ki} + (\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_k) \cdot p^{ki} = 0$$

Oxirgi yig'indida yig'indi indeksleri k ni i ga, i ni k ga almashtiramiz va

$$(\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_k) p^{ki} + (\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_k) \cdot p^{ik} = 0$$

bo'ladi yoki vektorli ko'paytma xossasiga ko'ra

$$(\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_k)(p^{ki} - p^{ik}) = 0.$$

Bu yerdan $p^{ki} = p^{ik}$ ($k \neq i$), ya'ni

$$p^{13} = p^{31}, \quad p^{22} = p^{21}, \quad p^{12} = p^{23} = p^{32}.$$

Shunday qilib, klassik holatda momentlar tenglamalari kuchlanish tenzori simmetrik degan natijaga olib kelar ekan. Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lsa, (4.7) harakat miqdori tenglamalari aynan bajariladi.

Xulosa

Shunday qilib, muhitga ta'sir etuvchi sirt, massaviy va inersiya kuchlari muvozanati shartidan Dekart va ixtiyoriy koordinatalarda tutash muhitning harakat tenglamalari keltirib chiqarildi

Mustaqil ishlar uchun savollar:

1. Moddiy nuqta harakat miqdori momenti nimaga teng.
 2. Sistema nuqtalari harakat miqdori momentlari tenglamalarini hosil qilamiz.
 3. Chekli hajmdagi tutash muhit harakat miqdori momentlari tenglamalarini yozing.
 4. Klassik holdagi harakat miqdori momentlari tenglamalarida ichki harakat miqdori momentlari qatnashadimi?
 5. Qanday holatda harakat miqdori momenti o'zgaras bo'ladi.
- Harakat miqdori momentlari tenglamalarini differensial ko'rinishda yozing

37-38-mavzu: Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari. Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.

Reja

1. Ideal suyuqlik va gaz ta'riflari.
2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori.
3. Ideal suyuqlik harakati tenglamalari.
4. Gromeki - Lemb shaklidagi ideal suyuqlikning harakat tenglamalari.
5. Ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.
6. Bartrop jarayonlarda ideal siqiluvchan suyuqlik (gaz) tenglamalarining yopiq sistemasi.

Tayanch iboralar: suyuqlik, gaz, kuchlanish tenzori, normal, yuzacha, kovariant va kontzavariant komponentalar, vektor, skalyar, barotrop hodisalar, massa

Harakat miqdori, harakat miqdori momenti va uzviylik differensial tenglamalari barcha tutash muhitlarning ixtiyoriy uzluksiz harakatlarida bajariladi. Ammo har xil real muhitlar bir xil tashqi shartlarda o'zlarini har xil tutishadi.

Demak, bu tenglamalarning o'zi, hatto mos chegaraviy shartlar qo'shilganda ham, konkret tutash muhit harakatini ifodalash uchun yetarli emas. Sababi tenglamalar soni ularga kiruvchi noma'lumlar soniga nisbatan kam, sistema to'liq emas (yopiq emas).

Toliq tenglamalar sistemasini tuzish - bu demak o'rganilayotgan muhitning matematik modelini tuzish demakdir.

Quyida biz tutash muhitning ba'zi bir sodda klassik modellarini qarab chiqamiz.

1. Ideal suyuqlik va gaz ta'riflari

Ideal suyuqlik va gaz modellarini o'rganishdan boshlaymiz. Ideal suyuqlik yoki ideal gaz deb shunday muhitga aytiladiki, unda $\vec{n}$ normalli ixtiyoriy yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish vektori yuzachaga ortogonal, ya'ni $\vec{p}_n \parallel \vec{n}$.

Eksperiment natijalari va umumiy fizik xulosalar ko'rsatadiki, ixtiyoriy muhit juda katta bosim va temperaturalarda bunday xossaga ega.

2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori

Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining tenzor sirti bu holda sferadan iborat va demak, $p_1 = p_2 = p_3$ ya'ni kuchlanish tenzorining bosh komponentalari bir xil. Ularni $-p$ orqali belgilaymiz va p ni bosim deb olamiz. Ishorani tanlash bosimni musbat miqdor sifatida olish uchun qilindi, chunki tajribalar ko'rsatayapdiki ideal suyuqlik modeli o'rinli bo'lgan muhitlar asosan $p > 0$ bo'lganda siqilgan holatda bo'ladilar.

Bunday muhit uchun ixtiyoriy uchta o'zaro ortogonal yo'nalishlar bosh yo'nalishlar hisoblanadi va shuning uchun ixtiyoriy dekart koordinatalar sistemasida kuchlanish tenzori komponentalari matrisasi

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Xususan, p_k^i aralash komponentalari uchun

$$p_k^i = -p\delta_k^i \quad (1.1)$$

bo'ladi. $\delta_k^i \bar{\epsilon}^k \bar{\epsilon}_i$ tenzorining δ_k^i komponentalar koordinatalarni almashtirganda o'zgarmaydilar, ($\delta_k^i = \delta_k^i$) va shuning uchun (1.1) formula ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining aralash komponentalari uchun nafaqat dekart balkim ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida o'rinli.

Bu tenzorning kontravariant komponentalari

$$p^{ki} = g^{ks} p_s^i = -p g^{ks} \delta_s^i = -p g^{ki} \quad (1.2)$$

ko'rinishga ega, kovariant komponentalari esa

$$p_{ki} = g_{ks} p_i^s = -p g_{ks} \delta_i^s = -p g_{ki}.$$

Demak, ideal suyuqlikda kuchlanish tenzori bitta p son bilan beriladi (umumiy holda 9 ta p^{ki} larga bog'liq).

Ideal suyuqlik uchun

$$P = -p \cdot G,$$

bu yerda G - metrik tenzor.

Tenzor sirti sferadan iborat bo'lgan ixtiyoriy T tenzor sharsimon deyiladi. Barcha sharsimon tenzorlar quyidagi ko'rinishga ega

$$T = k \cdot G, \quad k - \text{skalyar miqdor.}$$

3. Ideal suyuqlik harakati tenglamalari

Ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida tutash muhitning tenglamalari

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

(1.2) ga ko'ra ideal suyuqlik uchun quyidagicha yoziladi

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki} \nabla_i p. \quad (1.3)$$

(1.3) formulani yozishda g^{ki} tenzor komponentalari kovariant differensiallashda o'zgarmas miqdor sifatida tutishadi.

Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozamiz. $\nabla_i p$ miqdorlar p - gradient-vektorning kovariant komponentalari, $g^{ki} \nabla_i p$ - uning kontravariant komponentasi. Shuning uchun (1.3) tenglama vektor ko'rinishda quyidagicha bo'ladi

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } p. \quad (1.4)$$

Bu tenglamalar dekart koordinatalar o'qlariga proeksiyalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

yoki

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Bu tenglamalar *Eyler tenglamalari* deyiladi.

4. Gromeki – Lemb shaklidagi ideal suyuqlikning harakat tenglamalari

Yuqoridagi (1.6) tenglamalarni boshqacha ko'rinishda yozamiz. Tezlanishni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{v}^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (1.7)$$

bu yerda $\vec{\omega}$ - uyurma vektori.

Haqiqatan, dekart koordinatalar sistemasida tezlanishning x o'qiga proeksiyasi uchun

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - \\ &- \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) w = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial x} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v})_x.\end{aligned}$$

Xuddi shunday formulalar tezlanishning y va z o'qlariga proeksiyalar uchun hosil bo'ladi, shuning uchun

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ vektor korinishda (1.7) kabi yoziladi. Ideal suyuqlik harakat tenglamalari - vektor ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p. \quad (1.8)$$

Bu tenglamalar *Gromeki - Lemb shaklidagi Eyler harakat tenglamalari* deyiladi. Tezlanishning bunday almashtirishini ixtiyoriy tutash muhitlar uchun qo'llash mumkin va u, xususan, gidromexanikaning ko'pgina masalalarini o'rganishda juda qulay bo'ladi.

Ideal suyuqlik harakatining uchta tenglamalariga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$$

uzviylik tenglamalarini qo'shish kerak.

Biz ma'lum F_x, F_y, F_z massaviy kuchlar berilganda 5 ta noma'lum u, v, w, p, ρ funksiyalarga ega to'rtta tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistema hali ham to'liq emas.

5. Ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi

Ko'p hollarda qo'shimcha qilib, qaralayotgan ideal suyuqlik siqilmaydigan deb qarash mumkin, ya'ni uning ixtiyoriy zarrachasining hajm miqdori o'zgarmas deb qarash mumkin. U holda to'rtta tenglamalar sistemasiga quyidagi shart qo'shiladi:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}\rho = 0$$

yoki dekart koordinatalar sistemasida

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0$$

bo'ladi. Bu shart ideal siqilmaydigan suyuqlik harakatini ifodalovchi tenglamalar sistemasini to'ldiradi. Bu sistemani to'laligicha keltiramiz:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

$$\text{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.9)$$

Agarda zarracha massasi o'zgarsa oxirgi tenglama o'zgarishi mumkin.

Aytish lozimki, o'zgarmas massali bir jinsli siqilmaydigan suyuqlik holida uning har bir zarrachasi zichligi ρ zarrachada o'zgarmas bo'ladi va barcha zarrachalarda bir xil bo'ladi, shuning uchun u ahamiyatli izlanuvchi funksiya bo'lmay qoladi. Mexanik tenglamalarning to'liq sistemasi bu holda Eyler tenglamalari va uzviylik tenglamalaridan iborat bo'ladi.

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p, \quad (1.10)$$

$$\nabla_\alpha v^\alpha = 0.$$

6. Barotrop jarayonlarda ideal siqiluvchan suyuqlik tenglamalarining yopiq sistemasi

Siqiladigan suyuqlik harakatida ko'p hollarda

$$p = f(\rho),$$

ya'ni bosim faqat zichlikka bog'liq deb qarash mumkin. $p = f(\rho)$ bo'lgan proseslarga *barotrop proseslar* deyiladi. Barotrop proseslarga misol bo'lib

$$p = R\rho T \quad (\text{bu yerda } R - \text{gaz doimiysi})$$

Klayperon tenglamasiga bo'ysinuvchi gazning izotermik harakatini qarash mumkin.

Ayonki barotropiya sharti (agarda $f(\rho)$ - ma'lum bo'lsa) ideal siqiluvchan suyuqlik harakatini ifodalovchi tenglamalar sistemasini to'ldirishga imkon beradi.

Bu holda to'g'riburchakli dekart koordinatalari sistemasida to'liq tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.11)$$

$$p = f(\rho).$$

Umumiy holda suyuqlik va gaz harakatida barotropiya sharti bajarilmaydi va bunday harakatni ifodalash uchun qo'shimcha termodinamik tenglamalar kiritish kerak.

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Ideal suyuqlik va gaz ta'riflarini bering.
2. Ideal suyuqlikda kuchlanish tenzorining tenzor sirti nimadan iborat.

3. Dekart koordinatalar sistemasida kuchlanish tenzori komponentalari yozing.
4. Sharavoy tenzor deb nimaga aytiladi?
5. Ideal suyuqlik harakat tenglamalarini yozing.
6. Eyler tenglamalarini vektor ko'rinishda va dekart koordinatalar o'qlariga proeksiyalarda yozing.
7. Gromeki – Lemb shaklidagi ideal suyuqlik harakat tenglamalarini yozing.
8. Ideal suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasini keltiring.
9. Barotrop jarayon deb nimaga aytiladi.
10. Barotrop jarayonda ideal siqiluvchan suyuqlik harakatining yopiq sistemasini yozing.

Xulosa

Ideal suyuqlik ta'rif kiritildi. Ideal suyuqlikdagi kuchlanish tenzorining ko'rinishi aniqlandi. Harakat tenglamalari keltirib chiqarildi. Tenglamalarning yopiq sistemi hosil qilindi.

39-40-mavzu: Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari. Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.

39-40-mavzu: Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari. Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.

Reja:

1. Elastik jismlar va qovushoq suyuqlik.
2. Guk va Nav'e - Stoks qonunlari.
3. Muhitning anizotropiya, izotropiya va girotropiya xossalari.
4. Elastik jism uchun kuchishlarda harakat tenglamalari.

Tayanch iboralar: ***elastik jism, qovushoq suyuqlik, kuchlanish, deformasiya, anizo-tropiya, izotropiya, qirootropiya, deformasiya tenzori, Puasson koeffisienti, Yung moduli, Lamé koeffisientlari.***

Quyida biz tutash muhitning boshqa xususiy modellarini qarab chiqamiz, bular: chiziqli elastik jism va chiziqli qovushoq suyuqlik modeli. Bu modellarni parallel ravishda qaraymiz, sababi ularni kiritish usullari formal ravishda o'xshash. Aslida bu ikki model ikkita har hil turdagi real muhitlarni ifodalaydi.

Elastik jism deb shunday muhitga aytiladiki unda p^{ki} kuchlanish tenzori komponentasi har bir zarrachada ε_{ij} deformasiya tenzori komponentalari, g_{ij} metrik tenzor komponentalari, T temperatura va boshqa fizik-ximik parametrlarning funksiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, X_1, \dots, X_n) \quad (2.1)$$

Qovushoq suyuqlik deb shunday muhitga aytiladiki unda kuchlanish tenzori komponentasi

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} \quad (2.2)$$

ko'rinishda tasvirlanadi, shu bilan birga

$$p = p(\rho, T, \chi_1, \dots, \chi_n), \quad \tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \dots, \chi_n), \quad (2.3)$$

bu yyerda $e_{\alpha\beta}$ - deformasiya tezliklari komponentalari. Bu paragrafda biz f^{ij} ning $\varepsilon_{\alpha\beta}$ va $g^{\alpha\beta}$ lardan va $\varphi^{\alpha\beta}$ ning $e_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ lardan bog'liqliklarini o'rganib chiqamiz va shuning uchun T va χ_i parametrlarni hisobga olmaymiz.

2. Guk va Nav'e - Stoks qonunlari

$f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i)$ va $\varphi^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i)$ funsiyalarning konkret ko'rinishi elastik va qovushoq muhitning har xil konkret modellari uchun har xil bo'ladi. Tajribalar shuni ko'rsatadiki, kuchlanish va deformasiyalar qattiq jismlarda, masalan, metallarda, oddiy sharoitlarda (unchalik katta bo'lmagan temperatura va kuchlanishlarda) bir biri bilan *Guk qonuni* deb ataluvchi qonun bilan bog'langan. Qovushoq kuchlanish va deformasiya tezliklari ko'pgina suyuq muhitlarda, masalan suv va havoda *Nav'e-Stoks qonuni*

bilan o'zaro bog'langan. Bu qonunlarni (Guk qonuni uchun quyida kirilgan) quyidagi farazlar yordamida kiritish mumkin.

Faraz qilaylik f^{ij} funksiyalar $\varepsilon_{\alpha\beta}$ lar bo'yicha Teylor qatoriga yoyilgan bo'lsin va kuchlanishlar bo'lmaganda ($p^{ij} = 0$), deformasiyalar ham bo'lmasin ($\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$) hamda teskarisi o'rinli bo'lsin.

Bunday farazlarda

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \dots$$

bo'ladi, bu yerda $A^{ij\alpha\beta}$ koefitsientlar T va χ_i larga bog'liq bo'lishi mumkin. Agarda deformasiyalar kichik bo'lsa, u holda p^{ij} ni qatorga yoyganda faqat chiziqli hadlarni qoldirish mumkin va bu holda

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

bo'ladi.

Xuddi shunday farazlarni φ^{ij} funksiyalar uchun qilib quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

(2.4) munosabatlar *Guk qonuni* deyiladi, (2.5) esa *Nav'e - Stoks qonuni* yoki *N'uton qayishqoqligining umumlashgan qonuni* deyiladi. (2.4) va (2.5) larni biz mos ravishda $\varepsilon_{\alpha\beta}$ va $e_{\alpha\beta}$ larni kichik deb hosil qildik. Ammo, takidlash kerakki, xususan, Nav'e-Stoks qonuni suv, havo va ba'zi bir boshqa suyuqliklar uchun deformasiya tezliklari tenzorlari kichik bo'lmagan holda ham qo'llanilishi mumkin. Umumiy termodinamik munosabatlardan kelib chiqadiki, Guk qonuni faqat kichik deformasiyalar uchun taqribiy qonun sifatida o'rinli.

Guk qonuniga yoki umumiyroq bo'lgan (2.1) qonunga bo'ysinuvchi tutash muhitlarni holatini o'rganadigan tutash muhit mexanikasining bo'limi *elastiklik nazariyasi* deyiladi. Nav'e-Stoks yoki umiyroq (2.2) - (2-3) qonunlarga bo'ysinuvchi tutash muhit harakati qaralayotgan bo'lim - qovushoq *suyuqlik harakati nazariyasi* deyiladi.

(2.4) va (2.5) tengliklardagi $A^{ij\alpha\beta}$ va $\beta^{ij\alpha\beta}$ lar turtinchi rang tenzor komponentalaridan iborat. Ular berilgan tutash muhitning fizik harakteristikalaridan iborat.

4-rang tenzor $3^4 = 81$ ta komponentiga ega, ammo kuchlanish tenzorining (klassik holda) simmetriyaligidan, hamda deformasiya va deformasiya tezligi tenzorlarining simmetriklaridan $A^{ij\alpha\beta}$ va $\beta^{ij\alpha\beta}$ larning 36 tasi qoladi.

3. Muhitning anizotropiya, izotropiya va girotropiya xossalari

Izotrop muhit deb barcha yo'nalishlar bo'yicha xususiyatlari bir xil bo'lgan muhitga aytiladi. Agarda muhit xususiyatlari har xil yo'nalishlar bo'yicha har xil yo'nalgan bo'lsa, u holda *muhit anizotrop* deyiladi. Anizotrop muhitlar har xil tipdagi simmetriyalarga ega.

Simmetriyalik xossasining aniqroq matematik ta'rifini beramiz, xususan, izotropiya uchun. Muhit fizik va mexanik xususiyalarini ba'zi bir tenzorlar va tenzor tenglamalar yordamida ifodalash mumkin.

Masalan, agarda Guk qonuni bajarilayotgan bo'lsa, elastik xususiyat va xossalar $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor yordamida beriladi. *Muhit simmetriyaga ega* deyiladi, agarda shunday koordinatalarni almashtirish gruppasi mavjud bo'lsaki, muhitning xossalarini ifodalovchi tenzor komponentalari bu gruppaga taaluqli almashtirishlarda o'zgarmasa. Xususan *muhit izotrop* deyiladi, *agarda uning xususiyatlarini aniqlovchi tenzor komponentalari ixtiyoriy ortoqonal almashtirishlarda o'zgarmasa*. Ortoqonal almashtirishlarni

$$g_{ij}^t = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{ij}$$

metrik tenzor komponentalari o'zgarmasdan qoladigan almashtirish sifatida aniqlash mumkin.

To'liq ortogonal gruppaga ayanma almashtirishlariga (almashtirish determinanti + 1 ga teng) va teskari akslantirish bilan birgalikdagi aylamma almashtirishga (determinanti - 1 ga teng) ega.

Agarda muhit xossalari faqat aylanish gruppasiga nisbatan invariant bo'lib, teskari akslantirishga nisbatan invariant bo'lmasa, *muhit girotop* deyiladi.

Endi biz Guk qonuniga bo'ysinuvchi elastik jismlar uchun izotropik (girotropik) xususiyatlari nimani anglatilishini chuqurroq o'rganib chiqamiz. Bunday tutash muhitning biror bir nuqtasida ayni paytda ikkita dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bittasi x^1, x^2, x^3 va ikkinchisi birinчисiga nisbatan burilishdan hosil bo'lgan, uni y^1, y^2, y^3 deb olamiz. x^1, x^2, x^3 sistemada qaralayotgan tenzor komponentalarini shtrixsiz harflar bilan y^1, y^2, y^3 sistemada mos ravishda shtrixli harflar bilan belgilaymiz. Ayonki,

$$A^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu} \cdot A^{pq\lambda\mu}. \quad (2.6)$$

Guk qonunini x^1, x^2, x^3 sistemada yozishda $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlardan, y^1, y^2, y^3 sistemada $A^{ij\alpha\beta}$ koeffisientlardan foydalanamiz. Har xil x^i va y^i sistemalarda bir xil ko'rinishga ega bo'lgan tutash muhitning ikkita deformasiyalangan holatini qaraymiz, ya'ni

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}.$$

Ayonki, izotrop muhitda bu holda kuchlanganlik holat ham x^i va y^i sistemalarda bir xil tartibga ega. Agarda $A^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta}$, ya'ni Guk qonunida koeffisientlar bir xil bo'lsa, u holda $p^{ij} = p'^{ij}$. Tutash muhit bu holda izotrop yoki girotrop bo'ladi. Tajriba natijalariga ko'ra har xil yo'nalishlarda muhit xossalari har xil bo'lgan anizotrop muhitlarga misol qilib molekyula yoki atomlari to'g'ri tartibda joylashgan kristalik muhitni, tolali Moddiylarni qarash mumkin.

Izotrop muhitga masalan suv va amorf qurilishga ega boshqa muhitlar hamda xaotik ravishda joylashgan mayda elementar kristallardan iborat bo'lgan muhitlar kiradi.

4. Elastik jism uchun kuchishlarda harakat tenglamalari

Guk qonunini qanoatlantiruvchi elastik jism uchun ko'chishlarda harakat tenglamalari kichik deformasiyalar holida

$$P^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij}, \quad \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^j \omega^i + \nabla^i \omega^j) \quad (2.23)$$

(bu yerda ω^i - kochish vektorining komponentasi, $I_1(\varepsilon) = \nabla_i \omega^i$ - deformasiya tenzorining birinchi invarianti) *Lame tenglamalari* deyiladi. Keyinchalik λ va μ - *Lame modullarini* berilgan o'zgarmaslar deb hisoblash mumkin. *Lame tenglamalarini* keltirib chiqarish uchun (4.8) impuls tenglamalariga (2.23) ko'rinishdagi Guk qonunini qo'yamiz. Bu tenglamalarni xuddi Nave - Stoks tenglamalari kabi keltirib chiqaramiz.

Lame tenglamalari

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{\omega} + \mu \Delta \vec{\omega} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a} \quad (2.24)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha yoziladi

$$\rho a_x = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_x,$$

$$\rho a_y = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_y,$$

$$\rho a_z = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_z.$$

bu yerda u, v, w lar orqali $\vec{\omega}$ - ko'chish vektorining komponentalari belgilangan.

Dinamik masalalar uchun *Lame tenglamalari* sistemasi to'liq bo'ladi, agarda ularga

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x^i} + v^\alpha \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}, \quad \vec{v} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$$

tezlanishni aniqlash formulalari kiritilsa.

(2.24) tenglamalar chekli deformasiyalar uchun o'rinli, shu bilan birgalikda ko'rish, tezlik va tezlanishlar chekli bo'lishi mumkin.

Mustaqil ishlar uchun savollar:

1. Elastik jism deb nimaga aytiladi?
2. Qovushoq suyuqlik ta'rifini bering.
3. Guk qonuniga bo'ysinuvchi muhitni o'rganuvchi fan qanday ataladi?
4. Nav'e – Stoks qonuni nimadan iborat va u suyuqlikning qanday parametrlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi?
5. Nav'e – Stoks qonuniga bo'ysinuvchi suyuqliklar holatini o'rganuvchi fan nomini ayting.
6. Guk va Nav'e – Stoks qonunida qatnashuvchi tenzor nechanchi rangga ega va uning nechta komponentasi mavjud.
7. Izotrop muhit deb nimaga aytiladi?
8. Anizotrop muhit ta'rifini bering va misollar keltiring.
9. Qanday muhit simmetriyaga ega?
10. Qachon muhit girotrop deyiladi?
11. Izotrop muhitlarga misollar keltiring.
12. Izotrop va girotrop muhitlar uchun $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor komponentalaridan nechtasi erkli bo'ladi? Izotrop muhit uchun ular qanday belgilanadi.
13. Izotrop muhit uchun Guk qonuni va Nav'e – Stoks qonunlari yozing?
14. Yung moduli, Puasson koeffisient va qovushoqlik koeffisienti Lamé koeffisientlari orqali qanday ifodalangan.
15. Lamé tenglamalarini yozing.
16. Nav'e – Stoks tenglamasini siqiladigan suyuqlik uchun yozing
17. Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.

Xulosa

Muhit deformatsiyalanish xususiyatlariga ko'ra elastik jism va qovushoq suyuqliklarga ajratildi. Ular uchun harakat tenglamalari keltirib chiqarildi.

41-42-mavzu: Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari. Nav'e-Stoks tenglamalari.

Reja:

1. Girotrop muhit uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.
2. Yung moduli, Puasson koeffisienti va qovushoqlik koeffisienti.
3. Nav'e-Stoks tenglamasi.
4. Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi.

1. Girotrop muhit uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari

Endi izotrop va girotrop jismlar uchun umumiy 81 ta $A^{ij\alpha\beta}$ tenzor komponentalaridan (ularning hammasi noldan farqli bo'lishi mumkin) faqat ikkitasi erkli ekanligini ko'rsatamiz. ε_{ij} deformatsiya tenzori bosh yo'nalishi bo'ylab koordinata o'qlarini yo'naltiramiz. Ayonki, bu holda Guk qonuniga faqat $A^{ij\alpha\alpha}$ ko'rinishdagi koeffisientlar kiradi. $i \neq j$ da $A^{ij\alpha\alpha} = 0$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, tanlangan koordinatalar sistemasining i - chi o'qiga nisbatan 180° ga burish natijasida biz yangi koordinatalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yangi sistemada i - chi o'q oldingi holatda qoladi, qolgan ikki o'q esa o'z yo'nalishlarini teskarisiga o'zgartiradi va tenzor komponentalarini (2.6) almashtirish qoidasiga ko'ra biz $i \neq j$ da hamda ixtiyoriy α larda

$$A^{ij\alpha\alpha} = -A^{ji\alpha\alpha}$$

ga ega bo'lamiz, ammo agar muhit izotrop yoki girotrop bo'lsa, u holda $A^{ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$ va, demak $i \neq j$ da $A^{ij\alpha\alpha} = 0$. Bundan esa $i \neq j$ da bu koordinatalar sistemasida $p^{ij} = 0$ tengligidan deformasiya tenzori va kuchlanish tenzori bosh o'qlari Guk qonuniga bo'ysinuvchi izotrop hamda girotrop muhitlarda mos tushadi.

Guk qonunining formulalarida bosh o'qlarda 81 ta $A^{ij\alpha\beta}$ koefitsientlarda faqat 9 ta $A^{ij\alpha\alpha}$ koefitsientlar ahamiyatga ega.

Muhitning qirootropik xususiyatiga o'qlarning nomerlash tartibi ahamiyatli emas va shuning uchun

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda,$$

$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda,$$

$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii}$$

bu yerda $2\mu + \lambda$ va λ lar yuqoridagi A tenzorining ikkita har xil, noldan farqli komponentalari uchun yangi belgilashlar kiritilgan.

Barcha keltirilgan farazlarni Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi girotrop va izotrop muhitlar uchun ham keltirish mumkin va Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi qirootrop muhit uchun deformasiya tezligi tenzori bosh o'qlari kuchlanish tenzori bosh o'qlari bilan mos tushadi, $B^{ij\alpha\beta}$ koefitsientlar esa λ_1 va μ_1 orqali ifodalanadi.

Endi izotrop muhit uchun

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

Guk qonuni deformasiya tenzori va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$p_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1,$$

$$p_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \quad (2.8)$$

$$p_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3,$$

bu yerdagi λ va μ lar Lamé koefitsientlari deyiladi.

Xuddi shunday izotrop muhit uchun Nav'e-Stoks qonuni deformasiya tezliklari tenzori va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagicha yoziladi:

$$\tau_1 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1,$$

$$\tau_2 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2, \quad (2.9)$$

$$\tau_3 = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3.$$

(2.8) formulalar quyidagi invariant tenzor ko'rinishda yozilishlari mumkin:

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.10)$$

yoki

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (2.11)$$

Bu shakllar ixtiyoriy koordinatalar sistemasida o'rinli va shuning uchun (2.10) formulalar ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida izotrop muhit uchun Guk qonunini ifodalaydi.

(2.11) dan osongina $A^{ij\alpha\beta}$ koefitsientlar uchun ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ifodasini hosil qilish mumkin

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + \mu (g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} + g^{j\beta} \cdot g^{i\alpha}). \quad (2.12)$$

Xuddi shunday farazlarni Nav'e-Stoks qonuniga qo'llab, izotrop muhit uchun ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks qonunining quyidagi ko'rinishini hosil qilamiz

$$\tau_{ij} = \lambda_1 I_1(e) g_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} \quad (2.13)$$

yoki

$$\tau^{ij} = \lambda_1 I_1(e) g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

(2.10) ga ko'ra ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida izotrop qovushoq suyuqlik uchun kuchlanish va deformasiya tezligi tenzori komponentalari orasidagi quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda_1 g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

Dekart koordinatalar sistemasida izotrop muhit uchun Guk qonuni quyidagi ko'rinishga ega

$$p_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (2.16)$$

va $i \neq j$ da

$$p_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij},$$

Nav'e - Stoks qonuni esa

$$p_{ii} = -P + \lambda_1 \operatorname{div} \vec{v} + \mu_1 \frac{\partial v_i}{\partial x^i}$$

va $i \neq j$ da

$$p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \quad (2.17)$$

ko'rinishga ega.

2.Yung moduli, Puasson koeffisienti va qovushoqlik koeffisienti

Lame kofisientlari λ va μ lar o'rniga elastiklik nazariyasida Moddiyning quyidagi xarakteristikalari kiritilgan:

Yung moduli

$$E = \mu \frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}$$

va Puasson koeffisienti

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Qovushoq suyuqlik harakati nazariyasida qovushoqlikning dinamik koeffisienti $\mu = \mu_1$ va kinematik koeffisienti $\nu' = \mu / \rho$, hamda 2 - qovushoqlik koeffisienti

$$\xi = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu$$

kiritilgan, keyinchalik λ_1 - Lamé koeffisienti qovushoq suyuqlik harakatida λ orqali belgilaymiz.

Guk va Nav'e-Stoks qonunlari $T = \text{const}$, $\chi_i = \text{const}$ da izotrop elastik muhit va qovushoq siqiladigan suyuqliklar uchun harakat tenglamalari sistemasini to'ldirishga imkon beradi.

3.Nav'e-Stoks tenglamasi

Qovushoq siqilmaydigan suyuqlik holida tutash muhit harakatining to'liq tenglamalar sistemasini yozish uchun oldin

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij} \quad (2.18)$$

Nav'e - Stoks qonuni qanoatlantiruvchi qovushoq siqiladigan suyuqlik harakati tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Bu tenglamalar Nave – Staks tenglamalari deyiladi.

Evklid fazoda

$$\nabla_i \nabla_j v^\alpha = \nabla_j \nabla_i v^\alpha.$$

Haqiqatan, $T_{ij}^\alpha = \nabla_i \nabla_j v^\alpha - \nabla_j \nabla_i v^\alpha$ - 3 - rang tenzor komponentalaridan iborat; dekart koordinatalar sistemasida

$$T_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} = 0$$

va demak - ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida $T_{ij}^\alpha = 0$.

Endi p^{ij} (2.18) orqali aniglanganda, λ va μ lar esa o'zgarimas bo'lganda, $\nabla_i p^{ij}$ ni hisoblaymiz

$$\begin{aligned}\nabla_j p^{ij} &= -g^{ij} \nabla_j p + \lambda g^{ij} \nabla_j \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \nabla_j e^{ij} = -g^{ij} \nabla_j p + \lambda g^{ij} \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla_j g^{i\alpha} g^{j\beta} (\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) = \\ &= -g^{ij} \nabla_j p + \lambda g^{ij} \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu g^{i\alpha} \nabla_j \nabla_\alpha v^j + \mu g^{j\beta} \nabla_j \nabla_\beta v^i = -g^{ij} \nabla_j p + (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \nabla_\alpha v^\alpha + \mu \nabla^\beta \nabla_\beta v^i = \\ &= -\nabla^i p + (\lambda + \mu) \nabla^i \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta v^i.\end{aligned}$$

Bu yerda $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$ va $\Delta = \nabla^\beta \nabla_\beta = \nabla^2$ - Laplas operatori. Dekart koordinatalar sistemasida.

$$\Delta v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2}.$$

Vektor ko'rinishda

$$\nabla_j p^j = -\operatorname{grad} P + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}. \quad (2.19)$$

Shunday qilib, ixtiyoriy egrichizliki koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks tenglamalari (2.19) ga ko'ra quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$a_i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} g^{ij} \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}}{\partial x^j} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v^i.$$

Vektor ko'rinishda Nav'e-Stoks tenglamalarini

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \nu' \Delta \vec{v} \quad (2.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

4. Siqilmaydigan qovushoq suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi

Qovushoq siqilmaydigan suyuqlik uchun Nav'e-Stoks tenglamalari soddalashadi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (2.21)$$

Bu tenglamalar

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

uzviylik tenglamalari bilan Nav'e-Stoks qonuniga bo'ysinuvchi qovushoq siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasini hosil qiladi.

Dekart ortogonal koordinatalar sistemasida umuman bir jinslimas qovushoq siqilmaydigan suyuqlik harakatining to'liq tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu' \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).\end{aligned} \quad (2.22)$$

43-44-mavzu: Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari – Yung moduli va Puasson koeffitsientlari. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati to'la tenglamalar sistemasi.

Reja:

1. V hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi.
2. Ichki va tashqi massaviy kuchlarning ishi.
3. Tashqi sirt kuchlarining ishi. Ichki sirt kuchlarini ishini aniqlash.
4. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuch teoremasi.

5. Simmetrik kuchlanish tenzori holida ichki sirt kuchlari ishining ifodasi.

6. Tutash mihitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuch teoremasi.

7. Ideal suyuqlik uchun ichki kuch ishining zichligi.

Tayanch iboralar: kuch, sirt kuchlari, ichki va tashqi kuchlar, massaviy kuchlar, hajm simmetrik tenzor, ideal suyuqlik, kinetik energiya, simmetrik kuchlanish tenzori, cheksiz kichik hajm, tirik kuch, ish, elementar ish, ish zichligi.

1. *V hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi*

Tutash muhit harakatining dinamik tenglamalarining eng ahamiyatli umumiy xulosalaridan biri bu tirik kuch haqidagi teoremadir.

Faraz qilaylik V -material muhit zarrachalari bilan birga harakatlanuvchi ixtiyoriy chekli hajm, Σ esa uni chegaralovchi sirt bo'lsin. Bundan tashqari V hajm ichida $P = p^{ij} \partial_i \partial_j$ -kuchlanish tenzori komponentalari hamda $v = v^i \partial_i = v_i \partial^i$ -tezlik vektori komponentalari fazoviy koordinata va vaqtning uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin.

dt vaqt ichida cheksiz kichik hajmdagi tutash muhitning cheksiz kichik $d\tau$ -hajmning ko'chish vektori $d\vec{r} = \vec{v} dt$

vektorni olamiz. Impulslar tenglamasini $d\vec{r}$ -ga skalyar ravishda ko'paytiramiz va V hajm bo'yicha integrallaymiz. U holda

$$\int_V \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_V (\Delta_j p^{ij}) v_i d\tau \quad (1.1)$$

bo'ladi. Bu munosabatga kiruvchi integrallarni almashtiramiz.

Skalyar (invariant) $\vec{v} \cdot \vec{a}$ miqdorni V koordinatalar sistemasini qo'llab hisoblash mumkin. Masalan, dekart koordinatalar sistemasida quyidagini osongina hosil qilish mumkin

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2$$

$dm = \rho d\tau$ -massa o'zgarmas bo'lganligi uchun

$$\int_V \vec{a} \vec{v} \rho d\tau = \int_M d \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) dm = d \int_M \frac{\vec{v}^2}{2} dm = dE,$$

bu yerda ta'rifga ko'ra

$$E = \int_V \frac{\rho \vec{v}^2}{2} d\tau \quad (1.2)$$

V hajmdagi tutash muhitning kinetik energiyasi.

2. *Ichki va tashqi massaviy kuchlarning bajargan ishi*

Massaviy $\vec{F}$ kuchlarni ikkita gruppaga bo'lamiz: butun V hajmga nisbatan $\vec{F}^{(i)}$ -ichki va $\vec{F}^{(t)}$ -tashqi kuchlarga. U holda

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} d\tau = \int_V \rho \vec{F}^{(i)} \cdot d\vec{r} d\tau + \int_V \rho \vec{F}^{(t)} \cdot d\vec{r} d\tau = dA_m^{(i)} + dA_m^{(t)}, \quad (1.3)$$

bu yerda $dA_m^{(i)}$ va $dA_m^{(t)}$ -cheksiz kichik ko'chishda V hajmga ta'siz qiluvchi va bu hajmga nisbatan tashqi va ichki massaviy kuchlarning elementar ishi.

Aytish kerakki, butun V hajmga ta'siz qiluvchi barcha ichki kuchlar yig'indisi hamma vaqt nolga teng, bu kuchlarning ishi esa noldan farqli bo'lishi mumkin.

(1.1) ifodadagi oxirgi integralni quyidagicha yozib olamiz

$$\int_V (\nabla_j p^{ij}) v_i d\tau = \int_V \nabla_j (p^{ij} v_i) d\tau - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i d\tau. \quad (1.4)$$

(1.4) ifodadaning o'ng tomonida turgan birinchi integralni almashtirish uchun Gauss-Ostrogradskiy teoremasidan foydalanamiz, ikkinchisini esa quyidagi ayniyat yordamida almashtiramiz

$$\nabla_j v_i = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

Natijada

$$\int_V (\nabla_j p^{ij}) v_i dt d\tau = \int_\Sigma p^{ij} v_i n_j d\sigma - \int_V p^{ij} e_{ij} d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij} dt d\tau \quad (1.5)$$

ni hosil qildik, bu yerda Σ - V hajmni chegaralovchi sirt, n_i esa Σ ga tushilgan (V hajimga nisbatan tashqi) normal birlik vektorining kovariant komponentalari $\omega_{ij} \bar{\epsilon}^i \bar{\epsilon}^j$ tenzor antisimmetrik bo'lganligi uchun

$$p^{ij} \omega_{ij} = p^{ij} \omega_{ij} + p^{ij} \omega_{ij} = \left(p^{ij} - p^{ji} \right) \omega_{ij} \quad (1.5')$$

tenglik o'rinli. Shuning uchun klassik holda, kuchlanish tenzori simmetrik ($p^{ij} = p^{ji}$) bo'lganda, (1.5) da oxirgi integral nolga teng.

3. Tashqi sirt kuchlarining ishi. Ichki sirt kuchlarining ishini aniqlash

Ma'lumki $p^{ij} \eta_j \bar{\epsilon}_i = \bar{p}_n$, u holda

$$\int_\Sigma p^{ij} v_i n_j d\sigma dt = \int_\Sigma \bar{p}_n \cdot d\bar{r} d\sigma = dA_{sirt}^{(l)} \quad (1.6)$$

bo'ladi, bu yerda $dA_{sirt}^{(l)}$ orqali Σ sirt nuqtalarining cheksiz kichik $d\bar{r} = \bar{v} dt$ ko'chishlaridagi V hajmdan ajratilgan Σ sirtga ta'sir qiluvchi tashqi sirt kuchlarining ishi belgilangan.

(1.4) ifodadagi oxirgi integral invariant miqdor bo'lib, ta'rifga ko'ra V hajmdagi ichki sirt kuchi kuchlanishlarning kuchi deyiladi va

$$- \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau = dA_{sirt}^{(i)} \quad (1.7)$$

4. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuchlar teoremasi

Shunday qilib (1.1) tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$dE = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)} + dA_{sirt}^{(e)} + dA_{sirt}^{(i)}, \quad (1.8)$$

ya'ni haqiqiy harakat uchun tutash muhit chekli individual hajmining kinetik energiyasining differensial, bu hajimga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy, ichki massaviy, tashqi sirt va ichki sirt kuchlarining elementar ishlari yig'indisiga teng.

(1.8) munosabat *deformatsiyalanivchi tutash muhitning chekli hajmiga qo'llaganda tirik kuchlar teoremasi* deyiladi. (1.8) tirik kuchlar teoremasini ifodasida dE - E funksiyaning to'liq differensial (bu yerda E -tutash muhit hajmining kinetik energiyasi) qolgan $dA_m^{(e)}$, $dA_m^{(i)}$, $dA_{sirt}^{(e)}$, $dA_{sirt}^{(i)}$ hadlar esa umumiy holda oddiy cheksiz kichik miqdorlar – tutash muhitning har bir nuqtasida aniqlangan

$$d\bar{n} = \bar{v} dt$$

uzliksiz cheksiz kichik ko'chishlar sistemasida mos kuchlarning elementar ishlari.

5. Simetrik kuchlanish tenzori holida ichki sirt kuchlari ishining ifodasi

Yuqoridagi (1.4), (1.5), (1.5') ifodalardan ko'rinadiki, ichki sirt kuchlari ishi uchun ifodani qo'yidagicha yozish mumkin:

$$dA_{sirt}^{(i)} = - \int_V p^{ij} e_{ij} dt d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij} dt d\tau \quad (1.9)$$

yoki simmetrik kuchlanish tenzori holida

$$dA_{sirt}^{(i)} = - \int_V p^{ij} e_{ij} dt d\tau. \quad (1.10)$$

Ma'lumki, uch o'lchovli fazoda ω_{ij} -antisimmetrik tenzorga mos qilib aksial vektor ω ni (tezlikning uyrma vektori) qo'yish mumkin. Yuqorida keltirilgan xulosalarga ko'ra, harakatlanuvchi tutash muhitda uyurmalarining borligi kuchlanishlarning simmetrik tenzori holida (xususan, harakat muqдорining ichki momentlari, tashqi massaviy va sirt kuchlari bo'lmagan holda) ichki sirt kuchlari bajargan elementar

ishining miqdoriga va demak, kinetik energiyaning o'zgarishiga tog'ridan-tog'ri ta'sir qilmaydi.

6. Tutash muhitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuch teoremasi

Endi cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit uchun tirik kuch teoremasini yozamiz. Buning uchun tutash muhitning biz qarayotgan biror bir nuqtasini o'z ichiga olgan kichik ΔV hajmni olamiz. Hajmni bu nuqtagacha toraytirganimizda (1.1) tenglikni ΔV uchun yozib uni ΔV hajm ichidagi zarrachaning Δm massasiga bo'lsak, u holda (1.2) va (1.4) larni hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dv^2}{2} = \vec{F} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{\rho} \cdot \nabla_j (p^{ij} v_i) dt - \frac{1}{\rho} \cdot p^{ij} \nabla_j v_i dt,$$

bu yerda $v^2/2$ miqdorni kinetik energiyaning zichligi deyish mumkin, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\frac{1}{\rho} \nabla_j (p^{ij} v_i) dt$, $-\frac{1}{\rho} p^{ij} v_i dt$ -miqdorlar esa massaviy va sirt tashqi va ichki kuchlari ishining zichligi.

Tutash muhitning cheksiz kichik hajmi uchun tirik kuchlar teoremasiga ichki massaviy kuchlarning elementar ishi kirmaydi, sababi V hajmi nuqtagacha taraytirganda va $M \rightarrow 0$ da u nolga intiladi. Bu esa to'g'ridan to'g'ri massaviy kuchlarning zichligi bu hajmga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy kuchlarning hajmining massasiga nisbati sifatida mavjud degan farazdan kelib chiqadi.

Fazar qilaylik, masalan, ichki massaviy kuchlar V hajm zarrachalari orasidagi N'yutonning o'zaro tortish kuchlaridan iborat bo'lsin. U holda ichki massaviy kuchlarning M massali V hajmdagi ishi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$f \int_M \int_M \frac{dm_1 dm_2}{(r_1 - r_2)} \cdot \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|} \cdot dr_2.$$

Bu ifodani M ga bo'lib, V ni nuqtagacha toraytirsak, hosil bo'lgan nisbatning limiti nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib, har bir cheksiz kichik zarracha uchun o'rinli bo'lgan tirik kuchlar teoremasi quyidagicha ta'riflanadi: *tutash muhitning har bir nuqtasida kinetik energiya zichligining differensialli bu cheksiz kichik zarrachaga ta'sir qiluvchi tashqi massaviy, tashqi sirt va ichki sirt kuchlari bajargan elementar ish zichliklarining yig'indisiga teng.*

Yuqorida ko'rganimizga ko'ra tirik kuchlar teoremasi impulsar tenglamasining natijasidir va u mexanik energiya balansi tenglamalarini ifodalaydi. Tirik kuchlar teoremasi energetik tabiatga ega, ammo bu munosabatlar umumiy holda energiyani saqlanish qonunini ifodalamaydi. Faqatgina mexanik energiya issiqlik yoki boshqa turdagi energiyaga o'tmagan holda energiyani saqlanish qonunini ifodalaydi. Aytib otish kerakki, energiyaning saqlanish qonuni bu holda ikkiga bo'linadi: mexanik va nomexanik

energiyalarning (har biri aloxida) saqlanish qonunlari. Ba'zi bir xususiy hollarda, $\frac{1}{dm} dA_{sirt}^{(i)}$ ko'rinishdagi

ichki sirt kuchlari ishining zichligi ifodalarini hosil qilamiz. Quyidagiga egamiz

$$\frac{1}{dm} dA_{sirt}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij} dt - \frac{1}{\rho} p^{ij} \omega_{ij} dt = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij} dt - \frac{1}{\rho} (p^{ij} - p^{ji}) \omega_{ij} dt.$$

Agarda muhit qattik jism sifatida harakatlanayongan bo'lsa, u holda barcha $e_{ij} = 0$ va

$$\frac{1}{dm} dA_{sirt}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} (p^{ij} - p^{ji}) \omega_{ij} dt.$$

Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lmasa, $(p^{ij} \neq p^{ji})$, u holda muhitning absolyut qattiq jism sifatida harakatlanayonganida ishchi sirt kuchlari ishi nolgan farqli bo'lishi mumkin, sababi aylanishda burchak tezligi $\vec{\omega}$ va demak ω_{ij} noldan farqli bo'lishi mumkin.

Agarda kuchlanish tenzori simmetrik bo'lsa, u holda quyidagi tenglik orinli

$$\frac{1}{dm} dA_{sirt}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} e_{ij} dt, \quad (1.11)$$

ya'ni bu holda ichi sirt kuchlarini ishi, umuman olganda, deformasiyalarga bo'g'liq. Agarda sistemani

kuchlanish tenzoriga ega bo'lgan muhit absolyut qattiq jism sifatida harakatlansa, u holda undagi ichki sirt kuchlarining ishi hamma vaqt nolga teng.

7. *Ideal suyuqlik uchun ichki kuch ishining zichligi*

Ideal suyuqlik uchun $P^{ij} = -pg^{ij}$, shuning uchun

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{sirt} = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} e_i^i dt = \frac{p}{\rho} \text{div } \vec{v} dt.$$

Oxirgi ifodada $\text{div } \vec{v}$ ni uzviylik tenglamasi yordamida almashtirib,

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{sirt} = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dt = pd \frac{1}{\rho} = pdV \quad (1.12)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda V - solishtirma hajm. Muhitning cheksiz kuchik zarrachasi uchun tirik kuchlar teoremasi quyidagicha bo'ladi:

$$d \frac{v^2}{2} = \frac{1}{dm} dA^{(e)}_m + \frac{1}{dm} dA^{(i)}_{sirt} + pd \frac{1}{\rho} = \vec{F}^{(i)} \vec{v} dt - \frac{1}{\rho} \nabla_k (pv^k) dt + pd \frac{1}{\rho}. \quad (1.13)$$

Xulosa

Tutash muhit chekli hajmi uchun kinetik energiya va unga ta'sir qiluvchi kuchlar aniqlanib, tirik kuchlar haqidagi teorema keltirib chiqarildi. Bu teorema ba'zi muhitlar uchun konkretlashtirildi.

45-46-mavzu:

Reja:

1. Holat parametrlari.
2. Tutash muhit uchun holat parametrlarining soni.
3. Aniqlovchi parametrlarining to'liq sistemasi.
4. Golonom va golonommas termodinamik sistemalar.
5. Holatlar fazoi. Proseslar va sikllar.
6. Sistemaning tashqi ob'ektlar bilan o'zaro ta'siri.
7. Energiyaning saqlanish qonuni.

Tayanch iboralar: energiya, tutash muhit, holat parametrlari, proses, sikl, o'zaro ta'sir, cheksiz kichik zarracha, ichki holat, deformatsiya tenzori, komponentalari, kontinium, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o'tkazish koeffisienti, golonom va golonommas sistema, tashqi kuch ishi, kuch.

1. Holat parametri

Termodinamikaning va shu bilan birga butun tutash muhitning asosida yotuvchi tushunchalardan boshlaymiz, bular sistemaning „holati“ va „holat parametri“ tushunchalaridir. Biz qarayotgan **sistemaning (masalan biror chekli hajmdagi tutash muhit) holati berilgan deyiladi, agarda sistemaning (muhitning) bizni qiziqtiruvchi xarakteristikalarini to'liq aniqlovchi biror bir $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n, \dots$ parametrlari berilgan bo'lsa.**

Biror bir diapazonda ixtiyoriy qiymatlarni qabul qila oladigan μ - aniqlovchi parametrlar **holat parametrlari** deyiladi. Tutash muhitni har xil modellari uchun holat parametri va ularning soni har xil.

Muhit holatini bilish nimadan iborat. Bu savolga quyidagi javobni berish mumkin. Barcha jismlar atom va molekulalardan iborat va agarda vaqtning har bir momentida (paytida) jismni tashkil qiluvchi barcha elementar zarrachalarning harakati va holati ma'lum bo'lsa, u holda butun jism holati ham ma'lum bo'ladi. Haqiqat agarda biz, masalan 1 sm hajmdagi tinch havoning holatini bermoqchi bo'lsak, u holda biz bu hajmdagi molekula koordinatalarining vaqtdan bog'liq $3 \cdot 10^{27}$ ta funksialarini berishimiz kerak chunki hatto tinch halotdagi molekulalar ham harakatlanadi. Shu bilan birga ma'lumki makroskopik nuqtai nazarga ko'ra ko'p hollarda tinch holatdagi havo(va boshqa gazlar)ning holati faqat 2 ta parametrlarning - p bosim va ρ zichlikning berilishi bilan aniqlanadi.

Makroskopik nuqtai nazar - bu shunday nazarki bunga ko'ra tabiat va texnikada biz kuzatayotgan har xil hodisalarida faqat chekli jismlar uchun ahamiatli bo'lgan effektlar, hossalalar va jarayonlar hisobga olinadi.

Diskret sistema sifatida qaralayotgan muhit holatini aniqlovchi ko'p sonli parametrlardan muhitning makroskopik holatini aniqlovchi kamroq sondagi (masalan gaz uchun ρ va P) parametrlarga o'tish muommosi trivial emas va u suyuqlik, gaz va qattiq jismlar fizikasining muhim muommosi hisoblanadi. Bu muommoni yechish hamma vaqt qushimcha gipotezalar bilan bog'liq – bular nisbiylik qonuni va boshqa tabiatga ega bo'lgan gipotezalar.

Makroskopik parametrlar harakatlanuvchi va umuman ixtiyoriy joylashgan ko'p sonli molekula to'plamiga nisbattan biror bir farazlarda hisoblangan o'rta statik miqdorlar sifatiga qurulishi mumkin. Masalan, gazlarda, makroskopik tezlik $\bar{v}$ ni fizik jihatdan kichik hajmdagi molekularlar to'plamining og'irlik markazi tezligi sifatiga kiritish mumkin, T temperaturani atom va molekularlarning xaotik harakatining erkinligi birga teng makroskopik harakatga nisbattan o'rtacha energiya sifatida olish mumkin; biror bir yuzachadagi P_n kuchlanishni esa molekularlarning xaotik harakatida bu yuzachadan molekularl bilan o'tayotgan implusning o'rtacha xarakteristikasi sifatida qarash mumkin va xakazo.

Umumiy holda aniqlovchi parametrlar aniq qaralayotgan masalalar sinfi uchun gipotezalar yordamida kiritiladi shu bilan birga ular nazariy tadqiqotlarga hamda tajriba natijalariga asoslanadi. Ko'pgina murakkab holatlarda aniqlovchi parametr kiritish muommosi ochiq holatda turibdi va hali o'rganilmagan. Masalan, qovushoq-plastik qattiq jism uchun murakkablashgan fizik, kimyoviy yoki biologik sistemalardagi muvozanatsiz hodisalarda va ko'pgina boshqa muommolar.

2. Tutash muhit uchun holat parametrlari soni

Material muhit kichik zarrachasining ichki holatini, umuman olganda diskret(sanoqli) sistema elementar zarrachalariga nisbatan chekli va ancha kamroq sondagi aniqlovchi parametrlar bilan xarakterlash mumkin. Masalan klassik elastiklik nazariyasida deformatsiyalanuvchi qattiq jism zarrachasining ichki holati faqat ettita parametr bilan ε_{ij} - deformatsiya tenzorining 6 ta komponentasi va T - temperaturasi hamda berilgan konkret muhit uchun o'zgarmas fizik konstantalar – E - Yung moduli, ν - Puasson koeffisienti va c - issiqlik sig'imi bilan xarakterlanadi. Shu bilan birga shunday holatlar ham bo'lishi mumkinki, kontiniumning bir modelida hatto kontiniumning cheksiz kichik zarrachasining holatini aniqlovchi parametrlar soni cheksiz bo'ladi.

Bu turdagi modellarga misol qilib “наследственность-nasl” ga ega jism modellarini olish mumkin. Bunday modellarni kiritishda P_{ij} kuchlanishlar nafaqat ayni paytdagi deformatsiya va temperaturadan bog'liq, balkim jism deformatsiyalanishining tarixiga bog'liq, ya'ni $P_{ij}(t)$ va $T(t)$ funksiyalarga bog'liq. Bu esa P_{ij} kuchlanishlar ε_{ij} , T va ularning vaqt bo'yicha hosilalariga bog'liq degan tasdiqqa ekvivalent, ya'ni bunday muhit holatining parametrlari soni cheksiz ko'p. Boshqa ancha murakkabroq misol qilib statistik fizikaning kinetik nazariyasida uchraydigan kontiniumlarini qarash mumkin, masalan Bolsman tenglamasi bilan ifodalanuvchi gaz. Ammo bu turdagi modellar ancha murakkab va nazariy va amaliy tajribalar shuni ko'rsatayaptiki, ko'pgina amaliy jihatdan muhim hollarda kichik zarracha holatini berish uchun chekli va umuman kichik sondagi parametrlar bilan chegaralanish mumkin.

Chekli hajmdagi tutash muhitni holatini aniqlash uchun, umuman olganda parametrni chekli soni emas balkim har doim funksiyalar berilishi kerak - deformatsiyalarning, temperaturaning va h.k. taqsimlanishi.

Funksiyaning berilishi cheksiz ko'p parametrlarning berilishiga ekvivalent. Shuning uchun umumiy holda tutash muhitning ixtiyoriy modellari uchun aniqlovchi parametrlar soni cheksiz. Keyinchalik (quyida) biz cheksiz kichik zarracha uchun chekli xarakteristikalar sistemasini mavjud deb qabul qilamiz. Bu sistema ishlatilayotgan koordinatalar sistemasida berilgan aniqlovchi parametrlardan iborat. μ^i orqali biz qabul qilingan hisob sistemasida o'zgaruvchi bo'lishi mumkin bo'lgan parametrlarni belgilaymiz, R^i orqali fizik o'zgarmaslarni belgilaymiz.

3. Aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasini

Ta'rifga ko'ra **fiksirlangan kichik zarracha uchun** $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n, k^1, k^2, \dots, k^m$ miqdorlar ba'zisni, ya'ni aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasini tashkil qiladi deyiladi, agarda ular o'zaro bog'lanmagan (erkli) va ma'lum oraliqda diapazonda ixtiyoriy bo'lsa.

Masalan, gaz zarrachasi uchun zichlik va temperatura ma'lum chegaralarida ixtiyoriy berilishi mumkin, boshqa termodinamik funksiyalar, masalan, entropiya va bosim ular orqali aniqlanadi.

4. Golonom va golonommas termodinamik sistemalar

Nazariy mexanikadagi erkinlik darajasi soni bilan tutash muhitlar mexanikasida aniqlovchi parametrlar soni orasida analogiyani (o'xshashlikni) kiritish mumkin. Haqiqatan erkinlik darajasi mexanik sistemaning holatini aniqlovchi erkli parametrlar soni sifatida aniqlanadi. Masalan absolyut qattiq jismning erkinlik darajasi 6 ga teng. Agarda absolyut qattiq jismni fizik sistema sifatida qarasak, u holda uni aniqlash uchun yana 10 ta o'zgarmas parametrlarni - massani, jismda massalar markazining joylashishini va inersiya tenzori komponentalarining massalar markazidagi holatini berishimiz kerak bo'ladi.

Nazariy mexanikada golonommas sistemalar qaraladi. Tutash muhitlar mexanikasida ham, agarda μ^i - aniqlovchi parametrlar aniq chegaralarda ixtiyoriy ravishda o'zgarib, ularning $\delta \mu^i$ ortirmasi qaralayotgan masalalar sinfining shartlariga ko'ra m ta

$$A_i \delta \mu^i = 0$$

ko'rinishdagi erkli integrallanmaydigan munosabatlar bilan o'zaro bog'liq bo'lsa, bunday holat o'rinli, bu yerda A_i - aniqlovchi parametrlarning bazi bir funksiyalari. U holda $n - m$ ta $\delta \mu^i$ erkin orttirmalar soni μ^i - aniqlovchi parametrlarning erkin o'zgaruvchilar sonidan kichik bo'ladi va termodinamik sistema golonommas deyiladi.

Golonommas sistemaning erkinlik darajasi $\delta \mu^i$ erkin orttirmalar soni sifatida aniqlanadi. Faraz qilaylik, masalan $\mu^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ - zarracha zichligi ρ ning biror bir skalyar parametri, t - vaqt, ξ^1, ξ^2, ξ^3 - ajratilgan zarracha markazining Lagranj koordinatalari, μ^2 va μ^3 parametrlar esa μ^1 ning t bo'yicha birinchi va ikkinchi hosilasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$\mu^2 = \partial \mu^1 / \partial t; \quad \mu^3 = \partial \mu^2 / \partial t = \partial^2 \mu^1 / \partial t^2. \quad (2.1)$$

Tabiiy fizik shartlarga ko'ra, t vaqt μ^i sistemaga kirmaydi. Har xil tashqi shartlarda biror bir chegaradagi har xil ixtiyoriy μ^1, μ^2, μ^3 qiymatli holatlar o'rinli, $d\mu^1$ va $d\mu^2$ orttirmalar esa dt vaqtning o'zgarishi hisobiga ξ^1, ξ^2, ξ^3 o'zgarishlarda hamma vaqt bitta

$$\mu^2 d\mu^2 - \mu^3 d\mu^1 = 0 \quad (2.2)$$

ko'rinishdagi golonommas munosabat bilan bog'langan.

5. Holatlar fazosi. Proseslar va sikllar

Holatlar fazosi deganda koordinatalari μ_i holat parametrlaridan iborat fazo (fazaviy fazo) tushuniladi.

Termodinamik sistemaning har xil holatlariga holatlar fazosining har xil nuqtalari mos keladi. Holat parametrining biron bir ketma-ket qiymatlariga mos keluvchi muhit holatining majmuasi proses yoki jarayon deyiladi. Jarayon uzluksiz bo'lishi mumkin, agarda berilgan zarracha uchun $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ holatlar majmuasi holatlar fazosida uzluksiz egri chiziqni hosil qilsa.

6. Sistemaning tashqi ob'ektlar bilan o'zaro ta'siri

Biz jarayonni bajarsak, sistema umumiy holda tashqi jism va maydonlar bilan o'zaro ta'sirda bo'ladi. Tutash muhit modellarini qurishda asosiy masala tutash tuhitning ajratilgan zarrachasi bilan unga nisbattan tashqi bo'lgan jism va maydonlar orasida, xususi holda o'zaro ta'sir qonunlari va mexanizmlarini o'rnatishdan iborat.

Hozirgi vaqtda ajratilgan zarracha va o'rab turuvchi muhit orasida energiya almashinuvining yangi makroskopik mexanizmlari va elementar zarrachalar orasida energiya almashuvi qonunlari o'rganilmoqda.

Ushbu $d\mu^1, d\mu^2, \dots, d\mu^n$ elementar zarrachaning kichik zarrachaga energiyaning to'liq tashqi oqimini quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \quad (2.3)$$

bu yerda $dA^{(e)}$ - tashqi makroskopik massaviy va sirt kuchlarining ishi, $dQ^{(e)}$ - issiqlik oqimi; dQ^{**} - energiyaning zarrachaga nisbattan tashqi oqimi.

Tashqi kuchlarning elementar ishi uchun aniqlovchi parametrlar sistemasining asosiy manosiga ko'ra $d\mu^1; d\mu^2, \dots, d\mu^n$ parametrlarning o'zgarishiga mos keluvchi cheksiz kichik elementar jarayon uchun

$$dA^{(e)} = P_i(\mu^1, \mu^2, \mu^3, \dots, \mu^n, k^1, k^2, \dots, k^m) d\mu^i \quad (2.4)$$

ko'rinishidagi formulani yozish mumkin. Bu formulada $dA^{(e)}$ tashqi kuchning ishi qaralayotgan zarrachaning ichki parametrlari va ularning orttirmalari orqali tasvirlangan.

Tutash muhitning cheksiz kichik zarrachasi uchun (2.4) formulani quyidagi $\vec{v}$ tezlik bilan harakatlanuvchi m massali material nuqta uchun

$$dA^{(e)} = m \vec{v} d\vec{v} \quad (2.5)$$

formulaning yoki chekli o'lchamdagi ixtiyoriy absolyut qattiq jism uchun

$$dA^{(e)} = m \vec{v} d\vec{v}^* + A p dp + B q dq + C r dr \quad (2.6)$$

formulani umumlashgani sifatida qarash mumkin, bu yerda m - jism massasi; $\vec{v}^*$ - jism massalar markazi tezligi, A, B, C lar inersiyaning markaziy o'qlariga nisbatan inersiya momenti; p, q, r - oniy burchak tezligining markaziy o'qqa proeksiyalari.

Ideal suyuqlik uchun tirik kuchlar teoremasiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$\frac{dA^{(e)}}{dm} = \vec{v} d\vec{v} - p d\frac{1}{S}. \quad (2.7)$$

Yuqoridagi (2.4)-(2.7) munosabatlarni har birini $dA^{(e)}$ ni muhitning uchki parametrlari orqali aniqlaydi.

Xuddi (2.4) munosabat kabi fizik xususiyatlar asosida va umuman, qaralayotgan muhit modelining ta'rifiga kiruvchi maxsus fizik farazlar asosida quyidagini yozish mumkin:

$$dQ^* = dQ^{(e)} + dQ^{**} = Q_i(\mu, \mu, \dots, \mu, \kappa, \dots, \kappa^m) d\mu^i. \quad (2.8)$$

Masalan deformatsiyalanayotgan qattiq jism yoki ideal siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$dQ^* = dQ^{(e)} = C(T) dT \quad (2.9)$$

bo'ladi, bu yerda $C(T)$ - issiqlik sig'imi koeffitsienti, T - temperatura.

7. Sistemaning saqlanish qonuni

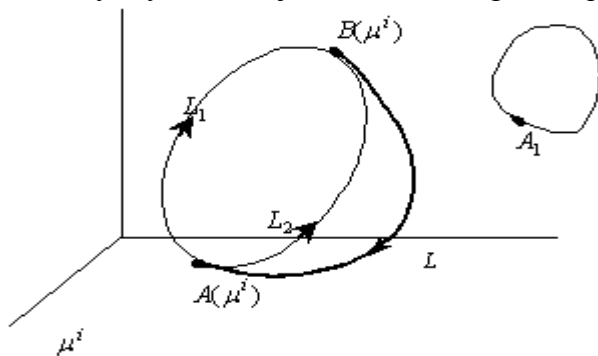
Faraz qilaylik holatlar fasosida holat parametri μ_0^i qiymatli A nuqtadan, μ^i parametrli B nuqtagacha L_1 egri chiziq bo'lab o'tayotgan jarayon sodir bo'lgan bo'lsin. Bu jarayonda sistema tashqaridan qabul qilayotgan energiyani to'liq oqimi tushunchasini kiritamiz, u quyidagiga teng:

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{AB(L_1)} P_i d\mu^i + \int_{AB(L_1)} Q_i d\mu^i. \quad (2.10)$$

Faraz qilaylik sistema C -siklni bajarsin, u holda energiyani saqlanish qonuni qo'yidagicha ta'riflanadi:

$$\int_C (P_i + Q_i) d\mu^i = 0, \quad (2.11)$$

ya'ni ixtiyoriy siklni bajaruvchi sistemaga tashqaridan keluvchi energiyani to'liq oqimi 0 ga teng.



2.1. -chizma

Bu yerdan to'g'ridan-to'g'ri quyidagi xulosa kelib chiqadi: sistema qabul qilayotgan energiyani to'liq oqimi L_1 jarayondan emas, balkim faqat sistemaning boshlang'ich va keyingi holatiga bog'liq. Haqiqat agar

A va B holatlar orasida ixtiyoriy L_1 jarayondan tashqari L_2 jarayonni va B holatdan A holatga o'tuvchi L jarayonni qarasak, u holda L_1L va L_2L jarayonlar yopiq siklni hosil qiladi va energiyani saqlanish qonuniga ko'ra

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{L_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = \int_{L_2} (P_i + Q_i) d\mu^i = - \int_L (P_i + Q_i) d\mu^i. \quad (2.12)$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Sistema holati va holat parametrlari tushunchasini bering.
2. Tutash muhit uchun holat parametrlari soni nimaga bog'liq.
3. Kichik zarracha uchun aniqlovchi parametrlarning to'liq sistemasini yo'zing.
4. Tutash muhitlar sistemasida qanday termodinamik sistemalar qaraladi.
5. Golonom termodinamik sistema deb nimaga aytiladi.
6. Golonommas termodinamik sistema ta'rifini bering.
7. Holat fazosi deganda nimani tushunasiz.
8. Jarayon va sikl tushunchalarini bering.
9. Energiyaning saqlanish qonuni yozing va uni sikllar yordamida tushuntiring.
10. Termodinamik sistemaning tashqi ob'ektlar bilan o'zaro ta'siri qay tarzda sodir bo'ladi?
11. Termodinamik jarayonda sistema tashqaridan qabul qilayotgan energiyani to'liq oqimi nimaga teng?

Xulosa

Tutash muhit uchun termodinamikaning birinchi qonuni, asosiy termodinamik parametrlar, ish, energiya haqida tushunchalar berildi. Ular orasidagi ba'zi zarur munosabatlar keltirildi

47-48-mavzu: Termodinamikaning birinchi qonuni. Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi.

Reja:

- 1) Termodinamik muvozanat;
- 2) Muvozanatli va muvozanatsiz jarayonlar;
- 3) Qaytar va qaytmas jarayonlar;
- 4) Amaliy jihatdan qaytar deb hisoblash mumkin bo'lgan jarayonga misol;
- 5) Muvozanatli va ehtimoli ko'proq bo'lgan jarayonlar;
- 6) Ehtimoli o'rtacha va qaytmas mikroskopik jarayonlar;
- 7) Temperatura haqida tushuncha;

Tayanch iboralar: jarayon, holat parametrlari, sikl, muvozanat, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o'tkazish koeffitsienti.

1. Bizga malumki absolyut qattiq jismning mexanik muvozanatini qarash mumkin. Jism tanlangan biror sanoq sistemasiga nisbatan **muvozanatda** deyiladi, agar barcha tashqi shartlar uzoq vaqt davomida o'zgarmasdan qolsa. **Termodinamik muvozanat** deb shunday holatga aytiladiki, sistema ichki holatining barcha xarakteristikalarini (mexanik xarakteristikalarini ham) tashqi shartlar saqlanib turgan o'z qiymatlarini uzoq vaqt saqlab tursalar. Holatlar fazosida termodinamik muvozanat xolati nuqta orqali ifodalanadi. Kichik hajmdagi sistemaning muvozanat holati uning temperatura xarakteristikasidan ko'proq bog'liq.

2. Termodinamik jarayon tez yoki sekin sodir bo'lishi mumkin. juda sekin bo'lgan termodinamik jarayonlarni iqtisodiy, bunda barcha parametrlarning o'zgarish tezligi cheksiz kichik bo'ladi. Holatlar fazosida bunday jarayon egri chiziq orqali ifodalanadi, uning har bir nuqtasi muvozanat holati bo'ladi. juda sekin jarayonlarning har bir oraliq holat muvozanat holati bo'ladi va bunday jarayonlar **muvozanatli jarayon** deyiladi; Muvozanatli jarayonlarni ifodalovchi munosabatlarda parametrlarning o'zgarish tezligining qiymati ahamiyatga ega emas, faqat ularning o'zgarish yo'nalishi ahamiyatga ega bo'lishi mumkin.

Chekli tezlikda sodir bo'luvchi jarayonlar (agar tezliklar fizik bog'lanishlarga tasir ko'rsatsa) **muvozanatsiz jarayonlar** deb ataladi .

Muvozanatli va o'rtnashgan (statsionar) jarayonlar umumiy holda ustma ust tushmaydi. Jarayon o'rtnashgan bo'lishi mumkin yani geometric fazodagi berilgan nuqtada holat parametrlari vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial t} = 0.$$

Shu vaqtning o'zida muvozanatsiz bo'lishi ham mumkin , yani parametrlarning o'zgarish tezliklari muhit zarrachalaridagi jarayonlarga sezilarli tasir ko'rsatadi.

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial t} = 0.$$

3. Biror A holatdan B holatga o'zgaruvchi jarayon qaytar jarayon deyiladi, agar parametrlarning cheksiz kichik ortirmasida oraliq holatlar uchun barcha tenglamalar shu ortirmalar qarama –qarshi ishora bilan olinganda ham o'rinli bo'lsa . Shunday qilib holatlar fazosida biror holatlar ketma-ketligi qaytar jarayonni tashkil qilsa, unga mos keluvchi energiya oqimlari $dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$ va dQ^{**} lar to'g'ri va qaytuvchi jarayonlarda faqat ishorasi bilan farq qilar ekan.

4. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki bazan juda tez sodir bo'luvchi jarayon -reaktiv dvigatel soplavidan gaz tashqariga chiqishini qayatr jarayon deb atash mumkin , bunda gaz zarrachalari muvozanat holatidagi 70 atm bosimli kameradan tartibi $3000 \frac{m}{s}$ bo'lgan tezlik bilan xarakatlanuvchi va bosim deyarli nol bo'lgan holatga o'tadi.

Bunday jarayonlar yuqori balandliklarda uchayotgan raketalarda sodir bo'ladi. Bu jarayonda issiqlik energiyasi turli tempraturali zarrachalar aro o'zoro almashishga ulgurmaydi; zarrachadagi termadinamik parametrlar faqat boshlang'ich muvozanat holatdan bog'liq bo'ladi.

5. Molekulalar mikroskopik harakatiga mos keluvchi o'rta statistic parametrlardan T tempratura va ρ zichlikni qaraylik. Bizgamalumki T va ρ ning aniq qiymati mikroskopik harakat karakteristikalarining cheksiz ko'p taqsimlanishlari mos kelishi mumkin.

Demak makroskopik parametrlarning muvozanat qiymatiga juda ko'p mikro holatlar to'g'ri kelar ekan. Shu sababli, agar termodinamik sistema mumkin bo'lgan holatlardan eng ehtimolli holatda bo'lsa, uni muvozanat holatda deb hisoblash mumkin. Bularga ko'ra izomerlangan sistemani ham muvozanatda yoki unga yaqin holatda deb hisoblash mumkin.

49-50-mavzu: Issiqlikning oqimi tenglamasi. O'z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar.

Reja

1. Ideal gazda issiqlik oqimi tenglamasi;
2. Mukammal gazning holat tenglamasi;
3. Mukamal gazning ichki energiyasi;
4. O'zgarmas hajm va bosimda issiqlik sig'implari, Mayer formulasi;
5. Muhitga issiqlik uzatishning fizik mexanizmlari;
6. Adiabatik va izotermik jarayonlar;
7. Politrop jarayonlar;
8. Mukammal gaz izotermalari;
9. Puasson adiabatasi;
10. Mukammal gaz uchun izoterma va adiabatalarining o'zoro joylashishi;
11. Sistemaning bajargan ishi;
12. Sistemaga tashqaridan keluvchi issiqlikning to'liq oqimi;
13. Karno sikli;
14. Karno sikli bo'yicha ishlovchi mashinalar;

15. Isitish va sovutish ko'rinishdagi karno siklini bajaruvchi sistema

Tayanch iboralar: jarayon, holat parametrlari, sikl, muvozanat, temperatura, tezlik, zichlik, issiqlik o'tkazish koeffitsienti.

Ikki parametrlilik muhitlar deb shunday muhitlarga aytiladiki unda barcha termodinamik funksiyalar faqat ikkita termodinamik parametrlardan bog'liq bo'ladi. Agar bu ikkita parametrlar P bosim va ρ zichlik bo'lsa, u holda bunday muhitlarga solishtirma energiya $u = u(p, \rho)$ kabi ifodalanadi.

1. Agar muhit o'zini ideal siqiluvchan suyuqlik kabi tutsa u holda birlik massaga to'g'ri keluvchi sirt kuchlarining bajargan ishi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{1}{dm} dA_{sirt} = p d \frac{1}{\rho}$$

va issiqlik oqimi tenglamasi $dq^{**} = 0$ deb olinganda quyidagi ko'rinishga yoziladi:

$$du = p d \frac{1}{\rho} = dq \quad (4.1)$$

2. Mukammal gazda bosim, zichlik va temperatura Klepeyron tenglamasi orqali bog'langan:

$$p = \rho RT ; \quad (4.2)$$

R -turli gazlar uchun turli qiymat qabul qiluvchi gaz o'zgarmasi. (4.2) ko'rinishdagi bosim, temperatura, zichlik muhitning boshqa fizik harakteristikalarini bog'lovchi tenglamalar holat tenglamalari deyiladi.

Havo uchun $R = 287,042 \frac{m^2}{sek^2 gradus}$

Quyidagi tenglik orqali universal gaz doimiysi R_0 va Bolsman doimiysi k larni kiritish mumkin :

$R = \frac{R_0}{M} = \frac{k}{m}$, bu yerda m -molekulalarining o'rtacha massasi (grammda), M -o'rtacha molyar massa bo'lib, quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$nM = n_1 M_1 + n_2 M_2 + \dots + n_n M_n = \sum_{i=1}^N n_i M_i ,$$

bu yerda $n - N$ ta komponentadan iborat berilgan hajmdagi modda miqdori mollar soni M_i - molyar massa

$$R_0 = 8,3144 \cdot 10^{17} \frac{erg}{mol \cdot grad} , \quad k = 1.38 \cdot 10^{-16} \frac{erg}{mol}$$

3. Mukammal gazni molekulalari o'zaro itarish kuchi bilan o'zaro ta'sirlashuvchi gaz deb qarash mumkin. Shuning uchun bir atomli mukammal gazning ichki energiyasi undagi (zarrachalarning) atomlarning xaotik harakati kinetik energiyalari yig'indisi sifatida qaraymiz. Birlik massadagi ichki energiya uni quyidagigi formula orqali ifodalash mumkin:

$$u = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + const$$

M -atomlarning umumiy massasi, m_i v_a v_i -atomning massasi va massalar markaziga nisbatan tezligi, N esa berilgan hajmdagi atomlar soni. Agar hamma atomlar bir xil bo'lsa, u holda $M = Nm$ va

$$u = \frac{v_{ort}^2}{2} + const$$

bu yerda v_{ort}^2 - atomlar xaotik harakatning o'rtacha tezligi kvadrati. Mukammal gaz o'rtacha energiyasi temperatura orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$u = c_v T + const \quad (4.3)$$

bu yerda $c_v - \frac{v_{o'rt}^2}{2}$ va T orasidagi o'lchovli proparsionallik kaiffisienti. Ichki energiya u ning

(4.3) ko'rinishida Klepeyron tenglamasi bilan berilishi mukammal gazning aniq modelini ifodalaydi.

4. Issiqlik oqimi tenglamasi (4.1) ga asosan mukammal ideal gaz uchun solishtirma hajm o'zgarmas bo'lgan jarayonlarda $(d\frac{1}{\rho} = 0)$ $dq_{N=const}^{(e)} = du = c_v dt$ yoki $\frac{dq^{(e)}}{dT} = c_v$ ekanligi keltirib chiqarish mumkin.

c_v hajm o'zgarmas bo'lganda birlik massadagi muhit harakatini 1^0c ga ko'tarish uchun kerak bo'lgan issiqlik miqdorini bildiradi va hajm o'zgarmas bo'lgandagi solishtirma issiqlik sig'imi deyiladi. Bosim o'zgarmas bo'lganda ideal mukammal gaz uchun issiqlik oqimi tenglamasidan

$$(dq^{(e)})_{p=const} = du + p \frac{1}{\rho} = c_v dT + d \frac{p}{\rho} = (c_v + R) dT \quad (4.4)$$

Bosim o'zgarmas bo'lganda birlik massadagi muhit harakatini 1^0c ga ko'tarish uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdoriga o'zgarmas bosimdagi solishtirma issiqlik sig'imi deyiladi va c_p orqali belgilanadi

$$c_p = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT} \right)_{p=const}$$

(4.4) dan c_p va c_v ni bog'lovchi Mayer formulasini keltirib chiqarish mumkin.

$$c_p - c_v = R. \quad (4.5)$$

5. Issiqlik oqimi kelishi yoki u qaytishi turli fizik holatlardan bog'liq bo'lishi mumkin:

1. Issiqlik o'tkazuvchanlik
2. Issiqlik nurlanishi yutilishi
3. Issiqlik ajralib chiqishi
4. Ba'zan esa ichki energiya yoki ichki kuchlarning bajargan ishlarining bir qismi hisobidan issiqlik ajralib chiqishi mumkin.

6.(I). Tashqi issiqlik oqimi yo'q ya'ni va zarralar o'zaro issiqlik almashmaydigan jarayonlar adiabatik jarayonlar deyiladi. Adiabatik jarayonlar haqidagi g'oya issiqlikdan izolizlangan yoki tez sodir bo'luvchi (lekin ba'zida qaytar) issiqlik almashishga yetarli darajada ulgurmaydigan jarayonlar bilan bog'liq.

(II). Issiqlik almashuvi issiqlik o'tkazuvchanlik yoki nurlanish orqali sodir bo'luvchi yetarlicha sekin sodir bo'luvchi hamma zarrachalarda tempratura o'zgarmas bo'lgan jarayonlar izotermik jarayonlar deyiladi.

Izotrop jarayon tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

Bu tenglama holat tenglamasi bilan birgalikda issiqlik oqimi tenglamasining o'zini bosadi, umuman olganda muhit harakatini o'rganishda nazariy yechimni juda soddalashtiradi.

Issiqlik oqimi tenglamasidan faqat izotermik jarayonni tashlab turish uchun zarur bo'lgan issiqlik miqdorida ni hisoblash mumkin.

Shuni aytib o'tish kerakki $\frac{dT}{dt} = 0$ shart muhitning har bir individual zarrachasida tempratura vaqt o'tishi bilan o'zgarasligini bildiradi, turli individual zarrachalarda tempratura turlicha bo'lishi mumkin.

Ba'zida esa izotermik jarayon deb zarrachalardagi tempratura vaqt o'tishi bilan o'zgarishi mumkin, lekin barcha zarrachalarda bir xil bo'lgan jarayonga aytiladi. Bu holda $\frac{dT}{dt} = 0$ shartning o'rniga

$$\text{grad}T = 0, \quad T = T(t)$$

shart bajarilishi faraz qilinadi.

(III). Ikki parametrlil muhitlar uchun fiksirlangan jarayonda issiqlik oqimi tenglamasi o'rniga zichlik va bosim orasidagi biror bog'lanish olinishi mumkin. Agar bu bog'lanish hamma zarrachalar uchun bir xil bo'lsa, u holda bunday jarayon borotrop jarayon deyiladi.

7. Ko'pincha quyidagi shart bajariladigan jarayonlarga politrop jarayon deyiladi.

$$P = c\rho^n$$

bu yerda n -politrop ko'rsatkichi deb ataluvchi o'zgarmas son, c – biror o'zgarmas.

Berilgan $p = f(\rho)$ bog'lanish uchun issiqlik oqimi tenglamasidan shu bog'lanishni ta'minlovchi tashqi issiqlik oqimini aniqlash qiyin emas.

Agar gaz mukammal issiqlik oqimi tenglamasidan $n > 1$ bo'lganda quyidagini topamiz

$$dq = du + c\rho^n d\frac{1}{\rho} = c_v dT - \frac{dRT}{n-1}$$

Bundan Mayer formulasi

$$R = c_p - c_v$$

gaasosan R o'zgarmas bo'lganda issiqlik oqimi uchun quyidagi formulani hosil qilamiz

$$dq = c_v \frac{n - \frac{c_p}{c_v}}{n-1} dT = c^* dT$$

Agar $n > \frac{c_p}{c_v} > 1$ bo'lsa, u holda temperaturaning ko'tarilish $dT > 0$ issiqlik kelishi bilan bog'liq.

Agar $1 < n < \frac{c_p}{c_v}$ bo'lsa, $dT > 0$ bo'lganda $dq < 0$ bo'lishi temperatura ko'tarilishi issiqlik chiqishi bilan bog'liq.

Agar $n = \frac{c_p}{c_v}$ bo'lsa, u holda $dq = 0$, ya'ni bunday politrop jarayon adiabatik jarayon bo'ladi.

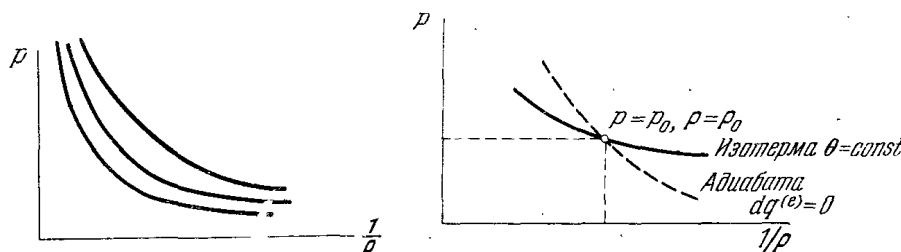
Ko'rsatilgan xususiyat politrop ko'rsatkichi n ning fizik ma'nosini xarakterlaydi.

8. Ikki parametrlil muhitning p va $v = \frac{1}{\rho}$ holat parametrlari bilan brilgan holatlar fazosini qaraylik. Bunday muhitning barcha termodinamik funksiyalari xususan temperatura ham ulrni θ bilan belgilasak p va $\frac{1}{\rho}$ ning funksiyasi bo'lishi kerak

$$\theta = \theta(p, \frac{1}{\rho})$$

Bunday muhitdagi muvozanatlar izotermik ($\theta = \text{const}$) jarayonni qaraylik. Holatlar fazosi $(p, \frac{1}{\rho})$ da

($\theta = \text{const}$) egri chiziqlarni yasaymiz. (4.1a)



4.1.-chizma a) Mukammal gaz izotermasi b) Puasson adiabatasi va izotermaning

o'zaro joylashishi.

Mukammal gaz uchun $(p, \frac{1}{\rho})$ tekislikdagi izoterma giperpoladan iborat bo'ladi

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (4.6)$$

Issiqlik oqimi tenglamasidan jarayon izotermik bo'lishi uchun zarur bo'lgan issiqlik oqimini topish mumkin. Bu issiqlik oqimi ideal mukammal gaz uchun quyidagiga teng

$$(dq)_{\text{izot}} = pd \frac{1}{\rho} = R\theta \rho d \frac{1}{\rho}$$

Izotermik kengayishda $dq > 0$, izotermik siqilishda $dq < 0$.

Shuni aytib o'tish kerakki, biror-bir $\theta = \text{const}$ izotermada, masalan suvning qaynash yoki muzlash temperaturalarini mos kelishi mumkin, suvning qaynash va muzlash temperaturalarini esa bosimdan bog'liq bo'ladi.

9. Adiabatik jarayonlarda $dq = 0$ quyidagi ko'rinishga keladi.

$$du + pd \frac{1}{\rho} = 0 \quad (4.7)$$

Bundan, agar $u(p, \frac{1}{\rho})$ ma'lum bo'lsa, uzluksiz adiabatik jarayonlardagi p va ρ orasidagi bog'lanishni topish mumkin. Mukammal gaz uchun (4.7) tenglik

$$\frac{c_v}{R} d \frac{p}{\rho} + pd \frac{1}{\rho} = 0$$

Ko'rinishini oladi. Agar $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ munosabatni kiritsak

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{dp}{\rho} + pd \frac{1}{\rho} \right) + pd \frac{1}{\rho} = 0$$

bundan

$$\frac{1}{\rho} dp + \gamma \cdot p \cdot d \frac{1}{\rho} = 0$$

Bu tenglikni integrallaymiz

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (4.8)$$

$(p, \frac{1}{\rho})$ tekisligidagi bu egri chiziq Puasson adiabatasi deb ataladi, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ esa adiabata ko'rsatkichi yoki Puasson koeffitsiyenti deyiladi. Ko'rinish turibdiki, $(p, \frac{1}{\rho})$ holatlar fazosining har bir $p_0, \frac{1}{\rho}$ nuqtasidan (4.6) izoterma va (4.8) adiabatani o'tkazish mumkin.

10. Izoterma va Puasson adiabatalarining $(p, \frac{1}{\rho})$ tekislikda o'zaro qanday joylashishini qaraylik nuqtadan o'tuvchi izoterma uchun

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \text{ yani } \frac{p_{izotrop}}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

xuddi shu nuqtadan o'tuvchi adibata uchun

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \text{ yani } \frac{p_{ad}}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Adiabata ko'rsatkichi $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ shuning uchun $p_{izot} > p_{adiab} \frac{\rho}{\rho_0} < 1$ bo'lganda $p_{izot} < p_{adiab} \frac{\rho}{\rho_0} > 1$ bo'lganda, ya'ni izoterma $(p_0, \frac{1}{\rho_0})$ nuqtadan o'ng tomonda katta chap tomonda kichik.

11. Agar $p(\rho)$ bog'lanish (funksiya) ya'ni $(p, \frac{1}{\rho})$ tekislikdagi egri chiziq berilgan bo'lsa

ichki kuchlarning bajargan ishi $\int p d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m} A$ ni har doim hisoblash mumkin. Bundan holatlar fazosidagi A holatdan B holatga o'tuvchi ixtiyoriy L_1 jarayon uchun ichki kuchlarning bajargan ishini hisoblash mumkin. Shunday qilib L_1 yo'nalish bo'yicha hisoblangan integral

$$\int_{AB(m)} p d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m} A \quad (4.9)$$

da $A > 0$ bo'lsa tashqi jism ustidan ish bajargan bo'ladi, $A < 0$ bo'lsa tashqi kuchlar L_1 jarayonni sodir etish uchun sistema ustida ish bajargan bo'ladi.

12. Xuddi shunday ixtiyoriy $L_1(p = p(\frac{1}{\rho}))$ jarayon uchun agar muhitning ichki energiyasi ($u = u(p, \frac{1}{\rho})$) berilgan bo'lsa to'liq issiqlik oqimini hisoblash mumkin.

$$Q^{(e)} = \int_{AB(L_1)} dQ^{(e)} \quad (4.10)$$

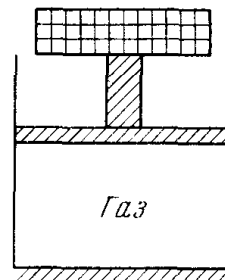
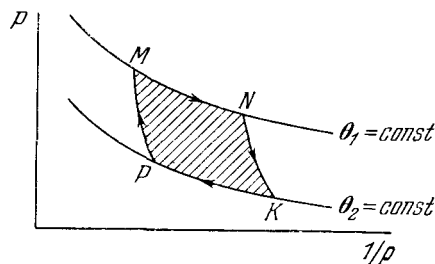
agar $Q^{(e)} > 0$ bo'lsa tashqi muhitdan issiqlik oladi, $Q^{(e)} < 0$ bo'lsa muhitga issiqlik uzatadi. Issiqlik oqimi tenglamasiga ko'ra

$$Q^{(e)} = \int_{AB(L_1)} (du + p d\frac{1}{\rho}) dm = \int_A^B du_m + A = u_{mB} - u_{mA} + A \quad (4.11)$$

13. Karno sikli deb ataluchi muvozanatli qaytar yopiq jarayonni qaraymiz. Bu jarayonda ishchi jism ya'ni muhit sifatida p va $\frac{1}{\rho}$ parametrlar orqali aniqlanuvchi mukammal

gaz yoki ixtiyoriy ikki parametrlil muhitni olish mumkin. Holatlar fazosidagi $M(p_0, \frac{1}{\rho_0})$ gaz

$\theta_1 = const$ izoterma



4.2-rasm

a) Karno sikli

b) Karno sikli bo'yicha ishlovchi mashina

bo'ylab N holatgacha sekin kengayadi, keyin K holatgacha $\theta_2 < \theta_1$ tempertura bilan adiabatik kengayadi va K dan P holatgacha izotermik siqiladi, bundan adiabata bo'yicha dastlabki M holatga qaytadi.

14. Karno sikli sodir bo'luvchi sistemani mashina deb ataymiz. Bu mashina quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

Temperaturasi θ_1 bo'lgan. Bir tomoni qo'zg'almas devor bilan berkitilgan ikkinchi esa porshen o'rnatilgan silindr temperaturasi θ_1 bo'lgan gaz bilan to'ldirilgan. Dastlab gaz silindrda M dan N gacha $\theta_1 = \text{const}$ temperaturada kengaysin Bunda silindrning yon tomonlari va porshen issiqlik o'tkazmaydigan va uning tubi issiqlikni yaxshi o'tkazuvchi bo'lib, θ_1 Temperatura o'zgarmasdan saqlab turish uchun isitkich ustida turibdi deb faras qilamiz. Porshendan yuklarni sekinlik bilan olib θ_1 temperaturani o'zgartirmasdan gazning hajmini oshiramiz va N holatgacha kelamiz. Silindr tagini issiqlik o'tkazmaydigan qoplama bilan qoplaymiz va porshendan yukni yana sekin olib borib K holatga kelamiz. Endi porshenga yuk qo'yib θ_2 o'zgarmas temperaturada gazni siqamiz, bunda temperatura ko'tarilishga harakat qiladi, shuning uchun silindr tagiga isitgich emas sovutgich o'rnatiladi. P holatga yetgandan so'ng uni dastlabki qiymatigacha ortirib borib adiabatiksiqamiz va M boshlang'ich holatga kelamiz.

50-mavzu: Harorat tushunchasi

Reja:

1. Termodinamik muvozanatlar
2. Jarayonlar
3. Harorat tushunchasi

Ixtiyoriy tutash muhit cheksiz kichik zarrasi $d\tau$ hajmda joylashgan va uning uchun termodinamikaning birinchi qonuni yozilgan deb faraz qilaylik. Ko'rilyotgan hajmdagi muhit uchun barcha tashqi sharoitlar(issiqlikning oqib kelishi, tashqi mexanik kuchlar ishi, issiqlik va mexanik energiyadan boshqa turdagi energiya olinishi) o'zgarmas bo'lib saqlangan holga mos keluvchi holat fazosi nuqtasi termodinamik muvozanatni aniqlaydi. Tutash muhit zarrasi termodinamik muvozanatga erishish uchun ma'lum vaqt sarflanishi mumkin. Jarayonlar juda tez yoki aksincha, juda sekinlik bilan ro'y berishi mumkin. Juda sekinlik bilan holat parametrlari o'zgarishi tufayli hosil bo'ladigan jarayon termodinamik muvozanat holatlari ketma-ketli sifatida qarash mumkin va bu jarayonda holat parametrlarining o'zgarishlarigina ahamiyatga ega, ularning vaqt bo'yicha o'zgarishi holat fazosi trayektoriyasiga ta'sir etmaydi. Bunday jarayon termodinamik muvozanatli jarayon deyiladi, aks holda esa termodinamik muvozanatda bo'lmagan jarayon deyiladi.

Holat fazosining biror A nuqtasidan uning V nuqtasiga o'tishda o'tish trayektoriyasini N ta cheksiz kichik bo'laklarga ajratib qaraylik. A dan V nuqtasi yo'nalishidagi har bir trayektoriya bo'lagi bo'ylab olingan jarayondagi tutash muhit zarrasi uchun tashqi $dq^{(e)}$, dq^* energiya miqdorlari ishoralari o'zgarishi bilan V dan A yo'nalishdagi mos trayektoriya bo'laklari uchun teskari yo'nalishdagi jarayonlar sodir bo'la olsa, bunday jarayonlar o'z holiga qayta oladigan jarayonlar deyiladi. Aks holda bunday jarayonlar o'z holatiga qaytmas jarayonlar deyiladi. Tashqi muhitdan va uning ta'sirlaridan to'la ravishda ajratilgan har qanday chekli yoki cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit bo'lagi vaqt o'tishi bilan termodinamik muvozanat holatiga keladi.

Endi temperatura tushunchasi bilan tutash muhit holat parametri sifatida tanishaylik.

Tutash muhit zarrasi termodinamik muvozanat holatida bo'lgan hol uchungina temperatura tushunchasini kiritish mumkin. Ajratilgan ikki jismlar bir-birlariga tegib turganda yuqori temperaturali

jismdan past temperaturali jismga issiqlik energiyasi o'tadi va bu jarayon to'xtagandagina ularning temperaturallari tenglashadi.

Molekular kinetik nazariyasiga ko'ra temperatura gaz molekulalari o'rtacha kinetik energiyasi o'lchovi sifatida olinadi. Gazlar uchun bu tushuncha gaz molekulalari erkin harakati kinetik energiyasiga proporsional qilib olinadi. Demak, temperaturaning nolga yaqinlashishi gaz molekulalari o'rtacha tezliklarini nolga yaqinlashishiga olib keladi. Ammo, bunday hol ro'y bermasa ham, absolut temperatura tushunchasi kiritilishiga olib keladi. Absolut temperatura o'lchovini ingliz olimi U. Kelvin kiritgan bo'lib, uning nol qiymati gazlarda bosim nolga teng holat, yoki baribir, gaz molekulalari kinetik energiyasi nolga yaqinlashgan holat bilan aniqlanadi. Temperatura birligi 1°C qilib olinadi. Temperatura birligining bunday olinishi oddiy sharoitda suvning muzlashi va qaynashi ko'rsatkichlari farqini 100 ga bo'lish orqali aniqlanadi.

Chekli hajmda tutash muhit uchun termodinamik jarayon uning har bir cheksiz kichik zarralari uchun turlicha bo'lishi nazarda tutilsa, uning uchun temperatura tushunchasi ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Chekli hajm uchun uning barcha bo'laklari o'rtasida issiqlik energiyasi almashuvi to'xtagandagina temperatura tushunchasini kiritish mumkin.

Ideal gazning termodinamik muhit sifatida olinishi temperatura tushunchasiga olib keldi. Termodinamikaning ikkinchi qonuni asosidagina temperatura ko'rilyotgan muhit tabiatiga bog'liq bo'lmagan ko'rsatkich (parametr) bo'la olishini isbotlash mumkin. Termodinamikaning ikkinchi qonuni esa keyingi sahifalardagina beriladi va bu usullardagi aniqlangan temperatura tushunchalarida ziddiyatlik paydo bo'lmaydi.

Faqat ikkitagina termodinamik holat parametrlari bilan aniqlanishi mumkin bo'lgan tutash muhitlar ikki parametrlil tutash muhitlar deyiladi. Holat fazosi nuqtalari tekislikda joylashadi va bunday muhitlar uchun uzluksiz termodinamik jarayonlar shu tekislikdagi chiziqlar bilan ifodalanishi mumkin. Agar bu parametrlar p va ρ lar –bosim va zichlikdan iborat bo'lsa, muhit ichki energiyasi bu parametrlar bilan to'la ravishda aniqlanadi.

Ideal siqiluvchan gaz uchun p va ρ lar holat parametrlari bo'la oladi. Bunday gaz uchun tashqi mexanik kuchlar ishi issiqlikning oqishidan boshqa turdagi bo'lgan energiyalar ta'sir etmasa, birlik massadagi gaz uchun ushbu issiqlik oqishi tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dq^{(e)} \quad (5.24)$$

Agar tekshirilayotgan gaz holat parametrlari Klayperon tenglamasini, ya'ni

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (5.25)$$

tenglamani qanoatlantirsa (bu yerda R turli gazlar uchun turli o'zgarmas qiymatlarni qabul qiladi, masalan

havo uchun $R=287,042 \frac{\text{m}^2}{\text{cek.grad}}$; T -absolut temperatura), bunday gaz mukammal gaz (совершенный

газ) deyiladi. Mukammal gazning ta'rifini uning ichki energiyasi gaz molekulalari kinetik energiyasidan iborat, deb ta'rif berish asosida ham ifodalash mumkin. U holda bunday energiyaning birlik massaga mos keluvchi qiymati to'la ravishda T ga bog'liq bo'ladi:

$$U=C_v T + \text{const} \quad (5.26)$$

Bu yerda C_v -proporsionallik koeffitsienti bo'lib, uning mazmuni keyingi satrlarda beriladi.

Agar $\frac{1}{\rho} = V = \text{const}$ o'zgarmasdan iborat bo'lsa, (5.24) dan

$$\left(dq^{(e)}\right)_{V=const} = C_v dT,$$

ya'ni

$$C_v = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{V=const}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar mukammal gaz uchun ko'rilayotgan jarayonda bosim o'zgarmas holda saqlash mumkin bo'lsa, (5.24) ning ikkinchi hadi uchun yoza olamiz:

$$pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = RdT \quad (5.27)$$

(5.26) va (5.27) ni (5.24) ga qo'yib, topamiz:

$$(C_v + R)dT = \left(dq^{(e)}\right)_{p=const} \quad (5.28)$$

(5.28) dan bosim o'zgarmas bo'lgandagi issiqlik sig'imi deb ataluvchi $C_p = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{p=const}$

koeffitsient kiritilishi mumkin. U holda $S_p = S_v + R$ bo'lib, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$S_p - S_v = R \quad (5.29)$$

Bu formulaga **Mayer formulasi deyiladi**.

(5.24) formula gaz birlik massasi uchun yozilganligi va energiyaning saqlanish qonunini ifodalab, gaz zarrasi uchun makroskopik nuqtayi nazardan olinganligi va bu yerdagi jarayonda mexanik va issiqlik energiyasidan farqli, deb olinishi mumkin bo'lgan energiyalar (masalan kimyoviy reaksiyalarda ajraladigan energiyalar, elektr va magnit maydoni ta'siri bilan bog'liq energiyalar) e'tiborga olinmagan.

Endi termodinamikada adiabatik va izotermik deb ataluvchi jarayonlar mazmuniga to'xtab o'taylik.

Ixtiyoriy tutash muhit cheksiz kichik zarrasi uchun termodinamikaning birinchi qonuni yozilganda va xususan yuqorida keltirilgan mukammal gaz uchun bu qonun (5.24) tenglama bilan ifodalanganda holat fazosi bo'ylab trayektoriyalar ma'lum shartlar asosida amalga oshirilishini tahlil etish mumkin. Agar bu jarayonda tashqi muhitdan issiqlik energiyasi olinmasa, ya'ni $dq^{(e)} = 0$ bo'lsa, bunday jarayon adiabatik jarayon deyiladi. Bunday jarayonni amalga oshirish nazariy jihatdan yengil tasavvur qilish bilan bajarilsa ham, amalda murakkab texnik qiyinchiliklarga olib kelishi mumkin. Agar ko'rilayotgan jarayon davomida temperatura T o'zgarmas bo'lib saqlansa, bunday jarayon izotermik jarayon deyiladi. Bu jarayonlarni aniqlovchi holat fazosi trayektoriyalari termodinamik muvozanatlar ketma-ketligi bilan amalga oshadi, deb faraz qilinadi.

TOPSHIRIQ

1. Mukammal gaz uchun izotermik jarayonda $\frac{p}{\rho} = const$ va holat parametrlari p va $\frac{1}{\rho}$ deb olinsa, issiqlik oqimi tenglamasi yozilsin.

Mukammal gazlar uchun adiabatik jarayon ko'rilganda p va $\frac{1}{\rho}$ holat parametrlari deb olinsa, energiya saqlanish qonunidan $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$ bo'lishligi isbotlansin. Bu munosabat Puasson adiabatasi deyiladi va

$$k = \frac{C_p}{C_v} \text{ deb belgilansin.}$$

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

**ANDIJON
DAVLAT
UNIVERSITETI**



FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIKA» KAFEDRASI

**1.2. «TUTASH MUHIT MEXANIKASI»
FANINING AMALIY MASHG'ULOTLARI
MATERIALLARI**

ANDIJON – 2020

1-AMALIY MASHG'ULOT

Mavzu: Koordinatalarni almashtirish

Maqsad: Talabalarga koordinatalarni almashtirish va ular orasidagi munosabatlarni chuqurroq o'rgatish. Topshiriqlar orqali ularning bilimni sinash.

REJA:

1. Koordinatalar sistemasini, bazis vektorlari, radius vektor;
2. Koordinatalarni burish;
3. Yangi va eski koordinatalar orasidagi o'zaro munosabat.

Asosiy tushunchalar

Koordinatalar sistemasini biror burchakka burish natijasida yangi koordinatalar sistemasini hosil bo'ladi (1-chizma*). Hosil bo'lgan koordinatalar sistemasining $\vec{e}'_i$ bazis vektorlarini eski $\vec{e}_j$ bazis

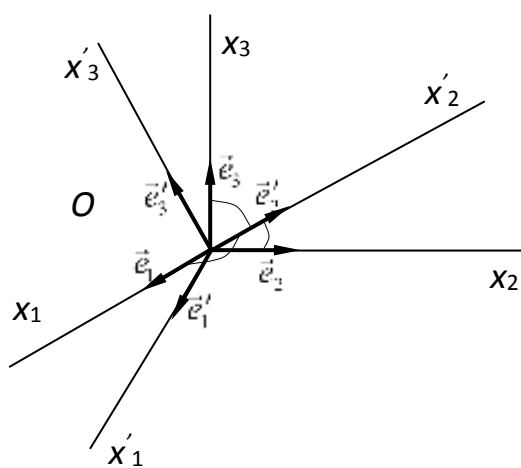
vektorlari orqali quyidagicha ifodalash mumkin

$$\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j, \quad (1)$$

bu yerda α_{ij} yangi bazis vektorlarining eski bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari. Xuddi shunday eski bazislarni ham yangi bazislar orqali ifodalash mumkin

$$\vec{e}_i = \alpha'_{ij} \vec{e}'_j, \quad (2)$$

bu yerda α'_{ij} eski bazis vektorlarining yangi bazis bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari.



1-chizma

Masala. $Ox'_1x'_2x'_3$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini orasidagi bog'lanish munosabat bog'lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan:

1. Ortogonallik sharti bajarilishini ko'rsating.
2. Berilgan $A(1,2,4)$ nuqtaning shtrixli koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini aniqlang.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

3. $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

4. $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

Yechish

1. Ortogonallikni ixtiyoriy satr(ustun)ning komponentalarini boshqa ixtiyoriy satr(ustun)ning mos komponentalariga ko'paytmalari yig'indisi nolga tengligidan topamiz

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \\
& -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0; \\
& -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0; \\
& -\frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Demak ortogonallik sharti bajarilar ekan.

2. Shtrixli koordinatalar sistemasida A nuqtaning koordinatalarini topamiz

$$\begin{aligned}
x'_1 &= -\frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 4 = -\frac{23}{5\sqrt{2}}; \\
x'_2 &= -\frac{4}{5} \cdot 1 + 0 \cdot 2 - \frac{3}{5} \cdot 4 = -\frac{16}{5}; \\
x'_3 &= \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 4 = \frac{19 + \sqrt{5}}{5\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Demak, shtrixlikoordinatalarsistemasida $A\left(-\frac{23}{5\sqrt{2}}, -\frac{16}{5}, \frac{19 + \sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right)$.

• 3. Tekisliktenglamasini shtrixlikoordinatalarda ifodalaymiz

$$\begin{aligned}
Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D &= A\left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}x'_3\right) + B\left(\frac{4}{5}x'_1 - \frac{3}{5}x'_3\right) + \\
&+ C\left(\frac{3}{5\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 + \frac{4}{5\sqrt{2}}x'_3\right) + D = 0 \Rightarrow \\
\left(-\frac{3A}{5\sqrt{2}} + \frac{4B}{5} + \frac{3C}{5\sqrt{2}}\right)x'_1 + \left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{C}{\sqrt{2}}\right)x'_2 + \left(-\frac{4A}{5\sqrt{2}} - \frac{3B}{5} + \frac{4C}{5\sqrt{2}}\right)x'_3 + D &= 0
\end{aligned}$$

1-MUSTAQIL ISHLASH UCHUN TOPSHIRIQLAR

$Ox'_1x'_2x'_3$ va $Ox_1x_2x_3$ koordinatalar sistemasini bog'lovchi koordinat almashtirishlar quyidagi jadval shaklida berilgan:

1. Ortogonallik sharti bajarilishini ko'rsating.
2. Berilgan $A(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning har ikkala koordinatalar sistemasida radius vektorini aniqlang.
3. $a(a_1, a_2, a_3)$ vektorni shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.
4. $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik tenglamasini shtrixli koordinatalar sistemasida ifodalang.

1-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

2-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

3-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

4-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

5-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0
x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

6-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

7-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

8-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

11-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0
x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

12-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

9-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

10-variant

	x_1	x_2	x_3
--	-------	-------	-------

13-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

14-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

15-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

16-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

17-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0

x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
--------	---	---------------	---------------

18-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

19-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

20-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
x_2'	0	0	1
x_3'	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

21-variant

	x_1	x_2	x_3
--	-------	-------	-------

x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_3'	0	0	1

22-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

23-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2'	1	0	0
x_3'	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

24-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	0	0	1
x_3'	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0

25-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_2'	$-\frac{2}{3}$	0	0
x_3'	0	$-\frac{1}{3}$	1

26-variant

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x_2'	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x_3'	$\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5\sqrt{2}}$

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
4. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

2 – MUSTAQIL ISH Mavzu: Tenzorlar va ular ustida amallar

Maqsad: Talabalarda tenzorlar ustida amallarni bajarish ko'nikmalarini shakllantirish. Mavzu bo'yicha masala yechish orqali ularning bilimini mustahkamlash va bilimini sinash.

REJA:

1. Tenzor va uning komponentalari;
2. Tenzorni simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratish;
3. Tenzorning sharsimon va deviator qismlari;
4. Tenzorning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.

Asosiy tushunchalar

Komponentalari quyidagicha aniqlanuvchi ob'ektga tenzor deyiladi

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = T_{11}\bar{\vartheta}^1\bar{\vartheta}^1 + T_{12}\bar{\vartheta}^1\bar{\vartheta}^2 + T_{13}\bar{\vartheta}^1\bar{\vartheta}^3 + T_{21}\bar{\vartheta}^2\bar{\vartheta}^1 + T_{22}\bar{\vartheta}^2\bar{\vartheta}^2 + T_{23}\bar{\vartheta}^2\bar{\vartheta}^3 + T_{31}\bar{\vartheta}^3\bar{\vartheta}^1 + T_{32}\bar{\vartheta}^3\bar{\vartheta}^2 + T_{33}\bar{\vartheta}^3\bar{\vartheta}^3. \quad (1)$$

Agar bu tenzor uchun $T_{ij} = T_{ji}$ shart bajarilsa simmetrik, $T_{ij} = -T_{ji}$ shart bajarilsa antisimmetrik deyiladi.

Tenzor simmetrik va antisimmetrik qismlarga quyidagicha ajratiladi

$$T_{ij} = T_{ij}^{sim} + T_{ij}^{antisim}, \quad T_{ij}^{sim} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{ij}^{antisim} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (2)$$

Umumiy holda tenzor sharsimon va deviator qismlarga quyidagi formula bo'yicha ajratiladi

$$T_{ij} = T_{ij}^{shar} + T_{ij}^{dev}, \quad T_{ij}^{shar} = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33})\delta_{ij}, \quad T_{ij}^{dev} = T_{ij} - T_{ij}^{shar}. \quad (3)$$

Tenzorning bosh qiymatlari (komponentalari) quyidagi tenglamadan topiladi

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Bosh qiymatlarga mos bosh yo'nalishlar esa quyidagi tenglamalardan topiladi

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0; \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0; \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Tenzor sirti esa quyidagi tenglamadan aniqlanadi

$$T_{ij}x_i x_j = \pm c^2. \quad (6)$$

Masala. $T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tenzor uchun quyidagilarni aniqlang

1. Tenzornimatrictsashaklidabo'lsa, univektorshaklidavaaksinchayozing;
2. Tenzornisimmetrikvaantisimmetriktenzorlargaajratingvaularningyig'indisidaniboratekanliginiko'rsating;
3. Tenzorning bosh komponentalarini toping;
4. Tenzorning bosh o'qlarini toping;
5. Tenzorni sharsimon va deviator qismlariga ajrating;
6. Tenzor sirti tenglamasini va shaklini toping.

Yechish. 1. Tenzorni vektor ko'rinishga o'tkazamiz

$$T = 4\bar{e}^1\bar{e}^1 + 6\bar{e}^1\bar{e}^2 + 3\bar{e}^1\bar{e}^3 + 3\bar{e}^2\bar{e}^1 + 4\bar{e}^2\bar{e}^2 + \bar{e}^3\bar{e}^1 + 4\bar{e}^3\bar{e}^3;$$

2. Simmetrik va antisimmetrik qismlarga ajratamiz va ularning yig'indisi sifatida ifodalaymiz

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4,5 & 2 \\ 4,5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{simmetrik}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1,5 & 1 \\ -1,5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimmetrik}};$$

3. Tenzorning sharsimon va deviator qismlari

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{sharsimon}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{deviator}}.$$

4. Tenzorning bosh komponentalarini topish uchun

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 3 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamani yechamiz. Bu kubik tenglamaga keladi

$$(4-\lambda)^3 - 3(4-\lambda) - 18(4-\lambda) = 0,$$

$$(4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 21) = 0,$$

Uning ildizlari $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4 + \sqrt{21}, \quad \lambda_3 = 4 - \sqrt{21}.$

5. Bosh qiymatlarga mos bosh yo'nalishlarni topish uchun esa quyidagi tenglamalarni yechamiz

$\lambda = 4$ uchun

$\lambda = 4 + \sqrt{21}$ uchun

$\lambda = 4 - \sqrt{21}$ uchun

$$\begin{cases} 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 = 0; \\ n_1 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0; \\ n_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \\ n_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases} \begin{cases} -\sqrt{21}n_1 + 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 - \sqrt{21}n_2 = 0; \\ n_1 - \sqrt{21}n_3 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \pm\sqrt{\frac{21}{31}}; \\ n_2 = \pm\frac{3}{\sqrt{31}}; \\ n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases} \begin{cases} \sqrt{21}n_1 + 6n_2 + 3n_3 = 0; \\ 3n_1 + \sqrt{21}n_2 = 0; \\ n_1 + \sqrt{21}n_3 = 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \pm\sqrt{\frac{21}{31}}; \\ n_2 = \mp\frac{3}{\sqrt{31}}; \\ n_3 = \mp\frac{1}{\sqrt{31}}. \end{cases}$$

6. Tenzor sirtini topamiz

$$T_{ij}x_i x_j = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2x_1 + 4x_2^2 + 0 \cdot x_1x_3 + x_3x_1 + 0 \cdot x_3x_2 + 4x_3^2 = \pm c^2$$

yoki $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_1x_2 + 4x_1x_3 = \pm c^2$.

Demak tenzorsirti yuqoridagi tenglamabilan ifodalanganuvchi ellipsoiddan iborat ekan.

2-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

1. Tenzor matritsasi shaklida bo'lsa, univektor shaklida va aksincha yozing.
2. Tenzorni simmetrik va antisimmetrik tenzorlarga ajrating.
3. Tenzorning simmetrik va antisimmetrik tenzorlari yig'indisidan iborat ekanligini ko'rsating.
4. Tenzorning bosh komponentalarini toping.
5. Tenzorning bosh o'qlarini toping.
6. Tenzorni sharsimon va deviator qismlariga ajrating.
7. Tenzor sirtini va shaklini aniqlang.

1-variant $(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2-variant $(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

4-variant $(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

5-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 9 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

6-variant

$$A = 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 3 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

7-variant

$$A = 4 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 7 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2$$

8-variant

$$A = \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^3 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 7 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

9-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

10-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

12-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

13-variant

$$A = 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^3 + 3 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 5 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

14-variant

$$A = 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 3 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

15-variant

$$A = 4 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 7 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2$$

16-variant

$$A = \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^3 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 2 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 3 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

17-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

18-variant

$$A = 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^3 + 3 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 5 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

19-variant

$$A = 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 3 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

20-variant

$$A = 4 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^2 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 7 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2$$

21-variant

$$A = \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^1 + 2 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^2 + 5 \bar{\vartheta}^1 \bar{\vartheta}^3 + 6 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^2 \bar{\vartheta}^3 + 7 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^1 + 4 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^2 + 6 \bar{\vartheta}^3 \bar{\vartheta}^3$$

22-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

25-variant

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

26-variant

$$A = \vec{\mathfrak{z}}^1 \vec{\mathfrak{z}}^1 + 2 \vec{\mathfrak{z}}^1 \vec{\mathfrak{z}}^2 + 5 \vec{\mathfrak{z}}^1 \vec{\mathfrak{z}}^3 + 6 \vec{\mathfrak{z}}^2 \vec{\mathfrak{z}}^1 + \\ + 4 \vec{\mathfrak{z}}^2 \vec{\mathfrak{z}}^3 + 7 \vec{\mathfrak{z}}^3 \vec{\mathfrak{z}}^1 + 4 \vec{\mathfrak{z}}^3 \vec{\mathfrak{z}}^2 + 6 \vec{\mathfrak{z}}^3 \vec{\mathfrak{z}}^3$$

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
6. М.А.Акивес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

3-MUSTAQIL ISH

Mavzu: Tutash muhit kinematikasiga doir masalalar

Мақсад: Tutash muhit harakat qonunining berilish usullari, tezliklar va tezlanishlar maydonlari, hamda deformatsiyasi haqid tasavvurlarni yanada kengaytirish.

Mavzu bo'yicha masala yechish orqali ularning bilimini mustahkamlash va sinash.

REJA:

1. Tutash muhit harakatininig Lagranj va Eyler ko'rinishlari, ularning biridan ikkinchisiga o'tish;
2. Ko'chish vektori, tezlik va tezlanishlar maydoni;
3. Deformatsiya va deformatsiya tezliklari.

Ma'lumki tutash muhit harakatini o'rganishda Lagranj va Eyler nuqtai nazarlari mavjud. Agar harakat $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, Lagranj ko'rinishida, Agar harakat $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, Eyler ko'rinishida berilgan deyiladi. Ular bir ko'rinishda berilgan bo'lsa uni ikkinchi ko'rinishga o'tkazish uchun dastlab bir qiymatli moslik bajarilishini tekshirishimiz kerak, ya'ni yakobian noldan farqli bo'lishi kerak

LagranjdanEylergaotishuchunLagranjdanEylergaotishuchun

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| \neq 0 \quad \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (1)$$

Agar boshlang'ich holatda Lagranj va Eyler koordinatalari ustma-ust tushsa, u holda ko'chish vektori

$$w_i = x_i - \xi_i \quad (2)$$

kabi aniqlanadi.

Tezlik vektori komponentalari

Lagranj koordinatalarida

$$v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial w_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}; \quad (3)$$

Eyler koordinatalarida

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial w_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_k(x_1, x_2, x_3, t) \frac{\partial w_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}. \quad (4)$$

(4) da tezlik vektori komponentalari oshkormas ko'rinishda berilgan.

Tezlanish vektori komponentalari

Lagranj koordinatalarida

$$a_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\partial v_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}; \quad (5)$$

Eyler koordinatalarida

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} + v_k(x_1, x_2, x_3, t) \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}. \quad (6)$$

Deformatsiya tenzori komponentalari

$$\text{Lagranj koordinatalarida} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial w_k}{\partial \xi_j} \right); \quad (7)$$

Eyler koordinatalarida

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right). \quad (8)$$

Cheksiz kichik deformatsiya holida (5) va (6) dagi kvadratik hadlar tashlab yuborilishi mumkin.

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \xi_i} \right). \quad (8)$$

Masala. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida $x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 (e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ ko'rinishda berilgan. Uni Eyler ko'rinishga o'tkazing. Lagrang va Eyler koordinatalarida ko'chish vektori komponentalarini toping. Lagrang koordinatalarida tezlik, tezlanish, deformatsiya va deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarini toping.

Yechish. Harakatni Eyler ko'rinishida ifodalash uchun dastlab yakobianning noldan farqliligini tekshiramiz

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t \neq 0$$

Demak, Eyler koordinatalariga o'tish mumkin.

$x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 (e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^t - e^{-t})$; $x_3 = \xi_3$ tenglamalarni ξ_j larga nisbatan yechamiz.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 e^{-t} - x_3 (1 - e^{-t}); \\ \xi_2 &= x_2 - x_3 (e^t - e^{-t}); \\ \xi_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Endi ko'chish vektori komponentalarini topamiz. $w_i = x_i - \xi_i$ formulaga ko'ra

Lagranj koordinatalarida

$$\begin{aligned} w_1 &= \xi_1 (e^t - 1) + \xi_3 (e^t - 1); \\ w_2 &= \xi_3 (e^t - e^{-t}); \\ w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eyler koordinatalarida

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 (1 - e^{-t}) + x_3 (1 - e^{-t}); \\ w_2 &= x_3 (e^t - e^{-t}); \\ w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tezlik vektori komponentalari

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi_1 (e^t + 1) + \xi_3 (e^t - 1); \\ v_2 &= \xi_3 (e^t + e^{-t}); \\ v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tezlanish vektori komponentalari

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi_1 (e^t + 1) + \xi_3 (e^t - 1); \\ a_2 &= x_3 (e^t - e^{-t}); \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Deformatsiya tenzori komponentalari

$$\varepsilon_{11} = (e^t - 1), \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = (e^t - 1), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = (e^t - e^{-t}).$$

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{11} = (e^t + 1), \quad e_{22} = 0, \quad e_{33} = 0, \quad e_{12} = e_{21} = 0, \quad e_{13} = e_{31} = (e^t - 1), \quad e_{23} = e_{32} = (e^t + e^{-t}).$$

3-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

Muhit harakati $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ qonuniyat bilan berilgan. Lagrang va Eyler koordinatalarida:

1. ko'chish vektori komponentalarini;

2. tezlik vektori komponentalarini;

3. tezlanish vektori komponentalarini;

4. deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarini toping.

$$1. x_1 = \xi_1; x_2 = \xi_2 e^t + A \xi_3; x_3 = \xi_3 e^t + A \xi_2,$$

$$2. x_1 = \xi_1 A + \xi_3 e^{-t}; x_2 = \xi_2 e^{kt}; x_3 = \xi_3 + A \xi_1,$$

$$3. x_1 = \xi_1 e^t + A \xi_2; x_2 = A \xi_1; x_3 = \xi_3 e^{-t},$$

$$4. x_1 = \xi_1 + \xi_3 (e^t - 1); x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^{2t} - e^{-2t}); x_3 = e^t \xi_3 + A \xi_2,$$

$$5. x_1 = 3 \xi_1 \xi_3 e^{-t^2}; x_2 = 2 \xi_1 \xi_2 e^{-t^2}; x_3 = 5 \xi_2 \xi_3 e^{-t},$$

$$6. x_1 = (3 \xi_2 - 4 \xi_3) e^{-t}; x_2 = (2 \xi_1 - \xi_3) e^{-t}; x_3 = (4 \xi_2 - \xi_1) e^{-t},$$

$$7. x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-t}; x_2 = \xi_2 e^{-t^2}; x_3 = (\xi_3 + A \xi_1) e^t,$$

$$8. x_1 = (\xi_1 + A \xi_2) e^{-t}; x_2 = A \xi_1 e^{-t^2}; x_3 = \xi_3,$$

$$9. x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 (e^t - 1); x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^t - e^{-t}); x_3 = \xi_3,$$

$$10. x_1 = k \xi_1 \xi_3 e^{-t}; x_2 = k \xi_1 \xi_2 e^t; x_3 = k \xi_2 \xi_3,$$

$$11. x_1 = \xi_1 e^{-t}; x_2 = (\xi_2 + A \xi_3) e^t; x_3 = \xi_3 + A \xi_2,$$

$$12. x_1 = (\xi_1 A + \xi_3) e^{-t}; x_2 = \xi_2; x_3 = (\xi_3 + A \xi_1) e^{-t},$$

$$13. x_1 = \xi_1 + A \xi_2 e^t; x_2 = A \xi_1 e^t; x_3 = \xi_3,$$

$$14. x_1 = \xi_1 + \xi_3 (e^2 - 1); x_2 = \xi_2 + \xi_3 (e^2 - e^{-2}); x_3 = \xi_3,$$

$$15. x_1 = e^{-t} \xi_3; x_2 = k \xi_1; x_3 = k \xi_3 (e^{-t} + e^t),$$

$$16. x_1 = 3 \xi_1 \xi_3 e^{-t^2}; x_2 = 2 \xi_1 \xi_2 e^{-t^2}; x_3 = 5 \xi_2 \xi_3 e^{-t},$$

$$17. x_1 = \xi_2 e^{-t}, x_2 = (\xi_2 + A \xi_3) e^t, x_3 = \xi_3,$$

18. $x_1 = (3\xi_2 - 4\xi_3)e^{-t}$, $x_2 = (2\xi_1 - \xi_3)e^{-2t}$, $x_3 = 4\xi_2e^{-t}$,
19. $x_1 = \xi_1 + \xi_3(e^t - 1)$; $x_2 = \xi_2 + \xi_3(e^{2t} - e^{-2t})$; $x_3 = e^t \xi_3 + A\xi_2$,
20. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3)e^{-t}$; $x_2 = \xi_2 e^{-t^2}$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1)e^t$,
21. $x_1 = k\xi_1\xi_3e^{-t}$; $x_2 = \xi_1\xi_2e^t$; $x_3 = k\xi_2\xi_3$,
22. $x_1 = \xi_1 + \xi_2e^t$; $x_2 = A\xi_1e^t$; $x_3 = k\xi_3$,
23. $x_1 = \xi_1 + \xi_3e^{-t}$; $x_2 = \xi_2e^{kt}$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_1$,
24. $x_1 = (\xi_1 A + \xi_3)e^{-kt}$; $x_2 = \xi_2$; $x_3 = (\xi_3 + A\xi_1)e^{-kt}$,

Adabiyotlar

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В I,II-т.

4 – MUSTAQIL ISH

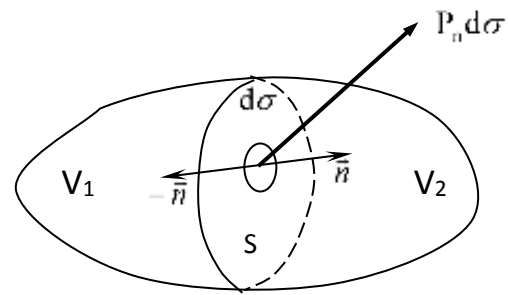
MAVZU: KUCHLANISH TENZORI VA KUCHLANISH VEKTORI

I. NAZARIY QISM

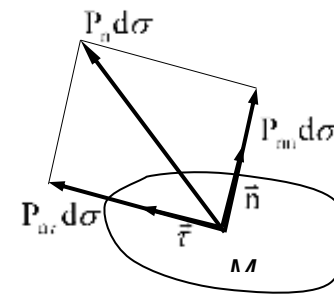
Tutash muhit mexanikasi fani bo'yicha ma'ruzalardan ma'lumki 1-chizmada tasvirlangan $\vec{P}_n$ vektor kuchlanish vektori bo'ladi. Uni $d\sigma$ elementar yuzachaning normalini $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$) va urinmasi $\vec{\tau}$ ($|\vec{\tau}| = 1$) bo'yicha tuzuvchilarga ajratish mumkin (2-chizma).

$$\vec{P}_n = P_{nn}\vec{n} + P_{n\tau}\vec{\tau} \quad (1)$$

bu yerda $\vec{P}_n$ - M nuqtaga qo'yilgan normalini $\vec{n}$ bo'lgan yuzachadagi kuchlanish vektori, P_{nn} va $P_{n\tau}$ lar mos ravishda normal va urinma kuchlanishlar deyiladi.



1-chizma



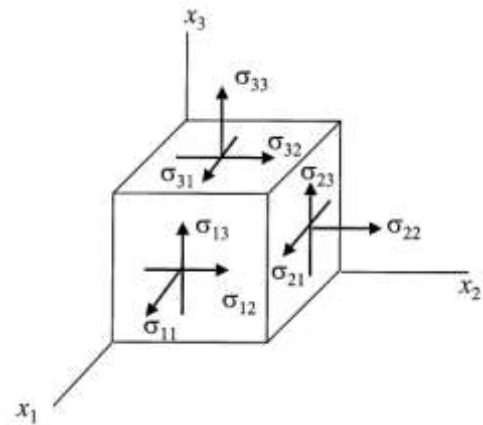
2-chizma

Kuchlanish vektori uchun quyidagi Koshi formulasi o'rinli

$$\vec{P}_n = \vec{P}_1 n_1 + \vec{P}_2 n_2 + \vec{P}_3 n_3 \quad (2)$$

bunda n_i - berilgan yuza normali yo'naltiruvchi kosinuslari; $\vec{P}_i$ - M nuqtaga qo'yilgan va koordinata o'qlariga parallel yo'nalgan kuchlanish vektorlari. $\vec{P}_i$ vektorlarni $\vec{e}_j$ bazislar bo'yicha yoyib chiqamiz

$$\vec{P}_i = \sigma_{ij} \vec{e}_j$$



3-chizma

Bundan

$$\begin{aligned} P_{n1} &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3; \\ P_{n2} &= \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3; \\ P_{n3} &= \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Koshi formulasidan foydalanib, kuchlanishning normal va urinma tuzuvchilarini topamiz

$$P_{nn} = (\vec{P}_n \vec{n}) = \sigma_{ij} n_j n_i = (n_1, n_2, n_3) \left(\sigma_{ij} \right) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$P_{nt} = \left((P_{n1})^2 + (P_{n2})^2 + (P_{n3})^2 - (P_{nn})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$Ox_1 x_2 x_3$ Dekart koordinatalar sistemasida berilgan (σ_{ij}) miqdorlar majmuasi ikkinchi rang tenzorni tashkil qiladi va kuchlanish tenzori deb ataladi

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Ichki harakat miqdori momentlar va juftlar mavjud bo'lmagan holda kuchlanish tenzori simmetrik bo'ladi va $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ lar x_1, x_2, x_3 koordinata o'qlariga perpendikulyar yuzalardagi normal kuchlanishlar, $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ esa urinma kuchlanishlar deyiladi.

Kuchlanish tenzorining koordinatalarni almashtirishga nisbatan invariantlari 3 ta bo'lib, ular quyidagicha aniqlanadi

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

yoki

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

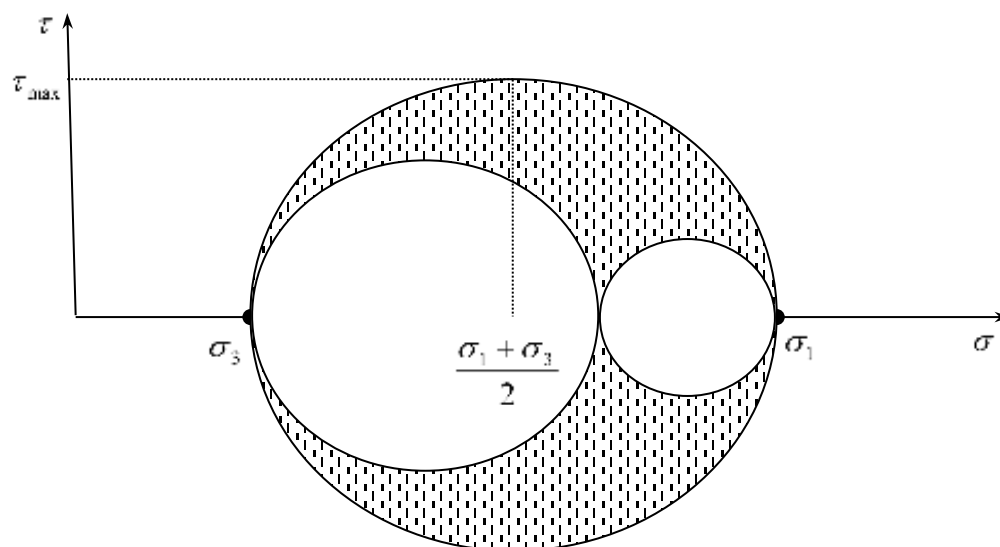
Tenglamaning yechimlari bo'ladi va $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ kabibelgilanadi. Topilgan bosh qiymatlarga mos bosh yo'nalishlarsa quyidagi tenglamalardan topiladi

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0; \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0; \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Demak koordinatalarni $A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}$ kabi almashtirganda kuchlanish tenzori $(\sigma'_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ ko'rinishga keladi.

Bosh kuchlanishlarni kamayish tartibida raqamlab $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ va ular yordamida radiuslari $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$; $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ ga teng bo'lgan doiralarni chizamiz

Chizmada σ normal, τ urinma kuchlanishni bildiradi. Shtrixlangan sohadagi qiymatlarni urinma kuchlanish qabul qilishi mumkin. Ko'rinish turibdiki, normal kuchlanish $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ ga teng bo'lganda, urinma kuchlanish $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ga teng bo'lgan maksimal qiymatga erishadi.

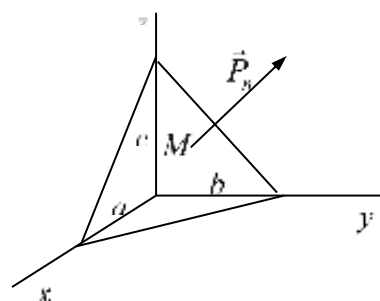


4-chizma

II.TOPSHIRIQNI BAJARISH NAMUNASI

Masala. Oxyz Dekart koordinatalar sistemasida tutash muhitning M nuqtasidagi (σ_{ij}) kuchlanish tenzori berilgan. Koordinata o'qlarini koordinata boshidan mos ravishda a, b, c masofalarda kesib o'tuvchi yuzachadagi kuchlanish vektorini, normal va urinma kuchlanishlarni, shuningdek kuchlanish tenzorining invariantlarini, bosh qiymatlari va unga mos bosh yo'nalishlarini toping. Mor doirasi yordamida maksimal va minimal urinma kuchlanishlarni aniqlang.

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2$$



5-chizma

Yechish. **Analitik geometriya kursidan ma'lumki, koordinata o'qlarini kesib o'tuvchi tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ushbu tenglamaga berilganlarni qo'yib, uni kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

Ko'rinibturibdiki, berilgantezislikka $\vec{N}(3,2,6)$ vektorperpendikulyarbo'ladi. Unga mos birlik vektori quyidagicha aniqlanadi

$$\vec{n} = \left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, \frac{N_3}{N} \right)$$

va demak $\vec{n} = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$

Endi (3) formulalar yordamida kuchlanish vektori komponentalarini topamiz

$$P_{n1} = 3 \cdot \frac{3}{7} - 1 \cdot \frac{2}{7} + 0 \cdot \frac{6}{7} = 1,$$

$$P_{n2} = -1 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} + 0 \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7},$$

$$P_{n3} = 0 \cdot \frac{3}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{7}.$$

$$\vec{P}_n = \left(1, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

(4) va (5) formularga ko'ra normal va urinma kuchlanishlarni topamiz

$$P_{nn} = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \frac{9}{7} \quad P_{n\tau} = \left(1^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^2 + \left(\frac{6}{7} \right)^2 - \left(\frac{9}{7} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

(7) formula yordamida berilgan kuchlanish tenzorining bosh qiymatlarini

topamiz

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Butenglamayechimlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$

Topilgan boshqiymatlarga mos boshyo'nalishlar (o'qlar) ni topamiz

$\lambda_1 = 4$ uchun

$$\begin{cases} -n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 - n_2 = 0 \\ -3n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$\lambda_2 = 2$ uchun

$$\begin{cases} n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 + n_2 = 0 \\ -n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$\lambda_3 = 1$ uchun

$$\begin{cases} 2n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 + 2n_2 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (0, 0, \pm 1)$$

Natijaning to'g'riligini bitta holda koordinatalarni almashtirish yordamida tekshiramiz

$$\begin{aligned} (p'_{ij}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demak koordinatalarni $A = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \mp \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ kabi almashtirganimizda kuchlanish tenzori

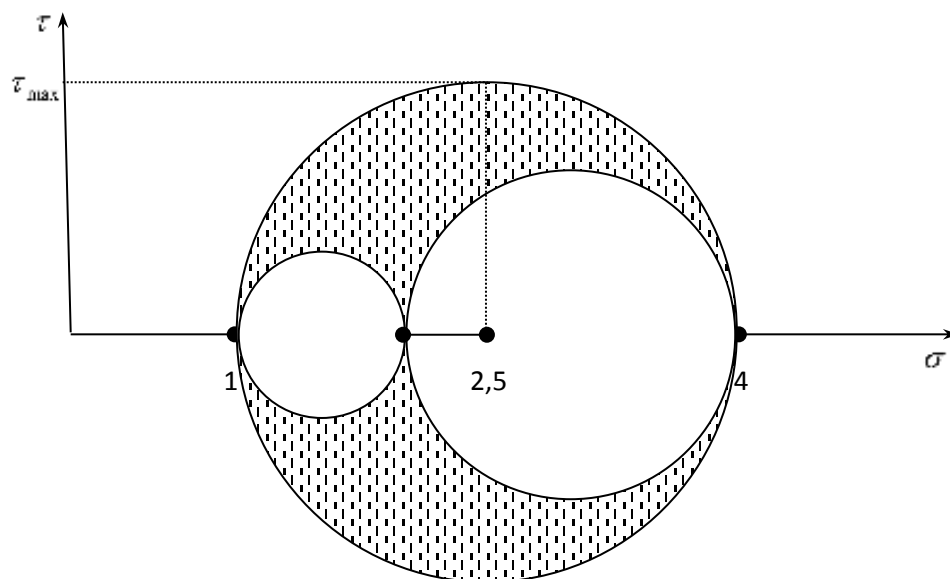
$$(p'_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishni olarekan.

Endiboshkuchlanishlaryordamidamaksimalurinmakuchlanishlarnianiqlaymiz. Buning uchun radiuslari

$$\frac{p_1 - p_3}{2} = \frac{4 - 1}{2} = 1,5; \quad \frac{p_1 - p_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1; \quad \frac{p_2 - p_3}{2} = \frac{2 - 1}{2} = 0,5$$

bo'lgan doiralarni chizamiz



Chizmadanko'rinadiki, urinmakuchlanish $\sigma = 2,5$ bo'lganda $\tau_{\max} = 1,5$ maksimalqiymatgaerishadi.
 normalkuchlanishboshkuchlanishlarga tengbo'lganda urinmakuchlanishlarnolga tengbo'ladi.

Shuningdek,

III. 4-MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

Masala Tutashmuhitning M nuqtasida P kuchlanishtenzoriberilgan x, y, z koordinatao'qlarinikoordinataboshidanmosravishda a, b, c masofalardakesibo'tuvchiyuzadakuchlanishvektorini, normalvaurinmakuchlanishlarni, shuningdekkuchlanishtenzoriningboshqiymatlarivaungamosboshyo'nalishlarinitoping.

$$1. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2 \quad 2. P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 2$$

$$3. P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -4, \quad b = 3, \quad c = 2 \quad 4. P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 5, \quad b = 4, \quad c = 2$$

$$5. P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 4, \quad c = 3 \quad 6. P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 1, \quad c = 1$$

$$7. P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 4, \quad c = 4 \quad 8. P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 3, \quad b = 5, \quad c = 5$$

$$9. P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 3, \quad b = 3, \quad c = 2 \quad 10. P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 4, \quad c = 2$$

$$11. P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2 \quad 12. P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -6, \quad c = -2$$

$$13. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2 \quad 14. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2$$

$$15. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -4, \quad b = -6, \quad c = 2 \quad 16. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = -3, \quad b = 6, \quad c = -2$$

$$17. P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = -1, \quad b = -6, \quad c = 1 \quad 18. P = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -6, \quad c = 2$$

$$19. P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 2 \quad 20. P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 3, \quad b = -6, \quad c = -2$$

$$21. P = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -4, \quad c = 4 \quad 22. P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

$$23. P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -3, \quad c = 2 \quad 24. P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -4, \quad b = 1, \quad c = 2$$

$$25. P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = -1, \quad b = -1, \quad c = 1 \quad 26. P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = 4, \quad b = 8, \quad c = 2$$

$$27. P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 2, \quad b = -2, \quad c = 2 \quad 28. P = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad a = 3, \quad b = 1, \quad c = 1$$

Adabiyotlar

- 1.«Механика сплошной среды в примерах и задачах» . Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
- 2.Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механики сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
- 3.Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
- 4.Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
- 5.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
- 6.М.А.Активес, В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. -М.:Изд. Наука.1972.

5 – MUSTAQILISH

MAVZU: KUCHLANISH TENZORI VA KUCHLANISH VEKTORI

Maqsad: Mavzu bo'yicha talabalar bilimini sinash, ko'chish va deformasiya, deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalari orasidagi munosabatlarni topish davomida ortogonal egri chiziqli koordinatalarda ishlash ko'nikmalarini hosil qilish, ularning bilimini mustahkamlash.

I. NAZARIY QISM

R E J A

1. Dekart koordinatalarida ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.
2. Silindrik koordinatalarda ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.
3. Sferik koordinatalarda ko'chish va deformasiya orasidagi munosabatlar.
4. Deformasiya va kuchlanish orasidagi munosabatlar.

Tutash muhitlar mexanikasi ma'ruzalaridan ma'lumki, deformasiyalar kichik bo'lganda chiziqlimas hadlarni hisoblamalik mumkin. Tutash muhit ko'chish vektori komponentalari va deformasiya tenzori komponentalari orasida quyidagi geometrik munosabatlar (Koshi munosabatlari) o'rinli:

Dekart koordinatalarida

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right)\end{aligned}; \quad (1)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\varphi}{r} \right), \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}\end{aligned} \quad (2)$$

Sferik koordinatalarda

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} + \frac{U_\varphi \operatorname{ctg} \varphi}{r}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}, \\ 2\varepsilon_{\theta r} &= \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} - \frac{U_\theta}{r}, \quad 2\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} - \frac{U_\theta \operatorname{ctg} \varphi}{r}.\end{aligned} \quad (3)$$

Deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalari orasida quyidagi fizik munosabatlar (Guk qonuni o'rinli):

$$\sigma_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j) \quad (4)$$

bunda dekart koordinatalarida $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, silindrik koordinatalarda $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$, sferik koordinatalarda $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}$, λ, μ - Lamé koeffitsiyentlari.

II. TORSHIRIQNI BAJARISH NAMUNASI

Masala Tutash muhit ko'chish vektori komponentalari U_i Dekart, silindrik va sferik koordinatalar sistemasida berilgan. Deformasiya va kuchlanish tenzori komponentalarini toping.

Dekart koordinatalarida

$$U_x = \frac{x^2}{y}, \quad U_y = \frac{y^2}{z}, \quad U_z = \frac{z^2}{x};$$

Silindrik koordinatalarda $U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi;$

Sferik koordinatalarda $U_r = r \sin \varphi \cos \theta, \quad U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, \quad U_\theta = r \sin \theta.$

Yechish Masalani yechishda dekart koordinatalari uchun

$$U_x = x^2 y, \quad U_y = yz, \quad U_z = xyz$$

(1) ga ko'ra deformasiya tenzori komponentalarini topamiz

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2x}{y}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{2y}{z}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{2z}{x}, \quad \varepsilon_{xy} = -\frac{x^2}{2y^2}, \quad \varepsilon_{yz} = -\frac{y^2}{2z^2}, \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{z^2}{2x^2}$$

(4) formulalardan foydalanib kuchlanish tenzori komponentalarini topamiz

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} \right) + 4\mu \frac{x}{y}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} \right) + 4\mu \frac{y}{z},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{2x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} \right) + 4\mu \frac{z}{x}, \quad \sigma_{xy} = -\mu \frac{x^2}{2y^2}, \quad \sigma_{yz} = -\mu \frac{y^2}{2z^2}, \quad \sigma_{xz} = -\mu \frac{z^2}{2x^2}$$

Silindrik koordinatalarda

$$U_r = r \sin \varphi, \quad U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, \quad U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

(2) ga ko'ra deformasiya tenzori komponentalarini topamiz

$$\varepsilon_{rr} = \sin \varphi, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{z^2}{r^2} \sin \varphi, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{r^2}{z^2} \cos \varphi, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z^2}{r^2} \right) \cos \varphi,$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{2z}{r} \cos \varphi - \frac{r}{z} \sin \varphi \right), \quad \varepsilon_{zr} = \frac{r}{z} \cos \varphi$$

(4) formulalardan foydalanib kuchlanish tenzori komponentalarini topamiz

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda \left(\sin \varphi - \frac{z^2}{r^2} \sin \varphi - \frac{r^2}{z^2} \cos \varphi \right) + 2\mu \sin \varphi, & \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(1 - \frac{2z^2}{r^2} \right) \cos \varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left(\sin \varphi - \frac{z^2}{r^2} \sin \varphi - \frac{r^2}{z^2} \cos \varphi \right) - 2\mu \frac{z^2}{r^2} \sin \varphi, & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{2z}{r} \cos \varphi - \frac{r}{z} \sin \varphi \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\sin \varphi - \frac{z^2}{r^2} \sin \varphi - \frac{r^2}{z^2} \cos \varphi \right) - 2\mu \frac{r^2}{z^2} \sin \varphi, & \sigma_{zr} &= \mu \frac{r}{z} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Сферик координаталарда

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, \quad U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, \quad U_\theta = r \sin \theta$$

(2) га ко'ра деформация тензори компоненталарини топамиз

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \sin \varphi \cos \theta, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \varphi} + \sin \varphi \cos \theta + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\sin \varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta, \quad \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} (\sin \theta + \operatorname{ctg} \varphi - \cos \theta), \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \varphi \cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} \varphi)\end{aligned}$$

(4) формулалардан фойдаланиб кучланish тензори компоненталарини топамиз

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda \left(2 \sin \varphi \cos \theta + \frac{\cos \theta}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\sin \varphi} \right) + 2\mu \sin \varphi \cos \theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda \left(2 \sin \varphi \cos \theta + \frac{\cos \theta}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\sin \varphi} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \left(2 \sin \varphi \cos \theta + \frac{\cos \theta}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\sin \varphi} \right) + 2\mu \left(\frac{\cos \theta}{\sin \varphi} + \sin \varphi \cos \theta + \frac{\cos^2 \varphi \sin \theta}{\sin \varphi} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \cos \varphi \cos \theta, \quad \sigma_{\theta r} = \mu (\sin \theta + \operatorname{ctg} \varphi - \cos \theta), \quad \sigma_{\theta\varphi} = \mu (\operatorname{ctg} \varphi \cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} \varphi)\end{aligned}$$

Адабийотлар

1. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. - М. : Изд. МГУ, 1973 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.

5 – MUSTAQIL ISH VARIANTLARI

koordinatalarida

$$U_x = -\frac{y^2}{x+z}, U_y = \frac{z^2}{x+y}, U_z = \frac{z^2}{x+y};$$

$$U_x = \frac{z^2}{x+z}, U_y = \frac{x^2}{z+y},$$

$$U_x = -\frac{y^2}{z}, U_y = \frac{z^2}{y},$$

$$U_x = \frac{z^2}{x+y}, U_y = \frac{y^2}{x+z},$$

$$U_x = \frac{y^2}{x+z}, U_y = \frac{z^2}{x^2+y^2},$$

$$U_x = \frac{zy^2}{x^2}, U_y = \frac{z^2}{x+y},$$

$$U_x = \frac{y^2}{x+z}, U_y = \frac{x^2+y^2}{x+y},$$

$$U_x = \frac{yz}{x}, U_y = \frac{xy}{z},$$

$$U_x = \frac{xz}{y}, U_y = \frac{xy}{z},$$

$$U_x = \frac{xy}{z}, U_y = \frac{xz}{y},$$

$$U_x = -\frac{yx}{z}, U_y = \frac{yz}{x},$$

$$U_x = \frac{xy^2}{z^2}, U_y = \frac{yz^2}{x^2},$$

$$U_x = \frac{x^2y}{z^2}, U_y = \frac{yz^2}{x^2},$$

$$U_x = \frac{x^2z}{y^2}, U_y = \frac{yx^2}{z^2},$$

$$U_x = \frac{zy}{x}, U_y = \frac{xz}{y},$$

Silindrik koordinatalarda

$$U_r = r \cos \varphi, U_\varphi = r \sin \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi, U_z = -r \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = r \sin \varphi, U_z = r \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = -r \sin \varphi, U_z = z \sin \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = r \sin^2 \varphi, U_z = z \cos^2 \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = r \cos \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin^2 \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = z \cos^2 \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{z^2}{r} \cos \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi, U_z = z \cos^2 \varphi$$

$$U_r = r \cos^2 \varphi, U_\varphi = (r+z) \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \sin \varphi$$

$$U_r = (r+z) \sin \varphi, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_z = r \cos \varphi$$

$$U_r = \left(r + \frac{z^2}{r}\right) \sin \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \sin \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z} \cos \varphi, U_z = -z \sin^2 \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \cos \varphi, U_\varphi = r \sin^2 \varphi, U_z = (z+r) \cos \varphi$$

Sferik koordinatalarda

$$U_r = r \sin \varphi \sin \theta, U_\varphi = r \sin \varphi \cos \theta, U_\theta = r \sin \theta$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = -r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \cos \varphi \cos \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \cos^2 \varphi$$

$$U_r = r \cos^2 \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = -r \sin^2 \theta$$

$$U_r = -r \cos^2 \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos^2 \varphi \sin \theta, U_\theta = -r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_\theta = -r \cos \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$U_r = r \cos^2 \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = -r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = -r \sin^2 \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = -r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \sin \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = -r \cos^2 \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2y}{z^2}, U_z = \frac{zx^2}{y^2};$$

$$\frac{yz^2}{x^2}, U_z = \frac{xy^2}{z^2};$$

$$\frac{yx^2}{z^2}, U_z = \frac{xz^2}{y^2};$$

$$\frac{z^3}{y}, U_z = \frac{x^3}{zy};$$

$$\frac{y^2}{z}, U_z = \frac{z^3}{xy};$$

$$\frac{y^2z}{x^2}, U_z = \frac{x^2y^2}{z^3};$$

$$\frac{yz}{x}, U_z = -\frac{xy}{z};$$

$$= -\frac{x^2y^2}{z^3}, U_z = \frac{y^2z^2}{x^3};$$

$$= \frac{yz}{x}, U_z = \frac{y^2}{z+x};$$

$$= \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_z = \frac{z^2}{x+y};$$

$$= \frac{x^3}{y^2+z^2}, U_z = \frac{y^2}{x+z};$$

$$= \frac{y^2}{x+z}, U_z = \frac{x^2}{z+y};$$

$$= \frac{z^2}{x+y}, U_z = \frac{y^2}{x+z};$$

$$= \frac{z^2+y^2}{z}, U_z = \frac{y^2+z^2}{x};$$

$$= \frac{y^2+z^2}{x}, U_z = \frac{x^2}{z};$$

$$U_r = r \, ch^2 \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} sh \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_\varphi = r \sin^2 \varphi, U_z = z \sin \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z} \cos \varphi, U_z = \frac{z^2}{r} \sin \varphi$$

$$U_r = r \, ch \varphi, U_\varphi = -\frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} sh \varphi$$

$$U_r = \left(r - \frac{r^2}{z} \right) \sin \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} ch \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_\varphi = z \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} ch \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos \varphi$$

$$U_r = r \, sh \varphi, U_\varphi = \frac{z^2}{r} \cos \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \cos^2 \varphi$$

$$U_r = \frac{z^2}{r} \sin \varphi, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_z = -z \cos \varphi$$

$$U_r = z \sin^2 \varphi, U_\varphi = r \cos \varphi, U_z = r(\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_\varphi = -r \sin^2 \varphi, U_z = z \sin \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{z} \sin \varphi, U_z = \frac{z^2}{r} ch \varphi$$

$$U_r = \frac{r^2}{z} \cos \varphi, U_\varphi = r \cos^2 \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} \sin \varphi$$

$$U_r = -r \sin \varphi, U_\varphi = \frac{r^2}{r} \cos^2 \varphi, U_z = \frac{r^2}{z} ch \varphi$$

$$U_r = -r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos^2 \varphi \sin \theta, U_\theta = r s \sin^2 \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r sh \varphi \cos \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi, U_\theta = -r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin^2 \theta$$

$$U_r = r sh \varphi ch \theta, U_\varphi = r ch^2 \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \cos^2 \theta, U_\varphi = -r \cos^2 \varphi, U_\theta = -r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = -r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = -r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = -r \sin^2 \theta$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin^2 \theta, U_\varphi = -r \cos^2 \varphi, U_\theta = r \sin^2 \theta$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r ch^2 \varphi \sin \theta, U_\theta = r sh \theta \cos \varphi$$

$$U_r = -r \sin^2 \varphi, U_\varphi = r sh^2 \theta, U_\theta = r sh \theta ch \varphi$$

$$U_r = r \cos^2 \theta, U_\varphi = r \cos \varphi \sin \theta, U_\theta = r \sin^2 \theta$$

$$U_r = r \sin \varphi sh \theta, U_\varphi = -r \cos^2 \varphi \sin \theta, U_\theta = r sh \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r(ch \varphi - sh \theta), U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$U_r = r \sin \varphi \cos \theta, U_\varphi = r(\cos \varphi - \sin \theta), U_\theta = r \sin \theta \cos \varphi$$

1. Tezliklar maydoni;
2. Uzviylik tenglamasi;
3. Tezliklar maydoni uyurmasi;
4. Tezlanishlar maydoni;
5. Nav'e-Stoks qonuni.

Asosiy tushunchalar

Tezliklar maydoni koordinatalar va vaqtdan bog'liq bo'lsin. Tutash muhitning berilgan tezliklar maydoni uchun uzviylik tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun esa

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2)$$

Bu tenglama Dekart koordinatalar sistemasida ushbu ko'rinishni oladi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

Silindrik koordinatalarda

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U_\varphi)}{\partial \varphi} + r \frac{\partial(\rho U_z)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(U_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Sferik koordinatalarda

$$r^2 \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sin \varphi \frac{\partial(\rho U_r r^2)}{\partial r} + r \frac{\partial(\rho U_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + r \frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

Siqilmaydigan suyuqlik uchun

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(U_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(U_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\rho U_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

Tezlik vektori uyurmasi Dekart koordinatalarida

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (9)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right] \quad (10)$$

Sferik koordinatalarda

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2r \sin \varphi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\theta \sin \varphi) - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta \right] \quad (11)$$

Tezlanish vektori komponentalari Dekart koordinatalarida

$$a_j = \frac{\partial V_j}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \quad (12)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r}, \\ a_\varphi &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r}, \\ a_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}; \end{aligned} \quad (13)$$

Sferik koordinatalarda

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\varphi^2 + V_\theta^2}{r}, \\ a_\varphi &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\varphi - V_\theta^2 \text{ctg} \varphi}{r}, \\ a_\theta &= \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta + \text{ctg} \varphi V_\varphi V_\theta}{r}; \end{aligned} \quad (14)$$

Deformasiya tezliklari tenzori Dekart koordinatalarida

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), \\ e_{xz} &= e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Silindrik koordinatalarda

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}, e_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right), \\ 2e_{\varphi z} &= \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi}, 2e_{rz} = \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \end{aligned} \quad (16)$$

Sferik koordinatalarda

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}, e_{\theta\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\varphi \operatorname{ctg} \varphi}{r}, 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r}, \\ 2e_{\theta r} &= \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta}{r}, 2e_{\theta\varphi} = \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\theta \operatorname{ctg} \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Navye-Stoks qonuni

$$p_{ij} = -pg_{ij} + \lambda g_{ij} \operatorname{div} \vec{V} + 2\mu e_{ij} \quad (18)$$

Masala **Berilgan tezliklar maydoni** $\vec{V} = \left(\frac{Ax^2}{y} \sin \omega t, \frac{By^2}{z} \cos \omega t, \frac{Az^2}{x} \sin \omega t \right)$ **uchun tutash muhit zichligi o'zgarishini aniqlang, uyurma vektorini, tezlanishni va kuchlanish tenzori komponentalarini aniqlang.**

Yechish Zichlikning o'zgarishini topish uchun uzviylik tenglamasidan foydalanamiz. Tezliklar maydoni divergensiyasini topamiz

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{2Ax}{y} \sin \omega t + \frac{2By}{z} \cos \omega t + \frac{2Az}{x} \sin \omega t \neq 0$$

Demak, muhitsiqilmasekan.

(9) gako'ratezliklarmaydoniuyurmasinitopamiz

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{Ax^2}{y} \sin \omega t & \frac{By^2}{z} \cos \omega t & \frac{Az^2}{x} \sin \omega t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{By^2}{z^2} \cos \omega t \vec{i} + \frac{Az^2}{x^2} \sin \omega t \vec{j} + \frac{Bx^2}{y^2} \sin \omega t \vec{k} \right)$$

tezlanish vektori komponentalari

$$a_x = \frac{Ax^2\omega}{y} \cos \omega t + \frac{2A^2x^3}{y} \sin^2 \omega t - \frac{ABx}{2z} \sin 2\omega t$$

$$a_y = -\frac{By^2\omega}{z} \sin \omega t + \frac{2B^2y^3}{z^2} \cos^2 \omega t - \frac{ABy^2}{2x} \sin 2\omega t$$

$$a_z = \frac{Az^2\omega}{x} \cos \omega t - \frac{A^2z^2}{y} \sin^2 \omega t + \frac{2A^2z^2}{x^2} \sin^2 \omega t$$

Deformasiya tezliklari tenzori komponentalari

$$e_{xx} = \frac{2Ax}{y} \sin \omega t, \quad e_{yy} = \frac{2Ay}{z} \cos \omega t, \quad e_{zz} = \frac{2Az}{x} \sin \omega t, \quad e_{xy} = e_{yx} = -\frac{Ax^2}{2y^2} \sin \omega t,$$

$$e_{xz} = e_{zx} = -\frac{Az^2}{2x^2} \sin \omega t, \quad e_{yz} = e_{zy} = -\frac{By^2}{2z^2} \cos \omega t$$

Kuchlanish tenzori komponentalari

$$p_{xx} = -p + \lambda \left(\frac{2Ax}{y} \sin \omega t + \frac{2By}{z} \cos \omega t + \frac{2Az}{x} \sin \omega t \right) + \frac{4\mu Ax}{y} \sin \omega t,$$

$$p_{yy} = -p + \lambda \left(\frac{2Ax}{y} \sin \omega t + \frac{2By}{z} \cos \omega t + \frac{2Az}{x} \sin \omega t \right) + \frac{4\mu Ay}{z} \cos \omega t,$$

$$p_{zz} = -p + \lambda \left(\frac{2Ax}{y} \sin \omega t + \frac{2By}{z} \cos \omega t + \frac{2Az}{x} \sin \omega t \right) + \frac{4\mu Az}{x} \sin \omega t,$$

$$p_{xy} = -\frac{\mu Ax^2}{y^2} \sin \omega t, \quad p_{xz} = -\frac{\mu Az^2}{x^2} \cos \omega t, \quad p_{yz} = -\frac{\mu Ay^2}{z^2} \sin \omega t,$$

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

**ANDIJON
DAVLAT
UNIVERSITETI**



FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

3.«TUTASH MUHIT MEXANIKASI»

FANINING MUSTAQIL TA'LIM UCHUN MATERIALLARI

ANDIJON – 2020

TOPSHIRIQ

Berilgantezliklarmaydoni $\vec{V} = (V_i)$ uchun Dekart, tezlanishnivakuchlanishtenzorikomponentalarinaniqlang.

silindrikvasferikkoodinatalardatutashmuhitzichligio'zgarishinianiqlang,

uyurmavektorini,

1. $V_x = A \frac{y^2}{x} \sin \omega t, V_y = A \frac{yz}{x} \sin \omega t, V_z = A \frac{xy}{z} \sin \omega t; V_r = -Ar \sin \varphi \sin \omega t, V_\varphi = A \frac{r^2}{z} \cos^2 \varphi \sin \omega t, V_z = A \frac{r^2}{z} \sin \varphi \sin \omega t$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar (\cos \varphi - \sin \theta) \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$2. \quad V_x = \frac{xy}{tz}, V_y = \frac{x^2 + y^2}{tz}, V_z = \frac{y^2 + z^2}{tx};$$

$$V_r = \frac{r^2}{tz} \cos \varphi, V_\varphi = \frac{r}{t} \cos^2 \varphi, V_z = \frac{r^2}{tz} \sin \varphi$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar (ch\varphi - sh\theta) \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$3. \quad V_x = \frac{x^2}{(y+z)t}, V_y = \frac{z^2}{(x+y)t}, V_z = \frac{y^2}{(x+z)t}; V_r = Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = A \frac{r^2}{z} \sin \varphi \cos \omega t, V_z = A \frac{z^2}{r} ch\varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi sh\theta \cos \omega t, V_\varphi = -Ar \cos^2 \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar sh\theta \cos \varphi \cos \omega t$$

$$4. \quad V_x = A \frac{x^3}{y^2 + z^2} \sin \omega t, V_y = A \frac{y^2}{x+z} \sin \omega t, V_z = \frac{Ax^2}{z+y} \sin \omega t; V_r = \frac{r^2}{tz} \sin \varphi, V_\varphi = -\frac{r}{t} \sin^2 \varphi, V_z = \frac{z}{t} \sin \varphi$$

$$V_r = Ar \cos^2 \theta \sin \omega t, U_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, U_\theta = Ar \sin^2 \theta \sin \omega t$$

$$5. \quad V_x = -\frac{xy}{tz}, V_y = \frac{x^3}{(y^2 + z^2)t}, V_z = \frac{y^2}{(x+z)t}; V_r = Az \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \omega t, V_z = Ar (\cos \varphi - \sin \varphi) \sin \omega t$$

$$V_r = -Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar sh^2 \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar sh\theta ch\varphi \sin \omega t$$

$$6. \quad V_x = \frac{x^2 y}{tz^2}, V_y = \frac{x^3}{(y^2 + z^2)t}, V_z = \frac{z^2}{(x+y)t}; V_r = \frac{Az^2}{r} \sin \varphi \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos^2 \varphi \cos \omega t, V_z = -Az \cos \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Arch^2 \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar sh\theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$7. \quad V_x = \frac{xy}{(z+y)t}, V_y = \frac{yz}{tx}, V_z = \frac{y^2}{t(z+x)}; V_r = Ar sh\varphi \sin \omega t, V_\varphi = A \frac{z^2}{r} \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \cos^2 \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin^2 \theta \sin \omega t, V_\varphi = -Ar \cos^2 \varphi \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin^2 \theta \sin \omega t$$

$$8. \quad V_x = \frac{x^2 y}{tz^2}, V_y = -\frac{x^2 y^2}{tz^3}, V_z = \frac{y^2 z^2}{tx^3}; V_r = \frac{r^2}{tz} \sin \varphi, V_\varphi = \frac{z^2}{tr} ch\varphi, V_z = \frac{r^2}{tz} \cos \varphi V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$9. \quad V_x = \frac{x^2}{ty}, V_y = \frac{z^3}{txy}, V_z = \frac{x^3}{tzy};$$

$$V_r = \frac{r}{t} ch\varphi, V_\varphi = -\frac{z^2}{tr} \cos \varphi, V_z = \frac{r^2}{tz} sh\varphi V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$10. \quad V_x = \frac{x^3}{tyz}, V_y = \frac{y^2}{tz}, V_z = \frac{z^3}{txy}; V_r = A \left(r - \frac{r^2}{z} \right) \sin \varphi \sin \omega t, V_\varphi = \frac{Az^2}{r} \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} ch\varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \cos^2 \theta \cos \omega t, V_\varphi = -Ar \cos^2 \varphi \cos \omega t, V_\theta = -Ar \sin \theta \cos \varphi \cos \omega t$$

$$11. \quad V_x = \frac{yx^2}{tz^2}, V_y = \frac{y^2 z}{tx^2}, V_z = \frac{x^2 y^2}{tz^3};$$

$$V_r = \frac{r^2}{tz} \sin \varphi, V_\varphi = Az \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{r^2}{tz} \cos \varphi$$

$$V_r = -Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = -Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = -Ar \sin^2 \theta \sin \omega t$$

$$12. \quad V_x = \frac{y^2}{xt}, V_y = \frac{yz}{xt}, V_z = \frac{xy}{zt}; V_r = Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos^2 \varphi \sin \omega t, V_z = A \frac{r^2}{z} \cos \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \cos \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \cos \omega t$$

$$13. \quad V_x = \frac{xz}{ty}, V_y = -\frac{yx}{tz}, V_z = \frac{yz}{tx}; V_r = Ar \cos^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = A(r+z) \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \sin \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \cos \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \sin \varphi \cos \omega t$$

$$14. \quad V_x = \frac{x^2 y}{tz^2}, V_y = \frac{xy^2}{tz^2}, V_z = \frac{yz^2}{tx^2}; V_r = A(r+z) \sin \varphi \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos^2 \varphi \cos \omega t, V_z = Ar \cos \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$15. \quad V_x = \frac{xy^2}{tz^2}, V_y = \frac{x^2 y}{tz^2}, V_z = \frac{yz^2}{tx^2}; V_r = A \left(r + \frac{z^2}{r} \right) \sin \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \sin \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = -Ar \sin^2 \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = -Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$16. \quad V_x = \frac{yz^2}{tx^2}, V_y = \frac{x^2 z}{ty^2}, V_z = \frac{yx^2}{tz^2}; V_r = Ar \sin^2 \varphi \cos \omega t, V_\varphi = \frac{Ar^2}{z} \cos \varphi \cos \omega t, V_z = -Az \sin^2 \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$17. \quad V_x = \frac{xy}{tz}, V_y = \frac{zy}{tx}, V_z = \frac{xz}{ty}; V_r = \frac{r^2}{tz} \cos \varphi, V_\varphi = Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_z = A(z+r) \cos \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = -Ar \cos^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin^2 \theta \sin \omega t$$

$$18. \quad V_x = \frac{y^2}{tx}, V_y = \frac{yz}{tx}, V_z = \frac{xy}{tz};$$

$$V_r = Ar \sin^2 \varphi \cos \omega t, V_\varphi = \frac{Az^2}{r} \cos \varphi \cos \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \sin \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = -Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos^2 \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$19. \quad V_x = \frac{zy^2}{tx^2}, V_y = \frac{yz^2}{tx^2}, V_z = \frac{xy^2}{tz^2}; V_r = \frac{Ar^2}{z} \sin \varphi \cos \omega t, V_\varphi = Ar \sin^2 \varphi \cos \omega t, V_z = Az \sin \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = -Ar \cos \varphi \sin \omega t, V_\theta = -Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$20. \quad V_x = \frac{zy^2}{tx^2}, V_y = \frac{yx^2}{tz^2}, V_z = \frac{xz^2}{ty^2}; V_r = Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = \frac{Ar^2}{z} \cos \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Az^2}{r} \sin \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \cos \omega t, V_\varphi = -Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \sin \omega t$$

$$21. \quad V_x = \frac{x^2}{(y+z)t}, V_y = -\frac{y^2}{(x+z)t}, V_z = \frac{z^2}{(x+y)t}; V_r = Ar \cos \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \sin \varphi \sin \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \cos \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \sin \theta \cos \omega t, V_\varphi = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \omega t$$

$$22. \quad V_x = \frac{y^2}{xt}, V_y = \frac{z^2}{t(x+z)}, V_z = \frac{x^2}{(z+y)t}; V_r = Ar \sin \varphi \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \cos \omega t, V_z = -Ar \cos \varphi \sin \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \cos \omega t, V_\theta = Ar \cos \varphi \sin \omega t$$

$$23. \quad V_x = \frac{x^3}{(y^2 + z^2)t}, V_y = -\frac{y^2}{tz}, V_z = \frac{z^2}{ty}; V_r = Ar \operatorname{sh} \varphi \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \cos \omega t, V_z = \frac{Ar^2}{z} \cos \varphi \cos \omega t$$

$$V_r = Ar \sin \varphi \cos \theta \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \sin \omega t$$

$$24. \quad V_x = \frac{x^2}{(y+z)t}, V_y = \frac{z^2}{(x+y)t}, V_z = \frac{y^2}{(x+z)t}; V_r = Ar \operatorname{ch} \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \sin \varphi \sin \omega t, V_z = Ar \cos \varphi \sin \omega t;$$

$$V_r = -Ar \sin \varphi \cos \theta \cos \omega t, V_\varphi = Ar \cos^2 \varphi \cos \omega t, V_\theta = Ar \sin \theta \cos \varphi \cos \omega t.$$

$$25. \quad V_x = \frac{x^3}{ty^2}, V_y = \frac{y^2}{(x+z)t}, V_z = \frac{z^3}{(x^2 + y^2)t}; V_r = Ar \sin \varphi \cos \omega t, V_\varphi = -Ar \operatorname{ch} \varphi \cos \omega t, V_z = Az \sin \varphi \cos \omega t;$$

$$V_r = Ar \sin^2 \varphi \sin \omega t, V_\varphi = Ar \cos \varphi \sin \theta \sin \omega t, V_\theta = Ar \operatorname{sh} \theta \cos \varphi \sin \omega t;$$

$$26. \quad V_x = \frac{yx^2}{tz^2}, V_y = \frac{zy^2}{tx^2}, V_z = \frac{z^2}{(x+y)t}; V_r = Ar \sin^2 \varphi e^{-\omega t}, V_\varphi = Ar \sin^2 \varphi e^{-\omega t}, V_z = Az \cos^2 \varphi e^{-\omega t};$$

$$V_r = Ar \cos \varphi \cos \theta e^{-\omega t}, V_\varphi = -Ar \cos \varphi \sin \theta e^{-\omega t}, V_\theta = Ar \cos^2 \varphi e^{-\omega t}$$

Adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973 г. В 2-х томах.
2. «Механика сплошной среды в примерах и задачах». Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г.
3. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974 г.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 310 с.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

KURS ISHLARI MAVZULARI VA ULARNI BAJARISH BO'YICHA TAVSIYALAR

Kurs ishining maqsadi talabalarni mustaqil ishlash qobiliyatini rivojlantirish, olgan nazariy bilimlarini mustahkamlash, amaliy ishlarga qo'llash ko'nikmalarini hosil qilish. Kurs ishini bajarishda nazariy bilimlarni mustaqil tahlil qilish, tanlangan mavzuga oid adabiyotlardan foydalanish ko'nikmasini hosil qilish.

- Kurs ishlarida o'qitilgan mavzularni chuqurroq o'rganilishi va ularga doir kamida o'nta yangi masala yechilishi shart;
- *Kurs ishi ustida ishlash tartibi*: mavzuni tanlash; mavzu bo'yicha asosiy manbalarni o'rganish; zaruriy materiallarni konspektlashtirish; tadqiqot rejasini tuzish; yig'ilgan materiallarni tartibga solish va yozish; foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatini rasmiylashtirish; kurs ishini rasmiylashtirish;
- *Kurs ishini rasmiylashtirish tartibi*: A4 shakldagi qog'ozga 12-shrift, 1,5 interval, qog'ozning bir tomonida chapdan – 3 sm, o'ngdan – 1,5 sm, yuqori va pastdan – 2 sm xoshiya qoldiriladi; matn sahifalariga tartib raqami beriladi, 1-titul varag'i, 2-reja, 3-betdan boshlab sahifalanadi;
- *Kurs ishining hajmi* 20-25 betdan oshmasligi lozim;
- *Kurs ishi matnini rasmiylashtirish tartibi*: titul varag'i; ish rejasi; kirish; asosiy qism (kamida 3 ta banddan iborat bo'lishi lozim); xulosa; foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati; ilova (jadval, diagramma, grafik, rasm, sxema va hokazo).

Kurs ishining mavzulari

1. Eyler va uzluksizlik tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
2. Silliq quvurlarda qarshilik formulalari.
3. Laplas formulasi.
4. Anizotrop materiallar uchun Guk qonunini xususiy hollari.
5. Vektor maydoni xossalari va Stoks, Gauss-Ostragradskiy formulalari.
6. Jismni suyuqlikdagi harakati kinematikasi masalasi.
7. Cheksiz katta massali ideal suyuqlikda jism harakati, unga ta'sir kuchi.
8. Tekis to'liqlar, progressiv to'liqlar.
9. Ichki bosimli ekscentrik quvurlarda kuchlanish taqsimoti.
10. Uyumma vektori, Bio-Savar formulasi. Uyumma vektorlar tizimi.
11. Kulon ishqalanishidagi kvazistatik yuklanish.
12. Jemichkin masalasi (egri to'sin egilishi masalasi).
13. Elastik-plastik sterjenlar buralishiga doir masala tahlili.
14. Elastik-plastik sterjenlar egilishiga doir masala tahlili.
15. Trubaning ichki va tashqi bosimlari uchun (Lyame masalasi) kuchlanish tenzori va uning fizik komponentalari.
16. Tekis kuchlanganlik holati uchun elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi.
17. Chekli deformatsiyalanish holati kuchlanish tenzori.
18. Yopishqoq suyuqlik modeli.
19. Qayishqoq-elastik jism modeli
20. Plastik jism modeli
21. Umumlashgan Guk qonuni
22. T.M.M. masalalarining qo'yilishi umumiy asoslari.
23. T.M.M. masalalariva chiziqlashtirilgan tenglamalari.
24. Ikki parametrli muhitlar termodinamik potentsiallari.
25. Qaytar jarayonlarda aralashmalarni modellashtirish.
26. Qaytmaz jarayonlarda aralashmalarni modellashtirish.

BITIRUV MALAKAVIY ISHLAR BANKI

1. Og'irlik kuchini hisobga olgan holda suyuqliklarda sirt to'liqini tarqalishini tadqiq etish;
2. Yopishqoq suyuqlikning aylanma harakat tenglamalari va uning yechimlari;
3. Tutash muhit uzilish sirtlariga doir amaliy masalalar;
4. Og'ir suyuqliklarda sirt to'liqini tarqalishi
5. Qayishqoq-elastik material deformatsiyalarini sodda mexanik modellar yordamida o'rganish
6. Ixtiyoriy ko'ndalang kesimli prizmatik brusning buralishi
7. Silindrik sterjenda bo'ylama to'liqin tarqalishini Poxgammer tenglamasi bo'yicha tahlil qilish
8. Silindrik strejenda buralma to'liqin tarqalishini Poxgammer tenglamasi bo'yicha tahlil qilish
9. Qattiq jismning suyuqlik sirtiga kelib urilishi va unga botishi
10. Erkinlik darajasi chekli sistema harakat tenglamalarining ko'p qavatli bino tebranishlarini o'rganishga tadbiri;
11. Ko'ndalang kesimi o'zgaruvchan bir jinslimas sterjenda bo'ylama to'liqin tarqalishi.
12. Silindrik qobiqning ko'ndalang tebranishlariga uning ichidagi suyuqlikning ta'siri
13. Ko'p qatlamli balkaning ko'ndalang ;
14. Elastik sferik qobiqning tashqi kuch ta'sirida deformatsiyalanishi;
15. Ikki qatlamli silindrik qobiq tebranishlari;
16. Elastik sharning radial tebranishlari;

17. Bo'ylama yo'nalishda harakatlanuvchi egiluvchan sterjenning ko'ndalang tebranishlari;
18. Suyuqlik oqimida joylashgan doiraviy elastik sterjenning ko'ndalang tebranishlari;
19. Ko'p qatlamli balkaning o'q bo'ylab qo'yilgan kuch ta'sirida egilishi;
20. Balka ko'ndalang tebranishlarini turli mexanik effektlarni hisobga olgan holda tahlil qilish;
21. Ichidan suyuqlik oqib o'tuvchi silindrik qobiqning tebranishlari;
22. Tashqi kuchning turli ko'rinishlarida doiraviy plastinka o'qqa nisbatan simmetrik egilishi;
23. Prizmatik brusning egilishini sonli tahlil qilish
24. Simmetriya o'qi atrofida aylanuvchi transversal-izotrop doiraviy sterjenning buralma tebranishlari
25. Harakatlanuvchi yuklanish ta'sirida balkaning ko'ndalang tebranishlari
26. Balka tebranishlariga tayanch silkinishining ta'siri
27. Aylanuvchi doiraviy silindrik transversal-izotrop qobiqning buralma tebranishlari
28. Aylanuvchi doiraviy silindrik qobiqning buralma tebranishlariga qovushoq-elastiklik xususiyatining ta'siri
29. Ichki bosim ta'sirida quvurning elastik-plastik deformatsiyalanishi
30. To'g'ri to'rtburchakli va doiraviy membrana tebranishlari

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

**ANDIJON
DAVLAT
UNIVERSITETI**



FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIKA» KAFEDRASI

3.«TUTASH MUHIT MEXANIKASI»

FANI BO'YICHA GLOSSARIY

ANDIJON – 2020

GLOSSARIY (lug'at, sharhlar, izohlar)

АТМОСФЕРА – Yer yuzidagi og'irlik kuchi ta'sir qiluvchi havo qatlami.

ВАКУУМ–*vakuum*; berk idishdagi havoning yoki gazning atmosfera bosimiga nisbatan siyraklashgan holati: $P_v = P_{atm} - P_t$, bu yerda P_{at} – atmosfera havo bosimi; P_t – to'la bosim.

ВЯЗКАЯЖИДКОСТЬ– *qovushoq suyuqlik*; harakati jara-yonida suyuqlik zarrachalarining deformatsiyalanishidan bog'liq ham normal va ham urinma kuchlanishlari paydo bo'ladigan suyuqlik.

ВЯЗКОСТЬ– *qovushoqlik (ichki gidravlik ishqalanish kuchi)*; suyuqlikning uning zarrachalari nisbiy harakatiga qarshilik ko'rsatish xossasi, boshqacha aytganda, suyuqlik bir bo'lagining boshqa bir bo'lagi harakatiga qarshilik ko'rsatuvchanlik xossasi. Suyuqlikning qovushoqligi harorat (u oshganda suyuqlikning qovushoqligi kamayadi, gazniki esa oshadi va aksincha) va bosimdan bog'liq bo'lib, u uchta miqdor bilan baholanadi: dinamik koeffitsiyent (μ , N·s/m²), kinematik koeffitsiyent (ν , m²/s), Engler gradusi (°E). Qovushoqlik ikki turga ajraladi: hajmiy va tangensial qovushoqliklar. Hajmiy qovushoqlik deb suyuqlikning o'zida cho'zuvchi zo'riqishlarini paydo qilish xususiyatiga aytiladi. Masalan, suvning bunday qovushoqligi unda tovush va asosan ultratovush to'lqinlar tarqalganda namoyon bo'ladi. Tangensial qovushoqlik suyuqlikning siljish zo'riqishlariga qarshilik ko'rsatish xususiyatini xarakterlaydi.

ГИДРОСТАТИКА – *gidrostatika*;bu suyuqlik va gazlar mexanikasi fanining tanlangan koordinata boshiga nisbatan suyuqlik muvozanati va suyuqlikka to'la yoki qisman botirilgan qattiq jism muvozanatini o'rganuvchi bo'limi.

ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ– *gidrostatik bosim*; gidrostatik kuchning u ta'sir qilayotgan yuzaga nisbating shu yuza nolga intilgandagi limiti gidrostatik bosim deyiladi yoki tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan muvozanat (tinch) holatda turgan suyuqlikdagi bosim.

ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ– *bosh kuchlanishlar*; qaralayotgan nuqtada kuclanishning bosh o'qlariga perpendikulyar yuzalardagi normal kuchlanishlar.

ГЛАВНЫЕ ОСИ ДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiyalarning bosh o'qlari*; berilgan nuqta orqali o'tuvchi va suyuqlik zarrachalarining deformatsiyasi natijasida o'zaro perpendikulyar bo'lib qola-digan uchta chiziqli elementlari bilan mos keluvchi uchta o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.

ГЛАВНЫЕ ОСИ НАПРЯЖЕНИЙ– *kuchlanishlarning bosh o'qlari*; fazoning berilgan nuqtasi orqali o'tuvchi, urinma kuchlanishlari nolga teng bo'lgan o'zaro perpendikulyar uchta tekisliklar normallari bo'yicha yo'nalgan uchta to'g'ri chiziq.

ДВИЖЕНИЕ НЕ РАВНОМЕРНОЕ– *notekis harakat*; oqimning turlicha kesimida tezlik miqdori turlicha bo'lgan harakat.

ДВИЖЕНИЕ НЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ– *beqaror (nobarqaror) harakat*; harakatlanayotgan suyuqlik zarrachalarining tezligi miqdori va uning yo'nalishi vaqt bo'yicha o'zgarib turadigan hol.

ДВИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНОЕ или ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОЕ– *tekis yoki oqimlari parallel harakat*; bu shunday harakatki, unda harakat kesimi tezlik epyurasining shakli va o'lchamlari berilgan vaqtda oqim bo'yicha o'zgarmaydi.

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ или ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ– *turbulent harakat yoki turbulent tartibli harakat*.

ДИВЕРГЕНЦИЯ – *divergensiya*; tarqalish (berilgan nuqtadagi vektor maydon oqimining o'zgarishini tavsiflovchi kattalik).

ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ или КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ– *yopishqoqlik (qovu-shoqlik) dinamik koeffitsiyenti yoki yopishqoqlik (qovushoqlik) koeffitsiyenti*; (yoki Nyuton suyuqligi urinma kuchlanishlarining deformatsiya tezliklari tenzori orqali $\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$) ifodasiga kiruvchi proporsionallik koeffitsiyenti, bunda τ – harakatlanayotgan suyuqlikdagi urinma kuchlanish; Bu koeffitsiyent temperaturadan kuchli darajada bog'liq, bosimdan esa deyarli bog'liq emas.

ДИФФУЗИЯ – *diffuziya*; issiqlik harakati natijasida idishdagi ikki aralashuvchan suyuqliklar molekularining ajralish sirti orqali asta sekin biridan ikkinchisiga o'tishi hodisasi (natijada suyuq-liklar o'zaro aralashishadi). Bu hodisa boshqa agregan holatidagi moddalarda ham sodir bo'ladi.

ЖИДКОСТЬ– *suyuqlik*; moddaning agregat holatlaridan biri bo'lib, xoxlagancha kichik kuch ta'sirida o'z shaklini o'zgartirish xususiyatiga ega uzluksiz muhit (fizik jism), ya'ni oquvchanlik xossasiga ega va o'z shakliga ega bo'lmagan ixtiyoriy muhit. *Izoh*: gaz «siqiluvchan suyuqlik» (havo, kislorod, azot, propan va hokazo) deb atalgan holda suyuqlikni gazdan ajratish maqsadida «tomchili suyuqlik» (suv, neft, kerosin, yog' va hokazo) atamasi ishlatiladi. Tomchili suyuqliklar (sodda qilib, suyuqliklar) va gazsimon suyuqliklar (gazlar) bir biridan siqiluvchanlik (hajmini o'zgartiruvchanlik) xususiyati bilan ajralib turadi.

ЖИДКОСТЬ ИДЕАЛЬНАЯ – *ideal suyuqlik*; yopishqoqligi (ichki ishqalanishi) yo'q va harorat o'zgarganda hajmi sira o'zgarmaydi deb faraz qilingan (ideallashtirilgan) suyuqlik.

ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ– *harakat miqdori o'garishi qonuni*; individual hajm harakat miqdorining o'zgarish tezligi unga ta'sir etayotgan tashqi kuchlar yig'indisiga teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ– *massaning saqlanish qonuni*; individual hajmning massasi o'zgarmaydi, ya'ni massaning vaqt bo'yicha o'zgarishi nolga teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ (первый закон термодинамики)– *energiyaning saqlanish qonuni*; individual hajm to'la energiyasining o'zgarish tezligi vaqt birligi ichida unga tashqaridan kelayotgan energiya oqimiga (tashqi kuchlar, issiqlik va boshqalar ishi shaklida) teng.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНТРОПИИ (второй закон термодинамики) – *entropiyaning saqlanish qonuni*; individual hajm entropiyasining o'zgarish tezligi vaqt birligi ichida unga tashqaridan kelayotgan entropiya oqimi va hajm ichida ishlab chiqilgan entropiya yig'indisiga teng (faqat qaytarilmaydigan jarayonlar uchun).

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ– *ideal suyuqlik*; harakati davomida faqat normal kuchlanish paydo bo'ladigan suyuqlik, boshqacha aytganda, qovushoqligi e'tiborga olinmagan (ichki urinma kuchlanishlari nolga teng) real suyuqlik modeli.

КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ– *urinma kuchlanish yoki urinma zo'riqish*; kuchlanish vektorining qaralayotgan nuqtada aniq oriyentirlangan elementar yuzaga urinma tekislikdagi proyeksiyasi: $\sigma_{nt} = \sigma_n \cdot t$. *Izoh*: agar yuza x_1 o'q boyicha normalga oriyentirlangan bo'lsa, u holda x_2 va x_3 yo'nalishlardagi urinma kuchlanishlar σ_{12} va σ_{13} kabi belgilanadi, $\sigma_t = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)^{1/2} = (\sigma_1^2 - \sigma_{11}^2)^{1/2}$ miqdor esa «to'la urinma kuchlanish» deb ataladi.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЯЗКОСТИ– *yopishqoqlik(qovushoqlik)ning kinematik koeffitsiyenti*; miqdor jihatidan μ - qovushoqlik dinamik koeffitsiyentining ρ - suyuqlik zichligiga nisbati, yani $\nu = \mu/\rho$.

КОЭФФИЦИЕНТ ОБЪЕМНОГОСЖАТИЯ ЖИДКОСТИ–*suyuqlikning hajmiy siqilish koeffitsiyenti*; suyuqlik hajmining nisbiy kamayishi berilgan hajmni har tomonlama tekis siquvchi normal zo'riqishga nisbati.

ЛИНИЯТОКА– *oqim chizig'i*; urinmasi tezlik vektori bilan mos keluvchi chiziq, boshqacha aytganda, har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinma suyuqlik tezligiga parallel bo'lgan chiziq (bu shunday chiziqki, berilgan vaqt momentida uning har bir nuqtasida suyuqlik lahzaviy tezlik vektori shu chiziqqa o'tkazilgan urinmaga mos tushadi). *Izoh*: 1. Barqaror harakatda oqim chizig'i va suyuqlik zarrachasining harakat traektoriyasi o'zaro mos tushadi. 2. Bir o'lchovli harakatda oqim chizig'i va zarrachaning fizik fazodagi traektoriyasi o'zaro mos tushadi, ular to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi. 3) oqimda o'tkaziladigan chiziq bo'ylab, qaralayotgan vaqtda suyuqlik zarrachalarining tezligi shu chiziqqa urinma bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА – *moddiy nuqta*; o'lchamlari hisobga olinmaydigan massaga ega obyekt (o'rganilayotgan harakatda jismning nuqtalari o'tgan masofaga nisbatan uning o'lchamlarini e'tiborga olmaslik mumkin bo'lgan holdagina o'rinli).

МЕСТНАЯ СКОРОСТЬ – *mahalliy tezlik*; suyuqlik fazosi nuqtasining qaralayotgan vaqt momentidagi tezligi.

НАПРЯЖЕНИЕ В ЖИДКОСТИ – *suyuqlikdagi kuchlanish*; suyuqlikning tutash zarrachalari orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarining ular tutashgan sirt yuzasiga (bu yuza konturi, uning orientatsiyasi o'zgatmagan holda, berilgan nuqtagacha tortiladi) nisbatining limitiga teng vektor. *Izoh*: Masalan, agar yuza x_1 o'q boyicha normalga oriyentirlangan bo'lsa, u holda undagi kuchlanish σ_1 bilan, uning proeksiyalari esa σ_{11} , σ_{12} , σ_{13} bilan belgilanadi.

НЕВЕСОМАЯ ЖИДКОСТЬ– *vaznsiz suyuqlik*; harakati va muvozanati og'irlik kuchidan yoki inertsianing ko'chirma kuchlaridan bog'liq bo'lmagan suyuqlik.

НЕВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ– *qovushoqmas suyuqlik*; harakati jarayonida faqat normal kuchlanishlar paydo bo'ladigan suyuqlik.

НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ– *siqilmaydigan suyuqlik*; zichligi bosimdan bog'liq bo'lmagan, ya'ni barcha zarrachalarining zichligi o'zgarmaydigan suyuqlik.

НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ– *normal kuchlanish*; kuchlanish vektorining qaralayotgan nuqtada aniq oriyentirlangan elementar yuzaga qo'yilgan tashqi $\vec{n}$ normalidagi proyeksiyasi: $\sigma_{nn} = \sigma_n \vec{n}$. *Izoh*: agar yuza x_1 o'q boyicha normalga oriyentirlangan bo'lsa, u holda $\sigma_{nn} = \sigma_{11}$.

НЬЮТОНОВСКАЯ И ЛИНИЕЙНО-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ– *Nyuton suyuqligi yoki qovushoqligi chiziqli suyuqlik*; ichki ishqalanishning urinma zo'riqishi tezlik gradientiga to'g'ri proporsional: $\tau = \mu \frac{du}{dr}$. Nyuton suyuqliklari uchun tezliklarning chiziqli taqsimoti o'rinli, bunda du/dy – tezlik gradienti (suyuqlik ko'ndalang qatlamining siljish tezligi) o'zgaras bo'lib qoladi. Grafikning burchak koeffitsiyenti – siljish kuchlanishining tezlik gradiyentidan bog'liqligi μ – suyuqlikning qovushoqlik koeffitsiyentiga mos keladi. U faqatgina temperatura va bosimdan bog'liq, siljish tezligidan esa bog'liq emas.

ОБРАТИМЫЙ ПРОЦЕСС– *qaytariluvchan jarayon*; agar tizim vaqt o'sishida ikkala taraf lama yo'nalishda ham biror holatlar ketma-ketligidan o'tsa, u holda bunday holatlar ketma-ketligi *qaytariluvchan jarayon*, aks holda esa u *qaytarilmaydigan jarayon* deyiladi;

ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ–*hajmiy kuchlar*; zichligi hamma yerda birxil bo'lgan suyuqlikka ta'sir etayotgan massaviy kuchlar.

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ— *bir o' lchovli harakat*; bunday harakatda muhitning barcha xarakteristikalarini faqatgina biror tekislikkacha bo'lgan x masofadan (tekis to'liqlik harakat) yoki biror to'g'ri chiziqli — simmetriya o'qigacha bo'lgan x masofadan (silindrik to'liqlik harakat) yoki biror nuqta — simmetriya markazigacha bo'lgan x masofadan (sferik to'liqlik harakat) va vaqtdan (agar harakat nobarqaror bo'lsa) bog'liqlik bo'ladi. Sferik to'liqlik harakatda tezlik vektori mos sferik koordinatalar sistemasida noldan farqli faqatgina bitta radial komponentaga ega.

ОДНОРОДНАЯ ЖИДКОСТЬ— *bir jinsli suyuqlik*; barcha nuqtalarida tarkibi va zichligi bir xil, ya'ni qo'zg'almagan holatida zichligi o'zgarmas bo'lgan suyuqlik.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ— *o'qqa nisbatan simmetrik harakat*; simmetriya o'qi deb ataluvchi biror to'g'ri chiziqli orqali o'tuvchi ixtiyoriy tekislik uchun barcha parametrlari bir xil bo'lgan suyuqlik harakati (suyuqlikning ikki o' lchovli harakati bo'lib, silindrik koordinatalar sistemasida tezlik burchak koordinatadan bog'liqlik emas). *Izoh:* Silindrik koordinatalar sistemasida oqimning parametrlari burchak koordinatadan bog'liqlik emas, o'qqa nisbatan simmetrik harakat tezligi ikki yoki uchta komponentaga ega bo'lishi mumkin.

ПЕРЕМЕННЫЕ ЛАГРАНЖА— *Lagranj o'zgaruvchilari*; suyuqlik harakatini tavsiflashda erkin o'zgaruvchilar sifatida qo'llaniladigan fazoviy nuqtalar koordinatalari va vaqt.

ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЙЛЕРА— *Eyler o'zgaruvchilari*; suyuqlik harakatini tavsiflashda erkin o'zgaruvchilar sifatida qo'llaniladigan fazoviy nuqtalar koordinatalari va vaqt.

ПИТОТРУБКА— *Pito naychasi*; uchi to'g'ri burchak ostida qayrilgan kichik diametrli naycha, u oqimga qarshi qo'yiladi, naychada suyuqlikning ko'tarilishi tezlik naporini (damini) beradi.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ— *Tekis parallel harakat*; suyuqlik zarrachalari barcha parametrlari bilan biror qo'zg'almas tekislikka (zarrachalardan bu tekislikkacha bo'lgan masofadan bog'liqlik bo'lmagan holda) parallel harakat qilayotgan suyuqlik harakati (suyuqlikning tezligi qo'zg'almas tekislikka parallel va shu tekislikkacha bo'lgan masofadan bog'liqlik bo'lmagan holdagi ikki o' lchovli harakati).

ПЛОСКОСТЬ ТЕЧЕНИЯ— *oqish tekisligi*; tekis oqimda suyuqlik zarrachalari tezliklariga parallel tekislik.

ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТИ— *suyuqlik zichligi*; suyuqlikning hajm birligidagi massasi.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ— *chegaraviy qatlam*; suyuqlik ta'siri paydo bo'ladigan qattiq jism sirtiga tutash qatlam yoki ikkita suyuqliklarning ajralish chegarasidagi qatlam yoki suyuqlikning erkin sirtidagi qatlam yoki suyuqlikning qovushoqligi namoyon bo'ladigan yupqa qatlami bo'lib, u katta Reynold sonlarida paydo bo'ladi.

ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ— *tezlik potentsiali*; x, y, z fazoviy koordinatalardan va t vaqtdan bog'liqlik $\varphi(x, y, z, t)$ skalyar funksiya bo'lib, uning gradiyenti suyuqlikning potentsial harakati tezlik vektori bilan mos tushadi: $\vec{v} = \text{grad } \varphi$.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ— *potensial harakat*; tezlik potentsialiga ega suyuqlik harakati. *Izoh:* Potensial harakatdagi suyuqlik oqimining barcha nuqtalarida tezlikning uyurma vektori nolga teng.

РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ — *muvozanat holati*; tashqi shartlar saqlanganda tizimning holat parametrlari uzoq vaqt o'zgarmasdan o'zgarmas qiymatlarni qabul qilib turadigan holat.

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ— *tekis, bir me'yordagi harakat*; suyuqlik zarrachalari o'zgarmas tezlikka ega bo'lgandagi barqaror harakat (suyuqlikning tezligi koordinatadan bog'liqlik bo'lmagan holdagi barqaror harakati). *Izoh:* Oqimning parametrlari to'g'ri burchakli (x, y, z) dekart koordinatalari sistemasida qaysidir bitta koordinatadan bog'liqlik emas va tezlikning shu koordinata yo'nalishidagi komponentasi nolga eng.

РАСХОД (ОБЪЕМНЫЙ РАСХОД) ЖИДКОСТИ— *suyuqlikning sarfi yoki suyuqlikning hajm birligidagi sarfi*; oqim ko'ndalang kesimidan vaqt birligida oqib o'tgan suyuqlik hajmi: $Q = \omega v$.

СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ— *suyuqlikning erkin sirti*; aniq amaliy masalaga xos bo'lgan kinematik va dinamik shartlarga bo'ysingan holda erkin deformatsiyalanuvchan sirt bo'lib, u suyuqlik va gazsimon muhit yoki vakuum orasini ajratadi (boshqacha aytganda, suyuqlikning gaz yoki vakuum bilan tutash sirti bo'lib, u kinematik va dinamik shartlar saqlanilgan holda erkin deformatsiyalanuvchan bo'ladi).

СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ– *siqiluvchan suyuqlik*; zichligi bosimdan bog'liq suyuqlik.

СЖИМАЕМОСТЬ– *siqiluvchanlik*; suyuqlikning bosim o'zgarganda o'z zichligini o'zgartirish xossasi, boshqacha aytganda, suyuqlikning har tomonlama bosim ta'sirida o'z hajmini o'zgartirish (qayta tiklanuvchan) qobiliyati.

СИЛЫ ВНЕШНИЕ–*tashqi kuchlar*; suyuqlik biror hajmining moddiy zarrachasiga bosqa biror jism hajmidagi moddalarning ta'sir qilayotgan kuchlar, chunonchi, shu qarlayotgan suyuqlik hajmining moddiy zarrachalariga shu hajmni har tomondan o'rab turgan suyuqlikning ta'sir kuchlari. Ular ikki guruhga bo'linadi: massali kuchlar va sirt kuchlari.

СИЛЫ ВНУТРЕННИЕ– *ichki kuchlar*; suyuqlik moddiy zarrachalarining o'zaro ta'sir kuchlari.

СИЛЫ МАССОВЫЕ– *massali kuchlar*; qaralayotgan hajm birligi massasiga proporsional kuchlar (xususan, suyuqlik zarrachasining zichligi ozgarmaganda massaviy kuchlar hajmiy kuchlar deb ataladi), bu kuchlar Nyutonning 2-qonuniga bo'ysunadi (masalan, og'irlik kuchi, inertsiya kuchi).

СИЛЫ ОБЪЕМНЫЕ– *hajmiy kuchlar*; hajmni tashkil etuvchi barcha moddiy zarrachalarga qo'yilgan kuchlar (og'irlik kuchi; markazdan qochma kuchlar; magnit kuchlari; elektr kuchlari).

СИЛЫ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ–*sirt taranglik kuchlari*; suyuqlikning erkin sirtiga ta'sir etuvchi, shu sirtga urinma va erkin sirtning chegasiga normal yo'nalgan, suyuqlikni sferik shaklga keltirishga intiluvchi kuchlar. Miqdor jihatidan suyuqlik sirti konturining uzunligi bilan sirt tarangligi koeffitsienti ko'paytmasiga teng.

СИЛЫ ПОВЕРХНОСТНЫЕ–*sirt kuchlari*; suyuqlik hajmining sirtida joylashgan zarrachalariga ta'sir etuvchi kuchlar (masalan, atmosfera bosim kuchi, ishqalanish kuchi va b.). Sirt kuchlari va tashqi kuchlar suyuqlikda kuchlanishni paydo qiladi.

СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiya tezligi*; berilgan nuqta orqali o'tuvchi suyuqlik zarrachalari barcha elementlari o'zgarishining tezligi bo'yicha aniqlanuvchi suyuqlik zarrachalari shakli va hajmining o'zgarish tezligi.

СКОРОСТЬ ЗВУКА– *tovush tezligi*; havoda 0°C harorat (temperatura)da 331 m/s ga teng. Suvda tovush tezligi havodagiga qaraganda taxminan 5 marta, metallarda esa 15 marta katta.

СКОРОСТЬ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ– *hajmiy kengayish tezligi*; harakatlanayotgan suyuqlik elementar hajmi o'zgarish tezligining shu hajm miqdoriga nisbati bo'lib, uning miqdori tezlik divergensiyasiga teng: $\dot{\theta} = \text{div } \vec{v} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}$. *Izoh*: Siqilmaydigan suyuqlikda hajmiy kengayish tezligi nolga teng.

СКОРОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО УДЛИНЕНИЯ– *nisbiy cho'zilish tezligi*; $\dot{\epsilon}_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_i} \frac{dx_i}{dt}$ yoki $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ formula bilan aniqlanuvchi, berilgan suyuq chiziqliq elementar kesmasi uzunligining shu kesma uzunlik birligiga nisbati o'zgarishining ϵ_i tezligi, bunda Δx_i – x o'q bo'ylab olingan chiziqliq element uzunligi; t – vaqt; v_i – tezlikning x_i o'qdagi proyeksiyasi.

СТРУЯ– *sharracha*; oqimning biror belgisi (tezligi, zichligi, tarkibi va shu kabi)ga qarab cheklangan bo'lagi. *Izoh*: 1. Qovushoqmas suyuqlikda sharrachani cheklovchi sirtida tezlikning urinma komponentasi uziladi. 2. Erkin sirt bilan chegaralangan sharracha «erkin sharracha» deb ataladi.

ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТЬ – *temperatura o'tkazuvchanlik*; moddaning, xususan suvning, fizik parametri bo'lib, issiqlik uzatish xususiyatiga ko'ra har bir nuqtaning temperaturasi shu vaqt momentiga mos keluvchi barqaror holatga intiladi. Temperatura o'tkazuvchanlikning xarakteristikasi temperatura o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti $\alpha = \lambda / (c\rho)$, bu yerda λ – issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti. Suvning temperatura o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti temperaturadan sust bog'liq, masalan, 0 va 10°C temperaturada u mos ravishda $0,485 \cdot 10^{-3}$ va $0,504 \cdot 10^{-3}$ m²soat ga teng.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСШИРЕНИЕ ЖИДКОСТИ– *suyuqlikning harorat bo'yicha (temperaturaviy) kengayishi*; bosim o'zgarish bo'lganda haroratning 1°C ga oshganida suyuqlik hajmining nisbiy o'zgarishi, ya'ni suyuqlik hajmi elementar orttirilmasining harorat elementar orttirilmasiga nisbati. U temperaturaviy kengayish koeffitsiyenti bilan xarakterlanadi. Tomchili suyuqliklar uchun bu koeffitsiyentning qiymati juda ham kichik bo'lganligi uchun hisoblashlarda u e'tiborga olinmaydi.

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ– *suyuqlikning kuchlanish tenzori*; x_i ($i=1,2,3$) to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida o'zaro perpendikulyar uchta tekisliklardagi uchta $\sigma_i=\sigma_{ij}$ normal kuchlanishlarga va, umuman olganda, σ_{ij} ($i\neq j$) urinma kuchlanishlarning shu yuzalardagi oltita proektsiyalariga teng, koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lgan σ_{ij} tashkil etuvchilarli $\{\sigma_{ij}\}$ ikkinchi rang tenzor. *Uzoq:* 1. Kuchlanish tenzorining σ_{ij} tashlik etuvchilari – x_j o'qqa perpendikulyar yuzada-gi σ_j kuchlanishning x_i o'qdagi proyeksiyasi. Taqsimlangan juftliklar (momentlar) bo'lmagan holda kuchlanish tenzori simmetrik bo'ladi, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ ya'ni. 2. Chiziqli-qovushoq suyuqlikda (Nyuton suyuq-ligida) simmetrik kuchlanish tenzori deformatsiyalar tezliklari tenzoridan chiziqli bog'liq bo'ladi.

ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ– *deformatsiya tezliklari tenzori*; x_i ($i=1,2,3$) to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qaralayotgan nuqtadan o'tuvchi o'zaro perpendikulyar elementar suyuq chiziqlarning uchta $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ nisbiy cho'zilish tezliklariga va mos yuzalardagi uchta $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ siljish tezliklari yarimlariga teng, suyuqlik zarrachalari deformatsiyalari tezliklarini aniqlovchi, koordinata va vaqtning funksiyasi bo'lgan $\dot{\epsilon}_{ij}$ tashkil etuvchilarli $\{\dot{\epsilon}_{ij}\}$ ikkinchi rang simmetrik tenzor. *Izoh:* Deformatsiya tezliklari tenzori deformatsiya tenzoridan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng.

ТРАЕКТОРИЯ–*traektoriya*; suyuqlik zarrachalarining vaqt o'tishi bilan bosib o'tgan yo'lining izi.

ТРУБКАТОКА– *oqim naychasi*; bu sodda yopiq konturdan oqib o'tuvchi suyuqlik oqimi sirti.

УДЕЛЬНЫЙ ВЕС ЖИДКОСТИ–*suyuqlikning solishtirma og'irligi*; hajm birligidagi suyuqlikning og'irlik miqdori: $\gamma=G/V$, bu yerda $G=mg$ – og'irlik; V –suyuqlikning hajmi.

УКЛОН ДНА РУСЛА–*o'zan tubining qiyaligi*. Bosimsiz oqim o'zani asosi chizig'ining gorizont bilan hosil qilgan burchagi sinusi.

УКЛОН КРИТИЧЕСКИЙ–*kritik qiyalik*; berilgan sarf va tekis harakatli bosimsiz oqim uchun me'yordagi chuqurligi kritik chuqurlikka teng o'zanlarga berilgan taxminiy qiyalik

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ– *barqaror harakatlanyotgan oqim uchun Bernulli tenglamasi*; siqilmaydigan suyuqlikning barqaror harakatida o'sha oqim naychasidagi barcha suyuqlik zarrachalari uchun geometrik, tezlik va p'ezometrik balandliklar yig'indisi o'zgarmaydi.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ИЛИ СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ– *barqaror yoki statsionar harakat*; suyuqlik bilan band hajmning ixtiyoriy nuqtasining o'rtalashtirilgan mahalliy tezliklari miqdori va ularning yo'nalishi vaqt bo'yicha o'zgarmaydigan suyuqlik harakati (suyuqlikning tezligi vaqtdan bog'liq bo'lmagan holdagi harakati). Bunda suyuqlik har bir nuqtasining harakat tartibi o'zgarmaydi; tezliklar maydoni, uyurmalar maydoni, gidrodinamik bosimlar maydoni, massaviy kuchlar maydoni o'zgaras yoki statsionar; oqim chizig'i suyuqlik zarrachalarining traektoriyasi bilan mos tushadi. Aks holda esa *beqaror yoki nobarqaror harakat*.

ФУНКЦИЯТОКА– *oqim funksiyasi*; suyuqlikning tekis parallel yoki o'qqa nisbatan simmetrik harakatida ψ funksiya koordinata va vaqtning skalyar funksiyasi bo'lib, u har bir oqim chizig'ida ixtiyoriy vaqt momentida o'zgaras qiymat qabul qiladi, u dastlavki ($\psi=0$) va berilgan oqim sirtlari orasidagi suyuqlik massaviy sarfiga proporsional.

ЦЕНТР ДАВЛЕНИЯ– *bosim markazi*; suyuqlik oqimiga nisbatan oriyentatsiyasi juda kam o'zgaruvchan suyri jismga ta'sir etayotgan barcha bosim kuchlarining teng ta'sir etuvchisi (agar u mavjud bo'lsa) qo'yilgan nuqta.

ЧАСТИЦА ЖИДКОСТИ– *suyuqlik zarrachasi*; suyuqlik-ning qaralayotgan nuqtani o'z ichiga olgan va limiti nolga intiluvchi elementar hajmi, boshq. aytganda, suyuqlik-ning qaralayotgan nuqtani o'rab turuvchi cheksiz kichik hajmi.

ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА (Re) – *Reynold soni* (Re); qovushoq suyuqlik harakati rejimini ifodalovchi o'lchamsiz miqdor bo'lib, u berilgan masaladagi v o'rtacha tezlik va l masofa ko'paytmasining ν kinematik qovushoqlik koeffitsiyentiga nisbatiga teng, ya'ni $Re=vl/\nu$ *Izoh:* 1. Berilgan sharoitda suyuqlikning turbulent harakatidan laminar harakatiga yoki uning laminar harakatidan turbulent harakatiga o'tish momentini ifodalovchi Reynolds sonining qiymati «Reynoldsning kritik soni» deb ataladi. 2. Agar, zarur bo'lganda, suyuqlikning turbulent harakatidan laminar harakatiga yoki uning laminar harakatidan turbulent harakatiga o'tishi joyi borligini ta'kidlash lozim bo'lsa, u holda mos ravishda «Reynoldsning kritik sonidan quyi» va «Reynoldsning kritik sonidan yuqori» degan atama qo'llaniladi.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ANDIJON
DAVLAT
UNIVERSITETI



FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«MATEMATIKA» KAFEDRASI

4.«TUTASH MUHIT MEXANIKASI» FANI BO'YICHA ILOVALAR

ANDIJON – 2020

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйхатга олинди: Олий ва ўрта махсус таълим
вазирлиги
№ 505140300
2018 йил "26" 05 2018 йил "14" 06



ТУТАШ МУҲИТЛАР МЕХАНИКАСИ АСОСЛАРИ

ФАН ДАСТУРИ

Билим соҳаси:	100 000 – Гуманитар соҳа
Таълим соҳаси:	140000 – Табiiй фанлар
Таълим йўналиши:	5140300 – Механика

Тошкент-201_

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил "14" 06 даги "531" - сонли буйруғининг 10 - иловаси билан фан дастури рўйхати тасдиқланган.

Фан дастури Олий ва ўрта махсус, касб-хунар таълим йўналишлари бўйича Ўқув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиқлаштирувчи Кенгашининг 2018 йил "26" 05 даги 2 - сонли баённомаси билан маъқулланган.

Фан дастури Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчи:

Бегматов А. - ЎзМУ, "Механиканинг назарий асослари" кафедраси профессори, ф.-м.ф.д.

Такризчилар:

Ахмедов А. - ТДТУ, "Олий математика" кафедраси доценти, ф.-м.ф.д.

Маматова Н.Т. - ЎзМУ, "Механиканинг назарий асослари" кафедраси катта ўқитувчиси, ф.-м.ф.н.

Фан дастури Мирзо Улугбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Кенгашида кўриб чиқилган ва тасвир килинган (2018 йил "12" даги 2 - сонли баённома).

I. Ўқув фанининг долзарблиги ва олий касбий таълимдаги ўрни

Туташ мухитлар механикаси асослари фани замонавий техниканинг турли мураккаб техник жараёнларда механик ҳаракатларини математик нуқтаназардан тавсифлаш, туташ мухит моделларини тузиш ва уларга оид масалаларни ечиш учун назарий усткурма сифатида назарий ва амалий аҳамиятга эгадир.

"Туташ мухитлар механикаси асослари" умумий касбий фанлардан бири сифатида, 3-, 4- ва 5-семестрда ўтказилади. Мазкур фани ўзлаштириш доирасида ўқув режасидаги математик анализ, чизикли алгебра ва геометрия, дифференциал геометрия, дифференциал тенгламалар, вариацион ҳисоб ва оптимallasш, ҳисоблаш усулларини чуқур ўзлаштирилиши, "Математик таҳлил", "Геометрия", "Дифференциал тенгламалар", "Назарий механика", фанларидан етарли билим ва кўникмаларга эга бўлишлари талаб этилади. Мазкур фандан олинган билимлар эса "Суюқлик ва газ механикаси асослари", "Деформацияланувчи каттик жисм механикаси асослари" ҳамда ихтисослик фанларидан назарий ва амалий машғулотларини бажаришда кенг қўлланилиб, бўлғуси мутахассисларда кўникма ва малака шаклланишида муҳим ўрин тутади.

II. Ўқув фанининг мақсади ва вазифаси

Фани ўқитишнинг мақсади – Туташ мухитлар механикаси (ТММ) курсини ўқишдан мақсад механика йўналиши бўйича таълим олаётган талабаларга йўналишнинг негизини ташкил қилувчи фанлардан бири - ТММнинг фундаментал асосларини билиш орқали, деформацияланувчи мухитнинг умумий хоссалари ва ҳаракат қонунларини ўрганишдан иборатдир.

Фани ўқитишнинг вазифалари: деформацияланувчи мухит ҳаракатини ўрганишнинг математик усулларини ўрганиш, Туташ мухитлар механикаси асослари фани доирасида талабаларга чуқур назарий билим бериш ва муайян кўникмалар ҳосил қилиш ҳамда махсус фанлар блоки таркибида ўқитиладиган фанларни ўзлаштиришлари учун етарли билим бериш ҳисобланади.

Фан бўйича талабаларнинг билим, кўникма ва малакаларига қуйдаги талаблар қўйилади. **Талаба:**

- ТММ асослари предметни тинглаган талабалар деформациялар ва кучланишлар назарияларини пухта ўзлаштирган бўлишлари, туташ мухитнинг классик моделлари тўғрисида дастур доирасида билимга эга бўлишлари,

ТММнинг асосий тенгламаларини ва термодинамиканинг асосий қонуларини амалиётга қўллаш усуллари тўғрисида *масаввурга эга бўлиши*;

- туташ мухитнинг мураккаб моделларини тузиш заруриятини тушунишлари ва муайян моделлар ҳақида маълум тушунчага эга бўлишлари керак. Туташ мухит кинематикаси, деформациялар ва кучланишлар назарияси ва ТММ асослари курсининг бошқа барча қисмларига онд мисол ва масалалар ечишни *билиши ва улардан фойдалана олиши*;

- туташ мухит классик моделлари ҳаракати учун тўла тенгламалар системаси мавжуд бўлган ҳолларни билишлари ва уларга мисол тариқасида қаралган масалаларни математик ечиш усулларини ўзлаштирган бўлишлари ҳамда мазкур ечимларни таҳлил қила олиш *қўникмаларига эга бўлиши керак*.

III. Асосий назарий қисм (маъруза машғулоти)

1-мавзу. “Туташ мухитлар механикаси” фанига кириш

Кириш. Туташ мухитлар механикаси предмети. Туташ мухит тушунчаси.

2-мавзу. Тензор ҳисоб элементлари

Микдорларни индексли белгилаш. Тўртбурчакли декарт ва эгри чизикли координаталар системаси. Ковариант ва контравариант координата базислари. Индексларни кўтариш ва тушириш амаллари. Координата базиси элементлари устида амаллар. Ортогонал эгри чизикли координаталар системаси. Цилиндрик ва сферик координаталар системаси. Координаталарни алмаштириш. Скаляр ва вектор микдорлар.

3-мавзу. Тензорлар устида амаллар

Тензор. Тензорлар устида амаллар. Тензорнинг инвариантлари. Симметрик ва антисимметрик тензорлар. Тензорларни бўлиш теоремаси. Метрик ва дискриминант тензорлар. Леви-Чивита тензори. Иккинчи ранг тензорлар ва матрицалар. Шар ва девиатор тензори. Иккинчи ранг тензорнинг бош йўналишлари. Характеристик тенглама. Тензорнинг хос векторлари. Тензорнинг бош қийматлари ва каноник кўриниши. Тензорнинг асосий инвариантлари. Базис векторни координаталар бўйича дифференциаллаш. Кристоффел белгилари ва уларнинг хоссалари. Скаляр, вектор ва иккинчи ранг тензорни координаталар бўйича дифференциаллаш.

4-мавзу. Деформацияланувчан мухит кинематикаси

ТММнинг асосий фаразлари. Ҳамроҳ координата системаси. Мухитнинг **ҳаракат** тенгламаси. Туташ мухит ҳаракатини тавсифлашнинг Лагранж ва **Эйлер** усуллари. Скаляр ва вектор майдонлар ва уларнинг айрим хоссалари.

5-мавзу. Деформациялар назарияси

Ўзайиш ва силжиш. Деформация тензори, унинг бош ўқлари ва бош қийматлари. Деформация тензори компоненталарини кўчиш орқали ифодалаш. Грин ва Альманси тензорлари. Ҳажмнинг нисбий ўзгариши. Фазонинг евклидлик шarti. Риман-Кристоффел тензори. Деформациянинг биргаликдаги тенгламалари.

6-мавзу. Мухит деформацияси тезлиги

Деформация тезлиги тензори. Туташ мухитнинг чексиз кичик заррасида тезликнинг тақсимланиши. Ҳажмнинг кенгайиш тезлиги. **Тезлик** дивергенцияси.

7-мавзу. Туташ мухитнинг ҳаракати турлари

Потенциалли ва уюрмали ҳаракатлар. Стокс ва Гаусс-Остроградский теоремалари. Ҳаракатчан ҳажм бўйича олинган интегрални вақт бўйича дифференциаллаш.

8-мавзу. ТММнинг динамик тенгламалари

Мухитнинг массаси ва зичлиги. Массанинг сақланиш **қонуни**. Ўзлуксизлик тенгламаси (Эйлер ва Лагранж координатарида). **Массавий** (ҳажмий) ва сирт кучлари. Ҳаракат микдори тенгламалари.

9-мавзу. Кучланишлар назарияси

Ички кучланиш ва унинг асосий хоссалари. Кучланишлар тензори. **Бош нормал** ва уринма кучланишлар.

10-мавзу. Туташ мухитнинг ҳаракат тенгламалари

Туташ мухит мувозанати тенгламаси. Ҳаракат микдори **моменти** тенгламалари ва улардан классик ҳолда келиб чиқадиган натижа.

11-мавзу. Туташ мухитнинг классик моделлари

Идеал суюқлик (газ) модели. Эйлер тенгламалари. Идеал суюқлик ҳаракатини тавсифловчи тўла тенгламалар системаси. Эластик жисм ва ёпишқоқ суюқлик моделлари. Чизикли эластик жисм ва чизикли ёпишқоқ суюқлик – Гук ва Навье-Стокс қонунлари. Изотроп мухитлар учун Гук ва Навье-Стокс қонунлари.

12-мавзу. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари

Динамик ва кинематик ёпишқоқлик коэффициентлари – Юнг модули ва Пуассон коэффициенти. Мисоллар. Ёпишқоқ сикилмас суюқликнинг ҳаракати. Ёпишқоқ сикилмас суюқлик ҳаракати тўла тенгламалар системаси.

13-мавзу. Термодинамиканинг асосий тушунчалари ва тенгламалари

Тирик куч теоремаси ва ички сирт кучларининг иши. Термодинамиканинг биринчи қонуни. Термодинамик системанинг тўла ва ички энергияси. Иссиқликнинг оқими тенгламаси. Ўз холатига қайтувчи ва қайтмайдиган жараёнлар. Ҳарорат (температура) тушунчаси.

14-мавзу. Икки параметрли мухитлар

Мукаммал газ. Майер формуласи. Изотермик ва адиабатик жараёнлар. Пуассон адиабатаси. Карно цикли. Термодинамиканинг иккинчи қонуни. Энтропия. Мукаммал газ учун энтропия ифодаси. Қопланмаган иссиқлик. Икки параметрли мухитлар учун термодинамик потенциаллар (ички энергия, эркин энергия, энтальпия, Гиббс потенциали).

15-мавзу. Туташ мухит ҳаракати универсал тенгламалар системаси

Туташ мухит ҳаракати универсал тенгламалар системаси ва айрим мухитларнинг моделлари (идеал ва ёпишқоқ суюқликлар, эластик жисм). Сикилувчан ва сикилмас термидеал суюқлик модели. Тўла тенгламалар системаси (изотермик ва адиабатик жараёнлар, мукаммал газ).

16-мавзу. Термоёпишқоқ суюқлик модели

Гиббс формуласи. Иссиқлик ўтказувчан ёпишқоқ суюқлик учун иссиқлик оқими тенгламаси. Термоёпишқоқ суюқлик ҳаракати тўла тенгламалар системаси. Термоэластик жисм модели. Тўла тенгламалар системаси. Кучланиш

потенциали. Эркин энергия (кичик силжишлар ва ҳароратнинг кичик ўзгариш ҳолатлари учун).

17-мавзу. Умумлашган Гук қонуни

Умумлашган Гук қонуни. Юнг модули ва Пуассон коэффициенти.

IV. Амалий машғулотлар бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Амалий машғулотлар учун қуйидаги мавзулар тавсия этилади:

1. Индексли белгилаш. Координата базислари. Координаталарни алмаштириш. Ламе коэффициентларини ҳисоблаш.
2. Тензорлар устида амаллар. Тензорнинг бош қийматлари ва бош йўналишларини топиш. Бош инвариантлар.
3. Леви-Чивита тензори. Иккинчи ранг тензорлар. Шар ва левиатор тензори.
3. Ортогонал координата системасида Кристофелль белгиларини ҳисоблаш. Скаляр, вектор ва тензорнинг градиентини ҳисоблаш.
4. Ҳаракат тенгламалари. Лагранж ва Эйлер ўзгарувчилари. Скаляр ва вектор майдонлар.
5. Деформация назарияси: нисбий узайиш, чўзилиш ва силжиш.
6. Лагранж ва Эйлернинг чекли деформация тензорлари. Чексиз кичик деформация.
7. Кучланиш. Кучланиш тензори, унинг бош қийматлари ва бош йўналишлари.
8. Потенциалли ва уюрмали ҳаракатлар. Стокс ва Гаусс-Остроградский теоремалари.
9. Ҳаракатчан ҳажм бўйича олинган интегрални вақт бўйича дифференциаллаш.
10. Идеал суюқлик (газ) модели. Эйлер тенгламалари. Идеал суюқлик ҳаракатини тавсифловчи тўла тенгламалар системаси.
11. Изотроп мухитлар учун Гук ва Навье-Стокс қонунлари. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари.
12. Динамик ва кинематик ёпишқоқлик коэффициентлари – Юнг модули ва Пуассон коэффициенти. Мисоллар.
13. Термодинамика масалалари. Икки параметрли мухитлар.
14. Мукаммал газ. Пуассон адиабатаси. Карно цикли.
15. Икки параметрли мухитлар учун термодинамик потенциаллар (ички энергия, эркин энергия, энтальпия, Гиббс потенциали)ни аниқлаш.

Амалий машгулотлардан мақсад деформацияланувчан каттик жисм, суюклик ва газлар ҳаракатининг табиат ва техникада учрайдиган содда масалаларини ечиш кўникмаларини ҳосил қилиш. Бунда талабалар амалий машгулотларда мисол ва масалаларни ечишда, ечимларни таҳлил қилишда олган назарий билимларини қўллаш олишлари назарда тутилади.

V. Мустақил таълим ва мустақил ишлар

Мустақил таълим учун тавсия этиладиган мавзулар:

1. Иссиқлик ва иш тушунчалари (бунда энергия тарқалиши усуллари ва унинг миқдори ўрганилади).
2. Деформацияланувчи каттик жисм термодинамик потенциаллари (бунда эркин энергия, ички энергия ва Гиббс потенциаллари таҳлилари берилади).
3. Материаллар чарчаши, оқиши. Релаксация жараёни.
4. Деформацион пластиклик назариясини ишлатилиши (бунда энг содда масалалар учун назарияни ишлатилиши кўрилади).
5. Идеал суюкликни стационар ҳаракати учун интеграл муносабатларни қўллаш. Оддий масалаларни ечиш.
6. Физик миқдорлар ўлчамлари. Π - теорема, аниқловчи параметрлар; уларни гидродинамика ва эластиклик назариясида қўлланиши.
7. Сиклмайдиған ёпишқоқ суюклик ҳаракати.
8. Уюмлар майдонида содда мисоллар.
9. Гидродинамик ва газодинамик машиналар (конфузор ва сопло, компрессор, турбина, эжекторлар).
10. Деформация тензори компонентларини цилиндрлик ва сферик координаталарда ёзилиши.
11. Кучланиш тензори компонентларини цилиндрлик ва сферик координаталарда ёзилиши.

Мустақил ўзлаштирилган мавзулар бўйича талабалар томонидан рефератлар тайёрлаш ва уни тақдимот қилиш тавсия этилади.

Фан бўйича курс иши. Курс иши фан мавзуларига тааллуқли масалалар юзасидан талабаларга яқка тартибда тегишли топшириқ шаклида берилади. Курс ишининг ҳажми, расмийлаштириш шакли, баҳолаш мезонлари ишчи фан дастурида ва тегишли кафедра томонидан белгиланади. Курс ишини бажариш талабаларда фанга оид билим, кўникма ва малакаларни шакллантиришга хизмат қилиши керак.

Курс иши учун тахминий мавзулар:

1. Кристофель символларини ортогонал ва эгри чизикли координаталарда ёзилиши.
2. Эйлер тенгламасини эгри чизикли координаталарда ёзилиши.
3. Ўзлуксизлик тенгламасини цилиндрлик ва сферик координаталарда ёзилиши.
4. Эйлер тенгламасини цилиндрлик ва сферик координаталарда ёзилиши.
5. Анизотроп материаллар учун Гук қонунини хусусий ҳоллари.
6. Тезлик векторини уюрма ва тезлик дивергенцияси бериладиган ҳисоблаш.
7. Вектор майдони хоссалари ва Стокс, Гаусс-Остроградский формуллари.
8. Текис тўлқинлар, прогрессив тўлқинлар, Риман тўлқинлари.
9. Уюрма вектори, Био-Савар формуласи. Уюрма векторлар тизими.

VI. Асосий ва қўшимча адабиётлар ҳамда ахборот манбалари

Асосий адабиётлар

1. Reddy J.N. An Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition.- Cambridge Univ. Press, 2013. 450p.
2. Bowen R.M. Introduction to Continuum Mechanics for Engineers (Revised Edition).-Texas A&M Univ., 2007 (300p)
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 2004 (электрон вариант)
4. Маматкулов Ш. Тутуш мухит механикаси, (1 қисм), ўқув қўлланма. Т.: Университет, 2003.
5. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1. Теория и задачи. М.: Московский лицей, 1996, 396 с. Под ред. М.Э. Эглит.

Қўшимча адабиётлар

6. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришни тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ, Тошкент, 2016. 56-б.
7. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, катъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалиқ қондаси бўлиши керак.

Мамлакатимизни 2016 йилда ижтимоий-иқтисодий ривожлантиришнинг асосий якунлари ва 2017 йилга мўлжалланган иқтисодий дастурнинг энг муҳим устувор йўналишларига бағишланган Вазирлар Маҳкамасининг кенгайтирилган мажлисидаги маъруза, 2017 йил 14 январь –Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 104-б.

8. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза. 2016 йил 7 декабрь- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 48-б.

9. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамыз. Мазкур китобдан Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2016 йил 1 ноябрдан 24 ноябрга қадар Қорақалпоғистон Республикаси, вилоятлар ва Тошкент шаҳри сайловчилари вакиллари билан ўтказилган сайловолди учрашувларида сўзлаган нутқлари ўрин олган.- Тошкент, Ўзбекистон, 2017. 488-б.

10. Ильюшин А.А. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1971.

11. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: 1974.

12. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред. Т.1. М.:МГТУ, 2004.

13. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1, 2 М., Физмат изд. 1963.

14. Тимошенко И.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1961.

15. Бегматов А. Тензор ҳисоб элементлари. ТошДУ, 2002. 88 стр.

16. Хамидов А.А., Исанов Ш.Р. Туташ мухит механикасининг татбиқий масалалари. Т.: ЎзМУ, 2000.

Интернет сайтлари

17. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm/>

18. www.ziyounet.uz;

19. www.natlib.uz

20. www.twirpx.com

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI



Tasdiqlayman
O'quv ishlari bo'yicha prorektor:
B.T. Madots. A. Mamatyusupov
2020 - yil

«TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI»
fanining

ISHCHI O'QUV DASTURI

Bilim sohasi: 100000 Gumanitar soha
Ta'lim sohasi: 140000 Tabiiy fanlar
Ta'lim yo'nalishi: 5140300 Mexanika

Umumiy o'quv soati -516 soat

Shu jumladan:

Ma'ruza – 136 soat (3 – semestr – 52 soat; 4 – semestr – 50 soat;
5-semestr- 34 soat)
Amaliy mashg'ulotlar – 136 soat (3 – semestr – 52 soat; 4 – semestr – 50 soat;
5-semestr- 34 soat)
Mustaqil ta'lim – 244 soat (3 – semestr – 92 soat; 4 – semestr – 92 soat;
5-semestr- 60 soat)

Andijon-2020 y

Fanning ishchi o'quv dasturi O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 2018 yil "14" iyundagi 531-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan "Tutash muhitlar mexanikasi asososlari" fani dasturi asosida tayyorlangan.

Fan dasturi Andijon davlat universiteti kengashining 2020 yil "____" dagi "____" sonli bayoni bilan tasdiqlangan.

Tuzuvchilar:

Aliyeva J. - ADU, "Matematika" kafedrasi katta o'qituvchisi

Taqrizchi:

Mullajonov R. - ADU, "Matematika" kafedrasi dotsenti

ADU Fizika-matematika fakulteti dekani : X. Mansurov.
2020 yil, "____"

"Matematika" kafedrasi mudiri: N.Umrzaqov.
2020 yil, "____"

1.O'quv fanining dolzarbligi va oliy kasbiy ta'limdagi o'rni

Tutash muhitlar mexanikasi fani zamonaviy texnikaning turli murakkab texnik jarayonlarda mexanik xarakatlarni matematik nuqtai nazardan tavsiflash, tutash muhit modellarini tuzish va ularga oid masalalarni yechish uchun nazariy ustqurma sifatida va amaliy ahamiyatga egadir.

Tutash muhitlar mexanikasi fani umumiy kasbiy fanlardan biri sifatida 3-,4-,5-semestrda o'qitiladi. Mazkur fanni o'zlashtirish doirasida o'quv rejasidagi matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya, differensial geometriya, differensial tenglamalar, variatsion hisob va optimallashtirish, hisoblash usullarini chuqur o'zlashtirilishi, matematik tahlil, geometriya, differensial tenglamalar, nazariy mexanika fanlaridan yetarli bilim va ko'nikmalarga ega bo'lishlari talab etiladi. Mazkur fandan olingan bilimlar esa suyuqlik va gazlar mexanikasi asoslari, deformatsiyalanuvchi qattiq jism mexanikasi asoslari hamda ixtisoslik fanlardan nazariy va amaliy mashg'ulotlarni bajarishda keng qo'llanilib, bo'lg'usi mutaxassislarda ko'nikma va malaka shakllanishida muhim o'rin tutadi.

O'quv fanining maqsadi va vazifasi

Fanni o'qitishning maqsadi - Tutash muhitlar mexanikasi (TMM) kursini o'qitishdan maqsad mexanika yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga ushbu yo'nalishning negizini tashkil qiluvchi fanlardan biri TMMning fundamental asoslarini bilish orqali, deformatsiyalanuvchi muhitning umumiy hossalari va harakat qonunlarini o'rgatishdan iboratdir.

Fanni o'qitishning vazifalari: deformatsiyalanuvchi muhit harakatini o'rganishning matematik usullarini o'rganish, Tutash muhitlar mexanikasi fani doirasida talabalarga chuqur nazariy bilim berish va muayyan ko'nikmalar hosil qilish, ular yo'nalishning maxsus fanlar bloki tarkibida o'qitiladigan fanlarni o'zlashtirishlari uchun yetarli bilim berish hisoblanadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim, ko'nikma va malakalariga quyidagi talablar qo'yiladi. Talaba:

- TMM fanini tinglagan talabalar deformatsiyalar va kuchlanishlar nazariyalarini puhta o'zlashtirgan bo'lishlari, tutash muhitning klassik modellari to'g'risida dastur doirasida bilimga ega bo'lishlari, TMMning asosiy tenglamalarini va termodinamikaning asosiy qonunlarini amaliyotda qo'llash usullari to'g'risida tasavvurga ega bo'lishlari;

- tutash muhitning murakkab modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak. Tutash muhit kinematikasi, deformatsiyalar va kuchlanishlar nazariyasi va TMM kursining boshqa barcha qismlariga oid misol va masalalar yechishni bilishi va ulardan foydalana olishi;

- tutash muhit klassik modellari harakati uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur yechimlarni

tahlil qila olish ko'nikmalariga ega bo'lishlari kerak.

2. "Tutash muhitlar mexanikasi" fanidan mashg'ulotlarning mavzular va soatlar bo'yicha taqsimlanishi

Mavzular nomi		Ajratilgan soat					
		ja'mi	ma'ruza	amaliy	laborat.	seminar	mustaqil ta'lim
	3 – semester						
1	“Tutash muhitlar mexanikasi” faniga kirish.		2	-	-	-	10
2	Tenzor hisob elementlari.		8	8	-	-	14
3	Tenzorlar ustida amallar.		8	20	-	-	14
4	Deformasiyalanuvchan muhit kinematikasi.		8	8	-	-	12
5	Deformasiyalar nazariyasi.		10	8	-	-	14
6	Muhit deformatsiyasi tezligi.		8	2	-	-	14
7	Tutash muhitning harakati turlari		8	4	-	-	14
	Jami	194	52	50	-	-	92
	4-semestr						
8	TMMning dinamik tenglamalari.		10	8	-	-	16
9	Kuchlanishlar nazariyasi.		8	10	-	-	16
10	Tutash muhitning harakat tenglamari.		6	4	-	-	14
11	Tutash muhitning klassik modellari.		6	16	-	-	16
12	Nav'e-Stoks va Lame tenglamalari.		8	4	-	-	14
13	Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari.		14	8	-	-	16
	Jami	194	52	50	-	-	92
	5-semestr						
14	Ikki parametrlı muhitlar.		10	16	-	-	16
15	Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi.		8	8	-	-	14
16	Termoyopishqoq suyuqlik modeli.		12	6	-	-	16
17	Umulashgan Guk qonuni.		4	4	-	-	14
	Jami	128	34	34	-	-	60

	Umumiy jami	268	68	68	-	-	244
--	-------------	-----	----	----	---	---	-----

3. Ma'ruza mashg'ulotlari

Ma'ruza mashg'ulotlari multimedia qurilmalari bilan jixozlangan auditoriyada akademik guruhlar oqimi uchun o'tiladi.

“Tutash muhitlar mexanikasi” fani bo'yicha ma'ruza mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

№	Mavzular nomi	Soatlar
3-semestr		
1.	Kirish. Tutash muhitlar mexanikasi predmeti. Tutash muhitlar tushunchasi.	2
2.	Miqdorlarni indeksli belgilash. Tortburchakli dekart va egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Kovariant va kontvariant koordinata bazislari.	2
3.	Indekslarni ko'tarish va tushurush amallari. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar.	2
4.	Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Slindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish.	2
5.	Skalyar va vektor miqdorlar.	2
6.	Tenzor. Tenzorlar ustida amallar.	2
7.	Tenzorlarning invariantlari. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar. Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Metrik va diskriminant tenzorlar. Levi-Chivita tenzori.	2
8.	Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar. Shar va deviator tenzori. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Harakteristik tenglama. Tenzorning hos vektorlari.	2
9.	Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi. Tenzorning asosiy invariantlari. Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
10.	Kristofell belgilari va ularning xossalari.	2
11.	Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
12.	TMMning asosiy farazlari. Hamroh koordinata sistemasi.	2
13.	Muhitning harakat tenglamasi.	2
14.	Tutash muhit harakatini tavsiflashning Lagranj va Eyler usullari.	2
15.	Skalyar va vektor maydonlar va ularning ayrim xossalari.	2
16.	Uzayish va siqilish.	2
17.	Deformasiya tenzori, uning bosh o'qlari va qiymatlari.	2
18.	Deformasiya tenzori komponentalarini ko'chish orqali ifodalash. Grin va Al'mansi tenzorlari.	2
19.	Hajmning nisbiy o'zgarishi. Fazoning yevklidlik sharti.	2
20.	Riman-Kristofell tenzori.	2
21.	Deformasiyaning birgalikdagi tenglamalari.	2

22.	Deformatsiya tezligi tenzori.	2
23.	Tutash muhitning cheksiz kichik zarrasida tezlikning taqsimlanishi.	2
24.	Hajmning kengayish tezligi. Tezlik divergensiyasi.	2
25.	Potensialli va uyurmali harakatlar.	2
26.	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
4-semestr		
27.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
28.	Muhitning massasi va zichligi.	2
29.	Massaning saqlanish qonuni.	2
30.	Uzluksizlik tenglamasi. Massaviy va sirt kuchlari.	2
31.	Harakat miqdori tenglamalari.	2
32.	Ichki kuchlanish va uning asosiy hossalari.	2
33.	Kuchlanishlar tenzori.	2
34.	Bosh normal va urinma kuchlanishlar.	2
35.	Tutash muhit muvozanati tenglamasi.	2
36.	Harakat miqdori momenti tenglamalari va ulardan klassik holda kelib chiqadigan natija.	2
37.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari.	2
38.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
39.	Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari.	2
40.	Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
41.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
42.	Nav'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
43.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari – Yung moduli va Puasson koeffitsientlari. Misollar	2
44.	Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati to'la tenglamalar sistemasi.	2
45.	Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari.	2
46.	Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi.	2
47.	Termodinamikaning birinchi qonuni.	2
48.	Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi.	2
49.	Issiqlikning oqimi tenglamasi.	2
50.	O'z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar.	2
51.	Harorat tushunchasi.	2
5-semestr		
52.	Mukammal gaz. Mayer formulasi	2
53.	Izotermik va adiabatik jarayonlar. Puasson adiabatasi. Kamo sikli.	2
54.	Termodinamikaning ikkinchi qonuni.	2

55.	Entropiya. Mukammal gaz uchun entropiya ifodasi.	2
56.	Qoplanmagan issiqlik. Ikki parametrlı muhitlar uchun termodinamik potentsiallar.	2
57.	Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari.	2
58.	Sigiluvchan va sigilmas termoideal suyuqlik modeli.	2
59.	To'la tenglamalar sistemasi.	2
60.	Termoyopishqoq suyuqlik modeli. Gibbs formulasi.	2
61.	Issiqlik o'tkazuvchan yopishqoq suyuqlik uchun issiqlik oqimi tenglamasi.	2
62.	Termoyopishqoq suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi.	2
63.	Termoelastik jism modeli.	2
64.	To'la tenglamalar sistemasi.	2
65.	Kuchlanish potentsiali.	2
66.	Erkin energiya.	2
67.	Umumlashgan Guk qonuni.	2
68.	Yung moduli va Puasson koeffitsienti.	2
Jami		136

Nazariy mashg'ulotlari mazmuni

1-mavzu. "Tutash muhitlar mexanikasi" faniga kirish. Kirish. Tutash muhitlar mexanikasi predmeti. Tutash muhitlar tushunchasi.

2-mavzu. Tenzor hisob elementlari. Miqdorlarni indeksli belgilash. Tortburchakli dekart va egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Kovariant va kontvariant koordinata bazislari. Indeksni ko'tarish va tushurush amallari. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar. Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Slindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish. Skalyar va vektor miqdorlar.

3-mavzu. Tenzorlar ustida amallar. Tenzor. Tenzorlar ustida amallar. Tenzorlarning invariantlari. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar. Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Metrik va diskriminant tenzorlar. Levi-Chivita tenzori. Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar. Shar va deviator tenzori. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Harakteristik tenglama. Tenzorning hos vektorlari. Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi. Tenzorning asosiy invariantlari. Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash. Kristofell belgilari va ularning xossalari. Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.

4-mavzu. Deformasiyalanuvchan muhit kinematikasi. TMMning asosiy farazlari. Hamroh koordinata sistemasi. Muhitning harakat tenglamasi. Tutash muhit harakatini tavsiflashning Lagranj va Eyler usullari. Skalyar va vektor maydonlar va ularning ayrim xossalari.

5-mavzu. Deformasiyalar nazariyasi. Uzayish va siqilish. Deformasiya tenzori, uning bosh o'qlari va qiymatlari. Deformasiya tenzori komponentalarini ko'chish orqali ifodalash. Grin va Al'mansi tenzorlari. Hajmning nisbiy o'zgarishi. Fazoning

yevklidlik sharti. Riman-Kristofell tenzori. Deformasiyaning birgalikdagi tenglamalari.

6-mavzu. Muhit deformatsiyasi tezligi. Deformatsiya tezligi tenzori. Tutash muhitning cheksiz kichik zarrasida tezlikning taqsimlanishi. Hajmning kengayish tezligi. Tezlik divergensiyasi.

7-mavzu. Tutash muhitning harakati turlari. Potensialli va uyurmali harakatlar. Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari. Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.

8-mavzu. TMMning dinamik tenglamalari. Muhitning massasi va zichligi. Massaning saqlanish qonuni. Uzlaksizlik tenglamasi. Massaviy va sirt kuchlari. Harakat miqdori tenglamalari.

9-mavzu. Kuchlanishlar nazariyasi. Ichki kuchlanish va uning asosiy hossalari. Kuchlanishlar tenzori. Bosh normal va urinma kuchlanishlar.

10-mavzu. Tutash muhitning harakat tenglamari. Tutash muhit muvozanati tenglamasi. Harakat miqdori momenti tenglamalari va ulardan klassik holda kelib chiqadigan natija.

11-mavzu. Tutash muhitning klassik modellari. Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari. Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi. Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari. Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav'e-Stoks qonunlari. Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.

12-mavzu. Nav'e-Stoks va Lamé tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari – Yung moduli va Puasson koeffitsientlari. Misollar. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati to'la tenglamalar sistemasi.

13-mavzu. Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari. Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi. Termodinamikaning birinchi qonuni. Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi. Issiqlikning oqimi tenglamasi. O'z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar. Harorat tushunchasi.

14-mavzu. Ikki parametrli muhitlar. Mukammal gaz. Mayer formulasi. Izotermik va adiabatik jarayonlar. Puasson adiabatasi. Karno sikli. Termodinamikaning ikkinchi qonuni. Entropiya. Mukammal gaz uchun entropiya ifodasi. Qoplanmagan issiqlik. Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik potentsiallar.

15-mavzu. Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi. Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari. Siqiluvchan va siqilmas termoideal suyuqlik modeli. To'la tenglamalar sistemasi.

16-mavzu. Termoyopishqoq suyuqlik modeli. Gibbs formulasi. Issiqlik o'tkazuvchan yopishqoq suyuqlik uchun issiqlik oqimi tenglamasi. Termoyopishqoq suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi. Termoelastik jism modeli. To'la tenglamalar sistemasi. Kuchlanish potentsiali. Erkin energiya.

17-mavzu. Umlashgan Guk qonuni. Umlashgan Guk qonuni. Yung moduli va Puasson koeffitsienti.

27.	Siqiluvchan va siqilmas suyuqlik uchun uzviylik tenglamalari	2
28.	Deformasiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish.	2
29.	Deformasiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish.	2
30.	Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari.	2
31.	Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari.	2
32.	Cheksiz kichik deformatsiya.	2
33.	Cheksiz kichik deformatsiya.	2
34.	Kuchlanish.	2
35.	Kuchlanish.	2
36.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
37.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
38.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
39.	Potentsialli va uyurmali harakatlar.	2
40.	Potentsialli va uyurmali harakatlar.	2
41.	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
42.	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
43.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
44.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
45.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli.	2
46.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli.	2
47.	Eyler tenglamalari.	2
48.	Eyler tenglamalari.	2
49.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
50.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
51.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
5-semestr		
52.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
53.	Navg'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
54.	Navg'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
55.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari - Yung moduli va Puasson koeffitsienti. Misollar.	2
56.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari - Yung moduli va Puasson koeffitsienti. Misollar.	2
57.	Termodinamika masalalari.	2
58.	Termodinamika masalalari.	2
59.	Ikki parametrlı muhitlar.	2
60.	Ikki parametrlı muhitlar.	2
61.	Mukammal gaz.	2
62.	Mukammal gaz.	2

27.	Siqiluvchan va siqilmas suyuqlik uchun uzviylik tenglamalari	2
28.	Deformasiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish.	2
29.	Deformasiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish.	2
30.	Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari.	2
31.	Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari.	2
32.	Cheksiz kichik deformatsiya.	2
33.	Cheksiz kichik deformatsiya.	2
34.	Kuchlanish.	2
35.	Kuchlanish.	2
36.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
37.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
38.	Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.	2
39.	Potentsialli va uyurmali harakatlar.	2
40.	Potentsialli va uyurmali harakatlar.	2
41.	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
42.	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
43.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
44.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
45.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli.	2
46.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli.	2
47.	Eyler tenglamalari.	2
48.	Eyler tenglamalari.	2
49.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
50.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
51.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
5-semestr		
52.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
53.	Navg'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
54.	Navg'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
55.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari - Yung moduli va Puasson koeffitsienti. Misollar.	2
56.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari - Yung moduli va Puasson koeffitsienti. Misollar.	2
57.	Termodinamika masalalari.	2
58.	Termodinamika masalalari.	2
59.	Ikki parametrli muhitlar.	2
60.	Ikki parametrli muhitlar.	2
61.	Mukammal gaz.	2
62.	Mukammal gaz.	2

63.	Puasson adiabatasi.	2
64.	Puasson adiabatasi.	2
65.	Karno sikli.	2
66.	Karno sikli.	2
67.	Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik potentsiallar (ichki energiya, erkin energiya, ental'piya, Gibbs potentsiali)ni aniqlash.	2
68.	Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik potentsiallar (ichki energiya, erkin energiya, ental'piya, Gibbs potentsiali)ni aniqlash.	2
Jami		136

Amaliy mashg'ulotlar mazmuni

1. Indeksli belgilash. Koordinata bazislari. Koordinatalarni almashtirish. Lamé koeffitsientlarini hisoblash.
2. Tenzorlar ustida amallar. Tenzorning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlarini topish. Bosh invariantlar.
3. Levi-Chivita tenzori. Ikkinchi rang tenzorlar. Shar va deviator tenzori.
3. Ortogonal koordinata sistemasida Kristoffel belgilarini hisoblash. Skalyar, vektor va tenzorning gradientini hisoblash.
4. Harakat tenglamalari. Lagranj va Eyler o'zgaruvchilari. Skalyar va vektor maydonlar.
5. Deformatsiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho'zilish va siljish.
6. Lagranj va Eyleming chekli deformatsiya tenzorlari. Cheksiz kichik deformatsiya.
7. Kuchlanish. Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo'nalishlari.
8. Potentsialli va uyurmali harakatlar. Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.
9. Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.
10. Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari. Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.
11. Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari. Nav'e-Stoks va Lamé tenglamalari. *
12. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari - Yung moduli va Puasson koeffitsienti. Misollar.
13. Termodinamika masalalari. Ikki parametrli muhitlar.
14. Mukammal gaz. Puasson adiabatasi. Karno sikli.
15. Ikki parametrli muhitlar uchun termodinamik potentsiallar (ichki energiya, erkin energiya, ental'piya, Gibbs potentsiali)ni aniqlash.

5." Tutash muhitlar mehanikasi" fanidan mustaqil ta'limni tashkil etishning shakli va mazmuni

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Hajmi (Soatda)
----------	----------------------------------	-----------------------

3-semestr		
1	Issiqlik va ish tushunchalari.	18
2	Deformatsiyalanuvchi qattiq jism termodinamik potentsiallari	18
3	Materiallar charchashi, oqishi.	18
4	Relassatsiya jarayoni.	18
5	Deformatsion plastiklik nazariyasini ishlatilishi	20
Jami		92
4-semestr		
6	Ideal suyuqlikni stasionar harakati uchun integral munosabatlarni qo'llash. Oddiy masalalarni yechish.	24
7	Fizik miqdorlar o'lchamlari. II-teorema, aniqlovchi parametrlar; ularni gidrodinamika va elastiklik nazariyasida qo'llanilishi.	24
8	Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakati.	22
9	Uyurmalar maydoniga soda misollar.	22
Jami		92
5-semestr		
10	Gidrodinamik va Gazodinamik mashinalar.	20
11	Deformatsiya tenzori komponentlarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.	20
12	Kuchlanish tenzori komponentlarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.	20
Jami		60
Umumiy jami		244

“Tutash muhitlar mehanikasi” fani bo'yicha talabaning mustaqil ta'limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta'minlangan.

Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma'ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uyga vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha testlar yechadi. Mustaqil ta'lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Fan bo'yicha kurs ishi. Kurs ishi fan mavzulariga taaluqli masalalar yuzasidan talabalarga yakka tartibda tegishli topshiriq shaklida beriladi. Kurs ishinin hajmi, rasmiylashtirish shakli, baholash mezonlari ishchi fan dasturida va tegishli kafedra tomonidan belgilanadi. Kurs ishini bajarish talabalarda fanga oid bilim, ko'nikma va malakalarni shakllantirishga hizmat qilishi kerak.

“Tutash muhitlar mehanikasi” fanidan 4-semestr uchun kurs ishi mavzulari.

1. Kristofel simvollarini ortogonal va egri chiziqli koordinatalarda yozilishi.
2. Eyler tenglamasini egri chiziqli koordinatalarda yozilishi.
3. Uzlaksizlik tenglamasini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
4. Eyler tenglamasini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
5. Anizotrop materiallar uchun Guk qonunini hususiy hollari.
6. Tezlik vektorini uyurma va tezlik divergensiyasi berilganda hisoblash.
7. Vektor maydoni hossalari va Stoks, Gauss-Ostrogradskiy formulalari.
8. Tekis to'liqlar, progressiv to'liqlar, Riman to'liqlari.
9. Uyurma vektor, Bio-Savar formulasi. Uyurma vektorlar tizimi.
10. Deformasiya haqida tushuncha. Deformasiya tenzori.
11. Tenzor va vektor maydonlari uchun teoremlar.
12. T. M. uchun uzviylik tenglamalari.
13. T.M. ning turli koordinatalar sistemalaridagi harakat tenglamalari.
14. T.M. uchun harakat miqdori va harakat miqdori momenti haqidagi teorema.
15. Ideal suyuqlik va gaz modellari.
16. Chiziqli elastik jism modeli.
17. Yopishqoq suyuqlik modeli.
18. Qayishqoq-elastik jism modeli
19. Plastik jism modeli
20. Umumlashgan Guk qonuni.

**Fan bo'yicha talabalar bilimini baholash va nazorat qilish mezonlari
Fanning o'quv yuklamasi**

	Mashg'ulot turi	Ajratilgan soat		Jami
		3-semestr	4- semestr	
1	Ma'ruza	52	50	102
2	Amaliy	52	50	102
3	Mus.ish	92	92	184
	Jami	196	192	388

“Tutash muhitlar mehanikasi” fanidan talabalar bilimini baholash tartibi va mezonlari.

Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat 3-semestrda bir marta og'zaki shaklida o'tkaziladi. 4-semestrda esa test shaklida o'tkaziladi va 5 ta variant 15 ta testdan iborat;

yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat 3-semestrda test shaklida o'tkaziladi va 5 ta variant 15 ta test dan iborat. 4-semestrda esa yozma shaklda 20 ta variantdan iborat bo'ladi;

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Universitet rektorining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o'tkazish jarayoni muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o'tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilish uchun talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi baholar orqali ifodalanadi.

Baholash tartibi va mezonlari

Talabalarining fanlarni o'zlashtirishi 5 ballik tizimda baholanadi.

- **5(a'lo) baho:**

- tutash muhitlar mexanikasi haqida tushunchaga ega bo'lsa va ularga doir masalalarni erkin yecha olsa;
- tenzor nimaligini bilib, ular ustida amallar bajara olsa va masalalar yechishga qo'llay olsa;
- deformatsiya nazariyasini bilsa, ularni hisoblashlarda qo'llay olsa;
- potentsialli va uyurmali harakatlarni va Stoks va Ostrogradskiy teoremlarini bilsa va ularni masalalarga qo'llay olsa.
- termodinamika qonunlarini yoddan bilsa va ularga doir masalalarni ishlay olsa.

- **4(yaxshi) baho:**

- tutash muhitlar mexanikasi haqida tushunchaga ega bo'lsa va ularga doir masalalarni erkin yechishda qiynalsa;
- tenzor nimaligini bilib, ular ustida amallar bajara olsa va masalalar yechishga qo'llay olishda ikkilansa;
- deformatsiya nazariyasini bilsa va ularni amalda qo'llashda qiynalsa;
- potentsialli va uyurmali harakatlarni va Stoks va Ostrogradskiy teoremlarini bilsa va ularni masalalarga qo'llashda qiynalsa;
- termodinamika qonunlarini yoddan bilsa va ularga doir masalalarni ishlashda qiynalsa.

- **3(qoniqarli) baho:**

- tutash muhitlar mexanikasi haqida tushunchaga ega bo'lsa va ularga doir masalalarni erkin yecha olmasa;
- tenzor nimaligini bilib, ular ustida amallar bajara olsa va masalalar yechishga qo'llay olmasa;
- deformatsiya nazariyasini bilsa, ularni hisoblashlarda va ularni amalda qo'llashda qiynalsa;

- potentsialli va uyurmali harakatlarni va Stoks va Ostrogradskiy teoremlarini bilsa va ularni masalalarga qo'llay olmasa;
- termodinamika qonunlarini yoddan bilsa va ularga doir masalalarni ishlay olmasa.

• 2(qoniqarsiz) baho:

- tutash muhitlar mexanikasi haqida tushunchaga ega bo'lmasa va ularga doir masalalarni yecha olmasa;
- tenzor nimaligini bilib, ular ustida amallar bajara olmasa va masalalar yechishga qo'llay olmasa;
- deformatsiya nazariyasini bilmasa, ularni hisoblashlarda va ularni amalda qo'llay olmasa;
- potentsialli va uyurmali harakatlarni va Stoks va Ostrogradskiy teoremlarini bilmasa va ularni masalalarga qo'llay olmasa;
- termodinamika qonunlarini yoddan bilmasa va ularga doir masalalarni ishlay olmasa.

Baholash turlari bo'yicha tuzilgan savollar(topshiriqlar) mazmuni(oddiydan murakkabgacha) baholash me'zonlariga muvofiq talabani o'zlashtirishini holis va aniq baholash imkoniyatini beradi.

Savollar tarkibiga fan dasturidan kelib chiqqan holda nazariy materiallar bilan birga mustaqil ish, amaliy mashg'ulotlari materiallari ham kiritiladi.

Baholashlarni o'tkazish muddati

Baholashlarni tasdiqlangan o'quv jarayoni jadvaliga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan jadval asosida fan bo'yicha o'quv mashg'ulotlarini olib brogan professor o'qituvchilar o'tkazadi

ON va YaN turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan jadvallari asosida o'tkaziladi. YaN semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o'tkaziladi.

Uzrli sabablarga ko'ra baholashlarda qatnashmagan talabalarga, asoslovchi hujjatlar taqdim etilgan taqdirda, fakultet dekani farmoyishi bilan bahoalshlarni shahsiy grafik asosida topshirishga ruhsat beriladi.

Oraliq baholashdan qoniqarsiz baholangan talaba yakuniy baholashgacha qarzdorligini qayta topshirishi mumkin.

Yakuniy baholashdan 2(qoniqarsiz) baholangan talaba akademik qarzdor hisoblanadi,

Kuzgi semestr natijalari bo'yicha qarzdor talabalarga navbatdagi semester yakunigacha bahorgi semester natijalari bo'yicha qarzdor talabalarga yangi o'quv yili boshlanishiga qadar qayta topshirishga qo'shimcha muddat beriladi.

Qayta topshirishlar soni ikki martadan oshmasligi kerak. Ikkinchi qayta topshirish fakultet dekani tasdiqlagan komissiya tomonidan qabul qilinadi.

Qo'shimcha muddatlarda ham akademik qarzdorlikni bartaraf etmagan talaba fakultet dekani tavsiyasiga ko'ra belgilangan tartibda rektorning buyrug'i bilan kursda qoldiriladi.

Kursda qoldirilgan talaba o'qishini fanlarni o'zlashtirmagan semestr boshidan boshlaydi va mazkur semestrda barcha fanlarni qayta to'liq o'zlashtirishi shart.

6. Asosiy va qo'shimcha o'quv adabiyotlar va axborot manbalari **Asosiy adabiyotlar**

1. Reddy J.N. An Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition- Cambridge Univ. Press, 2013. 450 p.
2. Bowen R.M. Introduction to Continuum Mechanics for Engineers (Revised Edition).-Texas A&M Univ., 2007. 300 p.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1, 2. М.: Наука, 1994, 2004 г. (электрон вариант)
4. Маматкулов Ш. Туташ мухит механикаси (1-қисм)6, ўқув қўлланма. Т.: Университет6 2003.
5. Механика сплошных сред в задачах. В двух томах. Т. 1. Теория и задачи. М.: «Московский лицей», 1996. Под ред. М.Э. Эглит.

Qo'shimcha adabiyotlar

6. Mirziyoyev Sh.M. Erkin va farovon, demokratik O'zbekiston davlatini birgalikda barpo etamiz. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag'ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo'shma majlisidagi nutqi, Toshkent, 2016.56-b.
7. Mirziyoyev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat'iy tartib-intizom va shahsiy javobgarlik-har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo'lishi kerak. Mamlakatimizni 2016 yilda ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning asosiy yakunlari va 2017 yilga mo'ljallangan iqtisodiy dasturning eng muhim ustivor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining kengaytirilgan majlisidagi ma'ruza. 2017 yil 14 yanvar-Toshkent, O'zbekiston, 2017. 104-b.
8. Mirziyoyev Sh.M. Qonun ustivorligi va inson manfaatlarini ta'minlash-yurt taraqqiyoti va halq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016 yil 7 dekabr-Toshkent, O'zbekiston, 2017. 48-b.
9. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. Mazkur kitobdan O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2016 yil 1 noyabrdan 24 noyabrga qadar Qoraqalpog'iston Respublikasi, viloyatlar va Toshkent shahri saylovchilari vakillari bilan o'tkazilgan saylovoldi uchrashuvlarida so'zlagan nutqlari o'rin olgan.- Toshkent, O'zbekiston, 2017. 488-b.
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: М.: Наука, 1971.
11. Мейз. Дж. Теория и задачи механики сплошной среды.- М.: Мир, 1974
12. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред. Т. 1. М.: МГТУ, 2004.

Qo'shimcha o'quv materiallari

KIRISH

Tutash muhitlar mexanikasi fani zamonaviy texnikaning turli murakkab texnik jarayonlarini, mexanik harakatlarini o'rganish, ularni matematik nuqtai nazardan tasavvur qilish, tutash muhit modellarini tuzish va unga oid masalalarni yechish uchun nazariy asos bo'ladi hamda nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Fanni o'qitishning maqsadi va vazifalari

Tutash muhitlar mexanikasi (TMM) kursini o'qishdan maqsad mexanika yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalarga ushbu yo'nalishning negizini tashkil qiluvchi fanlardan biri-TMMning fundamental asoslarini berish.

Tutash muhitlar mexanikasi fani vazifasi quyida keltirilgan dastur doirasida talabalarga chuqur nazariy bilim berish va muayyan ko'nikmalar hosil qilish hamda maxsus fanlar bloki tarkibida o'qitiladigan kurslarni o'zlashtirishlari uchun yetarli bilim berish hisoblanadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilimiga, ko'nikma va malakasiga

qo'yiladigan talablar

TMM predmetni tinglagan talabalar deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyalarini puxta o'zlashtirgan bo'lishlari, tutash muhitning klassik modellari to'g'risida kurs dasturi doirasida bilimga ega bo'lishlari, TMMning asosiy tenglamalarini va termodinamikaning asoslarini *bilishi kerak*.

Tutash muhit klassik modellari harakati uchun to'la tenglamalar sistemasi mavjud bo'lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o'zlashtirgan bo'lishlari hamda mazkur yechimlarni tahlil qila olish *ko'nikmalariga ega bo'lishi kerak*.

Tutash muhitning murakkab (noklassik) modellarini tuzish zaruriyatini tushunishlari va muayyan modellar haqida ma'lum tushunchaga ega bo'lishlari kerak. Tutash muhit kinematikasi, deformasiyalar va kuchlanishlar nazariyasi va TMM kursining boshqa barcha qismlariga oid misol va masalalar yecha olish *malakalariga ega bo'lishi kerak*.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jixatdan uzviy ketma-ketligi

Tutash muhitlar mexanikasi fani 4, 5 va 6 semestrlarda o'qitiladi; ungacha nazariy mexanikani asosiy material o'qitilgan bo'ladi. Tutash muhitlar mexanikasi fani mexanika yo'nalishining o'quv rejasidagi fanlar: matematik analiz, chiziqli algebra va geometriya, differensial geometriya, differensial tenglamalar, variatsion hisob va optimallashtirish, hisoblash usullari bilan uzviy bog'liq. Ularni mustahkamlash omili amaliy va seminar mashg'ulotlari hamda talabalarni mustaqil

ishlashga o'rgatish hisoblanadi. O'quv rejada TMM fanini o'qitish uchun zarur bo'lgan matematik fanlar ketma-ketligi hisobga olingan, fanlarning uzviy ketma-ketligi ta'minlangan. Ushbu fanning Mexanika yo'nalishi va 5A140302 – Deformasiyalanuvchi qattiq jism mexanikasi, 5A140303 – Suyuqlik va gaz mexanikasi ixtisosliklari o'quv rejalarida qayd etilgan bir qator fanlarni o'qish uchun asos bo'lishi hisobga olingan.

Fanning ishlab chiqarishdagi o'rni

Mexanika yunalishining bakalavr bosqichida o'qiladigan barcha ixtisoslik fanlari tutash muhitlar mexanikasi fanidagi modellar va ularning xususiyatlariga asoslanadi. Bakalavr o'quv rejasida qayd etilgan materiallar qarshiligi, gidravlika va maxsus fanlar qismida o'qitiladigan kurslarning aksariyati TMM negizida o'qiladi.

Fanni o'qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Tutash muhitlar mexanikasi fanini o'qitish ma'ruza, amaliy, seminar mashg'ulotlar va mustaqil ish ko'rinishda bilim olish bilan birga o'qitishning ilg'or va zamonaviy usullarni, yangi informasion texnologiyalarni tatbiq qilish ta'lim sifatini oshiradi, xususan o'qitish jarayonida yangi matematik dasturlar PowerPoint, Maple, Mathcad, Matlab va mavjud elektron darsliklar, veb-saytlardan foydalaniladi.

Tutash muhitlar mexanikasi kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo'naltirilgan ta'lim. Bu ta'lim o'z mohiyatiga ko'ra ta'lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to'laqonli rivojlanishlarini ko'zda tutadi. Bu esa ta'limni loyihalashtirayotganda, albatta, ma'lum bir ta'lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog'liq o'qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam etmog'i lozim: jarayonning mantiqiyligi, undagi barcha bo'g'inlarning o'zaro bog'langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo'naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta'lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo'naltirilgan ta'limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o'quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o'z-o'zini faollashtirishi va o'z-o'zini ko'rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta'lim beruvchi va ta'lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e'tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta'lim. Ta'lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta'lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni obyektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo'llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta'minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo'llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o'quv jarayoniga qo'llash.

O'qitishning usullari va texnikasi. Ma'ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta'lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O'qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o'zaro o'rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O'qitish vositalari: o'qitishning an'anaviy shakllari (darslik, ma'ruza matni) bilan bir qatorda - kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikasiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o'zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so'rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o'qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o'quv mashg'uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko'rinishidagi o'quv mashg'ulotlarini rejalashtirish, qo'yilgan maqsadga erishishda o'qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg'ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o'quv mashg'ulotida ham butun kurs davomida ham o'qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

"Tutash muhit mexanikasi" fanini o'qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, "Excel" elektron jadvallar dasturlaridan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo'yicha talabalar bilimni baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. "Internet" tarmog'idagi rasmiy iqtisodiy ko'rsatkichlaridan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so'z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o'tkaziladi.

Asosiy qism: Fanning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma'ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo'yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo'lgan bilim va ko'nikmalar to'la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo'yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo'layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o'zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalaridagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so'nggi yutuqlari e'tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Fanning nazariy mashg'ulotlar mazmuni

Kirish.

Tutash muhit mexanikasi (TMM)ning umumiy tavsifi; TMM asosiy muammolari; qattiq, suyuq va gaz holatidagi jismlarning xossalarini statistik, mikroskopik va fenomenologik makroskopik nuqtai-nazarda o'rganish usullari; TMMning asosiy gipotezalari.

Tenzor hisob elementlari va deformatsiyalanuvchi muhitlar kinematikasi:

Indeksli belgilash; to'g'ri burchakli va egri chiziqli koordinata sistemalari; kovariant va kontravariant bazis vektorlar; koordinatalarni almashtirish; egri chiziqli ortogonal koordinatalar sistemasi; silindrik va sferik koordinatalar sistemalari.

Skalyar va vektorlar; tenzor va tenzorlar bilan amallar; metrik va diskriminant tenzorlar; ikkinchi rang tenzorlarning bosh yo'nalishlari; asosiy invariantlar; Kristofell simvollarini va ularning xossalari; skalyar va vektorlarni koordinata bo'yicha differensiallash; tenzorlarni koordinata bo'yicha differensiallash.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2; Q7;Q9;Q11;Q12.

Muhitning harakat tenglamalari. Hisob sistemalari.

TMMni o'rganishda Lagranj va Eyler usullari; Lagranj va Eyler koordinatalarida o'zaro o'tish; tezlik, tezlanish. Lokal va individual hosila; tok chizig'i va uyurma chiziqlar, ularning kinematik xossalari; tutash muhit deformatsiyasi: cho'zilish va siljish, nisbiy uzayish. Deformatsiya tenzori, cheksiz kichik deformatsiya tenzori komponentlarining mexanik ma'nosi. Deformatsiya tenzorining bosh o'qlari va bosh komponentlari; deformatsiya tenzori sirti; invariantlar; hajmiy nisbiy kengayish; deformatsiya tenzori elementlarini ko'chish vektori komponentlari orqali ifodalash va harakat qonuni berilganda hisoblash.

Deformatsiyaning birgalikda bo'lish sharti; cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi.

Deformatsiya tezligi tenzori; tutash muhit cheksiz kichik zarrachasi atrofida tezliklarning taqsimlanishi. Koshi-Gelmngols teoremasi. Tezlik divergensiyasi; tezlik vektori sirkulyatsiyasi; potentsialli tezlik maydoni; Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari; O'zgaruvchan hajm bo'yicha olingan integraldan vaqt bo'yicha hosila formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5; Q6;Q11;Q12.

Dinamik tushunchalar va tenglamalar: massa va zichlik; Eyler va Lagranj koordinatalarida massaning saqlanish qonunining yozilishi; massaviy va sirt kuchlar tushunchalari; tashqi va ichki kuchlar, kuchlanishlar; tutash muhit harakat miqdori va harakat miqdori momenti; chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdorining o'zgarishi tenglamasi; kuchlanish uchun asosiy munosabat; kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh kuchlanishlari, kuchlanish tenzori komponentalarining mexanik ma'nosi.

Tutash muhit harakat differensial tenglamalari (ixtiyoriy va dekart koordinatalar sistemalarida). Harakat miqdori momenti haqida teorema, klassik hol.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q11; Q6.

Ideal suyuqlik(gaz) modeli: Eyler tenglamalari. Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.

Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari: chiziqli elastik jism va chiziqli yopishqoq suyuqlik - Guk va Navye-Stoks qonunlari. Izotrop muhitlar uchun Guk va Navye-Stoks qonunlari. Navye-Stoks va Lamé tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsiyentlari, Yung moduli va Puasson koeffitsiyenti.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5; Q6;Q8.

Gidromexanika: Hidrostatika tenglamalari va eng sodda masalalar; Arximed qonuni; Bernulli integrali va uning tadbiquiga oid ayrim masalalar; mukammal gazning adiabatik oqimi uchun Bernulli integrali; tovush tezligi. Max soni; Laval naychasining elementar nazariyasi haqidatushuncha.

Potentsialli harakat: Koshi-Lagranj integrali; to'lqin tarqalish tenglamasi; Laplas tenglamasi, uning xususiy yechimlari; ideal siqilmas suyuqlikda sferaning harakati va sferani suyuqlik oqib o'tishi masalasi; D'alamber paradoksi; kichik qo'zg'alishli harakatlar; chekli amplitudali qo'zg'alishlar, Riman to'lqinlari.

Elastiklik nazariyasi: elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi; Beltrami-Mitchell tenglamalari; Sen-Venan prinsipi; sterjenning cho'zilishi, buralishi va egilishi masalalari; Lamé masalasi; Klayperon tenglamasi va elastiklik nazariyasi masalasi yechimining yagonaligi.

Yopishqoq siqilmas suyuqlikningharakati: yopishqoq siqilmas suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi va uning aniq yechimlari: silindrik quvurdagi harakat, Gagen-Puazeyl

qonuni. π -teorema. Mexanikada hodisalarni modellashtirish va o'xshashlik; o'xshashlik kriteriyalari. Frud, Struxap, Eyler va Reynolds sonlari. Reynolds soni kichik bo'lgan hol. Yopishkok sikilmas suyuqlik ichida sharning sekin xarakati. Stoks formulasi. Reynolds soni katta bo'lgan hol. Laminar chegaraviy qatlam tenglamalari. Blazius masalasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q6;Q10;Q11.

Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari: Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi. Termodinamikaning birinchi qonuni. Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi. Issiqlikni oqishi tenglamasi. O'z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar. Harorat (temperatura) tushunchasi. Ikki parametrlil muhitlar. Mukammal gaz. Mayer formulasi. Izotermik va adiabatik jarayonlar. Puasson adiabatasi. Karno sikli. Termodinamikaning ikkinchi qonuni. Entropiya. Mukammal gaz uchun entropiya ifodasi. Qoplanmagan issiqlik. Ikki parametrlil muhitlar uchun termodinamik potentsiallar (ichki energiya, erkin energiya, entalpiya, Gibbs potentsiali).

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;A3;Q5;Q6;Q10;Q11.

Tutash muhit harakati universal tenglamalar sistemasi va ayrim muhitlarning modellari (ideal va yopishqoq suyuqliklar, elastik jism). Siqiluvchan va siqilmas termoideal suyuqlik modeli. To'la tenglamalar sistemasi (izotermik va adiabatik jarayonlar, mukammal gaz). Termoyopishqoq suyuqlik modeli. Gibbs formulasi. Issiqlik oqimi vektori va Furiye qonuni. Issiqlik o'tkazuvchan yopishqoq suyuqlik uchun issiqlik oqishi tenglamasi. Termoyopishqoq suyuqlik harakati to'la tenglamalar sistemasi. Termoelastik jism modeli. Asosiy va holat tenglamalari. To'la tenglamalar sistemasi. Umumlashgan Guk qonuni.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;A3.

Uzilish sirtlari nazariyasi: kuchli va kuchsiz uzilish sirtlari; tutash muhit mexanikasi asosiy qonunlarining uzilish sirtlarida yozilishi; bir o'lchovli hollarda ayrim asosiy munosabatlar; Gyugoniyu adiabatasi.

Murakkab xossalil muhitlar haqida dastlabki tushuncha.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondoshuv, muammoli ta'lim. Pogona, qadamba-qadam metodi, Venn diagrammasi, T-sxemasi, o'z-o'zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1;A2;Q5;Q6;Q11.

Ma'ruza mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

№	Mavzu nomi vanazorat turlari	Ajratilgans oat
1	3-SEMESTR	4
1	Kirish. Tutash muhitlar mexanikasi predmeti. Tutash muhitlar tushunchasi.	2
2	Miqdorlarni indeksli belgilash. Tortburchakli dekart va egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Kovariant va kontvariant koordinata bazislari.	2

3	Indekslarni ko'tarish va tushurush amallari. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar.	2
4	Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Slindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish.	2
5	Skalyar va vektor miqdorlar.	2
6	Tenzor. Tenzorlar ustida amallar.	2
7	Tenzorlarning invariantlari. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar. Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Metrik va diskriminant tenzorlar. Levi-Chivita tenzori.	2
8	Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar. Shar va deviator tenzori. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Harakteristik tenglama. Tenzorning hos vektorlari.	2
9	Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi. Tenzorning asosiy invariantlari. Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
10	Kristofell belgilari va ularning xossalari.	2
11	Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
12	TMMning asosiy farazlari. Hamroh koordinata sistemasi.	2
13	Muhitning harakat tenglamasi.	2
14	Tutash muhit harakatini tavsiflashning Lagranj va Eyler usullari.	2
15	Skalyar va vektor maydonlar va ularning ayrim xossalari.	2
16	Uzayish va siqilish.	2
17	Deformasiya tenzori, uning bosh o'qlari va qiymatlari.	2
18	Deformasiya tenzori komponentalarini ko'chish orqali ifodalash. Grin va Al'mansi tenzorlari.	2
19	Hajmning nisbiy o'zgarishi. Fazoning yevklidlik sharti.	2
20	Riman-Kristofell tenzori.	2
21	Deformasiyaning birgalikdagi tenglamalari.	2
22	Deformatsiya tezligi tenzori.	2
23	Tutash muhitning cheksiz kichik zarrasida tezlikning taqsimlanishi.	2
24	Hajmning kengayish tezligi. Tezlik divergensiya.	2
25	Potensialli va uyurmali harakatlar.	2
26	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
4-SEMESTR		
27.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
28.	Muhitning massasi va zichligi.	2
29.	Massaning saqlanish qonuni.	2
30.	Uzluksizlik tenglamasi. Massaviy va sirt kuchlari.	2
31.	Harakat miqdori tenglamalari.	2
32.	Ichki kuchlanish va uning asosiy hossalari.	2
33.	Kuchlanishlar tenzori.	2
34.	Bosh normal va urinma kuchlanishlar.	2
35.	Tutash muhit muvozanati tenglamasi.	2
36.	Harakat miqdori momenti tenglamalari va ulardan klassik holda kelib chiqadigan natija.	2
37.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari.	2
38.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2

39.	Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari.	2
40.	Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav’e-Stoks qonunlari.	2
41.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav’e-Stoks qonunlari.	2
42.	Nav’e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
43.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari – Yung moduli va Puasson koeffitsientlari. Misollar	2
44.	Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati to’la tenglamalar sistemasi.	2
45.	Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari.	2
46.	Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi.	2
47.	Termodinamikaning birinchi qonuni.	2
48.	Termodinamik sistemaning to’la va ichki energiyasi.	2
49.	Issiqlikning oqimi tenglamasi.	2
50.	O’z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar.	2
51.	Harorat tushunchasi.	2

Amaliy mashg’ulotlarni tashkil etish bo’yicha ko’rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg’ulotlardan maqsad deformatsiyalanuvchan qattiq jism, suyuqlik va gazlar harakatining tabiat va texnikada uchraydigan sodda masalalarini yechish ko’nikmalarini hosil qilish. Bunda talabalar amaliy mashg’ulotlarda misol va masalalarni yechishda, yechimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo’llay olishlari nazarda tutiladi.

Amaliy mashg’ulotlarning taxminiy mavzulari ro’yxati

Indeksli belgilash. Koordinata bazislari. Koordinatalarni almashtirish. Lamé koeffitsiyentlarini hisoblash.

Tenzorlar ustida amallar. Tenzorning bosh qiymatlari va bosh yo’nalishlarini topish. Bosh invariantlar.

Ortogonal koordinata sistemasida Kristofell belgilarini hisoblash. Skalyar vektor va tenzorning gradiyentini hisoblash. TMMda ishlatiladigan ayrim operatorlar.

Harakat tenglamalari. Lagranj va Eyler o’zgaruvchilari. Skalyar va vektor maydonlar.

Deformatsiya nazariyasi: nisbiy uzayish, cho’zilish va siljish. Lagranj va Eylerning chekli deformatsiya tenzorlari. Cheksiz kichik deformatsiya.

Kuchlanish. Kuchlanish tenzori, uning bosh qiymatlari va bosh yo’nalishlari.

Silindrik va sferik koordinata sistemalarida Eyler tenglamalari.

Gidrostatikaga oid masalalar.

Ideal suyuqlik (gaz) harakatiga oid masalalar.

Tormozlanish parametrlarini aniqlashga masalalar yechish.

To’lqinlar tarqalishiga oid masalalar.

Ideal suyuqlikning uyurmali harakati.

Yopishqoq suyuqlik harakati. Navye-Stoks tenglamalarining silindrik va sferik koordinata sistemalaridagi ko’rinishi.

Stoks formulasini keltirib chiqarish. Stoks formulasini qo’llashga misollar.

Termodinamika masalalari.

Elastiklik nazariyasi masalalarining ko’chishlar orqali qo’yilishi (dekart koordinata sistemasida).

To’g’ri brusning cho’zilishi.

To’g’ri brusning buralishi.

Izoh: Ishchi dasturni shakllantirish jarayonida mazkur mashg'ulotlar turiga ishchi o'quv rejada ajratilgan soat hajmiga mos mavzular tanlab o'qitish tavsiya etiladi.

Amaliyot mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

№	Mavzu nomi va nazorat turlari	Ajratilgan soat
1	3-SEMESTR(52 soat)	4
1	Kirish. Tutash muhitlar mexanikasi predmeti. Tutash muhitlar tushunchasi.	2
2	Miqdorlarni indeksli belgilash. Tortburchakli dekart va egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Kovariant va kontvariant koordinata bazislari.	2
3	Indekslarni ko'tarish va tushurush amallari. Koordinata bazisi elementlari ustida amallar.	2
4	Ortogonal egri chiziqli koordinatalar sistemasi. Slindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Koordinatalarni almashtirish.	2
5	Skalyar va vektor miqdorlar.	2
6	Tenzor. Tenzorlar ustida amallar.	2
7	Tenzorlarning invariantlari. Simmetrik va antisimmetrik tenzorlar. Tenzorlarni bo'lish teoremasi. Metrik va diskriminant tenzorlar. Levi-Chivita tenzori.	2
8	Ikkinchi rang tenzorlar va matrisalar. Shar va deviator tenzori. Ikkinchi rang tenzorning bosh yo'nalishlari. Harakteristik tenglama. Tenzorning hos vektorlari.	2
9	Tenzorning bosh qiymatlari va kanonik ko'rinishi. Tenzorning asosiy invariantlari. Bazis vektorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
10	Kristofell belgilari va ularning xossalari.	2
11	Skalyar, vektor va ikkinchi rang tenzorni koordinatalar bo'yicha differensiallash.	2
12	TMMning asosiy farazlari. Hamroh koordinata sistemasi.	2
13	Muhitning harakat tenglamasi.	2
14	Tutash muhit harakatini tavsiflashning Lagranj va Eyler usullari.	2
15	Skalyar va vektor maydonlar va ularning ayrim xossalari.	2
16	Uzayish va siqilish.	2
17	Deformasiya tenzori, uning bosh o'qlari va qiymatlari.	2
18	Deformasiya tenzori komponentalarini ko'chish orqali ifodalash. Grin va Al'mansi tenzorlari.	2
19	Hajmning nisbiy o'zgarishi. Fazoning yevklidlik sharti.	2
20	Riman-Kristofell tenzori.	2
21	Deformasiyaning birgalikdagi tenglamalari.	2
22	Deformatsiya tezligi tenzori.	2
23	Tutash muhitning cheksiz kichik zarrasida tezlikning taqsimlanishi.	2
24	Hajmning kengayish tezligi. Tezlik divergensiyasi.	2
25	Potensialli va uyurmali harakatlar.	2
26	Stoks va Gauss-Ostrogradskiy teoremlari.	2
	4-SEMESTR(50 soat)	

27.	Harakatchan hajm bo'yicha olingan integralni vaqt bo'yicha differensiallash.	2
28.	Muhitning massasi va zichligi.	2
29.	Massaning saqlanish qonuni.	2
30.	Uzluksizlik tenglamasi. Massaviy va sirt kuchlari.	2
31.	Harakat miqdori tenglamalari.	2
32.	Ichki kuchlanish va uning asosiy hossalari.	2
33.	Kuchlanishlar tenzori.	2
34.	Bosh normal va urinma kuchlanishlar.	2
35.	Tutash muhit muvozanati tenglamasi.	2
36.	Harakat miqdori momenti tenglamalari va ulardan klassik holda kelib chiqadigan natija.	2
37.	Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari.	2
38.	Ideal suyuqlik harakatini tavsiflovchi to'la tenglamalar sistemasi.	2
39.	Elastik jism va yopishqoq suyuqlik modellari.	2
40.	Chiziqli elastik jism va yopishqoq suyuqlik – Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
41.	Izotrop muhitlar uchun Guk va Nav'e-Stoks qonunlari.	2
42.	Nav'e-Stoks va Lamé tenglamalari.	2
43.	Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsientlari – Yung moduli va Puasson koeffitsientlari. Misollar	2
44.	Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati. Yopishqoq siqilmas suyuqlikning harakati to'la tenglamalar sistemasi.	2
45.	Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari.	2
46.	Tirik kuch teoremasi va ichki sirt kuchlarining ishi.	2
47.	Termodinamikaning birinchi qonuni.	2
48.	Termodinamik sistemaning to'la va ichki energiyasi.	2
49.	Issiqlikning oqimi tenglamasi.	2
50.	O'z holatiga qaytuvchi va qaytmaydigan jarayonlar.	2
51.	Harorat tushunchasi.	2

Kurs ishini tashkil etish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar

Kurs ishining maqsadi talabalarni mustaqil ishlash qobiliyatini rivojlantirish, olgan nazariy bilimlarinn mustahkamlash, amaliy ishlarga qo'llash ko'nikmalarini hosil qilish. Kurs ishini bajarishda nazariy bilimlarni mustaqil tahlil qilish, tanlangan mavzuga oid adabiyotlardan foydalanish ko'nikmasini hosil qilish.

Kurs ishlarining namunaviy mavzulari

1. Eyler va uzluksizlik tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
2. Silliq quvurlarda qarshilik formulalari.
3. Laplas formulasi.
4. Anizotrop materiallar uchun Guk qonunini xususiy hollari.
5. Vektor maydoni xossalari va Stoks, Gauss-Ostragradskiy formulalari.
6. Jismni suyuqlikdagi harakati kinematikasi masalasi.
7. Cheksiz katta massali ideal suyuqlikda jism harakati, unga ta'sir kuchi.
8. Tekis to'lqinlar, progressiv to'lqinlar. Riman to'lqinlari.
9. Uyurma vektori, Bio-Savar formulasi. Uyurma vektorlar tizimi.
10. Kulon ishqalanishidagi kvazistatik yuklanish.
11. Elastik sterjenlar buralishiga doir masala tahlili.

12. Elastik sterjenlar egilishiga doir masala tahlili.
13. Trubaning ichki va tashqi bosimlari uchun (Lyame masalasi) kuchlanish tenzori va uning fizik komponentalari.
14. Tekis kuchlanganlik holati uchun elastiklik nazariyasi masalalarining qo'yilishi.
15. Chekli deformatsiyanish holati kuchlanish tenzori.

Mustaqil ta'limni tashkil etish shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ta'limining asosiy maqsadi – o'qituvchining rahbarligida va nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.

Talabalar nazariy va amaliy mashg'ulotlarda olingan bilimlarga tayangan holda qo'yilgan masalalarni mustaqil hal qila olishlari kerak. Mazkur fandan mustaqil ishlar quyidagicha tashkil qilinadi: nazariy bilimlarni o'zlashtirish, amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik, mustaqil ta'lim uchun mo'ljallangan nazariy va amaliy bilim mavzularini o'zlashtirish.

Talaba mustaqil ishni tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

- Ayrim nazariy mavzularni o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil o'zlashtirish;
- Berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash;
- Nazariy bilimlarni amaliyotda kullash va h.k.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. Issiqlik va ish tushunchalari (bunda energiya tarqalishi usullari va uning miqdori o'rganiladi).
2. Deformatsiyanuvchi qattiq jism termodinamik potentsiallari (bunda erkin energiya, ichki energiya va Gibbs potentsiallari tahlillari beriladi).
3. Materiallar charchashi, oqishi. Relaksatsiya jarayoni.
4. Deformatsion plastiklik nazariyasini ishlatilishi (bunda eng sodda masalalar uchun nazariyani ishlatilishi kuriladi).
5. Muvozanatdagi suyuqlikni egri chiziqli devorga ta'siri. Bosimni bosh vektori va bosh momenti.
6. Ideal suyuqlikni statsionar harakati uchun integral munosabatlarni qo'llash. Oddiy masalalarni yechish,
7. Ideal siqilmaydigan suyuqliklarning potentsial oqimlariga oid masalalar.
8. Fizik mikdorlar o'lchamlari. II-teorema, aniqlovchi parametrlar; ularni gidrodinamika va elastiklik nazariyasida qo'llanilishi.
9. Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakatini aniq yechimlari.
10. Uyurmalar maydoniga sodda misollar.
11. Gidrodinamik va gazodinamik mashinalar (konfuzor va soplo, kompressor, turbina, ejektorlar).
12. Ikki parallel plastinkalar orasidagi harakat; erkin sirt hosil bo'lgan hol;
13. Oseeningtaqribiy yechimi.
14. Deformatsiya tenzori komponentalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
15. Kuchlanish tenzori komponentalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.
16. Yepishqoq suyuqlik, gazlarni harakat va uzluksizlik tenglamalarini silindrik va sferik koordinatalarda yozilishi.

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

№	Mustaqil ta'lim Mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddat.	Hajmi (soatda)
IIIsemestr				
1	Koordinatalarni almashtirish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3-haftalar	5

2	Tenzorlar va ular ustida amallar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	4,5,6–haftalar	5
3	Tutash muhit kinematikasiga doir masalalar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	7,8,9,10,11,12-haftalar	10
4	Kuchlanish tenzori va kuchlanish vektori	Adabiyotlardan konspekt qilish. Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.	13,14,15,16,17, 18,19 –haftalar	14
Jami				34
IVsemestr				
5	Dekart va ortogonal koordinatalar sistemasida elastik jism uchun asosiy munosabatlar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3,4,5 -haftalar	10
6	Dekart va ortogonal koordinatalar sistemasida suyuqliklar uchun asosiy munosabatlar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	6,7,8,9, 10 -haftalar	10
7	Asosiy termodinamik tushunchalar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	11,12,13,14,15 -haftalar	8
8	Holat tenglamalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	16,17,18,19-haftalar	6
Jami				34
Vsemestr				
9	Elektrodinamika tenglamalarining tahlili va ularga doir masalalar yechish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2,3,4,5, 6,7,8,9, 10 –haftalar	14
10	TMM tenglamalarini masalalar qo'yilishiga ko'ra sodda holga keltirish va ularni yechish	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	11,12,13,14,15, 16,17,18,19-haftalar	20
Jami				34
Hammasi				102

Dasturning informatsion – uslubiy ta'minoti

EHM yordamida mexanikaning ba'zi masalarini analitik va sonli yechish, mexanika masalarini o'rganishda dasturlar to'plam (Maple, MathCad, Mathlab va h.k.) laridan foydalanish. Mavjud darsliklar, o'quv qo'llanmalar, elektron adabiyotlar bilan metodik ta'minlanadilar.

Talabalar bilimini nazorat qilish va baxolash uchun mezonlar hamda nazoratlar natijalarini gurux jurnallariga qayd etish bo'yicha tavsiyalar

Ushbu tavsiyalar fakultet jamoasining ishlab chiqarish yig'ilishida muhokoma etilgan va fakultet ilmiy kengashi tomonidan ma'qullangan.

Tutash muhit mehanikasi
fanidan
O‘quv yuklamasi hajmi.

№	Mashg'ulot turi	Ajratilgan soat		
		3 – semestr	4– semestr	Jami
1	Ma'ruza	52	50	102
2	Amaliy	52	50	102
5	Mustaqil ta'lim	92	92	184
Jami		196	192	388

TEST

1. $c_i = (1,0,1)$ bo'lsa, $\delta_{ij}c_i c_j$ nechaga teng? A)2; B)3; C)4; D)1;

2. $\delta_{ij}\delta_{ij}$ yig'indini hisoblang A) 3; B) 2; C) 4; D) 1

3. Kroneker simvoli δ_{ij} ning qiymati nimaga teng? A) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$; B) 0; C) 1; D) 2;

4. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektorning modulini toping. A) 6; B) 4; C) 3; D) 2;

5. Quyidagi tenzorning simmetrik qismini toping $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ B) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ C) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ D) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Quyidagi tenzorning antisimmetrik qismini toping $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{A) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ B) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{ C) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ D) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. $\vec{\nabla}$ differensial operator Dekart koordinatalar sistemasida nimaga teng? A) $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$; \text{ B) } \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}; \text{ C) } \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}; \text{ D) } \vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$$

8. $\varphi = x^2y + zx$ funksiyaning gradiyentini toping.

$$\text{A) } (2xy + z)\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k}; \text{ B) } 2x\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}; \text{ C) } (2xy + z)\vec{i} + x\vec{j} + 2yx\vec{k}; \text{ D) } 2;$$

9. $\text{div}(2x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k})$ ifodaning qiymatini toping. A) 6; B) 3; C) 4; D) 5;

10. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektorning rotorini toping. A) 0; B) 3; C) 1; D) 2;

11. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $\text{grad}(\varphi + \psi) =$ A)

$$\text{grad}\varphi + \text{grad}\psi; \text{ B) } \text{divgrad}(\varphi + \psi); \text{ C) } \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z}; \text{ D) } 0;$$

12. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $\text{grad}(\varphi\psi) =$ A)

$$\varphi \text{grad}\psi + \psi \text{grad}\varphi; \text{ B) } \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi; \text{ C) } \text{rot}(\varphi + \psi); \text{ D) } \text{divgrad}(\varphi + \psi).$$

13. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $\text{divrot}\vec{a} =$

$$\text{A) } 0; \text{ B) } a; \text{ C) } \text{graddiv}\vec{a}; \text{ D) } \text{divgrada};$$

14. Ayniyatning o'ng tomonini toping: $\text{div}(\varphi\vec{a}) =$

$$\text{A) } \varphi \text{div}\vec{a} + \vec{a} \text{grad}\varphi$$

$$; \text{ B) } a; \text{ C) } 0; \text{ D) } \text{divgrada};$$

15. Tutash muhit tezliklar maydoni $\vec{v}$ uchun $\text{rot}\vec{v} = 0$ bo'lsa, u

$$\text{A) } \text{uyurmasiz}; \text{ B) } \text{uyurmali}; \text{ C) } \text{potensialli}; \text{ D) } \text{tekis oqim};$$

16. Agar tezliklar maydonini $\vec{v} = \text{grad}\varphi$ (φ ixtiyoriy skalyar funksiya) ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu tezliklar maydoni ... bo'ladi.

$$\text{A) } \text{potensialli}; \text{ B) } \text{uyurmali}; \text{ C) } \text{uyurmasiz}; \text{ D) } \text{tekis oqim};$$

17. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida quyidagicha berilgan

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2 + A\xi_3, x_3 = \xi_3 + A\xi_2. \text{ Ko'chish vektorini toping.}$$

A)

- $w_1 = 0, w_2 = A\xi_3, w_3 = A\xi_2$; B) $w_1 = \xi_1, w_2 = A\xi_2, w_3 = A\xi_3$; C) $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = A\xi_2$; D) $w_1 = 0, w_2 = A\xi_2, w_3 = A\xi_3$;
18. Tutash muhit harakati Lagranj o'zgaruvchilarida $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2 + A\xi_3, x_3 = \xi_3$ ko'rinishda berilgan. Harakatni Eyler ko'rinishida ifodalang. A) $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 - Ax_3, \xi_3 = x_3$ B) $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 + Ax_3, \xi_3 = x_3$; C) $\xi_1 = x_1 + Ax_2, \xi_2 = x_2 + Ax_3, \xi_3 = x_3$; D) $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2 + Ax_3, \xi_3 = x_3$;
19. Massaning saqlanish qonuni matematik ifodasini ko'rsating. A) $\frac{dm}{dt} = 0$;
B) $\text{grad}\vec{v} = 0$; C) $\text{div}\vec{v} = 0$; D) $\text{rot}\vec{v} = 0$;
20. Quyidagilardan qaysi biri siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini ifodalaydi?
A) $\text{div}\vec{v} = 0$; B) $\text{grad}\vec{v} = 0$; C) $\text{rot}\vec{v} = 0$; D) $\frac{d\rho}{dt} = 0$;
21. Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasini ko'rsating. A)
 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$; B) $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$; C) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\text{div}\vec{v} = 0$; D) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\vec{v} = 0$;
22. Berilgan tezliklar maydonlaridan qaysilari siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini qanoatlantradi? 1) $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$; 2) $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$; 3) $\vec{v} = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} - 4xz\vec{k}$.
A) 1, 3; B) 1; C) 2, 3; D) 1, 2, 3.
23. A va B ning qanday qiymatlarida $\vec{v} = Ax\vec{i} + By\vec{j} - 4z\vec{k}$ tezliklar maydoni siqilmaydigan suyuqlik uchun uzviylik tenglamasini qanoatlantiradi? A)
A) $A+B=4$; B) $A-B=4$; C) $A=2, B=2$; D) $A+B=2$;
24. Kuchlanishning o'lchov birligi nima? A) Paskal; B) Nyuton; C) Joule; D) O'lchovsiz;
25. Deformatsiyaning o'lchov birligi nima? A) O'lchovsiz; B) Joule; C) Nyuton; D) Paskal;
26. Berilgan ko'chishlar maydoni uchun ε_{12} deformatsiya tenzori komponentasini toping
 $u_1 = Ay, u_2 = Bx, u_3 = ABxy, A, B = \text{const.}$ A) $\frac{1}{2}(A+B)$; B) A; C) B; D) $\frac{1}{2}(A-B)$;
27. Jismning biror M nuqtasidagi kuchlanganlik holati quyidagicha berilgan
 $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0, \sigma_{22} = 2, \sigma_{12} = 1, \sigma_{23} = 1, \sigma_{31} = 2$. Normali $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ bo'lgan yuzadagi kuchlanish vektorini toping. A)
 $\vec{P}_n = \sqrt{3}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$; B) $\vec{P}_n = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; C) $\vec{P}_n = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$; D)
 $\vec{P}_n = \sqrt{3}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$;
28. Normali $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ bo'lgan yuzadagi $\vec{P}_n = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ kuchlanish vektorining normal va urinma tuzuvchilarini toping. A)
 $P_{nn} = 2\sqrt{3}, P_{n\tau} = \sqrt{2}$; B) $P_{nn} = 3, P_{n\tau} = 4$; C) $P_{nn} = \sqrt{3}, P_{n\tau} = 4$; D) $P_{nn} = 3, P_{n\tau} = \sqrt{5}$.
29. Berilgan kuchlanish tenzorining deviatr qismini toping $P = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
A) $S = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$; B) $S = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; C) $S = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; D) $S = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

30. Berilgan kuchlanish tenzorining sharsimon qismini toping $(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A) $\sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; B) $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; C) $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; D) $\sigma = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

31. $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ kuchlanish tenzorining bosh qiymatlarini toping. A)

$\sigma = -6, \sigma = -3, \sigma = 9$; B) $\sigma = 1, \sigma = 2, \sigma = 3$; C) $\sigma = 6, \sigma = 3, \sigma = 9$; D) $\sigma = -6, \sigma = -3, \sigma = 5$;

32. Nuqtada berilgan $\sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{22} = 2, \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ kuchlanganlik holati uchun kuchlanish sirtini nima? A)Sfera; B)Paraboloid; C)Tekislik; D)Ellipsoid;

33. Massaviy kuchlar hisobga olinmagan va muhit muvozanatda bo'lsin. Agar $p_{11} = 2x_2x_3, p_{13} = x_1$ bo'lsa, p_{12} ni toping. A) 0; B) x_3 ; C) $x_3x_2^2$; D) 1;

34. Nazariy mexanika masalalarining TMM masalalaridan farqi nimada?
A)Jism absolyut qattiq deb hisoblanadi; B)Kuchlar faqat nuqtaga qo'yiladi;
C)Faqat statik masalalar qaraladi; D)Dinamik masalalar qaraladi;

35. Quyidagi kuchlarning qaysi biri massaviy kuchga misol bo'la oladi? A)
Og'irlik kuchi; B)Jismning biror nuqtasiga ta'sir qiluvchi kuch; C)
Qorning tomga tushgan og'irligi; D)Shamolning devorga ta'siri;

36. Quyidagi kuchlarning qaysi biri sirt kuchiga misol bo'la oladi?
A)C va D, B)Og'irlik kuchi; C)Qorning tomga tushgan og'irligi;
D)Shamolning devorga ta'siri;

37. Tezliklar maydoni quyidagicha berilgan $v_1 = x_1/(1+t), v_2 = 2x_2/(1+t), v_3 = 3x_3/(1+t)$. Tezlanish komponentalarini toping. A)

$a_1 = 0, a_2 = 2x_2/(1+t)^2, a_3 = 6x_3/(1+t)^2$; B) $a_1 = 0, a_2 = 2x_2/(1+t), a_3 = 6x_3/(1+t)$; C) $a_1 = x_1/(1+t)^2, a_2 = 2x_2/(1+t)^2, a_3 = 6x_3/(1+t)^2$; D) $a_1 = 0, a_2 = x_2/(1+t), a_3 = 6x_3/(1+t)$;

38. TMning harakat qonuni quyidagicha berilgan $x_1 = A + (e^{-B\lambda}/\lambda)\sin \lambda(A + \omega t), x_1 = -B - (e^{-B\lambda}/\lambda)\cos \lambda(A + \omega t), x_3 = \xi_3$. Harakat traektoriyasi nima?
A) Radiusi $e^{-B\lambda}/\lambda$ teng aylana; B)To'g'ri chiziq; C)Parabola;
D)O'qlari A va B ga teng bo'lgan ellips;

39. TMning harakat qonuni quyidagicha berilgan $x_1 = (e^{-B\lambda}/\lambda)\sin \lambda(A + \omega t), x_1 = -(e^{-B\lambda}/\lambda)\sin \lambda(A + \omega t), x_3 = \xi_3$. Muhit tezligi modulini toping. A) $\omega e^{-B\lambda}$; B) $v = A + B$; C) $\omega e^{-B\lambda}(\sin \lambda(A + \omega t) + \cos \lambda(A + \omega t))$; D) 0;

40. Tezliklar maydoni vektor ko'rinishida berilgan $\vec{v} = x_1^2 t \vec{i} + x_2 t^2 \vec{j} + x_1 x_3 t \vec{k}$. $t = 1$ moment va $P(1, 3, 2)$ nuqtadagi tezlanish vektorini toping. A)

$\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k}$; B) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$; C) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; D) $\vec{a} = 3\vec{i} + 9\vec{j}$.

41. μ - Lame koeffitsiyentining o'lchov birligi nima?

A) Pa; B)Joul; C)Pa · s; D)N · m;

42. μ' yopishqoqlik koeffitsiyentining o'lchov birligi nima?

A) Pa · s; B)Joul; C)N'yuton; D)N · m;

43. Elastik jism uchun Lame tenglamalari qaysi kattaliklarga nisbatan beriladi?

A)Ko'chishlar; B)Tezliklar; C) Kuchlanish; D) Deformatsiya;

44. $\varphi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)$ potensial funksiya berilgan. Tezliklar maydonini aniqlang.

A) $\vec{v} = -2Ax_1\vec{i} - 2Ax_2\vec{j} + 4Ax_3\vec{k}$; B) $\vec{v} = Ax_1\vec{i} + Ax_2\vec{j} - 4Ax_3\vec{k}$; C)

$\vec{v} = 2Ax_1\vec{i} + Ax_2\vec{j} - 4Ax_3\vec{k}$; D) $(\vec{v} = 2Ax_1\vec{i} + Ax_2\vec{j} - 4Ax_3\vec{k})$;

45. Yopishqoq suyuqliklar uchun kuchlanish tenzori komponentalarini aniqlovchi munosabat qanday ataladi?

A) Nav'e-Stoks qonuni; B) Guk qonuni; C) Nav'e-Stoks tenglamasi; D) Eyler tenglamasi;

46. Berilgan tezliklar maydoni uchun e_{23} deformatsiya tezliklari tenzori komponentasini toping

$u_1 = Ay, u_2 = Bx, u_3 = ABxy, A, B = \text{const.}$ A) $\frac{ABx}{2}$; B) A ; C) B ; D) $\frac{1}{2}(A - B)$;

47. Tutash muhit muvozanatda bo'lsin. Agar $p_{11} = 2x_2x_3, p_{12} = x_1x_3, p_{13} = x_1$ bo'lsa, massaviy kuchlarning x o'qdagi proektsiyasini toping. A) 0; B) x_3 ; C) $x_3x_2^2$; D) 1;

48. Agar suyuqlik tezlik vektorining faqat ikkita komponentasi mavjud bo'lsa, bunday harakat ... deyiladi? A) Tekis oqim; B) Uyurmali; C) Potensialli; D) Uyurmasiz;

49. Yopishqoq suyuqlik uchun Nav'e-Stoks tenglamasini ko'rsating

A) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$; B) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div} \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}$;

C) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div} \vec{v}$; D)

$0 = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div} \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}$;

50. Elastik jism muvozanat holati uchun Lamé tenglamalarini ko'rsating. A)

$(\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = 0$; B) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$; C)

$(\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}$; D) $\mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}$;

51. Ta'rifni to'ldiring: Vektorning orthogonal sistemasi deb shunday $\{\vec{x}_\alpha\}$ vektorlar to'plamiga aytiladiki,

A) bu to'plamning ixtiyoriy vektorlari orasidagi skalyar ko'paytma nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni $(\vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta) = 0, (\alpha \neq \beta)$.

B) bu to'plamning vektorlari orasidagi vector ko'paytma nolga teng bo'lsa, ya'ni $[\vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta] = 0, (\alpha \neq \beta)$.

C) bu to'plamning vektorlari orasidagi skalyar ko'paytma noldan farqli bo'lsa, ya'ni $(\vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta) \neq 0, (\alpha \neq \beta)$.

D) bu to'plamning vektorlari uchun quyidagi shart bajariladi: $[\vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta] = 1, (\alpha \neq \beta)$.

52. δ_{ij} - Kroneker simvoli quyidagiga teng

A) $\delta_{ij} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa;} \end{cases}$ B) $\delta_{ij} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j$; C) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa;} \\ 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa;} \end{cases}$;

D) $\delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}$.

53. Quyidagi yozuvda "gung" va erkin indeksni ko'rsating: $\sigma_{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$

A) i va j - erkin, α va β - gung indekslar; B) j va β - erkin, α va i - gung indekslar;

C) i va α erkin, j va β - gung indekslar; D) α va β - erkin, i va j - gung indekslar;

54. $T = T^{ijkl} \vec{\partial}_i \vec{\partial}_j \vec{\partial}_k \vec{\partial}_l$ tenzor i va j indekslar bo'yicha simmetrik deyiladi, agar quyidagi shart bajarilsa. A) $T^{ijkl} = T^{jikl}$; B) $T^{ijkl} = T^{klij}$; C) $T^{ijkl} = T^{ijlk}$; D) $T^{ijkl} = T^{lkij}$.

55. $\vec{A} = A^i \vec{\partial}_i$ Vektorning kontravariant komponentasidan olingan kovariant hosilasi nimaga teng. A)

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^j} + A^k \Gamma_{kj}^i; \text{ B) } \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \Delta_\alpha A^\alpha; \text{ C) } \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial A^i}{\partial \xi^j} \vec{\partial}_i; \text{ D) }$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^j} = A^i \Gamma_{ij}^k \vec{\partial}_k;$$

56. Tutash muhitning harakati Lagranj ko'rinishda berilgan:

$x_1 = \xi_1$; $x_2 = \xi_2 + A\xi_3$; $x_3 = \xi_3 + A\xi_3$. Harakatni Eyler o'zgaruvchilarida ifodalang.

A) $\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = \frac{1}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2)$; $\xi_3 = x_3 - \frac{A}{A^2 - 1}(Ax_3 - x_2)$; B)

$\xi_1 = x_2$; $\xi_2 = x_1$; $\xi_3 = A(Ax_3 - x_2) + x_3$; C) $\xi_1 = x_2$; $\xi_2 = x_2 + \frac{1}{A^2 - 1}x_3$; $\xi_3 = x_1$; D)

$\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = x_3$; $\xi_3 = x_2 - x_1$;

57. Deformatsiya tenzori komponentalari qanday ifodalanadi: A) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \dot{g}_{ij})$;

B) $\varepsilon_{ij} = g_{ij} - \dot{g}_{ij}$; C) $\varepsilon_i^j = g_{ij} - \dot{g}_{ij}$; D) $e^{ij} = \frac{1}{2} \frac{dg_{ij}}{dt}$;

58. Asriy tenglamani ko'rsating: A)

$\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$, bu yerda $I_1 = \varepsilon_j^i$; $I_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$; $I_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$;

B)

$\lambda^3 I_3 - \lambda^2 I_2 + \lambda I_1 - \lambda = 0$, bu yerda $I_1 = \varepsilon_j^i$; $I_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$; $I_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$;

C)

$\lambda + \lambda^2 I_1 - \lambda^3 I_2 + I_3 = 0$, bu yerda $I_1 = \varepsilon_j^i$; $I_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$; $I_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$;

D)

$\lambda^2 + I_1 \lambda^3 - I_2 \lambda + I_3 = 0$, bu yerda $I_1 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$; $I_2 = \varepsilon_j^i$; $I_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$;

59. Deformatsiya tenzorini ko'chish vektori komponentalari orqali ifodalang: A)

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i)$; B) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \dot{g}_{ij})$; C) $\sigma_{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$; D) $e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$;

60. Muhitning ko'chish vektori: $\vec{w} = (3\xi_2 - 4\xi_1; 2\xi_1 - \xi_3; 4\xi_2 - \xi_1)$ berilgan. Harakatni

$x_i = x_i(\xi_p)$ - Lagrang ko'rinishida ifodalang: A)

$x_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3$; $x_2 = 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3$; $x_3 = -\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3$ B)

$x_1 = \xi_1$; $x_2 = \xi_1 + \xi_2$; $x_3 = \xi_3 - \xi_1$; C) $x_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$; $x_2 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$; $x_3 = \xi_3$; D)

$x_1 = \xi_1 + \xi_2$; $x_2 = \xi_1$; $x_3 = \xi_3 + \xi_1 - \xi_2$;

61. Cheksiz deformatsiya holida birgalik tenglamalarini (Sen Vinan shartlari) ko'rsating: A)

* $\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0$ B) $\frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^\mu \partial \xi^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\mu}}{\partial \xi^\nu \partial \xi^j} = 0$,

C) $\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0$, D) $\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} = 0$,

62. Deformatsiya tezliklari tenzori nimaga teng.

A)

$$* e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_i v_j + \Delta_j v_i); \text{ B) } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_i w_j + \Delta_j w_i); \text{ C) } e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_i v_i - \Delta_j w_i); \text{ D) }$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_i v_j - \Delta_j v_i);$$

63. Ushbu $v_1 = \frac{2x_2}{t}$, $v_2 = \frac{2x_1}{t}$; $v_3 = 0$ tezliklar maydoni uchun deformatsiya tenzori

komponentalarini hisoblang :

A)

$$* e_{11} = 3, \quad e_{12} = 2, \quad e_{13} = 1; \quad e_{22} = e_{32} = e_{33} = 0; \text{ B) }$$

$$e_{11} = 2, \quad e_{12} = 0, \quad e_{13} = e_{22} = e_{32} = 0, \quad e_{33} = 1; \text{ C) }$$

$$e_{11} = 1, \quad e_{12} = 2, \quad e_{13} = 1, \quad e_{22} = e_{32} = 0; \quad e_{33} = 2; \text{ D) }$$

$$e_{11} = 0, \quad e_{12} = \frac{2}{t}, \quad e_{13} = e_{22} = e_{32} = e_{33} = 0;$$

64. $\vec{A}$ vektorning rotatsiyasi quyidagiga teng:

A)

$$\Omega = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}; \text{ B) } \text{rot } \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}; \text{ C) } \text{rot } \vec{A} = \Delta_\alpha A^\alpha; \text{ D) }$$

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \vec{k};$$

65. Uyrma vektori quyidagiga teng.

$$\text{A) } * \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}; \text{ B) }$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\Delta_i w_j + \Delta_j w_i); \text{ C) } \vec{\omega} = \frac{1}{2} (\Delta_i g_j + \Delta_j g_i); \text{ D) } \vec{\omega} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt};$$

66. $\vec{A} = \vec{A}(A_1^1, A_2^2, A_3^3)$ vektorni divergentsiyasi dekart koordinatalarida quyidagiga teng : A)

$$* \text{div } \vec{A} = \Delta_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z}; \text{ B) } \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \vec{k}; \text{ C) }$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial^2 A^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^3}{\partial z^2}; \text{ D) } \text{grad } \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \vec{k};$$

67. Stoks teoremasi quyidagilarning qaysi birida to'g'ri ifodalangan: A) $\int_c \vec{v}_s d\vec{s} = 2 \int_\Sigma w_n d\sigma$; B)

$$\int_{ck} (\vec{\rho} \times d\vec{\rho}) = 2\vec{n} d\sigma; \text{ C) } \int_\Sigma w_n d\sigma = \int_C \vec{A}_s d\vec{s}; \text{ D) } \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \text{div } \vec{v} d\tau;$$

68. Gauss – Ostrogradskiy formulasini ko'rsating:

A)

$$* \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} d\tau = \int_V \text{div } \vec{A} d\tau = \int_V \nabla_k A^k d\tau; \text{ B) } \int_V \text{div } \vec{v} d\tau = \int_C \text{grad } n_i d\sigma; \text{ C) }$$

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} d\tau = \int_C \text{rot } \vec{A} d\tau; \text{ D) } \int_V \nabla_k A^k d\tau = \int_C \vec{A}_s d\vec{s};$$

69. Eyler o'zgaruvchilarda uzviylik tenglamalarini ko'rsating: A) $* \frac{d\rho}{dt} + \text{div } \vec{v} = 0$; B)

$$\frac{d\rho}{dt} = 0; \text{ C) } \rho = \rho_0 \cdot \frac{V_0}{V}; \text{ D) } \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

70. Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamalarini ko'rsating. A)

$$* \rho = \rho_0 \frac{V_0}{V}; \text{ B) } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \rho = \sqrt{\frac{g_0}{g}}; \rho = \rho_0 \frac{\Delta_0}{\Delta}; \text{ C) } \frac{d\rho}{dt} = 0; \text{ D) }$$

$$\rho = f_0 + f_1 \sqrt{\frac{g_0}{g}};$$

71. m massali nuqta uchun harakat miqdori tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega: A)

$$* m \frac{d\rho}{dt} = \vec{F}; \text{ B) } \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{F}; \text{ C) } \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i^{(e)}; \text{ D) } \frac{dm}{dt} = \vec{F};$$

72. Chekli individual hajm uchun harakat miqdori tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega. A)

$$* \frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}; \text{ B) } \frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)}; \text{ C) } \int_V \vec{F} \rho d\tau = \frac{dQ}{dt} + \int_V \vec{p} d\sigma; \text{ D) } \int_V v \rho d\tau = mv^*;$$

73. Dekart koordinatalar sistemasida harakat tenglamalarini ko'rsating. A)

$$\int_V v \rho d\tau = mv^* \text{ B) } \frac{dQ}{dt} = \int_V \vec{F} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma; \text{ C) } \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{F}; \text{ D) } \frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(e)};$$

74. n ta nuqtalar sistemasi uchun harakat momenti tenglamalarini yozing. A)

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}), (\vec{k} = \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i v_i)); \text{ B) } \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{F}; \text{ C) } \frac{d(\vec{r} \times m \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}; \text{ D) }$$

$$K = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{e} \vec{k} \rho d\tau;$$

75. Chekli individual V hajmdagi Σ sirt bilan chegaralangan tutash muhit harakati miqdori momentlari tenglamalarini ko'rsating:

$$\text{A) } \frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau \right) = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \int_V \vec{r} \times \vec{v} P_n d\sigma + \int_V \vec{n} \rho d\tau + \int_V \vec{Q} d\sigma; \text{ B) }$$

$$K = \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau; \text{ C) } \frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \right); \text{ D) } \frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times v \rho d\tau = \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma.$$

76. Klassik holda harakat miqdori momenti tenglamalarini ko'rsating. A)

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \int_V \vec{r} \times \vec{P}_n d\sigma; \text{ B) } \frac{dK}{dt} = 0; \text{ C) } \int_V \vec{Q}_n d\sigma = \int_V \nabla_i \vec{Q}_n d\tau; \text{ D) }$$

$$(\vec{\partial}_i \times \vec{\partial}_k) P^{ki} = 0;$$

77. Ideal suyuqlik yoki ideal gaz deb shunday muhitga aytiladiki;

A) unda $\vec{n}$ normalli $\forall$ yuzachada $\vec{p}_n$ kuchlanish vektori yuzachaga ortogonal; B)

unda $\vec{n}$ normali $\forall$ yuzachada $\vec{p}_n$ vektor osha yuzachada yotadi; C)

undagi $\vec{\tau}$ urinmali $\forall$ yuzachada $\vec{p}_\tau$ vektor osha yuzachada yotadi; D)

unda $\vec{n}$ vektor $\vec{p}_n$ kuchlanish vektoriga ortogonal.

78. Eyler tenglamalarini vektor ko'rinishi quyida berilgan: A)

$$* \rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p; \text{ B) } \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{v}^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p; \text{ C) } \frac{d\rho}{dt} = 0; \text{ D) }$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

79. Ideal suyuqlik uchun Gromeki – Lemb shaklidagi harakat tenglamalarini ko'rsating: A)

$$* \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \vec{v}^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p; \text{ B) } \rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p; \text{ C) }$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \text{ D) } \frac{d\rho}{dt} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = 0;$$

80. Guk va Nav'e – Stoks qonunlarni ifodalovchi formulalarni ko'rsating: A)

$$\sigma^{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \tau_{ij} = B^{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta}; \text{ B) } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}); \text{ C) } \rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } p; \text{ D) }$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

81. Lamé tenglamalarini ko'rsating:

A)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div } \vec{v} + \nu' \Delta \vec{v}; \text{ B) } \rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } p; \text{ C) }$$

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}; \text{ D) } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

82. Nav'e-Stoks tenglamalarini ko'rsating:

$$\text{A) } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div } \vec{v} + \nu' \Delta \vec{v}; \text{ B) } (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}; \text{ C) }$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho = 0; \text{ D) } \sigma_{i,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i.$$

83. Umumiy holda izolirlangan sistema uchun energiyani saqlanish qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$\text{A) } \Delta E = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} + \Delta u = 0; \text{ B) } \Delta U = Q - L; \text{ C) } du = \left(\frac{du}{dt} \right)_v dT + \left(\frac{du}{dv} \right)_T dT; \text{ D) }$$

$$c_x = c_v = \left(\frac{du}{dT} \right)_v.$$

84. Quyidagi tenglama termodinamikaning 1-qonunini ifodalaydi: A)

$$dQ = dk + d\Pi + dL \text{ yoki } dQ = dU + dL; \text{ B) } Q = mq; U = mu; L = ml; V = mv; \text{ C) }$$

$$\Delta U = mc_v(T_2 - T_1); \text{ D) } \Delta I = mc_p(T_2 - T_1).$$

85. Termodinamikaning ikkinchi qonunining matematik ifodasini ko'rsating:

$$\text{A) } dQ = TdS; \text{ B) } dQ = dU + dL; \text{ C) } TdS = dU + dL; \text{ D) } \oint \frac{dQ}{dt} = 0;$$

86. Asosiy termodinamik ayniyatni ko'rsating:

A)

$$TdS = dU + dL; \text{ B) } dQ = dU + dL; \text{ C) } \oint \frac{dQ}{dt} = 0; \text{ D) } dS = \left(\frac{dS}{dT} \right)_v dT + \left(\frac{dS}{dV} \right)_T dV;$$

87. Izotrop jism uchun Guk qonuni deformatsiya tenzori va kuchlanish tenzorining bosh oqlarida quyidagicha:

A)

$$P_i = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_i \left(i = \overline{1,3} \right), \text{ bu yerda } \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \text{ B) } \tau_{ij} = B^{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta}; \text{ C) }$$

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } \vec{P}; \text{ D) } P_{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta};$$

88. Izotrop muhim uchun Nav'e-Stoks qonuni deformatsiya tezliklari va kuchlanish tenzorining bosh o'qlarida quyidagi ko'rinishni oladi:

A)

$$\tau_i = \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_i, (i = \overline{1,3}); \text{ B) } \tau_{ij} = B^{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta}; \text{ C) } P_{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}; \text{ D) }$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0;$$

89. Mos ravishda Yung moduli va Puasson koeffisientning Lamé koeffisientlari orqali ifodasini ko'rsating:

$$\text{A) } E = \mu \frac{3\lambda + \mu}{\lambda + \mu}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \text{ B) } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \nu^1 = \mu / \rho; \text{ C) }$$

$$P_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}; E = \mu \frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}; \text{ D) } E = \mu \cdot \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + \mu}; \xi = \lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1;$$

90. Dinamik yopishqoqlik koeffisienti, kinematik koeffisienti hamda 2-yopishqoqlik koeffisienti
Lame koeffisienti orqali ifodalang:

A) $\mu = \mu_1, v^1 = \mu_1 / \rho; \xi = \lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1;$ B)

$E = \mu \cdot \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + \mu}; \xi = \lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1; v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)};$ C) $\xi = \lambda_1 + \frac{2}{3} \mu_1, E = \mu \frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}, v^1 = \mu_1 / \rho;$

D) $v^1 = \mu_1 / \rho, v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; E = \mu \frac{(3\lambda + \mu)}{\lambda + \mu}$

91. Izotrop tutash muhitning harakat tenglamalari ko'chishlarda quyidagi ko'rinishga ega: A)

$(\lambda + \mu) \text{ grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a};$ B) $\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } P;$

C) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div } \vec{v} + v^1 \Delta \vec{v};$ D) $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i.$

92. Ideal suyuqlikning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega: A)

$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } P;$ B) $\dot{\rho} = \rho \vec{F} - \text{grad } P;$ C) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0;$ D) $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \ddot{U}_i.$

93. Muhit uchun siqilmaslik sharti quyidagicha bo'ladi: A)

$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho = 0;$ B) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0;$ C) $\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \text{grad } P;$ D) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (w_{ij} + w_{j,i});$

94. Barotrop proseslarda ideal suydilikning to'liq tenglamalar sistemasini

A) $\rho \vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P; \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0; P = f(\rho);$ B) $P = f(\rho);$ C)

$\frac{d\rho}{dt} = 0; \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P; P = f(\rho);$ D) $P = R\rho T;$

95. Uzviylik tenglamalarini Dekart koordinatalar sistemasidagi proektsiyalardagi ifodasini ko'rsating: A)

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0;$ B) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$ C) $P = \partial x(\rho), P = R\rho T;$ D)

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho = 0.$

96. To'rtinchi rang tenzorining nechta komponentasi mavjud: A)81; B)9; C)12; D)27;

97. Egri chiziqli koordinatalar sistemasida Nav'e-Stoks qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

A) $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \cdot \text{grad div } \vec{v} + v^1 \cdot \Delta \vec{v};$ B)

$f_{ij} = \lambda I, (\varepsilon)g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij};$ C) $(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a};$ D)

$\rho \alpha^k = \rho F^k + P^{ki}.$

98. Material nuqtalar sistemasini harakat miqdori momenti quyidagi ko'rinishga ega: A)

$\vec{k} = 0\vec{r} \times m\vec{v}^* + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{i \text{ nisb}} \times m_i \vec{v}_{i \text{ nisb}});$ B) $\vec{k} = \int \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau;$ C) $k = \vec{r} \times m\vec{v};$ D) $M = \vec{r} \times \vec{F}.$

99. Chekli hajm harakat miqdori quyidagiga teng: A)

$\vec{k} = \int \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau;$ B) $\vec{k} = \vec{r}^* \times \vec{Q} + \int \vec{r}_{\text{nisb}} \times \vec{v}_{\text{nisb}} \rho d\tau.$ C) $k = \vec{r} \times m\vec{v};$ D)

$k = \int \vec{h} \rho d\tau.$

100. Klassik holda harakat miqdori tenglamalarida quyidagi hadlar qatnashmaydi:

$$A) \int_v \bar{k} \rho d\tau, \int_v \bar{h} \rho d\tau, \int_v \bar{Q}_n d\sigma, \quad B) \int_v \bar{k} \rho d\tau, \int_v \bar{r} \times \bar{P}_n d\sigma, \int_v \bar{Q}_n d\sigma; \quad C) \int_v \bar{r} \times \bar{P}_n d\sigma, \int_v \bar{k} \rho d\tau, \int_v \bar{Q}_n d\sigma \quad D) \int_v \bar{k} \rho d\tau.$$

Fan bo'yicha reyting tizimi

“Tutash muhit mehanikasi” fanidan talabalar bilimini baholash mezonlari.

Dars qoldirmagan, avvalgi nazorat turlarini to'la topshirgan, vazifalarni to'la bajargan, darsda faol qatnashib, mavzuni reja asosida ijodiy yoritgan, adabiy va ilmiy atamalarni izohlay olgan va ular bilan bog'liq tushunchalarni anglay olgan, nazariy ma'lumotlarni amaliy materialga tatbiq qila olgan, xulosa va qaror qabul qila olgan, ijodiy fikrlay olgan, mustaqil mushohada yurita olgan, olgan bilimlarini amalda qo'llay olgan, mohiyatini tushungan talabalar “5” baho bilan baholanadi.

Dars qoldirmagan, avvalgi nazorat turlarini to'la topshirgan, vazifalarni to'la bajargan, darsda faol qatnashib, mavzuga tegishli ilmiy yoki adabiy atamalarni izohlay olgan, biroq mavzuga oid atamalarni va ular bilan bog'liq ta'riflarni bilgan, mustaqil mushohada yurita olgan, olgan bilimlarini amalda qo'llay olgan, mohiyatini tushungan, mavzuga oid matndan qisman yod bilgan talabalar “4” baho bilan baholanadi.

Dars qoldirmagan, avvalgi nazorat turlarini to'la topshirgan, vazifalarni bajargan, mavzuni reja asosida yoritgan, lekin o'quv materialiga ijodiy yondashishga qiynalgan, mavzuga doir adabiy yoki ilmiy atamalarni izohlashda qiynalgan, badiiy matndan chala yod bilgan, mohiyatini tushungan, darsda sust qatnashgan talabalar “3” baho bilan baholanadi.

Ko'p dars qoldiradigan, avvalgi nazorat turlarini topshirmagan, uy vazifalarini bajarmaydigan, aniq tasavvurga ega bo'lmagan, fanni bilmagan talabalarga “2” baho qo'yiladi.

“Informatika o'qitish metodikasi” fani bo'yicha talabalar bilimini baholash va nazorat qilish mezonlari

Baholash usullari	Yozma ishlar, og'zaki so'rovlar, ekspres testlar prezentasiyalar
Baholash mezonlari	5 baho “a'lo” • “Tutash muhit mehanikasi” faniga oid nazariy va uslubiy tushunchalarni to'la o'zlashtira olish; • xulosa va qaror qabul qila olish; • ijodiy fikrlay olish; • bilimlarini amalda qo'llay olish ko'nikmalariga ega bo'lish; • mavzular mohiyatini to'la bilish va aytib bera olish; • “Tutash muhit mehanikasi” faniga oid termin va tushunchalarni izohlay olish;
	4 baho “yaxshi” • mustaqil mushohada yurita olish; • auditoriyada olgan bilimlarini amalda qo'llay ola bilish; • mavzular mohiyatini bilish, aytib berish; • “Tutash muhit mehanikasi” faniga oid termin va tushunchalarni izohlay olish;
	3 baho “qoniqarli”

	• auditoriyada olgan bilimlarini amalda qo'llay ola bilish; • uslubiy xolatlar mohiyatini tushunish; • mavzular mohiyatini bilish, aytib berish; • "Tutash muhit mehanikasi" faniga oid termin va tushunchalarni izohlay olish;
	2 baho "qoniqarsiz" • uslubiy xolatlar mohiyatini tushunib yetmaslik; • "Informatika o'qitish metodikasi" fani bo'yicha aniq tasavvurga ega bo'lmaslik; • "Tutash muhit mehanikasi" faniga oid termin va tushunchalarni izohlay bilmaslik;

Yakuniy nazoratda "Yozma ish" javoblarini baholash mezonlari

Har bir savolga berilgan javoblar bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichi "0-1" baho oralig'ida baholanadi. Talaba maksimal "5" baho to'plashi mumkin.

Yozma sinov bo'yicha umumiy o'zlashtirish ko'rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun berilgan javoblarga qo'yilgan o'zlashtirish ballari qo'shiladi va yig'indi talabani yakuniy nazorat bo'yicha o'zlashtirish bali hisoblanadi.

Agar talaba o'ziga berilgan variant savollarining barchasiga to'la va atroflicha javob bera olsa, o'z tushunchalarini izohlay olsa, "5" baho bilan baholanadi.

Agar talaba o'ziga berilgan variant savollarining barchasiga umumiy tushunchaga ega bo'lgan holda javob bera olsa, biroq tushunchalarini izohlashga bir oz qiynalsa "4" baho bilan baholanadi.

Agar talaba o'ziga berilgan variant savollariga qisman tasavvurga ega bo'lgan holda qoniqarli tarzda javob bersa, lekin o'quv materialiga ijodiy yondashishga qiynalsa, mavzuga doir tushunchalarni yoki buyruqlarni izohlashda qiynalsa, ayrim xatoliklarga yo'l qo'ysa "3" baho bilan baholanadi.

Agar talaba o'ziga berilgan variant savollariga tasavvurga ega bo'lmasa, savollarga javob bermasa "2" baho bilan baholanadi va fanni o'zlashtirmagan hisoblanadi.

1. Oraliq nazoratni o'tkazish tartibi:

Ushbu nazorat turi auditoriyada oqim yoki akademik guruhdagi barcha talabalar ishtirokida quyidagi shakllarda o'tkaziladi:

- kollokvium;
- og'zaki so'rov;
- test sinovlari o'tkazish;
- yozma ish.

2. Yakuniy nazoratni o'tkazish tartibi:

Yakuniy nazoratlar 3-4 semestrlarda "Yozma" tartibida o'tkaziladi, jami variantlar soni 30 ta. Har bir variant 5 ta savoldan iborat.

Izoh: Yakuniy nazoratga faqat oraliq nazoratlardan o'tgan

talabalar qo'yiladi.

Talaba mustaqil ishni tayyorlashda muayyan fanning xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanish tavsiya etiladi:

Ma'ruzalar qismini mustaqil o'zlashtirish;

Elektron darsliklar va o'quv qo'llanmalar, avtomatlashtirilgan o'rgatuvchi va nazorat qiluvchi tizimlar bilan ishlash;

Maxsus adabiyotlar bo'yicha fanlar bo'limlari yoki mavzulari ustida ishlash;

Yangi axborot-kommunikasiya texnologiyalarni o'rganish;

Talabaning o'quv-ilmiy-tadqiqot ishlarini bajarish bilan bog'liq bo'lgan fanlar bo'limlari va mavzularni chuqur o'rganish;

Faol va muammoli o'qitish uslubidan foydalaniladigan o'quv mashg'ulotlari;

Masofaviy ta'lim.

Mustaqil ish bo'yicha baholash mezonlari

Talaba berilgan topshiriq asosida qiyosiy fikr bildirgan tegishli xulosa chiqargan bo'lsa, **5 baho** bilan baholanadi.

Talaba berilgan topshiriq asosida nazariy savollarga to'liq javob bergan, ammo to'liq tahlil qila olmagan bo'lsa, **4 baho** bilan baholanadi.

Talaba berilgan topshiriq asosida nazariy savollarga javob bergan, ammo mustaqil fikr olmay olmagan bo'lsa, **3 baho** bilan baholanadi.

Talaba berilgan topshiriq asosida nazariy savollarga qisman javob bergan, misollar keltira olmagan bo'lsa, **2 baho** bilan baholanadi.

II. Oraliq nazorat uchun

Talabaning "Tutash muhit mehanikasi" fani bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarini baholashda quyidagi mezonlarga asoslaniladi:

a) 5 baho uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

Tutash muhit mehanikasi fan va o'quv predmeti sifatida, uning asosiy komponentalarining xarakteristikalarini; o'qitishning maqsadi va vazifalari; pedagogik funksiyalari; o'qitishning tuzilmasi va mazmuni; davlat ta'lim standartlari; o'qitishda uzviylik va uzluksizlik; o'quv va metodik adabiyotlar tahlili; dasturiy ta'minot; o'quv jarayonini rejalashtirish; o'qitishda asosiy didaktik prinsiplar; o'qitishning tashkiliy shakllari; o'qitishni nazorat qilish va natijalarini baholash usullari; reyting tizimi, testlash; o'qitishda zamonaviy pedagogik texnologiyalar, innovasion metodikalar va

interfaol usullar; informatika va axborot texnologiyalari xonasi va unda mashg'ulotlar o'tkazish metodikasi; Tutash muhit mehanikasi kursining asosiy bo'limlarini tutash muhit mehanikasi haqidagi nazariy bilimlarga ega bo'lishi; ushbu nazariy bilimlarni amalda qo'llay olishi; kasbiy sohalarida fanning amaliy imkoniyatlaridan foydalana olishi kabi **savollarning barchasiga to'la va atroflicha javob bera olsa, o'z tushunchalarini izohlay olsa.**

b) 4 baho uchun talabanning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

Tutash muhit mehanikasi fan va o'quv predmeti sifatida, uning asosiy komponentalarining xarakteristikalari; o'qitishning maqsadi va vazifalari; pedagogik funksiyalari; o'qitishning tuzilmasi va mazmuni; davlat ta'lim standartlari; o'qitishda uzviylik va uzluksizlik; o'quv va metodik adabiyotlar tahlili; dasturiy ta'minot; o'quv jarayonini rejalashtirish; o'qitishda asosiy didaktik prinsiplar; o'qitishning tashkiliy shakllari; o'qitishni nazorat qilish va natijalarini baholash usullari; reyting tizimi, testlash; o'qitishda zamonaviy pedagogik texnologiyalar, innovation metodikalar va interfaol usullar; tutash muhit mehanikasi kursining asosiy bo'limlarini o'qitish metodikasi haqidagi nazariy bilimlarga ega bo'lishi; ushbu nazariy bilimlarni amalda qo'llay olishi; kasbiy sohalarida fanning amaliy imkoniyatlaridan foydalana olishi.

v) 3 baho uchun talabanning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

Tutash muhit mehanikasi fan va o'quv predmeti sifatida, uning asosiy komponentalarining xarakteristikalari; o'qitishning maqsadi va vazifalari; pedagogik funksiyalari; o'qitishning tuzilmasi va mazmuni; davlat ta'lim standartlari; o'qitishda asosiy didaktik prinsiplar; o'qitishning tashkiliy shakllari; o'qitishni nazorat qilish; reyting tizimi, testlash; tutash muhit mehanikasi kursining asosiy bo'limlarini o'qitish metodikasi haqidagi qisman tassavurga ega bo'lishi; amaliyotda ayrim dasturlarni qo'llay olishi savollarining barchasi haqida umumiy tushunchaga ega bolgan holda javob bera olsa, biroq tushunchalarini izohlashga bir oz qiynalsa.

g) fanning nazariy qismini tushunmaydigan, amaliy qo'llash imkoniyatlari juda past, dasturlarni mustaqil ravishda ishlata olmaydigan talabalarga **2 baho** qo'yiladi va fanni o'zlashtirmagan hisoblanadi.

(Tutash muhit mehanikasi fani)

TMMNING ASOSIY MUNOSABATLARI

Vektor maydonini differensiallash

1. Nabla vektor

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k};$$

2. Laplas operatori

$$\Delta = \vec{\nabla} \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

3. Skalyar funksiyaning gradienti

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k};$$

4. Vektor maydonning divergensiya

$$\text{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

5. Vektor maydonning rotori

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

TMM kinematikasi

Harakatning Lagranj ko'rinishida berilishi $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$

Tezlik vektori $\vec{v} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \vec{e}_i = v^i \vec{e}_i$

Tezlanish vektori $w^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} \Rightarrow w^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}$

Harakatning Lagranj ko'rinishida berilishi $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t).$

Harakat qonuni va tezlik orasidagi munosabat

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)$$

Tezlanish vektori komponentalari $a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial t}.$

Deformatsiya tenzori komponentalari

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g'_{ij}) \text{ yoki } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \cdot \nabla_j w^k).$$

Asriy tenglama $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0$

Invariantlar $I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_j^i,$

$$I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_j^i)^2 - \varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta \right], I_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \text{Det} \|\varepsilon_j^i\|.$$

Deformatsiyaning birgalik tenglamalari

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{vi}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{vj}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0.$$

Deformatsiya tezliklari va deformatsiya tenzori orasidagi bog'lanish

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}.$$

Deformatsiya tezliklari tenzori komponentalarining tezlik vektori komponentalari orasidagi bog'lanish

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Koshi-Gelmgols teoremasi

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \text{grad} \Phi.$$

Tezlik divergensiya sinining mexanik ma'nosi

$$\text{div} \vec{v} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta V_0 \rightarrow 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t}.$$

Stoks teoremasi

$$\int_C \vec{v}_s d\vec{s} = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma.$$

Gauss-ostrogradskiy teoremasi

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \text{div} \vec{v} d\tau.$$

TMM dinamikasi

Eyler o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Lagranj o'zgaruvchilarida uzviylik tenglamasi

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \left| \frac{\vec{\partial}_1^0 \cdot (\vec{\partial}_2^0 \times \vec{\partial}_3^0)}{\vec{\partial}_1 \cdot (\vec{\partial}_2 \times \vec{\partial}_3)} \right|, \quad \rho = \rho_0 \frac{\Delta_0}{\Delta} = \rho_0 \det \left\| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right\|, \quad \rho = \rho_0 \sqrt{\frac{g^0}{g}}.$$

Kuchlanish vektori komponentalarining kuchlanish tenzori komponentalari orqali ifodasi

$$\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11} \cos(\vec{n}, x) + p^{12} \cos(\vec{n}, y) + p^{13} \cos(\vec{n}, z) = p^{1i} n_i, \\ p_n^2 &= p^{21} \cos(\vec{n}, x) + p^{22} \cos(\vec{n}, y) + p^{23} \cos(\vec{n}, z) = p^{2i} n_i, \\ p_n^3 &= p^{31} \cos(\vec{n}, x) + p^{32} \cos(\vec{n}, y) + p^{33} \cos(\vec{n}, z) = p^{3i} n_i. \end{aligned}$$

Kuchlanish vektorining normal va urinma tuzuvchilari

$$\vec{p}_n d\sigma = p_{nn} \vec{n} d\sigma + p_{n\tau} \vec{\tau} d\sigma.$$

Harakat miqdori tenglamasi $\frac{d}{dt} \int_V \vec{v} \rho d\tau = \int_V \vec{F} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma.$

Kuchlanishlarga nisbatan harakat tenglamasi

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z}, \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned}$$

Harakat miqdori momentlari tenglamasi

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau + \int_V \vec{k} \rho d\tau \right) = \int_V \vec{r} \times \vec{F} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma + \int_V \vec{h} \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{Q}_n d\sigma.$$

Ideal suyuqlik harakati uchun Eyler tenglamalari

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p.$$

Fgromeki-Lemb tenglamasi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} p.$$

Elastik jism uchun umumlashgan Guk qonuni

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Chiziqli izotrop elastik jism uchun Guk qonuni

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Lame tenglamasi

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{w} + \mu \Delta \vec{w} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}.$$

Izotrop qovushoq suyuqlik uchun Nav'e-Stoks qonuni

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \lambda_1 g^{ij} \text{div } \vec{v} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Nav'e-Stoks tenglamasi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div } \vec{v} + \nu' \Delta \vec{v}.$$

Termodinamika

Tirik kuchlar teoremasi $dE = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)} + dA_{sirt}^{(e)} + dA_{sirt}^{(i)}.$

$$E = \int_V \frac{\rho \vec{v}^2}{2} d\tau, \quad \int_V \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} d\tau = \int_V \rho \vec{F}^{(l)} \cdot d\vec{r} d\tau + \int_V \rho \vec{F}^{(i)} \cdot d\vec{r} d\tau = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)},$$

$$\int_{\Sigma} p^{ij} v_i n_j d\sigma dt = \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot d\vec{r} d\sigma = dA_{sirt}^{(l)} - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt dr = dA_{sirt}^{(i)}.$$

Holat tenglamalari

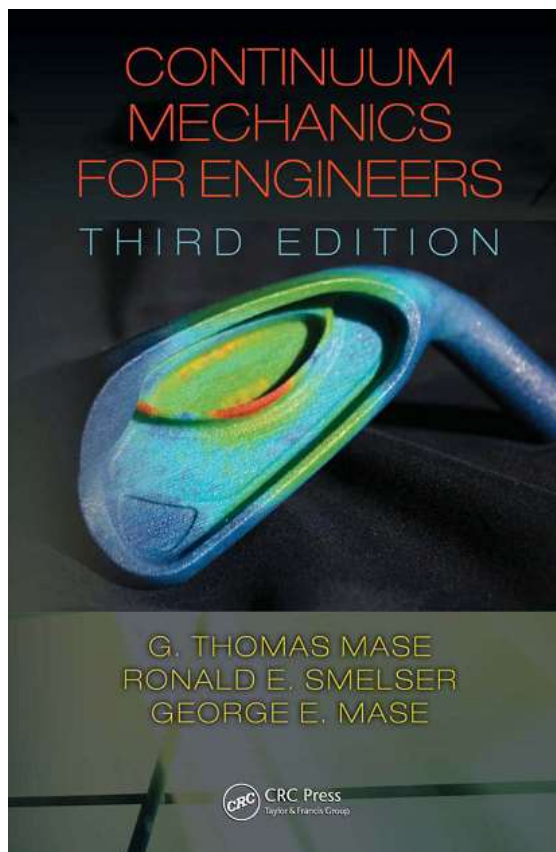
Mendeleev-Klapeyron tenglamasi $p v = \frac{m}{\mu} RT$

Van-der-Vaals tenglamasi $\left(p - \frac{a}{V^2}\right)(V + b) = RT.$

Entalpiya $J = E = U + pV$ Issiqlik sig'imi $C = \frac{dQ}{dT},$

Termodinamikaning birinchi qonuni $dQ = dK + d\Pi + dL$

Horijiy manbalardan olingan materiallar



3.8	Mohr's Circles for Stress	74
3.9	Plane Stress	80
3.10	Deviator and Spherical Stress States	85
3.11	Octahedral Shear Stress	87
	Problems	90
4	Kinematics of Deformation and Motion	103
4.1	Particles, Configurations, Deformations and Motion	103
4.2	Material and Spatial Coordinates	104
4.3	Lagrangian and Eulerian Descriptions	108
4.4	The Displacement Field	110
4.5	The Material Derivative	111
4.6	Deformation Gradients, Finite Strain Tensors	116
4.7	Infinitesimal Deformation Theory	120
4.8	Compatibility Equations	128
4.9	Stretch Ratios	131
4.10	Rotation Tensor, Stretch Tensors	134
4.11	Velocity Gradient, Rate of Deformation, Vorticity	137
4.12	Material Derivative of Line Elements, Areas, Volumes	143
	Problems	147
5	Fundamental Laws and Equations	167
5.1	Material Derivatives of Line, Surface and Volume Integrals	167
5.2	Conservation of Mass, Continuity Equation	169
5.3	Linear Momentum Principle, Equations of Motion	171
5.4	Piola-Kirchhoff Stress Tensors, Lagrangian Equations of Motion	172
5.5	Moment of Momentum (Angular Momentum) Principle	176
5.6	Law of Conservation of Energy, The Energy Equation	177
5.7	Entropy and the Clausius-Duhem Equation	179
5.8	The General Balance Law	182
5.9	Restrictions on Elastic Materials by the Second Law of Thermodynamics	186
5.10	Invariance	189
5.11	Restrictions on Constitutive Equations from Invariance	196
5.12	Constitutive Equations	198
	References	201
	Problems	202
6	Linear Elasticity	211
6.1	Elasticity, Hooke's Law, Strain Energy	211
6.2	Hooke's Law for Isotropic Media, Elastic Constants	214
6.3	Elastic Symmetry; Hooke's Law for Anisotropic Media	219
6.4	Isotropic Elastostatics and Elastodynamics, Superposition Principle	223
6.5	Saint-Venant Problem	226
6.5.1	Extension	227
6.5.2	Torsion	228
6.5.3	Pure Bending	234
6.5.4	Flexure	236
6.6	Plane Elasticity	238
6.7	Airy Stress Function	242
6.8	Linear Thermoelasticity	252
6.9	Three-Dimensional Elasticity	253

Contents

List of Figures

List of Tables

Preface to the Third Edition

Preface to the Second Edition

Preface to the First Edition

Acknowledgments

Authors

Nomenclature

1	Continuum Theory	1
1.1	Continuum Mechanics	1
1.2	Starting Over	2
1.3	Notation	3
2	Essential Mathematics	5
2.1	Scalars, Vectors and Cartesian Tensors	5
2.2	Tensor Algebra in Symbolic Notation - Summation Convention	7
2.2.1	Kronecker Delta	9
2.2.2	Permutation Symbol	10
2.2.3	ϵ - δ Identity	10
2.2.4	Tensor/Vector Algebra	11
2.3	Indicial Notation	16
2.4	Matrices and Determinants	19
2.5	Transformations of Cartesian Tensors	25
2.6	Principal Values and Principal Directions	30
2.7	Tensor Fields, Tensor Calculus	37
2.8	Integral Theorems of Gauss and Stokes	40
	Problems	42
3	Stress Principles	53
3.1	Body and Surface Forces, Mass Density	53
3.2	Cauchy Stress Principle	54
3.3	The Stress Tensor	56
3.4	Force and Moment Equilibrium; Stress Tensor Symmetry	61
3.5	Stress Transformation Laws	63
3.6	Principal Stresses; Principal Stress Directions	66
3.7	Maximum and Minimum Stress Values	71
	Problems	260
7	Classical Fluids	271
7.1	Viscous Stress Tensor, Stokesian, and Newtonian Fluids	271
7.2	Basic Equations of Viscous Flow, Navier-Stokes Equations	273
7.3	Specialized Fluids	275
7.4	Steady Flow, Irrotational Flow, Potential Flow	276
7.5	The Bernoulli Equation, Kelvin's Theorem	280
	Problems	282
8	Nonlinear Elasticity	285
8.1	Molecular Approach to Rubber Elasticity	287
8.2	A Strain Energy Theory for Nonlinear Elasticity	292
8.3	Specific Forms of the Strain Energy	296
8.4	Exact Solution for an Incompressible, Neo-Hookean Material	297
	Bibliography	302
	Problems	304
9	Linear Viscoelasticity	309
9.1	Viscoelastic Constitutive Equations in Linear Differential Operator Form	309
9.2	One-Dimensional Theory, Mechanical Models	311
9.3	Creep and Relaxation	315
9.4	Superposition Principle, Hereditary Integrals	318
9.5	Harmonic Loadings, Complex Modulus, and Complex Compliance	320
9.6	Three-Dimensional Problems, The Correspondence Principle	324
	References	330
	Problems	331
	Appendix A: General Tensors	343
A.1	Representation of Vectors in General Bases	343
A.2	The Dot Product and the Reciprocal Basis	345
A.3	Components of a Tensor	346
A.4	Determination of the Base Vectors	348
A.5	Derivatives of Vectors	350
A.5.1	Time Derivative of a Vector	350
A.5.2	Covariant Derivative of a Vector	351
A.6	Christoffel Symbols	353
A.6.1	Types of Christoffel Symbols	353
A.6.2	Calculation of the Christoffel Symbols	354
A.7	Covariant Derivatives of Tensors	355
A.8	General Tensor Equations	356
A.9	General Tensors and Physical Components	358
	References	360
	Appendix B: Viscoelastic Creep and Relaxation	361
	Index	365

ОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ – СПОСОБ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ КОГДА ПРОДОЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ ПОТОКА ВО МНОГО РАЗ ПРЕВОСХОДЯТ ЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ РАЗМЕРЫ

УСЛОВИЕ ПРИЛИПАНИЯ

НА ГРАНИЦАХ СКОРОСТЬ ЖИДКОСТИ $U_{\text{гр}} = 0$ (равны нулю нормальная к границе и касательная к ней составляющие).

НА ГРАНИЦАХ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА V , КОТОРЫЕ СОВПАДАЮТ С ТВЕРДЫМИ ГРАНИЦАМИ ПОТОКА, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ СКОРОСТЬ u ИЛИ ЕЕ ПРОЕКЦИИ, ОБРАЩАЮТСЯ В НОЛЬ

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ, ПРИ КОТОРОМ ЛИНИИ ТОКА ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ НАЗЫВАЕТСЯ РАВНОМЕРНЫМ, ИЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНО-СТРУЙНЫМ

ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ ПОТОКА, ОРТОГОНАЛЬНОЕ ЛИНИЯМ ТОКА, НАЗЫВАЮТ ЖИВЫМ СЕЧЕНИЕМ

при равномерном движении

1. Нормальное напряжение p_{nn} в каждой точке живого сечения равно гидродинамическому давлению p в этой точке со знаком (-) (положительным считается растягивающее нормальное напряжение);
2. Гидродинамическое давление p в живом сечении распределено по гидростатическому закону $\rho U - p = \text{const}$

ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

1. **плавнотизменяющееся** движение – можно пренебречь кривизной линий тока и их непарallelностью (построить плоское живое сечение);
2. **резкоизменяющееся** движение – нельзя использовать указанные условия

Виды потоков

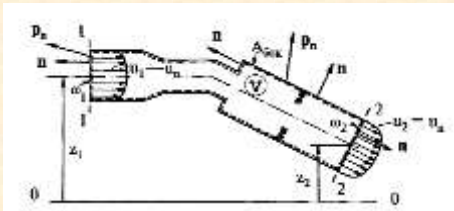
- Напорные
- Безнапорные
- Струйные

Напорный поток со всех сторон ограничен твердыми стенками (поток воды в водопроводных трубах).

Безнапорный поток – если только часть потока ограничена твердыми стенками, а на остальной жидкость граничит с газом т.е. ограничена свободной поверхностью

Струя – когда поток не ограничен твердой поверхностью

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НАПОРНОГО ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ



1. Выделим в трубопроводе сечениями 1-1 и 2-2, в которых движение равномерное или плавнотизменяющееся контрольный объем V , ограниченный контрольной поверхностью A , показанной штриховой линией.

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \int_V \rho (\bar{u} \cdot p_n) dV + \int_A (u \cdot p_n) dA - \int_V \rho \varepsilon dV \quad (1)$$

Закон изменения кинетической энергии для выделенного объема

- представим объемные интегралы в виде поверхностных (используем условия на контрольной поверхности A , которую запишем в виде суммы $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{бок}}$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV + \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA \quad (2) \quad \text{субстанциональная производная}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{на } \omega_1: & \quad u = u_1; \quad u_n = -u_1; \\ \text{на } \omega_2: & \quad u = u_2; \quad u_n = u_2; \\ \text{на } A_{\text{бок}}: & \quad u = 0; \quad u_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3) \quad \text{условия на контрольной поверхности}$$

преобразование второго слагаемого

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV &= Q_k = \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA = \int_{\omega_1} \frac{\rho u_1^2}{2} (-u_1) dA + \int_{\omega_2} \frac{\rho u_2^2}{2} u_2 dV + \\ &+ \int_{A_{\text{бок}}} \frac{\rho u^2}{2} 0 dA = - \int_{\omega_1} \frac{\rho u_1^3}{2} dA + \int_{\omega_2} \frac{\rho u_2^3}{2} dA = - \frac{\alpha_1 \rho v_1^3 \omega_1}{2} + \frac{\alpha_2 \rho v_2^3 \omega_2}{2} = \\ &= - \frac{\alpha_1 \rho v_1^2 Q}{2} + \frac{\alpha_2 \rho v_2^2 Q}{2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Мощность внешней массовой силы

Предположения:

1. Внешняя массовая сила имеет потенциал (существует скалярная функция U , для которой $f = \text{grad} U$);
2. Используем теорему Остроградского - Гаусса

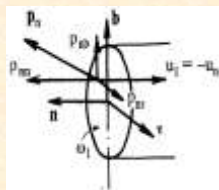
$$\int_A (u \cdot f) p dV = \int_V \rho (u \cdot \text{grad} U) dV = \quad (5)$$

$$= \int_A \rho U u_n dA = - \int_{\omega_1} \rho u_1 U_1 dA + \int_{\omega_2} \rho u_2 U_2 dA.$$

МОЩНОСТЬ ВНЕШНЕЙ МАССОВОЙ СИЛЫ ЧЕРЕЗ ПОТОК ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СКВОЗЬ ЖИВЫЕ СЕЧЕНИЯ

$$\int_A (u \cdot p_n) dA = \int_{\omega_1} (u \cdot p_1) dA + \int_{\omega_2} (u \cdot p_n) dA + \int_{A_{\text{бок}}} (u \cdot p_n) dA \quad (6)$$

мощность внешней поверхностной силы



все три проекции напряжения p_n могут быть отличны от нуля

1. Зададим в произвольной точке живого сечения ω_1 систему ортогональных координат, определяемую тремя единичными векторами (n, b, τ) , из которых n – нормален к живому сечению, а b и τ лежат в его плоскости;

2. Проектируя на эти координатные оси векторы u и p_n , находим $u = (u_n, u_{nb}, u_{nt}) = (u_n, 0, 0)$; $p_n = (p_{nn}, p_{nb}, p_{nt})$

$$u \cdot p_n = u_n p_{nn} + u_{nb} p_{nb} + u_{nt} p_{nt} = u_n p_{nn} \quad (7)$$

(по определению скалярного произведения)

Для живого сечения ω_2

$$\text{на } \omega_1 : u_n = -u_1; \quad p_{nn} = -p_1;$$

$$\text{на } \omega_2 : u_n = u_2; \quad p_{nn} = -p_2; \quad (8)$$

$$\text{на } A_{\text{бок}} : \bar{u} = 0; \quad (u \cdot p_n) = 0.$$

$$\int_A (u \cdot p_n) dA = \int_{\omega_1} u_1 p_1 dA - \int_{\omega_2} u_2 p_2 dA \quad (9)$$

мощность внешней поверхностной силы – поток потенциальной энергии сквозь живое сечение

Мощность внешних сил = поток потенциальной энергии Q_p , обусловленный внешними силами (массовой и поверхностной) через контрольную поверхность:

$$Q_p = \int_V \rho(u \cdot f) dV + \int_A (u \cdot p_n) dA = \\ = - \int_{\omega_1} (\rho U_1 - p_1) u_1 dA + \int_{\omega_2} (\rho U_2 - p_2) u_2 dA$$

1. В сечениях 1-1 и 2-2 движение плавноизменяющееся, поэтому давление подчиняется гидростатическому закону $\rho U - p = \text{const}$

2. Сила тяжести является единственной внешней массовой силой: $U = -g z$

$$Q_p = -(\rho U_1 p_1) \int_{\omega_1} u_1 dA + (\rho U_2 p_2) \int_{\omega_2} u_2 dA = \\ = (\rho g z_1 + p_1) Q - (\rho g z_2 + p_2) Q. \quad (10)$$

Подставляем (4) и (10) в исходное уравнение (1) и делим все слагаемые на весовой расход $Q_B = \rho g Q$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \quad (11)$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ $\gamma = \rho g Q$ – удельный вес

$$(12) \quad h_f = \frac{1}{Q_B} \int \varepsilon \rho dV$$

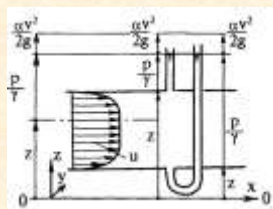
МОЩНОСТЬ ВНУТРЕННИХ СИЛ (ДИССИПАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ) В ПРЕДЕЛАХ КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА, ОТНЕСЕННАЯ К ВЕСОВОМУ РАСХОДУ

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \quad (13)$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ для сжимаемой жидкости (газа)

ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкости (газа) в сечениях 1 – 1 и 2 – 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ



Z – превышение над плоскостью сравнения (геодезическая отметка) любой точки живого сечения потока;

$\frac{p}{\gamma}$ – пьезометрическая высота в этой же точке (высота, на которую поднимается вода в открытой трубке, присоединенной к этой точке);

$\frac{\alpha v^2}{2g}$ – всегда положительна и имеет размерность длины

в соответствии с уравнением (11) эту величину откладывают вверх от отметки

$$\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ И ПОЛНЫЙ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ) НАПОРЫ. ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ И НАПОРНАЯ ЛИНИИ

НАПОР - удельный поток энергии, отнесенный к весовому расходу жидкости

$$H_p = z + \frac{p}{\gamma} = \frac{Q_p}{Q_e}$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ

$$H_k = \frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{Q_k}{Q_e}$$

СКОРОСТНОЙ

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} = \frac{Q_p + Q_k}{Q_e} = \frac{Q_e}{Q_e}$$

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ или ПОЛНЫЙ

$$h_f = \frac{1}{Q_e} \int \varepsilon \rho dV$$

$$H_{e1} = H_{e2} + h_f$$

Уравнение БЕРНУЛЛИ

ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, РАСПОЛАГАЕТСЯ ВСЕГДА НИЖЕ НАПОРНОЙ, ЭТО ПРЯМАЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ НАПОРНОЙ ЛИНИИ

ПРОДОЛЬНЫЕ УКЛОНЫ – ОТНОШЕНИЕ РАЗНОСТИ НАПОРОВ НА УЧАСТКЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ К РАССТОЯНИЮ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ, В КОТОРЫХ ЭТИ НАПОРЫ ВЫЧИСЛЕННЫ

$$\frac{\alpha v^2}{2g} > 0$$

Уклон напорной линии называется **гидравлическим** J_e , уклон пьезометрической линии называется **пьезометрическим** J_p

Потери напора – величина положительная поэтому

- Полный напор в сечениях, расположенных ниже по течению, всегда меньше напора в сечениях, расположенных выше по течению. отметки напорной линии вдоль потока всегда уменьшаются, и гидравлический уклон всегда положителен ($J_e > 0$).
- Если часть кинетической энергии жидкости при её движении переходит в потенциальную, то потенциальный напор может возрастать, при этом отметки пьезометрической линии возрастают.

O‘zbekiston Respublikasi “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonunning mazmuni (1997 yil 2 avgustda qabul qilgan; 5 bo‘lim, 34 moddadan iborat)

I. Umumiy qoidalar (8 ta modda)

1-modda Ushbu Qonunning maqsadi	2-modda “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonun hujjatlari	3-modda Ta’lim sohasidagi davlat siyosatining asosiy tamoyillari	4-modda Bilim olish huquqi
5-modda Pedagogik faoliyat bilan shug‘ullash huquqi	6-modda Ta’lim muassasasining huquqiy maqomi	7-modda Davlat ta’lim standartlari	8-modda Ta’lim berish tili

II. Ta’lim tizimi va turlari (11ta modda).

9-modda Ta’lim tizimi	10-modda Ta’lim turlari	11-modda Maktabgacha ta’lim	12-modda Umumiy o‘rta ta’lim
13-modda O‘rta maxsus va kasb-hunar ta’limi	14-modda Oliy ta’lim	15-modda Oliy o‘quv yurtidan keyingi ta’lim	16-modda Kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash
17-modda Maktabdan tashqari ta’lim	18-modda Oiladagi ta’lim va mustaqil ravishda ta’lim olish	19-modda Ta’lim to‘g‘risidagi hujjatlar	

III. Ta’lim jarayoni qatnashchilarini ijtimoiy himoya qilish (5ta-modda)

20-modda Ta'lim oluvchilarni ijtimoiy himoya qilish	21-modda Ta'lim muassasalarini hodimlarini ijtimoiy himoya qilish	22-modda Yetim bolalarni va ota-onalarining yoki boshqa qonuniy vakillarining vasiyligisiz qolgan bolalarni o'qitish
23-modda Jismoniy yoki ruhiy rivojlanishida nuqsoni bo'lgan bolalar va o'smirlarni o'qitish	24-modda Ijtimoiy yordamga va tiklanishga muhtoj bo'lgan shaxslar uchun o'quv-tarbiya muassasalari	

IV. Ta'lim tizimini boshqarish (5ta-modda)

25-modda O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Maxkamasining ta'lim sohasidagi vakolatlar	26-modda Ta'limni boshqarish bo'yicha vakolatli davlat organlarining huquq doirasi	27-modda Mahalliy davlat hokimiyati organlarining ta'lim sohasidagi vakolatlari
28-modda Ta'lim muassasasini boshqarish	29-modda Ta'lim sohasidagi davlat boshqaruvi organlari bilan nodavlat ta'lim muassasalari o'rtasidagi o'zaro munosabatlar	

V. Yakunlovchi qoidalar (5ta -modda)

30-modda Ota-onalar va qonuniy vakillarning vazifalari	31-modda Ta'limni moliyalash	32-modda Ta'limni rivojlantirish jamg'armalari	33-modda Halqaro hamkorlik
34-modda "Ta'lim to'g'risida"gi qonun hujjatlarini buzganlik uchun javobgarlik			

O'quv materiallari (Tutash muhit mehanikasi fani)

“Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi” ning mazmuni

Umumiy qoidalar

1. Muammolar va kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish omillari: 1.1 Rivojlanishning erishilgan darajasi. 1.2 Kamchiliklar va muammolar. 1.3 Isloh qilish omillari.	2. “Milliy dastur”ning maqsadi , vazifalari va uni ro’yobga chiqarish bosqichlari: 2.1. Dasturning maqsad va vazifalari. 2.2. Dasturni ro’yobga chiqarish bosqichlari.
3. Kadrlar tayyorlash Milliy modeli: 3.1 Shaxs. 3.2 Davlat. 3.3 Uzlüksiz ta’lim. 3.3.1 Uzlüksiz ta’limni tashkil etish va rivojlantirish tamoyillari. 3.3.2. Uzlüksiz ta’limni isloh qilish yo’nalishlari. 3.3.3. Uzlüksiz ta’lim tizimi va turlari: - maktabgacha ta’lim; - umumiy o’rta ta’lim; - O’rta maxsus va kasb-hunar ta’limi; - oily ta’lim; - oliy o’quv yurtidan keyingi ta’lim; - kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash; - maktabdan tashqari ta’lim; 3.4. Kadrlar tayyorlash tizimida fan. 3.5. Kadrlash tayyorlash tizimida ishlab chiqarish.	4. Kadrlar tayyorlash tizimini rivojlantirishning asosiy yo’nalishlari: 4.1. Ta’limning uzluksizligini ta’minlash. 4.2. Pedagog va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash, qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish. 4.3. Ta’lim jarayonini mazmunan isloh qilish. 4.4. Ma’naviy-axloqiy tarbiya va ma’rifiy ishlar. 4.5. Iqtidorli bolalar va iste’dodli yoshlar. 4.6. Ta’lim tizimini boshqarish. 4.7. Kasb-hunar ta’limi sifatini nazorat qilish tizimini shakllantirish. 4.8. Ta’lim tizimini moliyalash. 4.9. Moddiy-texnika ta’minoti. 4.10. Ta’lim tizimining yaxlit axborot makonini vujudga keltirish. 4.11. Ta’lim xizmati ko’rsatish bozorini rivojlantirish. 4.12. Ta’lim sohasida ijtimoiy kafolatlarni ta’minlash xamda bu sohani davlat tomonidan qo’llab-quvvatlash. 4.13. Fan va ta’lim jarayonlari aloqalarini rivojlantirish. 4.14. Ishlab chiqarish va ta’lim tizimini integratsiyalashuvini rivojlantirish.

	4.15. T'olim bilan kadrlar tayyorlash sohasidagi halqaro hamkorlik.
--	---

5.Dasturni ro'yobga chiqarishga doir tashkiliy chora-tadbirlar:

5.1. Respublika Kommissiyasini tuzish.

5.2. Davlat va jamoat institutlarining faoliyati hamda vazifalarini belgilash.

5.3. Malakali chet el ekspertlarini jalb etish va ishtirokini ta'minlash.

5.4. Jamoat birlashmalari va markazlari, respublika aholisi keng tabaqalarining faol ishtirokini ta'minlash.

5.5. Moddiy-texnika bazasini yaratish, o'quv adabiyotlari bilan ta'minlash, davlat standartlarini ishlab chiqish.

5.6. Attestatsiya va akkreditatsiya bo'yicha yagona davlat xizmatini tashkil etish.

5.7. Ta'limni axborot bilan ta'minlash tizimini shakllantirish va rivojlantirish, uni jahon axborot tizimi bilan bog'lash, ommaviy axborot vositalarining ta'lim sohasidagi vazifalarni belgilash.

5.8. Ommaviy axborot vositalarida Milliy dasturda qo'yilgan vazifalarning bajarilishini muntazam yoritib boorish.

5.9. Monitoring, tahlil qilish va tuzatishlar kiritish.

5.10. O'qituvchilarni ijtimoiy himoyalash.

5.11. Oliy tizimini isloh qilish.

5.12. Xalqaro tashkilotlar qatnashuvini tashkil etish.

5.13. Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash.

FANNI O'RGANISHDA TAVSIYA ETILADIGAN ADABIYOTLAR

Asosiy adabiyotlar

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983, Т. 1, 2.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1971.
3. Механика сплошных сред в задачах. Т. I. Теория и задачи. М.: Московский лицей, 1996, 396 с. Под ред. М.Э. Эглит.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: 1974.

Qo'shimcha adabiyotlar

5. Маматкулов Ш. Тутуш муҳит механикаси, 2002 й. (1 қисм), ўқув кўлланма.
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1, 2 М., Физмат изд. 1963.
7. Акивис М.А. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1983.
8. Тимошенко с.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1961.
9. Бегматов А. Тензор ҳисоб элементлари. ТошДУ, 2002. 88 стр.
10. Хамидов А.А., Исанов Ш.Р. Туташ муҳит механикасидан маърузалар. Т.: ТошДУ, 1994.
11. Прокопьев В.П., Нустров В.С., Гасилов Г.Л. Механика сплошной среды в примерах и задачах. Учебное пособие. У.Г.У. Свердловск, 1979 г. Под ред.
12. Xudoynazarov X., Amirqulova F. Deformasiyalanuvchi muhit kinematikasi. Ma'ruzalar matni. – Samarqand: SamDU nashri, 2005.
13. Mase G.T., Smelser R.E, Mase G.E. Continuum mechanics for engineers. Third edition. CRC press LLC. 1999.

Internet saytlari

1. <http://www.edu.uz> – ta'lim sayti.
2. <http://www.edu.ru> – ta'lim sayti.
3. <http://www.intuit.ru> – masofaviy ta'lim sayti.
4. <http://www.exponenta.ru> – ta'lim sayti.
5. <http://www.eqworld.ru> – adabiyotlarning elektron varianti.
6. <http://ru.wikipedia.org> – erkin ensiklopediya «Vikipediya».
7. <http://www.twirpx.com> – adabiyotlarning elektron varianti.
8. <http://www.ziynet.uz> - adabiyotlarning elektron variantlari