

BOB 7

CHIZIQLI ALMASHTIRISHLAR

7.1 Chiziqli almashtirishlar va ularning matrisalari

Ushbu mavzuda biz chiziqli fazoda aniqlangan akslantirishlar ichida muhim o'rin egallaydigan chiziqli almashtirish tushunchasini kiritamiz.

7.1.1-ta'rif. *n -o'lchamli V fazoda aniqlangan $A : V \rightarrow V$ akslantirish uchun*

$$1) A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2);$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

shartlar bajarilsa, u holda A akslantirish chiziqli almashtirish yoki chiziqli operator deb ataladi.

Odatda A chiziqli almashtirishning qiymati $A(x)$ o'rniga Ax yoziladi.

7.1.1-misol.

a) *Uch o'lchamli $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosida vektorni koordinata boshidan o'tadigan biror o'q atrofida burishdan iborat bo'lgan almashtirishni qaraymiz. Bunda har bir x vektorga uni burishdan so'ng hosil bo'lgan Ax vektorni mos qo'yamiz. Bu moslik 1) va 2) shartlarni qanoatlantirishini tekshirish qiyin emas.*

Masalan, a) shartni tekshirib ko'raylik: $A(x_1 + x_2)$ ifoda avval x_1 hamda x_2 vektorlarning qo'shilishini, so'ngra hosil bo'lgan vektorning burilishini bildiradi. $Ax_1 + Ax_2$ esa avval x_1 hamda x_2 vektorlarning burilishini, so'ngra ularning qo'shilishini bildiradi. O'z-o'zidan ravshanki, ikkala holda ham natija bir xil bo'ladi. Demak, A akslantirish chiziqli almashtirish bo'ladi.

b) Bizga $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosi va uning koordinatalar boshidan o'tuvchi biror tekisligi bo'lgan V_1 qism fazosi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^3$ vektorga uning bu tekislikdagi proeksiyasini mos qo'yamiz. Bu moslik ham chiziqli almashtirish bo'ladi.

c) $[0, 1]$ segmentda $C[0, 1]$ uzluksiz funksiyalar fazosini qaraylik. Bu fazoda aniqlangan $Af(t) = \int_0^t f(s)ds$ akslantirish chiziqli almashtirish bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} A(f_1(t) + f_2(t)) &= \int_0^t [f_1(s) + f_2(s)]ds = \\ &= \int_0^t f_1(s)ds + \int_0^t f_2(s)ds = Af_1(t) + Af_2(t), \\ A(\lambda f(t)) &= \int_0^t \lambda f(s)ds = \lambda \int_0^t f(s)ds = \lambda Af(t). \end{aligned}$$

Endi chiziqli almashtirishlar ichida alohida o'ringa ega bo'lgan quyidagi 2 ta sodda almashtirishlarni keltiramiz. Ixtiyoriy vektorga shu vektorning o'zini mos qo'yuvchi E almashtirish birlik almashtirish deyiladi, ya'ni

$$Ex = x.$$

Ixtiyoriy x vektorga nol vektorni mos qo'yuvchi Θ almashtirish nol almashtirish deyiladi, ya'ni

$$\Theta(x) = 0.$$

Odatda nol almashtirishni yozishda Θ o'rniga shunchaki 0 belgilashdan foydalaniladi.

Bizga n -o'lchamli V chiziqli fazoning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisi va ushbu chiziqli fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo'lsin.

7.1.1-tasdiq. Berilgan $g_1, g_2, \dots, g_n$ vektorlar uchun

$$Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, \dots, Ae_n = g_n$$

shartni qanoatlantiruvchi A chiziqli almashtirish mavjud va yagona.

Isbot. Dastlab, A chiziqli almashtirish $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

vektor uchun

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \dots + \xi_n Ae_n$$

ekanligidan Ax vektor $g_1, g_2, \dots, g_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanishi kelib chiqadi.

Endi har qanday $g_1, g_2, \dots, g_n$ vektorlar uchun $Ae_i = g_i$ tenglikni qanoatlantiradigan A chiziqli almashtirish mavjudligini ko'rsatamiz.

Buning uchun ixtiyoriy $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ vektorga $\xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \dots + \xi_n g_n$ vektorni mos qo'yamiz. Ixtiyoriy x vektor e_i bazis vektorlar orqali bir qiymatli ifodalanganligi uchun, unga muayyan bir Ax vektor mos qo'yiladi. Bunday aniqlangan akslantirish chiziqli almashtirish ekanligini tekshirish qiyin emas. $\square$

Chiziqli almashtirishlar va matritsalar orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Yuqoridagi tasdiqqa ko'ra ixtiyoriy $g_1, g_2, \dots, g_n$ vektorlar uchun $Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, \dots, Ae_n = g_n$ shartni qanoatlantiruvchi chiziqli almashtirish yagona ravishda aniqlanishiga ega bo'ldik. Ushbu g_j vektorlarning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi koordinatalarini $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ orqali belgilaylik, ya'ni

$$g_j = Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i.$$

Natijada a_{ij} koeffitsientlar orqali (a_{ij}) matritsani hosil qilamiz. Hosil qilingan matritsa A chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsasi deb aytiladi.

Shunday qilib, berilgan $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisda har bir A chiziqli almashtirishga qandaydir $(a_{i,j})$ matritsa mos qo'yiladi. Demak, chiziqli almashtirishlarni matritsalar yordamida tasvirlash mumkin. Lekin ushbu matritsa bazisga bog'liq ekanligini, bazis o'zgarganda esa matritsaning ham o'zgarishini ta'kidlab o'tish joiz.

7.1.2-misol. *Aytaylik, $V = \mathbb{R}^3$ uch o'lchamli fazoda A chiziqli almashtirish sifatida x vektorni OXY tekisligiga proeksiyalashdan iborat bo'lgan akslantirish berilgan bo'lsin. Bazis sifatida koordinatalar o'qlari bo'yicha yo'nalgan birlik e_1, e_2, e_3 vektorlarni olamiz. U holda*

$$Ae_1 = e_1, \quad Ae_2 = e_2, \quad Ae_3 = 0,$$

ya'ni bu bazisda A almashtirishning matritsasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi chiziqli almashtirishlar ustida amallarni aniqlaymiz. Chiziqli almashtirishlar ustida qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish amallarini aniqlash mumkin.

7.1.2-ta'rif. *A va B chiziqli almashtirishlarning yig'indisi deb, x vektorga $Ax + Bx$ vektorni mos qo'yuvchi C almashtirishga aytiladi. Boshqacha aytganda, $C = A + B$ ifoda har qanday x uchun $Cx = Ax + Bx$ ekanligini bildiradi.*

Aytaylik, A va B chiziqli almashtirishlar $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisda mos ravishda $(a_{i,j})$ va $(b_{i,j})$ matritsalariga ega bo'lsin. U holda $C = A + B$ chiziqli almashtirishning matritsasini topish uchun $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis elementlarning ushbu almashtirishdagi qiymatlarini qaraymiz, ya'ni

$$Ce_j = Ae_j + Be_j = \sum_{i=1}^n (a_{i,j} + b_{i,j})e_i.$$

Bu esa C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi $(c_{i,j})$ matritsasi uchun $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ tenglik bajarilishini anglatadi. Shunday qilib, A va B chiziqli almashtirishlar yig'indisining berilgan bazisdagi matritsasi chiziqli almashtirishlarning shu bazisdagi matritsalarini yig'indisiga teng ekanligini ko'rsatdik.

7.1.3-ta'rif. A chiziqli almashtirishning λ soniga ko'paytmasi deb, x vektorga λAx vektorni mos qo'yuvchi $C = \lambda A$ almashtirishga aytiladi, ya'ni $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

Ushbu $C = \lambda A$ chiziqli almashtirishning berilgan bazisdagi matritsasi $\lambda \cdot (a_{i,j})$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

7.1.4-ta'rif. A va B almashtirishlarning ko'paytmasi deb, avval B almashtirishni so'ngra esa A almashtirishni ketma-ket bajarish natijasida hosil bo'ladigan C almashtirishga aytiladi, ya'ni $C = AB$ ifoda x vektor uchun $Cx = A(Bx)$ ekanligini bildiradi.

Dastlab, chiziqli almashtirishlarning ko'paytmasi yana chiziqli almashtirish bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} C(x_1 + x_2) &= A(B(x_1 + x_2)) = A(Bx_1 + Bx_2) = \\ &= A(Bx_1) + A(Bx_2) = Cx_1 + Cx_2, \\ C(\lambda x) &= A(B(\lambda x)) = A(\lambda Bx) = \lambda A(Bx) = \lambda Cx. \end{aligned}$$

Endi chiziqli almashtirishlar yig'indisining matritsasini aniqlaganimiz kabi ko'paytmaning ham matritsasini aniqlaymiz. A va B chiziqli almashtirishlar matritsalarini $(a_{i,j})$ va $(b_{i,j})$ ekanligidan foydalanib,

$$\begin{aligned} Ce_j &= A(Be_j) = A\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}e_k\right) = \sum_{k=1}^n b_{k,j}Ae_k = \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,j} \sum_{i=1}^n a_{i,k}e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)e_i \end{aligned}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan

$$C e_j = \sum_{i=1}^n c_{i,j} e_i$$

ekanligidan

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $(c_{i,j})$ matritsaning $c_{i,j}$ elementlari $(a_{i,j})$ matritsaning i -qator elementlari bilan $(b_{i,j})$ matritsaning j -ustunining mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. Shunday qilib, $C = AB$ chiziqli almashtirishning $(c_{i,j})$ matritsasi A va B chiziqli almashtirishlar $(a_{i,j})$ va $(b_{i,j})$ matritsalarini ko'paytmasidan iborat ekanligini hosil qildik.

Xulosa o'rnida shuni aytish mumkinki, chiziqli almashtirishlarni qo'shish va ko'paytirish amallari matritsalarini qo'shish va ko'paytirish kabi amalga oshirilib, quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) $A(BC) = (AB)C$;
- 4) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$.

Aytaylik, ixtiyoriy A chiziqli almashtirish va E birlik almashtirish berilgan bo'lsin, u holda

$$AE = EA = A$$

ekanligini osongina tekshirish mumkin.

A almashtirishning darajasini odatdagidek

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \dots$$

kabi aniqlaymiz. Sonlar uchun o'rinli bo'lganidek, $A^0 = E$ deb faraz qilamiz.

Yuqoridagilardan foydalangan holda A chiziqli almashtirishdan tuzilgan ko'phadni ham qarash mumkin, ya'ni ixtiyoriy

$$P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$$

ko'phad uchun $P(A)$ deb

$$P(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m E$$

formula bilan aniqlangan chiziqli almashtirishni tushunamiz.

Endi teskari almashtirish tushunchasini kiritamiz.

7.1.5-ta'rif. Agar $AB = BA = E$ bo'lsa, u holda B almashtirish A almashtirishga teskari almashtirish deyiladi, bu yerda E birlik almashtirishdir.

Berilgan A almashtirishga teskari almashtirish A^{-1} kabi belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, $A^{-1}(Ax) = x$. Har qanday almashtirish uchun teskari almashtirish mavjud bo'lavermaydi. Masalan, uch o'lchamli fazoni OXY tekisligiga proeksiyalash almashtirishi teskari almashtirishga ega emas. Teskari almashtirish tushunchasi bilan teskari matritsa tushunchasi bog'liqdir. Ma'lumki, berilgan matritsa teskarilanuvchi bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli.

Berilgan bazisda matritsalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida barcha amallarni saqlovchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lganligi uchun, A almashtirishning berilgan bazisdagi matritsasining determinanti noldan farqli bo'lgandagina bu almashtirish teskarilanuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Teskarisi mavjud bo'lgan almashtirish *rosmas almashtirish* deyiladi.

Ixtiyoriy A chiziqli almashtirish uchun almashtirishning yadrosi va obrazi deb ataluvchi fazolarni aniqlaymiz.

7.1.6-ta'rif. A almashtirishning obrazi (aksi) deb Ax ko'rinishidagi vektorlar jamlanmasiga aytiladi, bu yerda $x \in V$.

Almashtirishning obrazi $\text{Im}(A)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\text{Im}(A) = \{y \in V \mid \exists x \in V, Ax = y\}.$$

Ko'rinib turibdiki, teskarilantiruvchi almashtirishning obrazi butun fazo bilan ustma-ust tushadi.

7.1.2-tasdiq. *Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning obrazi qism fazo tashkil qiladi.*

Isbot. Aytaylik, $y_1, y_2 \in \text{Im}(A)$ bo'lsin, u holda $x_1, x_2 \in V$ vektorlar uchun $y_1 = Ax_1$ va $y_2 = Ax_2$. Ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda y_1 = \lambda Ax_1 = A(\lambda x_1),$$

$$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$$

ekanligidan $\lambda y_1 \in \text{Im}(A)$ va $y_1 + y_2 \in \text{Im}(A)$ kelib chiqadi. $\square$

Mazkur qism fazoning o'lchami A almashtirishning rangi deyiladi.

7.1.7-ta'rif. A almashtirishning yadrosi deb $Ax = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi vektorlar to'plamiga aytiladi va $\text{Ker}(A)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\text{Ker}(A) = \{x \in V \mid Ax = 0\}.$$

7.1.3-tasdiq. *Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning yadrosi qism fazo tashkil qiladi.*

Isbot. Haqiqatan ham, $Ax_1 = 0$ va $Ax_2 = 0$ bo'lsa, u holda

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0.$$

Xuddi shunga o'xshab, agar $Ax = 0$ bo'lsa, $A\lambda x = \lambda Ax = 0$, ya'ni $\text{Ker}(A)$ qism fazo. $\square$

Xosmas almashtirishning yadrosi faqat noldan iborat bo'lishini ta'kidlab o'tish zarur.

7.1.3-misol. Bizga darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi $V = P_n(\mathbb{R})$ da differensiallash operatori bo'lgan A almashtirish berilgan bo'lsin, ya'ni

$$A(p(x)) = p'(x).$$

Bu almashtirishning yadrosi o'zgarmas sonlardan, obrazi esa, darajasi $n - 1$ dan oshmaydigan ko'phadlardan iborat bo'ladi. Ularning o'lchamlari esa, mos ravishda birga va n ga teng.

7.1.4-tasdiq. *n -o'lchamli V chiziqli fazodagi ixtiyoriy A almashtirishning obrazi va yadrosi o'lchamlari yig'indisi butun fazo o'lchamiga teng, ya'ni*

$$\dim(\operatorname{Im}(A)) + \dim(\operatorname{Ker}(A)) = n.$$

Isbot. Aytaylik, A almashtirish yadrosining o'lchami k ga teng bo'lsin. U holda $\operatorname{Ker}(A)$ da $e_1, e_2, \dots, e_k$ bazis tanlab, uni butun fazodagi $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ bazisgacha to'ldiramiz.

Agar $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ vektorlarni qarasak, bu vektorlar almashtirishning obraziga tegishli bo'lib, ular $\operatorname{Im}(A)$ da bazis tashkil qiladi.

Darhaqiqat, ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im}(A)$ vektor uchun, shunday x vektor topilib, $y = Ax$ bo'ladi. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar V fazoda bazis bo'lganligi sababli $x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n$. Lekin, $Ae_1 = \dots = Ae_k = 0$ bo'lgani uchun $y = Ax = \gamma_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \gamma_n Ae_n$. Ya'ni ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im}(A)$ vektor $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi $n - k$ ta $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, ular chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lgan α_j sonlar topilib,

$$\alpha_1 Ae_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$$

bo'ladi. Endi $x = \alpha_1 e_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} e_n$ vektorni qarasak,

$$Ax = A(\alpha_1 e_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} e_n) = \alpha_1 Ae_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$$

ekanligidan, $x \in \operatorname{Ker}(A)$ kelib chiqadi. Bu esa ziddiyat, chunki bir tomondan x yadroning elementi sifatida $e_1, e_2, \dots, e_k$ bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, ikkinchi tomondan esa, $e_{k+1}, \dots, e_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lib qoldi. Bu esa, x vektorning bazis vektorlar yordamida berilishiga zid. Bundan esa, $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ vektorlar chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\operatorname{Im}(A) = n - k$, ya'ni chiziqli almashtirish obrazining o'lchami butun fazo o'lchami bilan chiziqli almashtirish yadrosi o'lchami ayirmasiga teng. $\square$

Biz $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis elementlarini $f_1, f_2, \dots, f_n$ elementlarga mos ravishda o'tkazuvchi chiziqli almashtirishni qaraymiz.

7.1.1-tasdiqqa ko'ra bunday almashtirish mavjud va yagona bo'lib, ushbu chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsasi $(c_{i,j})$ matritsa bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, bu chiziqli almashtirish bazis vektorlarni bazis vektorlarga o'tkazganligi uchun, u teskarilantiruvchi almashtirish bo'ladi. Demak, ushbu chiziqli almashtirishni C orqali belgilasak, $Ce_i = f_i$ bo'lib, uning matritsasi $C = (c_{i,j})$ bo'ladi.

Berilgan (7.2) formulaning o'ng va chap tomonlarida f_k elementni Ce_k bilan hamda f_i elementni Ce_i bilan almashtirsak,

$$ACe_k = \sum_{i=1}^n b_{ik}Ce_i$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikning ikkala tomoniga C^{-1} almashtirishni tatbiq qilib,

$$C^{-1}ACe_k = C^{-1} \left(\sum_{i=1}^n b_{ik}Ce_i \right) = \sum_{i=1}^n b_{ik}C^{-1}(Ce_i) = \sum_{i=1}^n b_{ik}e_i$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikdan esa $(b_{i,j})$ matritsa $C^{-1}AC$ almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsasi ekanligi ko'rinib turibdi. Almashtirishlarni ko'paytirganda ularning berilgan $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsalarini ko'paytirilishidan $B = C^{-1}AC$ tenglik kelib chiqadi. $\square$

Ta'kidlash joizki, agar A va B matritsalar uchun xosmas C matritsa topilib, $A = C^{-1}BC$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda ushbu A va B matritsalar *o'xshash matritsalar* deyiladi.

7.1.4-misol. Agar A chiziqli almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasi $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ va B chiziqli almashtirishning $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ bazisdagi matritsasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, u holda $A + B$ chiziqli almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasini toping.

Yechish. Dastlab, B chiziqli almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasini topib olamiz. Agar B chiziqli almashtirishning e_1, e_2 va f_1, f_2 bazisdagi matritsalarini mos ravishda B_e va B_f kabi belgilasak, u holda masala shartiga ko'ra $B_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ bo'ladi. Berilgan e_1, e_2 bazisdan f_1, f_2 bazisga o'tish matritsasi $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lib, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ekanligidan $C^{-1}B_eC = B_f$ tenglikni olamiz, ya'ni

$$B_e = CB_fC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Demak, $A + B$ chiziqli almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

7.1.2 Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

- Quyidagi akslantirishlardan qaysilari $V = \mathbb{R}^3$ fazoda chiziqli almashtirish bo'ladi:
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$;
 - $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.
- Quyidagi akslantirishlardan qaysilari mos ravishda berilgan V vektor fazoda chiziqli almashtirish bo'ladi:
 - V chiziqli fazo, $Ax = a$, bu yerda a -fiksirlangan vektor;
 - V chiziqli fazo, $Ax = x + a$, bu yerda a -fiksirlangan vektor;

- c) V chiziqli fazo, $Ax = \alpha x$ bu yerda α -fiksirlangan son;
 - d) V Yevklid fazosi, $Ax = (x, a)b$, bu yerda a, b -fiksirlangan vektorlar;
 - e) V Yevklid fazosi, $Ax = (a, x)x$, bu yerda a -fiksirlangan vektor;
 - f) $V = P_n(x)$, $A(f(x)) = f(ax + b)$, bu yerda a, b -fiksirlangan sonlar;
 - g) $V = P_n(x)$, $A(f(x)) = f(x + 1) - f(x)$.
3. Bir o'lchamli vektor fazoda barcha chiziqli almashtirishlar $Ax = \alpha x$ ko'rinishida bo'lishini isbotlang, bu yerda α -qandaydir skalyar son.
4. Quyidagi chiziqli almashtirishning berilgan bazisdagi matritsalarini toping:
- a) $V = \mathbb{R}^2$ fazoda A chiziqli almashtirish berilgan vektorni α burchakka burishdan iborat, bu yerda bazis $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, ya'ni birlik vektorlar;
 - b) $V = \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$, bu yerda bazis $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, ya'ni birlik vektorlar;
 - c) $V = \mathbb{R}^3$ fazoda A chiziqli almashtirish berilgan vektorni OY o'qiga proeksiyalashdan iborat, bu yerda bazis birlik vektorlar;
 - d) $V = \mathbb{R}^3$ fazoda A chiziqli almashtirish berilgan vektorni $x_1 = x_2 = x_3$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq atrofida $\frac{2\pi}{3}$ burchakka burishdan iborat, bu yerda bazis birlik vektorlar;
 - e) $V = \mathbb{R}^3$ Yevklid fazosida $Ax = (x, a)a$, bu yerda bazis birlik vektorlar va $a = (1, 0, -2)$;
 - f) Uch o'lchamli Yevklid fazosida $Ax = (x, a)a$, bu yerda $a = (1, 2, 3)$ va bazis $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$;
 - g) $P_n(x)$ ko'phadlar fazosida differensiyallash operatori, bu yerda bazis $\{1, x, \dots, x^n\}$;
 - h) $P_n(x)$ ko'phadlar fazosida differensiyallash operatori, bu yerda bazis $\{x^n, x^{n-1}, \dots, 1\}$.

5. Barcha ikkinchi tartibli matritsalar fazosida ikkinchi tartibli kvadrat matritsalarini berilgan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matritsaga $a)$ chapdan, $b)$ o'ngdan ko'paytirish chiziqli almashtirish bo'lishini ko'rsating va bu almashtirishning quyidagi bazisda matritsasini toping:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Uch o'lchamli fazoda a_1, a_2, a_3 vektorlarni mos ravishda b_1, b_2, b_3 vektorlarga o'tkazuvchi yagona chiziqli almashtirish mavjud ekanligini isbotlang va bu chiziqli almashtirishni e_1, e_2, e_3 birlik vektorlardan iborat bazisdagi matritsasini toping:

- a) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (0, 1, 0), a_3 = (1, 1, 0),$
 $b_1 = (0, 1, 0), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (1, 0, 2);$
- b) $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (0, 1, 2), a_3 = (1, 0, 0),$
 $b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (1, 1, -1), b_3 = (2, 1, 2);$
- c) $a_1 = (2, 1, 3), a_2 = (4, 1, 5), a_3 = (3, 1, 2),$
 $b_1 = (1, 2, -1), b_2 = (4, 5, -2), b_3 = (1, -1, 1);$
- d) $a_1 = (1, 1, 3), a_2 = (2, 1, 2), a_3 = (3, 0, 2),$
 $b_1 = (2, 3, -1), b_2 = (2, 0, -3), b_3 = (1, 3, -4).$

7. n -o'lchamli fazoda $a_1, a_2, \dots, a_n$ chiziqli erkli vektorlarni mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorlarga o'tkazuvchi C chiziqli almashtirish berilgan. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorlarning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi koordinatalaridan iborat matritsalar A va B bo'lsa, u holda C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsasi uchun $C = BA^{-1}$ ekanligini ko'rsating.

8. V fazoda berilgan chiziqli almashtirishning e_1, e_2, e_3, e_4 bazisda matritsasi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, ushbu chiziqli almashtirishning quyidagi bazisdagi matritsasini toping:

a) e_2, e_1, e_3, e_4 ;

b) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

9. Chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi matritsasi ikkita e_i, e_j vektorlarning o'rnini almashtirilsa qanday o'zgarishini aniqlang.

10. $P_2(x)$ fazoda berilgan chiziqli almashtirishning $1, x, x^2$ bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, ushbu chiziqli almashtirishning $3x^2 + 1, x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3$ bazisdagi matritsasini toping.

11. $\mathbb{R}^3$ fazoda berilgan chiziqli almashtirishning $(8, -6, 7), (9, -3, 7), (-16, 7, -13)$ bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & -18 \\ 1 & 22 & -25 \\ -1 & 20 & -22 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, ushbu chiziqli almashtirishning $(1, -2, 1), (3, -1, 2), (2, 1, 2)$ bazisdagi matritsasini toping.

12. Agar A chiziqli almashtirishning e_1, e_2, e_3 bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, ushbu chiziqli almashtirishning

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

bazisdagi matritsasini toping.

13. Agar A va B chiziqli almashtirishlarning mos ravishda $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ va $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ bazislardagi matritsalar

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, u holda $A + B$ chiziqli almashtirishning b_1, b_2 bazisdagi matritsasini toping.

14. Agar A va B chiziqli almashtirishlarning mos ravishda $a_1 = -3e_1 + 7e_2$, $a_2 = e_1 - 2e_2$ va $b_1 = 6e_1 - 7e_2$, $b_2 = -5e_1 + 6e_2$ bazislardagi matritsalar

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

bo'lsa, u holda AB chiziqli almashtirishning e_1, e_2 bazisdagi matritsasini toping.

15. Matritsasi quyidagi ko'rinishda berilgan chiziqli almashtirishlarning yadrosini toping:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \\ \text{c) } A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; & \text{d) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.2 Chiziqli almashtirishning xos son va xos vektorlari

Agar V chiziqli fazoda biror chiziqli yoki bichiziqli funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya faqat V fazoning biror V_1 qism fazosidagina aniqlangan bo'lsa, u holda biz uni V_1 fazoda berilgan deb hisoblab ketish mumkin, ya'ni V fazo o'rniga V_1 qism fazoni qarash mumkin.

Chiziqli almashtirishlarda esa holat butunlay boshqacha bo'ladi. Chunki, umuman olganda chiziqli almashtirish V_1 qism fazoning biror

elementini V_1 fazoga tegishli bo'lmagan vektorga o'tkazib yuborishi ham mumkin. Bunday holatda biz berilgan chiziqli almashtirish V_1 qism fazoda aniqlangan deb ayta olmaymiz.

7.2.1-ta'rif. *Bizga V chiziqli fazo va A chiziqli almashtirish berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in V_1$ element uchun $Ax \in V_1$ shart bajarilsa, u holda V_1 qism fazo A chiziqli almashtirishga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.*

Ta'rifdan ko'rinadiki, A chiziqli almashtirishni biror qism fazoda qarashimiz uchun u invariant qism fazo bo'lishi kerak.

7.2.1-misol. a) *Faqat noldangina iborat bo'lgan qism fazo va butun fazo invariant qism fazolardir. Bu qism fazolar trivial invariant qism fazolar deyiladi.*

b) $\mathbb{R}^3$ uch o'lchamli fazoda vektorni noldan o'tgan biror o'q atrofida burishdan iborat bo'lgan chiziqli almashtirishni qaraylik. Bu holda aylanish o'qi bir o'lchamli invariant qism fazo, koordinatalar boshidan o'tib, bu o'qqa ortogonal bo'lgan tekislik esa ikki o'lchamli invariant qism fazo bo'ladi.

c) $\mathbb{R}^2$ tekislikda A chiziqli almashtirish tekislikni X o'q bo'yicha λ_1 marta, Y o'q bo'yicha λ_2 marta cho'zishdan iborat bo'lsin. Boshqacha aytganda, $z = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ uchun $Az = \lambda_1 \xi_1 e_1 + \lambda_2 \xi_2 e_2$, bu yerda e_1, e_2 o'qlardagi birlik vektorlar. Bu holda X hamda Y koordinata o'qlari bir o'lchamli invariant qism fazolar bo'ladi. Agar $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo'lsa, u holda koordinatalar boshidan o'tgan ixtiyoriy to'g'ri chiziqli invariant qism fazo bo'ladi.

Bizga V fazo va uning bir o'lchamli V_1 qism fazosi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, V_1 fazo λx ko'rinishidagi elementlardan tashkil topib, u invariant qism fazo bo'lishi uchun Ax vektor ham V_1 fazoda yotishi, ya'ni

$$Ax = \lambda x$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lsa, x xos vektor mavjud bo'ladi.

Shunday qilib, teoremani isbot qilish uchun (7.3) sistemani qanoatlantiradigan λ sonini va bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmaydigan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sonlarning mavjud ekanligini ko'rsatish kerak.

Ma'lumki, bir jinsli tenglamalar sistemaning noldan farqli yechimi mavjud bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, demak

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.4)$$

Ushbu determinantdan biz λ ga nisbatan n -darajali tenglama hosil qilamiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, kompleks sonlar maydonida har qanday ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'lganligi uchun, bu tenglama ham λ_0 ildizga ega.

Ushbu λ_0 ildizni (7.3) sistemaga olib borib qo'ysak, hosil bo'lgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'ladi. Ushbu noldan farqli yechimni $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}$ deb olsak,

$$x^0 = \xi_1^{(0)} e_1 + \xi_2^{(0)} e_2 + \dots + \xi_n^{(0)} e_n$$

xos vektorni va unga mos keluvchi λ_0 xos sonni hosil qilamiz, chunki $Ax^0 = \lambda_0 x^0$ tenglik o'rinli bo'ladi. $\square$

Eslatma. Agar A chiziqli almashtirishni butun fazoda emas, balki uning biror invariant qism fazosida qaralsa ham teoremaning isboti o'z kuchini saqlaydi. Demak, ixtiyoriy invariant qism fazoda ham A chiziqli almashtirish kamida bitta xos vektorga ega bo'ladi.

Yuqoridagi (7.4) tenglama A chiziqli almashtirish matritsasining *xarakteristik tenglamasi*, uning chap tomonida hosil bo'ladigan ko'phad esa *xarakteristik ko'phad* deyiladi.

Teoremani isbotlash jarayonida biz xarakteristik ko'phadning ildizlari A chiziqli almashtirishning xos sonlari ekanligini, va aksincha, A chiziqli

almashtirishning xos sonlari xarakteristik tenglamaning ildizlari ekanligini ko'rsatdik.

Endi xarakteristik ko'phad bazisning tanlab olinishiga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Yuqorida A almashtirishning xarakteristik ko'phadini $A - \lambda E$ matritsaning determinanti sifatida aniqladik. Bazis o'zgarganda chiziqli almashtirishning A matritsasi $C^{-1}AC$ ko'rinishni oladi, bu yerda C eski bazisdan yangi bazisga o'tish matritsasi. Yangi bazisda xarakteristik ko'phad $C^{-1}AC - \lambda E$ matritsaning determinantiga teng bo'ladi. Ammo

$$\begin{aligned} |C^{-1}AC - \lambda E| &= |C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A - \lambda E)C| = \\ &= |C^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |C| = |A - \lambda E| : |C^{-1}| \cdot |C| = |A - \lambda E| \end{aligned}$$

tenglikdan bazis o'zgarganda xarakteristik ko'phad o'zgarmasligi kelib chiqadi.

Demak, kelgusida chiziqli almashtirish matritsasining xarakteristik ko'phadi emas, balki chiziqli almashtirishning xarakteristik ko'phadi deb yuritishimiz mumkin.

n -o'lchamli chiziqli fazoda berilgan chiziqli almashtirishlar orasida n ta chiziqli erkli xos vektorga ega bo'lgan chiziqli almashtirishlar ma'lum ma'noda eng sodda chiziqli almashtirishlar hisoblanadi. Agar A shunday chiziqli almashtirish bo'lsa, u holda $e_1, e_2, \dots, e_n$ chiziqli erkli xos vektorlarni V fazoning bazisi deb qabul qilish mumkin. U holda

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, Ae_2 = \lambda_2 e_2, \dots, Ae_n = \lambda_n e_n$$

ekanligidan A almashtirishning bu bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ko'rinishga keladi. Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

7.2.2-teorema. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorga ega bo'lsa, u holda A almashtirish matritsasini diagonal shaklga keltirish mumkin. Aksincha, agar chiziqli almashtirishning matritsasi biror bazisda diagonal shaklda bo'lsa, u holda bu bazisning vektorlari xos vektorlardan iboratdir.

Quyidagi tasdiqda turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz.

7.2.1-tasdiq. A chiziqli almashtirishning turli xil $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ xos sonlariga mos keluvchi $e_1, e_2, \dots, e_k$ xos vektorlar chiziqli erklidir.

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun k ga nisbatan induksiya usulidan foydalanamiz. Tasdiq $k = 1$ uchun o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas. Endi ushbu tasdiqni $k - 1$ ta xos vektor uchun o'rinli deb, uni k ta xos vektor uchun isbot qilamiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0 \quad (7.5)$$

tenglik $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda o'rinli bo'lsin. Aytaylik, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglikning har ikkala tomoniga A almashtirishni tadbiq qilamiz:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k) = 0,$$

ya'ni

$$\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k e_k = 0. \quad (7.6)$$

Yuqoridagi (7.5) tenglikni λ_k ga ko'paytirib (7.6) tenglikdan ayirsak, ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0.$$

Induksiya faraziga ko'ra, $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ vektorlarning chiziqli erkliligi va $\lambda_i \neq \lambda_j$ ekanligidan biz $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa $\alpha_1 \neq 0$ degan farazga zid. Demak $e_1, e_2, \dots, e_k$ vektorlar chiziqli erkli. $\square$

Yuqoridagi tasdiqdan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

7.2.1-natija. Agar A chiziqli almashtirishning xarakteristik ko'phadi n ta har xil ildizga ega bo'lsa, u holda A almashtirish matritsasi diagonal shaklga keltirish mumkin.

Haqiqatan ham, chiziqli almashtirish xarakteristik tenglamasining har bir λ_k ildiziga kamida bitta xos vektor to'g'ri keladi. Bu vektorlarga mos bo'lgan xos sonlar turli bo'lganligi uchun, yuqoridagi tasdiqqa muvofiq n ta chiziqli erkli $e_1, e_2, \dots, e_n$ xos vektorlarga ega bo'lamiz. Bu vektorlarni bazis sifatida olsak, A almashtirishning matritsasi diagonal ko'rinishga keladi.

Agar xarakteristik ko'phad karrali ildizlarga ega bo'lsa, u holda chiziqli erkli xos vektorlarning soni n dan kichik bo'lishi mumkin.

7.2.2-misol. Darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosida har bir ko'phadga uning hosilasini mos qo'yuvchi A almashtirish faqat bitta $\lambda = 0$ xos songa va bitta $p(t) = \text{const}$ xos vektorga ega.

Haqiqatan ham, darajasi $k > 0$ bo'lgan har qanday $p(t)$ ko'phad uchun $p'(t)$ ko'phadning darajasi $k - 1$ ga teng va shuning uchun $p'(t) = \lambda p(t)$ tenglik faqat $\lambda = 0$ va $p(t) = \text{const}$ bo'lgan holdagina bajariladi.

7.2.3-misol. Matritsasi quyidagicha bo'lgan chiziqli almashtirishning xos son va xos vektorlarini toping: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Yechish. Dastlab, ushbu chiziqli almashtirishning xos sonlarini topib olamiz:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & 0 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 8 & -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)^2(3 - \lambda).$$

Demak, chiziqli almashtirishning xos sonlari $\lambda = 1$ va $\lambda = 3$ sonlaridan iborat. Endi ushbu xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlarni topamiz.